

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**EQUAZIONI DI STRUTTURA
DEGLI INTERNI STELLARI**

Tesi di Laurea in Fondamenti di Astronomia

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
MARCELLA BRUSA

Presentata da:
VALENTINA GRILLINI

Sessione Unica
Anno Accademico 2019-2020

Introduzione

Il desiderio di conoscenza dell'uomo ha da sempre stimolato l'osservazione della volta celeste, alimentando l'interesse degli studiosi per i fenomeni cosmici. L'avvento del metodo scientifico ha dato poi il via a una dettagliata analisi della fisica celeste e a un vasto sviluppo della scienza astronomica.

Lo studio della struttura ed evoluzione stellare comincia a svilupparsi a metà dell'Ottocento anche grazie ai suoi risultati ottenuti da Kirchhoff nell'analisi della radiazione emessa da un corpo in equilibrio termodinamico, il corpo nero. Inoltre, dalle osservazioni dirette del Sole, gli astronomi hanno identificato le stelle come masse gassose ad alta temperatura, autogravitanti, trattabili con la teoria dei gas perfetti e tali che la loro emissione si avvicini ai risultati ottenuti per la radiazione di corpo nero.

La struttura delle stelle è descritta da un insieme di equazioni che mettono in relazione le quantità fisiche fondamentali che regolano l'equilibrio degli interni stellari, ossia massa, pressione, luminosità e temperatura. L'elaborato ha lo scopo di presentare le quattro equazioni fondamentali: conservazione della massa, equilibrio idrostatico, conservazione dell'energia e trasporto energetico.

Osserveremo come le equazioni presentino una dipendenza da altre tre variabili e, a questo fine, tratteremo l'equazione di stato, il coefficiente di opacità e l'efficienza di produzione di energia secondo i diversi meccanismi che si verificano.

Nell'ultima sezione ci occuperemo dell'evoluzione della struttura delle stelle. Esse non sono infatti corpi statici ma evolvono a causa della continua perdita di energia sulla superficie che richiede la produzione di nuova energia negli strati più interni. Vedremo come la struttura di una stella e la sua evoluzione temporale siano ottenibili con sofisticati metodi matematici che soddisfano sia le relazioni analizzate nella prima parte sia le condizioni al centro e sulla superficie della stella, chiamate condizioni al bordo.

Indice

Introduzione	i
1 Equazioni di equilibrio degli interni stellari	1
1.1 Assunzioni	2
1.2 Equazione di conservazione della massa	4
1.2.1 Derivazione Euleriana	4
1.2.2 Legame tra descrizione Euleriana e Lagrangiana	4
1.3 Equilibrio idrostatico	5
1.3.1 Derivazione Euleriana	5
1.3.2 Conseguenza: il Teorema del Viriale	7
1.4 Equazione di conservazione dell'energia	8
1.4.1 Derivazione Euleriana	8
1.4.2 Bilancio energetico globale	9
1.5 Equazione del trasporto dell'energia	10
1.5.1 Trasporto tramite radiazione	11
1.5.2 Il caso convettivo	13
1.5.3 Processo adiabatico	14
1.6 Sistema completo delle equazioni di struttura	18
2 Relazioni caratterizzanti degli interni stellari	19
2.1 Equazione di stato	19
2.2 Coefficiente di opacità	22
2.3 Coefficiente di generazione dell'energia	26

3	Condizioni al bordo e modello risolutivo	29
3.1	Condizioni al bordo	29
3.2	Modello risolutivo	32
3.2.1	Il metodo del raccordo	34
3.2.2	Il metodo delle shell	34
3.2.3	Relazioni di omologia	34
	Conclusione	38
	Elenco delle figure	39
	Bibliografia	40

Capitolo 1

Equazioni di equilibrio degli interni stellari

Le stelle sono il risultato del collasso gravitazionale di una grande nube densa di materiale interstellare che comincia a contrarsi e si frammenta. La contrazione non è ostacolata dalla pressione interna perché densità e temperatura nelle fasi iniziali sono troppo basse per generare energia sufficiente. Questo processo causa la conservazione del momento angolare e la formazione di un disco. In ogni frammento della nube originaria la contrazione continua, dando origine ad ammassi di materiale, chiamati protostelle, che si riscaldano ed emettono radiazione convertendo energia gravitazionale in energia termica. Il collasso termina quando nel nucleo si attivano le reazioni di fusione nucleare e la pressione termica dovuta all'energia rilasciata bilancia la forza gravitazionale.

Nel primo capitolo di questo elaborato ci occuperemo della formulazione delle quattro equazioni che regolano l'equilibrio degli interni stellari, avvalendoci di un modello di struttura stellare semplificato presentato nella sezione 1.1.

Osserveremo come è possibile, nella derivazione delle equazioni, procedere con due diversi approcci: il metodo Euleriano¹ e il metodo Lagrangiano², presentando la relazione che intercorre tra i due. Vedremo inoltre come le equazioni considerate conducono a importanti risultati largamente utilizzati in ambito fisico.

¹Prende il nome da *Leonhard Euler* (1707-1783), più conosciuto con il nome di Eulero, matematico svizzero che ha significativamente arricchito il panorama matematico del Settecento lasciando anche numerosi scritti.

²Nome dovuto a *Giuseppe Luigi Lagrangia* (1736-1813), uno dei maggiori scienziati dell'Illuminismo. Ha condotto importanti studi relativi al calcolo delle variazioni e alla risoluzione delle equazioni differenziali alle derivate parziali. Lo studioso italiano viene comunemente ricordato con il nome francese Lagrange.

1.1 Assunzioni

La struttura di una stella e la sua evoluzione temporale sono ottenibili attraverso la risoluzione di complicati sistemi di equazioni differenziali servendosi di tecniche sofisticate: conoscendo la massa e la composizione chimica di una stella è possibile ricavarne la temperatura, la pressione, la relazione massa-luminosità e le principali proprietà che ne caratterizzano la struttura e l'evoluzione.

Al fine di semplificare la derivazione di tali equazioni e di creare un modello risolutivo, ci avvaliamo di alcune approssimazioni: prendiamo in considerazione stelle gassose e auto-gravitanti e ne studiamo la rotazione e il campo magnetico in relazione al campo gravitazionale.

Il potenziale gravitazionale a distanza r di un punto di massa m è $\Phi = -\frac{Gm}{r}$, con G costante gravitazionale³.

Considerando la totalità della stella di raggio R e massa interna M , si ottiene il potenziale $\Phi = -\frac{GM}{R}$. L'energia di legame diventa quindi $E_{grav} \sim M\Phi \sim -\frac{GM^2}{R}$.

L'energia di rotazione è dell'ordine di $E_{rot} \sim M\Omega^2 R^2$.

Analizzando l'esempio del Sole, il periodo di rotazione è circa $P = 27$ giorni e la velocità angolare $\Omega = \frac{2\pi}{P} \approx 2.7 \times 10^{-6} s^{-1}$.

Confrontando le energie gravitazionale e rotazionale, si ha:

$$\frac{E_{rot}}{|E_{grav}|} = \frac{M\Omega^2 R^2}{\frac{GM^2}{R}} = \frac{\Omega^2 R^3}{GM} \sim 2 \times 10^{-5}.$$

La rotazione ha quindi un'influenza trascurabile sulla struttura stellare, anche nel caso di rotazioni molto più rapide di quella solare.

Per quanto riguarda i campi magnetici, l'energia è descritta dal prodotto del volume per la densità di energia, da cui $E_{magn} = \frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{B^2}{8\pi} = \frac{B^2 R^3}{6}$, dove B è l'intensità di campo magnetico. Il rapporto con l'energia gravitazionale è:

$$\frac{E_{magn}}{|E_{grav}|} = \frac{\frac{B^2 R^3}{6}}{\frac{GM^2}{R}} = \frac{B^2 R^4}{6GM^2} \sim 10^{-11}.$$

Abbiamo visto come rotazione e campi magnetici non influenzano in modo significativo la struttura della stella, a meno che non occorra qualche fenomeno eccezionale, situazione che possiamo escludere nella seguente trattazione del modello di struttura stellare.

³ $G = 6.673 \times 10^{-11} Nm^2 kg^{-2}$

Oltre a quanto discusso, assumiamo che le stelle siano isolate nello spazio, cosicché la loro struttura e evoluzione dipenda solo dalle proprietà intrinseche come massa e composizione chimica, con quest'ultima omogenea grazie all'omogeneità del mezzo interstellare da cui proviene. Le stelle con queste caratteristiche presentano una simmetria sferica dato che le sole forze agenti, in mancanza di rotazione e campi magnetici, sono pressione e gravità. Tale simmetria permette di avere forze costanti su superfici sferiche che necessitano di una sola variabile per la descrizione completa.

La scelta del parametro indipendente non è univoca e conduce a diverse piste di lavoro.

Una prima idea è selezionare come variabile, rispetto alla quale descrivere le proprietà degli interni stellari, la distanza r dal centro della sfera. Questa scelta è alla base della derivazione Euleriana delle quattro equazioni di equilibrio.

Le altre quantità sono quindi funzioni del raggio r :

$m = m(r)$ = massa contenuta entro un raggio r dal centro della stella;

$\rho = \rho(r)$ = densità a distanza r dal centro della stella;

$P = P(r)$ = pressione risultante a distanza r dal centro della stella;

$T = T(r)$ = temperatura a distanza r dal centro della stella;

$L = L(r)$ = luminosità a distanza r dal centro della stella.

Il valore della variabile indipendente r è confinato tra $r=0$ (centro) e $r=R$ (superficie).

Sebbene la scelta del raggio come variabile risulti la più naturale, è possibile pensare alla massa come parametro da cui dipendono tutte le altre grandezze. In questo modo si ottiene quella che viene chiamata derivazione Lagrangiana. La coordinata Lagrangiana è confinata tra $m(r) = 0$ (centro) e $m(r) = M$ (superficie). Nel paragrafo 1.2.2 studieremo come le due possibili scelte siano in relazione tra loro. Oltre all'unico parametro che descrive le proprietà della stella, è necessario introdurre una seconda dipendenza da una variabile t che tenga in considerazione come si modificano nel tempo le quantità definite sopra.

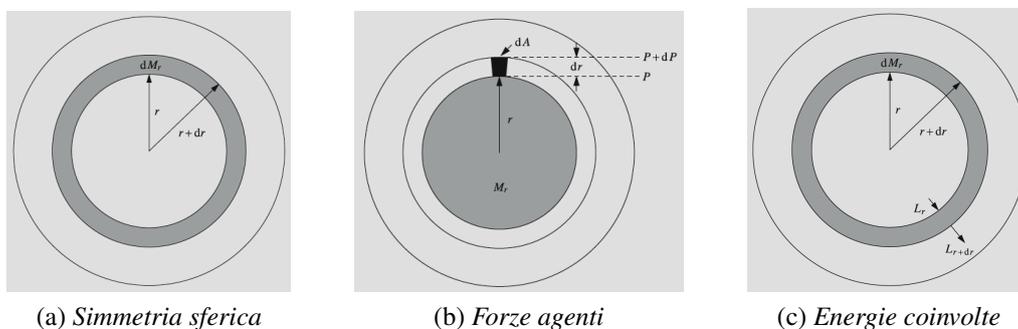


Figura 1.1: L'immagine (a) fornisce una rappresentazione grafica della simmetria sferica; l'immagine (b) descrive i diversi contributi simmetrici delle forze agenti; l'immagine (c) mostra come le energie coinvolte agiscono in simmetria sferica. Fonte: [6] Karttunen et al., *Fundamental Astronomy*.

