

+++

ALMA MATER STUDIORUM – UNIVERSITÀ DI BOLOGNA
SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

Corso di Laurea Magistrale in
INGEGNERIA MECCANICA

FLUSSI ELETTROSMOTICI ALL'INTERNO DI MICRO-
CANALI: OTTIMIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA

Tesi di Laurea Magistrale in
TERMOFLUIDODINAMICA AVANZATA

RELATORE:

Prof. Marco Lorenzini

CORRELATORE:

Ing. Nicola Suzzi

PRESENTATA DA:

Nicola Cesari

APPELLO IV (18/03/2021)

ANNO ACCADEMICO 2019/2020

1.	Introduzione.....	1
1.1.	Microfluidica	1
1.2.	Introduzione e Storia dei micro-canali	2
1.3.	Classificazione dei micro-canali.....	4
1.4.	Fabbricazione dei micro-canali.....	5
1.4.1.	Laminazione	5
1.4.2.	Formatura o Stampaggio	6
1.4.3.	Stampa 3D.....	8
1.4.4.	Nanofabbricazione	11
1.5.	Elettrosmosi.....	0
1.5.1.	Electrical Double Layer	0
1.5.2.	Pompe Elettrosmotiche	3
2.	Modello matematico	5
2.1.	Distribuzione di Carica.....	5
2.2.	Potenziale Elettrico	12
2.3.	Campo di Moto	14
2.4.	Campo di Temperatura.....	18
2.5.	Numero di Poiseuille	22
2.6.	Numero di Nusselt.....	24
3.	Performance Evaluation Criteria (PEC).....	27
3.1.	Relazioni geometriche.....	28
3.2.	Relazioni Operative.....	32

3.3.	Definizione dei PEC	39
4.	Entropy Generation Minimization (EGM).....	43
4.1.	Determinazione dell'Entropia Generata	43
4.2.	Numero di Generazione Entropica	51
4.3.	Modellazione del parametro Mz	55
5.	Soluzione numerica delle equazioni	58
5.1.	Parametri	60
5.2.	Distribuzione del potenziale elettrico	62
5.3.	Campo di velocità.....	63
5.4.	Campo di temperatura	67
5.5.	Andamento della geometria adimensionale	72
6.	Ottimizzazione della Geometria.....	74
6.1.	Criterio FG1a:.....	75
6.1.1.	Analisi dei risultati.....	76
6.2.	Criterio FG1b:	81
6.2.1.	Analisi dei risultati.....	82
6.3.	Criterio FG2a:.....	86
6.3.1.	Analisi dei risultati.....	87
6.4.	Criterio FG2b:	91
6.4.1.	Analisi dei risultati.....	93
6.5.	Criterio FN2:.....	97
6.5.1.	Analisi dei risultati.....	98
6.6.	Criterio FN3:.....	102

6.6.1. Analisi dei risultati.....	102
6.7. Criterio VGa:	103
6.7.1. Analisi dei risultati.....	104
6.8. Criterio VGb:.....	108
6.8.1. Analisi dei risultati.....	109
7. Conclusione e Sviluppi futuri.....	113
Appendice A: Bilancio di Energia	115
Appendice B: Script PEC.....	125
Bibliografia	128

1. INTRODUZIONE

Nel presente elaborato si intende effettuare l'ottimizzazione della geometria di un micro-canale a sezione rettangolare, in particolare si cercherà il valore ottimale del rapporto fra i due lati del rettangolo e del raggio di curvatura dei raccordi dei suoi spigoli.

Il processo verrà svolto mediante l'ormai validato processo dei Performance Evaluation Criteria (PEC), a cui però si aggiunge anche un'analisi di secondo principio, in quanto i PEC si basano solo su considerazioni energetiche e non entropiche.

L'ottimizzazione verrà fatta su grandezze adimensionalizzate rispetto alle stesse calcolate in una ben definita condizione di riferimento, in questo modo il processo di ottimizzazione non dipende dagli specifici valori utilizzati nell'elaborato, ma risulta un'ottimizzazione generalizzata a tutti i flussi elettrosmotici all'interno di micro-canali con temperatura di parete costante e uniforme.

Il presente elaborato vuole dunque fornire un valido aiuto al progettista per il design dei micro-canali di un micro-scambiatore di calore.

1.1. MICROFLUIDICA

Con il termine microfluidica si intende lo studio e i dispositivi di controllo che intervengono durante la manipolazione dei fluidi a livello microscopico, in generale, si utilizza questo termine quando si ha a che fare con dispositivi di dimensione inferiore al millimetro. A queste dimensioni i processi di diffusione diventano molto più rapidi, così come si velocizza anche lo scambio termico ed inoltre si possono costruire scambiatori dall'elevatissimo rapporto superficie/volume. Questi benefici hanno aiutato la microfluidica a trovare applicazione in molti campi come: la chimica analitica (in cui, ad esempio, si

applica per automatizzare i processi di moltiplicazione del materiale genetico come la PCR), la generazione di energia (per la creazione di micro fuel cells), la separazione cellulare e la biologia molecolare, nonché per la creazione di micro-scambiatori di calore e in generale in tutto il campo del Lab-On-a-Chip (LOC) [1].

Infatti, il crescente interesse nella miniaturizzazione dei prodotti in tutti i settori industriali, assieme alla corsa globale per prodotti più affidabili, veloci ed economici ha portato moltissime nuove sfide nella progettazione dei sistemi di dissipazione del calore. Il rapido incremento nel numero di transistor e microchip e della loro potenza richiesta comporta un rapido aumento dei flussi di calore in gioco. Di conseguenza, i micro-scambiatori di calore e di massa stanno trovando nuove applicazioni in moltissimi campi come sistemi di gestione termica ad alto rendimento [2].

1.2. INTRODUZIONE E STORIA DEI MICRO-CANALI

All'inizio del 1981, Tuckerman e Pease per la prima volta espressero il concetto e le potenzialità di uno scambiatore di calore a micro-canali e stabilirono che il raffreddamento tramite convezione forzata, di un fluido monofase all'interno di micro-canali, avrebbe potuto rimuovere calore nell'ordine dei 1000 W/m^2 . Da allora, gli scambiatori a micro-canali sono diventati sempre più diffusi e interessanti nell'ambito della ricerca per merito dei loro elevatissimi coefficienti di scambio termico uniti alla possibilità di generare il flusso mantenendo moderate le cadute di pressione. Ad esempio, si è dimostrato che i sistemi di raffreddamento a micro-canali utilizzati per il controllo della temperatura dei laser a diodi possono rimuovere calore fino a 500 W/cm^2 [3].

Negli ultimi anni, gli studi sui flussi bifase all'interno dei micro-canali hanno acquisito maggiore importanza a causa del rapido sviluppo dei micro-dispositivi usati in vari settori, come, ad esempio, micro-dispositivi medici, scambiatori

compatti ad alto rendimento, raffreddamento di microchip o di sistemi che utilizzano fonti laser.

In molti casi, quando il raffreddamento richiede una sottrazione di calore maggiore di 100 W/cm^2 , non può essere svolto tramite i classici sistemi di raffreddamento ad aria o ad acqua. Spesso, infatti, per dissipare il calore generato dai componenti compatti ad alta potenza si utilizzano scambiatori più grandi del componente in sé, come si osserva in Figura 1.1.

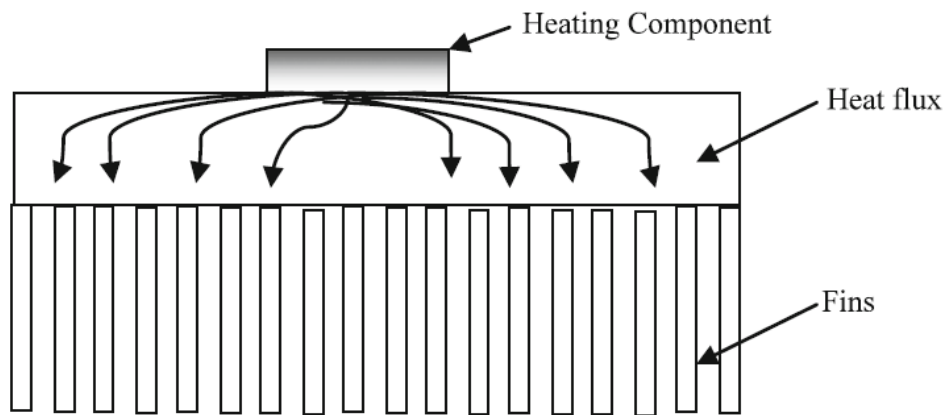


Figura 1.1: diagramma che mostra la scala fra il componente e il sistema di raffreddamento.

Purtroppo, però, sfruttando uno scambiatore grande con superficie alettata come quello in Figura 1.1, spesso si hanno punti caldi e il flusso di calore non è uniforme. Questo ha portato i ricercatori a sviluppare uno scambiatore che può essere direttamente incorporato alla sorgente di calore in modo da generare un flusso di calore uniforme, come quello che si osserva in Figura 1.2 [4].

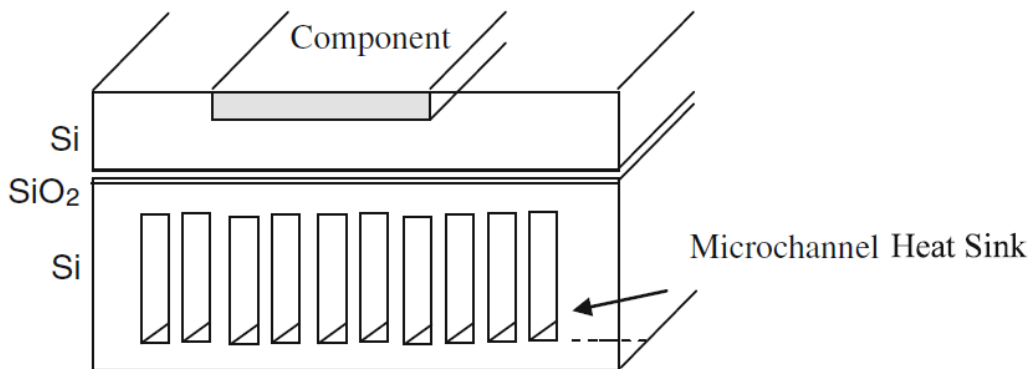


Figura 1.2: scambiatore a micro-canali incorporato.

Questo scambiatore, prodotto in silicio in modo mantenere il componente elettricamente isolato, è formato da canali molto stretti, nell'ordine del micrometro, in cui scorre il liquido refrigerante.

Dalla relazione fondamentale dello scambio termico convettivo:

$$\dot{Q} = hA_s(T_s - T_\infty) \quad (1.1)$$

sappiamo che per una ben definita differenza di temperatura, la potenza termica scambiata dipende dal prodotto del coefficiente di scambio termico convettivo con l'area di scambio. L'area di scambio termico può essere aumentata grazie all'utilizzo dei micro-canali [2].

1.3. CLASSIFICAZIONE DEI MICRO-CANALI

Molti ricercatori hanno proposto diversi criteri per la classificazione di micro e mini-canali. Mehendale et al., ad esempio, proposero di classificare i micro-scambiatori sulla base del diametro idraulico dei micro-canali:

- Micro scambiatori: $1 \mu m \leq d_h \leq 100 \mu m$
- Meso scambiatori: $100 \mu m \leq d_h \leq 1 mm$
- Scambiatori compatti: $1 mm \leq d_h \leq 6 mm$
- Scambiatori convenzionali: $d_h \geq 6 mm$

Kandlikar, nel 2002, propose invece una classificazione dei micro-canali:

- Canali convenzionali: $d_h \geq 3 mm$
- Mini-canali: $200 \mu m \leq d_h \leq 3 mm$
- Micro-canali: $10 \mu m \leq d_h \leq 200 \mu m$

Palm, invece, diede una definizione più generale dei micro-canali, descrivendoli come elementi nei quali le teorie classiche non definiscono correttamente il comportamento del fattore d'attrito e dello scambio termico.

Tuttavia, in molti testi i micro-canali sono semplicemente definiti come canali con diametro inferiore al millimetro [2].

1.4. FABBRICAZIONE DEI MICRO-CANALI

Molti dei vecchi micro-canali erano fabbricati tramite micro-litografia, un processo non fotolitografico che permette la creazione di micro e nano geometrie. In particolare, si utilizzavano processi μ CP nei quali si utilizzano strati auto-assemblati di alcanetoli (SAMs) su un substrato rivestito in metallo, o processi REM, simili ad uno stampaggio con modelli in polidimetil-silossano (PDMS) che presenta buone proprietà meccaniche, aderisce facilmente al substrato e può essere facilmente rimosso dopo ossidazione [5].

Uno dei principali problemi della micro-litografia è che essa deve essere svolta all'interno di una camera bianca la cui fabbricazione risulta dispendiosa sia in termini di tempo che in termini di costi.

Per questo motivo, gli ingegneri al lavoro nel campo della microfluidica hanno sviluppato una serie di nuovi processi in grado di fabbricare canali con dimensione inferiore al millimetro, cercando metodi che permettessero di ridurre i costi, diminuire i tempi, utilizzare materiali più economici nonché di utilizzarne una gamma più vasta creando un'ampia selezione di geometrie differenti.

1.4.1.LAMINAZIONE

Con dispositivi microfluidici prodotti per laminazione si intendono quelli creati per sovrapposizioni di più strati in modo che all'interno degli strati si vengano a formare dei micro-canali. Praticamente questi dispositivi vengono generati racchiudendo uno strato centrale, nel quale sono ritagliati dei canali, all'interno di due strati esterni. In Figura 1.3 si può osservare un dispositivo formato da soli tre strati che è utilizzato per la PCR.

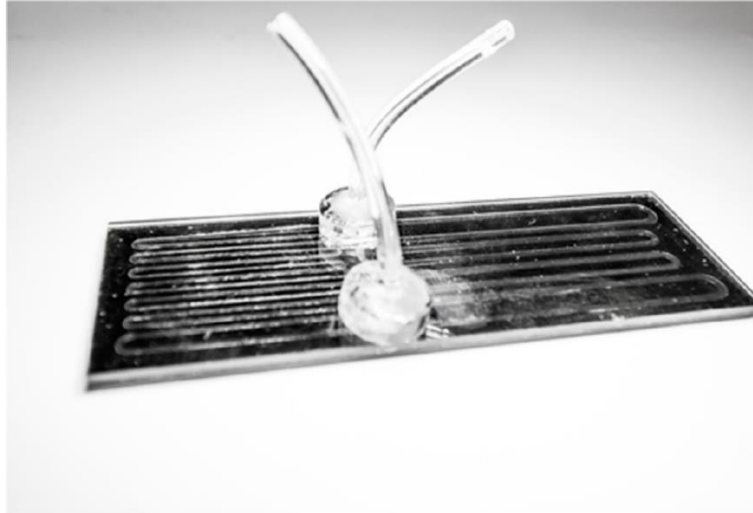


Figura 1.3: dispositivo per μ PCR.

I passi principali per costruire un dispositivo con questa tecnologia sono: la selezione del materiale, il taglio dei canali nei vari strati e l'incollaggio dei vari strati.

La fabbricazione dei micro-canali, in questo modo, risulta semplice e rapida, anche se gli attuali metodi per il taglio degli strati non consente di utilizzare strati inferiori a 50-200 μm , che potrebbero non essere abbastanza sottili per tutte le applicazioni.

Il processo di taglio è solitamente effettuato tramite un knife plotter o tramite taglio laser, in quanto, tali tecnologie, risultano semplici e rapide. In generale il taglio laser offre una risoluzione migliore (fino a 25 μm) ed è una tecnologia più flessibile per quanto riguarda i materiali e gli spessori processabili.

Per l'assemblaggio degli strati si procede per incollaggio tramite adesivi o mediante calore. Spesso i micro-canali sono ricavati su entrambi gli strati a contatto, per questo motivo è necessario posizionare correttamente gli strati e per farlo si ricorre spesso a fori di centraggio.

1.4.2.FORMATURA O STAMPAGGIO

Le tecnologie che si basano sul processo di formatura sono principalmente tre: replica molding, injection molding e hot embossing, di cui possiamo osservare una rapida rappresentazione dei passi di processo in Figura 1.4.

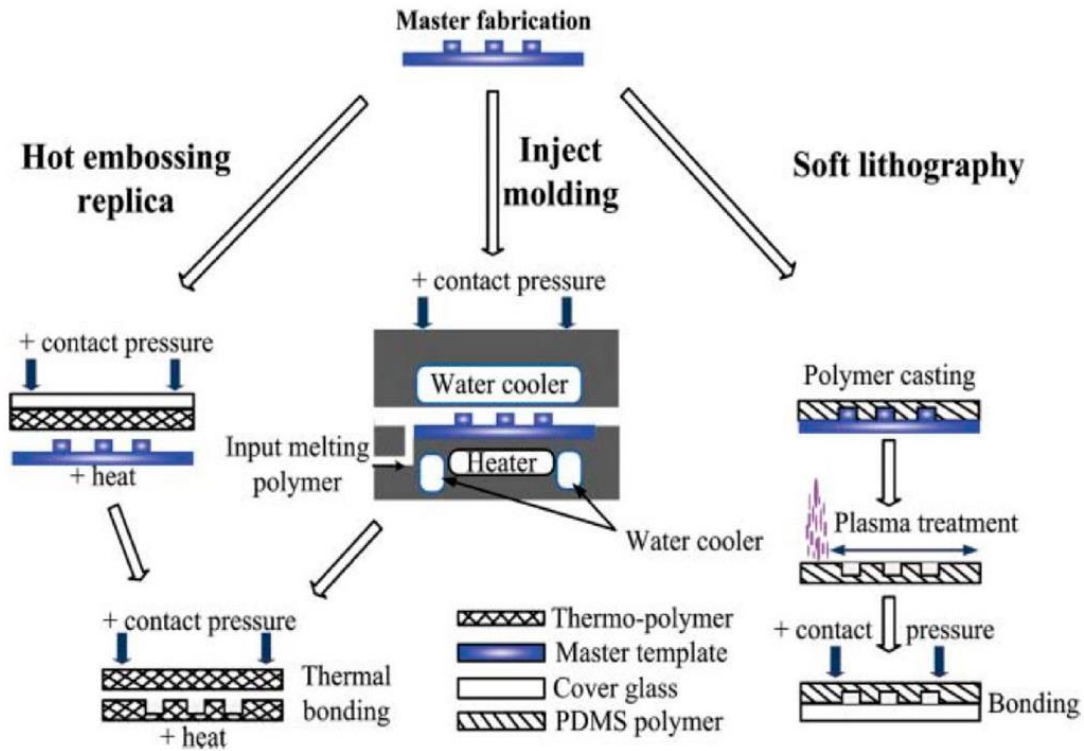


Figura 1.4: processi di formatura

Nella replica molding o micro-litografia si versa un polimero (come il PDMS) al di sopra di uno stampo e a seguito di un processo di reticolazione che permette al polimero di indurirsi si ottiene una replica negativa dello stampo iniziale, incollando tale replica su uno strato di vetro si ottengono dei micro-canali. Il principale svantaggio di tale tecnologia è che richiede l'utilizzo di una camera bianca e questo la rende decisamente costosa anche se permette di ottenere repliche ad alta risoluzione e biocompatibili, e di generare anche geometrie tridimensionali, rendendolo un processo adatto alla ricerca.

Nell'injection molding o micro-injection molding si utilizzano una vasta gamma di termoplastiche e tale tecnologia garantisce rapida produzione, a basso costo e con buona precisione. Questo la rende un'ottima tecnologia per la produzione

industriale. Il processo si svolge in quattro fasi: il materiale termoplastico viene sciolto all'interno di una camera a pressione, le due parti dello stampo vengono affacciate e pressate fra loro creando la cavità, la plastica viene iniettata all'interno di essa ed infine lo stampo viene raffreddato e il pezzo viene estratto. La precisione che si riesce ad ottenere dipende dalla tecnologia con cui gli stampi vengono costruiti, con micro-fresatura si raggiungono dimensioni minime di 25 µm mentre, se gli stampi vengono creati con la micro-litografia, si ha una risoluzione sub-micrometrica.

L'hot embossing o goffratura a caldo è un processo in cui un materiale termoplastico, o uno polimerico che diventa liquido alle alte temperature, sono formate con precisione utilizzando uno stampo, la pressione e il calore. Il processo è una sorta di calandratura in cui un film di materiale termoplastico viene compresso all'interno delle due facce dello stampo riscaldato in modo da lasciare un'impronta di esso sul film di partenza. Grazie all'alto volume di produzione e ai bassi costi, anche questa tecnologia si presta ad una produzione di serie.

1.4.3.STAMPA 3D

Le tecnologie di prototipazione rapida hanno un potenziale affascinante nel campo della microfluidica, in particolare per la creazione di prototipi, il che le rende un'ottima ed economica alternativa alla micro-litografia per i ricercatori. Dato l'incredibile successo di queste tecnologie, inoltre, il loro rapido sviluppo ha portato ad un rapido abbassamento dei costi delle stampanti che restano però uno strumento estremamente versatile. Ci sono vari processi associati a questo tipo di tecnologia, in particolare, nel campo della microfluidica si utilizzano l'FDM, la stereolitografia, l'MJM e il 2PP.

Nella tecnologia Fused Deposition Modelling (FDM) si utilizza un ugello surriscaldato attraverso il quale il materiale termoplastico viene fuso e

depositato strato per strato. Le stampanti FDM sono le più diffuse, il che le rende anche le più economiche, e possono lavorare con un'ampia gamma di termoplastiche, anche biocompatibili o bicomponenti. Tuttavia, tale processo ha una risoluzione limitata (si sono ottenuti canali fino a 0.8 mm), può lavorare solo materiali termoplastici e si ha un pessimo controllo sulla finitura superficiale a confronto con le altre tecnologie e con gli altri processi di stampa 3D.

La Stereolitografia è un classico processo di stampa strato per strato che utilizza un processo ottico. Questa tecnologia permette di ricavare strutture molto dettagliate, grazie al bassissimo spessore degli strati, in maniera piuttosto rapida. Si utilizza un bagno di resina e lo strato esterno di tale bagno viene fatto polimerizzare attraverso un ben strutturato raggio di luce, in generale si impiega un laser a diodi che viene concentrato tramite specchi sul bagno di resina. Come si osserva in Figura 1.5, ci sono due differenti tecnologie: free surface o constrained surface. La seconda sta diventando sempre più popolare in quanto necessita di molta meno resina e si evita la formazione di ossidi fra uno strato e l'altro. La risoluzione migliore con questo processo è stata ottenuta dal gruppo di Nordin che sono stati in grado di creare, con ottima ripetibilità, micro-canali rettangolari di dimensioni $18 \times 20 \mu\text{m}$ e anche microelementi attivi quali pompe e valvole [6]. Nonostante tale risoluzione si ha un forte limite per quanto riguarda i materiali processabili a confronto con gli altri processi di stampa quali MJM e FDM.

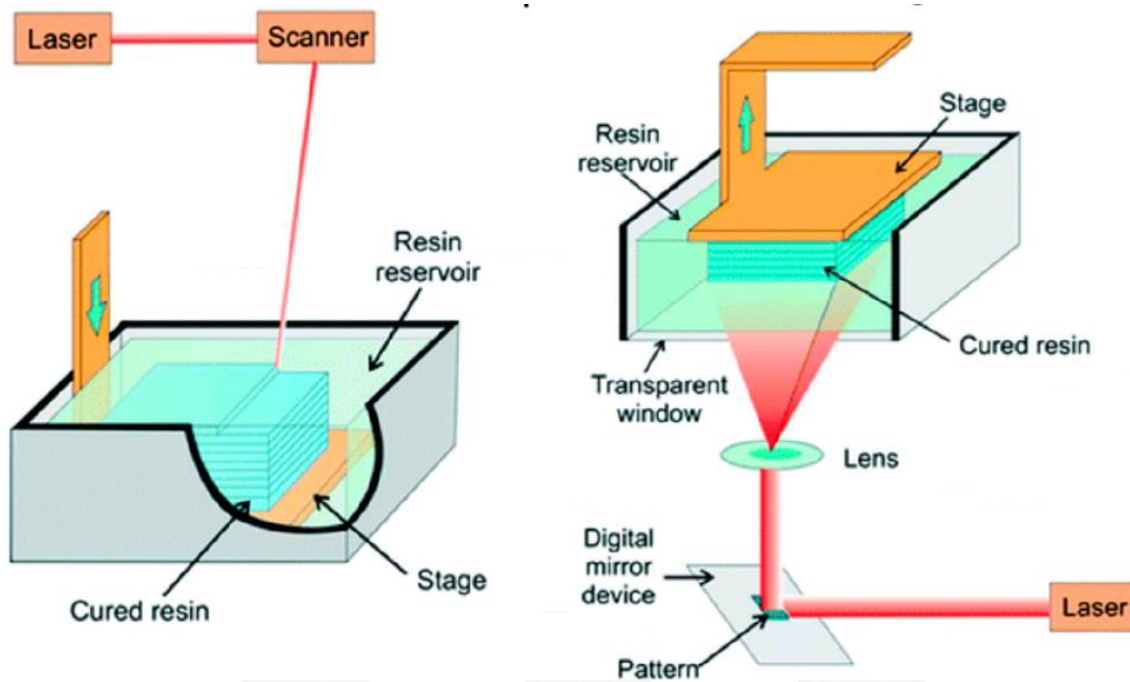


Figura 1.5: Stereolitografia free surface e constrained surface.

Il Multi Jet Modeling (MJM), anche conosciuto come Polyjet, è un processo fotosensibile molto simile alla stereolitografia ma, in questo caso la resina viene iniettata con un ugello sullo strato precedente e viene curata tramite una luce derivante da una sorgente montata direttamente sulla testina mobile della stampante. Questo processo garantisce ottime tolleranze ed è in grado di stampare con diversi materiali, anche durante la stessa stampa. Queste macchine però tendono ad essere molto costose e spesso la composizione delle resine utilizzate è brevettata e dunque non fruibile liberamente.

Mentre tutte le tecnologie di stampa 3D, prima citate, sono limitate a precisioni micrometriche, la Two-Photon Polymerization (2PP) può produrre dispositivi con particolari nanometrici. In questo processo, un laser che emette luce nel campo dell'infrarosso è concentrato su una specie foto-iniziatrice che assorbe due fotoni per dare inizio ad una reazione fotochimica. Questo implica piccolissimi spot di cura che permettono risoluzioni al di sotto dei 100 nm. Ciò implica però una certa lentezza nella cura dei pezzi che costituisce il più grosso limite di tale tecnologia.

1.4.4.NANOFABBRICAZIONE

Le tecniche di nanofabbricazione permettono di ottenere delle ottime tolleranze e, in generale, coinvolgono qualche forma di fotolitografia. Nella fotolitografia si produce una maschera del componente che si vuole ottenere e ne si proietta l'immagine sul pezzo che è stato precedentemente cosparso di materiale fotosensibile, questo permette il trasferimento della forma della maschera sul pezzo finale. Tali processi permettono elevatissime risoluzioni (al di sotto dei 250 nm) ma risultano molto lenti e piuttosto costosi, in quanto, come già detto, necessitano di essere svolti all'interno di camere bianche.

Fra i processi di nanofabbricazione si distinguono l'EUV, l'EBL, l'NIL e l'AAO.

L'Extreme Ultraviolet Lithography (EUV) è un processo di fotolitografia in cui si utilizza una fonte di luce sub-ultravioletta con lunghezza d'onda di 13 nm generata eccitando il plasma con una sorgente laser. Tale luce viene poi concentrata con un sistema di specchi riducendo lo spot ad alcune decine di nanometri. Commercialmente tale processo ha trovato spazio nell'industria dei semiconduttori in cui l'IBM ha recentemente riportato la tecnologia a 5 e 7 nm per la produzione dei loro transistor [7].

L'Electron Beam Lithography (EBL) è un processo di litografia che deriva dallo sviluppo del microscopio a elettroni (Scanning Electron Microscope SEM). in questo processo al posto del raggio di luce si utilizza un fascio concentrato di elettroni emesso su una superficie reattiva ad essi. Permette di realizzare particolari fino a 10 nm ma con estrema lentezza e questo vincola, tale processo, venire utilizzato solo in particolari applicazioni.

La Nanoimprinting Lithography (NIL) è un processo litografico permette di una risoluzione al di sotto dei 20 nm con alti volumi produttivi e bassi costi. Come la formatura, tale tecnologia consiste in un processo principalmente

meccanico in cui uno stampo viene affacciato al pezzo e pressato su di esso. Successivamente il pezzo viene trattato mediante processi termici, chimici o ottici (come la reticolazione ultravioletta) e, una volta raggiunta la deformazione desiderata, lo stampo viene rimosso.

L'anodizzazione dell'alluminio (Anodic Aluminium Oxidation AAO) è un processo già noto per l'indurimento e la protezione alla corrosione delle superfici in alluminio, ma recentemente si è scoperto che tali strutture sono anche utili per la creazione di micro-membrane e nano-canali. Infatti, tale processo induce, sulla superficie del pezzo, la formazione di celle esagonali ravvicinate di una dimensione che varia da 4 a 200 nm. Tali celle crescono perpendicolarmente alla superficie ad un'altezza che dipende dalle condizioni elettrochimiche del bagno anodizzante. Queste celle possono essere utilizzate come modelli per la creazione di micro-canali attraverso i vari processi visti, come la micro-litografia [1].

1.5. ELETTROSMOSI

È un fenomeno elettrocinetico macroscopico scoperto da Reuss nel 1809, secondo il quale molte superfici, a contatto con un fluido polare, attraverso processi chimici quali ionizzazione, adsorbimento di ioni e dissoluzione di ioni, acquisiscono una certa carica elettrica. Quest'ultima influenza la distribuzione degli ioni all'interno del fluido polare formando il cosiddetto Doppio Strato Elettrico o Electrical Double Layer (EDL) che si osserva in Figura 1.6 [8].

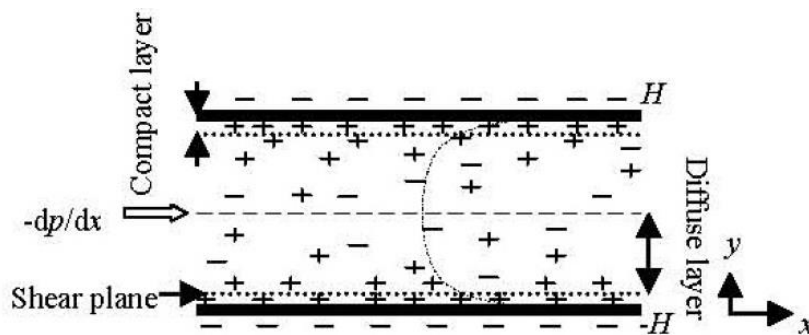


Figura 1.6: EDL all'interno di un micro-canale.

1.5.1. ELECTRICAL DOUBLE LAYER

L'EDL è la regione di fluido, vicina alla superficie, dove la distribuzione degli ioni viene disturbata dalla carica della superficie stessa, in modo che la densità di carica non sia più nulla in questa regione. Stern propose l'attuale modello di EDL, nel quale questa regione è suddivisa in due parti: il compact layer e il diffuse layer. Le due zone sono suddivise da una superficie immaginaria che proprio il nome di piano di Stern o piano di taglio.

