

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

# PROBLEMI DI TAGLIO

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
STEFANO FRANCAVIGLIA

Presentata da:  
GIACOMO SARAGONI

VI Sessione - 26 marzo 2021  
Anno Accademico 2019/2020

*alla mia famiglia*

# Indice

<b>1</b>	<b>Teorema di Stone-Tukey</b>	<b>6</b>
1.1	Teorema di Stone-Tukey unidimensionale . . . . .	6
1.2	Teorema dei Pancakes . . . . .	9
1.3	Teorema del Panino al Prosciutto . . . . .	14
1.3.1	Applicazione: il problema della collana . . . . .	17
1.4	Teorema di Stone-Tukey: il caso n-dimensionale . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Problemi di taglio, ma con coltelli più interessanti</b>	<b>23</b>
2.1	Teorema di Stone-Tukey polinomiale . . . . .	23
<b>3</b>	<b>Tagliamo Spezie: Il caso discreto</b>	<b>25</b>
3.1	Teorema di Stone-Tukey discreto . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Problemi di taglio discreti, ma con coltelli più interessanti</b>	<b>31</b>
4.1	Teorema di Stone-Tukey discreto polinomiale . . . . .	31
<b>A</b>		<b>33</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>36</b>

# Elenco delle figure

1	.....	4
1.1	.....	6
1.2	.....	9
1.3	.....	10
1.4	Esempio grafico del teorema. ....	12
1.5	.....	13
1.6	Problema della collana: dal caso discreto al caso continuo. ....	18
3.1	.....	28
3.2	Esempio per 3 insiemi di cardinalità 5 . . . . .	29

# Introduzione

Credo che tutti almeno una volta nella vita si siano trovati nella situazione di dover dividere a metà un panino con un amico.

Vi sarete chiesti se le due parti fossero uguali, e probabilmente avrete litigato per quella che sembrava essere più grossa. Ma *è veramente possibile tagliare un panino* (composto da una fetta di pane, prosciutto ed una seconda fetta di pane) *esattamente a metà con un unico taglio dritto di coltello?*

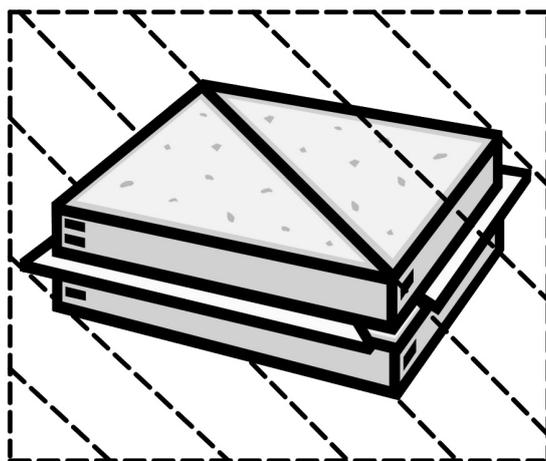


Figura 1

Si dà il caso che esista un teorema in grado di darci una risposta, e si chiama Teorema di Stone-Tukey, la cui versione in 3 dimensioni è chiamata, appunto, Teorema del Panino col Prosciutto.

Il Teorema di Stone-Tukey asserisce che, per ogni  $n$  intero positivo, dati  $n$  oggetti limitati e misurabili nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale, esiste sempre un iperpiano di dimensione  $n - 1$  in grado di bisecare tutti gli  $n$  oggetti contemporaneamente (rispetto alla misura considerata).

Storicamente i primi riferimenti riguardo questo teorema trattano in particolare il caso in

3 dimensioni. A proporre per primo il problema fu Hugo Steinhaus, matematico polacco, in un suo scritto del 1938. Venne successivamente risolto e dimostrato da Stefan Banach, utilizzando il teorema di Borsuk-Ulam.

La versione moderna del teorema, che lo generalizza in  $n$  dimensioni, fu dimostrata nel 1942 da Arthur H. Stone (matematico inglese) e John W. Tukey (matematico americano), da qui il nome del teorema.

Nel primo capitolo della tesi ci concentreremo sul Teorema di Stone-Tukey, in particolare lo analizzeremo in 1, 2 e 3 dimensioni, per poi generalizzarlo ad  $n$ .

Nel secondo capitolo abbandoneremo la restrizione a "tagli dritti" di coltello, e vedremo come questo ci permetterà di tagliare a metà panini con più ingredienti di una singola fetta di prosciutto.

Nel terzo capitolo analizzeremo il Teorema di Stone-Tukey nel caso discreto, e nel quarto, come faremo nel secondo per il caso continuo, abbandoneremo la restrizione a "tagli dritti".

Per la stesura dei risultati si è fatto riferimento principalmente al libro di Czes Kosniowski: *A First Course in Algebraic Topology* [K] e al libro di Jiří Matoušek: *Using The Borsuk – Ulam Theorem* [M3].

# Capitolo 1

## Teorema di Stone-Tukey

Questo primo capitolo è interamente dedicato al teorema di *Stone-Tukey*. In particolare dimostreremo il teorema in 2 e 3 dimensioni, per poi generalizzarlo al caso  $n$ -dimensionale. Il teorema di Stone-Tukey asserisce che

---

*Per ogni  $n$  intero positivo, dati  $(A_i)_{i=1\dots n}$  sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^n$  limitati e misurabili nello spazio euclideo  $n$ -dimensionale, esiste un iperpiano di dimensione  $n - 1$  in grado di bisecare tutti gli  $(A_i)_{i=1\dots n}$  rispetto la loro misura (e.g. area, volume).*

---

Prima di dimostrare il teorema nel caso generale, vediamo come si riduce per  $n = 1, 2, 3$ .

### 1.1 Teorema di Stone-Tukey unidimensionale

**Teorema 1.1.1 (di Stone-Tukey unidimensionale).** per ogni intervallo limitato  $I \subset \mathbb{R}$  esiste un punto  $x \in \mathbb{R}$  che divide a metà  $I$  rispetto la lunghezza.

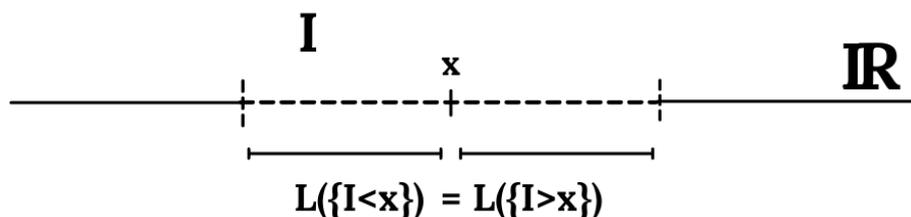


Figura 1.1

Questa versione unidimensionale non è altro che una conseguenza diretta del Teorema del Valor Medio.

**Teorema 1.1.2 (Teorema del Valor Medio).** Per ogni funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (I intervallo di  $\mathbb{R}$ ) continua tale che  $-\infty < f(0)f(1) < 0$ , esiste  $c \in I$  tale che  $f(c) = 0$ .

*Dimostrazione.* L'idea dietro alla dimostrazione è questa: supponiamo per assurdo che una funzione  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le ipotesi del Teorema, non assuma mai il valore 0, e facciamo vedere che si può sempre definire  $\tilde{g} : I \rightarrow S^0$  come  $\tilde{g}(t) = \frac{g(t)}{|g(t)|}$ , funzione continua da un insieme connesso a uno sconnesso, qui l'assurdo.

Vediamo di formalizzare questo ragionamento.

Sia  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua che, come da ipotesi, ha la proprietà che  $f(0)f(1) < 0$  e supponiamo per assurdo che  $f(t) \neq 0 \forall t \in I$ .

Notiamo che tra le ipotesi del teorema non compare il fatto che  $\{0, 1\}$  siano elementi di  $I$ . Perché? Sappiamo che gli intervalli aperti (chiusi) di  $\mathbb{R}$  sono omeomorfi tra loro (si veda A.0.4), dunque se per esempio la nostra funzione  $f$  fosse definita su un intervallo  $I$  che non contiene  $\{0, 1\}$ , basterebbe considerare l'omeomorfismo  $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ , dove  $\tilde{I}$  è un intervallo che contiene  $\{0, 1\}$  e notare che  $f(I) = f \circ \varphi(\tilde{I})$ ; ergo è sempre possibile riparametrizzare  $f$  in modo che  $\{0, 1\}$  appartengano al suo dominio.

Torniamo al teorema.

Definiamo una funzione  $g : I \rightarrow \{\pm 1\} = S^0$ ,  $g(t) = f(t)/(|f(t)|)$  (ciò è possibile, avendo supposto  $f \neq 0$  per ogni  $t \in I$ ).

$g$  è certamente continua, essendo composizione di funzioni continue, e suriettiva (siccome  $f(0)f(1) < 0$ ). Ma  $I$  è connesso, mentre  $S^0$  no. Ciò contraddice il teorema A.0.3 e abbiamo così un assurdo. □

**Osservazione 1.1.3 (dimostrazione del Teorema 1.1.1).** Definiamo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$f(t) = L(\{I < t\}) - L(\{I > t\})$$

Dove  $L(\{I < t\})$  indica la misura di  $I \cap (-\infty, t]$  (nel caso unidimensionale, la misura possiamo vederla come la lunghezza del segmento).