1.2 Equazione di conservazione della massa

1.2.1 Derivazione Euleriana

La Figura 1.1(a) mostra la struttura stellare che abbiamo descritto. La massa contenuta all'interno della sfera di raggio r è data da

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr.$$

Per la stabilità della stella, la massa $m(r)$ deve essere equivalente alla massa $m(r+dr)$ contenuta in una sfera di raggio $r+dr$ al limite per $dr \rightarrow 0$. Pertanto risulta la forma differenziale

$$dm = 4\pi r^2 \rho(r) dr. \quad (1.1)$$

Abbiamo quindi ricavato la prima equazione di equilibrio degli interni stellari.

Equazione di conservazione della massa

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (1.2)$$

1.2.2 Legame tra descrizione Euleriana e Lagrangiana

L'equazione di conservazione della massa (1.2) porta in sé la relazione che intercorre tra la derivazione Euleriana e quella Lagrangiana⁴.

Considerando l'ulteriore dipendenza dal tempo t :

$\mathbf{m} = \mathbf{m}(\mathbf{r}, t)$ = massa contenuta in una sfera di raggio r al tempo t .

Il legame della trasformazione $r, t \rightarrow m, t$ è dato da:

$$\frac{\partial}{\partial m(r)} = \frac{\partial}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial m(r, t)}.$$

Combinando questa con la relazione (1.1), che descrive la variazione della massa dovuta a variazioni di raggio r a tempo t costante, si ottiene

$$\frac{\partial r}{\partial m(r)} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}.$$

⁴Si confronti l'introduzione al Capitolo 1.

Da cui il legame tra i due operatori risulta

$$\frac{\partial}{\partial m(r)} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (1.3)$$

Con il risultato appena trovato diventa semplice passare da una descrizione all'altra, agevolando la risoluzione delle equazioni in funzione della quantità che siamo interessati a trovare.

1.3 Equilibrio idrostatico

Il termine del collasso gravitazionale di una nube di materiale e la conseguente formazione di una stella dà luogo ad un bilanciamento delle forze agenti dall'esterno e dall'interno che permette ad essa di trovarsi per la maggior parte della sua vita in condizioni di equilibrio idrostatico.

1.3.1 Derivazione Euleriana

Consideriamo la Figura 1.1(b) con le assunzioni fatte in 1.1. Un elemento di volume cilindrico a distanza r dal centro della stella è dato da $dV = dA \cdot dr$, dove dA è la base e dr l'altezza.

La massa dell'elemento è $dM_r = \rho(r) \cdot dA dr$ con $\rho(r)$ densità nella posizione r .

La sola forza verso l'esterno è la pressione esercitata dal materiale della stella sulla parte più interna dell'elemento di volume considerato data da $dF_p = PdA$.

Per quanto riguarda le forze verso l'interno, abbiamo due contributi:

- la forza di pressione del materiale della stella sulla parte superiore dell'elemento di volume $dF_p = -(P + dP)dA$;
- la forza gravitazionale $dF_g = -gdm$. Il valore dell'accelerazione gravitazionale g ad una distanza r non dipende dagli elementi di massa esterni a r , si ha $g = \frac{GM_r}{r^2}$. Quindi $dF_g = -\frac{GM_r}{r^2} dm = -\frac{GM_r \rho}{r^2} dA dr$.

Calcolando la risultante all'equilibrio

$$0 = dF_g + dF_p = -\frac{GM_r \rho}{r^2} dA dr + PdA - PdA - dPdA = -\frac{GM_r \rho}{r^2} dA dr - dPdA,$$

si ottiene la seconda equazione di equilibrio degli interni stellari.

Equazione di equilibrio idrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} \quad (1.4)$$

Osserviamo che il lato sinistro dell'uguaglianza è sempre negativo. Questo perché il gradiente di pressione è negativo dato che la pressione decresce dalle regioni più interne alle regioni più esterne.

Nel caso in cui la stella non fosse in equilibrio idrostatico per ogni raggio e per ogni elemento di massa, dominerebbe la gravità se $dF_g + dF_p < 0$, con conseguente contrazione; viceversa si avrebbe espansione dovuta a una pressione interna superiore alla gravità se $dF_g + dF_p > 0$.

A seguito di una perturbazione, l'equilibrio idrostatico viene normalmente ripristinato. È tuttavia possibile che queste variazioni portino a oscillazioni visibili.

L'equazione ottenuta in (1.4) può essere ampliata nel caso in cui la stella non sia statica. In questa particolare situazione, l'accelerazione di un elemento del gas che costituisce la stella è la risultante di tutte le forze che agiscono su di esso. In aggiunta alle componenti gravitazionale e di pressione, risultano non trascurabili le forze agenti nella direzione radiale.

L'accelerazione di un elemento cilindrico del gas con massa

$$dm = \rho dA dr$$

è data da

$$\ddot{r} dm = -g dm + P(r) dA - P(r + dr) dA$$

da cui, ricordando

$$\ddot{r} = \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \quad e \quad g = \frac{GM_r}{r^2}$$

si ottiene

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{GM_r}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r},$$

di cui la (1.4) è la semplificazione al caso statico.

1.3.2 Conseguenza: il Teorema del Viriale

Dalla relazione (1.4) è possibile ricavare, tramite integrazione, un teorema di equilibrio fortemente utilizzato in svariati campi della fisica, anche molto lontani dall'astrofisica stellare: il Teorema del Viriale⁵.

Consideriamo un sistema di un numero enorme di particelle in uno spazio limitato, in grado di muoversi disordinatamente sotto azione di una forza che vari con la distanza in modo conosciuto. Il Teorema del Virale stabilisce che, per ottenere l'equilibrio di un tale sistema, l'energia cinetica K delle particelle deve essere uguale alla metà della loro energia potenziale U , ossia

$$2K + U = 0.$$

Vediamo come arrivare a questo risultato a partire da (1.4).

Possiamo ricavare la forma Lagrangiana della seconda equazione di equilibrio tramite la relazione (1.3) ottenendo

$$\frac{dP}{dm} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \cdot \frac{1}{4\pi r^2\rho} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}. \quad (1.5)$$

Effettuiamo ora una moltiplicazione a destra e a sinistra per $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, ossia per il valore del volume contenuto in un raggio r , e integriamo rispetto alla massa dal centro alla superficie:

$$\int_0^M \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = -\frac{1}{3} \int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r$$

$$\int_0^M \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{dP}{dM_r} dM_r = [4\pi r^3 P]_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial M_r} P dM_r. \quad (1.6)$$

Al centro, con $r = 0$, e sulla superficie, con $P = 0$, il termine tra parentesi quadre si annulla. Ricordando $\frac{\partial r}{\partial M_r} = \frac{1}{4\pi r^2\rho}$ e la (1.5), la (1.6) diventa

$$\int_0^M \frac{GM_r}{r} dM_r = 3 \int_0^M \frac{P}{\rho} dM_r. \quad (1.7)$$

Il membro a sinistra della (1.7) è l'opposto dell'energia potenziale gravitazionale della stella. Il termine di destra della (1.7) è legato all'energia cinetica del sistema. In particolare, dalle leggi della termodinamica si ha che il rapporto $\frac{P}{\rho}$ è proporzionale all'energia cinetica del gas per unità di massa, ossia P è proporzionale all'energia cinetica per unità di volume V .

⁵La prima formulazione del teorema risale al 1870 ed è attribuita a *Rudolf Clausius* (1822-1888). Fisico e matematico tedesco, fu uno dei promotori degli studi in ambito termodinamico.

Nel caso di gas non relativistico⁶, la relazione è $P = \frac{2}{3}V$.

Da questo segue che l'energia cinetica K è legata all'energia gravitazionale U in questo modo: $K = -\frac{1}{2}U$, da cui il Teorema del Viriale: $2K + U = 0$.

1.4 Equazione di conservazione dell'energia

L'equilibrio idrostatico non è sufficiente a garantire la stabilità di una stella per la quale si necessita anche di una condizione di equilibrio termico. È importante osservare che, a causa della presenza di un gradiente di temperatura e di flussi interni, non si potrà parlare di un perfetto equilibrio termico secondo il quale tutti i punti della stella hanno la stessa temperatura e non vi sono scambi di energia tra le parti. Intenderemo allora questo equilibrio come un'uguaglianza tra l'energia prodotta e l'energia emessa a seguito del trasporto in superficie, che per la stella avviene in direzione radiale.

1.4.1 Derivazione Euleriana

Consideriamo un volume V di materia racchiuso in una superficie S arbitraria, con riferimento alla Figura 1.1(c). Definiamo ε il tasso netto di produzione di energia per grammo e per secondo⁷ dell'elemento di materia e F il flusso di energia da un punto della superficie S . Per la legge di conservazione dell'energia, necessariamente si ha

$$\oint_S F \cdot dS = \int_V \rho \varepsilon dV.$$

Applicando il Teorema della divergenza si ha $\nabla \cdot F = \rho \varepsilon$, per l'arbitrarietà del volume V . Tale risultato costituisce la condizione di equilibrio termico.

Esprimendo tutto in coordinate polari e ricordando che siamo in simmetria sferica (quindi il flusso F dipende solo dalla distanza r dal centro), si ha

$$\nabla \cdot F = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2 F) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{d}{dr}(4\pi r^2 F) = \rho \varepsilon.$$

Ponendo la luminosità $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$, ossia considerando l'energia emessa per secondo dall'intera superficie, si ha la terza equazione di equilibrio degli interni stellari.

⁶Gas per cui il momento della quantità di moto massimo occupabile delle particelle in una distribuzione degenera è molto inferiore alla quantità data dal prodotto della massa dell'elettrone per la velocità della luce.