Se supponiamo che la superficie sia più calda del fluido all'interno (come se ci trovassimo in un canale di uno scambiatore), allora all'interno del fluido si viene a creare un gradiente di temperatura che comporta il movimento delle particelle

all'interno del fluido per diffusione termica o effetto Ludwig-Soret. Questo non accade all'interno del compact layer, infatti, all'interno di questa regione, la diffusione termica non è sufficiente a vincere le forze di attrazione elettrostatica o forze di Van der Waals, dunque gli ioni restano attaccati alla superficie e il compact layer viene considerato immobile. Lo spessore di questa regione è decisamente limitato, tanto è vero che, se si guarda il flusso elettrosmotico con precisione del micrometro tutto il fluido si muove alla stessa velocità, se lo si guarda invece in una scala nanometrica ci si accorge che la velocità tende a zero in prossimità della parete, con uno spessore δ del compact layer che va da 0.5 a 200 nm (dipende dalle caratteristiche della superficie e dalla concentrazione degli ioni del fluido) [9].

Nel diffuse layer invece gli ioni sono sufficientemente lontani dalla superficie carica da poter essere mossi, nonostante la densità di carica non sia nulla neanche all'interno di tale regione. Proprio per questo motivo, se un campo elettrico viene imposto lungo il canale, gli ioni all'interno del diffuse layer vengono attratti e trascinano il fluido all'interno del canale grazie alle forze viscosive, in questo modo, si genera il flusso elettro-osmotico [8].

La distribuzione degli ioni all'interno dell'EDL è concentrata in prossimità della superficie e diminuisce spostandosi verso il centro del canale, questo genera un andamento decrescente del potenziale elettrico nel fluido se ci si muove su una sezione del canale, spostandosi verso il centro dello stesso, come si osserva in Figura 1.7.

La velocità del flusso elettrosmotico all'interno del micro-canale sarà proporzionale al potenziale ψ_0 che si genera sulla superficie, questo però risulta difficilmente misurabile e, dato il ridottissimo spessore del compact layer, spesso si approssima tale potenziale con quello che si può facilmente misurare sul piano di Stern ζ [10].

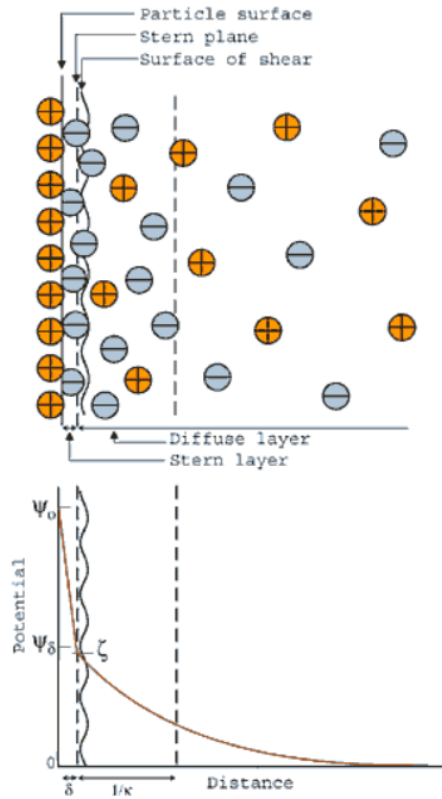


Figura 1.7: Distribuzione del potenziale all'interno dell'EDL.

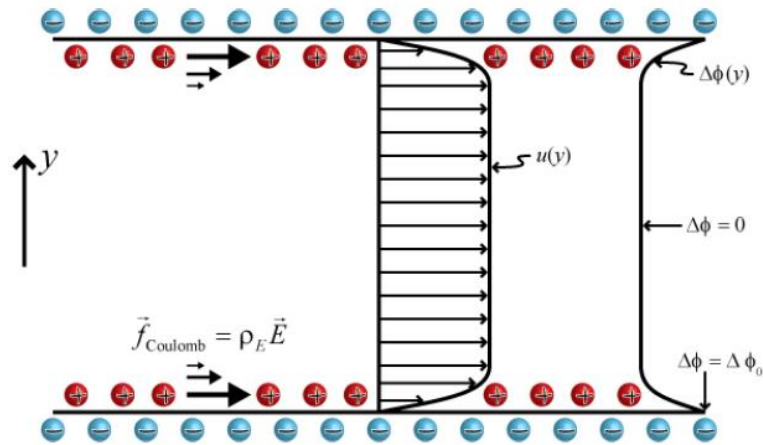


Figura 1.8: Andamento qualitativo di velocità e potenziale nei flussi elettrosmotici. Lo spessore dell'EDL è ingrandito per rendere chiaro l'andamento.

Come si osserva in Figura 1.8 infatti, applicando una differenza di potenziale in direzione dell'asse del canale, sugli ioni presenti all'interno dell'EDL agisce una forza di Coulomb, essa sarà proporzionale al potenziale del fluido lungo la

sezione del canale, di conseguenza diminuirà spostandosi dalla superficie verso il centro del canale.

All'esterno del diffuse layer, la densità di carica è nulla, quindi è nullo il potenziale del fluido e così anche la forza di Coulomb, quindi tutto il fluido all'esterno dell'EDL si muove praticamente alla stessa velocità, per via delle forze viscosive, trascinato dal moto del diffuse layer.

Per quanto riguarda lo spessore dell'EDL, secondo la teoria di Poisson-Boltzmann che descrive il potenziale elettrico generato dalla distribuzione degli ioni nel diffuse layer, esso risulta essere pari all'inverso del raggruppamento adimensionale k , detto parametro di Debye-Hückel:

$$k = \left(\frac{2n_{\infty}z^2e^2}{\epsilon_r\epsilon_0k_B T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.2)$$

In cui:

- n_{∞} è il numero di ioni per unità di volume presenti nella soluzione;
- z è la valenza degli ioni;
- ϵ_r è la costante dielettrica del fluido;
- ϵ_0 è la costante dielettrica del vuoto;
- k_B è la costante di Stephan-Boltzmann;
- T è la temperatura assoluta della soluzione.

1.5.2. POMPE ELETTROSMOTICHE

La movimentazione controllata all'interno dei micro-canali è fondamentale in molte applicazioni pratiche, per effettuarla, la moderna tecnologia mette a disposizione delle pompe elettrosmotiche che permettono di generare il flusso mediante l'applicazione di un campo elettrico esterno [11].

Tali pompe presentano numerosi vantaggi:

- Possono essere facilmente integrate, per via dei materiali e dei processi con cui sono realizzate, con i microchip da raffreddare.
- Generano un flusso continuo, al contrario di quelle a pistoni, peristaltiche, piezoelettriche e a siringa che invece generano un flusso pulsante.
- Si può invertire praticamente istantaneamente il flusso all'interno del canale invertendo la direzione del campo elettrico.
- Non hanno parti mobili e questo elimina problemi meccanici e aumenta l'affidabilità delle pompe stesse.

2. MODELLO MATEMATICO

Di seguito si riporta il modello matematico che permette di determinare i numeri di Nusselt e Poiseuille necessari per la procedura di ottimizzazione.

Il modello deve fornire l'andamento del potenziale all'interno del fluido, il campo di velocità e quello di temperatura, così da poter determinare tali numeri, a partire da bilanci di massa, quantità di moto ed energia.

2.1. DISTRIBUZIONE DI CARICA

Se si considera il fluido polare che scorre all'interno del micro-canale, su di esso può essere scritto il bilancio di massa, che prende la forma della ben nota equazione di continuità della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

In cui ρ è la densità del fluido e \vec{v} la sua velocità. Per determinare la distribuzione di carica è necessario considerare il fluido come una miscela di ioni, in questo modo è possibile scrivere l'equazione di continuità per l' i -esima specie di ioni:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla (\rho_i \vec{v}_i) = \dot{\omega}_i \quad (2.2)$$

In cui ρ_i è la densità della specie i -esima definita come la massa degli ioni della specie sul volume totale considerato, \vec{v}_i è la velocità puntuale di tali ioni e $\dot{\omega}_i$ è il tasso di generazione della specie che tiene conto delle possibili reazioni chimiche che potrebbero mutare la composizione del fluido sbilanciando la densità specifica delle specie. Nel caso specifico si considera l'assenza di

reazioni chimiche, di conseguenza il tasso di generazione di tutte le specie risulterà nullo:

$$\dot{\omega}_i = 0 \quad (2.3)$$

Dunque, si può riscrivere l'equazione di continuità della massa della specie i -esima di ioni:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla(\rho_i \vec{v}_i) = 0 \quad (2.4)$$

Si procede ora cercando di specificare i vari termini che costituiscono l'equazione (2.4). Secondo la teoria dei mezzi continui tutte le specie di ioni presenti all'interno del fluido occupano l'intero volume V a disposizione in maniera uniforme ma con diversi "gradi di occupazione" definiti dalle frazioni massiche m_i o dalle concentrazioni molari C_i :

$$\begin{cases} m_i = \frac{\rho_i}{\rho} \\ C_i = \frac{n_i}{V} \end{cases} \quad (2.5)$$

In cui n_i è il numero di moli della specie i -esima presenti nel volume V . Le due relazioni sono legate dalla massa molare della specie \mathcal{M}_i , infatti:

$$\rho_i = \rho \cdot m_i = \mathcal{M}_i \cdot C_i \quad (2.6)$$

Per quanto riguarda la velocità della singola specie di ioni, essa può essere espressa come somma di tre termini:

$$\vec{v}_i = \vec{v} + \vec{v}_{diff} + \vec{v}_{drift} \quad (2.7)$$

In cui:

- \vec{v} è la velocità media del flusso della miscela;

- \vec{v}_{diff} è la velocità di diffusione della specie i -esima dovuta al moto browniano di agitazione termica;
- \vec{v}_{drift} è la velocità di deriva degli ioni dovuta all'azione del campo elettrico esterno.

Si può, a questo punto, riscrivere l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla[\rho_i(\vec{v} + \vec{v}_{diff} + \vec{v}_{drift})] = 0 \quad (2.8)$$

Sfruttando la linearità della divergenza e ponendosi in regime stazionario, considerando quindi costante la massa della specie all'interno del volume di controllo, si può elidere il primo termine della relazione e scrivere:

$$\nabla(\rho_i \vec{v}) + \nabla(\rho_i \vec{v}_{diff}) + \nabla(\rho_i \vec{v}_{drift}) = 0 \quad (2.9)$$

Il termine $\rho_i \vec{v}_{diff}$ rappresenta il flusso di quantità di materia generato per diffusione, esso può essere descritto tramite la legge di Fick per la diffusione:

$$\vec{j} = \rho_i \vec{v}_{diff} = -D_i \nabla \rho_i \quad (2.10)$$

In cui D_i è la diffusività della specie. Sostituendo l'equazione (2.10) nella (2.9), si ottiene:

$$\nabla(\rho_i \vec{v}) - \nabla(D_i \nabla \rho_i) + \nabla(\rho_i \vec{v}_{drift}) = 0 \quad (2.11)$$

Che può essere riscritta in funzione delle concentrazioni molari, sfruttando l'equazione (2.6):

$$\nabla(D_i \nabla C_i \mathcal{M}_i) - \nabla C_i \mathcal{M}_i \vec{v} - \nabla C_i \mathcal{M}_i \vec{v}_{drift} = 0 \quad (2.12)$$

Ma la massa molare della specie risulta uniforme e dunque può essere portata fuori dall'operatore divergenza e semplificata, riducendo l'equazione a:

$$\nabla(D_i \nabla C_i) - \nabla C_i \vec{v} - \nabla C_i \vec{v}_{drift} = 0 \quad (2.13)$$

Che rappresenta una formulazione particolare dell'equazione di Nernst-Planck che descrive il flusso della specie in esame sotto l'influenza del gradiente di concentrazione e del campo elettrico.

Si suppone ora che ogni ione presente all'interno del fluido sia sottoposto all'azione del campo elettrico esterno E , che tramite l'equazione di Poisson può essere espresso come:

$$E = -\nabla\psi \quad (2.14)$$

In cui ψ è il potenziale elettrico imposto agli estremi del micro-canale. Gli ioni, dunque, reagiranno all'azione del campo elettrico muovendosi con velocità \vec{v}_{drift} che è legata al campo elettrico dalla relazione:

$$\vec{v}_{drift} = \mu E = -\mu \nabla\psi \quad (2.15)$$

In cui μ è la mobilità elettrica che, nel caso in esame non può prescindere dai fenomeni diffusivi, quindi esisterà un legame fra μ e D_i . In particolare, tale legame è definito dalla legge di Einstein-Smoluchowski:

$$\mu = \frac{qD_i}{kT} \quad (2.16)$$

Nel caso in esame la carica q sarà pari alla valenza degli ioni z_i per la carica elettrica fondamentale $e = 1,6021917 \cdot 10^{-19} \text{C}$ (che è la carica di un elettrone) e k è la costante di Boltzmann $k_b = 1,380649 \cdot 10^{-23} \text{JK}^{-1}$, quindi la mobilità elettrica può essere scritta come:

$$\mu = \frac{z_i e D_i}{k_b T} \quad (2.17)$$

In cui T è la temperatura assoluta. Da qui risulta direttamente, sostituendo la (2.17) nella (2.15), l'espressione della velocità di deriva della specie:

$$\vec{v}_{drift} = -\frac{z_i e D_i}{k_b T} \nabla \psi \quad (2.18)$$

Che ora si può sostituire all'interno della (2.12), ottenendo:

$$\nabla(D_i \nabla C_i) - \nabla C_i \vec{v} + \nabla C_i \frac{z_i e D_i}{k_b T} \nabla \psi = 0 \quad (2.19)$$

Se si introduce ora l'ipotesi di fluido incomprimibile, l'equazione di continuità della massa della miscela si riduce a:

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad (2.20)$$

Di conseguenza il termine $\nabla C_i \vec{v}$ può essere riscritto:

$$\nabla C_i \vec{v} = C_i \nabla \vec{v} + \vec{v} \nabla C_i = \vec{v} \nabla C_i \quad (2.21)$$

Supponendo ora che la diffusività della specie i -esima di ioni si mantenga uniforme all'interno del micro-canale, l'equazione (2.19) può essere riscritta come segue:

$$D_i \nabla^2 C_i - \vec{v} \nabla C_i + \nabla C_i \frac{z_i e D_i}{k_b T} \nabla \psi = 0 \quad (2.22)$$

E, dividendo per la diffusività:

$$\nabla^2 C_i - \frac{\vec{v}}{D_i} \nabla C_i + \nabla \frac{z_i e C_i}{k_b T} \nabla \psi = 0 \quad (2.23)$$

I termini dell'equazione ottenuta hanno unità di misura mol/m^2 , quindi, volendo rendere l'equazione adimensionale, sarà sufficiente dividere

l'equazione per la concentrazione media della specie i -esima C_0 e moltiplicare per il quadrato del diametro idraulico del canale D_h , ottenendo:

$$D_h^2 \nabla^2 \frac{C_i}{C_0} - \frac{\vec{v}}{D_i} D_h^2 \nabla \frac{C_i}{C_0} + D_h^2 \nabla \left(\frac{z_i e}{k_b T} \cdot \frac{C_i}{C_0} \cdot \nabla \psi \right) = 0 \quad (2.24)$$

Si definiscono ora una serie di termini adimensionali per alleggerire la notazione dell'equazione:

$$\begin{aligned} \nabla^* &= D_h \nabla \\ Pe &= \frac{|\vec{v}|}{D_i} D_h \\ C_i^* &= \frac{C_i}{C_0} \end{aligned} \quad (2.25)$$

In cui Pe è il numero di Peclet, un numero adimensionale fondamentale nello studio dei mezzi continui. Esso rappresenta il rapporto fra i fenomeni di trasporto, legati ad un flusso, e i fenomeni di diffusione, legati ad un gradiente, di una stessa grandezza, la massa nel caso in esame. Si definisce, nel caso ci si riferisca alla massa come:

$$Pe = Re \cdot Sc = \frac{\rho \vec{v} L}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\rho D} \quad (2.26)$$

In cui Re è il numero di Reynolds che da indicazione del rapporto fra i fenomeni di trasporto e i fenomeni viscosi e Sc è il numero di Schmidt di massa, che invece indica il rapporto fra i fenomeni viscosi e quelli diffusivi.

Ora, ricordando che $\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \hat{i}_v$, con \hat{i}_v versore della velocità media del flusso, si può scrivere la (2.24):

$$\nabla^{*2} C_i^* - Pe \hat{i}_v \nabla^* C_i^* + \nabla^* \left(\frac{z_i e C_i^*}{k_b T} \nabla^* \psi \right) = 0 \quad (2.27)$$

Nel caso in esame, dato che il flusso avviene all'interno di un micro-canale, si suppone che esso avvenga con velocità molto contenute rispetto ai fenomeni diffusivi, quindi si suppone che il numero di Peclet sia trascurabile $Pe \approx 0$, quindi la (2.27) risulta:

$$\nabla^{*2} C_i + \nabla^* \frac{z_i e C_i^*}{k_b T} \nabla^* \psi = 0 \quad (2.28)$$

Che ha come soluzione:

$$C_i^* = \exp\left(-\frac{z_i e \psi}{k_b T}\right) \quad (2.29)$$

Che prende il nome di distribuzione di Boltzmann. Come si osserva, l'ipotesi di considerare bassi numeri di Peclet è fondamentale, in quanto permette di disaccoppiare l'equazione che permette di determinare la distribuzione di carica dal termine relativo alla velocità del flusso.

In definitiva per i co-ioni e i contro-ioni la distribuzione di carica risulterà:

$$\begin{cases} C_+ = C_0 \exp\left(-\frac{z_+ e \psi}{k_b T}\right) \\ C_- = C_0 \exp\left(\frac{z_- e \psi}{k_b T}\right) \end{cases} \quad (2.30)$$

2.2. POTENZIALE ELETTRICO

Nota la distribuzione degli ioni all'interno del fluido è possibile determinare il potenziale elettrico in ogni punto del dominio. Per farlo si parte dalla definizione di densità di carica generata dalla distribuzione ionica vista in precedenza:

$$\rho_e = z_i e (C_+ - C_-) = -2z_i e C_0 \sinh\left(\frac{z_i e \psi}{k_b T}\right) \quad (2.31)$$

Si esprime in questo modo la densità di carica in funzione del potenziale elettrico generato dalla stessa. Il legame fra queste due grandezze è dato dall'equazione di Maxwell che definisce la legge di Gauss in forma locale per il campo elettrico:

$$\nabla E = \frac{\rho_e}{\varepsilon_0} \quad (2.32)$$

Ma, sfruttando la (2.14) e considerando anche che il nostro potenziale si sviluppa in un mezzo e non nel vuoto, si ottiene:

$$\nabla^2 \psi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad (2.33)$$

In cui ε_r è la costante dielettrica relativa del mezzo, mentre ε_0 è la costante dielettrica del vuoto. Sostituendo la (2.31) nella (2.33) si ottiene l'espressione del potenziale elettrico generato dalla distribuzione di carica di Boltzmann nel generico punto \vec{x} del dominio:

$$\nabla^2 \psi(\vec{x}) = \frac{2z_i e C_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \sinh\left(\frac{z_i e \psi(\vec{x})}{k_b T}\right) \quad (2.34)$$

Che, ancora una volta, può essere adimensionalizzata considerando un potenziale e una posizione adimensionali, definiti come:

$$\begin{cases} \psi^* = \frac{z_i e \psi}{k_b T} \\ \vec{X} = \frac{\vec{x}}{D_h} \end{cases} \quad (2.35)$$

Inoltre, essendo l'equazione scritta in termini con unità di misura Vm^{-2} l'equazione può essere adimensionalizzata moltiplicando entrambi i termini per $D_h^2 k_b T / z_i e$, ottenendo:

$$\nabla^{*2} \psi^* = \frac{2z_i^2 e^2 C_0 D_h^2}{\epsilon_0 \epsilon_r k_b T} \sinh(\psi^*) \quad (2.36)$$

E, richiamando la (1.2) che definisce il numero di Debye-Hückel, si ottiene:

$$\nabla^{*2} \psi^* = (kD_h)^2 \sinh(\psi^*) \quad (2.37)$$

Supponendo poi che la distribuzione di carica non si modifichi sensibilmente lungo l'asse del canale, si ha che la variazione del potenziale lungo la coordinata z risulta trascurabile rispetto alla variazione dello stesso parametro sulla sezione del canale, per cui si ottiene:

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial Y^2} = (kD_h)^2 \sinh(\psi^*) \quad (2.38)$$

L'equazione andrebbe risolta con la condizione al contorno di potenziale a parete ψ_0 ma, essendo quest'ultimo difficile da misurare ed essendo trascurabili le dimensioni del compact layer, si confonde il potenziale a parete con quello sul piano di Stern:

$$\psi(0) = \psi_0 \approx \zeta \quad (2.39)$$

Da cui, adimensionalizzando:

$$\psi_0^* = \frac{z_i e \psi_0}{k_b T} \approx \frac{z_i e \zeta}{k_b T} = \zeta^* \quad (2.40)$$

In generale si osserva che il potenziale dipende dalla geometria, dalle condizioni al contorno e dal parametro kD_h :

$$\psi^* = \psi^*(geom, \zeta^*, kD_h) \quad (2.41)$$

2.3. CAMPO DI MOTO

Il profilo di velocità si ricava dalle equazioni di Navier-Stokes. Si inizia scrivendo l'equazione nella forma più generica e successivamente si introducono le ipotesi relative al caso in esame. Si inizia dunque dall'equazione di Navier-Stokes:

$$\rho \vec{f} - \text{grad}(p) + (\mu + \mu') \text{grad}[\text{div}(\vec{v})] + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.42)$$

I cui \vec{f} è il campo delle forze di massa, μ è la viscosità del fluido e μ' il secondo coefficiente di viscosità (i due parametri indipendenti necessari per costituire il tensore degli sforzi).

Si introducono ora alcune ipotesi che permettono di scrivere l'equazione specifica del caso in esame, iniziando col supporre che il fluido sia incomprimibile, dunque, dall'equazione di continuità:

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.43)$$

E dunque l'equazione del moto si riduce a:

$$\rho \vec{f} - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.44)$$

Si suppone ora che sia nullo il gradiente di pressione lungo l'asse del canale, di conseguenza nullo in ogni direzione, e dunque:

$$\rho \vec{f} + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.45)$$

E che l'unico campo di forze di massa rilevante sia il campo elettrico esterno, quello imposto alle estremità del canale e diretto come l'asse del canale stesso \hat{i}_z , quindi si considera trascurabile l'azione del campo gravitazionale rispetto a quella del campo elettrico:

$$\vec{f} = \vec{E}_{ext} = E_z \hat{i}_z \quad (2.46)$$

Quindi la (2.45) diventa:

$$\rho_e \vec{E}_{ext} + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \quad (2.47)$$

Che risulta essere un'equazione vettoriale e dunque la si può scomporre nelle tre direzioni (x, y, z) definite in modo che la sezione del condotto giaccia sul piano (x, y) mentre l'asse dello stesso è diretto come l'asse z , scrivendo il vettore velocità come segue:

$$\vec{v} = u \hat{i}_x + v \hat{i}_y + w \hat{i}_z \quad (2.48)$$

Il sistema di equazioni risulta dunque:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \nabla^2 u = \rho \frac{Du}{Dt} \\ \mu \nabla^2 v = \rho \frac{Dv}{Dt} \\ \rho_e E_z + \mu \nabla^2 w = \rho \frac{Dw}{Dt} \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Si suppone ora che il moto sia stazionario e completamente sviluppato, quindi, in ogni punto del dominio:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

Si suppone poi che le pareti del canale siano lisce e rigide e che la sezione dello stesso resti costante, in modo che siano nulle tutte le componenti di velocità ad eccezione della componente diretta come l'asse del canale, quindi che:

$$\vec{v} = w\hat{z} \quad (2.51)$$

Le prime due equazioni del sistema (2.49) diventano dunque irrilevanti e la terza si riduce a:

$$\rho_e E_z + \mu \nabla^2 w = 0 \quad (2.52)$$

in cui $w = w(x, y)$.

Avendo già descritto, nel paragrafo precedente, l'equazione che lega il potenziale all'interno del fluido ψ , diverso dal potenziale esterno ψ_{ext} applicato agli estremi del canale che genera \vec{E}_{ext} , si può descrivere il campo di moto in funzione del potenziale ψ , quindi sfruttando la (2.31) e dividendo per la viscosità:

$$\nabla^2 w(x, y) - \frac{2z_i e C_0}{\mu} \sinh\left(\frac{z_i e \psi(x, y)}{k_b T(x, y)}\right) \cdot E_z = 0 \quad (2.53)$$

Osservando che ognuno dei due termini ha come unità di misura $\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$, anche in questo caso è possibile adimensionalizzare l'equazione moltiplicando per D_h^2/U in cui U è la velocità media di riferimento:

$$\frac{D_h^2}{U} \nabla^2 w - \frac{D_h^2}{U} \cdot \frac{2z_i e C_0}{\mu} \sinh\left(\frac{z_i e \psi}{k_b T}\right) \cdot E_z = 0 \quad (2.54)$$

Definendo, poi, la velocità e il campo elettrico adimensionali:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{U} \\ E_z^* &= \frac{E_z L}{\zeta} \end{aligned} \quad (2.55)$$

In cui U è la velocità di riferimento e L è la lunghezza del canale.

L'equazione (2.54) può essere riscritta in termini adimensionali:

$$\nabla^{*2} w^* - \frac{2z_i e C_0 \zeta D_h^2}{\mu U L} E_z^* \sinh(\psi^*) \quad (2.56)$$

E definendo il parametro M :

$$M = \frac{2z_i e C_0 \zeta D_h^2}{\mu U L} \quad (2.57)$$

Si ha:

$$\nabla^{*2} w^* - M E_z^* \sinh(\psi^*) \quad (2.58)$$

Solitamente si sceglie il parametro adimensionale M in modo che risulti unitario

$M = 1$, che equivale a scegliere la velocità di riferimento U in modo che:

$$U = \frac{2z_i e C_0 \zeta D_h^2}{\mu L} \quad (2.59)$$

Si ottiene dunque l'equazione adimensionale che descrive il profilo di velocità:

$$\nabla^{*2} w^* = E_z^* \sinh(\psi^*) \quad (2.60)$$

Come si è già detto però, si suppone che il moto sia completamente sviluppato, dunque, la componente di velocità diretta come l'asse del canale non varia in direzione z , per cui l'equazione si riduce a:

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial Y^2} = E_z^* \sinh(\psi^*) \quad (2.61)$$

Da risolvere con le condizioni al contorno di perfetta aderenza alle pareti:

$$w_{wall} = w_0 = w_0^* = 0 \quad (2.62)$$

Come si evince dalla (2.60) il problema di velocità è strettamente legato al problema del potenziale analizzato al paragrafo precedente, inoltre la velocità adimensionale w^* dipende dal campo elettrico imposto sul micro-canale, quindi:

$$w^* = w^*(geom, \zeta^*, kD_h, E_z) \quad (2.63)$$

2.4. CAMPO DI TEMPERATURA

Per determinare il campo di temperatura si inizia dall'equazione generale di conservazione dell'energia totale, scritta in funzione della temperatura, la cui trattazione viene svolta nell'Appendice A: Bilancio di Energia:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla(\lambda \nabla T) + \mu \Phi + q_{gen}''' \quad (2.64)$$

Si introducono ora le ipotesi relative al caso in esame semplificare l'equazione. Si suppone dunque che:

- siano trascurabili gli effetti di dissipazione viscosa:

$$\mu \Phi = 0 \quad (2.65)$$

- siano assenti effetti nucleari e reazioni chimiche in modo che il termine generativo q_{gen} sia totalmente dovuto alla dissipazione per effetto Joule dovuto alla presenza del campo elettrico esterno, quindi:

$$q'''_{gen} = \vec{j} \cdot \vec{E}_{ext} \quad (2.66)$$

In cui \vec{j} è la densità di corrente che può essere scritta tramite la legge di Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E}_{ext} \quad (2.67)$$

In cui σ è la conduttività elettrica del fluido. Per cui:

$$q_{gen} = \sigma \cdot E_z^2 \quad (2.68)$$

- il moto sia laminare e che la sezione del condotto rimanga costante;
- le proprietà termofisiche risultino uniformi nel dominio, quindi:

$$\nabla(\lambda \nabla T) = \lambda \nabla^2 T \quad (2.69)$$

- sia assente il gradiente di pressione imposto:

$$\frac{Dp}{Dt} = 0 \quad (2.70)$$

Quindi, nel caso in esame, il bilancio di energia si riduce a:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \sigma E_z^2 \quad (2.71)$$

Si scrive ora per intero la derivata totale della temperatura rispetto al tempo:

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.72)$$

In cui, essendo il condotto a sezione costante ed essendo trascurabili gli effetti di dissipazione viscosa, si possono considerare nulle le componenti di velocità non dirette come l'asse del condotto, come già affermato nel capitolo precedente, quindi:

$$u = v = 0 \quad (2.73)$$

Ed inoltre, si sta analizzando il caso stazionario, di conseguenza la temperatura puntualmente rimane costante, quindi:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.74)$$

Queste considerazioni permettono di riscrivere l'equazione (2.74) come:

$$\rho c_p w \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda \nabla^2 T + \sigma E_z^2 \quad (2.75)$$

A questo punto l'equazione può essere rimaneggiata per renderla adimensionale:

$$\frac{\rho w_m D_h}{\mu} \cdot \frac{\mu c_p}{\lambda} \cdot \frac{w/U}{w_m/U} \cdot \frac{1}{D_h} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T + \frac{\sigma E_z^2}{\lambda} \quad (2.76)$$

E ricordando che:

$$\begin{cases} Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} \\ Re = \frac{\rho w_m D_h}{\mu} \end{cases} \quad (2.77)$$

Si ottiene:

$$Re Pr \cdot \frac{w^*}{w_m^*} \cdot \frac{1}{D_h} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla^2 T + \frac{\sigma E_z^2}{\lambda} \quad (2.78)$$

Si procede definendo una temperatura adimensionale:

$$\Theta = \frac{T - T_p}{T_p - T_{m_i}} \quad (2.79)$$

E osservando che:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{1}{T_p - T_{m_i}} \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.80)$$

L'equazione (2.78) può essere scritta come:

$$RePr \cdot \frac{w^*}{w_m^*} \cdot \frac{1}{D_h} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \nabla^2 \Theta + \frac{\sigma E_z^2}{\lambda(T_p - T_{m_i})} \quad (2.81)$$

Infine, per terminare l'adimensionalizzazione, è sufficiente moltiplicare tutti i termini dell'equazione per D_h^2 e definire le coordinate adimensionali:

$$X = \frac{x}{D_h}; Y = \frac{y}{D_h}; Z = \frac{z}{D_h} \quad (2.82)$$

Si definisce inoltre un parametro adimensionale M_z , che risulta proporzionale al quadrato del campo elettrico imposto sul canale:

$$M_z = \frac{\sigma(D_h E_z)^2}{\lambda(T_p - T_{m_i})} \quad (2.83)$$

Ottenendo l'espressione finale che descrive il campo di temperatura all'interno del canale:

$$RePr \cdot \frac{w^*}{w_m^*} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} + M_z \quad (2.84)$$

L'equazione (2.84) sarà da risolvere con particolari condizioni al contorno, nel caso in esame si scelgono condizioni al contorno di tipo T o di Dirichlet [12] quindi con temperatura di parete costante e uniforme:

$$T|_p = T_p = \text{cost} \quad (2.85)$$

Tale condizione può anche essere scritta tramite i parametri adimensionali:

$$\Theta|_{P_h^*} = 0 \quad (2.86)$$

Quindi il campo di temperatura dipende dal campo di velocità e dal parametro M_z :

$$\Theta = \Theta(\text{geom}, kD_h, \zeta^*, M_z) \quad (2.87)$$

Scompare dunque la dipendenza da E_z^* in quanto da esso dipendono sia w^* che w_m^* , quindi il loro rapporto non dipende da tale parametro.