$f$  è continua e limitata, assume valori positivi per un  $t$  abbastanza grande, e valori negativi per un  $t$  abbastanza piccolo, dunque rispetta le ipotesi del Teorema del Valor Medio 1.1.2, che ci garantisce l'esistenza di un punto  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x) = 0$ . Da qui la tesi.

Ora che abbiamo dimostrato il Teorema di Stone-Tukey per  $n = 1$ , vediamo qualche altra utile e interessante conseguenza del Teorema del Valor Medio 1.1.2.

**Corollario 1.1.4 (Teorema del punto fisso).** Sia  $f : I \rightarrow I$  una funzione continua; allora esiste almeno un punto  $c \in I$  tale che  $f(c) = c$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\{1, 0\} \in I$  (l'ipotesi non è restrittiva, come precisato nella dimostrazione del Teorema 1.1.2).

Se  $f(0) = 0$  o  $f(1) = 1$  abbiamo finito.

Supponiamo dunque che  $f(0) > 0$  e  $f(1) < 1$ .

Consideriamo la funzione  $g(t) = f(t) - t$ .  $g$  è continua e soddisfa  $g(0)g(1) < 0$ . Quindi rispetta le ipotesi del Teorema 1.1.2, e di conseguenza  $g(c) = 0$  per un certo  $c \in I$ .

Ciò significa che esiste un certo  $t \in I$  tale che  $f(t) = t$ . □

**Corollario 1.1.5.** Ogni funzione continua da  $S^1$  ad  $\mathbb{R}$  manda almeno una coppia di punti diametralmente opposti su  $S^1$  nello stesso punto in  $\mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Supponiamo che  $f(t) \neq f(-t) \forall t \in S^1$  e consideriamo la funzione  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come  $h(t) = f(t) - f(-t)$ .

Se facciamo vedere che esiste un punto  $c \in S^1$  tale che  $h(c) = 0$  abbiamo finito.

Identifichiamo  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  e definiamo  $e : I \rightarrow S^1$  data come  $e(t) = \exp(2\pi it)$ .

Sia  $h$  che  $e$  sono chiaramente continue, e di conseguenza anche la loro composizione. Ora,

$$h \circ e(0) = h(1) = f(1) - f(-1)$$

$$h \circ e(1) = h(-1) = f(-1) - f(1) = -h \circ e(0).$$

Quindi,  $h \circ e(0)h \circ e(1) < 0$  e dunque applicando il lemma 1.1.2, esiste un punto  $c \in I$  tale che  $h \circ e(c) = 0$ , e di conseguenza esiste  $x \in \mathbb{R}$  tale che  $h(x) = 0$ , i.e.  $f(x) = -x$ . □

**Osservazione 1.1.6.** Un'interpretazione fisica del Corollario 1.1.5 è data da:

In un dato istante di tempo, e dato un cerchio sulla superficie terrestre, c'è sempre una coppia di punti antipodali (nel cerchio) che registrano la stessa temperatura.

## 1.2 Teorema dei Pancakes

Il Teorema di Stone-Tukey in 2 dimensioni prende il nome di Teorema dei Pancakes in quanto ci permette di rispondere alla seguente domanda:

*è sempre possibile tagliare due pancakes esattamente a metà  
con un unico taglio dritto di un coltello?*

Vediamo di riformulare il tutto in termini matematici.

**Teorema 1.2.1 (dei Pancakes).** Siano  $A, B$  due sottoinsiemi limitati e misurabili del piano euclideo. Allora esiste sempre una retta sul piano in grado di bisecare  $A$  e  $B$  rispetto la loro misura (e.g. area).

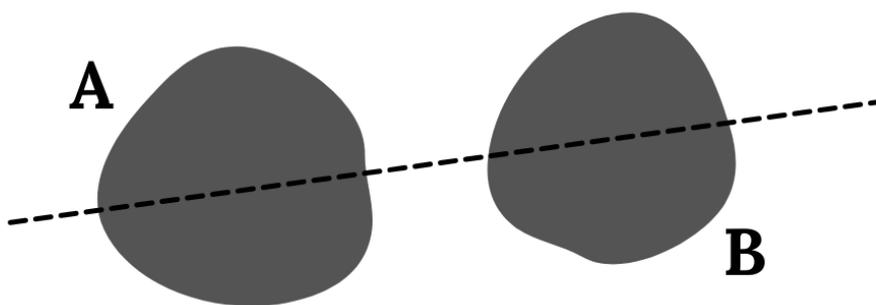


Figura 1.2

*Dimostrazione.* Sia  $S$  un cerchio con centro  $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$  che contiene  $A$  e  $B$  (ciò è possibile in quanto  $A$  e  $B$  limitati). Cambiando scala possiamo assumere che  $S$  abbia diametro 1 unità.

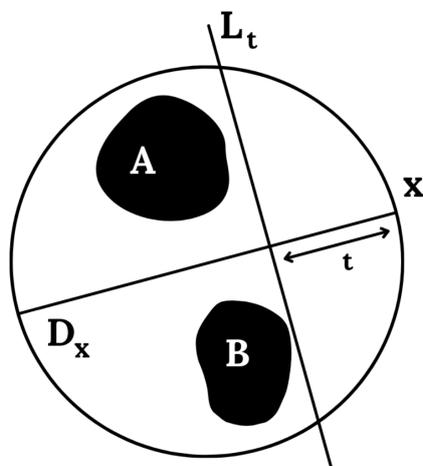


Figura 1.3

Per ogni  $x \in S$  consideriamo il diametro  $D_X$  di  $S$  che passa per  $x$ , e sia  $L_t$  la retta perpendicolare a  $D_X$  passante per il punto di  $D_X$  che dista  $t$  da  $x$ ; si veda la figura 1.3. Sia  $g_1^{(x)}(t)$  la parte dell'area di  $A$  che si trova nel lato di  $L_t$  più vicino ad  $x$ . Sia  $g_2^{(x)}(t)$  l'altra parte di area di  $A$ . (Notiamo che  $g_1^{(x)}(0) = g_2^{(x)}(1) = 0$ ).

$g_1^{(x)}, g_2^{(x)}$  sono funzioni continue da  $I$  a  $\mathbb{R}$ . Mostriamolo per  $g_1^{(x)}$ . Consideriamo  $S$  immerso in  $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2, \mu)$  dove  $\mathbb{B}_2$  indica la  $\sigma$ -algebra dei Boreliani di  $\mathbb{R}^2$  e  $\mu$  la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}^2$ . Indichiamo con  $S(t) = A \cap Sp(t)$  dove  $Sp(t)$  indica la parte di disco individuato da  $S$  nel lato in cui si trova  $x$ , rispetto  $L_t$  (si veda 1.3).

Possiamo dunque vedere  $g_1^{(x)}$  come la funzione data da

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{S(t)} dx dy$$

dove  $\mathbf{1}_{S(t)}$  è la funzione indicatrice sull'insieme  $S(t)$ , e questo integrale è continuo in quanto la funzione integranda è limitata e misurabile (si veda note...), infatti la limitatezza di  $\mathbf{1}_{S(t)}$  viene dalla definizione, ed è misurabile in quanto  $S(t)$  è misurabile, essendo intersezione di insiemi misurabili. Dunque  $g_1^{(x)}$  è continua.

Definiamo  $f_x : I \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$f_x(t) = g_2^{(x)}(t) - g_1^{(x)}(t).$$

$f$  è continua e soddisfa  $f_x(0) = -f_x(1)$ , i.e.  $f_x(0)f_x(1) \leq 0$ .

Dal lemma 1.1.2 sappiamo che in qualche punto  $t \in I$ ,  $f_x(t) = 0$ . Questo punto può

non essere unico. Siccome  $g_2^{(x)}$  e  $-g_1^{(x)}$  sono funzioni monotone decrescenti (questo è ovvio) allora lo è anche  $f_x = g_2^{(x)} - g_1^{(x)}$ . Dunque abbiamo che  $f_x(t) = 0$  o in un qualche intervallo chiuso  $[a, b]$  o in un unico punto  $c$ .

Sia  $h_A : S \rightarrow I$  la funzione che associa ad  $x$  quel  $t$  per cui  $L_t$  è proprio la retta che divide esattamente a metà l'area di  $A$ . Dunque definiamo  $h_A$  come

$$h_A(x) = \begin{cases} c & \text{se } f_x \text{ si annulla solo in } c \\ \frac{1}{2}(a+b) & \text{se } f_x \text{ si annulla in un intervallo chiuso } [a, b] \end{cases}$$

In altre parole una retta perpendicolare a  $D_X$  passante per il punto che dista  $h_A(x)$  da  $x \in D_X$  divide a metà l'area di  $A$ .

Si noti che

$$h_A(-x) = 1 - h_A(x)$$

e che  $h_A$  è una funzione continua.