⁷ ε rappresenta l'efficienza della stella nel produrre energia; ha unità di misura $\text{erg s}^{-1} \text{g}^{-1}$

Equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \quad (1.8)$$

La luminosità totale irradiata in condizione di equilibrio termico è quindi

$$L = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr.$$

1.4.2 Bilancio energetico globale

L'energia totale di una stella è la somma dei contributi energetici derivanti dal potenziale gravitazionale U , dell'energia cinetica K e dal contributo cinetico E_{cin} dovuto al movimento caotico del gas all'interno della stella e non al moto termico delle particelle:

$$E_{tot} = U + K + E_{cin}. \quad (1.9)$$

La stella rimane legata fintanto che l'energia totale è negativa. Per una stella in equilibrio idrostatico possiamo considerare nulla E_{cin} . Inoltre, ricordando il Teorema del Viriale visto in 1.3.2 per un gas non relativistico, vale la relazione $K = -\frac{1}{2}U$. Riscrivendo la (1.9) si ha

$$E_{tot} = U + K = -K = \frac{1}{2}U < 0. \quad (1.10)$$

Otteniamo, cioè, che l'energia totale della stella equivale alla metà della sua energia potenziale gravitazionale.

Dalla relazione (1.10) possiamo condurre due importanti osservazioni:

- Per mantenere l'equilibrio idrostatico, le stelle devono essere calde. Questo perché devono avere pressione sufficiente a bilanciare la gravità: più una stella è compatta, più è strettamente legata, più calda deve essere.
- L'energia che la stella rilascia nell'ambiente circostante, ovvero la luminosità L , in assenza di una sorgente di energia interna, deve eguagliare la diminuzione dell'energia totale della stella, ossia⁸ $L = -\frac{dE_{tot}}{dt} > 0$.

⁸Il segno meno davanti alla frazione è dovuto alla convenzione di considerare positiva la luminosità L .

Derivando la (1.10), troviamo che, a seguito di una perdita di energia,

$$\dot{U} = -2L < 0 \quad e \quad \dot{K} = L > 0.$$

Ciò significa che la stella si contrae diventando più strettamente legata e si scalda, al contrario degli oggetti comuni che si raffreddano quando perdono energia.

1.5 Equazione del trasporto dell'energia

L'energia irradiata dalla superficie della stella verso l'esterno proviene solitamente da una sorgente che risiede nella parte più interna. Si tratta di energia originata dalla fusione nucleare dell'Idrogeno, elemento presente nel materiale costituente della stella appena formata, in Elio e dalle successive reazioni che si susseguono a catena di cui tratteremo più dettagliatamente nel paragrafo 2.3.

L'energia generata nel nucleo deve quindi poter essere trasportata verso gli strati più esterni fino in superficie. Questo processo è possibile grazie alla presenza di un gradiente di temperatura non nullo.

La radiazione è il meccanismo di trasporto più significativo, ma non è il solo presente. Negli interni stellari, dove la materia e la radiazione sono sempre in equilibrio e il libero cammino medio sia dei fotoni che delle particelle di gas è estremamente piccolo, il calore può essere trasportato anche per conduzione e convezione.

Generalmente il trasporto per conduzione può essere trascurato non essendo tanto efficiente quanto gli altri due. Infatti, l'elevata densità rende il libero cammino medio delle particelle di un gas non degenere, trasportate per conduzione, piccolo rispetto a quello dei fotoni, trasportati per radiazione.

L'energia trasportata dalle particelle per conduzione è $E \sim \frac{3}{2}kT$ con k costante di Boltzmann⁹; l'energia trasportata dal fotone è $E \sim \frac{hc}{\lambda}$ con h costante di Planck¹⁰, c velocità della luce nel vuoto¹¹ e λ lunghezza d'onda misurata in metri.

La densità delle particelle è molto maggiore di quella dei fotoni, pertanto apparentemente la conduzione ha un ruolo più significativo della radiazione; tuttavia, in condizioni tipiche¹², il

⁹ $k = 1,380649 \cdot 10^{-23} JK^{-1}$

¹⁰ $h = 6,625 \cdot 10^{-34} J \cdot s$

¹¹ $c = 3 \cdot 10^8 m/s$

¹²Ad esempio sulla superficie solare $T = 5000 K$ e $\lambda = 5000 \text{ \AA} = 5 \times 10^{-7} m$

libero cammino medio dei fotoni è dell'ordine di 10^{-2} metri, mentre quello delle particelle è dell'ordine di 10^{-10} metri. Il fotone percorre quindi un tratto di strada maggiore prima di interagire ulteriormente con la materia ed è per questo più efficiente nel trasportare energia.

In condizioni normali, la conduzione è marginale rispetto alla radiazione nella maggior parte delle regioni stellari.

1.5.1 Trasporto tramite radiazione

Studiamo il legame tra il gradiente di temperatura e il flusso locale di energia, ossia l'energia fluente per cm^2 per secondo alla distanza r , per il trasporto radiativo.

Nel caso della radiazione, il trasporto avviene tramite l'emissione e l'assorbimento di fotoni.

Nell'attraversare uno strato di spessore dr e densità ρ , l'intensità specifica I_ν del fascio di radiazione in direzione perpendicolare diminuisce seguendo la legge

$$\frac{dI_\nu}{dr} = -k_\nu \rho I_\nu,$$

dove k_ν è detto coefficiente di assorbimento di massa alla frequenza ν ¹³.

In generale, per una propagazione in una qualsiasi direzione è necessario modificare la relazione considerando l'angolo θ descritto dal fascio rispetto alla posizione dello strato considerato:

$$\cos(\theta) \frac{dI_\nu}{dr} = -k_\nu \rho I_\nu. \quad (1.11)$$

Moltiplicando I_ν per $\cos(\theta)$ e integrando rispetto alla frequenza e all'angolo solido si ha:

$$\int_{\Omega} \int_{\nu} I_\nu \cos^2(\theta) = \frac{4}{3} \pi I. \quad (1.12)$$

Nel caso di radiazione isotropica, dove $\pi I = F_r$, si ha

$$\int_{\Omega} \int_{\nu} I_\nu \cos^2(\theta) = \frac{4}{3} \pi I = \frac{4}{3} F_r. \quad (1.13)$$

Poiché la radiazione all'interno di una stella in equilibrio idrostatico è quasi equivalente a quella di corpo nero, il flusso netto misurato è $F_r = \sigma T^4$, dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann¹⁴.

Sostituendo in (1.13) si ha

$$\int_{\Omega} \int_{\nu} I_\nu \cos^2(\theta) = \frac{4}{3} \sigma T^4. \quad (1.14)$$

¹³É anche chiamato coefficiente di opacità. Ha unità di misura $cm^2 g^{-1}$

¹⁴ $\sigma = \frac{ac}{4} = 5,670367 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, dove a è costante di densità.

Riassumendo, dalla (1.11) e dalla (1.14), abbiamo due risultati:

- $\int_{\Omega} \int_V \frac{dI_v}{dr} \cos^2(\theta) = \frac{d}{dr} \frac{4}{3} \sigma T^4$ e
- $\int_{\Omega} \int_V -k_v \rho I_v \cos\theta = -k_r \rho \pi I = -k_r \rho F_r$, dove k_r è il valore medio del coefficiente di opacità sulle lunghezze d'onda nel caso radiativo.

Otteniamo pertanto la relazione

$$\frac{4}{3} \pi \frac{d}{dr} \left(\frac{\sigma}{\pi} T^4 \right) = -k_r \rho F_r.$$

Il flusso di energia è pari a

$$F_r = -\frac{16\sigma T^3}{3k_r \rho} \left(\frac{dT}{dr} \right). \quad (1.15)$$

Osserviamo che il flusso di radiazione è sempre negativo perché si verifica una perdita di energia che viene irradiata, pertanto anche il gradiente di temperatura $-\frac{dT}{dr}$ deve risultare negativo; questo significa che il calore è sempre trasferito da una regione più calda a una regione più fredda.

Ricordando $L(r) = 4\pi r^2 F(r)$, otteniamo che la relazione che regola la luminosità nel caso considerato è

$$L(r) = -\left(\frac{16\pi a c r^2 T^3}{3k_r \rho} \right) \left(\frac{dT}{dr} \right). \quad (1.16)$$

Dall'equazione (1.15) sappiamo che, assegnato il gradiente di temperatura, il flusso trasportabile dalla radiazione è fissato; inoltre, dato un certo flusso di energia, è possibile determinare il gradiente di temperatura necessario al trasporto in assenza di altri meccanismi.

Possiamo quindi enunciare la quarta equazione di equilibrio degli interni stellari nel caso di trasporto radiativo.

Equazione di trasporto dell'energia per radiazione

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3k_r \rho}{16\sigma T^3} F(r) = -\frac{3k_r \rho}{64\pi r^2 \sigma T^3} L(r) \quad (1.17)$$

Come abbiamo discusso, generalmente il trasporto conduttivo non è molto efficiente e può essere trascurato. Questo non succede nel caso di gas di elettroni degeneri (come per le nane bianche e le stelle giganti rosse), quando la conduzione interviene maggiormente a causa di un

comportamento collettivo degli elettroni. In questo caso, il flusso di energia è posto proporzionale al gradiente di temperatura. Definiamo λ il coefficiente di conduttività, cioè la quantità che descrive la proporzionalità

$$F_c = -\lambda \frac{dT}{dr}.$$

Considerando l'opacità conduttiva k_c , tramite una complicata teoria dei gas degeneri si ottiene la relazione $\lambda = \frac{16\sigma T^3}{3k_c\rho}$. Possiamo quindi scrivere

$$F_c = -\frac{16\sigma T^3}{3k_c\rho} \frac{dT}{dr}.$$

Quando occorrono insieme i meccanismi radiativo e conduttivo nel trasporto energetico, si definisce un flusso complessivo con un'opacità media $k = \frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_c}$:

$$F = F_r + F_c = -\frac{16\sigma}{3} \frac{k}{\rho} T^3 \left(\frac{dT}{dr} \right).$$

Sostituendo in (1.17) otteniamo la rappresentazione della quarta equazione nel caso di combinazione di trasporto radiativo e conduttivo:

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{3k\rho}{64\pi r^2 \sigma T^3} L(r).$$

1.5.2 Il caso convettivo

Il gradiente di temperatura presentato in (1.17), che considera il solo trasporto energetico radiativo, può dar luogo ad alcune instabilità, che portano alla formazione di moti di materia. Tali moti originano celle convettive su larga scala, le quali permettono la trasmissione di energia tramite convezione.

Se il mezzo in cui avviene il trasporto è omogeneo, come succede nelle stelle¹⁵, le condizioni che permettono il trasporto per convezione si possono ottenere dal confronto tra il gradiente di temperatura radiativo e il gradiente di temperatura adiabatico, che verrà definito nel paragrafo 1.5.3. In particolare si ha convezione se il gradiente di temperatura radiativo è più ripido di quello adiabatico, ossia se

$$\left| \frac{dT}{dr} \right| = \frac{3k\rho F_r}{4acT^3} > \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}.$$

Per descrivere il trasporto per convezione non è ancora stata formulata una teoria completa e si ricorre ad una formulazione semplice basata sul fatto che un elemento convettivo si origini con

¹⁵L'esistenza di regioni convettive permette il rapido moto degli elementi e il loro mescolamento, dando luogo a regioni omogenee.

dimensione caratteristica, chiamata lunghezza di mescolamento; si sposti della stessa quantità e infine si dissolva sprigionando l'energia nel mezzo circostante. Con questa teoria, chiamata della *Mixing Length* (lunghezza di mescolamento), è possibile ricavare il flusso convettivo, tramite il quale si ottiene la relazione che descrive il gradiente di temperatura nel caso di trasporto per convezione. Analizzeremo una formulazione semplice della teoria nel paragrafo 1.5.3, a seguito della definizione di gradiente adiabatico.