2.5. NUMERO DI POISEUILLE

Risolvendo le equazioni ottenute nei paragrafi precedenti si ottengono gli andamenti della velocità e della temperatura sulla sezione del condotto, dai quali è possibile ricavare i numeri Nusselt e Poiseuille, attraverso i quali si ricavano le relazioni operative per la fase di ottimizzazione.

Per determinare il numero di Poiseuille si inizia definendo il fattore di attrito locale:

$$f_z = \frac{\tau_z}{\rho \frac{w_m^2}{2}} \quad (2.88)$$

In cui τ_z è la tensione tangenziale locale sul perimetro P del canale e avendo supposto che il fluido sia newtoniano si ha:

$$\tau_z = -\mu \frac{\partial w}{\partial \hat{n}} \quad (2.89)$$

In cui \hat{n} è la direzione normale alla superficie del condotto. In realtà, dato che si è supposto che il profilo di velocità sia completamente sviluppato e dunque $w = w(x, y)$, allora la tensione tangenziale risulta uniforme lungo la direzione z e, di conseguenza, lo sarà anche il fattore di attrito. Per questo motivo non ha senso parlare di fattore di attrito locale, ma bensì si parlerà di fattore d'attrito medio:

$$f = \frac{\tau_m}{\rho \frac{w_m^2}{2}} \quad (2.90)$$

In cui τ_m è la tensione tangenziale mediata sul perimetro bagnato:

$$\tau_m = -\frac{1}{P} \int_P \mu \frac{\partial w}{\partial \hat{n}} dP \quad (2.91)$$

Da cui:

$$f = -\frac{2\mu}{\rho w_m^2 P} \int_P \frac{\partial w}{\partial \hat{n}} dP \quad (2.92)$$

Che si può esprimere attraverso termini adimensionali, ricordando che:

$$\begin{aligned} w^* &= \frac{w}{w_m} \\ P^* &= \frac{P}{D_h} \\ Re &= \frac{\rho w_m D_h}{\mu} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ovvero:

$$f = -\frac{2\mu}{\rho w_m D_h} \cdot \frac{D_h}{P} \int_P \frac{1}{w_m} \cdot \frac{\partial w}{\partial \hat{n}} dP = -\frac{2}{Re P^*} \int_{P^*} \frac{\partial w^*}{\partial \hat{n}} dP^* \quad (2.94)$$

Da cui si può facilmente estrarre il numero di Poiseuille:

$$Po = f \cdot Re = -\frac{2}{P^*} \int_{P^*} \frac{\partial w^*}{\partial \hat{n}} dP^* \quad (2.95)$$

Quindi si osserva che il numero di Poiseuille risulta indipendente da E_z^* :

$$Po = Po(\text{geom}, \zeta^*, kD_h) \quad (2.96)$$

2.6. NUMERO DI NUSSELT

Il numero di Nusselt dà una misura di quanto dello scambio termico avvenga per convezione rispetto a quello che avviene per conduzione. Per tale ragione si richiama la definizione di potenza termica scambiata per convezione per unità di lunghezza:

$$q' = h(T_p - T_m)P_h \quad (2.97)$$

In cui T_m è la temperatura di mescolamento che è definita come:

$$T_m = \frac{\int_S \rho c_p w T dS}{\int_S \rho c_p w dS} \quad (2.98)$$

Che nel caso specifico, di fluido incomprimibile e proprietà costanti, diventa:

$$T_m = \frac{\int_S w T dS}{\int_S w dS} = \frac{\int_S w T dS}{w_m S} \quad (2.99)$$

E sfruttando i termini adimensionali:

$$\begin{aligned} w^* &= w/U \\ S^* &= S/D_h^2 \end{aligned} \quad (2.100)$$

Si ottiene:

$$T_m = \frac{U}{w_m} \cdot \frac{D_h^2}{S} \int_{S^*} w^* T dS^* \quad (2.101)$$

Da cui:

$$T_p - T_m = \frac{U}{w_m} \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* (T_p - T) dS^* \quad (2.102)$$

E, utilizzando la definizione di temperatura adimensionale $T^* = \frac{k}{q'} (T_p - T_m)$,

si ottiene:

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{k}{q'} (T_p - T_m) = \frac{U}{w_m} \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* \frac{k}{q'} (T_p - T) dS^* \\ &= \frac{U}{w_m} \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* T^* dS^* \end{aligned} \quad (2.103)$$

A questo punto si riprende l'equazione (2.97) e si moltiplica per kD_h/q' per far comparire il numero di Nusselt $Nu = hD_h/k$:

$$kD_h = h(T_p - T_m)P_h \cdot \frac{kD_h}{q'} \quad (2.104)$$

E riordinando:

$$\frac{D_h}{kP_h} \cdot \frac{q'}{(T_p - T_m)} = \frac{hD_h}{k} = Nu \quad (2.105)$$

E, direttamente, sfruttando la (2.103):

$$Nu = \frac{1}{P_h^*} \cdot \frac{1}{\frac{U}{w_m} \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* T^* dS^*} = \frac{1}{P_h^*} \cdot \frac{U \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* dS^*}{U \cdot \frac{1}{S^*} \int_{S^*} w^* T^* dS^*} \quad (2.106)$$

Da cui si ricava:

$$Nu = \frac{1}{P_h^*} \cdot \frac{\int_{S^*} w^* dS^*}{\int_{S^*} w^* T^* dS^*} \quad (2.107)$$

Quindi:

$$Nu = Nu(\text{geom}, kD_h, \zeta^*, M_z) \quad (2.108)$$

3. PERFORMANCE EVALUATION CRITERIA (PEC)

I PEC costituiscono un metodo quantitativo per valutare i miglioramenti apportati da una modifica sulle prestazioni di uno scambiatore di calore [13].

I micro-scambiatori di calore sono solitamente costituiti da N micro-canali disposti in parallelo, quindi il caso in esame di flusso elettrosmotico all'interno di un singolo micro-canale può essere visto come un caso particolare di scambiatore di calore, e dunque passibile di ottimizzazione tramite PEC.

La potenza scambiata dal fluido che scorre all'interno di uno scambiatore di calore può essere espressa come:

$$\dot{Q} = UA\Delta T_m \quad (3.1)$$

In cui U è il coefficiente globale di scambio termico, A la superficie di scambio e ΔT_m è la temperatura media logaritmica. Se ora si moltiplica e si divide la relazione per la lunghezza dello scambiatore L :

$$\dot{Q} = \frac{UA}{L} \cdot L\Delta T_m \quad (3.2)$$

In cui L/UA rappresenta la resistenza termica complessiva per unità di lunghezza, di conseguenza, aumentare le prestazioni dello scambiatore significa diminuire il valore di tale resistenza, e lo si fa principalmente per tre obiettivi:

- Ridurre la taglia dello scambiatore a parità di potenza scambiata, quindi, nel caso in esame, ridurre la lunghezza del canale.
- Aumentare il coefficiente globale di scambio termico, questo permette di diminuire ΔT_m rendendo il processo termodinamicamente più efficiente e più economico.

- Ridurre la potenza di pompaggio P necessaria a movimentare il fluido, che nel caso in esame coincide con la potenza elettrica necessaria a generare il potenziale ai capi del micro-canale.

Per raggiungere tali obiettivi si può far leva su diverse variabili:

- Variabili geometriche, quali la forma della sezione del condotto, la sua lunghezza L e il numero di micro-canali N dello scambiatore, anche se nel caso specifico ne consideriamo uno solo.
- Variabili operative, quali la portata massica \dot{m} del fluido circolante, la sua velocità media o il ΔT fra fluido e parete all'ingresso.

Tali variabili sono modificabili da parte del progettista per agire sulle variabili dipendenti quali potenza scambiata \dot{Q} o potenza di pompaggio P , ed aumentare le prestazioni dello scambiatore.

3.1. RELAZIONI GEOMETRICHE

Si procede definendo la geometria del condotto necessaria all'applicazione dei PEC. Nel caso in esame si considera un condotto a sezione rettangolare, con lato corto di lunghezza $2a$, quello lungo $2b$ e spigoli raccordati con raggio di raccordo pari a r_c , come mostrato in Figura 3.1:

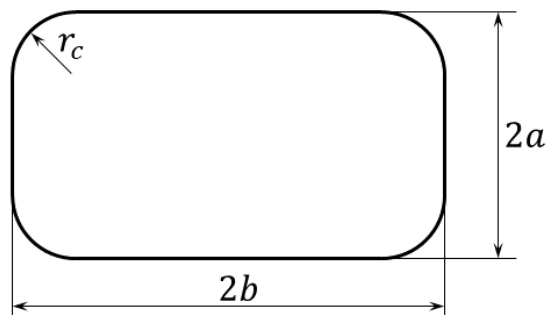


Figura 3.1: sezione del condotto.

Si prosegue dunque riportando le relazioni per la descrizione della geometria, quali l'area della sezione del condotto S , il perimetro bagnato che nel caso in esame coincide con quello scaldato P_h e il diametro idraulico D_h .

Per quanto riguarda la sezione si ha:

$$S = 4ab - (r_c^2 - \pi r_c^2) \quad (3.3)$$

Se si indica poi con β il fattore di forma, definito come:

$$\beta = \frac{a}{b} \quad (3.4)$$

E con R_c il raggio di raccordo adimensionale definito come:

$$R_c = \frac{r_c}{2a} \quad (3.5)$$

Allora la relazione per l'area della sezione del condotto può essere scritta come:

$$S = a^2 \left[\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi) \right] \quad (3.6)$$

Per quanto riguarda il perimetro riscaldato, invece, si ha:

$$P_h = 4a + 4b - 8r_c + 2\pi r_c \quad (3.7)$$

Che può essere riscritto:

$$P_h = 4a \left[1 + \frac{1}{\beta} - 4R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3.8)$$

Mentre per quanto riguarda il diametro idraulico, per definizione si ha:

$$D_h = \frac{4S}{P_h} \quad (3.9)$$

E dunque si possono riassumere tutte le relazioni relative alla geometria:

$$\begin{cases} S = a^2 \left[\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi) \right] \\ P_h = 4a \left[1 + \frac{1}{\beta} - 4R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right] \\ D_h = \frac{a \left[\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi) \right]}{\left[1 + \frac{1}{\beta} - 4R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right]} \end{cases} \quad (3.10)$$

Anche queste relazioni possono essere adimensionalizzate rispetto ad una condizione di riferimento che, in questo elaborato corrisponde alla condizione di condotto rettangolare con lo stesso fattore di forma ma con raggio di raccordo nullo, la cui sezione si osserva in Figura 3.2:

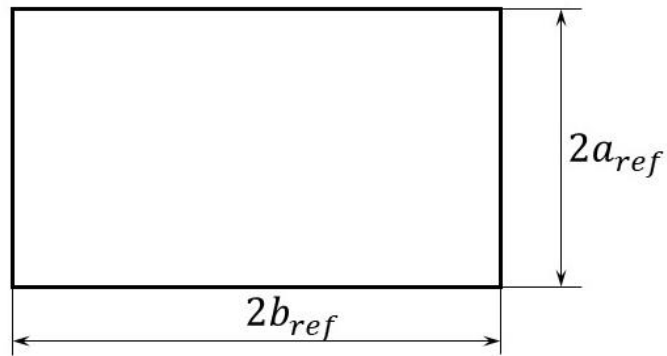


Figura 3.2: geometria di riferimento.

Per la geometria di riferimento le relazioni possono essere riscritte:

$$\begin{cases} S_r = a_r^2 \left[\frac{4}{\beta} \right] \\ P_{hr} = 4a_r \left[1 + \frac{1}{\beta} \right] \\ D_{hr} = \frac{a_r \left[\frac{4}{\beta} \right]}{\left[1 + \frac{1}{\beta} \right]} \end{cases} \quad (3.11)$$

E dunque le relazioni geometriche adimensionalizzate risultano:

$$\left\{ \begin{array}{l} S' = \left(\frac{a}{a_r}\right)^2 \frac{\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi)}{\frac{4}{\beta}} \\ P'_h = \frac{a}{a_r} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\beta} - 4R_c \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \frac{1}{\beta}} \\ D'_h = \frac{a}{a_r} \cdot \frac{\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi)}{1 + \frac{1}{\beta} - 4R_c \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \frac{1 + \frac{1}{\beta}}{\frac{4}{\beta}} \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Come si osserva, le relazioni adimensionali della geometria non dipendono solo dal raggio di raccordo adimensionale R_c ma anche dal rapporto a/a_r .

L'obiettivo della trattazione è però quello di studiare l'effetto della variazione di R_c , per questo motivo a/a_r deve essere trattato come un parametro e deve dunque essere fissato. Per fare ciò è possibile agire in quattro modi differenti che vengono riassunti in Tabella 3-1:

Numero	Descrizione	Formulazione
I	Condotti di uguale dimensione	$\frac{a}{a_r} = 1$
II	Condotti con area della sezione uguale	$S' = 1$
III	Condotti con perimetro uguale	$P'_h = 1$
IV	Condotti con stesso diametro idraulico	$D'_h = 1$

Tabella 3-1: Restrizioni geometriche.

Nel caso in esame si sceglie di imporre la condizione IV e dunque di fissare il parametro a/a_r scegliendo di rapportare il condotto con gli spigoli raccordati con un condotto a spigoli vivi con lo stesso diametro idraulico.

3.2. RELAZIONI OPERATIVE

Per legare la potenza termica scambiata e la potenza di pompaggio alle variabili di progetto dello scambiatore abbiamo bisogno di relazioni operative, sulle quali è successivamente possibile applicare i PEC.

Ricapitolando, le funzioni obiettivo sono:

- $\dot{Q}(W)$: potenza termica scambiata;
- $P(W)$: potenza di pompaggio;
- $\dot{m}(kg/s)$: portata in massa;
- $L(m)$: lunghezza del micro-canale;
- $\Delta T_i = T_p - T_{m_i}(K)$: differenza di temperatura fra la parete e la temperatura di mescolamento del fluido all' ingresso del micro-canale.

Per legare le funzioni obiettivo si scrive la potenza scambiata per convezione su un tratto di condotto lungo dz supponendo che:

- il condotto sia cilindrico, con pareti lisce e rigide;
- il moto sia laminare;
- il flusso sia stazionario e termicamente completamente sviluppato;
- il fluido sia incomprimibile newtoniano e con proprietà termofisiche costanti;
- siano trascurabili le forze di volume;
- sia trascurabile il termine di generazione per effetto Joule.

Quest'ultima ipotesi è fatta analizzando i dati riportati in [14], nel quale si enuncia che, a prescindere dal valore scelto per il campo elettrico imposto sul canale, in prossimità della sezione di ingresso, il contributo del riscaldamento per effetto Joule sul profilo di temperatura risulta trascurabile, che risulta una condizione fortemente auspicabile per uno scambiatore di calore. Il contributo dell'effetto Joule diventa preponderante per lunghezze al di fuori del range di interesse per i micro-scambiatori, in particolare quando lo scambiatore non è più in grado di dissipare il calore proveniente dalle pareti del canale e, per una certa lunghezza, sarà il fluido stesso a riscaldare le pareti del canale.

Per determinare la potenza termica scambiata è possibile partire da un bilancio di energia su un tratto infinitesimo di lunghezza dz , come si osserva in Figura 3.3 si può scrivere:

$$\dot{m}c_p(T_m + dT_m) = \dot{m}c_pT_m + q_{conv} \quad (3.13)$$

Se inoltre si indica con q'_z la potenza termica scambiata per unità di superficie, allora la potenza termica scambiata per convezione può essere riscritta come:

$$q_{conv} = q'_z P_h dz \quad (3.14)$$

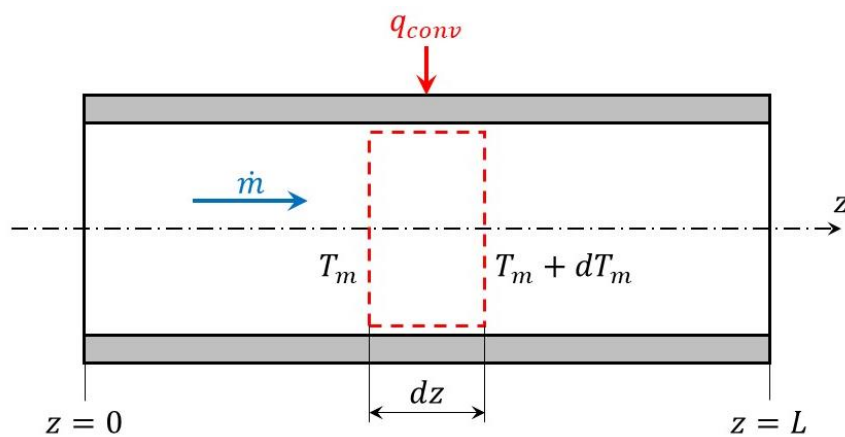


Figura 3.3: Bilancio di energia su un tratto infinitesimo di canale.

Per cui la (3.13) può essere riscritta:

$$\dot{m}c_p dT_m = q'_z P_h dz \quad (3.15)$$

In cui:

$$q'_z = h(T_p - T_m) = h\Delta T \quad (3.16)$$

Si ottiene dunque:

$$\dot{m}c_p dT_m = h\Delta T P_h dz \quad (3.17)$$

Sarà necessario dunque integrare tale relazione su tutta la lunghezza del condotto scegliendo le opportune condizioni al contorno [12], che si riportano in Tabella 3-2:

Design.	Descrizione	Equazioni
T	Temperatura di parete costante e uniforme su tutto il canale	$T _p = cost$
H1	Flusso di calore lineico in direzione assiale costante con temperatura di parete costante	$q'_z = cost$ $T _p = cost$
H2	Flusso termico costante in tutto il canale	$q'_z = cost, q''_z = k \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big _p = cost$
H3	Flusso di calore lineico in direzione assiale costante e conduzione attraverso la parete del canale	$q'_z = cost$ $\frac{q''_z D_h}{k} - \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big _p + \frac{K_p \partial^2 T}{\partial t^2} \Big _p = 0$
H4	Flusso di calore lineico in direzione assiale di tipo esponenziale e temperatura di parete costante	$q'_z = q e^{\lambda z / D_h}$ $T _p = cost$
R1	Resistenza termica a parete finita	$q''_z = k \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big _p = U_p (T_{amb} - T_p)$ $T _p = cost$
R2	Condizione al contorno di irraggiamento	$q''_z = k \frac{\partial T}{\partial \hat{n}} \Big _p = \varepsilon_p \sigma T_p^4$ $T _p = cost$

Tabella 3-2: Condizioni al contorno.

Nel caso in esame si scelgono condizioni al contorno di tipo T, quindi di temperatura di parete costante e uniforme e pari a T_p , di conseguenza di ha:

$$\frac{1}{T_p - T_m} dT_m = \frac{hP_h}{\dot{m}c_p} dz \quad (3.18)$$

Che è necessario integrare su tutta la lunghezza del condotto:

$$\int_{T_{m_i}}^{T_{m_o}} \frac{1}{T_p - T_m} dT_m = \int_0^L \frac{hP_h}{\dot{m}c_p} dz \quad (3.19)$$

In cui T_{m_i} e T_{m_o} sono rispettivamente le temperature di mescolamento all'ingresso e all'uscita del micro-canale.

Tramite le supposizioni fatte ad inizio paragrafo è possibile portare tutti i termini del secondo membro al difuori dell'integrale e integrare, ottenendo:

$$\ln\left(\frac{\Delta T_i}{\Delta T_o}\right) = \frac{hP_h}{\dot{m}c_p} L \quad (3.20)$$

In cui ΔT_i e ΔT_o sono rispettivamente le differenze di temperatura fra la parete e la temperatura di mescolamento del fluido sulla sezione di ingresso e di uscita del canale.

D'altronde, la potenza termica scambiata lungo il micro-canale sarà proporzionale alla variazione della temperatura di mescolamento del fluido:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p(T_{m_o} - T_{m_i}) \quad (3.21)$$

Possiamo ora rimaneggiare l'equazione (3.20) per esplicitare il termine $T_{m_o} - T_{m_i}$, in particolare si può scrivere:

$$\frac{T_p - T_{m_o}}{T_p - T_{m_i}} = e^{-\frac{hP_h L}{\dot{m}c_p}} \quad (3.22)$$

Dalla quale si ottiene:

$$T_{m_o} = T_p - (T_p - T_{m_i}) \cdot e^{-\frac{hP_h L}{\dot{m}c_p}} \quad (3.23)$$

Ed infine, sottraendo T_{m_i} ad entrambi i membri:

$$T_{m_o} - T_{m_i} = (T_p - T_{m_i}) \cdot \left(1 - e^{-\frac{hP_h L}{\dot{m}c_p}}\right) \quad (3.24)$$

E dunque la potenza termica scambiata può essere scritta come:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p \Delta T_i \cdot \left(1 - e^{-\frac{hP_h L}{\dot{m}c_p}}\right) \quad (3.25)$$

Nella quale, la funzione esponenziale può essere scritta in funzione del numero di Nusselt:

$$\begin{aligned} \frac{hP_h}{\dot{m}c_p} L &= 4 \cdot \frac{hD_h}{\lambda} \cdot \frac{\mu}{\rho w_m D_h} \cdot \frac{\lambda}{\mu c_p} \cdot \frac{P_h}{4S} \cdot L = 4 \frac{Nu}{RePr} \cdot \frac{L}{D_h} \\ &= 4St \frac{L}{D_h} \end{aligned} \quad (3.26)$$

In cui $St = Nu/RePr$ è il numero di Stanton. In definitiva la potenza termica scambiata lungo il canale può essere scritta come:

$$\dot{Q} = \dot{m}c_p \Delta T_i \cdot \left(1 - e^{-4St \frac{L}{D_h}}\right) \quad (3.27)$$

L'equazione (3.27) costituisce dunque la relazione operativa in quanto lega la potenza termica scambiata dal fluido all'interno del micro-canale con le variabili di progetto.

Si passa ora ad esprimere la potenza di pompaggio P . Essa può essere espressa come:

$$P = \dot{m} \frac{\Delta p}{\rho} \quad (3.28)$$

In cui le perdite di carico sono esprimibili a partire da una semplice equazione di equilibrio:

$$\Delta p S = \tau_m P L \quad (3.29)$$

E riprendendo la (2.90) si può scrivere:

$$\Delta p S = f \rho \frac{w_m^2}{2} P L \quad (3.30)$$

E ricordando che $D_h = 4S/P_h$, si ottiene:

$$\frac{\Delta p}{\rho} = 2f w_m^2 \frac{L}{D_h} \quad (3.31)$$

Ed introducendo l'espressione del numero di Reynolds e della portata massica:

$$\begin{cases} Re = \frac{\rho w_m D_h}{\mu} \\ \dot{m} = \rho w_m S \end{cases} \quad (3.32)$$

Si ottiene:

$$P = \frac{2\mu \dot{m}^2 f Re L}{\rho^2 S D_h^2} \quad (3.33)$$

Che rappresenta la relazione operativa per quanto riguarda la potenza di pompaggio.

Anche per quanto riguarda le relazioni operative, in questo paragrafo, è bene ricondursi a delle equazioni adimensionali in modo da definire delle relazioni generali che prescindono dal caso geometrico specifico.

Nel caso in esame la potenza termica e quella di pompaggio vengono adimensionalizzate dividendole per le stesse grandezze ma calcolate in una condizione geometrica di riferimento, quella relativa al condotto di sezione rettangolare con raggio di raccordo nullo, riportata in Figura 3.2, ottenendo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{Q}' = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{rif}} = \dot{m}' \Delta T'_i \cdot \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{L'}{D'_h}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \\ P' = \frac{P}{P_{rif}} = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{S' D_h'^2} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

In cui le grandezze con pedice r sono quelle calcolate nella condizione di riferimento, ovvero quella di canale con spigoli vivi, mentre le grandezze con apice sono il rapporto fra le grandezze nella condizione da ottimizzare e le stesse grandezze calcolate nella condizione di riferimento.

3.3. DEFINIZIONE DEI PEC

Come si osserva dal capitolo precedente, le funzioni obiettivo elencate sono cinque, tutte passibili di ottimizzazione, mentre le relazioni che le legano sono solamente due, l'espressione della potenza termica e della potenza di pompaggio.

Questo significa che il problema di ottimizzazione presenta tre gradi di libertà, per questo motivo si definiscono i PEC che rappresentano un metodo diffuso di ottimizzazione che consiste nel fissare tre delle cinque funzioni obiettivo e nel determinare le altre due tramite le relazioni definite nel capitolo precedente. Si definiscono inizialmente i PEC per l'ottimizzazione degli scambiatori di calore, i criteri così definiti verranno poi riadattati al caso di flusso elettrosmotico nel singolo micro-canale.

Nella definizione dei Performance Evaluation Criteria, come in letteratura [13], si suppone che i canali di cui è costituito lo scambiatore siano tutti dello stesso diametro D , di conseguenza la geometria dello scambiatore è definita unicamente dal numero di canali in parallelo N e dalla lunghezza degli stessi L .

I criteri di valutazione dei miglioramenti sono divisi in tre categorie:

- Criteri FG: la sezione di passaggio del fluido all'interno del canale (quindi N) e la lunghezza dei tubi dello scambiatore vengono mantenuti costanti. Di conseguenza si mantiene costante l'area di scambio.
- Criteri FN: la sezione di passaggio viene mantenuta costante mentre si fa variare la lunghezza dei canali dello scambiatore.
- Criteri VG: in questo caso è la portata all'interno dei canali ad essere mantenuta costante.

I PEC vengono riassunti nella Tabella 3-3:

Caso	Geom.	W/W_{ref}	P/P_{ref}	\dot{Q}/\dot{Q}_{ref}	$\Delta T_i/\Delta T_{i,ref}$	Obiettivo
<i>FG1a</i>	<i>N, L</i>	1			1	$\uparrow \dot{Q}$
<i>FG1b</i>	<i>N, L</i>	1		1		$\downarrow \Delta T_i$
<i>FG2a</i>	<i>N, L</i>		1		1	$\uparrow \dot{Q}$
<i>FG2b</i>	<i>N, L</i>		1	1		$\downarrow \Delta T_i$
<i>FG3</i>	<i>N, L</i>			1	1	$\downarrow P$
<i>FN1</i>	<i>N</i>		1	1	1	$\downarrow L$
<i>FN2</i>	<i>N</i>	1		1	1	$\downarrow L$
<i>FN3</i>	<i>N</i>	1		1	1	$\downarrow P$
<i>VG1</i>		1	1	1	1	$\downarrow N \cdot L$
<i>VG2a</i>	<i>N \cdot L</i>	1	1		1	$\uparrow \dot{Q}$
<i>VG2b</i>	<i>N \cdot L</i>	1	1	1		$\downarrow \Delta T_i$
<i>VG3</i>	<i>N \cdot L</i>	1		1	1	$\downarrow P$

Tabella 3-3: PEC.

I PEC vengono poi riadattati al caso del micro-canale sfruttando le relazioni operative determinate nel paragrafo precedente, in questo caso, come già accennato, N non viene considerata una funzione obiettivo in quanto si considera il caso limite di scambiatore formato da un singolo micro-canale, e si riportano in Tabella 3-4.

Caso	L'	\dot{m}'	P'	\dot{Q}'	$\Delta T'_i$	Obiettivo
$FG1a$	1	1			1	$\uparrow \dot{Q}'$
$FG1b$	1	1		1		$\downarrow \Delta T'_i$
$FG2a$	1		1		1	$\uparrow \dot{Q}'$
$FG2b$	1		1	1		$\downarrow \Delta T'_i$
$FN2$		1		1	1	$\downarrow L'$
$FN3$		1		1	1	$\downarrow P'$
VGa	$N \cdot L$	1	1		1	$\downarrow L'$
VGb	$N \cdot L$	1	1	1		$\downarrow \Delta T'_i$

Tabella 3-4: PEC per micro-canale.

4. ENTROPY GENERATION MINIMIZATION (EGM)

L'ottimizzazione dello scambiatore attraverso l'utilizzo dei PEC si basa su considerazioni fatte unicamente sul primo principio della termodinamica. Per ottenere invece informazioni su come, con quale efficienza, l'energia viene trasformata all'interno dello stesso è necessario tenere conto anche della generazione entropica.

In particolare, il processo di minimizzazione dell'entropia generata EGM si basa, appunto, sul secondo principio della termodinamica e si basa sul teorema di Gouy-Stodola:

$$\dot{W}_{rev} - \dot{W} = T_0 \dot{S}_{gen} \quad (4.1)$$

Nel quale si enuncia che la potenza dissipata $\dot{W}_{rev} - \dot{W}$ è proporzionale all'entropia generata durante il processo \dot{S}_{gen} è il coefficiente di proporzionalità è la temperatura dell'ambiente T_0 . Di conseguenza, se lo scambiatore deve operare in modo da massimizzare l'efficienza, quindi in modo da minimizzare il lavoro dissipato, sarà necessario ottimizzarlo in modo da minimizzare l'entropia generata all'interno dello scambiatore stesso [15].

Tale processo consiste dunque nel determinare analiticamente la funzione di generazione dell'entropia e nel minimizzarla rispetto ad un parametro indipendente che sarà, quindi, l'oggetto dell'ottimizzazione.

4.1. DETERMINAZIONE DELL'ENTROPIA GENERATA

La generazione entropica può essere suddivisa in due contributi, uno dovuto allo scambio termico $\dot{S}_{gen,\Delta T}$ e uno dovuto alla caduta di pressione lungo in micro-canale $\dot{S}_{gen,\Delta p}$:

$$\dot{S}_{gen} = \dot{S}_{gen,\Delta T} + \dot{S}_{gen,\Delta p} \quad (4.2)$$

Per determinare l'entropia generata si effettua un bilancio di secondo principio su una porzione di canale lunga dz , rappresentata in Figura 4.1:

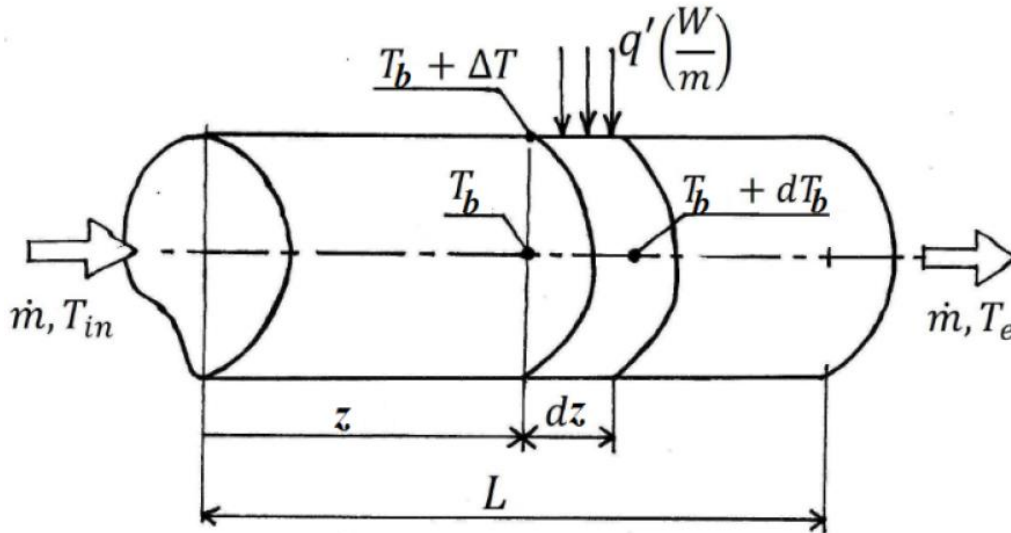


Figura 4.1: bilancio entropico.