Nello stesso modo in cui abbiamo definito  $h_A$  definiamo la funzione  $h_B : S \rightarrow I$ , usando  $B$  al posto di  $A$ .

Infine sia  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  definita come

$$h(x) = h_A(x) - h_B(x)$$

che è continua in quanto lo sono  $h_A$  e  $h_B$ . Si noti che  $h(x) = -h(-x)$  per ogni  $x \in S$ . Dal corollario 1.1.5 esiste qualche punto  $y \in S$  tale che  $h(y) = -h(y)$ . Quindi  $h(y) = 0$ ,  $h_A(y) = h_B(y)$  e la retta perpendicolare a  $D_y$  passante per il punto di  $D_y$  che dista  $h_A(y)$  da  $y$  divide a metà le aree di  $A$  e di  $B$ .  $\square$

**Nota:** I due sottoinsiemi possono "sovrapporsi". Inoltre non è richiesto che essi siano connessi, i.e. posso essere composti da più parti. In altre parole i pancakes possono essere composti da più parti ed essere uno sopra l'altro.

Alla luce di quanto dimostrato, è una interessante conseguenza il seguente risultato.

**Teorema 1.2.2.** Se  $A$  è una regione limitata e misurabile del piano euclideo, esiste sempre una coppia di rette perpendicolari tra loro in grado di dividere  $A$  in 4 parti di ugual area.

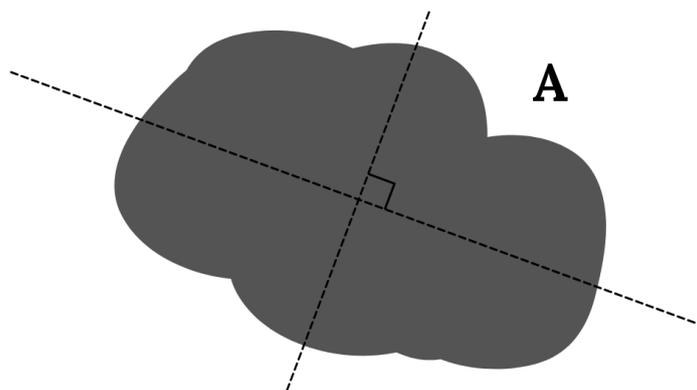


Figura 1.4: Esempio grafico del teorema.

*Dimostrazione.* Come nella dimostrazione del teorema 1.2.1, chiudiamo  $A$  in una circonferenza di centro  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ , e diametro 2 unità. Identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  possiamo vedere tale circonferenza come  $S^1$ .

Per ogni  $x \in S^1$  sia  $L_X$  la retta perpendicolare a  $D_X$  che incontra  $D_X$  alla distanza  $h_A(x)$  da  $x$  (dove  $D_X$  e  $h_A(x)$  sono definite come nella dimostrazione del Teorema 1.2.2). In particolare  $L_X$  divide a metà l'area di  $A$ .

Sia  $y$  il punto su  $S^1$  individuato ruotando  $x$  di un angolo di ampiezza  $\frac{1}{2}\pi$  in senso antiorario (i.e.  $y = ix$ ) e sia  $D_Y$  il diametro passante per  $y$ .

Sia  $L_Y$  la retta perpendicolare a  $D_Y$  che incontra  $D_Y$  ad una distanza di  $h_A(y)$  da  $y$  (anche  $L_Y$  divide a metà l'area di  $A$ ) e denominiamo le 4 regioni di  $A$ , in senso antiorario, come  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$ ,  $A_3(x)$ ,  $A_4(x)$  (si veda la figura 1.5).

Indichiamo con la funzione  $g_i(x)$  l'area di  $A_i(x)$ , per  $i = 1, \dots, 4$ .

Dunque

$$g_1(x) + g_2(x) = g_3(x) + g_4(x)$$

$$g_4(x) + g_1(x) = g_2(x) + g_3(x)$$

ne segue che  $g_1(x) = g_3(x)$  e  $g_2(x) = g_4(x)$ .

Ovviamente,  $g_1, g_2, g_3$  e  $g_4$  sono funzioni continue da  $S^1$  a  $\mathbb{R}$ . Sia  $f$  la funzione continua data da

$$f(x) = g_1(x) - g_2(x) = g_3(x) - g_4(x)$$

Notiamo che

$$f(ix) = g_1(ix) - g_2(ix) = g_2(x) - g_3(x) = g_2(x) - g_1(x) = -f(x)$$

Ora, applichiamo il lemma 1.1.2 alla funzione  $(f \circ \tilde{e}) : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dove  $\tilde{e} : I \rightarrow S^1$  è data da  $\tilde{e}(t) = \exp(\pi it/2)$ , ottenendo così la tesi.  $\square$

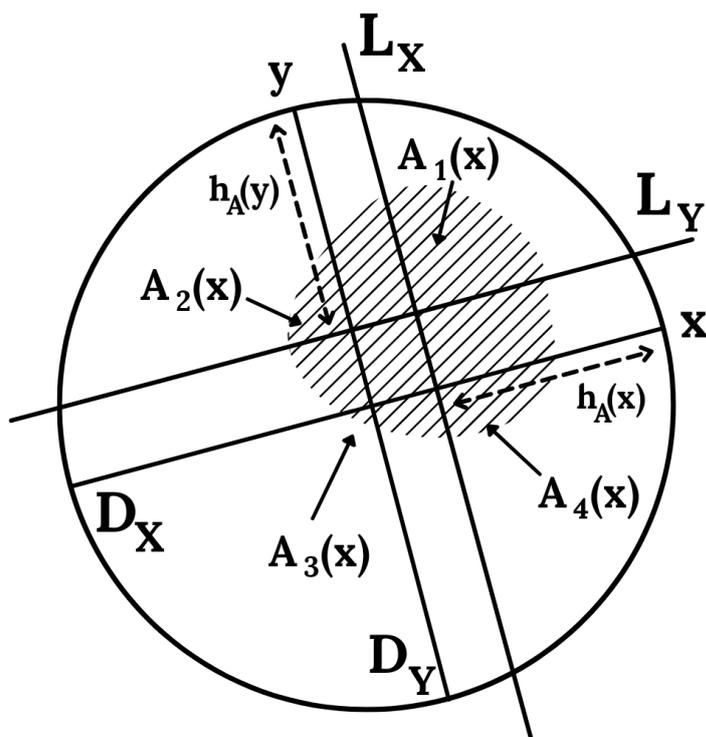


Figura 1.5

Ora che abbiamo analizzato il Teorema di Stone-Tukey per  $n = 2$ , che abbiamo visto chiamarsi Teorema dei Pancakes, vediamo la sua versione in 3 dimensioni.

## 1.3 Teorema del Panino al Prosciutto

Il teorema di Stone-Tukey in 3 dimensioni prende il nome di *Teorema del Panino al Prosciutto*. Il bizzarro nome deriva dalla una sua versione informale:

*Per ogni panino composto da prosciutto, pane e formaggio,  
esiste sempre un taglio planare di coltello in grado di bisecare  
simultaneamente i tre ingredienti.*

Prima di dare una versione matematica del problema, introduciamo alcuni risultati che ci torneranno poi utili per la dimostrazione.

**Teorema 1.3.1 (Borsuk).** Non esiste alcuna mappa continua  $\varphi : S^2 \rightarrow S^1$  tale che  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  per ogni  $x \in S^2$ .

*Dimostrazione.* Si veda [M]. □

**Osservazione 1.3.2.** Il teorema di Borsuk 1.3.1 si tratta di una generalizzazione del teorema che afferma che non esiste una mappa continua  $\varphi : S^1 \rightarrow S^0$  tale che  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  (tale mappa sarebbe suriettiva, ma  $S^1$  è connesso, mentre  $S^0$  no).

**Corollario 1.3.3.** Sia  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una funzione continua tale che  $f(x) = -f(-x)$  per ogni  $x \in S^2$ . Allora esiste un punto  $x \in S^2$  tale che  $f(x) = 0$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo  $f(x) \neq 0$  per ogni  $x \in S^2$ .

Definiamo  $g : S^2 \rightarrow S^1$  come  $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ .  $g$  è continua in quanto composizione di funzioni continue e abbiamo che  $g(x) = -g(-x)$ , ma ciò contraddice il Teorema 1.3.1. □

**Corollario 1.3.4.** Sia  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una mappa continua. Allora esiste un punto  $x \in S^2$  tale che  $f(x) = f(-x)$ .

*Dimostrazione.* Per assurdo  $f(x) \neq f(-x)$  per ogni  $x \in S^2$ . Definiamo  $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $g(x) = f(x) - f(-x)$ , che è continua in quanto composizione di funzioni continue. Inoltre notiamo che  $g(x) = f(x) - f(-x) = -f(-x) + f(x) = -g(-x)$  e dunque abbiamo che  $g$  soddisfa  $g(x) = -g(-x)$  e  $g(x) \neq 0$  per ogni  $x \in S^2$ . Ciò contraddice il corollario 1.3.3.  $\square$

I risultati appena esposti si possono generalizzare al caso in cui  $S^2, \mathbb{R}^2$ , sono sostituiti con  $S^n, \mathbb{R}^n$ .