1.5.3 Processo adiabatico

Studiamo ora cosa accade in presenza di processi adiabatici, ossia rapidi processi che avvengono senza scambio di calore con l'ambiente circostante. Per delineare le proprietà degli interni stellari sotto condizioni adiabatiche abbiamo necessità di studiare alcune derivate.

Dato che molte quantità fisiche sono espresse in termini di densità e temperatura, è opportuno usare queste ultime come variabili rispetto alle quali derivare. Al fine di ricavare i gradienti che cerchiamo, è utile scrivere l'equazione di stato, che descrive le proprietà della materia stellare per una data densità e temperatura¹⁶, in forma differenziale in questo modo:

$$\frac{dP}{P} = d \ln P = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_T d \ln \rho + \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln T} \right)_\rho d \ln T = \frac{\rho}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_T \frac{d\rho}{\rho} + \frac{T}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_\rho \frac{dT}{T}.$$

L'esponente adiabatico γ_{ad} , che misura la risposta della pressione ai processi adiabatici di compressione o espansione, è definito

$$\gamma_{ad} = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{ad}.$$

Il gradiente di temperatura adiabatico definito

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{ad}$$

descrive, invece, il comportamento della temperatura in risposta alla compressione ed espansione adiabatica.

La Figura 1.2 rappresenta il gradiente di temperatura adiabatico ∇_{ad} in funzione della temperatura per un modello stellare con massa simile a quella del Sole, tra la temperatura superficiale di circa 6000 K e temperatura centrale $T \approx 1.5 \times 10^7 K$. La prima zona di depressione visibile nel grafico, in corrispondenza ad una temperatura di circa $10^4 K$ deriva dalla zona di

¹⁶ $P = P(\rho, T)$

ionizzazione dell'Idrogeno; la seconda depressione, meno marcata, a $T \approx 10^5 K$ è dovuta alla zona di ionizzazione dell'Elio.

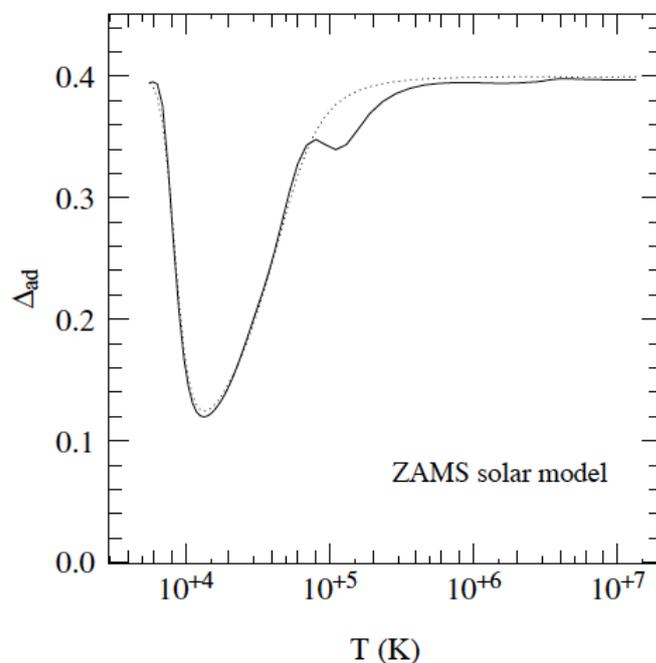


Figura 1.2: Gradiente adiabatico in funzione della temperatura. Fonte: [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*.

Chandrasekhar¹⁷ ha introdotto le componenti adiabatiche Γ_1 e Γ_2 che alleggeriscono la notazione e sono in relazione a γ_{ad} e ∇_{ad} nel seguente modo:

$$\Gamma_1 = \gamma_{ad} \quad e \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \nabla_{ad}.$$

Con queste definizioni possiamo riprendere la presentazione della Teoria della Mixing Length introdotta in 1.5.2. Anzitutto poniamo la lunghezza di mescolamento uguale a αH_p , con α parametro e H_p distanza necessaria a una variazione della pressione di un valore fissato. Gli elementi di materia, partendo da una posizione di equilibrio, si spostano quindi di una distanza $\Lambda = \alpha H_p$ verso l'alto o verso il basso lungo una direzione radiale.

Dopo un movimento verso l'alto, posto $\frac{dT}{dr}$ gradiente di temperatura del mezzo entro il quale si muove l'elemento convettivo, la differenza di temperatura lungo il tragitto Λ è descritta da

$$\Delta T = \left[\left(\frac{dT}{dr} \right)_e - \left(\frac{dT}{dr} \right) \right] \Lambda,$$

¹⁷Subrahmayan Chandrasekhar (1910-1995), di origini indiane, è stato fisico, astrofisico e matematico. I suoi studi sulla struttura ed evoluzione delle stelle sono valse il premio Nobel per la fisica, di cui stato insignito nel 1983.

dove $\left(\frac{dT}{dr}\right)_e$ è la variazione di temperatura che l'elemento sperimenta mentre sale e si espande adiabaticamente.

Possiamo definire

$$\Delta\left(\frac{dT}{dr}\right) = \left(\frac{dT}{dr}\right)_e - \left(\frac{dT}{dr}\right) \quad e \quad \nabla = \frac{d \ln T}{d \ln P}.$$

La differenza di energia interna tra il gas e l'ambiente circostante per unità di massa è $\Delta u = c_p \Delta T$, con c_p calore specifico a pressione costante, per cui il flusso convettivo F_c risulta¹⁸

$$F_c = \frac{1}{2} c_p \rho v \Lambda \left[\left(\frac{dT}{dr}\right)_e - \left(\frac{dT}{dr}\right) \right]$$

dove v è la velocità degli elementi convettivi¹⁹. Il flusso radiativo F , risultante della somma dei contributi radiativo e convettivo, negli strati più esterni della stella dove la convezione è significativa, è uguale alla luminosità della stella diviso la superficie, ovvero

$$F = \frac{L}{4\pi r^2} = \sigma T^4.$$

Con le notazioni presentate finora possiamo scrivere:

$$F_r = -\frac{16\sigma T^4}{3Pk\rho} \frac{dP}{dr} \nabla \quad e \quad F_c = \frac{1}{2} c_p \rho v \Lambda \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} (\nabla_{ad} - \nabla).$$

Da queste relazioni è possibile ricavare ∇ . Attraverso la teoria della Mixing Length possiamo quindi ottenere il gradiente di temperatura nelle regioni convettive.

Osserviamo che esso dipende dalla velocità v : per velocità molto piccole, il trasporto convettivo risulta trascurabile e il gradiente è dovuto alla sola radiazione; mentre per velocità $v \rightarrow \infty$, $\nabla \rightarrow \nabla_{ad}$.

Calcolare il gradiente convettivo è utile nelle sole regioni esterne della stella dove la convezione è molto efficiente, ovvero dove il gradiente di temperatura è significativamente maggiore del gradiente adiabatico. Negli strati più interni la differenza tra il gradiente convettivo e quello adiabatico è molto piccola e si può assumere $\frac{dT}{dr} = \left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad}$.

Abbiamo

$$\nabla_{ad} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln P}\right) = \frac{dT}{dP} \frac{P}{T} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2}.$$

¹⁸Il fattore $\frac{1}{2}$ è dovuto al bilanciamento di elementi in salita con un ugual numero di elementi in discesa.

¹⁹La velocità è valutata tramite il principio di Archimede per un corpo che si muove in un fluido. É ottenuta cioè eguagliando la somma della forza di resistenza del mezzo e della forza di Archimede, dirette verso l'alto, con la forza peso diretta verso il basso.

Quindi concludiamo

$$\frac{dT}{dr} = \nabla_{ad} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr},$$

ottenendo l'equazione di trasporto di energia nel caso convettivo.

Equazione di trasporto dell'energia per convezione

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{dP}{dr} \quad (1.18)$$

1.6 Presentazione del sistema completo delle equazioni di struttura

Dai risultati ottenuti possiamo illustrare il sistema di equazioni di equilibrio degli interni stellari in descrizione Euleriana e, sfruttando la relazione (1.3), anche in forma Lagrangiana.

Le due formulazioni vengono riportate qui sotto, una accanto all'altra.

1. Equazione di conservazione della massa

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \qquad \frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}$$

2. Equazione di equilibrio idrostatico

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r \rho}{r^2} \qquad \frac{dP}{dm} = -\frac{GM_r}{4\pi r^4}$$

3. Equazione di conservazione dell'energia

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \qquad \frac{dL}{dm} = \varepsilon$$

4. Equazione del trasporto di energia per radiazione

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\rho k}{64\pi r^2 \sigma T^3} L_r \qquad \frac{dT}{dm} = -\frac{3k}{64\pi^2 r^4 a c T^3} L_m$$

Equazione del trasporto di energia per convezione

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{GM_r \rho}{r^2} \qquad \frac{dT}{dm} = \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} \frac{T}{P} \frac{GM_r}{4\pi r^4}$$

Capitolo 2

Relazioni caratterizzanti degli interni stellari

Nel Capitolo 1 abbiamo trattato le quattro equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio degli interni stellari. Tali relazioni, oltre a dipendere in modo esplicito da una variabile che può essere scelta equivalentemente tra il raggio e la massa, presentano una dipendenza anche da altre quantità: la densità ρ , l'opacità k e l'efficienza di produzione energetica ϵ .

In questo capitolo formuleremo tre ulteriori equazioni che mettono in corrispondenza queste quantità con quelle studiate nelle relazioni fondamentali trattate finora ovvero massa, pressione, luminosità e temperatura.

La variazione della composizione chimica della materia stellare causa una modifica delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali a coefficienti non costanti riassunto in 1.6. L'introduzione delle tre nuove corrispondenze è importante in quanto la variazione delle soluzioni non risiede in un nuovo metodo di derivazione delle equazioni fondamentali, ma è racchiusa nel diverso comportamento fisico della materia, descritto dalle tre relazioni che tratteremo.

2.1 Equazione di stato

L'equazione di stato lega la pressione e la densità di una stella.

Consideriamo inizialmente un gas ideale, per cui la temperatura T e la pressione P sono legate dalla relazione

$$PV = nRT \tag{2.1}$$

dove V è il volume del gas, n il suo numero di moli e R la costante dei gas perfetti¹.

Imponendo l'uguaglianza $R = N_A k$, con N_A numero di Avogadro² e k costante di Boltzmann³ e sostituendo nella (2.1), otteniamo

$$PV = nN_A kT. \quad (2.2)$$

Il numero totale di particelle che costituiscono il gas è dato da $N = nN_A$.