Si scrive dunque il bilancio di entropia per i sistemi aperti:

$$\frac{dS}{dt} = \sum_{in} \dot{m}_{in} s_{in} - \sum_{out} \dot{m}_{out} s_{out} + \dot{S}_{\dot{Q}} + \dot{S}_{gen} \quad (4.3)$$

In cui s_{in} è l'entropia per unità di massa dei flussi in ingresso e s_{out} di quelli in uscita, mentre $\dot{S}_{\dot{Q}}$ è l'entropia generata attraverso lo scambio termico.

Nel caso in esame si ha un sistema aperto a deflusso stazionario, di conseguenza $dS/dt = 0$, ed inoltre si un solo flusso in regime stazionario quindi una sola portata in ingresso uguale a quella in uscita, per cui:

$$\dot{m}(s_{out} - s_{in}) = \dot{S}_{\dot{Q}} + \dot{S}_{gen} \quad (4.4)$$

E dunque, sul tratto infinitesimo dz , si avrà una variazione di entropia pari a ds , e il bilancio diventa:

$$d\dot{S}_{gen} = \dot{m}ds - d\dot{S}_{\dot{Q}} \quad (4.5)$$

In cui:

$$d\dot{S}_{\dot{Q}} = \frac{d\dot{Q}}{T_p} = \frac{q'dz}{T_p} \quad (4.6)$$

Per cui, sostituendo la (4.6) nella (4.5), si ottiene l'espressione del bilancio di secondo principio per il caso in esame:

$$d\dot{S}_{gen} = \dot{m}ds - \frac{q'dz}{T_p} \quad (4.7)$$

Si esplicitano ora i termini q' e ds del bilancio. Per esplicitare il termine ds si fa uso delle definizioni di entropia, di entalpia e del primo principio della termodinamica:

$$\left\{ \begin{array}{l} ds = \frac{dq}{T} \\ dh = du + pdv + vdp \\ du = dq - dl = dq - pdv \end{array} \right. \quad (4.8)$$

Dalle quali si ottiene:

$$Tds = dh - \frac{dp}{\rho} \quad (4.9)$$

Avendo supposto poi che il fluido sia incomprimibile e la sua temperatura di mescolamento sia pari a T_m , si può scrivere:

$$dh = c_p dT_m \quad (4.10)$$

E dunque:

$$ds = c_p \frac{dT_m}{T_m} - \frac{1}{\rho T_m} dp \quad (4.11)$$

Per quanto riguarda invece il termine q' , si può esplicitare effettuando un bilancio di energia sul tratto dz :

$$\dot{m}c_p dT_m = (q' + q'_{gen})dz \quad (4.12)$$

Si suppone ora, come osservato sperimentalmente, che la generazione di calore per effetto Joule non sia rilevante nei termini del bilancio di energia e, dunque, rilevante ai fini dell'aumento di temperatura del fluido, nella porzione di canale considerata nell'elaborato. Tale effetto, diventa infatti non trascurabile per lunghezze di condotto al di fuori dei normali range di lunghezza dei microscambiatori, per cui il termine q'_{gen} può essere trascurato e il bilancio si riduce a:

$$\dot{m}c_p dT_m = q' dz \quad (4.13)$$

Quindi l'espressione di $q' dz$ e di ds possono essere sostituite nell'equazione (4.7), ottenendo:

$$d\dot{S}_{gen} = \dot{m}c_p \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right) dT_m - \frac{\dot{m}dp}{\rho T_m} \quad (4.14)$$

E, supponendo un gradiente di pressione costante lungo il canale, si ha:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{\Delta p}{L} \quad (4.15)$$

Per cui:

$$d\dot{S}_{gen} = \dot{m}c_p \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right) dT_m + \frac{\dot{m}\Delta p}{\rho L T_m} dz \quad (4.16)$$

È necessario dunque integrare tale relazione per determinare la quantità di entropia generata dal processo, e per fare ciò è necessario esprimere la dipendenza fra la temperatura di mescolamento e la posizione del fluido sull'asse z . Per definire tale relazione si effettua nuovamente il bilancio di primo principio su un tratto infinitesimo di condotto e, osservando la Figura 3.3 e trascurando gli effetti generativi dovuti all'effetto Joule, si ottiene:

$$\dot{m}c_p dT_m = q' dz = hP_h dz (T_p - T_m) \quad (4.17)$$

E tale relazione può essere integrata fra la sezione di imbocco del condotto e la generica sezione a distanza z da quest'ultima, per ottenere:

$$\ln \left(\frac{T_p - T_m}{T_p - T_{m_i}} \right) = - \frac{hP_h}{\dot{m}c_p} z \quad (4.18)$$

Da cui si ottiene la dipendenza cercata:

$$dz = \frac{\dot{m}c_p}{hP_h} \cdot \frac{1}{T_p - T_m} dT_m \quad (4.19)$$

In cui si indicano con T_{m_i} e T_{m_o} la temperatura di mescolamento sulla sezione di ingresso e di uscita del canale.

Di conseguenza il bilancio di entropia diventa:

$$d\dot{S}_{gen} = \dot{m}c_p \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right) dT_m + \frac{\dot{m}\Delta p}{\rho L T_m} \cdot \frac{\dot{m}c_p}{hP_h} \cdot \frac{1}{T_p - T_m} dT_m \quad (4.20)$$

Nel quale si distinguono i due termini descritti nell'equazione (4.2):

$$\begin{cases} d\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \left(\frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_p} \right) dT_m \\ d\dot{S}_{gen,\Delta p} = \frac{\dot{m}\Delta p}{\rho L T_m} \cdot \frac{\dot{m}c_p}{hP_h} \cdot \frac{1}{T_p - T_m} dT_m \end{cases} \quad (4.21)$$

I quali possono essere integrati separatamente considerando, per il caso in esame, condizioni al contorno di tipo T o di Dirichlet, ovvero di temperatura di parete costante e uniforme pari a T_p . Si inizia dunque dal primo termine, che può essere riscritto come segue:

$$d\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \left[\frac{\Delta T}{T_m^2 \left(1 + \frac{\Delta T}{T_m} \right)} \right] dT_m \quad (4.22)$$

Ora, se si considera che la temperatura è espressa in kelvin, il differenziale di temperatura fra fluido e parete risulta essere trascurabile rispetto alla temperatura di mescolamento del fluido, di conseguenza si può affermare che:

$$1 + \frac{\Delta T}{T_m} \approx 1 \quad (4.23)$$

Per cui risulta:

$$d\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \left(\frac{\Delta T}{T_m^2} \right) dT_m = \dot{m}c_p \left(\frac{T_p}{T_m^2} - \frac{1}{T_m} \right) dT_m \quad (4.24)$$

Relazione che può essere integrata lungo il canale:

$$\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \int_{T_{m_i}}^{T_{m_o}} \left(\frac{T_p}{T_m^2} - \frac{1}{T_m} \right) dT_m \quad (4.25)$$

Ottenendo:

$$\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \left[T_p \left(\frac{T_{m_o} - T_{m_i}}{T_{m_o} T_{m_i}} \right) - \ln \left(\frac{T_{m_o}}{T_{m_i}} \right) \right] \quad (4.26)$$

In cui:

$$\ln \left(\frac{T_{m_o}}{T_{m_i}} \right) = \ln \left(1 + \frac{T_{m_o} - T_{m_i}}{T_{m_i}} \right) \approx \frac{T_{m_o} - T_{m_i}}{T_{m_i}} \quad (4.27)$$

Per cui l'equazione (4.65) può essere riscritta:

$$\dot{S}_{gen,\Delta T} = \dot{m}c_p \frac{T_{m_o} - T_{m_i}}{T_{m_o} T_{m_i}} (T_p - T_{m_o}) \quad (4.28)$$

In cui il termine $\dot{m}c_p \cdot (T_{m_o} - T_{m_i})$ è pari alla potenza assorbita dal fluido lungo tutto il canale \dot{Q} , per cui, in definitiva si può scrivere il rateo di entropia generata lungo il canale a causa dello scambio termico:

$$\dot{S}_{gen,\Delta T} = \frac{\dot{Q}}{T_{m_o} T_{m_i}} (T_p - T_{m_o}) \quad (4.29)$$

Si procede ora all'integrazione del secondo termine che costituisce la generazione di entropia, quello dipendente dalla caduta di pressione:

$$\dot{S}_{gen,\Delta p} = \frac{\dot{m}\Delta p}{\rho L} \cdot \frac{\dot{m}c_p}{hP_h} \cdot \int_{T_{m_i}}^{T_{m_o}} \frac{1}{(T_p - T_m)T_m} dT_m \quad (4.30)$$

Da cui si ottiene:

$$\dot{S}_{gen,\Delta p} = \frac{\dot{m}\Delta p}{\rho L T_p} \cdot \frac{\dot{m}c_p}{hP_h} \left[\ln \left(\frac{T_{m_o}}{T_{m_i}} \right) - \ln \left(\frac{T_p - T_{m_o}}{T_p - T_{m_i}} \right) \right] \quad (4.31)$$

Dalla (4.18) si ha che:

$$\ln\left(\frac{T_p - T_{m_o}}{T_p - T_{m_i}}\right) = -\frac{hP_h}{\dot{m}c_p}L \quad (4.32)$$

Mentre, dal bilancio di energia applicato su tutto il condotto, si ha che:

$$\dot{m}c_p(T_{m_o} - T_{m_i}) = \dot{Q} = hP_hL(T_p - T_{m_m}) \quad (4.33)$$

In cui T_{m_m} è la temperatura di mescolamento media, quindi si ottiene:

$$\frac{\dot{m}c_p}{hP_hL} = \frac{T_p - T_{m_m}}{T_{m_o} - T_{m_i}} \quad (4.34)$$

Per cui si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{m}c_p}{hP_hL} \ln\left(\frac{T_{m_o}}{T_{m_i}}\right) &= \frac{T_p - T_{m_m}}{T_{m_o} - T_{m_i}} \ln\left(\frac{T_{m_o}}{T_{m_i}}\right) \\ &\approx \frac{T_p - T_{m_m}}{T_{m_o} - T_{m_i}} \frac{T_{m_o} - T_{m_i}}{T_{m_i}} = \frac{T_p - T_{m_m}}{T_{m_i}} \ll 1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

E di conseguenza si ottiene:

$$\dot{S}_{gen,\Delta p} = \frac{\dot{m}L}{\rho T_p} \cdot \frac{\Delta p}{L} \quad (4.36)$$

Combinando ora la relazione (3.29) e la definizione del coefficiente di attrito medio data nella (2.90) si ottiene:

$$f\rho w_m^2 = 2\tau_m = 2\frac{\Delta p S}{P_h L} = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{L} D_h \quad (4.37)$$

Da cui:

$$\frac{\Delta p}{L} = 2\frac{f\rho w_m^2}{D_h} \quad (4.38)$$

E sfruttando l'espressione della portata:

$$\dot{m} = w_m \rho S \quad (4.39)$$

Si ottiene, infine, l'espressione del rateo di entropia generata lungo il canale a causa delle perdite meccaniche:

$$\dot{S}_{gen,\Delta p} = \frac{\dot{m}L}{\rho T_p} \cdot 2 \frac{f \rho \dot{m}^2}{D_h \rho^2 S^2} = 2 \frac{\dot{m}^3 f L}{D_h \rho^2 S^2 T_p} \quad (4.40)$$

4.2. NUMERO DI GENERAZIONE ENTROPICA

Dovendo ottimizzare i condotti del canale è bene riferirsi ad un termine adimensionale che permetta riferire direttamente il rateo di generazione entropica del risultato dell'ottimizzazione $\dot{S}_{gen,opt}$ con quello relativo alla geometria di riferimento $\dot{S}_{gen,rif}$, per questo motivo si definisce il numero di generazione entropica N_s :

$$N_s = \frac{(\dot{S}_{gen})_{opt}}{(\dot{S}_{gen})_r} \quad (4.41)$$

Si definisce ora un coefficiente adimensionale ϕ detto coefficiente di distribuzione delle irreversibilità:

$$\phi = \frac{\dot{S}_{gen,\Delta p}}{\dot{S}_{gen,\Delta T}} \quad (4.42)$$

In modo che il rateo di generazione entropica possa essere scritto come:

$$\dot{S}_{gen} = \dot{S}_{gen,\Delta T}(1 + \phi) \quad (4.43)$$

E anch'esso può essere riferito alla condizione di riferimento:

$$\phi_r = \frac{(\dot{S}_{gen,\Delta p})_r}{(\dot{S}_{gen,\Delta T})_r} \quad (4.44)$$

Si possono definire dei numeri di generazione entropica relativi alla sola entropia generata dallo scambio termico o alla sola entropia generata dalle perdite meccaniche:

$$\begin{cases} N_T = \frac{(\dot{S}_{gen,\Delta T})_{opt}}{(\dot{S}_{gen,\Delta T})_r} \\ N_p = \frac{(\dot{S}_{gen,\Delta p})_{opt}}{(\dot{S}_{gen,\Delta p})_r} \end{cases} \quad (4.45)$$

Per cui il numero di generazione entropica può essere espresso come:

$$N_s = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (4.46)$$

Sarà dunque necessario per l'ottimizzazione esprimere tale numero in funzione della variabile di ottimizzazione, che nel caso in esame è il raggio di curvatura dei raccordi degli spigoli adimensionale R_c , e minimizzarne il valore.

Si inizia dunque a modellare l'espressione del numero di generazione entropica.

Dall'equazione (4.29) si ottiene:

$$N_T = \frac{\frac{\dot{Q}}{T_{m_o}} (T_p - T_{m_o})}{\frac{\dot{Q}_r}{T_{m_{or}}} (T_p - T_{m_{orif}})} = \dot{Q}' \cdot \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (4.47)$$

Di cui si possono definire i vari termini, sapendo che nell'analisi si mantiene costante la temperatura in ingresso del fluido, quindi:

$$T_{m_i} = T_{m_{i_r}} = T_i \quad (4.48)$$

Si inizia con il definire il termine $T_{m_{o_r}}/T_{m_o}$:

$$\frac{T_{m_{o_r}}}{T_{m_o}} = \frac{(T_{m_o})_r}{(T_{m_i})_r + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p}} = \left[\frac{(T_{m_i})_r}{(T_{m_o})_r} + \frac{\dot{Q}}{\dot{m}c_p(T_{m_o})_r} \right]^{-1} \quad (4.49)$$

Moltiplicando e dividendo il secondo termine all'interno della parentesi per $\dot{Q}_r/\dot{m}_r c_p$, si ottiene:

$$\frac{T_{m_{o_r}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{(T_{m_i})_r}{(T_{m_o})_r} + \frac{\dot{Q}'(\dot{Q}_r/\dot{m}_r c_p)}{\dot{m}'(T_{m_o})_r} \right]^{-1} \quad (4.50)$$

Mentre dal bilancio di energia applicato sull'intero canale nelle condizioni di riferimento si ottiene:

$$\frac{\dot{Q}_r}{\dot{m}_r c_p} = (T_{m_{o_r}} - T_{m_{i_r}}) \quad (4.51)$$

E dunque:

$$\frac{T_{m_{o_r}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{i_r}}}{T_{m_{o_r}}} + \frac{\dot{Q}'}{\dot{m}'} \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{i_r}}}{T_{m_{o_r}}} \right) \right]^{-1} \quad (4.52)$$

È dunque necessario definire anche la $T_{m_{o_r}}$, a tal proposito, in questo elaborato, si sceglie di esprimerla come frazione della temperatura in ingresso del fluido, in particolare si impone:

$$\frac{T_{m_i}}{T_{m_{o_r}}} = 0.95 \quad (4.53)$$

Mentre, per quanto riguarda il rapporto fra le differenze di temperatura, si ha:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} &= \frac{[T_p - T_{m_i}] e^{-4St \frac{L}{D_h}}}{[T_p - T_{m_{ir}}] e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}} \\
&= \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} - -4St \frac{L}{D_h} \right] \\
&= \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(1 - St' \frac{L'}{D'_h} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Per il numero di generazione entropica relativo alle perdite meccaniche, si ottiene che esso risulta pari alla potenza di pompaggio adimensionale:

$$N_p \equiv P' \tag{4.55}$$

Per quanto riguarda invece il coefficiente di distribuzione delle irreversibilità nella condizione di riferimento si ha:

$$\phi_r = 2 \frac{\dot{m}_r^3 f_r L_r}{D_{hr} \rho^2 S_r^2 T_p} \frac{(T_{m_o})_r (T_{m_i})_r}{\dot{Q}_r \Delta T_{or}} \tag{4.56}$$

Da cui si ottiene:

$$\phi_r = 2 \frac{f_r L_r}{D_{hr}} \left(\frac{w_{m_r}^2}{c_p T_p} \right) \frac{(T_{m_o})_r (T_{m_i})_r}{\dot{Q}_r \Delta T_{or}} \tag{4.57}$$

Che dunque dipende dai parametri nella condizione di riferimento e in questo elaborato viene preso pari a:

$$\phi_r = 10^{-1} \tag{4.58}$$

4.3. MODELLO DEL PARAMETRO M_z

Piuttosto che riferirsi alla potenza di pompaggio, nel caso di flussi elettrosmotici, dato che il moto è generato imponendo un campo elettrico esterno sul condotto, è conveniente ottimizzare i parametri proprio in funzione di ridurre il campo elettrico imposto E_z . In particolare, in questo elaborato, si cercherà di ottimizzare la geometria in funzione del parametro adimensionale M_z che è direttamente dipendente dal campo elettrico imposto agli estremi del condotto.

Inoltre, nel caso in cui, invece, la generazione di calore per effetto Joule diventi rilevante nel bilancio di primo principio, e dunque all'aumento di temperatura del fluido, allora i numeri di generazione dipendono anche dal parametro M_z . Per questi motivi, in questo paragrafo si vuole esplicitare la dipendenza del parametro M_z , dalle funzioni obiettivo.

Si ricorda che:

$$M_z = \frac{\sigma E_z^2 D_h^2}{\lambda(T_p - T_{m_i})} \quad (4.59)$$

Si è supposto poi che il flusso sia stazionario e completamente sviluppato, dunque se si prende una piccola porzione di canale, il fluido contenuto all'interno di tale porzione risulterà in equilibrio meccanico, quindi la risultante delle forze applicate su tale porzione di fluido risulterà nulla. In particolare, su di esso agiranno la forza generata dal gradiente di pressione e quella elettrostatica generata dal campo elettrico E_z , per cui si avrà:

$$-Sdp = dF_e \quad (4.60)$$

In cui la forza elettrostatica può essere espressa come:

$$dF_e = E_z \int_S \rho_e dS dz = E_z \rho_{em} S dz \quad (4.61)$$

Dove ρ_{em} è la distribuzione media di carica sulla sezione. Essendo poi il gradiente di pressione costante lungo il canale, si ha:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\Delta p}{L} \quad (4.62)$$

Per cui risulta:

$$\frac{S \Delta p}{L} dz = E_z \rho_{em} S dz \quad (4.63)$$

E semplificando:

$$\Delta p = E_z \rho_{em} L \quad (4.64)$$

Riprendendo l'equazione (3.29):

$$\Delta p S = \tau_m P_h L \quad (4.65)$$

e la definizione del fattore di attrito medio (2.90), si può scrivere:

$$\Delta p = 2f \rho w_m^2 \left(\frac{P_h}{4S} \right) L = 2 \frac{f \rho w_m^2 L}{D_h} \quad (4.66)$$

E richiamando ancora la definizione di portata e di numero di Reynolds:

$$\begin{cases} \dot{m} = \rho S w_m \\ Re = \frac{\rho D_h w_m}{\mu} \end{cases} \quad (4.67)$$

Si ottiene:

$$\Delta p = 2 \frac{(fRe)\mu\dot{m}L}{\rho S D_h^2} \quad (4.68)$$

Che inserita nella (4.64) permette di esprimere il parametro E_z :

$$E_z = 2 \frac{(fRe)\mu\dot{m}}{\rho\rho_{em}S D_h^2} \quad (4.69)$$

A questo punto è possibile esprimere il parametro M_z come segue:

$$M_z = \frac{\sigma \left[2 \frac{(fRe)\mu\dot{m}}{\rho\rho_{em}S D_h} \right]^2}{\lambda(T_p - T_{m_i})} \quad (4.70)$$

Che può essere normalizzato rispetto alla condizione di riferimento di condotto a spigoli vivi:

$$M_{zr} = \frac{\sigma \left[2 \frac{(fRe)_r \mu \dot{m}_r}{\rho \rho_{em} S_r D_{hr}} \right]^2}{\lambda(T_{pr} - T_{m_i})} \quad (4.71)$$

Ottenendo:

$$M'_z = \frac{M_z}{M_{zr}} = \frac{(fRe)'^2 \dot{m}'^2}{S'^2 D_h'^2 \Delta T'_i} \quad (4.72)$$

Si ottiene dunque è che il parametro M_z , una volta stabilito il tipo di PEC, dunque gli opportuni vincoli, dipende solo da parametri geometrici:

$$M'_z = M'_z(R_c, \beta) \quad (4.73)$$

5. SOLUZIONE NUMERICA DELLE EQUAZIONI

Si procede dunque alla soluzione numerica delle equazioni di governo proposte nel capitolo 2. Tale soluzione è stata ottenuta utilizzando il software open source GNU Octave dall'Ingegnere Suzzi. Sono state utilizzate librerie aggiuntive, fornite da Octave Forge: il pacchetto msh, che si basa sul software open source gmsh, permette di generare mesh triangolari e tetraedriche non strutturate per risolutori FEM (Finite Element Method) o Finite Volume Method (FVM), e il pacchetto bim, che implementa sia il metodo Finite Volume Scharfetter – Gummel (FVSG) sia il Finite Element Method (FEM), e permette di risolvere equazioni differenziali parziali della Diffusion Advection Reaction (DAV). Le funzioni bim2a_laplacian, bim2a_reaction e bim2a_rhs appartenenti alla libreria bim consentono di assemblare gli operatori discretizzati agli elementi finiti per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali della forma:

$$-\nabla(C_1\nabla\phi) + C_2\phi = C_3 \quad (5.1)$$

alla quale è possibile ricondurre tutte le equazioni di governo, su una mesh triangolare non strutturata bidimensionale (2D) [14].

Il dominio di calcolo consiste nella sezione del condotto che viene discretizzata con una mesh triangolare usando il software gmsh, tale mesh viene infittita nella zona vicina al perimetro dove ci si aspetta che i gradienti di velocità e potenziale siano più elevati, un esempio di mesh ottenuta con $\beta = 1$ e $R_c = 0.4$ è riportato in Figura 5.1. Come valore per l'accuratezza della mesh si è scelto $l_c = 8 \times 10^{-3}$, dato che, come si vede in [14], si ottengono valori accettabili del numero di Nusselt e di quello di Poiseuille già a partire da $l_c = 1 \times 10^{-2}$

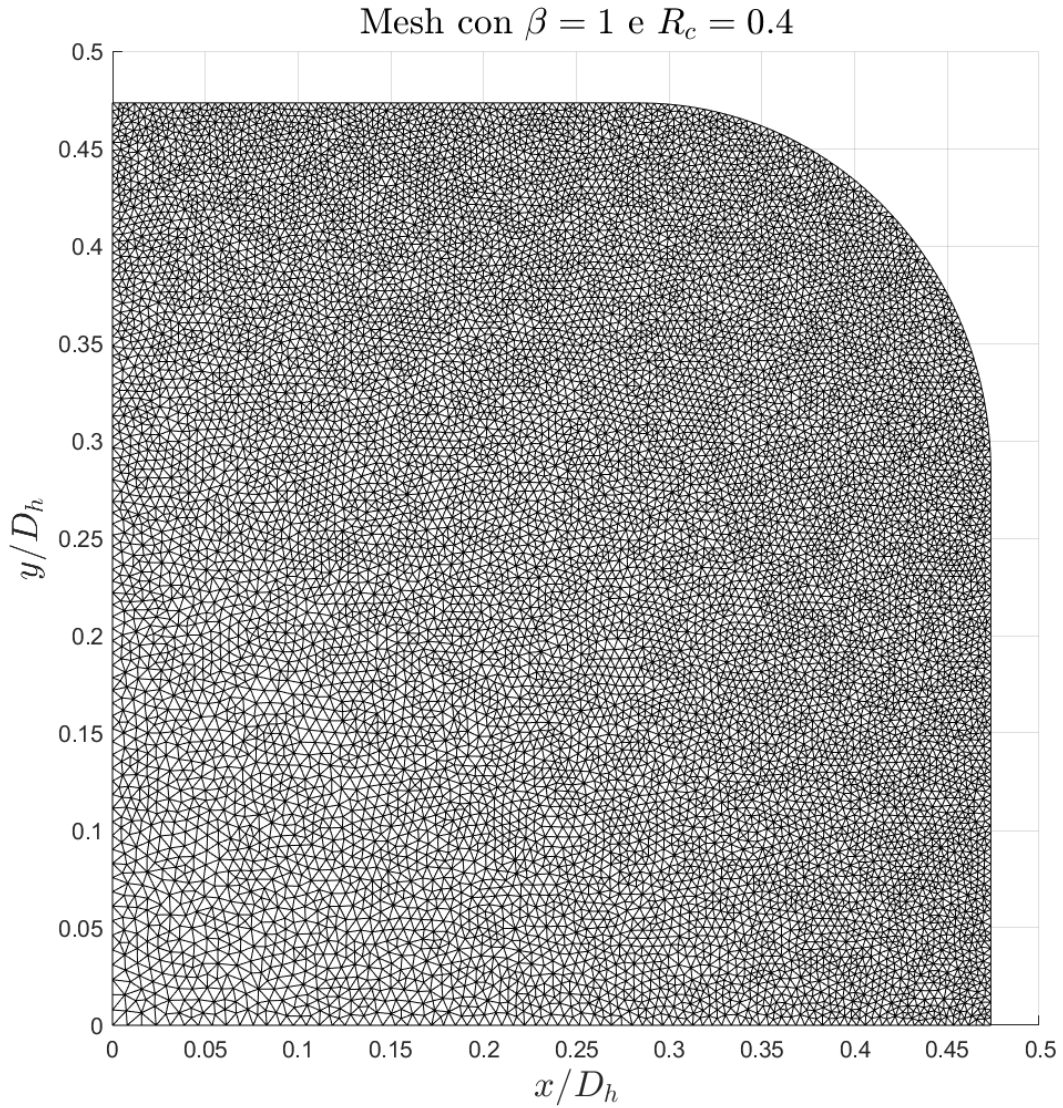


Figura 5.1: Mesh generata da gmsb con $\beta = 1$ e $R_c = 0.4$.

Per quanto riguarda l'equazione (2.38) che determina l'andamento del potenziale lungo la sezione del condotto, si osserva che l'elemento a destra dell'equazione non ha una dipendenza lineare dal potenziale ma esponenziale. Per linearizzare l'equazione si è effettuato lo sviluppo in serie di Taylor troncato al primo ordine del termine $(kD_h)^2 \sinh(\psi^*)$ e la soluzione numerica è stata reiterata con il metodo di Newton fino alla convergenza, per ottenere il campo del potenziale elettrico.

L'equazione del campo di velocità è invece immediatamente riconducibile all'equazione (5.1), quindi una volta noto ψ^* , è immediatamente determinabile anche il campo di velocità.

Per quanto riguarda invece l'equazione che governa il campo di temperatura, si osserva che la temperatura stessa dipende anche dalla posizione lungo l'asse del condotto. Tale equazione però ha la forma di un'equazione differenziale parabolica, per questo motivo il problema tridimensionale può essere trasformato in un problema bidimensionale discretizzando i passi di integrazione lungo l'asse con il modello θ -pesato:

$$\begin{aligned} RePr \frac{w^*}{w_m^*} \left[\frac{\Theta}{\Delta Z} \right]^{n+1} - \theta \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right]^{n+1} \\ = RePr \frac{w^*}{w_m^*} \left[\frac{\Theta}{\Delta Z} \right]^n + (1 - \theta) \left[\frac{\partial^2 \Theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Y^2} \right]^n + \Phi \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dove n indica il passo di integrazione lungo l'asse del canale. Ad ogni passo di integrazione n l'equazione si riconduce all'equazione (5.1) e può dunque essere risolta numericamente imponendo $0 \leq \theta \leq 1$, nel nostro caso si è scelto $\theta = 1$. Infatti, al passo di integrazione $n + 1$ il primo termine rappresenta il termine linearmente proporzionale a Θ , mentre tutti i termini a destra dell'uguale sono noti grazie all'integrazione al passo precedente.

5.1. PARAMETRI

Ci si trova dunque a dover risolvere un problema di Graetz per un flusso elettrosmotico, che consiste nella soluzione numerica delle equazioni che descrivono i campi del potenziale elettrico, quello di moto e quello di temperatura, con condizioni al contorno del tipo T.

Il problema di Graetz è definito dai seguenti parametri, che è necessario fissare per le simulazioni numeriche:

- Fattore di forma β , per rendere l'ottimizzazione più generica possibile esso viene fatto variare: $\beta = 1$, $\beta = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$; si parte dunque da un condotto a sezione quadrata per arrivare ad un condotto rettangolare in cui il lato corto risulta un decimo di quello lungo.
- Raggio di curvatura adimensionalizzato R_c , esso risulta il parametro da ottimizzare ed è dunque fatto variare dalla condizione a spigoli vivi ($R_c = 0$) alla condizione di massimo raggio di curvatura, in cui il raggio di raccordo del canale è pari al semi-lato corto del canale ($R_c = 1$).
- Concentrazione molare ionica $C_0 = 1 \times 10^{-3}$ ($\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$), necessaria a determinare la distribuzione di carica, quindi la distribuzione del potenziale elettrico all'interno del fluido
- Costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$, necessaria alla determinazione del numero di Debye-Hückel, infatti tutti i campi dipendono dal prodotto kD_h .
- Potenziale elettrico sul piano di Stern $\zeta = 1 \times 10^{-1}$ (V).
- Campo elettrico per unità di lunghezza imposto sul condotto $E_z = 1 \times 10^5$ ($\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$).
- Conducibilità termica dell'acqua $\lambda = 5 \times 10^{-2}$ ($\text{S} \cdot \text{m}^{-1}$), necessaria alla determinazione del parametro M_z che compare nell'equazione che descrive il campo di temperatura.
- Diametro idraulico del condotto $D_h = 3 \times 10^{-6}$ (m)
- Inoltre, come si è già affermato, si è scelta una accuratezza della mesh intermedia che permette di ottenere dei buoni risultati con un tempo di calcolo accettabile $l_c = 8 \times 10^{-3}$

Si analizzano ora i risultati, già validati in [14], ottenuti dalle soluzioni numeriche delle equazioni, per determinare gli andamenti delle grandezze di interesse al variare dei parametri di ottimizzazione.