Il corollario 1.3.4 generalizza il corollario 1.1.5 e ci dice in particolare che non esiste una mappa continua ed iniettiva da  $S^2$  a  $\mathbb{R}^2$ , da ciò segue il seguente risultato.

**Corollario 1.3.5.** Nessun sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  è isomorfo a  $S^2$ .

*Dimostrazione.* Ciò deriva direttamente dal Corollario 1.3.4.

Infatti non può esistere un isomorfismo tra un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$  e  $S^2$ , perché qualsiasi funzione continua tra questi due spazi ha per forza due punti diversi con stessa immagine (1.3.4), ergo non potrebbe mai essere iniettiva, da cui la tesi.  $\square$

**Corollario 1.3.6.** Siano  $n \geq 3$  ed  $A \subset \mathbb{R}^n$  un aperto non vuoto. Allora ogni applicazione continua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$  non è iniettiva.

*Dimostrazione.* Basta osservare che  $A$  contiene un sottospazio omeomorfo a  $S^2$  ed applicare il corollario 1.3.4.  $\square$

**Corollario 1.3.7.** Non esistono applicazioni continue  $r : D^2 \rightarrow S^1$  tali che  $r(-x) = -r(x)$  per ogni  $x \in S^1$ .

*Dimostrazione.* Iniziamo fissando le notazioni:

$$D^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}, \quad S^1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$$

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

Supponiamo ora che esista  $r : D^2 \rightarrow S^1$  continua e tale che  $r(-x) = -r(x)$  per ogni  $x \in S^1$ . Allora l'applicazione  $f : S^2 \rightarrow S^1$  definita come

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} r(x_1, x_2) & \text{se } x_3 \geq 0 \\ -r(-x_1, -x_2) & \text{se } x_3 \leq 0 \end{cases}$$

ha la proprietà che  $-f(x_1, x_2, x_3) = f(-x_1, -x_2, -x_3)$  per ogni  $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$  e quindi contraddice il Teorema di Borsuk 1.3.1.

□

Ora che abbiamo tutti gli strumenti necessari per dimostrarlo, andiamo ad enunciare il Teorema di Stone-Tukey tridimensionale.

**Teorema 1.3.8 (del Panino al Prosciutto).** Siano  $A, B$  e  $C$  sottoinsiemi limitati e misurabili di  $\mathbb{R}^3$ . Allora esiste un piano che biseca  $A, B$  e  $C$  rispetto la loro misura (e.g. volume).

*Dimostrazione.* La dimostrazione è simile a quella fornita per il teorema 1.2.1. Possiamo supporre (analogo a quanto fatto nel dimostrare 1.2.1) che  $A, B$  e  $C$  siano contenuti in  $S$ , sfera di  $\mathbb{R}^3$  di diametro 1 e centro 0. Preso  $x \in S$  sia  $D_x$  il diametro di  $S$  passante per  $x$ . Per  $t \in I$  ( $I = [0, 1]$ ) sia  $P_t$  il piano perpendicolare a  $D_x$  che passa per il punto di  $D_x$  che dista  $t$  da  $x$ .  $P_t$  divide  $A$  in due parti,  $A_1$  e  $A_2$ , con  $A_1$  più vicina a  $x$  di  $A_2$ . Definiamo due funzioni  $f_1, f_2$  come

$$f_1(t) = \text{volume}(A_1), \quad f_2(t) = \text{volume}(A_2).$$

Ovviamente  $f_1$  e  $f_2$  sono funzioni continue da  $I$  a  $\mathbb{R}$  con  $f_1$  monotona crescente e  $f_2$  monotona decrescente. Dunque la funzione  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$  è continua in quanto composizione di funzioni continue ed è monotona crescente. Inoltre  $f(0) = -f(1)$ , e dal Teorema del Valor Medio 1.1.2, esiste qualche  $t \in I$  tale che  $f(t) = 0$ . Siccome  $f$  è monotona crescente  $f(t) = 0$  per un singolo punto, oppure per un intervallo chiuso  $[a, b]$ .

Nel primo caso consideriamo tale punto come  $\alpha(x)$ , mentre nel secondo poniamo  $\alpha(x) = \frac{(a+b)}{2}$ . Dunque  $P_{\alpha(x)}$  divide  $A$  in due parti uguali (in volume). Notiamo che  $\alpha : S \rightarrow \mathbb{R}$

è una mappa continua che soddisfa  $\alpha(x) = 1 - \alpha(-x)$ .

In modo analogo possiamo definire le funzioni continue  $\beta, \gamma : S \rightarrow \mathbb{R}$  con

$$\beta(x) = 1 - \beta(-x), \quad \gamma(x) = 1 - \gamma(-x)$$

con la proprietà che  $P_{\beta(x)}, P_{\gamma(x)}$  dividono rispettivamente  $B$  e  $C$  a metà rispetto al volume. Usando le funzioni  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  possiamo ora definire  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^2$  come

$$\varphi(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x))$$

Siccome  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  sono continue, è continua anche  $\varphi$ . Inoltre  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ , dunque per il Corollario 1.3.3 esiste un punto  $y \in S$  tale che  $\varphi(y) = 0$ . Ma questo significa che  $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y)$ , quindi il piano  $P_{\alpha(y)}$  biseca  $A, B$  e  $C$  rispetto al volume.  $\square$

### 1.3.1 Applicazione: il problema della collana

Due ladri, ladro 1 e ladro 2, rubano una collana di pietre preziose composta da 2 tipi di pietre: zaffiri e smeraldi. Supponiamo che, sia il numero di zaffiri che il numero di smeraldi siano pari, e che i due ladri vogliano dividersi la collana in modo da avere lo stesso numero di zaffiri e lo stesso numero di smeraldi.

#### *Quanti tagli devono fare alla collana affinché ciò sia possibile?*

Per rispondere a questa domanda dobbiamo prima trasformare il problema della collana, che è un problema discreto, in uno continuo.

Vediamo come procedere:

Supponiamo che la collana in questione abbia 8 smeraldi e 10 zaffiri.

Immaginiamo ora la collana come un segmento di lunghezza 1. Invece che le singole pietre, consideriamo per ogni pietra sulla collana il segmento di filo della collana attorno al quale c'è la pietra, come in **figura 3.2**. Così facendo avremo che una parte di collana, lunga  $8/18$ , sarà ricoperta da smeraldi, e il resto della collana, lungo  $10/18$ , da zaffiri (ricordiamo che la collana è considerata di lunghezza 1).

Ora i due ladri vorranno dividersi in parti uguali la lunghezza della collana relativa agli smeraldi e quella relativa agli zaffiri (in altre parole, i ladri possono tagliare ovunque sulla collana, non più solo tra le singole pietre).

Abbiamo così la variante continua del problema.



Figura 1.6: Problema della collana: dal caso discreto al caso continuo.

Prima di tagliare la collana, i due ladri devono fare due scelte:

**1. Scegliere i due punti in cui tagliarla.**

Analogamente possono scegliere la lunghezza dei 3 segmenti di collana rimanenti dopo i due tagli, che chiamiamo  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

Infatti essendo la collana di lunghezza 1, avremo che la scelta di  $a$ ,  $b$  e  $c$  dovrà per forza essere tale che  $a + b + c = 1$ . Dunque ad ogni scelta di  $a$ ,  $b$  e  $c$ , corrispondono due tagli sulla collana, e viceversa, scelti due punti dove tagliare la collana, ad essi corrisponderanno le lunghezze dei 3 segmenti che rimangono dopo i tagli.

**2. Come dividersi le parti tagliate.** (Si tratta di una scelta binaria).

Paragoniamo ora queste scelte alla scelta di un punto su una sfera  $S^2$ .

Partiamo scegliendo una terna di punti  $(x^2, y^2, z^2)$  tali che  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (analogo a scegliere  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ).

Ad esempio, potremmo scegliere  $x^2 = 1/6$ ,  $y^2 = 1/3$  e  $z^2 = 1/2$ .

Ora dobbiamo decidere se considerare la radice positiva o quella negativa del quadrato di  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Questa decisione è analoga al fatto di scegliere a chi dei due complici dare quale segmento della collana.

Quindi alla scelta di un punto della sfera  $(x, y, z)$ , corrisponde un taglio della collana e un modo di spartire i segmenti tra i due ladri. In particolare, la coordinata positiva corrisponde all'assegnazione del relativo segmento di collana al ladro 1, mentre nel caso di coordinata negativa al ladro 2 (la scelta è arbitraria, potevamo fare il contrario).

Notiamo come scegliendo un punto della sfera, il suo antipodale rappresenterà esattamente lo stesso taglio, ma con la differenza che questa volta i segmenti sono assegnati in modo inverso (infatti abbiamo che l'antipodale di  $x, y, z$  è  $-x, -y, -z$ ). Quindi scegliere un punto o il suo antipodale corrisponde a scambiare i segmenti dei due ladri.