Da (2.2) otteniamo quindi

$$P = \frac{N}{V} kT. \quad (2.3)$$

La massa media di una particella del gas, ovvero il peso molecolare medio della particella, è $M = \mu m_H$, con m_H massa dell'idrogeno e μ peso molecolare del gas⁴; per cui vale la relazione

$$\mu = \frac{\rho}{Nm_H}. \quad (2.4)$$

La massa totale è ottenuta moltiplicando M per il numero di particelle N , perciò $V = \frac{NM}{\rho}$. Riportando i risultati in (2.3) si ha

$$P = \frac{N}{V} kT = \frac{N\rho}{NM} kT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (2.5)$$

Quanto descritto finora mette in relazione la pressione e la temperatura delle particelle di un gas perfetto.

Consideriamo ora la pressione di radiazione esercitata dai fotoni che ad alte temperature risulta non trascurabile. L'intensità di radiazione è

$$I_v = \frac{dE}{\cos\theta dA dt d\Omega dv},$$

ossia l'energia per unità di superficie, tempo, angolo solido e banda di frequenza. Il $\cos\theta$ tiene conto del fatto che la direzione di propagazione non è sempre normale alla superficie.

Ciascun fotone ha quantità di moto pari a $q_v = \frac{h\nu}{c}$. Considerando il numero di fotoni nella direzione Ω ,

$$dn_v(\Omega) = \frac{dE_v}{h\nu} = \frac{I_v}{h\nu} \cos\theta dA dt d\Omega dv,$$

¹ $R=8,314472 \frac{J}{mol \cdot K}$

² $N_A=6 \cdot 10^{23} mol^{-1}$

³ $k=1,4 \cdot 10^{-16} erg \cdot K^{-1}$

⁴Nel plasma, ad alte temperature, gli atomi sono totalmente ionizzati e si ha $\mu = 0,59$ per la presenza di idrogeno ed elio. Considerando solo l'idrogeno, $\mu = 0,5$ perché sono presenti un protone e un elettrone. In generale vale la relazione $\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$ dove X indica la quantità percentuale di idrogeno, Y quella di elio e Z quella dei restanti materiali, chiamati metalli; con la relazione $X + Y + Z = 1$.

⁵ $h = 6,625 \cdot 10^{-34} J \cdot s$ è la costante di Plank.

la quantità di moto trasportata nella direzione Ω è

$$dQ_v(\Omega) = q_v dn_v(\Omega) = \frac{dE_v}{hv} \frac{hv}{c} = \frac{dE_v}{c}.$$

La pressione P sulla superficie dA esercitata dai fotoni nella direzione Ω è quindi descritta dalla forza perpendicolare agente sulla superficie

$$P(\Omega) = \frac{dQ_v(\Omega)}{dt} \frac{\cos\theta}{dA} = \frac{I_v \cos^2\theta dv d\Omega}{c}.$$

Integrando sulla frequenza e sull'angolo solido e ricordando che in condizioni di equilibrio termodinamico la radiazione è ben approssimata dalla radiazione di corpo nero, si ottiene

$$P = \frac{1}{c} \frac{\sigma T^4}{\pi} \frac{4\pi}{3}. \quad (2.6)$$

In particolare, il termine $\frac{\sigma T^4}{\pi}$ deriva dall'integrazione dell'intensità sulle frequenze e il termine $\frac{4\pi}{3}$ è il risultato dell'integrazione sull'angolo solido del quadrato del coseno dell'angolo θ .

Da (2.6), ricordando la relazione $\sigma = \frac{ac}{4}$, si ottiene

$$P = \frac{1}{3} a T^4. \quad (2.7)$$

Osserviamo che la pressione di radiazione dovuta ai fotoni corrisponde ad una densità di energia $u = \frac{E}{V} = \frac{4}{c} \sigma T^4$. Possiamo quindi scrivere la (2.7) in questo modo: $P = \frac{1}{3} u$.

Le equazioni (2.1) e (2.7) descrivono rispettivamente il contributo della pressione delle particelle del gas e quello della pressione dovuta ai fotoni. Combinando queste due quantità, si ottiene l'equazione caratteristica di stato dei gas per gli interni stellari, che mette in relazione la pressione e la densità.

Equazione di stato

$$P = \frac{\rho k T}{\mu m_H} + \frac{1}{3} a T^4 \quad (2.8)$$

La pressione dovuta al gas e quella dei fotoni risultano uguali quando $T^3 = \frac{3R}{a\mu} \rho$. Nelle stelle di piccola massa è quindi dominante la pressione del gas, mentre in quelle di grande massa è

più significativa la pressione di radiazione.

La figura 2.1 mostra come, a seconda della temperatura T e della densità ρ , domini la pressione di radiazione o quella dei gas ideali. A determinate condizioni la materia diventa infatti degenerare e l'equazione di stato cambia.

L'equazione di stato per materia degenerare è quella che caratterizza gli interni degli oggetti compatti come le nane bianche e le stelle di neutroni, corrispondenti alle fasi finali della vita delle stelle, la cui trattazione non rientra nelle finalità di questo elaborato.

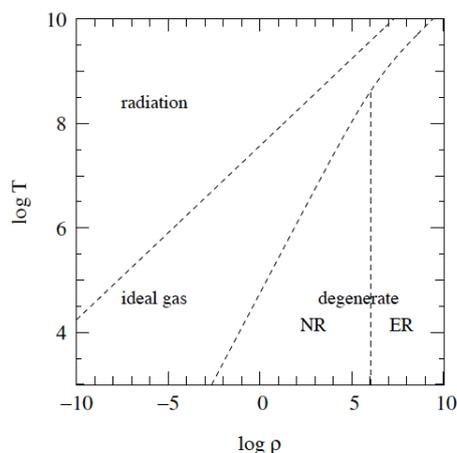


Figura 2.1: Equazione di stato sul piano densità-temperatura per un gas di particelle libere con composizione $X = 0.7$ e $Z = 0.02$. Fonte: [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*.

2.2 Coefficiente di opacità

Abbiamo visto nella sezione 1.5 come il trasporto radiativo è controllato dal coefficiente di assorbimento di massa k , chiamato opacità, che descrive la quantità di radiazione assorbita per unità di massa.

L'opacità del materiale stellare deriva da diversi meccanismi, più o meno significativi in base alla regione della stella che consideriamo. La Figura 2.2 ne presenta i diversi contributi.

Negli strati più interni, dove la temperatura è più alta, i processi che contribuiscono maggiormente all'opacità sono:

- Scattering da parte degli elettroni in cui il fotone interagendo con l'elettrone subisce un cambio di direzione ma non di frequenza;
- Assorbimento free-free in cui in prossimità di un nucleo un fotone è assorbito da un elettrone e ne causa l'aumento di energia cinetica;

essere ben approssimato dalla radiazione di corpo nero $B(\nu, T)$ ⁸.

L'opacità totale, integrata e mediata su tutte le frequenze è definita dalla seguente relazione

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k(\nu)} \frac{dB(\nu, T)}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB(\nu, T)}{dT} d\nu}.$$

Essa rappresenta la trasparenza media del gas stellare, pertanto il flusso è tanto maggiore quanto l'opacità media $\frac{1}{k}$ è grande.

I processi sopracitati contribuiscono in modo differente all'opacità del mezzo interstellare, si ricercano pertanto le opacità mediate sulle frequenze per i vari processi. I risultati trovati costituiscono gli addendi della (2.9).

Il calcolo delle opacità medie dei diversi casi richiede una dettagliata conoscenza del materiale stellare e del modo in cui la materia interagisce con la radiazione.

Tali informazioni non sono facilmente accessibili, tuttavia in alcune situazioni è possibile ricavare approssimazioni che descrivano le opacità, come avviene per il meccanismo di diffusione tramite elettroni liberi, ne vediamo l'idea di base.

É nota la sezione d'urto Thomson di un elettrone

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = 6,652 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2.$$

L'opacità è data dall'insieme delle sezioni trasversali di tutti gli elettroni in un'unità di massa del gas.

Consideriamo il meccanismo di scattering. L'opacità non dipende dalla frequenza e si ottiene dividendo σ_e per $\frac{\rho}{N}$ dove N è il numero di elettroni presenti. Ricordando la (2.4) abbiamo $\frac{\rho}{N} = \mu m_H$.

In questo modo otteniamo

$$k_s = \frac{\sigma_e}{\mu m_H} = 0,2(1 + X) \frac{\text{cm}^2}{g} \quad (2.10)$$

dove X è l'abbondanza percentuale in massa dell'idrogeno.

Per gli assorbimenti free-free e bound-free, la derivazione completa dell'opacità richiede l'utilizzo della meccanica quantistica; tuttavia all'inizio del Novecento, grazie al contributo del

⁸ $B(\nu, T)$ è la funzione di Planck per la densità di flusso per un corpo nero. $B(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left(\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1 \right)^{-1}$.

fisico olandese Kramers⁹, sono state formulate alcune approssimazioni:

$$k_{ff} \approx 10^{22} (X + Y)(1 + X) \rho T^{-7/2} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}} \quad k_{bf} \approx 4,3 \cdot 10^{25} (1 + X) Z \rho T^{-7/2} \frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$$

dove X rappresenta l'abbondanza percentuale in massa dell'idrogeno, Y quella dell'elio e Z quella dei materiali pesanti¹⁰.

Osserviamo che $k_{bf} \approx 10^3 Z k_{ff}$, pertanto è ragionevole aspettarsi che l'assorbimento bound-free sia dominante rispetto all'assorbimento free-free per $Z \gtrsim 10^{-3}$.

Il processo di assorbimento bound-bound è limitato ad alcune frequenze. Questo richiede la conoscenza specifica del profilo delle linee di assorbimento e complica notevolmente la derivazione del coefficiente di assorbimento della massa.

Il contributo dell'assorbimento bound-bound nella ricerca dell'opacità totale è significativo per $T \lesssim 10^6 \text{K}$, a temperature più alte esso è trascurabile.

La Figura 2.3 mostra come varia l'opacità media in funzione della temperatura e densità per stelle del tipo solare; ossia per stelle che presentano una composizione chimica $X = 0,7$, $Z = 0,02$. In particolare il grafico descrive le curve di $\log k$ (in $\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$) rispetto alla temperatura per diversi valori della densità, indicata con $\log \rho$ (in $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$).

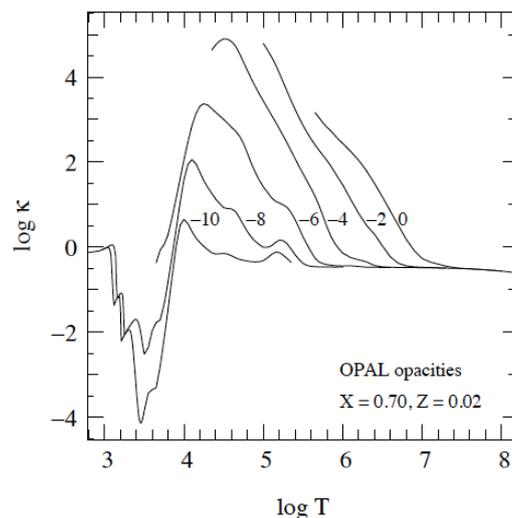


Figura 2.3: Relazione tra opacità e temperatura per diversi valori di densità indicati in figura. Fonte: [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*.