5.2. DISTRIBUZIONE DEL POTENZIALE ELETTRICO

In Figura 5.2 è riportato l'andamento del potenziale elettrico del fluido sulla sezione del condotto, come ci si attendeva, si osserva che si ha un forte gradiente di potenziale in prossimità della parete, il quale, genererà anche un forte gradiente di velocità.

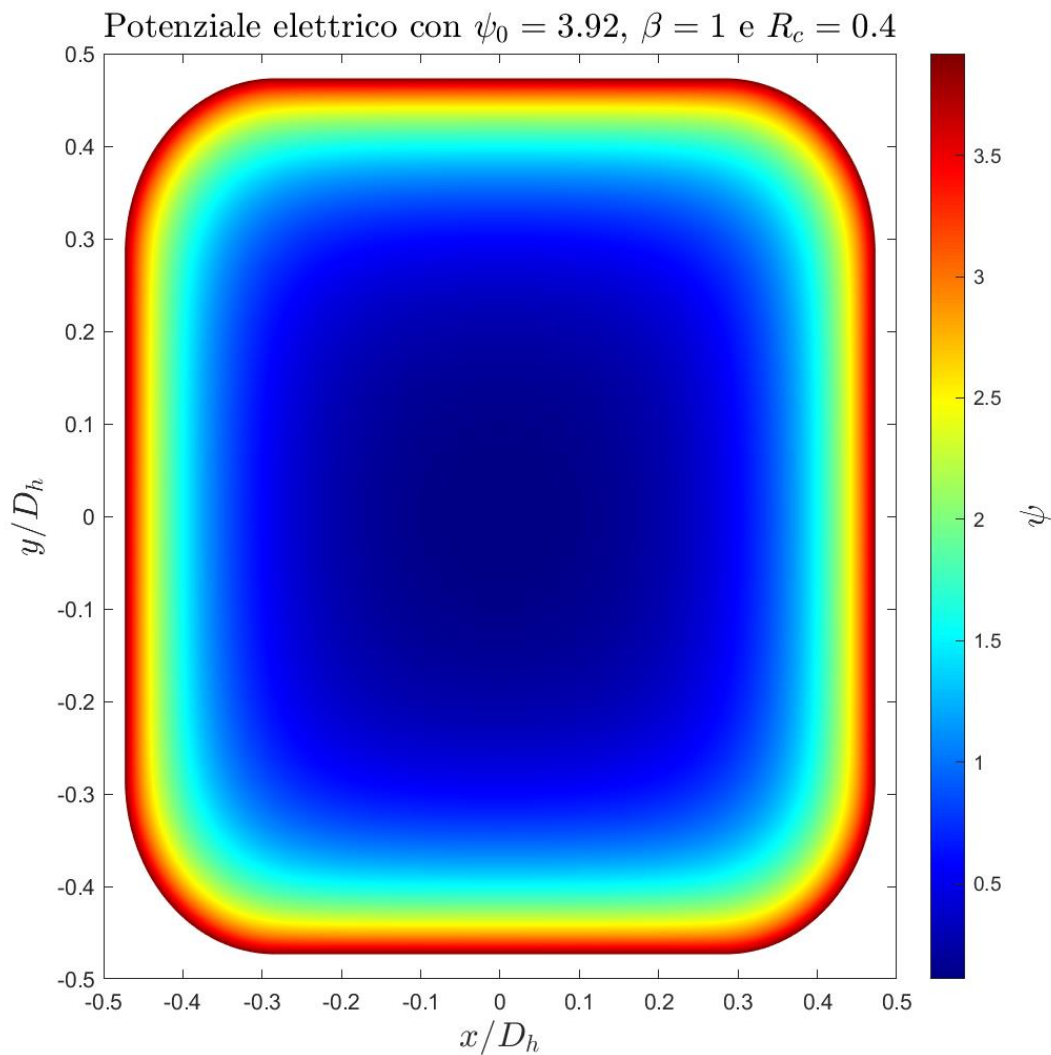


Figura 5.2: Andamento del potenziale del fluido sulla sezione del condotto.

5.3. CAMPO DI VELOCITÀ

In Figura 5.3 è invece riportato l'andamento del campo di velocità sulla sezione del condotto.

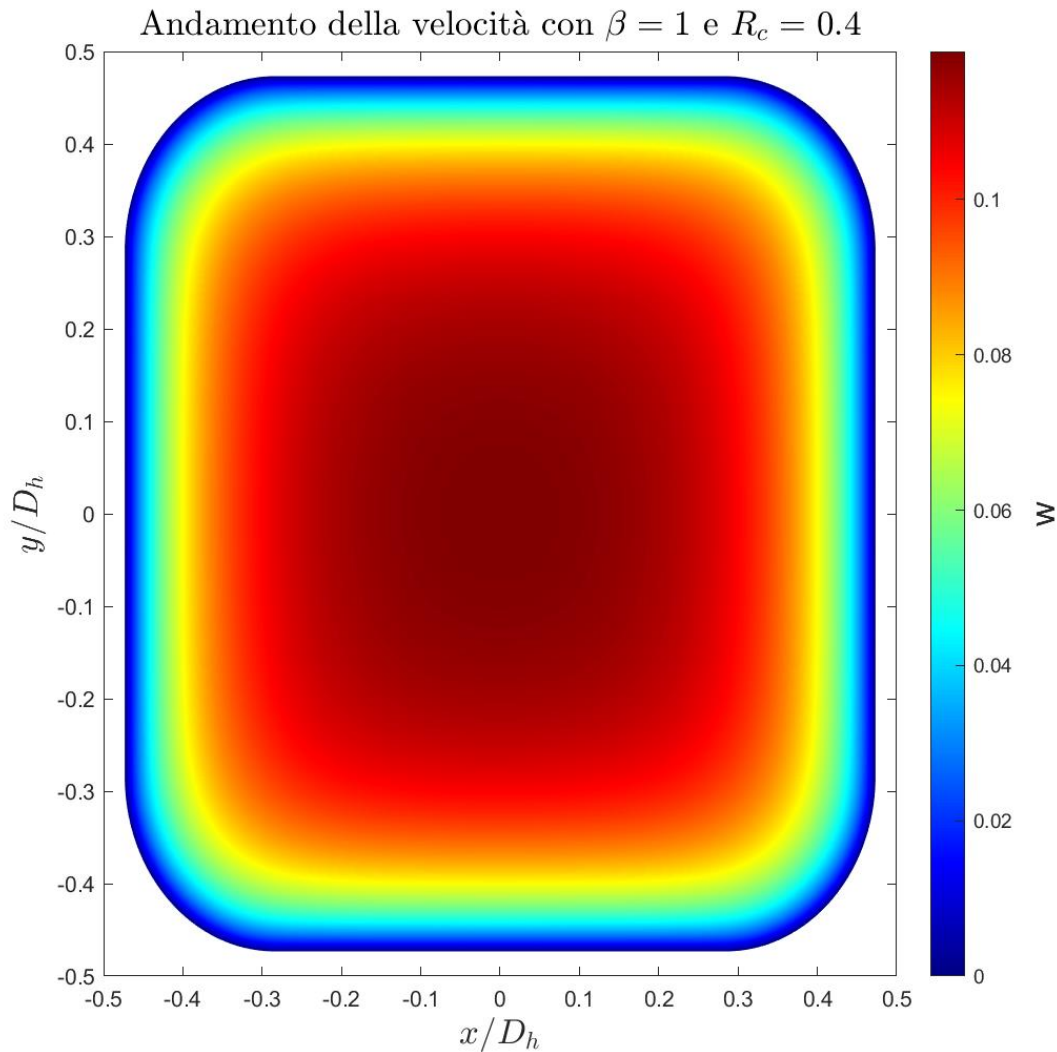


Figura 5.3: Andamento del campo di velocità sulla sezione del condotto.

Il forte gradiente di potenziale in prossimità delle pareti genera anche un forte gradiente di velocità, questo genera un profilo di velocità che, rispetto all'andamento parabolico del flusso generato con differenza di pressione, risulta molto più schiacciato, come si osserva in Figura 5.4.

Si osserva inoltre il picco di velocità è estremamente ridotto, il che genera, insieme al diametro ridotto del condotto, numeri di Reynolds estremamente contenuti tipici dei flussi elettrosmotici.

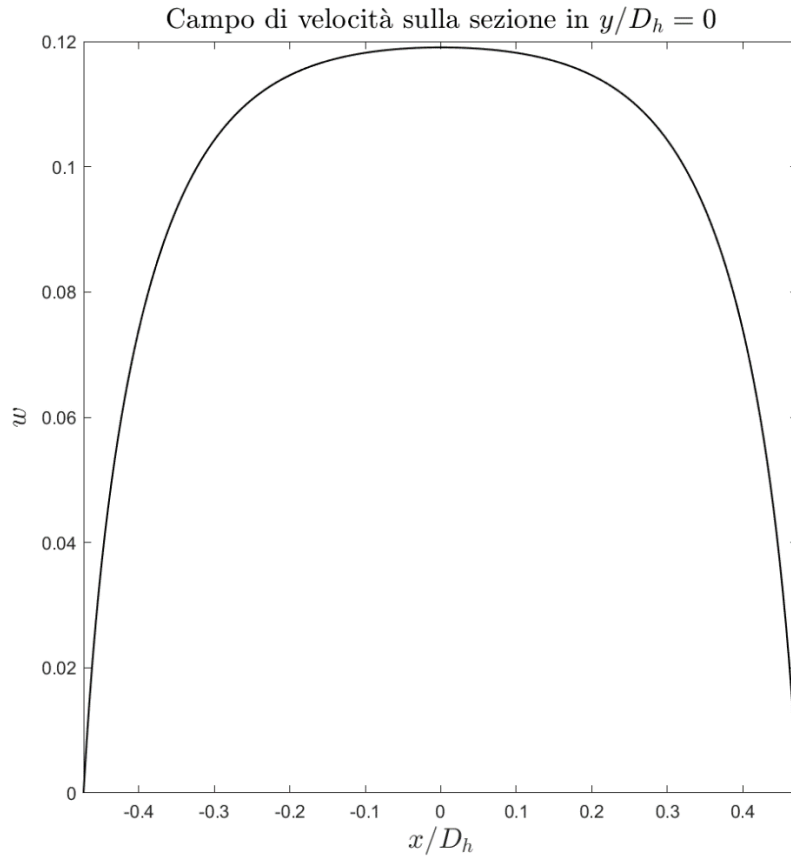


Figura 5.4: Profilo di velocità.

In Figura 5.5 è riportato l'andamento della velocità massima, ovvero quella in corrispondenza dell'asse del condotto, al variare dei parametri relativi alla geometria.

Si osserva come, all'aumentare del raggio di curvatura degli spigoli la velocità al centro del condotto tenda a calare. Lo stesso succede se si riduce il fattore di forma, questo perché, più cala in rapporto fra i lati, a parità di diametro idraulico e più stretto sarà il condotto, quindi gli effetti di bordo influenzeranno anche il centro del condotto, come si osserva in Figura 5.6, anche se il gradiente di velocità nell'intorno della parete risulta aumentare al calare di β .

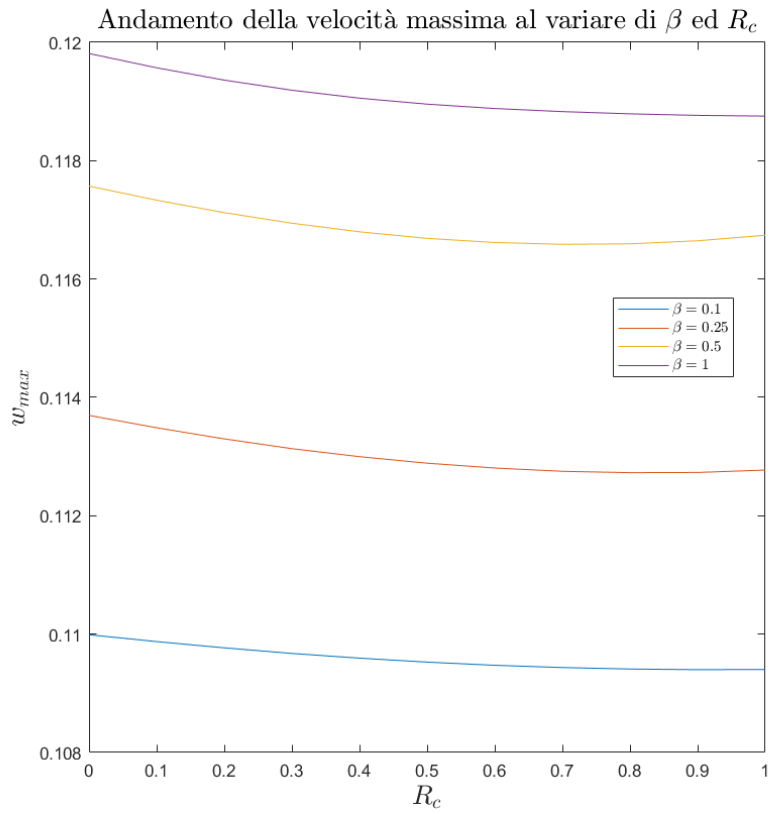


Figura 5.5: Andamento della velocità massima al variare dei parametri geometrici.

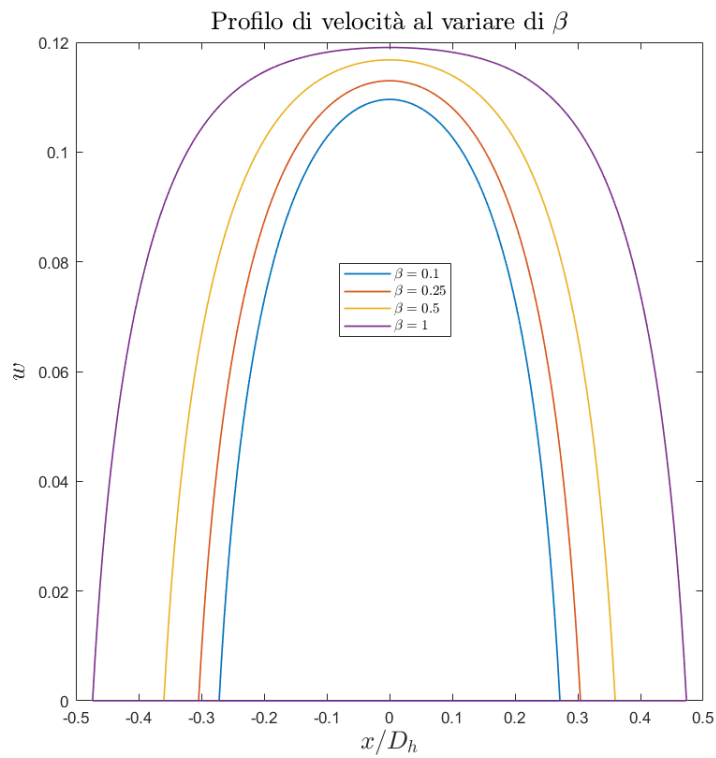


Figura 5.6: Andamento del profilo di velocità al variare di β .

Infine, si osserva l'andamento del numero di Poiseuille in Figura 5.7 e quello dello stesso numero ma normato rispetto alle condizioni di riferimento in Figura 5.8.

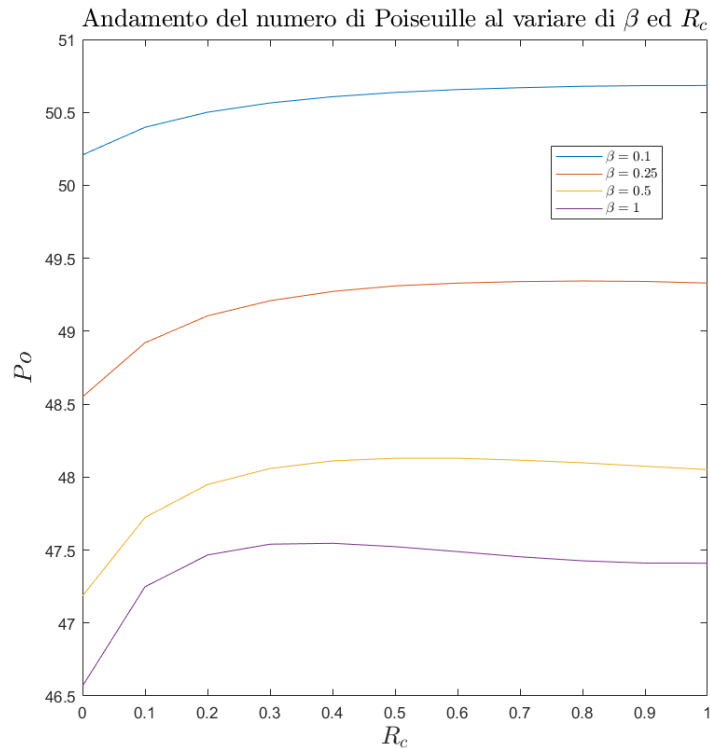


Figura 5.7: Andamento del numero di Poiseuille al variare dei parametri geometrici.

Si vede come fRe tenda ad aumentare all'aumentare del raggio di curvatura degli smussi, o almeno per bassi valori di tale raggio, questo perché i ristagni di fluido che si creano negli spigoli fungono da cuscinetto di fluido e abbassano le perdite per attrito in quella zona. Mentre aumenta vistosamente al diminuire di β , questo perché aumenta il gradiente di velocità vicino a parete e gli effetti di bordo diventano preponderanti in quanto la sezione risulta più schiacciata.

Al contrario invece il valore di $(fRe)'$, ovvero quello riferito alle condizioni di riferimento, diminuisce al calare di β .

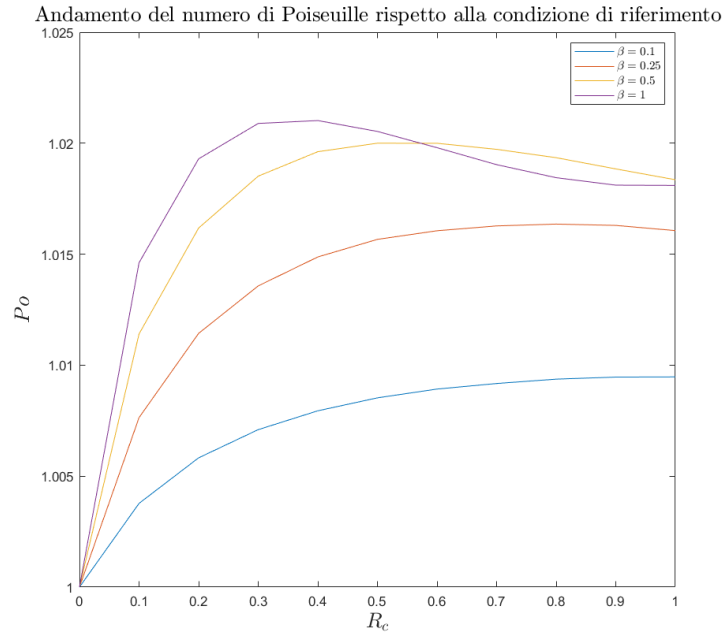


Figura 5.8: Andamento di $(fRe)'$ al variare dei parametri geometrici.

5.4. CAMPO DI TEMPERATURA

In Figura 5.9 è riportato l'andamento di Θ sulla sezione del condotto per il flusso completamente sviluppato.

La condizione di flusso completamente sviluppato viene raggiunta quando la variazione del numero di Nusselt medio della sezione del condotto diventa trascurabile.

Infatti, la condizione di flusso completamente sviluppato si raggiunge quando il profilo di temperatura rimane costante sulla sezione a meno di una costante, ovvero quando:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{T_p - T(z)}{T_p - T_m(z)} \right] = 0 \quad (5.3)$$

Se ora si scrive la derivata dello stesso rapporto ma rispetto alla distanza dal centro e calcolata lungo il perimetro del condotto:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{T_p - T}{T_p - T_m} \right] \Bigg|_{r=r_0} \quad (5.4)$$

Dato che il rapporto $(T_p - T)/(T_p - T_m)$, per la condizione di flusso completamente sviluppato risulta indipendente da z , anche la sua derivata rispetto a r (distanza dall'asse), lo sarà:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{T_p - T}{T_p - T_m} \right] \Bigg|_{r=r_0} \neq f(z) \quad (5.5)$$

E dunque:

$$\frac{-\frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0}}{T_p - T_m} \neq f(z) \quad (5.6)$$

E per la legge di Fourier si ha:

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=r_0} \quad (5.7)$$

Quindi:

$$\frac{q''/k}{T_p - T_m} \neq f(z) \quad (5.8)$$

In cui il flusso di calore, secondo la legge di Newton del raffreddamento, è pari a:

$$q'' = h(T_p - T_m) \quad (5.9)$$

In definitiva, si ottiene:

$$\frac{h}{k} \neq f(z) \quad (5.10)$$

Che nel caso in esame, di condotto a sezione costante, diventa:

$$Nu \neq f(z) \quad (5.11)$$

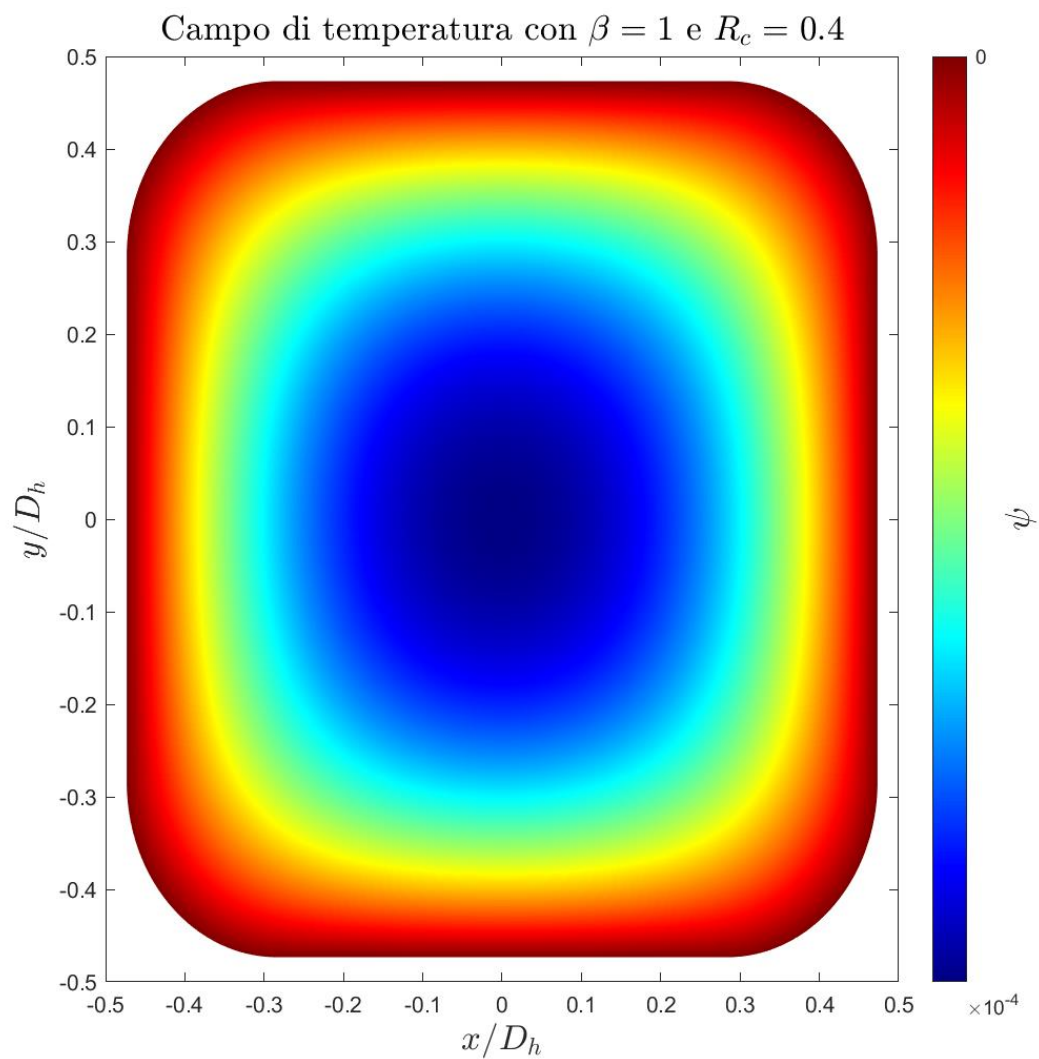


Figura 5.9: Andamento del campo di temperatura adimensionale Θ sulla sezione per flusso completamente sviluppato.

Come si osserva in figura, nel caso di completo sviluppo termico, la temperatura della sezione si è già praticamente uniformata alla temperatura di parete, questo

a causa dei bassissimi numeri di Reynolds dei flussi elettrosmotici che portano lo scambio termico ad essere predominante rispetto al trasporto di massa all'interno del canale. Per lo stesso motivo, la lunghezza di completo sviluppo termico, per valori di $E_z = 10^5$ tipici delle applicazioni pratiche, risulta comparabile al diametro idraulico del canale.

Per mostrare lo sviluppo del campo di temperatura lungo in maniera apprezzabile, si effettuata una simulazione con $E_z = 10^7$, e il risultato è riportato in Figura 5.10.

Distribuzione di temperatura lungo il canale con $E_z = 10^7$

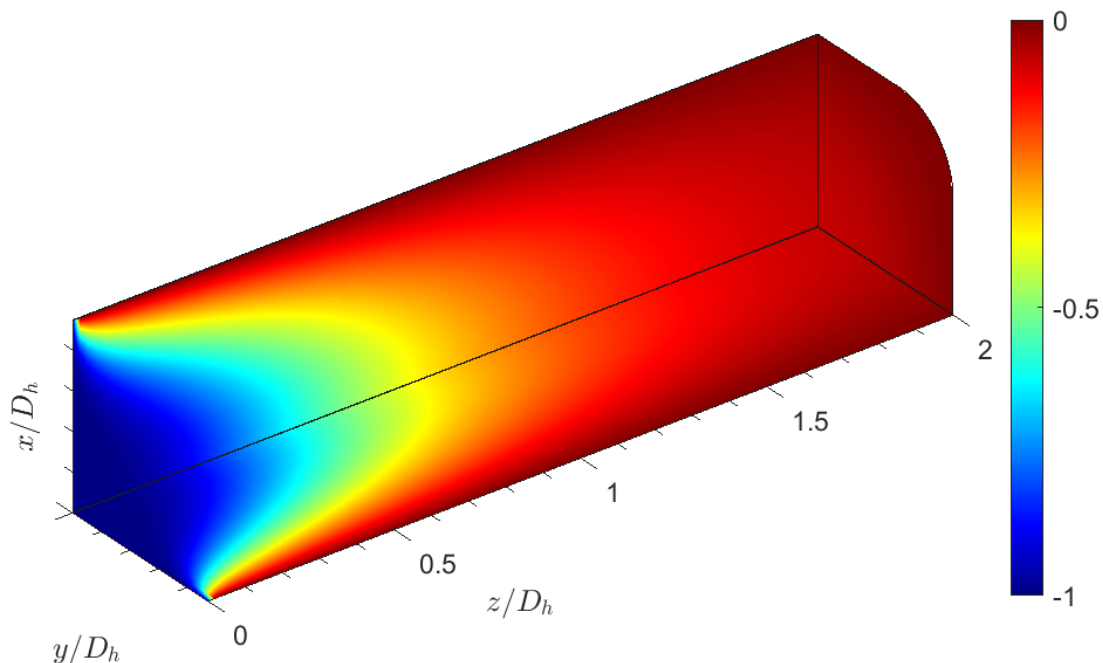


Figura 5.10: Distribuzione di temperatura lungo il canale.

Si può ora osservare l'andamento del numero di Nusselt al variare dei parametri geometrici (Figura 5.11) e quello di Nu' al variare degli stessi parametri (Figura 5.12).

Come si conclude dai grafici, sia il valore del numero di Nusselt che quello di Nu' crescono al crescere del raggio di curvatura degli spigoli del condotto, questo perché l'arrotondamento degli spigoli comporta un minor ristagno di

fluido negli angoli della sezione e dunque favorisce lo scambio termico convettivo.

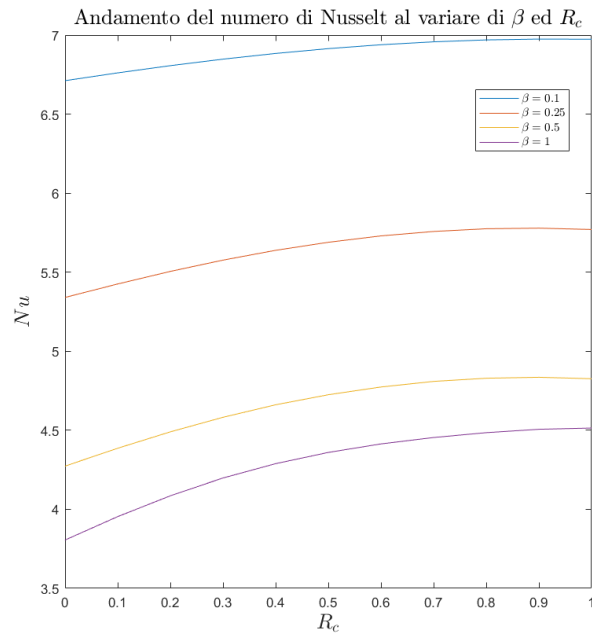


Figura 5.11: Andamento del numero di Nusselt al variare dei parametri relativi alla geometria.

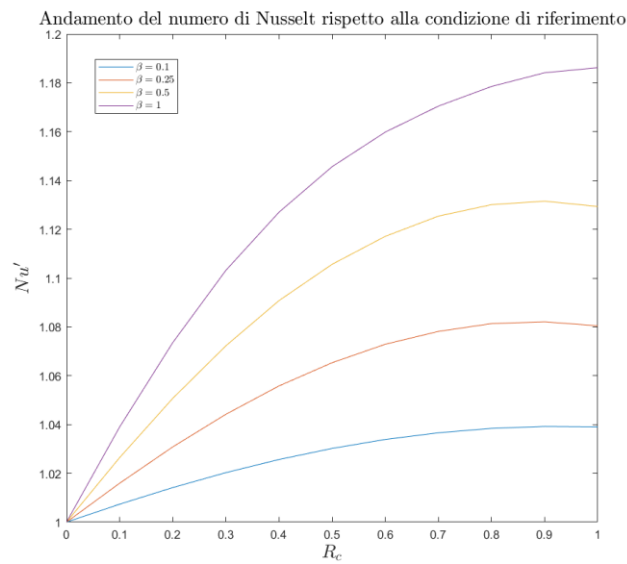


Figura 5.12: Andamento del numero di Nusselt riferito alla condizione di riferimento al variare dei parametri geometrici.

Si osserva poi che il numero di Nusselt cala al crescere del fattore di forma β , questo perché, se la sezione del condotto risulta più schiacciata, il gradiente di velocità aumenta nell'interno della parete con un miglioramento anche dal punto di vista dello scambio termico convettivo e dunque anche del gradiente di temperatura.

Un comportamento inverso invece si osserva per il numero di Nusselt normalizzato rispetto alla condizione di riferimento.