Definiamo ora una funzione  $g$  che associa ad ogni coppia di tagli sulla collana, quindi ad un punto  $(x, y, z) \in S^2$ , la lunghezza di collana relativa agli zaffiri (indicata con  $Z_1$ ) e quella relativa agli smeraldi (indicata con  $S_1$ ) del ladro 1.

$$g : S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x, y, z) \mapsto (Z_1, S_1)$$

Notiamo che se consideriamo l'antipodale ad  $(x, y, z)$ , che sarebbe  $(-x, -y, -z)$ , allora  $g$  ci da il numero di zaffiri e di smeraldi del ladro 2. Quindi quello che ci interessa sarà trovare due punti antipodali in  $S^2$  che abbiano stessa immagine attraverso  $g$ .  $g$  risulta essere una mappa continua da  $S^2$  a  $\mathbb{R}^2$  e dunque per il Corollario 1.3.4 sappiamo che esistono almeno due punti antipodali in  $S^2$  che hanno stessa immagine attraverso  $g$ . Questo significa che esiste un modo equo di dividere la collana con solamente due tagli!

**Osservazione 1.3.9.** Risolvere il problema nella variante continua è sufficiente per la risoluzione del caso discreto.

Infatti,

- se i tagli avvengono esattamente tra le pietre, variante continua e discreta si equivalgono;
- in caso contrario, con una semplice traslazione dei punti di taglio è possibile ricondursi alla variante discreta.

*E se nella collana avessimo un numero di tipi di pietre maggiore di 2?*

Per dimostrare che per  $n$  tipi di pietre bastano  $n$  tagli, è sufficiente generalizzare il tutto, e ciò è possibile grazie al Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1.

## 1.4 Teorema di Stone-Tukey: il caso n-dimensionale

Ora che abbiamo analizzato il Teorema di Stone-Tukey in 1,2 e 3 dimensioni, vediamo di generalizzare il tutto.

Un ruolo fondamentale per la dimostrazione del Teorema nelle dimensioni che abbiamo osservato, lo ha avuto il Teorema del Valor Medio 1.1.2, avremo infatti bisogno di una sua generalizzazione  $n$ -dimensionale per dimostrare il teorema di Stone-Tukey  $n$ -dimensionale.

Vediamola.

**Teorema 1.4.1 (di Borsuk-Ulam).** Sia  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una funzione continua. Allora esiste almeno un punto  $x \in S^n$  tale che  $f(x) = f(-x)$ .

*Dimostrazione.* Si veda [M3]

□

Esistono diverse versioni (del tutto analoghe) del Teorema di Borsuk-Ulam, noi presentiamo questa in quanto sarà proprio la versione che utilizzeremo in molte dimostrazioni che seguiranno.

**Osservazione 1.4.2.** Notiamo come il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1 sia effettivamente la generalizzazione del Teorema del Valor Medio 1.1.2.

Il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1 in una dimensione asserisce che, per ogni funzione continua da  $S^1$  ad  $\mathbb{R}$ , esiste un punto  $x \in S^1$  tale che  $f(x) = f(-x)$ .

Vediamo come si dimostra ciò.

Identificando  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$ , data  $f$  come nelle ipotesi, è sempre possibile definire  $g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$g(\theta) = f(\theta) - f(\pi + \theta)$$

$g$  risulta continua, essendolo  $f$ . Ora, se  $g(0) = 0$  abbiamo finito, in quanto risulterebbe  $f(0) = f(\pi)$ . Diversamente, supponiamo che  $f(0)$  sia positivo o negativo. Se è positivo, allora  $g(\pi) = -g(0)$  è negativo, e dal teorema del Valor Medio abbiamo che esiste  $\theta \in [0, 2\pi]$  tale che  $g(\theta) = 0$ . Abbiamo così la tesi.

Esiste un interessante corollario del Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1; vediamolo.

**Corollario 1.4.3.** In un dato istante di tempo  $t$ , esistono due punti antipodali sulla superficie terrestre, in cui si registra la stessa temperatura e la stessa pressione.

*Dimostrazione.* Basta considerare la mappa continua  $S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  data da:

$$\text{punto della Terra} \mapsto (\text{la sua temperatura, la sua pressione})$$

In quanto il teorema di Borsuk-Ulam ci garantisce che essa assume lo stesso valore in almeno una coppia di punti antipodali sulla superficie terrestre.  $\square$

Vediamo ora la generalizzazione del corollario 1.3.5

**Corollario 1.4.4.** Nessun sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  è omeomorfo a  $S^n$ .

*Dimostrazione.* È un'ovvia conseguenza della versione che abbiamo presentato del Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1.  $\square$

Possiamo ora enunciare e dimostrare, con l'ausilio dei risultati appena esposti, la versione generale del Teorema di Stone-Tukey.

**Teorema 1.4.5 (di Stone-Tukey).** Siano  $F_1, \dots, F_n$  dei sottoinsiemi limitati e misurabili di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una funzione lineare

$$P(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$$

tale che l'iperpiano  $\{P = 0\}$  biseca ogni  $F_i$ ; quindi per ogni  $i$  tale che  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\text{vol}(F_i \cap \{P > 0\}) = \text{vol}(F_i \cap \{P < 0\}) = \frac{1}{2}\text{vol}(F_i)$$

dove  $\text{vol}(F_i)$  indica la misura considerata di  $F_i$ .

*Dimostrazione.* Partendo da un punto di  $S^n$  possiamo identificare la n-upla  $(b_0, \dots, b_n)$  con la mappa  $P_b$  definita da

$$P_b(b_0, \dots, b_n) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0$$

così facendo possiamo definire una mappa  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  come segue. La  $i$ -esima coordinata di  $f$  è la funzione

$$f_i(b_0, \dots, b_n) = \text{vol}(F_i \cap \{P_b < 0\}) - \text{vol}(F_i \cap \{P_b > 0\})$$

In altre parole, la  $i$ -esima coordinata di  $f$  misura quanto l'iperpiano  $\{P_b = 0\}$  è vicino a bisecare  $F_i$ . In particolare biseca  $F_i$  se e soltanto se  $f_i(b_0, \dots, b_n) = 0$ .

Notiamo come ogni  $f_i$  sia continua dal fatto che facendo variare  $(b_0, \dots, b_n)$  di una piccola quantità, si muoverebbe di poco l'iperpiano  $\{P_b = 0\}$ , ciò significa che cambierà (di poco) solo quanto siamo vicini a bisecare  $F_i$ . Siccome ogni componente di  $f$  è continua, abbiamo che  $f$  è continua.

Infine, osserviamo che

$$\begin{aligned} f_i(-b_0, \dots, -b_n) &= \text{vol}(F_i \cap \{P_{-b} < 0\}) - \text{vol}(F_i \cap \{P_{-b} > 0\}) \\ &= \text{vol}(F_i \cap \{P_b > 0\}) - \text{vol}(F_i \cap \{P_b < 0\}) \\ &= -f_i(b_0, \dots, b_n) \end{aligned}$$

Funzioni con questa proprietà sono dette *dispari*. Siccome  $f_i$  è dispari per ogni  $i$ , abbiamo che lo è anche  $f$ . Possiamo dunque applicare il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1 ad  $f$ ,

che ci garantisce l'esistenza di un punto  $a = (a_0, \dots, a_n) \in S^n$  tale che  $f(a_0, \dots, a_n) = f(-a_0, \dots, -a_n)$ . Essendo  $f$  dispari sappiamo anche che  $f(-a_0, \dots, -a_n) = -f(a_0, \dots, a_n)$ . Dunque  $f(a_0, \dots, a_n)$  è uguale al suo opposto, ovvero  $f(a_0, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$ . Sia

$$P(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$$

Ora ricordiamo che la  $i$ -esima componente di  $f$  è uguale a zero se e soltanto se l'iperpiano  $\{P_a = 0\}$  divide a metà tutti gli  $F_i$ , dunque abbiamo che l'iperpiano  $\{P_a = 0\}$  ci dà la tesi.  $\square$

Bene! Adesso siamo veramente bravi a tagliare panini! C'è solo un problema: la maggior parte delle volte vorremo tagliare panini più interessanti di due fette di pane e una di prosciutto. Per esempio, supponiamo (in  $n = 3$ ) di aggiungere del formaggio al nostro panino; possiamo dividere tutte e quattro le cose (entrambe le fette di pane, prosciutto e formaggio) con un unico taglio dritto di coltello? La risposta è no. Però possiamo risolvere problemi come questo se abbandoniamo la restrizione a tagli "dritti".

## Capitolo 2

# Problemi di taglio, ma con coltelli più interessanti

Fino ad ora ci siamo ristretti a tagliare panini con iperpiani, che sono semplicemente gli zeri di polinomi lineari, ma questa restrizione è sostanzialmente arbitraria. Dato un qualunque polinomio a più variabili  $Q(x_1, \dots, x_n)$ , diciamo che  $Q$  divide a metà (per volume) una quantità limitata  $F \subset \mathbb{R}^n$  se

$$\text{vol}(F \cap \{Q < 0\}) = \text{vol}(F \cap \{Q > 0\}) = \frac{1}{2}\text{vol}(F)$$

Una prima domanda che potremmo porci è quanti insiemi possiamo dividere a metà simultaneamente potendo utilizzare gli zeri di un qualsiasi polinomio.