⁹Hendrix Anthony "Hans" Kramers (Rotterdam 1894 - Oegstgeest 1952).

¹⁰ $X + Y + Z = 1$.

2.3 Coefficiente di generazione dell'energia

Trattiamo ora la terza e ultima relazione caratteristica, riguardante il tasso di energia per unità di massa ϵ , che dipende dalla sorgente energetica.

I possibili processi di produzione di energia stellare sono tre: la contrazione, le reazioni chimiche e le reazioni nucleari. È tuttavia possibile escludere la contrazione e le reazioni chimiche dai candidati principali alla produzione di energia nelle fasi di equilibrio della vita della stella. Questo è dovuto al fatto che i tempi in scala delle due sorgenti non corrispondono a quanto osserviamo dalla Terra.

Prendendo ad esempio il caso del Sole, il tempo in scala dinamico, ossia il tempo necessario al collasso se è rimossa la pressione interna, è di circa 30 minuti. Questo risultato deriva dal rapporto tra il raggio R e la velocità di fuga v_f , ovvero $\tau_{din} = \frac{R}{v_f}$.

In particolare, $v_f = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$.

Unendo i due contributi si ha

$$\tau_{din} = \sqrt{\frac{R^3}{2GM}}$$

Studiamo ora il tempo di emissione della riserva di energia sotto forma di radiazione termica che mantenga costante la luminosità. Per quanto abbiamo visto dallo studio del Teorema del Viriale, nella sezione 1.3.2, e per quanto osservato in 1.4.2, l'energia totale risulta pari a metà dell'energia potenziale gravitazionale¹¹.

Abbiamo, dalla sezione 1.1, che l'energia potenziale gravitazionale di una sfera è data da $U = -\frac{GM^2}{R}$.

Calcoliamo il tempo scala termico uguagliando l'energia con la luminosità per il tempo scala di emissione¹²

$$|E_{tot}| = \left| -\frac{1}{2}U \right| = \frac{GM^2}{2R} = \tau_{KH}L,$$

da cui

$$\tau_{KH} = \frac{GM^2}{2RL}$$

Per il Sole risulta un tempo scala termico di circa 20 milioni di anni. Anche in questo caso, come per la contrazione, il risultato ottenuto non può giustificare l'età stimata per la nostra stella a partire dalle evidenze geologiche e biologiche rinvenute sulla Terra, che fanno ipotizzare una stabilità del Sistema Solare di almeno 4,5 miliardi di anni.

¹¹Vedi in particolare l'equazione (1.10).

¹²L'indice KH si riferisce ai due fisici Lord Kelvin (Belfast 1824 - Largs 1907) e Hermann von Helmholtz (Potsdam 1821 - Berlino 1894), che definirono il tempo scala termico e ne studiarono le proprietà.

Possiamo quindi concludere che la sorgente di energia è principalmente costituita dalle reazioni nucleari che avvengono nella parte più interna della stella. Il tempo scala nucleare, ossia il tempo necessario a bruciare tutto il combustibile disponibile, risulta essere per il Sole $\tau_{nuc} \approx 7 \cdot 10^9$ anni. Questo risultato deriva dal fatto che l'energia rilasciata della fusione di un grammo di Idrogeno in Elio è $6 \times 10^{18} \text{erg}$. Posto q la frazione di combustibile disponibile nel nucleo (per il Sole $q = 0,1$) e X la frazione di massa di idrogeno inizialmente presente (nel caso solare $X=0,7$), si ha

$$\tau_{nuc} = \frac{qXM \times 6 \times 10^{18} \text{erg g}^{-1}}{L}.$$

L'efficienza di produzione dell'energia dipende dal processo che avviene. Le reazioni nucleari negli interni stellari si articolano infatti in diversi meccanismi. Si tratta di combustioni successive che partono dalla fusione dell'Idrogeno, disponibile già dalla formazione della stella perché presente nel mezzo interstellare, e producono atomi sempre più pesanti, all'aumentare della temperatura, fino alla combustione del Silicio in Ferro. A quel punto la fusione nucleare si ferma perché non è più efficiente nella produzione di energia. In particolare nelle fasi di bruciamento di Idrogeno ed Elio, i meccanismi più importanti sono la Catena protone-protone che, a partire da 4 protoni origina un atomo di Elio, per temperature inferiori a 20 milioni di Kelvin e masse stellari inferiori a 1,5 masse solari; il Ciclo CNO che forma un atomo di Elio a partire da 4 protoni, con l'ausilio di un elemento pesante come Carbonio, Azoto o Ossigeno che funge da catalizzatore della reazione, per temperature comprese tra 20 milioni e 10^8 Kelvin e masse superiori a 1,5 masse solari; la reazione Tripla α per temperature superiori a 10^8 Kelvin, che causa il bruciamento di Elio in Carbonio e Ossigeno.

Il risultato dei processi di fusione è il rilascio di energia con consumo del carburante nucleare. Quello che avviene in questi meccanismi è il mescolamento di due nuclei atomici che generano un nuovo nucleo di massa inferiore alla somma delle masse degli elementi di partenza. Questo difetto di massa Δm è convertito in energia per effetto della legge $E = mc^2$.

Più aumenta la temperatura, più vengono generati elementi pesanti, che richiedono un'energia maggiore per la combustione, e più aumenta il tasso di energia per unità di massa, ossia l'efficienza ε della stella nel produrre energia.

L'efficienza dipende fortemente della temperatura e non è facilmente esprimibile come legge di potenza. Si può tuttavia ricavare una proporzionalità:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^\nu \quad \text{con} \quad \nu = \left(\frac{d \ln \varepsilon}{d \ln T} \right)_\rho. \quad (2.11)$$

L'esponente ν non è costante ed è funzione della temperatura. Derivando il logaritmo

definito in (2.11) e operando a densità costante si ottiene¹³

$$\varepsilon_{pp} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^{v_{pp}} \quad \text{con} \quad v_{pp} = [3, 5 - 6]; \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_2 \rho X X_{CNO} T_6^{v_{CNO}} \quad \text{con} \quad v_{CNO} = [13 - 20]; \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_6^{v_{3\alpha}} \quad \text{con} \quad v_{3\alpha} = [20 - 30] \quad (2.14)$$

dove T_6 è un coefficiente adimensionale che esprime la temperatura in milioni di gradi.

La Figura 2.4 riporta graficamente l'efficienza nella produzione di energia dei processi Catena protone-protone, Ciclo CNO e reazione Tripla α in funzione della temperatura.

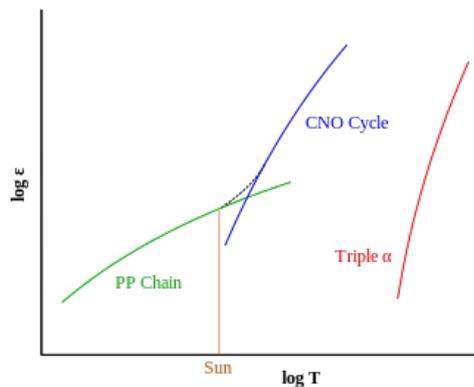


Figura 2.4: Relazione tra efficienza e temperatura nei processi di fusione. Fonte: [7] Wikipedia, l'enciclopedia libera.

L'efficienza totale ε è la somma dei contributi in (2.12), (2.13) e (2.14).

Tasso di energia per unità di massa

$$\varepsilon = \varepsilon_{pp} + \varepsilon_{CNO} + \varepsilon_{3\alpha} \quad (2.15)$$

¹³Gli indici pp, CNO, 3α si riferiscono rispettivamente alla Catena protone-protone, al Ciclo CNO e alla reazione Tripla α .

Capitolo 3

Condizioni al bordo e modello risolutivo

Nei capitoli precedenti abbiamo analizzato la relazione che intercorre tra le diverse variabili che entrano in gioco nei processi che conducono la stella all'equilibrio, arrivando alla formulazione di un sistema di quattro equazioni differenziali non lineari a coefficienti non costanti, riassunte in 1.6, e di tre relazioni caratteristiche (2.8), (2.9) e (2.15). Abbiamo in questo modo ottenuto un sistema di sette equazioni in sette incognite.

3.1 Condizioni al bordo

Al fine di ottenere un modello risolutivo del sistema è necessario aggiungere a questo le condizioni al bordo, ossia i valori che le variabili considerate assumono nel centro e sulla superficie della stella.

Prendiamo inizialmente in considerazione il centro dove risulta che la massa M_r , il raggio r e la luminosità L_r sono quantità nulle.

Per quanto riguarda le condizioni al contorno esterne, ovvero sulla superficie, la massa coincide con la massa totale M della stella¹, la densità si avvicina ad essere nulla e la temperatura tende ad un valore che dipende dal raggio e dalla luminosità stellare.

La conoscenza della totalità delle condizioni al bordo esterne non è immediata e richiede una complessa trattazione degli strati sopra la fotosfera di una stella, ossia delle regioni al di sopra della parte visibile della stella dove la materia permette la trasmissione della radiazione.

Per semplificare la trattazione possiamo avvalerci dell'approssimazione di Eddington, ossia consideriamo che la pressione di radiazione P_r sia pari a $\frac{1}{3}aT^4$ ovunque anche se questa relazio-

¹Generalmente si studia la struttura e l'evoluzione di stelle a massa fissa.

ne è vera solo a grandi profondità ottiche².

La temperatura effettiva superficiale di una stella può essere definita

$$T_{eff} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

La temperatura superficiale risultante dall'approssimazione di Eddington risulta $2^{\frac{1}{4}}$ volte più bassa della temperatura effettiva.

Riassumendo le condizioni al contorno:

- Al centro, per $r=0$:

$$M_0 = 0 \quad L_0 = 0;$$

- Sulla superfici, per $r=R$:

$$\rho_R = 0 \quad T_R = \left(\frac{L}{8\pi R^2 \sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad M_R = M.$$

Dalle considerazioni effettuate rimangono da descrivere ρ_0 e T_0 , rispettivamente densità e temperatura al centro, oltre a R e L , raggio e luminosità della stella sulla superficie. Per quanto R e L siano a volte direttamente osservabili, queste quattro quantità possono essere ricavate quando le equazioni differenziali della struttura stellare sono risolte.