5.5. ANDAMENTO DELLA GEOMETRIA

ADIMENSIONALE

Per la corretta comprensione del comportamento delle variabili durante l'ottimizzazione, è necessario sottolineare anche l'andamento delle grandezze geometriche adimensionalizzate.

In particolare, riferendoci a condotti con lo stesso diametro idraulico, si riportano gli andamenti dell'area della sezione adimensionale S' e del perimetro della sezione adimensionale P'_h (Figura 5.13).

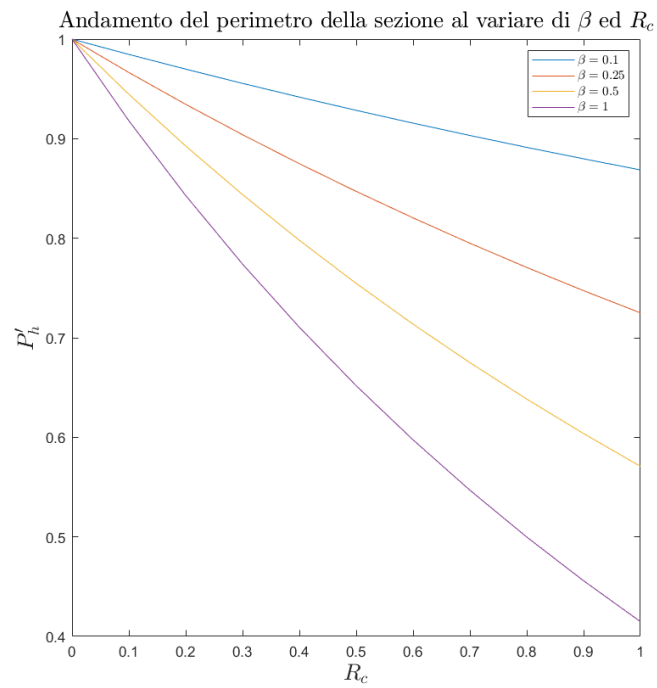
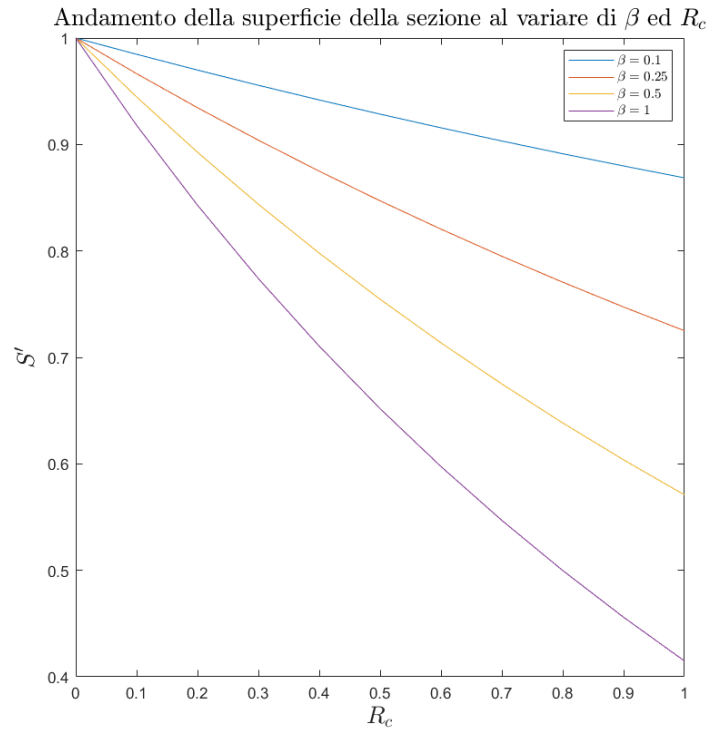


Figura 5.13: Andamento della superficie adimensionale e del perimetro adimensionale della sezione del condotto.

6. OTTIMIZZAZIONE DELLA GEOMETRIA

In questo capitolo si sfruttano i PEC definiti al paragrafo 3.3 per l'ottimizzazione della geometria.

Si procede ricapitolando tutte le relazioni generali che legano le funzioni obiettivo e che dunque verranno utilizzate durante l'ottimizzazione:

- Potenza termica adimensionale \dot{Q}' :

$$\dot{Q}' = \dot{m}' \Delta T'_i \cdot \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(St' \frac{L'}{D'_h}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \quad (6.1)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'^2 \dot{m}'^2}{S'^2 D_h'^2 \Delta T'_i} \quad (6.2)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \dot{Q}' \cdot \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.3)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} + \frac{\dot{Q}'}{\dot{m}'} \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}}\right) \right]^{-1} \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(1 - St' \frac{L'}{D'_h}\right) \right] \end{cases} \quad (6.4)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio $N_p \equiv P'$:

$$P' = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{S' D_h'^2} \quad (6.5)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.6)$$

Ogni criterio fissa delle funzioni obiettivo e semplifica dunque le relazioni, di conseguenza si procede analizzando un criterio per volta.

6.1. CRITERIO FG1A:

In questo criterio si ottimizza la potenza termica scambiata \dot{Q}' che ovviamente vuole essere massimizzata, fissando la lunghezza del condotto $L' = 1$, la portata in massa del fluido circolante $\dot{m}' = 1$ e la differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- Potenza termica adimensionale \dot{Q}' :

$$\dot{Q}' = \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(St' \frac{1}{D_h'}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \quad (6.7)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'^2}{S'^2 D_h'^2} \quad (6.8)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \dot{Q}' \cdot \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.9)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} + \dot{Q}' \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} \right) \right]^{-1} \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - St' \frac{1}{D'_h} \right) \right] \end{cases} \quad (6.10)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio

$$N_p \equiv P':$$

$$P' = \frac{(fRe)'}{S'D'_h{}^2} \quad (6.11)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.12)$$

6.1.1. ANALISI DEI RISULTATI

Per quanto riguarda la potenza termica scambiata si osservano i dati riportati in Figura 6.1.

Come si osserva, la potenza termica aumenta leggermente all'aumentare del raggio di curvatura dei raccordi degli spigoli del condotto.

Tale andamento viene amplificato all'aumentare del fattore di forma β .

Tale andamento è facilmente deducibile dalla relazione (6.7), in cui si osserva come la potenza, secondo questo criterio, dipenda dal numero di Stanton:

$$St' = \frac{Nu'}{Re'} \quad (6.13)$$

Quindi dato che la variazione di Re' risulta estremamente contenuta, si osserva come l'andamento della potenza adimensionale rispecchi quello del numero di Nusselt adimensionale, riportato in Figura 5.12.

In realtà l'influenza dei parametri geometrici sulla potenza scambiata è limitata alla zona vicina alla sezione di ingresso. Infatti, nel caso in esame, la lunghezza di completo sviluppo termico risulta comparabile al diametro idraulico del condotto dati i bassissimi valori del numero di Reynolds. Se si considerano lunghezze di condotto superiori, si ottiene che i parametri geometrici non risultano più influenti sulla potenza termica scambiata.

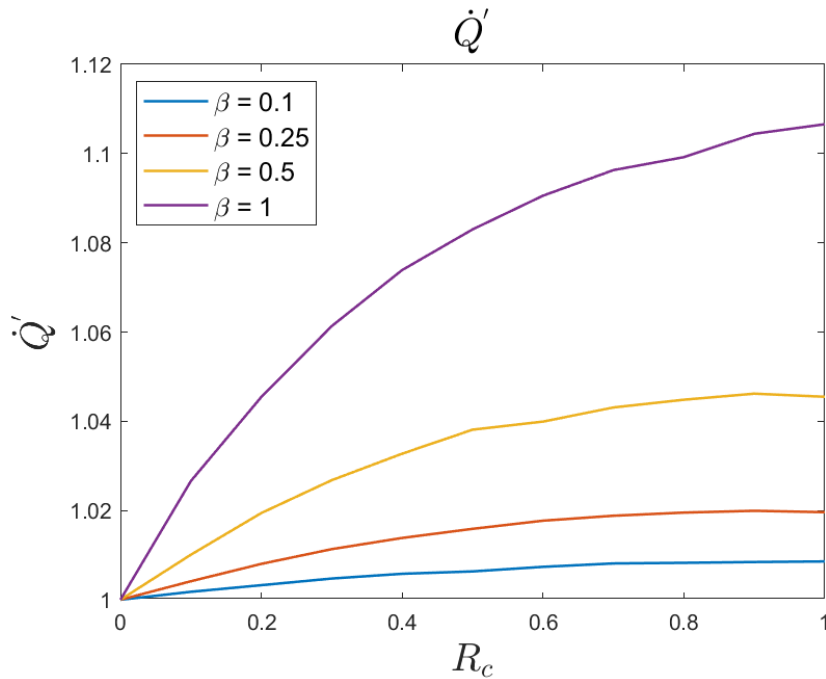


Figura 6.1: Ottimizzazione della potenza termica con criterio FG1a.

Per quanto riguarda il parametro M'_z si osservano i dati riportati in Figura 6.2.

Esso, per definizione, risulta proporzionale al campo elettrico imposto sul canale che è necessario a generare il moto.

Come si osserva nel grafico riportato si ha un aumento di tale parametro all'aumentare del raggio di curvatura degli spigoli del condotto e tale comportamento è amplificato per fattori di forma elevati. Questo comportamento è dovuto principalmente al fatto che, ragionando a parità di diametro idraulico del condotto, l'espressione del parametro in questo criterio si riduce a:

$$M'_z = \left(\frac{(fRe)'}{S'} \right)^2 \quad (6.14)$$

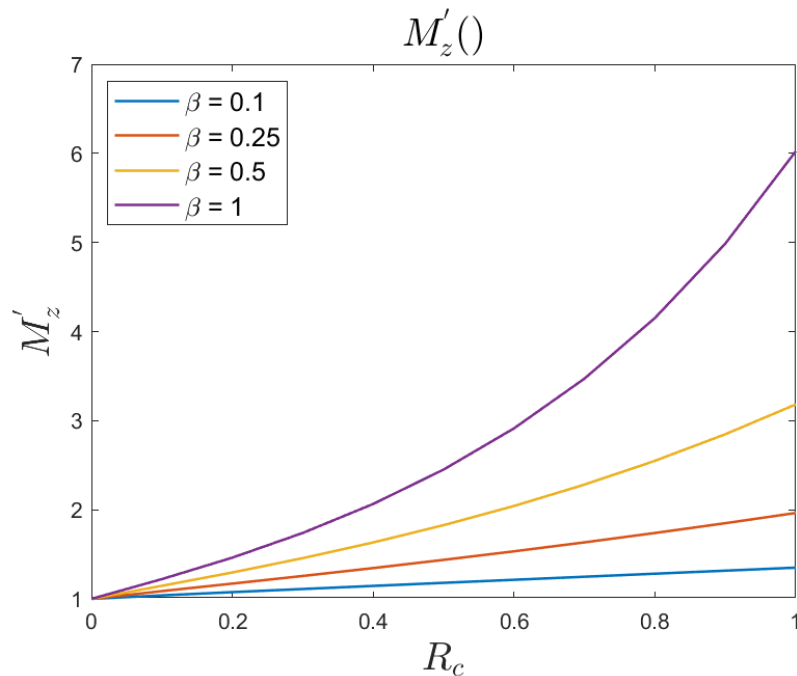


Figura 6.2: Variazione del parametro M'_z con il criterio FG1a.

In particolare, si ha che la superficie della sezione del condotto, a parità di diametro idraulico, diminuisce sia all'aumentare di β che all'aumentare di R_c , e questo influisce doppiamente sul valore del parametro M'_z . Infatti, oltre a comparire direttamente al denominatore dell'espressione, in questo criterio si ragiona a portata costante, di conseguenza se la sezione diminuisce, aumenta la velocità media del flusso, di conseguenza aumenterà anche il gradiente di

velocità nell'intorno della parete e questo comporta dunque un aumento del numero di Poiseuille, che compare al numeratore della (6.14).

Per quanto riguarda i numeri di generazione entropica si osservano i dati riportati in Figura 6.3.

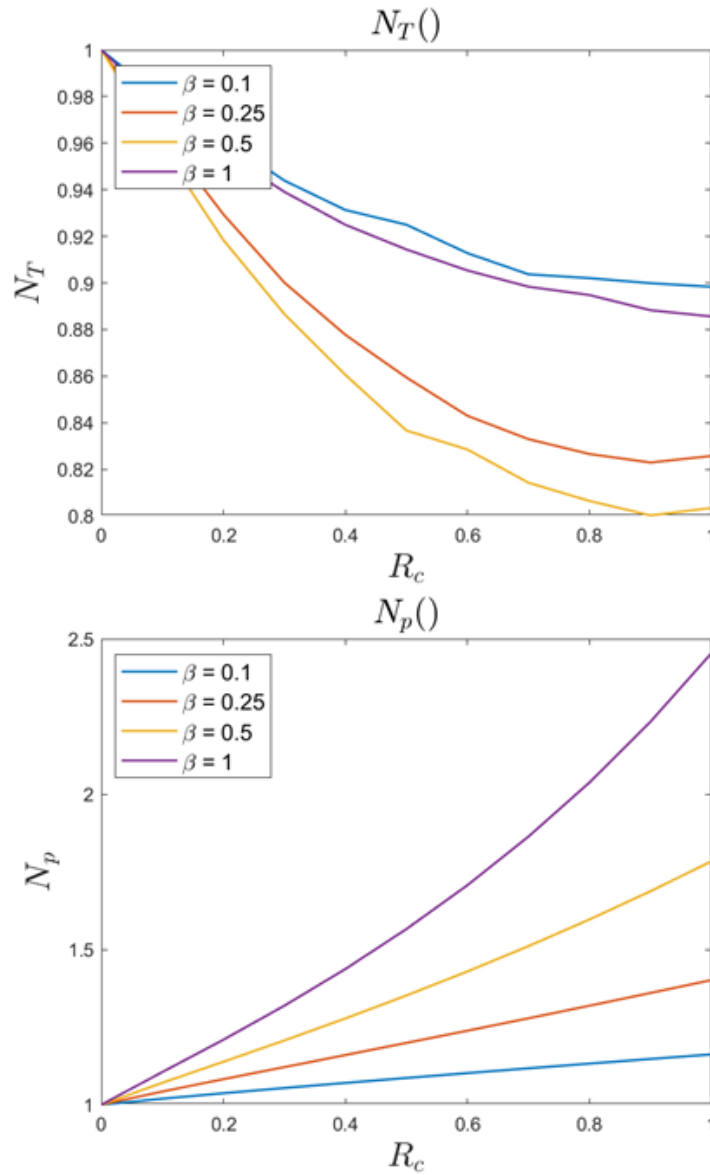


Figura 6.3: Numeri di generazione entropica con criterio FG1a.

Per quanto riguarda l'andamento di N_p valgono le stesse considerazioni fatte per il parametro M_Z , ovviamente l'andamento risulta attenuato in quanto, a parità di diametro idraulico si ha:

$$N_p = \sqrt{M'_Z} \quad (6.15)$$

Per quanto riguarda invece il numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T , esso risulta diminuire all'aumentare del raggio di curvatura dei raccordi degli spigoli del condotto, in quanto, come già affermato, questo migliora lo scambio termico convettivo e anche la sua efficienza. Si ha invece che N_T diminuisce e poi torna a crescere all'aumentare del fattore di forma β . Tale andamento risulta il prodotto dei tre termini che compongono N_T , che vengono riportati in Figura 6.4.

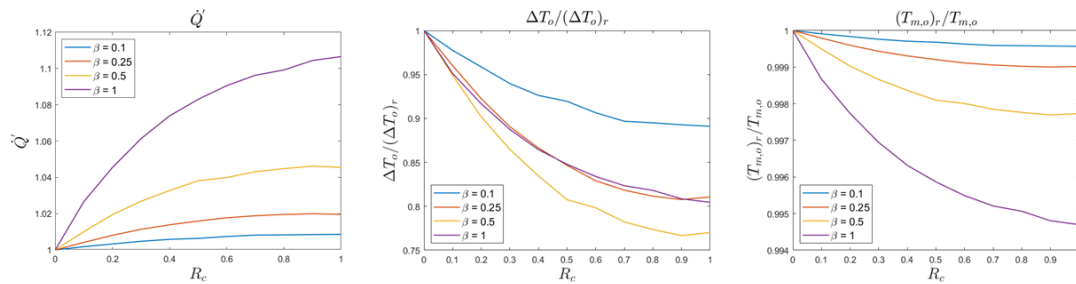


Figura 6.4: Contributi di N_T .

Infine, in Figura 6.5, è riportato l'andamento del numero di generazione entropica N_S .

Si osserva come, al crescere di R_c , il numero di generazione tenda prima a decrescere, seguendo l'andamento di N_T , per poi tornare a crescere, seguendo quello di N_p anche se in maniera ridotta, avendo scelto $\phi_r = 0.1$.

Questo significa che, fissato il fattore di forma del canale, la funzione N_S presenta un minimo al variare di R_c e, di conseguenza esiste un valore del raggio di curvatura dei raccordi che minimizza le perdite dello scambiatore.

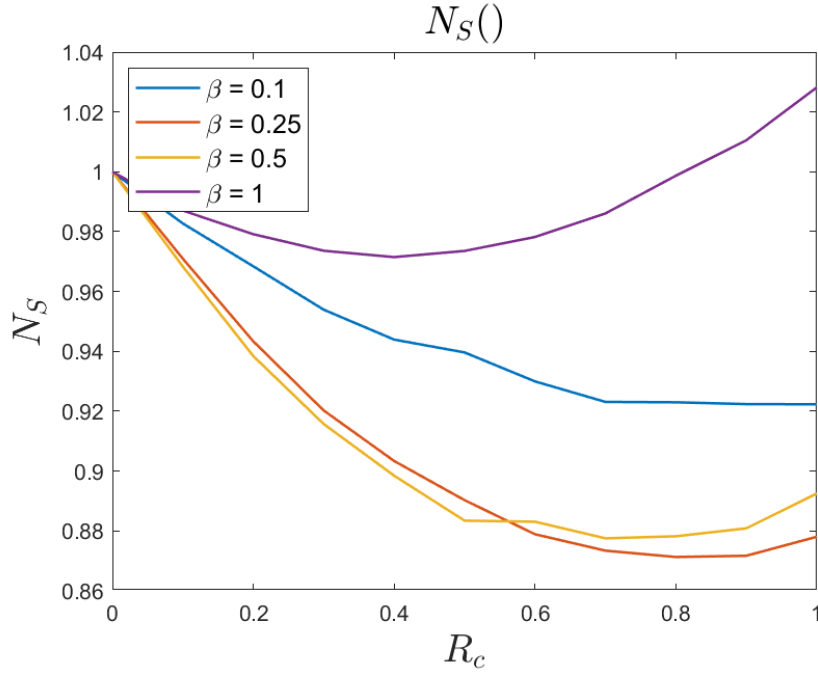


Figura 6.5: Numero di generazione entropica per criterio FG1a.

6.2. CRITERIO FG1B:

In questo criterio si ottimizza la differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i$ che si vuole minimizzare, fissando la lunghezza del condotto $L' = 1$, la portata in massa del fluido circolante $\dot{m}' = 1$ e la potenza termica scambiata $\dot{Q}' = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- Differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i$ che si ricava dalla relazione della potenza termica scambiata \dot{Q}' :

$$\Delta T'_i = \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{1}{D'_h}\right)}\right)} \quad (6.16)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'^2}{S'^2 D_h'^2 \Delta T'_i} \quad (6.17)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.18)$$

In cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = 1 \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - St' \frac{1}{D'_h} \right) \right] \end{array} \right. \quad (6.19)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio $N_p \equiv P'$:

$$P' = \frac{(fRe)'}{S' D_h'^2} \quad (6.20)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.21)$$

6.2.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso può essere osservato in Figura 6.6.

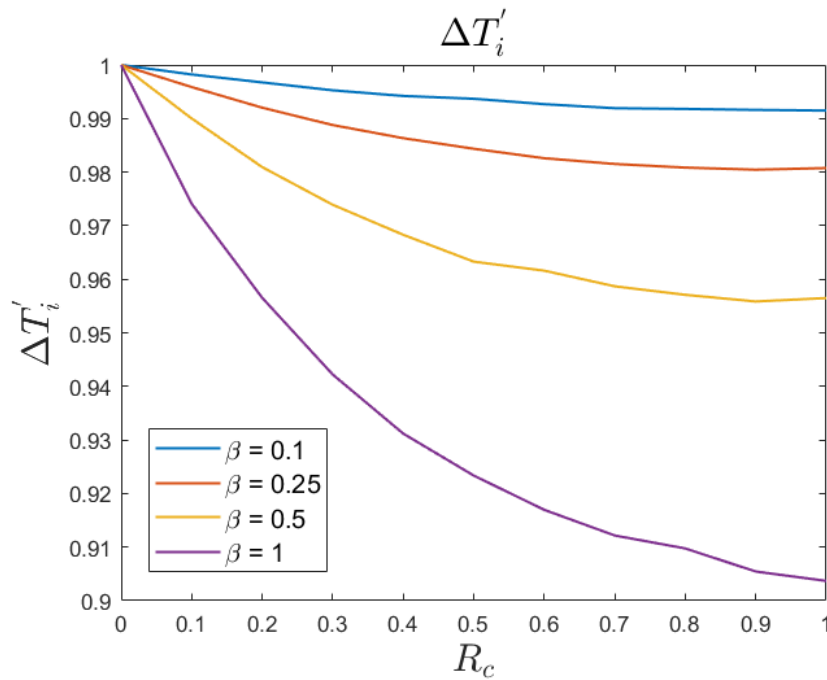


Figura 6.6: Differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso con criterio FG1b.

L'equazione di ottimizzazione di tale parametro è ottenuta dall'inversione dell'equazione della potenza termica scambiata, di conseguenza si osserva, che l'andamento di $\Delta T'_i$ al variare dei parametri geometrici è esattamente l'inverso di quello di \dot{Q}' del paragrafo precedente.

Per quanto riguarda l'ottimizzazione del campo elettrico imposto e dunque del parametro M_z si osserva la Figura 6.7.

Risultando $\Delta T'_i = 1$ per ogni condizione di raggio di curvatura e fattore di forma, la relazione che permette di determinare M'_z è la stessa del paragrafo precedente, di conseguenza l'andamento risulta lo stesso ed è giustificato dalle stesse considerazioni fatte in precedenza.

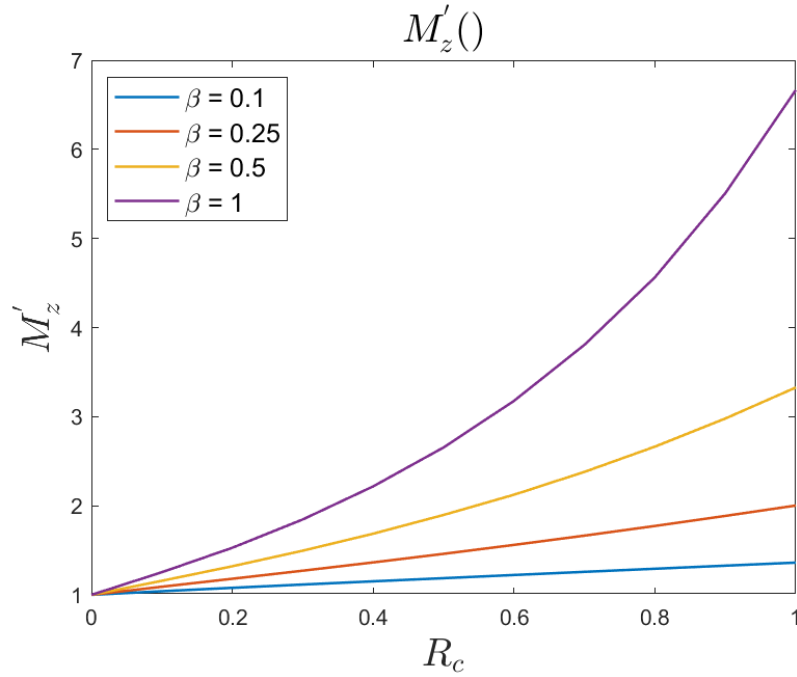


Figura 6.7: Parametro M_z con criterio FG1b.

Per quanto riguarda i numeri di generazione entropica, N_T (Figura 6.8) è pari a:

$$N_T = \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(1 - St' \frac{1}{D'_h} \right) \right] \quad (6.22)$$

E risulta sempre decrescente al crescere di R_c , mentre decresce al crescere di β .

L'andamento di N_p risulta invece lo stesso del paragrafo precedente.

Per quanto riguarda invece N_S (Figura 6.9), ancora una volta fissato β la funzione presenta un minimo e di conseguenza sul canale si può eseguire un'ottimizzazione di secondo principio al variare di R_c .

Si osserva anche che il variare di R_c ha un'incidenza maggiore per fattori di forma elevati, questo perché l'aumento di R_c quando β è elevato comporta una variazione della forma della sezione maggiore rispetto a quando β è contenuto.

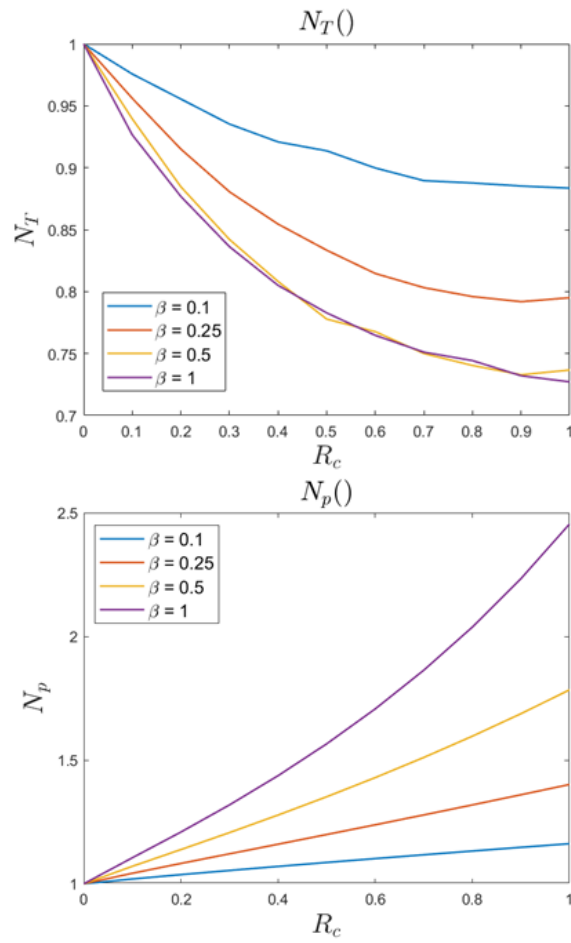


Figura 6.8: Numeri di generazione entropica con criterio FG1b.

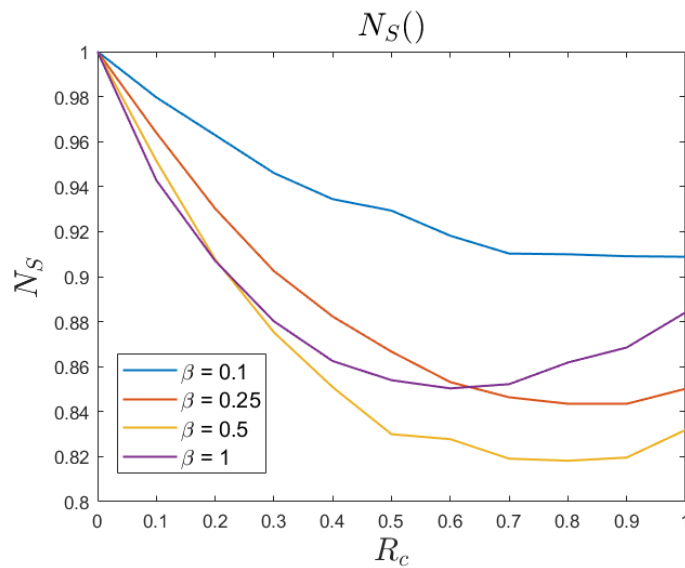


Figura 6.9: Numero di generazione entropica con criterio FG1b.

6.3. CRITERIO FG2A:

In questo criterio si ottimizza la potenza termica scambiata \dot{Q}' che si vuole massimizzare, fissando la lunghezza del condotto $L' = 1$, la potenza di pompaggio $P' = 1$ e la differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- Si determina la portata in massa adimensionale \dot{m}' sfruttando il vincolo sulla potenza di pompaggio P' :

$$P' = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{S' D_h'^2} = 1 \rightarrow \dot{m}' = \sqrt{\frac{S'}{(fRe)'} \cdot D_h'} \quad (6.23)$$

- Potenza termica adimensionale \dot{Q}' :

$$\dot{Q}' = \dot{m}' \cdot \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{1}{D_h'}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \quad (6.24)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'}{S'} \quad (6.25)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \dot{Q}' \cdot \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.26)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} + \frac{\dot{Q}'}{\dot{m}'} \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} \right) \right]^{-1} \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - St' \frac{1}{D'_h} \right) \right] \end{cases} \quad (6.27)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio $N_p \equiv P'$:

$$P' = 1 \quad (6.28)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.29)$$

6.3.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della potenza termica scambiata è riportato in Figura 6.10.

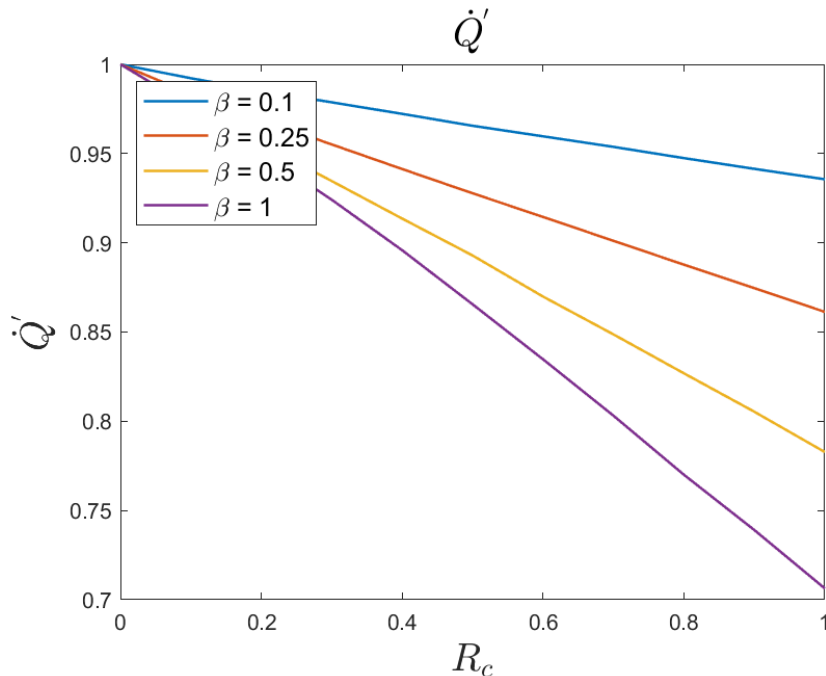


Figura 6.10: Potenza termica scambiata con criterio FG2a.