Domanda non molto interessante in quanto, potendo utilizzare qualsiasi polinomio, possiamo dividere a metà simultaneamente una quantità di insiemi arbitraria.

Diventa invece più interessante se limitiamo il grado dei polinomi che possiamo utilizzare.

### 2.1 Teorema di Stone-Tukey polinomiale

**Teorema 2.1.1 (di Stone-Tukey polinomiale).** Sia  $d \geq 1$ , e sia  $m = \binom{n+d}{n} - 1$ . Supponiamo di avere  $m$  sottoinsiemi limitati  $F_1, \dots, F_m$  di  $\mathbb{R}^n$ . Allora esiste una  $n$ -varietà algebrica (polinomiale)  $Q$  di grado al massimo  $d$  tale che  $Q$  divide a metà tutti gli  $F_i$ , quindi che per ogni  $1 \leq i \leq m$ ,

$$\text{vol}(F_i \cap \{Q < 0\}) = \text{vol}(F_i \cap \{Q > 0\}) = \frac{1}{2}\text{vol}(F_i)$$

*Dimostrazione.* Possiamo interpretare il bizzarro numero  $m = \binom{n+d}{n} - 1$  come il numero di monomi non costanti di dimensione  $\leq d$  con coefficiente 1 a  $n$  variabili.

È dunque possibile costruire polinomi di grado  $\leq d$  partendo da punti di  $S^m$  identificando la  $m$ -upla  $b = (b_0, \dots, b_m) \in S^m$  con il polinomio  $Q_b$ , i cui coefficienti sono esattamente i valori  $b_0, \dots, b_m$ .

Definiamo ora la mappa  $f : S^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  ponendo la  $i$ -esima componente come

$$f_i(b_0, \dots, b_m) = \text{vol}(F_i \cap \{Q_b < 0\}) - \text{vol}(F_i \cap \{Q_b > 0\})$$

Ora il resto della dimostrazione è analogo a quella illustrata per 1.4.5, a parte che dobbiamo mostrare la continuità di  $f$ , per poter applicare il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1.  $f$  è continua, in quanto lo sono le sue componenti: variando  $b_0, \dots, b_m$  di poco, allora il polinomio  $Q_b$  varierà di poco, come anche la posizione dei suoi zeri  $\{Q_b = 0\}$ , e di conseguenza non cambierà di molto neanche quanto  $\{Q_b = 0\}$  è "vicino" a dividere l'area di  $F_i$  a metà, che è proprio il valore di  $f_i$ . Rendere questo argomento completamente rigoroso è abbastanza complicato. Dunque  $f$  è continua, ed è dispari per lo stesso motivo per cui era dispari nella versione ordinaria del Teorema di Stone-Tukey (1.4.5). Dunque, per il teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1, esiste almeno un punto  $a = (a_0, \dots, a_m) \in S^m$  per il quale  $f(a_0, \dots, a_m) = (0, \dots, 0)$ . Ciò implica che  $\{Q_a = 0\}$  divide simultaneamente ogni  $F_i$ .  $\square$

**Osservazione 2.1.2.** Questo ci permette di tagliare panini molto più interessanti! Per esempio, se  $n = 3$  e  $d = 2$ , abbiamo  $m = 9$ . Quindi utilizzando "coltelli quadratici" in  $\mathbb{R}^3$  (e.g. paraboloidi e iperboloidi), possiamo dividere esattamente a metà panini con fino a 9 ingredienti (e.g. pane, prosciutto, formaggio, pomodoro, insalata, cipolla, maionese, mostarda e la seconda fetta di pane). Mentre utilizzando "coltelli cubici", è possibile tagliare a metà panini con  $\binom{6}{3} - 1 = 19$  ingredienti! etc.

Notiamo anche che per  $d = 1$  questo teorema si riduce al Teorema di Stone-Tukey 1.4.5.

# Capitolo 3

## Tagliamo Spezie: Il caso discreto

D'ora in avanti, piuttosto che considerare oggetti continui come poteva essere un panino, ci interesseremo a casi discreti.

Più concretamente, avremo delle spezie, e vorremo dividerle esattamente a metà. Siccome questa volta trattiamo oggetti discreti, non consideriamo più il volume distribuito nelle due metà dopo il taglio (il volume infatti è uguale a 0), ma il numero di punti che si trovano nelle due parti.

**Definizione 3.0.1.** Sia  $T \subset \mathbb{R}^n$  un insieme finito di punti e sia  $Q$  un polinomio in  $n$  variabili. Diciamo che  $\{Q = 0\}$  divide a metà  $T$  se

$$|T \cap \{Q < 0\}| \leq \frac{|T|}{2} \quad e \quad |T \cap \{Q > 0\}| \leq \frac{|T|}{2}$$

dove  $|\cdot|$  indica la cardinalità.

**Nota:** permettiamo (e in generale sarà necessario) che alcuni punti di  $T$  stiano proprio in  $\{Q = 0\}$ . Alla luce di ciò possiamo enunciare l'analogo del Teorema di Stone-Tukey 1.4.5 nel caso discreto.

### 3.1 Teorema di Stone-Tukey discreto

**Teorema 3.1.1 (di Stone-Tukey discreto).** Siano  $T_1, \dots, T_n \subset \mathbb{R}^n$  insiemi finiti di punti. Allora esiste un polinomio lineare  $P$  per cui l'iperpiano  $\{P = 0\}$  divide esattamente a metà tutti i  $T_i$  contemporaneamente.

*Dimostrazione.* Come nel caso continuo, utilizzeremo il teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1. Ricordiamo come abbiamo fatto nel caso continuo: per ogni punto  $(b_0, \dots, b_n) \in S^n$  abbiamo costruito un polinomio lineare  $P_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  come:

$$P_b(x_1, \dots, x_n) = b_1x_1 + \dots + b_nx_n + b_0$$

Dopo di che, abbiamo definito una mappa  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cui  $i$ -esima componente è data da

$$\begin{aligned} f_i(b_0, \dots, b_n) &= \text{vol}(F_i \cap \{P_b < 0\}) - \text{vol}(F_i \cap \{P_b > 0\}) \\ &= \text{quanto } \{P_b = 0\} \text{ è vicino a bisecare } F_i \end{aligned}$$

Vorremmo fare esattamente la stessa cosa, ma nel caso discreto.

La cosa complicata però è definire

$$f_i(b_0, \dots, b_n) = |T_i \cap \{P_b < 0\}| - |T_i \cap \{P_b > 0\}|$$

Perché? Il nocciolo del problema sta nel fatto che il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1 vale solo per funzioni continue, e questa funzione non è continua: muovendo di poco  $b_0, \dots, b_n$  in modo che un punto che prima si trovava da una parte di  $\{P_b = 0\}$  passi dall'altra parte, il valore di  $f_i$  fa un salto di  $\pm 2$ . L'idea è quella di costruire una funzione continua che si comporta come  $f$ .

A tal fine introduciamo alcuni concetti preliminari.

Dato un insieme fissato  $T$ , una  $n$ -upla  $(c_1, \dots, c_n)$  e un qualche  $\alpha \in \mathbb{R}$ , denotiamo con  $P_{c,\alpha}$  il polinomio lineare

$$P_{c,\alpha}(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n + \alpha$$

Definiamo ora tre funzioni  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} m_*(c_1, \dots, c_n) &= \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \{P_{c,\alpha} = 0\} \text{ divide a metà } T\} \\ m^*(c_1, \dots, c_n) &= \max\{\alpha \in \mathbb{R} : \{P_{c,\alpha} = 0\} \text{ divide a metà } T\} \\ m(c_1, \dots, c_n) &= \frac{m_*(c_1, \dots, c_n) + m^*(c_1, \dots, c_n)}{2} \end{aligned}$$

Intuitivamente l'idea è quella di far slittare l'iperpiano ortogonale a  $(c_1, \dots, c_n)$  (ovvero

$\{P_{c,0} = 0\}$ ) attraverso  $\mathbb{R}^n$ , variando  $\alpha$ . Il valore di  $m_*$  si ha non appena l'iperpiano 'passa' metà dei punti; al contrario il valore di  $m^*$  si ha nell'ultimo istante in cui nell'altra parte ci sono ancora metà dei punti. Infine,  $m$  è semplicemente la media di  $m_*$  e  $m^*$ .  
 Notiamo come da costruzione, se  $m(c_1, \dots, c_n) = \alpha$ , allora il piano  $\{P_{c,\alpha} = 0\}$  divide a metà  $T$ .

Un'importante proprietà da notare è il fatto che la funzione  $m$  sia *dispari*, questo semplicemente perché rimpiazzando  $(c_1, \dots, c_n)$  con  $(-c_1, \dots, -c_n)$  si scambieranno soltanto i ruoli di min e max e cambia  $\alpha$  in  $-\alpha$ .