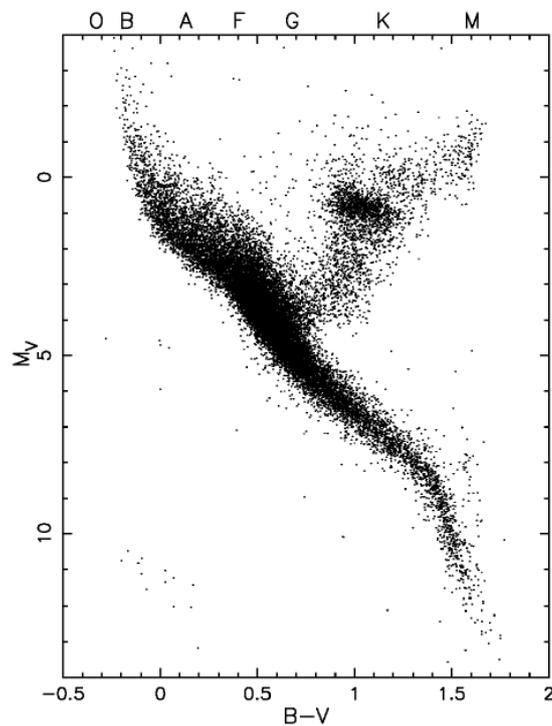
Apparentemente, per i risultati trovati e descritti nei primi due capitoli, sembrerebbe che possa esistere un'unica soluzione del sistema di equazioni di equilibrio, implementato con le condizioni al contorno e conosciuta la massa e la composizione chimica della stella considerata, ottenibile tramite integrazione. Questo è quanto afferma il Teorema enunciato dagli astronomi Heinrich Vogt e Henry Norris Russell descritto come segue:

"La completa struttura di una stella in equilibrio idrostatico e termico è univocamente determinata dalla massa e dalla composizione chimica del suo interno, ammesso che la pressione, l'energia interna per unità di massa, l'opacità e il tasso di produzione di energia siano funzioni solamente della densità, temperatura e composizione chimica".

²Usiamo cioè l'approssimazione della diffusione per calcolare il gradiente di temperatura non solo a spessori ottici grandi ma anche piccoli.

Sebbene il contributo di Vogt-Russell definisca bene l'unicità della soluzione per stelle omogenee con equazione di stato semplice, esso non è mai stato completamente dimostrato e sono stati trovati controesempi che negano l'unicità della soluzione.

Ad ogni modo esso costituisce un grande strumento per le stelle che occupano le regioni della Main Sequence nel diagramma Hertzsprung-Russell, illustrato nella Figura 3.1(a), che descrive la distribuzione delle stelle in relazione a temperatura, sull'asse delle ascisse, e luminosità, sull'asse delle ordinate.



(a)

M/M_{\odot}	$\text{Log}L/L_{\odot}$	$\text{Log}T_{eff}$	R/R_{\odot}	T_c	ρ_c	M_{nu}	M_{in}	Energia
30	5.15	4.64	6.6	36	3.0	0.60	0	CNO
15	4.32	4.51	4.7	34	6.2	0.39	0	CNO
9	3.65	4.41	3.5	31	10.5	0.30	0	CNO
5	2.80	4.29	2.3	27	17.5	0.23	0	CNO
3	2.00	4.14	1.7	24	40.4	0.18	0	CNO
2	1.30	4.01	1.4	21	68.0	0.12	0	CNO
1	-0.13	3.76	0.9	14	90.0	0.	0.01	PP
0.5	-1.42	3.59	0.44	9	74.0	0.	0.4	PP
0.3	-1.90	3.55	0.30	8	125.0	0.	1.0	PP
0.1	-3.0	3.51	0.10	5	690.0	0.	1.0	PP

(b)

Figura 3.1: Sopra: diagramma H-R delle stelle che popolano le regioni che circondano il Sole.

Fonte: [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*.

Sotto: tabella dei principali parametri fisici di stelle nella Sequenza Principale. Fonte: [2] Chiosi C., *Struttura ed Evoluzione delle stelle*.

Una delle maggiori complicazioni per la mancanza di unicità nella soluzione risiede nella disomogeneità della composizione chimica stellare dovuta a diversi fenomeni, tra i quali:

- La sorgente energetica nucleare, responsabile di modifiche negli strati interni che si ripercuotono anche nelle regioni più esterne;
- Il trasporto energetico per convezione, il quale attraversa diversi strati con differenti composizioni chimiche che possono miscelarsi dando origine ad un mescolamento con effetto non-locale;
- La diffusione di elementi di diverso peso molecolare o carica elettrica;
- La rapida rotazione della stella, causa di instabilità poco note.

3.2 Modello risolutivo

L'insieme delle informazioni presentate finora permette di affermare che i modelli risolutivi della struttura stellare non sono assoluti e costanti nel tempo: un modello al tempo zero non può soddisfare le condizioni della stella in una fase evolutiva successiva nella quale la composizione chimica e le equazioni di stato e di efficienza energetica possono essere cambiate sensibilmente. Questo permette di descrivere gli stadi evolutivi di una stella in una sequenza dipendente dal tempo.

L'idea del procedimento è partire da note composizione chimica e massa totale³; risolvere le equazioni trovando pressione, temperatura, luminosità e massa al tempo $t = t_0$ dando forma a un primo modello chiamato *Modello 0*; assumere poi un tempo successivo $t_1 = t_0 + \Delta t$, dove Δt descrive la variazione di tempo considerata, e calcolare come varia la composizione chimica a ogni raggio; risolvere le equazioni ottenendo le nuove quantità al tempo t_1 , le quali descrivono il *Modello 1* e procedere con una nuova variazione temporale e la costruzione di modelli successivi che tengano conto delle nuove quantità.

L'insieme dei modelli che descrivono la struttura completa viene chiamato *Sequenza evolutiva* ed è una successione di stadi di equilibrio alternati a stadi di non equilibrio che conducono a un nuovo bilanciamento, con condizioni non necessariamente equivalenti alle precedenti. In particolare, la variazione della temperatura T_{eff} e della luminosità L superficiale, quantità

³Lo studio delle condizioni fisiche all'atto della formazione delle stelle garantisce che esse siano inizialmente omogenee.

ottenibili tramite osservazione diretta, corrisponde al cammino, o traccia evolutiva, della stella nel diagramma Hertzsprung-Russell⁴.

Esempi di tracce evolutive sono osservabile nella Figura 3.2, che descrive l'evoluzione di stelle di diversa massa nelle fasi immediatamente precedente e successive alla Main Sequence. I cammini evolutivi si differenziano a seconda di quanto è massiccia la stella considerata.

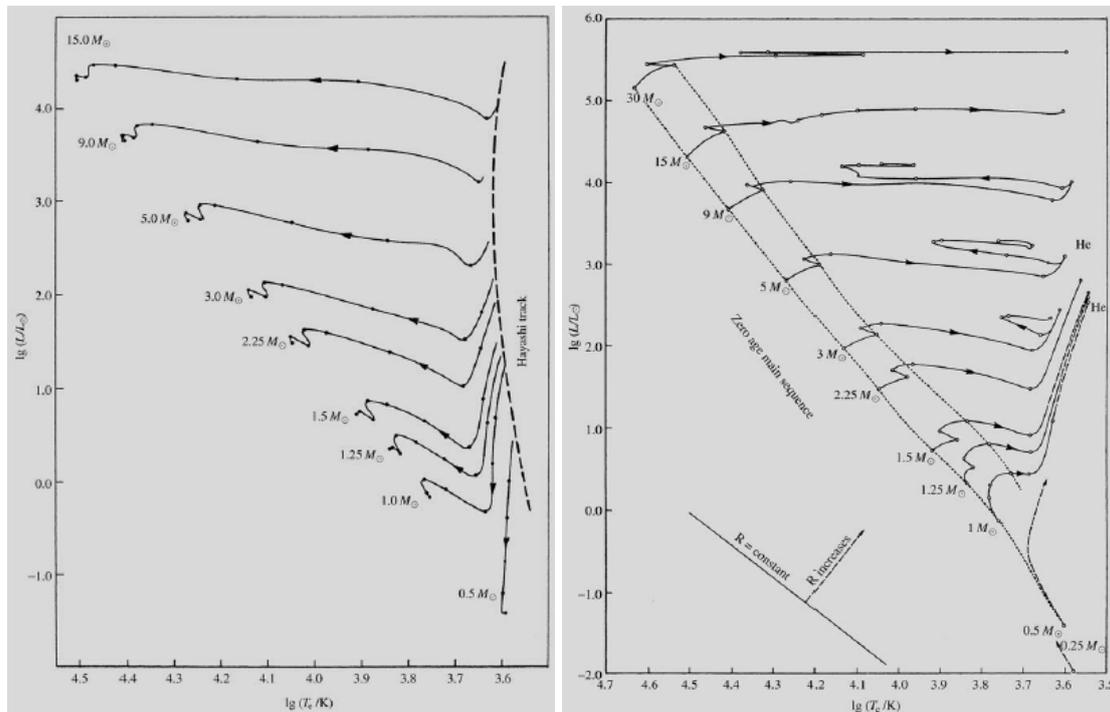


Figura 3.2: Sequenze evolutive della pre-Main Sequence a sinistra e delle fasi successive a destra. Le masse sono indicate in relazione alla massa solare M_{\odot} .
Fonte: [6] Karttunen et al., *Fundamental Astronomy*

La ricerca delle condizioni per la costruzione di una sequenza evolutiva viene quindi ricondotta allo studio della composizione chimica di uno stadio conosciuto come stadio iniziale.

Ricavare un'integrazione analitica delle equazioni di struttura è piuttosto difficile, se non in casi molto particolari. Per questo si utilizzano principalmente metodi numerici che necessitano della conoscenza al tempo zero di tutte le variabili in un determinato punto: ricordando le condizioni al bordo trattate in 3.1, la densità e la temperatura al centro devono essere tali da soddisfare le condizioni di temperatura, luminosità, pressione e massa sulla superficie.

I metodi di integrazione più utilizzati sono due: il metodo del raccordo e il metodo delle shell o di Henyey⁵. La principale differenza di applicazione tra i due metodi è dovuta al fatto

⁴Le regioni dove non sono osservabili stelle sono quelle in cui non ci sono le condizioni per avere quel determinato rapporto tra temperatura e luminosità.

⁵Loius George Henyey (1910-1970), astronomo americano conosciuto per il suo contributo nell'ambito dello studio della struttura ed evoluzione stellare. Fu il primo a sviluppare l'idea del metodo risolutivo delle shell.

che il primo non richiede la conoscenza di una soluzione di partenza come avviene per il secondo che, sulla base di condizioni di applicazione più stringenti, permette però di trattare strutture più complesse.

Un approccio diverso dallo studio numerico si basa sulla possibilità di trovare un dettagliato modello di confronto⁶ e considera semplici relazioni che intercorrono tra modelli stellari con diverse masse e raggi ma tutte aventi le stesse distribuzioni relative di densità.

A partire dalla struttura di una stella, queste relazioni, chiamate di *omologia*, permettono di trovare un modello approssimativo per altre stelle con le stesse proprietà.