In questo criterio la potenza termica scambiata può essere scritta come:

$$\dot{Q}' = \dot{m}' \cdot \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{1}{D'_h}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \quad (6.30)$$

In cui, grazie al criterio precedente, possiamo affermare che il rapporto a destra tende a 1:

$$\frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{1}{D'_h}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \approx 1 \quad (6.31)$$

Di conseguenza risulta che la potenza termica scambiata risulta dipendente dalla sola portata:

$$\dot{Q}' \approx \dot{m}' \quad (6.32)$$

Per cui le variazioni di portata si riflettono direttamente sulle variazioni di potenza termica scambiata.

Per quanto riguarda la portata, dunque, si ha:

$$\dot{m}' = \sqrt{\frac{S'}{(fRe)'} \cdot D'_h} \quad (6.33)$$

E, ragionando a parità di diametro idraulico, si ha che la superficie S' si riduce sia all'aumentare di β che all'aumentare di R_c , inoltre, la riduzione della superficie della sezione comporta un aumento di velocità del flusso e dunque un aumento del gradiente di velocità da cui dipende il numero di Poiseuille. In

definitiva, la portata, e di conseguenza la potenza termica, tendono a ridursi all'aumentare di β e di R_c , e questo comportamento è dovuto al fatto che, ragionando a parità di diametro idraulico la sezione di passaggio si riduce all'aumentare di tali parametri.

Per quanto riguarda il parametro M'_z , il suo andamento è riportato in Figura 6.11.

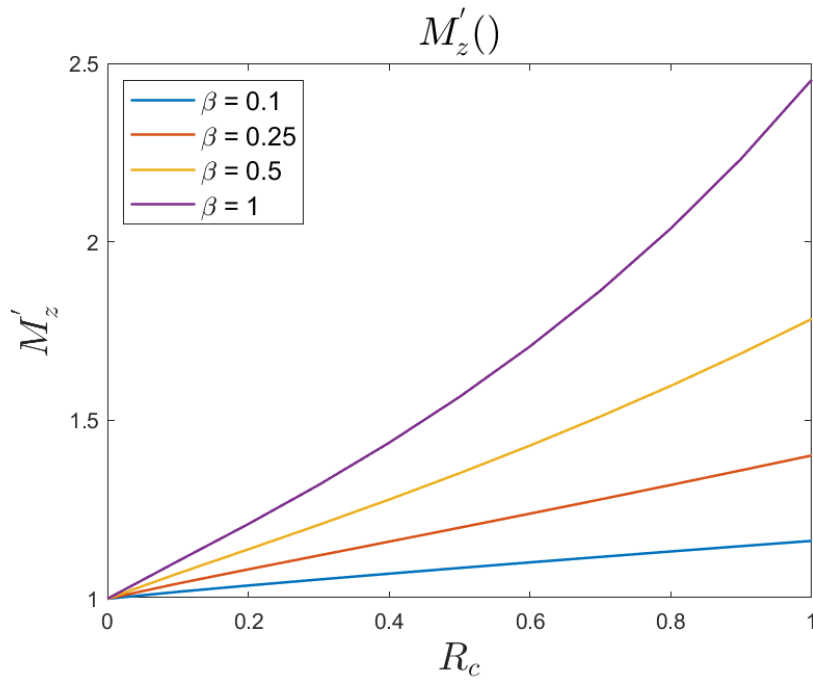


Figura 6.11: Parametro M'_z con criterio FG2a.

A parità di diametro idraulico l'espressione di M'_z con criterio FG2a risulta la radice di quella del criterio FG1a:

$$M'_{z|FG2a} = \sqrt{M'_{z|FG1a}} \quad (6.34)$$

Questo giustifica l'andamento crescente attenuato rispetto al criterio FG1a, che si osserva in Figura 6.11.

Per quanto riguarda, invece, i numeri di generazione entropica N_T ed N_p , i loro andamenti sono riportati in Figura 6.12.

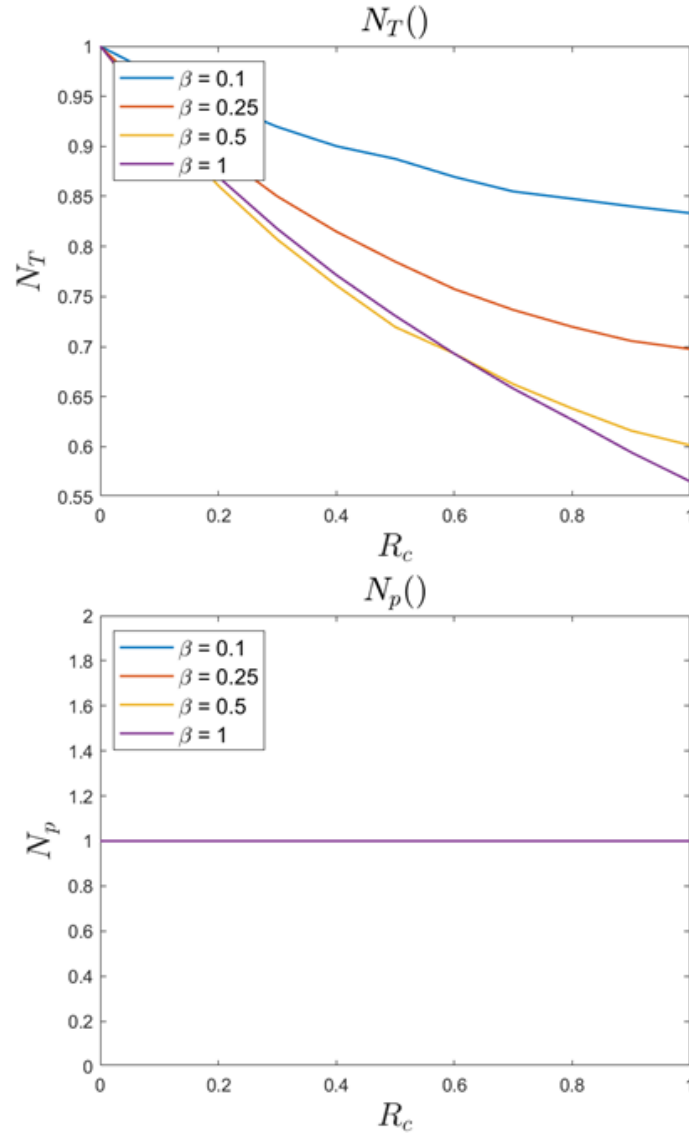


Figura 6.12: Numeri di generazione entropica con criterio FG2a.

Per quanto riguarda N_p esso risulta coincidere con la potenza di pompaggio e dunque risulta pari all'unità date le imposizioni del criterio ($P' = 1$).

Per quanto riguarda invece N_T , dati i risultati ottenuti la sua espressione può essere semplificata:

$$N_T \approx \dot{m}' \cdot \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - St' \frac{1}{D'_h} \right) \right] \quad (6.35)$$

La portata cala all'aumentare di β ed R_c , così come il termine esponenziale, di conseguenza anche N_T presenta lo stesso andamento.

L'andamento di N_S rispecchia l'andamento di N_T , essendo $N_p = 1$ (Figura 6.13).

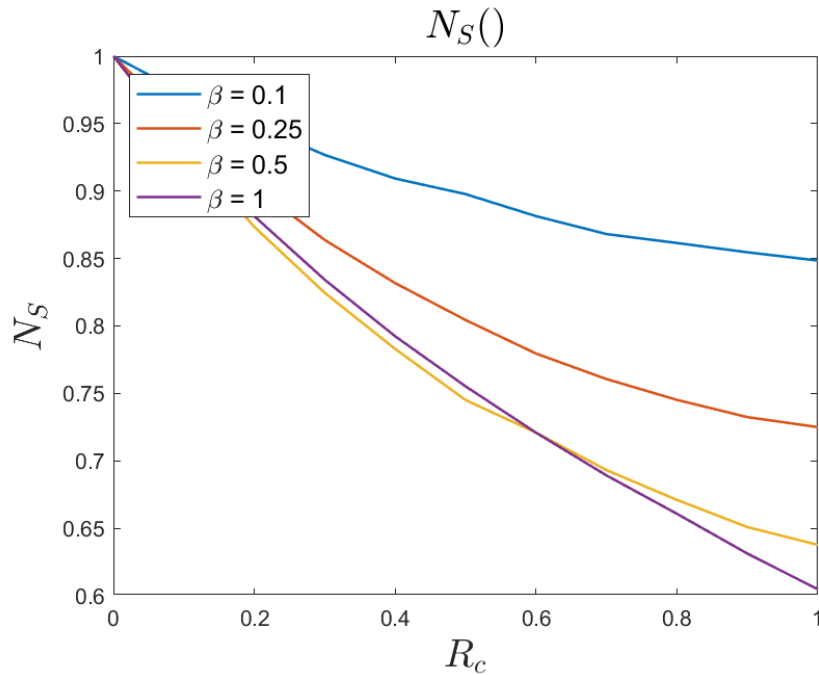


Figura 6.13: Numero di generazione entropica con criterio FG2a.

6.4. CRITERIO FG2B:

In questo criterio si ottimizza differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i$, che si vuole minimizzare, fissando la lunghezza del condotto $L' = 1$, la potenza di pompaggio $P' = 1$ e la potenza termica scambiata $\dot{Q}' = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- Si determina la portata in massa adimensionale \dot{m}' sfruttando il vincolo sulla potenza di pompaggio P' :

$$P' = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{S' D_h'^2} = 1 \rightarrow \dot{m}' = \sqrt{\frac{S'}{(fRe)'} \cdot D_h'} \quad (6.36)$$

- Differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i$ che si ricava dalla relazione della potenza termica scambiata \dot{Q}' :

$$\Delta T'_i = \frac{1}{\dot{m}'} \cdot \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}}}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(st' \frac{1}{D_h'}\right)}\right)} \quad (6.37)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'}{S' \Delta T'_i} \quad (6.38)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.39)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} + \frac{1}{\dot{m}'} \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}}\right) \right]^{-1} \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \Delta T'_i \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - st' \frac{1}{D_h'}\right) \right] \end{cases} \quad (6.40)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio $N_p \equiv P'$:

$$P' = 1 \quad (6.41)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.42)$$

6.4.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso, al variare del fattore di forma e del raggio di raccordo degli spigoli del condotto, può essere osservato in Figura 6.14.

L'andamento può essere giustificato facendo alcune considerazioni sull'equazione (6.37), in particolare, come visto nel paragrafo precedente, il rapporto fra i termini esponenziali tende all'unità, anche se cresce leggermente al crescere di β ed R_c , e dunque si ha:

$$\Delta T'_i \approx \frac{1}{\dot{m}'} \quad (6.43)$$

In cui \dot{m}' può essere espressa come nel paragrafo precedente (equazione (6.33)), di conseguenza essa risulta calare all'aumentare di β ed R_c a causa del fatto che, ragionando a parità di diametro idraulico, la sezione di passaggio si riduce all'aumentare di tali parametri. Di conseguenza $\Delta T'_i$ aumenta all'aumentare del fattore di forma e del raggio di curvatura degli spigoli del condotto.

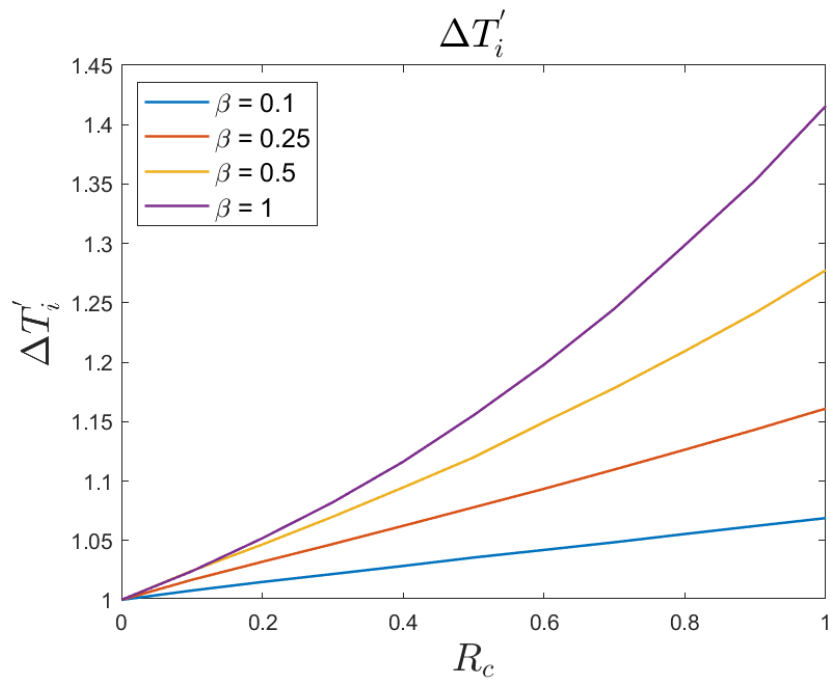


Figura 6.14: Differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso con criterio FG2b.

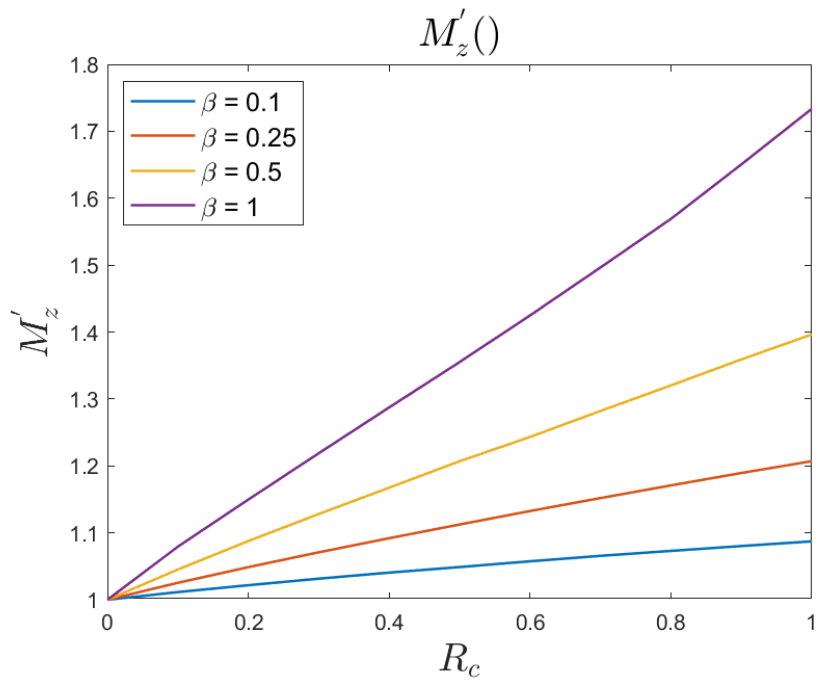


Figura 6.15: Parametro M'_z con criterio FG2b.

Per quanto riguarda invece il parametro M'_z , il suo andamento è riportato in Figura 6.15. Si osserva che l'andamento è lo stesso del paragrafo precedente ma attenuato, questo è facilmente giustificabile se si osservano le relazioni:

$$M'_z|_{FG2b} = \frac{(fRe)'}{S'\Delta T'_i} = \sqrt{\frac{(fRe)'}{S'}} = \sqrt{M'_z|_{FG2a}} \quad (6.44)$$

Gli andamenti dei numeri di generazione entropica sono riportati in Figura 6.16.

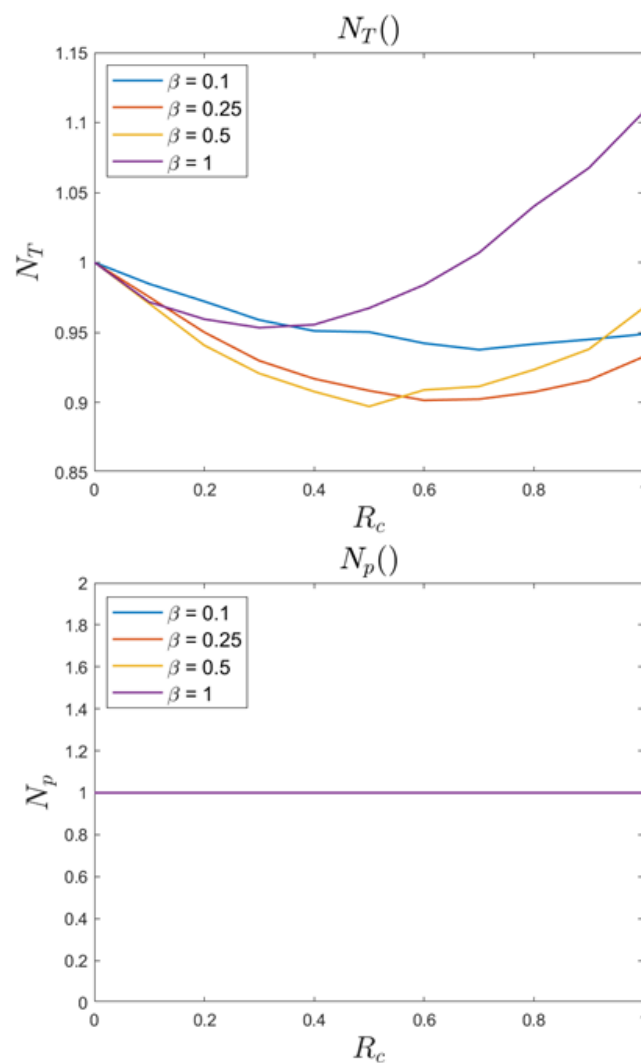


Figura 6.16: Numeri di generazione entropica con criterio FG2b.

Per quanto riguarda N_p esso è fissato all'unità dai vincoli del criterio. Per quanto riguarda invece N_T , e dunque anche N_S (Figura 6.17), si ha che al crescere di R_c il numero di generazione entropica tende a scendere e poi a risalire, con un'influenza maggiore per β elevati perché, come già detto, comporta un'influenza di R_c sulla geometria più elevata.

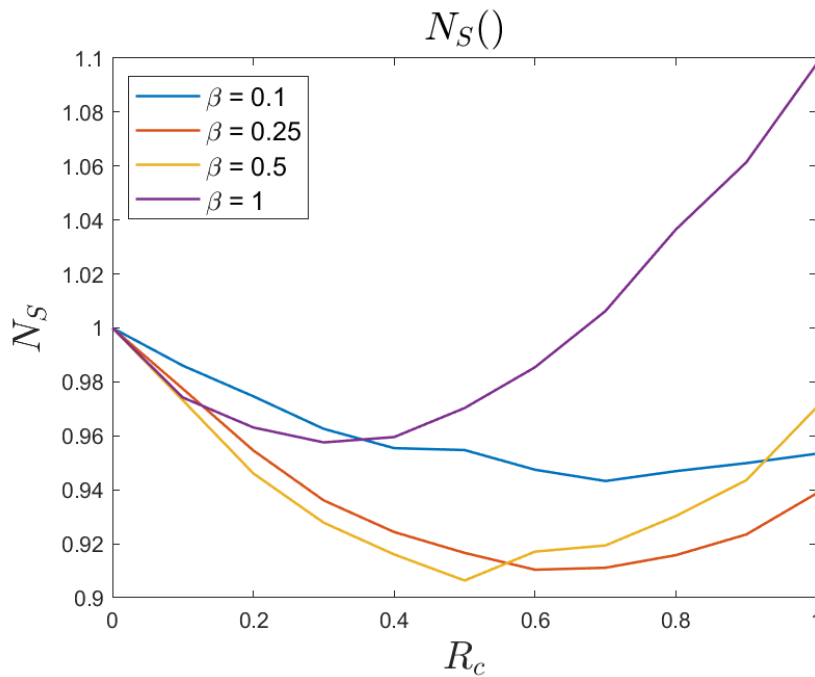


Figura 6.17: Numero di generazione entropica con criterio FG2b.

Tali andamenti sono giustificati se si osservano gli andamenti dei fattori che compongono N_T (6.39):

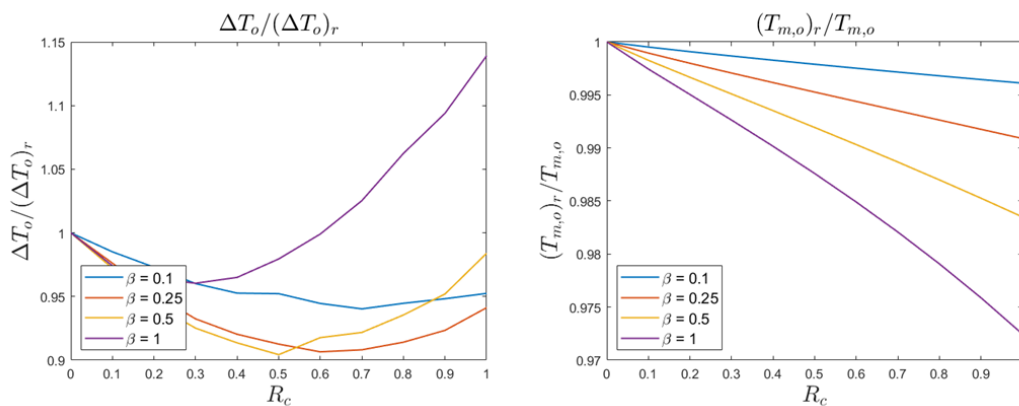


Figura 6.18: Fattori che compongono N_T .

6.5. CRITERIO FN2:

In questo criterio si ottimizza la lunghezza del condotto L' , che si vuole minimizzare, fissando la portata in massa $\dot{m}' = 1$, la potenza termica scambiata $\dot{Q}' = 1$ e la differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- L'equazione della potenza termica adimensionale \dot{Q}' permette di esplicitare la lunghezza del condotto L' :

$$\frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{L'}{D'_h}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} = 1 \rightarrow L' = \frac{D'_h}{St'} \quad (6.45)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'^2}{S'^2 D_h'^2} \quad (6.46)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.47)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = 1 \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = 1 \end{cases} \quad (6.48)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio
 $N_p \equiv P'$:

$$P' = \frac{(fRe)'L'}{S'D_h'^2} \quad (6.49)$$

- Numero di generazione entropica N_s :

$$N_s = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.50)$$

6.5.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della lunghezza adimensionale in funzione dei parametri geometrici è riportato in Figura 6.19.

L'andamento si spiega osservando la relazione (6.45), che nel caso in esame, quindi supponendo costante il diametro idraulico, si può scrivere come:

$$L' = \frac{1}{St'} \quad (6.51)$$

E, come già affermato nei paragrafi precedenti, il numero di Nusselt aumenta all'aumentare di R_c poiché diminuiscono i ristagni negli spigoli del condotto mentre il numero di Reynolds aumenta all'aumentare di R_c poiché diminuisce la sezione di passaggio e dunque aumenta la velocità media del flusso. Di conseguenza, la lunghezza adimensionale diminuisce all'aumentare di R_c .

Per quanto riguarda l'influenza di β invece, il numero di Nusselt tende a diminuire all'aumentare di β mentre quello di Reynolds tende a diminuire. Ma se ci si riferisce alle condizioni di riferimento il comportamento si inverte:

$$\begin{cases} Nu' \uparrow \text{ se } \beta \uparrow \\ Re' \uparrow \text{ se } \beta \uparrow \end{cases} \quad (6.52)$$

E questo spiega l'andamento di L' .

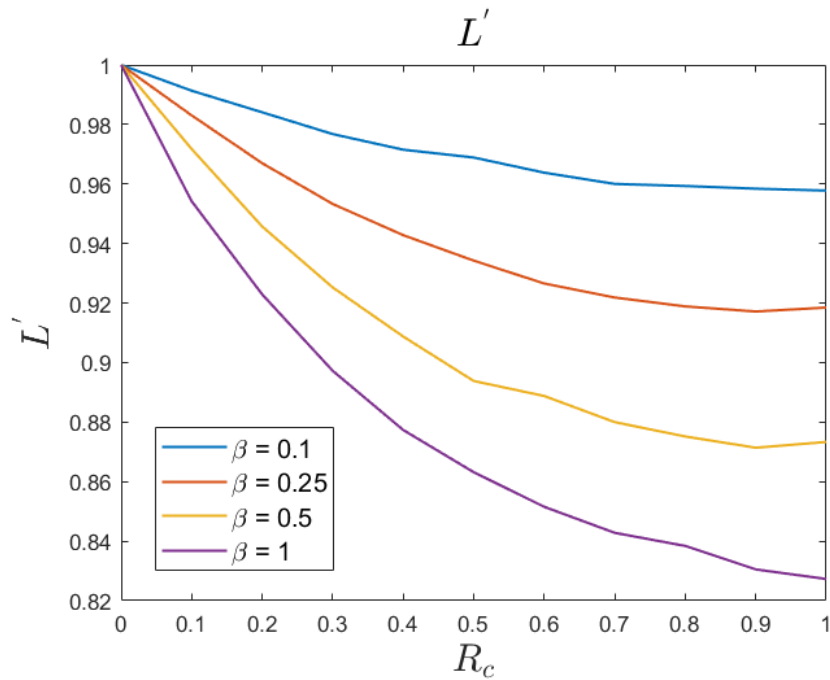


Figura 6.19: Lunghezza adimensionale con criterio FN2.

L'andamento di M'_z è riportato in Figura 6.20.

In questo criterio e a parità di diametro idraulico risulta:

$$M'_z = \left(\frac{(fRe)'}{S'} \right)^2 \quad (6.53)$$

E, come si è già affermato nei paragrafi precedenti, all'aumentare di β ed R_c si ha una diminuzione della sezione di passaggio, quindi un aumento della velocità del flusso, quindi del gradiente di velocità e quindi del numero di Poiseuille.

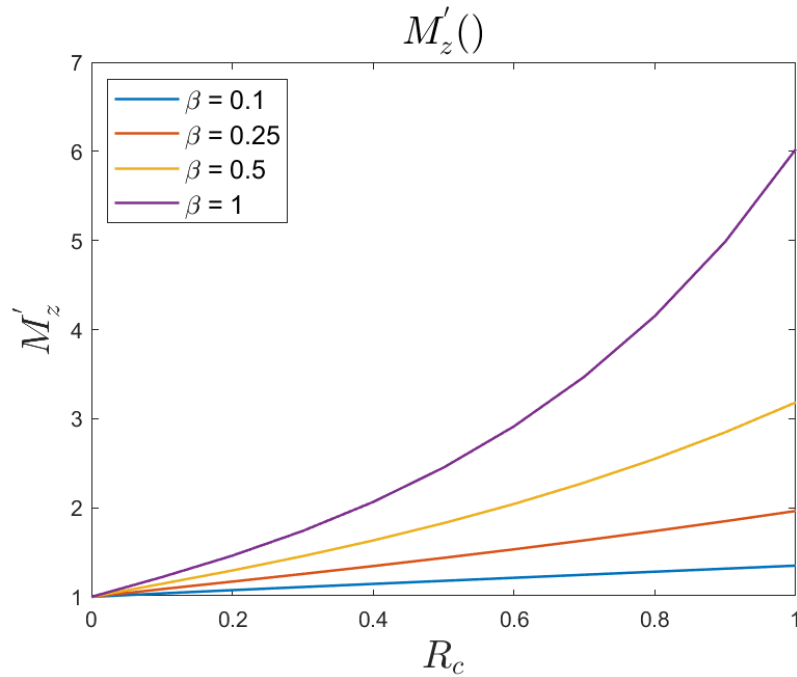


Figura 6.20: Parametro M'_z con criterio FN2.

Per quanto riguarda poi i numeri di generazione entropica si ha che il criterio fissa all'unità il valore di N_T .

Per quanto riguarda invece N_p , a parità di diametro idraulico, si ha:

$$N_p = \frac{(fRe)'}{S'St'} \quad (6.54)$$

In questo caso risulta predominante il fatto che aumenti il rapporto $(fRe)'/S'$ piuttosto che la diminuzione del valore di St' all' aumentare dei parametri relativi alla geometria.

Per quanto riguarda il numero di generazione entropica totale, in esso si osserva l'andamento visto per N_p , dato che si ha $N_T = 1$.

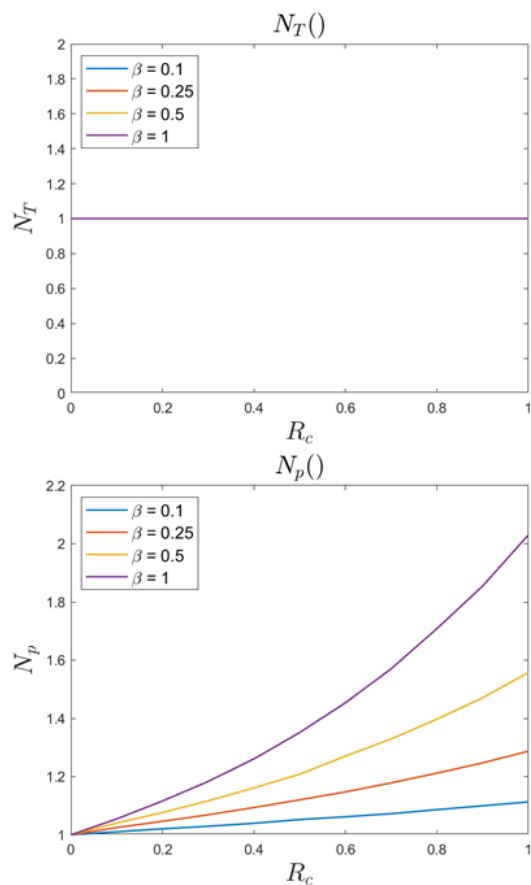


Figura 6.21: Numeri di generazione entropica con criterio FN2.

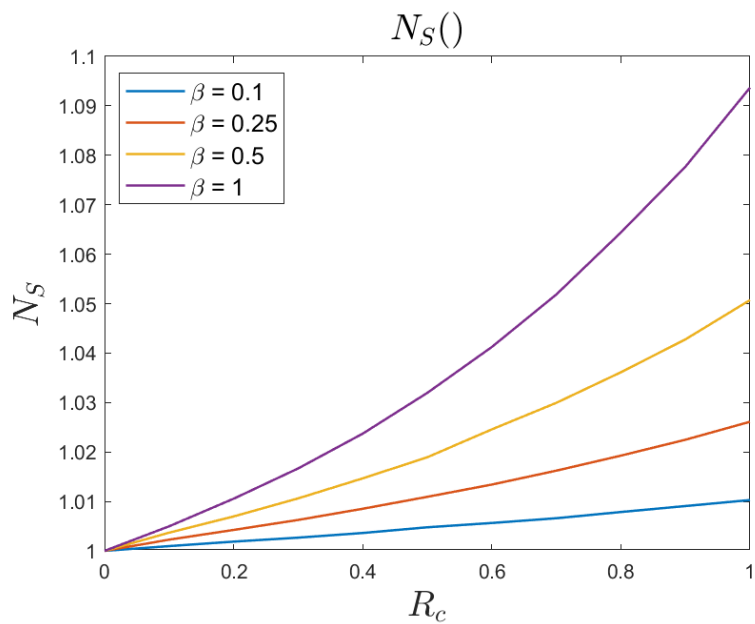


Figura 6.22: Numero di generazione entropica con criterio FN2.

6.6. CRITERIO FN3:

In questo criterio si ottimizza la potenza di pompaggio P' , che si vuole minimizzare, fissando la portata in massa $\dot{m}' = 1$, la potenza termica scambiata $\dot{Q}' = 1$ e la differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo sono le stesse del paragrafo precedente.

6.6.1. ANALISI DEI RISULTATI

In questo paragrafo si riportano solo i risultati relativi alla potenza di pompaggio (Figura 6.23), dato che quelli relativi alle altre grandezze prese in esame sono gli stessi del paragrafo precedente.