Le funzioni  $m$ ,  $m_*$  e  $m^*$  sono continue. Vediamo il perché. Per constatare che  $m_*$  è continua, vediamo cosa succede se variamo  $c = (c_1, \dots, c_n)$  di poco (indichiamo il punto variato con  $\tilde{c} = (\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n)$ ): ogni iperpiano  $\{P_{\tilde{c},\alpha} = 0\}$  cambierà di poco, ma perché questo dovrebbe variare  $\alpha$  minimizzante di poco?

Abbiamo due possibilità: o il punto di  $T$  che dobbiamo raggiungere traslando l'iperpiano  $\{P_{\tilde{c},0} = 0\}$  per dividere a metà  $T$  è lo stesso di  $\{P_{c,0} = 0\}$  oppure tale punto sarà diverso. Nel primo caso, poiché  $\{P_{\tilde{c},\alpha} = 0\}$  varia di poco rispetto  $\{P_{c,\alpha} = 0\}$ , dovendo raggiungere lo stesso punto di  $T$ , allora ovviamente anche  $\alpha$  varierà di poco. Nel secondo caso, avendo variato di poco i coefficienti e dunque gli iperpiani, allora necessariamente i due punti che essi devono raggiungere sono vicini per una proiezione perpendicolare alla direzione di traslazione di  $\alpha$ . (si veda la figura 3.1). Dunque ancora una volta  $\alpha$  varierà di poco.

Un argomento simile può essere utilizzato per mostrare che  $m^*$  è continua. E dato che la media di due funzioni continue, è una funzione continua, abbiamo che  $m$  è continua. Siano ora  $T_1, \dots, T_n \subset \mathbb{R}^n$  degli insiemi finiti, e siano  $m_i$  le funzioni, definite come  $m$  sopra, relative rispettivamente a  $T_i$ .

Definiamo una funzione  $f : S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  la cui  $i$ -esima componente è

$$f_i(b_0, \dots, b_n) = m_i(b_1, \dots, b_n) - b_0$$

Siccome abbiamo provato che ogni  $m_i$  è continua, abbiamo che  $f$  è continua. Inoltre  $f$  è dispari, siccome

$$f_i(-b_0, \dots, -b_n) = m_i(-b_1, \dots, -b_n) - (-b_0) = b_0 - m_i(b_1, \dots, b_n) = -f(b_0, \dots, b_n)$$

Dove l'uguaglianza in mezzo deriva dal fatto che  $m$  sia dispari (come visto sopra). Possiamo dunque applicare il Teorema di Borsuk-Ulam 1.4.1 ad  $f$ , così da avere che  $f$  si

annulla per qualche  $a = (a_0, \dots, a_n) \in S^n$ . Ciò significa che per ogni  $i$ ,

$$m_i(a_1, \dots, a_n) = a_0$$

Come abbiamo osservato sopra, questo ci dice che l'iperpiano  $\{P_a = 0\}$  divide a metà ogni  $T_i$ , dove

$$P_a(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + a_0$$

Così facendo abbiamo trovato l'iperpiano desiderato. □

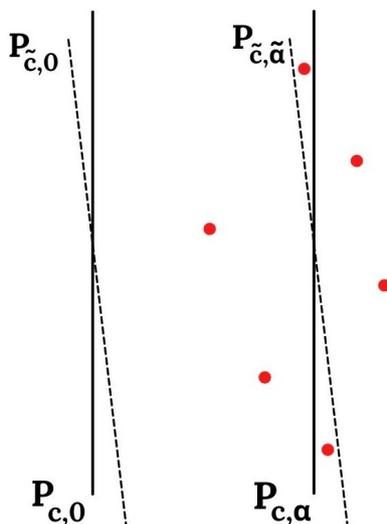


Figura 3.1

Enunciamo, senza dimostrare (si veda [M3] per la dimostrazione) una versione leggermente più delicata del Teorema di Stone-Tukey Discreto 3.1.1. Prima di fare ciò diamo la definizione di *posizione generale lineare*.

**Definizione 3.1.2 (posizione generale lineare).** Un insieme di punti  $A$  ( $|A| \geq n + 1$ ) in un spazio affine  $n$ -dimensionale (lo spazio euclideo  $n$ -dimensionale è un esempio comune) è in *posizione generale lineare* (o solo *posizione generale*) se non esiste un iperpiano che contiene più di  $n$  punti di  $A$ .

**Corollario 3.1.3 (di Stone-Tukey Discreto, versione della Posizione Generale).**

Siano  $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$  insiemi disgiunti finiti di punti in posizione generale lineare. Allora esiste un iperpiano  $h$  che divide a metà ogni  $A_i$ , così che ci siano esattamente  $\lfloor \frac{1}{2}|A_i| \rfloor$  punti di  $A_i$  in ognuno dei due spazi aperti derivanti dalla divisione di  $\mathbb{R}^n$  in due attraverso l'iperpiano  $h$ , con al massimo un punto di ogni  $A_i$  sull'iperpiano  $h$ .

*Dimostrazione.* Si veda [M3] □

Vediamo ora un'interessante conseguenza del Teorema di Stone-Tukey Discreto 3.1.1.

**Teorema 3.1.4 (Akiyama e Alon).** Consideriamo gli insiemi  $C_1, C_2, \dots, C_n \subset \mathbb{R}^n$ , ognuno con  $d$  punti, disposti in modo che non più di  $n$  punti siano contenuti da un singolo iperpiano (posizione generale lineare); Immaginiamo che i punti di  $C_1$  siano rossi, i punti di  $C_2$  blu, etc. (ogni  $C_i$  ha il suo colore). Allora i punti dell'unione  $C_1 \cup \dots \cup C_n$  possono essere divisi in  $d$  n-uple *arcobaleno* (ogni n-upla contiene uno ed un solo punto di ogni colore) i cui involucri convessi sono disgiunti per ogni n-upla.

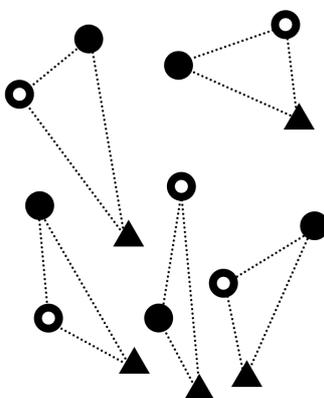


Figura 3.2: Esempio per 3 insiemi di cardinalità 5

*Dimostrazione.* Procediamo per induzione su  $d$ .

Se  $d \geq 1$  è dispari per il Teorema 3.1.1, esiste un iperpiano  $h$  che divide a metà ogni  $A_i$  ed essendo i punti in posizione generale lineare, questo iperpiano conterrà esattamente

un solo punto per ogni colore. Questi punti che giacciono su  $h$  formano una prima  $n$ -upla. Utilizzando l'ipotesi induttiva sui due sottospazi aperti risultanti dopo la divisione tramite l'iperpiano  $h$  abbiamo la tesi.

Per  $d$  pari, utilizziamo la versione della posizione generale lineare del Teorema di Stone-Tukey discreto (3.1.3) che ci garantisce l'esistenza di un iperpiano  $h$  che divide a metà ogni  $A_i$  senza intersecare i loro punti. Dunque in modo analogo al caso di  $d$  dispari, possiamo utilizzare l'induzione sui due sottoinsiemi risultanti dopo la divisione attraverso l'iperpiano  $h$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.5.** Per  $n=2$  il Teorema può essere dimostrato con un metodo diretto. Non è conosciuta però una dimostrazione diretta (non topologica) per dimensioni maggiori.

# Capitolo 4

## Problemi di taglio discreti, ma con coltelli più interessanti

Ora che abbiamo capito come estendere il Teorema di Stone-Tukey 1.4.5 al caso discreto, in modo analogo a quanto visto nel capitolo 2, eliminiamo la restrizione ad iperpiani.

### 4.1 Teorema di Stone-Tukey discreto polinomiale

**Teorema 4.1.1 (di Stone-Tukey discreto polinomiale).** Sia  $d \geq 0$  un intero, e sia  $m = \binom{n+d}{n} - 1$ . Siano  $T_1, \dots, T_m \subset \mathbb{R}^n$  insiemi finiti. Allora esiste una  $n$ -varietà algebrica (polinomiale)  $Q$  di grado  $\leq d$  per cui  $\{Q = 0\}$  divide a metà ogni  $T_i$ .

Notiamo come per  $d=1$  il Teorema si riduce al caso originale 3.1.1.

*Dimostrazione.* Potremmo provare questo teorema nello stesso modo in cui abbiamo dimostrato la versione non discreta, ma fortunatamente esiste una scorciatoia per evitare di affrontare un'altra volta quell'argomentazione macchinosa.

Ricordiamo che  $m$  è il numero di monomi non costanti di dimensione  $\leq d$  con coefficiente 1 a  $n$  variabili. Costruiamo dunque una base di  $\mathbb{R}^m$  con questi monomi.