3.2.1 Il metodo del raccordo

Il metodo del raccordo consiste in un'integrazione compiuta a partire da un bordo, sia esso centro o superficie, verso l'opposto. Più frequentemente si è soliti compiere due integrazioni: una a partire dal centro verso l'esterno, conosciuta come *soluzione di core*, l'altra nel verso opposto, dalla superficie verso l'interno, chiamata *soluzione di involuppo*. Queste vengono poi raccordate in un determinato punto, chiamato *punto di raccordo*, sfruttando la continuità delle variabili fisiche.

3.2.2 Il metodo delle shell

Il secondo metodo che analizziamo, il metodo delle shell, si basa sull'idea che data una struttura stellare, ossia assegnate pressione, temperatura, massa, luminosità e condizioni al contorno, questa non soddisfi il sistema di equazioni differenziali. Tramite un opportuno algoritmo vengono effettuate delle correzioni alle variabili in ogni punto, così da arrivare più vicino alle soluzioni delle equazioni. Si procede in questo modo, tramite approssimazioni successive, fino a quando le correzioni diventano trascurabili⁷.

3.2.3 Relazioni di omologia

Studiando le soluzioni numeriche di diverse stelle si è osservato che esiste una certa similarità tra esse. Questa può essere approssimata da semplici equazioni analitiche scalari, le relazioni di omologia.

⁶Ad esempio tramite integrazione numerica, osservazione diretta o anche una buona intuizione che conduce a una soluzione precisa per una determinata stella.

⁷A giustificazione del nome assegnato al metodo, solitamente le correzioni sulle variabili vengono effettuate in regioni successive a partire dal centro, chiamate appunto shell.

Sebbene le richieste per la validità dell'omologia siano molto restrittive, oltre che difficilmente applicabili a modelli stellari realistici, spesso esse possono fornire un'utile interpretazione di base delle soluzioni numeriche. Ad esempio le relazioni di omologia sono molto sfruttate per i modelli stellari nella Sequenza Principale del diagramma H-R.

Per definire l'omologia tra due stelle è necessario parlare di corone di massa omologa.

Consideriamo due stelle di massa M_1 e M_2 e di raggio R_1 e R_2 .⁸ Le corone di massa omologa sono definite come le regioni in cui il rapporto tra la massa in un certo punto e la massa totale della stella è costante; in particolare, se x è la variabile che descrive la massa omologa, possiamo scrivere:

$$x = \frac{m_1}{M_1} = \frac{m_2}{M_2}.$$

Due stelle si dicono omologhe se le corone di massa omologa sono collocate allo stesso raggio relativo $\frac{r}{R}$. Cioè se per ogni x si verifica

$$\frac{r_1(x)}{R_1} = \frac{r_2(x)}{R_2} \quad \text{oppure} \quad \frac{r_1(x)}{r_2(x)} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (3.1)$$

Due corone di massa omologa hanno la stessa distribuzione relativa di massa e, di conseguenza, anche la stessa distribuzione relativa di densità.

I modelli risolutivi devono rispecchiare le equazioni di struttura, pertanto una transizione tra due diversi modelli omologhi causa la modifica di tutte le altre variabili.

Vediamo come variano le equazioni strutturali tramite il passaggio per omologia.

Consideriamo la prima equazione di struttura (1.2), essa può essere riscritta per una stella come

$$\frac{dr_1}{dx} = \frac{M_1}{4\pi r_1^2 \rho_1}.$$

Se una seconda stella è omologa a questa, dalla (3.1) possiamo sostituire $r_1 = r_2 \left(\frac{R_1}{R_2}\right)$, ottenendo

$$\frac{dr_2}{dx} = \frac{M_2}{4\pi r_2^2 \rho_2} \cdot \left[\frac{\rho_2 M_1}{\rho_1 M_2} \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 \right].$$

La relazione rappresenta l'equazione di struttura per la seconda stella, moltiplicata nel termine di destra per la quantità tra parentesi quadre.

Data la validità generale del risultato, il termine moltiplicativo aggiunto deve essere uguale a

⁸In quanto segue i pedici 1 e 2 fanno riferimento alle due diverse stelle considerate.

uno dei valori di x , ossia

$$\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} = \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-3}. \quad (3.2)$$

In particolare questo deve essere verificato nel centro di entrambe le stelle con il risultato che il fattore MR^{-3} è proporzionale alla densità media $\bar{\rho}$. Pertanto la densità di ogni corona omologa viene scalata con la densità centrale, o con la densità media, cioè $\rho(x) \propto \bar{\rho}$.

Possiamo effettuare un ragionamento analogo per quanto riguarda la seconda equazione di struttura (1.4), da cui

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^2 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-4}. \quad (3.3)$$

Confrontando ancora una volta con i valori al centro si ottiene la proporzionalità

$$P(x) \propto \frac{M^2}{R^4}.$$

Dai risultati ottenuti in (3.2) e in (3.3), la pressione e la densità di due stelle omologhe soddisfano la relazione:

$$\frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{2/3} \left(\frac{\rho_2(x)}{\rho_1(x)} \right)^{4/3}.$$

Per quanto riguarda le altre due equazioni strutturali, per ricavare da esse semplici relazioni di omologia è necessario aggiungere alcune assunzioni. In particolare ci serviamo dell'equazione di stato dei gas ideali $P = \frac{R}{\mu} \rho T$, con l'ulteriore ipotesi che la composizione di entrambe le stelle considerate sia omogenea. Questa scelta permette di ottenere una proporzionalità tra massa e luminosità indipendente dalla modalità di generazione dell'energia e non richiede l'equilibrio idrostatico.

Definiamo inoltre due variabili μ_1 e μ_2 che descrivono la composizione, costanti, anche se non necessariamente uguali.

Combinando (3.2) e (3.3) con la quarta equazione di struttura, abbiamo la relazione tra le temperature di corone di massa omologa:

$$\frac{T_2(x)}{T_1(x)} = \frac{\mu_2 M_2}{\mu_1 M_1} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{-1} \quad e \quad T(x) \propto \mu \frac{M}{R}. \quad (3.4)$$

La quarta equazione ha un valore ulteriore se consideriamo stelle in equilibrio radiativo con opacità costante. Permette infatti di scrivere una relazione aggiuntiva che lega luminosità e massa senza altre assunzioni sulla sorgente che genera l'energia. Quello che si ottiene è che la

luminosità dipende principalmente dall'efficienza di trasporto dell'energia tramite radiazione: un'alta opacità dà luogo a una più piccola luminosità, secondo la proporzionalità

$$L \propto \frac{1}{k} \mu^4 M^3.$$

Le relazioni di omologia costituiscono quindi un importante strumento di confronto tra stelle omologhe e permettono di ricavare le soluzioni delle equazioni di struttura, a partire da un modello di confronto, semplicemente attraverso processi analitici.

Un esempio della buona approssimazione delle relazioni di omologia risiede nelle stelle della Main Sequence, per le quali è nota una proporzionalità

$$L \propto M^{3.5}$$

La Figura 3.3 descrive le relazioni massa-luminosità e massa-raggio delle stelle della Main Sequence. Possiamo osservare che la relazione di omologia che lega luminosità e massa è una buona approssimazione per stelle di massa vicina a quella solare.

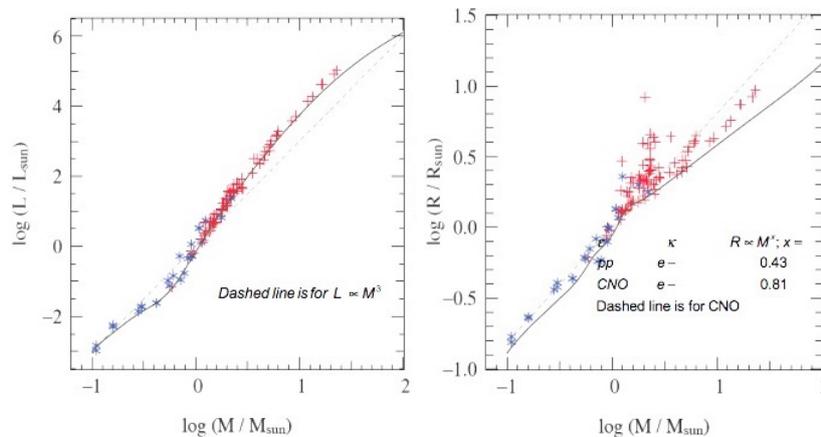


Figura 3.3: Approssimazioni di omologia per stelle nella Main Sequence. Fonte: [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*.

Conclusione

La derivazione, lo studio e la risoluzione delle equazioni di struttura degli interni stellari rappresentano un campo di difficile analisi. Le assunzioni e semplificazioni effettuate nel corso della trattazione sono necessarie al fine di formulare modelli di struttura semplici che si avvicinino il più possibile alla realtà, così come avviene per la descrizione delle principali caratteristiche delle stelle nella Main Sequence del diagramma H-R.

É chiaro che lo studio degli interni stellari non si può esaurire a un'approssimazione di risultati; l'innovazione tecnologica e scientifica che si sta rapidamente sviluppando in ambito astronomico fa ben sperare in nuove scoperte che possano colmare le lacune sulla conoscenza dei fenomeni di trasporto energetico e che permettano alla curiosità dell'uomo di trovare sfogo nella realizzazione di osservazioni sempre più accurate, per dare forma a modelli autentici capaci di descrivere il mondo che ancora non conosciamo.

Elenco delle figure

1.1	Struttura stellare assunta come modello di riferimento	3
1.2	Gradiente di temperatura adiabatico in funzione della temperatura	15
2.1	Equazione di stato sul piano densità-temperatura	22
2.2	Contributi dei diversi processi all'opacità totale	23
2.3	Relazione tra opacità e temperatura per diversi valori di densità	25
2.4	Relazione tra efficienza e temperatura nei processi di fusione	28
3.1	Diagramma H-R e principali proprietà fisiche della Main Sequence	31
3.2	Sequenze evolutive	33
3.3	Approssimazioni di omologia per stelle nella Main Sequence	37

Bibliografia

- [1] Brusa M., Slide e appunti del Corso di Fondamenti di Astronomia, Università degli studi di Bologna.
- [2] Chiosi C., *Struttura ed Evoluzione delle stelle*, Dispense del Corso di studi in Astronomia, Università degli studi di Padova.
- [3] Knopp J., *Equations of Stellar Structure*, University of Princeton.
- [4] Pols O.R., *Stellar Structure and Evolution*, Astronomical Institute Utrecht, September 2011.
- [5] Weiss A., Garching MPA, *Stellar Structure and Evolution*, University of Canterbury.
- [6] Karttunen et al. *Fundamental Astronomy, 5th Edition*, Springer Berlin Heidelberg New York, 2007.
- [7] Wikipedia, l'enciclopedia libera.
- [8] <https://www.astro.caltech.edu/~george/ay20/Ay20-Lec7x.pdf>