Ad esempio, se  $n = 2$  e  $d = 2$ , allora  $m = 5$ , e la base è  $\{x, y, x^2, xy, y^2\}$ .

Definiamo ora la mappa  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  che ad ogni  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$  associa l' $m$ -upla

costituita da tutti i monomi non costanti di grado  $\leq d$  con coefficiente 1.

In particolare, riprendendo l'esempio sopra ( $n = 2, d = 2$ ), tale mappa è definita come

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2, xy, y^2)$$

e dunque

$$\Phi(2, 3) = (2, 3, 4, 6, 9)$$

Perché la mappa  $\Phi$  è così utile? Ci permette di convertire un problema non lineare (difficile) in uno lineare (semplice).

Nel nostro caso, siano  $T_1, \dots, T_m \subset \mathbb{R}^n$  i nostri  $m$  insiemi finiti. Consideriamo gli insiemi  $\Phi(T_1), \dots, \Phi(T_m) \subset \mathbb{R}^m$ . Siccome questi sono insiemi discreti di  $\mathbb{R}^m$ , possiamo applicare l'originale Teorema di Stone-Tukey discreto 3.1.1 per concludere che esiste un certo iperpiano  $\{P = 0\}$  che divide a metà ogni  $\Phi(T_i)$ . Dunque  $P$  sarà un polinomio lineare in  $m$  variabili. Ricordiamo però che stiamo utilizzando come base di  $\mathbb{R}^m$  quella composta dai monomi non costanti di grado  $\leq d$  in  $n$  variabili con coefficiente 1, possiamo quindi vedere  $P$  come un polinomio in  $n$  variabili. Per evitare confusione chiameremo questa  $n$ -varietà polinomiale  $Q$ . Notiamo ora che  $\deg Q \leq d$ , poiché tutti i monomi che formano la base di  $\mathbb{R}^m$  hanno grado  $\leq d$ .

Vediamo ora come  $\{Q = 0\}$  divide a metà ogni  $T_i$ .

Sia  $s \in T_i$ , e sia  $\Phi(s)$  la sua immagine in  $\mathbb{R}^m$ . Notiamo come, nel modo in cui abbiamo definito  $Q$ , abbiamo che  $Q(s) = P(\Phi(s))$ . Dunque, se  $s$  era nel lato  $\{P < 0\}$  di  $T_i$  in  $\mathbb{R}^n$ , allora sarà nel lato  $\{Q < 0\}$  di  $T_i$  in  $\mathbb{R}^n$ , e i risultati sono analoghi per  $\{P = 0\}$  e  $\{P > 0\}$ . Dunque, siccome  $\{P = 0\}$  divide esattamente a metà ogni  $\Phi(T_i)$ , abbiamo che  $\{Q = 0\}$  divide a metà ogni  $T_i$ .  $\square$

# Appendice A

**Notazione:**  $\bar{A}$ =chiusura di  $A$ ;  $Int(A)$ =interno di  $A$ ;  $\partial A$ =frontiera di  $A$ .

**Definizione A.0.1 (insieme connesso).** Uno spazio  $X$  si dice *sconnesso* o *disconnesso* se è l'unione di due aperti non vuoti disgiunti. Altrimenti  $X$  si dice *connesso*.

Esistono molte altre definizioni equivalenti, ne presentiamo solo qualcuna di seguito:

- $X$  è *connesso* se gli unici sottoinsiemi sia aperti che chiusi sono  $X$  stesso e l'insieme vuoto.
- $X$  è *connesso* se non è unione di due insiemi chiusi, non vuoti e disgiunti.
- $X$  è *sconnesso* se esiste  $\emptyset \neq A \subseteq X$  con  $A^c \neq \emptyset$  e  $\partial A = \emptyset$ .

**Osservazione A.0.2.** Vale la pena osservare il fatto che un insieme  $A$  può essere contemporaneamente aperto e chiuso se e soltanto se la sua frontiera è vuota.

*Dimostrazione.* Sia  $A$  aperto e chiuso.

Sappiamo che  $A$  aperto  $\iff A = Int(A)$  e  $A$  chiuso  $\iff A = \bar{A} = \partial A \cup Int(A)$ .

Dunque  $A$  aperto e chiuso  $\iff Int(A) = \partial A \cup Int(A) \iff \partial A = \emptyset$  □

**Teorema A.0.3.** L'immagine di uno spazio connesso attraverso una mappa continua è connessa.

*Dimostrazione.*  $A$  è connesso se e soltanto se i suoi unici sottoinsiemi sia aperti che chiusi sono  $A$  stesso e  $\emptyset$  (si veda A.0.1). Supponiamo dunque che  $X$  sia uno spazio connesso ed  $f : X \rightarrow Y$  sia una funzione continua suriettiva, per dimostrare che  $Y$  è connesso facciamo vedere che i suoi unici sottoinsiemi sia aperti che chiusi sono  $Y$  stesso e  $\emptyset$ .

Essendo  $f$  continua, se  $U$  è aperto e chiuso in  $Y$ , allora  $f^{-1}(U)$  è aperto e chiuso in  $X$ . Ma essendo  $X$  connesso, sappiamo che i suoi unici sottoinsiemi aperti e chiusi sono  $X$  e  $\emptyset$ . Ciò significa che  $f^{-1}(U) = X$  oppure  $f^{-1}(U) = \emptyset$ , e quindi  $U = \emptyset$  o  $U = Y$ , poiché funzioni continue e suriettive mandano il tutto nel tutto e il vuoto nel vuoto.

Quindi  $Y$  è connesso. □

**Teorema A.0.4.** Gli intervalli aperti (chiusi) di  $\mathbb{R}$  sono omeomorfi tra loro.

*Dimostrazione.* Per dimostrare che gli intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$  sono omeomorfi tra loro, mostriamo come un generico intervallo chiuso  $[a, b]$  sia omeomorfo a  $[0, 1]$ , poi applicando la proprietà *transitiva* abbiamo la tesi. Vediamolo.

Costruiamo l'applicazione  $\phi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$  come

$$\phi(x) = x + (b - a)x$$

$\phi$  è un omeomorfismo, infatti è *continua*, *biunivoca* e la sua inversa  $\phi^{-1} : [a, b] \rightarrow [0, 1]$ ,

definita come

$$\phi^{-1}(y) \mapsto \frac{y - a}{b - a}$$

è anch'essa continua.

Abbiamo così dimostrato che ogni intervallo chiuso di  $\mathbb{R}$  è omeomorfo a  $[0, 1]$  e dunque per la proprietà *transitiva* abbiamo che tutti gli intervalli chiusi di  $\mathbb{R}$  sono omeomorfi tra loro.

Si verifica analogamente che anche tutti gli intervalli aperti  $(a, b)$  sono omeomorfi tra loro.

Non solo, ogni intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  è omeomorfo ad  $\mathbb{R}$ , tramite la funzione tangente  $f : -\frac{\pi}{2} \rightarrow \mathbb{R}$  che ad  $x$  associa  $\tan x$ . □

**Definizione A.0.5 (n-sfera).** Una  $n$ -sfera in  $S^n$  è l'insieme di punti

$$\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

**Definizione A.0.6 (insieme limitato).** Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  si dice *limitato* se esiste una  $n$ -sfera che lo contiene.

**Definizione A.0.7 (iperpiano).** Un *iperpiano* è un sottospazio lineare di dimensione  $n - 1$  rispetto allo spazio che lo contiene.

**Definizione A.0.8 (campo algebricamente chiuso).** Un campo algebricamente chiuso è un campo  $F$  in cui ogni polinomio non costante a coefficienti in  $F$  ha una radice in  $F$ .

**Definizione A.0.9 (varietà algebrica).** Sia  $K$  un campo algebricamente chiuso,  $K[x_1, \dots, x_n]$  l'anello di polinomi su  $K$  in  $n$  variabili, e  $\{f_i\}_{i=1, \dots, m}$  una famiglia di polinomi dell'anello. Il sottoinsieme di  $K^n$  formato dai punti che annullano tutti i polinomi  $\{f_i\}_{i=1, \dots, m}$  è una varietà algebrica:

$$V = \{(x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid f_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall i = 1, \dots, m\}.$$

**Definizione A.0.10 (insieme convesso).** In uno spazio euclideo un insieme convesso è un insieme nel quale, per ogni coppia di punti, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nell'insieme.

**Definizione A.0.11 (involucro convesso).** Si definisce involucro convesso (o talvolta involucro convesso) di un qualsiasi sottoinsieme  $I$  di uno spazio vettoriale reale, l'intersezione di tutti gli insiemi convessi che contengono  $I$ .

# Bibliografia

- [K] Czes Kosniowski.  
*A First Course in Algebraic Topology*. Cambridge University Press (1980).
- [M] Marco Manetti.  
*Topologia*. Springer Italia, Milano (2008).
- [M2] William S. Massey.  
*Algebraic Topology : An Introduction*. Springer USA, New York (1991).
- [M3] Jiří Matoušek.  
*Using The Borsuk – Ulam Theorem*. Springer Germany, Berlin (2003).