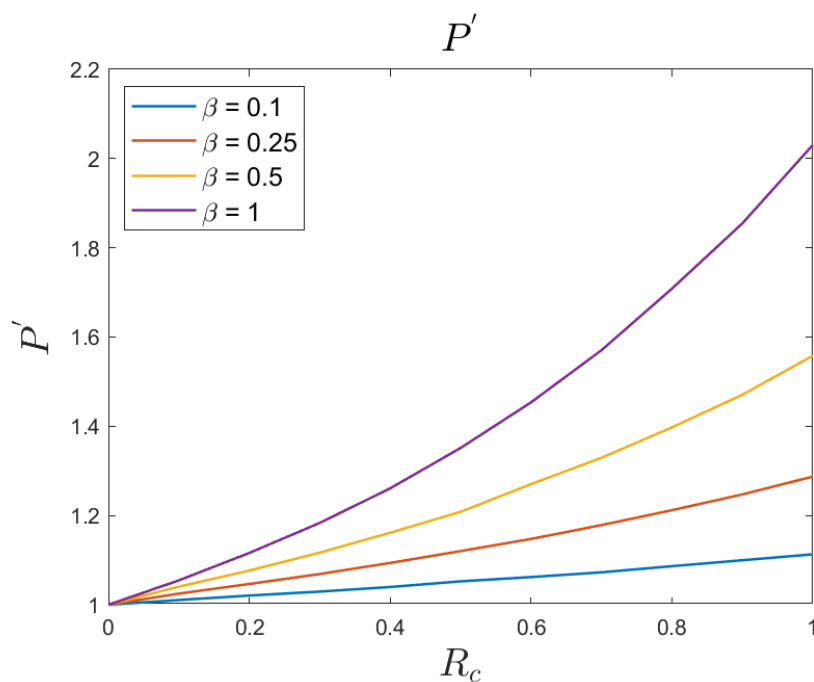


Figura 6.23: Potenza di pompaggio con criterio FG3.

Per l'andamento valgono le stesse considerazioni fatte per il numero di generazione entropica relativo alle perdite per attrito N_p del paragrafo precedente, dato che le due espressioni coincidono.

6.7. CRITERIO VGA:

In questo criterio si ottimizza la lunghezza del condotto L' , che si vuole minimizzare, fissando la portata in massa $\dot{m}' = 1$, la potenza di pompaggio $P' = 1$ e la differenza di temperatura fra fluido e parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- La relazione della potenza di pompaggio P' permette di determinare la lunghezza del condotto adimensionale L' :

$$P' = \frac{(fRe)'L'}{S'D_h'^2} = 1 \rightarrow L' = \frac{S'D_h'^2}{(fRe)'} \quad (6.55)$$

- Potenza termica scambiata adimensionale \dot{Q}' :

$$\dot{Q}' = \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{L'}{D_h'}\right)}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)} \quad (6.56)$$

- Parametro M'_z :

$$M'_z = \frac{(fRe)'^2}{S'^2 D_h'^2} \quad (6.57)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \dot{Q}' \cdot \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.58)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = \left[\frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} + \dot{Q}' \cdot \left(1 - \frac{T_{m_{ir}}}{T_{m_{or}}} \right) \right]^{-1} \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(1 - St' \frac{L'}{D'_h} \right) \right] \end{cases} \quad (6.59)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio
 $N_p \equiv P'$:

$$P' = 1 \quad (6.60)$$

- Numero di generazione entropica N_s :

$$N_s = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.61)$$

6.7.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della lunghezza adimensionale è riportato in Figura 6.24.

Con i vincoli imposti da tale criterio e con l'ipotesi di diametro idraulico costante, l'espressione della lunghezza adimensionale diventa:

$$L' = \frac{S'}{fRe'} \quad (6.62)$$

E, come già visto nei paragrafi precedenti, l'aumento di β ed R_c comporta sia una diminuzione della superficie della sezione del condotto sia un aumento della velocità del flusso, quindi un aumento del numero di Poiseuille, da questi andamenti si spiega quello di L' .

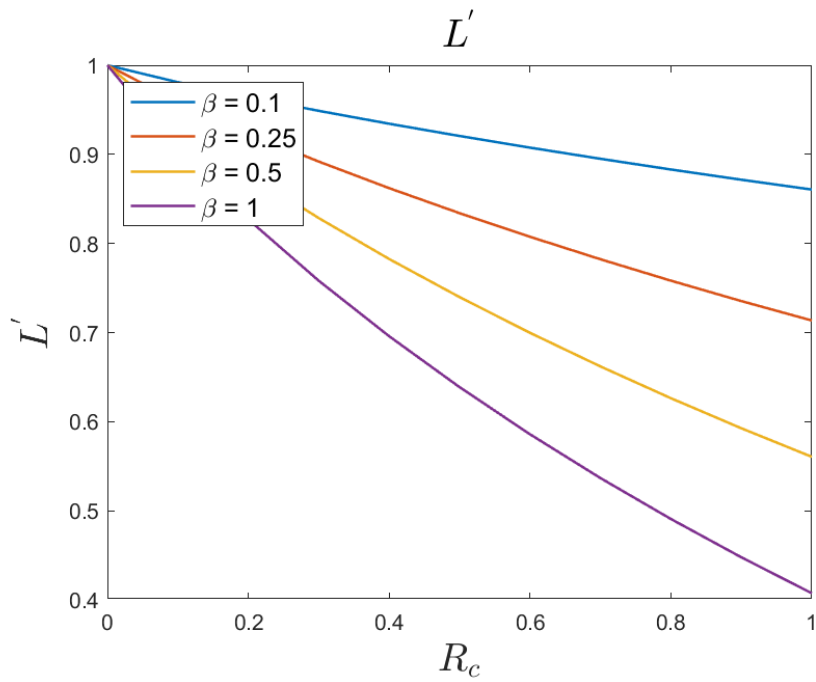


Figura 6.24: Lunghezza adimensionale con criterio VGa.

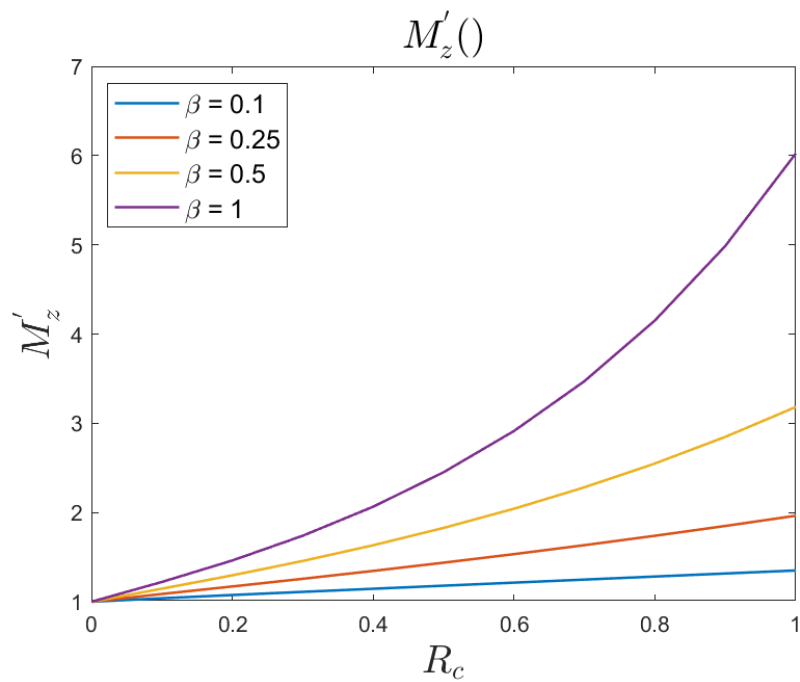


Figura 6.25: Parametro M'_z con criterio VGa.

Per quanto riguarda invece M'_z , si ha:

$$M'_z = \left(\frac{(fRe)'}{S'} \right)^2 \quad (6.63)$$

E di conseguenza valgono le stesse considerazioni fatte per l'equazione (6.53).

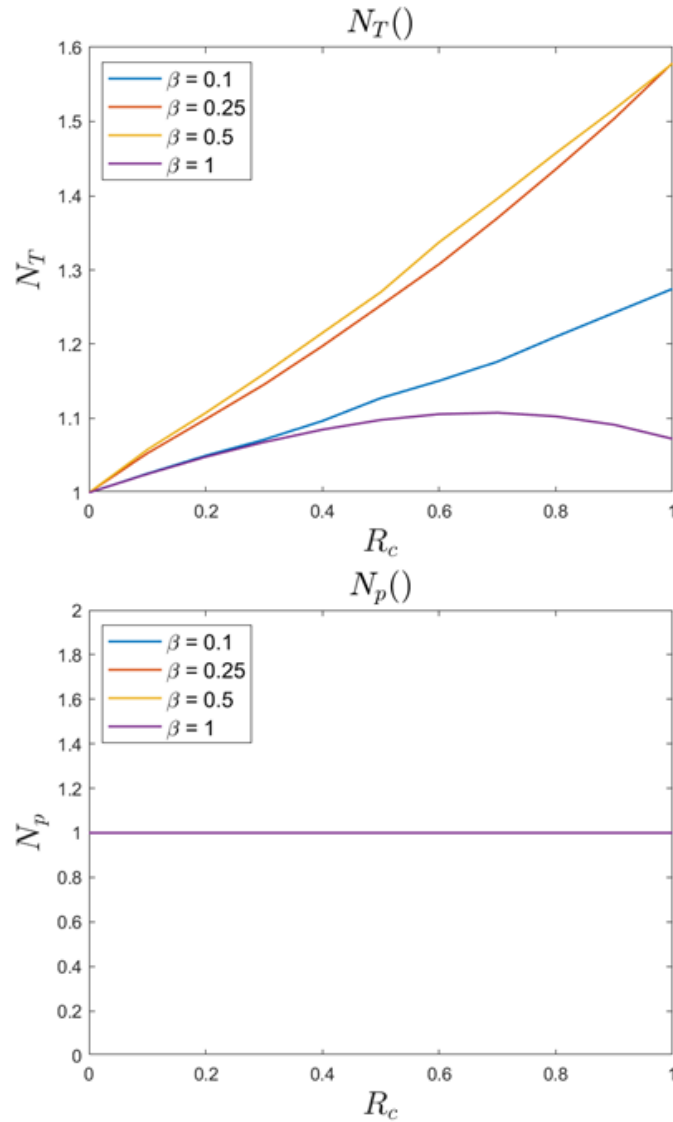


Figura 6.26: Numeri di generazione entropica con criterio VGa .

Per quanto riguarda gli andamenti dei numeri di generazione entropica (Figura 6.26), N_p è fisso a 1 a causa dei vincoli del criterio.

Si osserva come generalmente N_T cresca molto rapidamente al crescere del raggio di curvatura degli spigoli del condotto, tranne per il condotto con $\beta = 1$ che per $R_c = 1$ diventa condotto a sezione circolare. Mentre, per quanto riguarda la dipendenza da β , N_T sembra crescere al crescere di β fino a $\beta = 0.5$, poi torna a calare per $\beta = 1$.

Tale andamento si spiega se si osserva l'espressione di N_T e si rappresenta l'andamento dei termini che lo compongono:

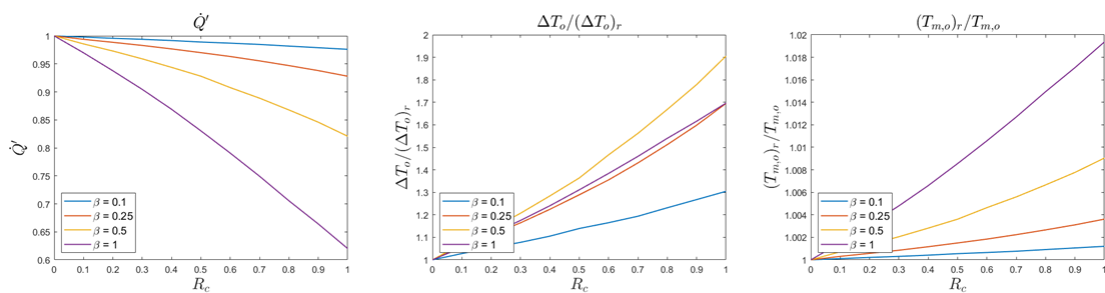


Figura 6.27: Fattori che compongono N_T .

Per quanto riguarda il numero di generazione entropica totale, in esso si osserva l'andamento visto per N_T , dato che si ha $N_p = 1$.

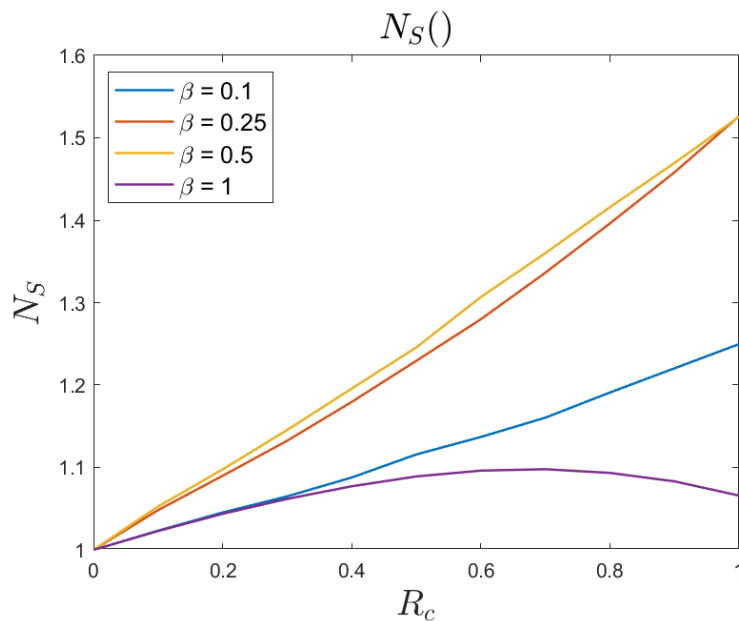


Figura 6.28: Numero di generazione entropica con criterio VGa.

6.8. CRITERIO VGB:

In questo criterio si ottimizza la differenza di temperatura tra il fluido e la parete sulla sezione di ingresso $\Delta T'_i$, che si vuole minimizzare, fissando la portata in massa $\dot{m}' = 1$, la potenza di pompaggio $P' = 1$ e la potenza termica scambiata $\dot{Q}' = 1$.

Di conseguenza le relazioni che legano le funzioni obiettivo si riducono a:

- L'espressione della differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso si ricava dall'espressione della potenza termica scambiata:

$$\Delta T'_i = \frac{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}}}\right)}{\left(1 - e^{-4St_r \frac{L_r}{D_{hr}} \left(st' \frac{L'}{D'_h}\right)}\right)} \quad (6.64)$$

In cui la lunghezza si determina sfruttando la relazione della potenza di pompaggio:

$$L' = \frac{S' D_h'^2}{(fRe)'} \quad (6.65)$$

- La relazione del parametro M'_z può essere semplificata sfruttando il fatto che $P' = 1$:

$$M'_z = \frac{(fRe)'}{S' L' \Delta T'_i} \quad (6.66)$$

- Numero di generazione entropica relativo allo scambio termico N_T :

$$N_T = \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} \cdot \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} \quad (6.67)$$

In cui:

$$\begin{cases} \frac{T_{m_{or}}}{T_{m_o}} = 1 \\ \frac{\Delta T_o}{\Delta T_{or}} = \Delta T_i' \exp \left[4St_r \frac{L_r}{D_{h_r}} \left(1 - St' \frac{L'}{D'_h} \right) \right] \end{cases} \quad (6.68)$$

- Numero di generazione entropica relativo alle perdite di pompaggio $N_p \equiv P'$:

$$P' = 1 \quad (6.69)$$

- Numero di generazione entropica N_S :

$$N_S = \frac{N_T + \phi_r N_p}{1 + \phi_r} \quad (6.70)$$

6.8.1. ANALISI DEI RISULTATI

L'andamento della differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso è mostrato in Figura 6.29.

Come si osserva dall'immagine, $\Delta T_i'$ aumenta al crescere del valore di R_c e al crescere del valore di β .

Si sottolinea il fatto che anche questo parametro risulta influenzato dalla geometria sono in prossimità della sezione di ingresso del canale, infatti, scegliendo lunghezze di riferimento maggiori del diametro idraulico, il termine esponenziale nella (6.64) risulta non influenzabile dalla variazione di St' .

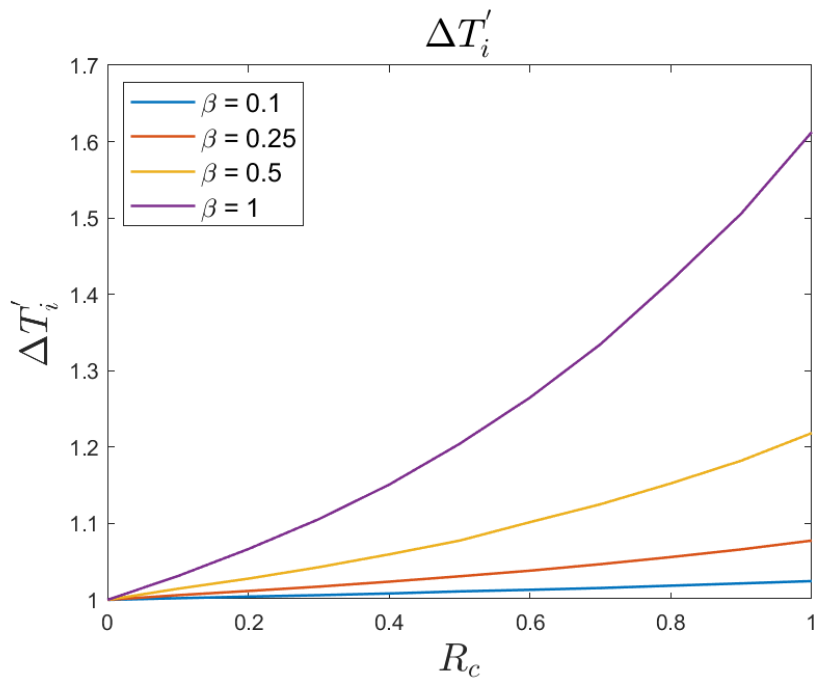


Figura 6.29: Differenza di temperatura tra fluido e parete sulla sezione di ingresso con criterio VGb .

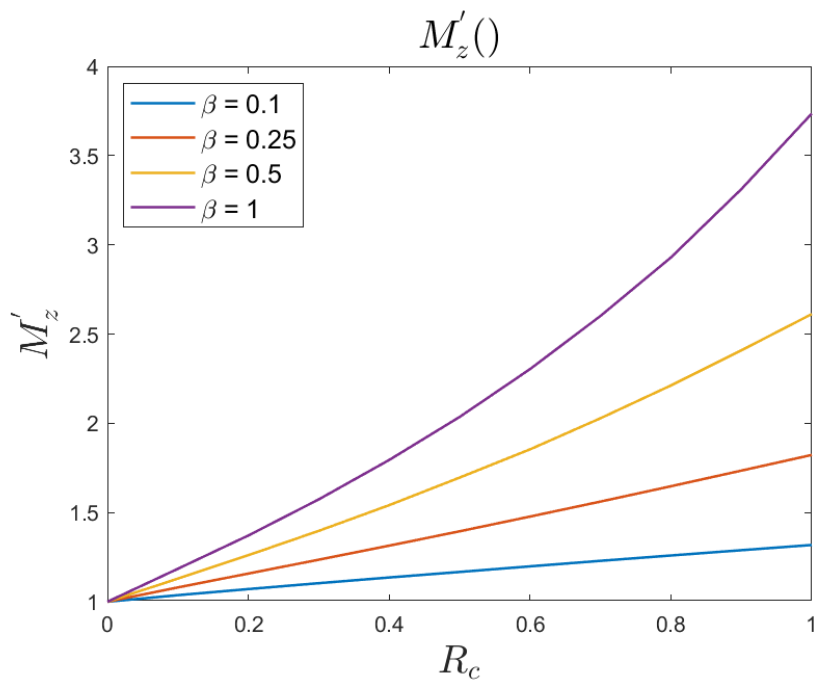


Figura 6.30: Parametro M'_z con criterio VGb .

Per quanto riguarda il parametro M'_z , esso risulta:

$$M'_z = \frac{(fRe)^2}{S'^2} \quad (6.71)$$

E dunque valgono le stesse considerazioni fatte per il criterio FN2. Questo vale anche per i numeri di generazione entropica, come si evince dai grafici successivi.

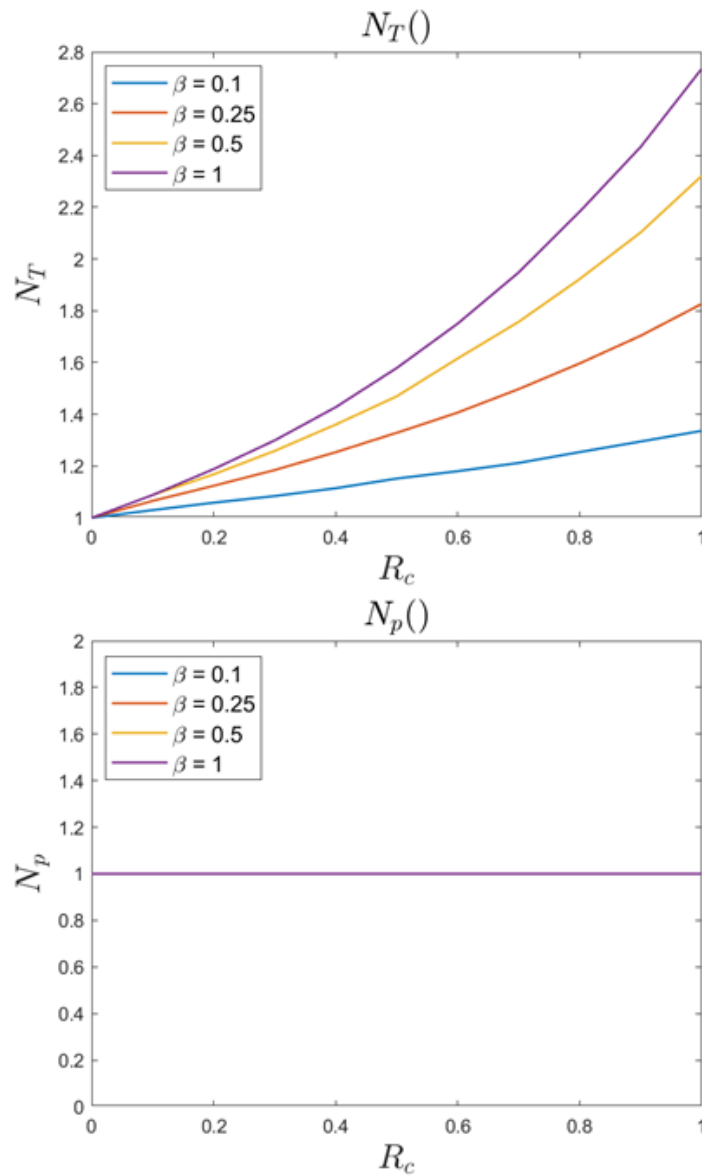


Figura 6.31: Numeri di generazione entropica con criterio VGb.

Per quanto riguarda i numeri di generazione entropica, si ha che il N_T cresce sia al crescere di R_c che al crescere di β . Tale andamento si riflette poi anche sul numero di generazione entropica complessivo, dato che questo criterio fissa N_p all'unità.

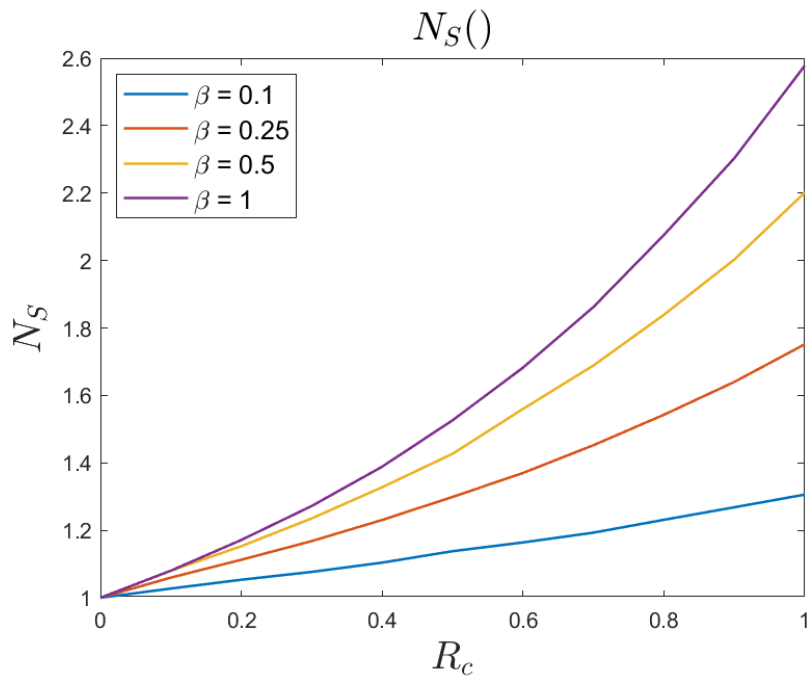


Figura 6.32: Numero di generazione entropica con criterio VGb.

7. CONCLUSIONE E SVILUPPI FUTURI

L'obiettivo perseguito nello scrivere questa trattazione è fornire i mezzi necessari ad affrontare il problema di ottimizzazione geometrica dei canali di un micro-scambiatore a flussi elettrosmotici, nel caso in cui la temperatura di parete dei canali venga mantenuta costante. L'attenzione è stata posta anche sulla generazione entropica, la cui minimizzazione implica la massimizzazione del rendimento di secondo principio del dispositivo e dunque la sua efficienza.

Per l'analisi sono stati sfruttati i Performance Evaluation Criteria (PEC) che permettono di fissare alcune variabili in modo che la funzione obiettivo dipenda solo dai parametri geometrici che risultano dunque passibili di ottimizzazione. A questi ultimi sono state aggiunte relazioni di secondo principio che permetteranno al progettista di massimizzare anche l'efficienza dello scambiatore.

Considerando il contributo limitato che il riscaldamento per effetto Joule genera sull'andamento della temperatura all'interno del canale, l'ottimizzazione è stata svolta trascurando questo termine.

Senza l'utilizzo delle correlazioni o dei grafici presentati, risulterebbe molto difficile capire in che direzione muoversi per massimizzare le prestazioni; questo accade perché non è possibile individuare, sia per la funzione obiettivo che per il numero di generazione entropica, una tendenza monotona al variare del raggio di smusso e del fattore di forma che sia comune a tutti i criteri PEC applicabili.

Questo significa che il progettista può scegliere il criterio, fra quelli mostrati, che più collima alla sua applicazione ed avrà a disposizione il relativo grafico che permette di scegliere i parametri geometrici ottimali.

Un possibile sviluppo consiste nell'implementare correlazioni significative, che potrebbero coincidere con la lunghezza di completo sviluppo e con i numeri di

generazione entropica, che tengano conto anche del riscaldamento generato per effetto Joule, che dipendano dunque da M_z , e far variare tale parametro in modo da definire con precisione il valore limite per cui il termine generativo può essere considerato trascurabile. Si potrà inoltre aggiungere il criterio FN1 che permette l'ottimizzazione della lunghezza L' , fissando $\Delta T'_i = \dot{Q}' = P' = 1$.

APPENDICE A: BILANCIO DI ENERGIA

In questo paragrafo si descrive il principio di conservazione dell'energia per una porzione infinitesima di canale.

Si prende come dominio per il bilancio un volumetto infinitesimo $dxdydz$, all'interno di esso, il tasso di variazione di energia totale (A) sarà pari alla differenza fra il tasso di ingresso e di uscita dell'energia (B) al quale è necessario aggiungere il tasso di introduzione del calore (C) e quello di generazione (E) e quello del lavoro speso o dissipato (D):

$$A = B + C - D + E \quad (\text{A.1})$$

Si scrive, ancora una volta, l'equazione nella maniera più generale possibile, esplicitando i termini appena introdotti, per poi introdurre le ipotesi relative al caso in esame.

Si inizia dunque, con il primo termine dell'equazione che rappresenta il tasso di variazione dell'energia totale, che può essere scomposta in energia cinetica ed energia interna:

$$A = \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] dxdydz \quad (\text{A.2})$$

In cui \hat{u} è l'energia interna specifica.

Per quanto riguarda invece la differenza fra il tasso di energia in ingresso e quello in uscita, si può scrivere il bilancio osservando la Figura A.1 in cui sono scritti i termini nelle sole direzioni x e z , risultando il bilancio identico anche nella direzione y :

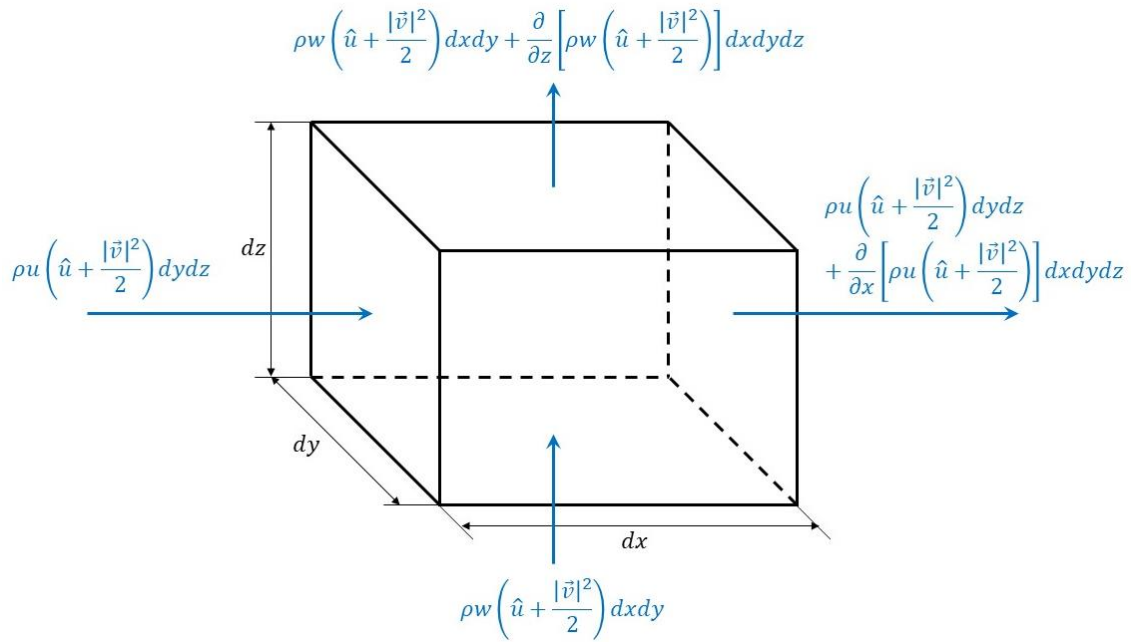


Figura A.1: flusso di energia in ingresso e in uscita dal volumetto.

$$\begin{aligned}
 B = & \rho u \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dydz + \rho v \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dxdz + \rho w \left(\hat{u} + \right. \\
 & \left. + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dxdy - \rho u \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dydz - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\hat{u} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] dxdydz - \rho v \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dxdz - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(\hat{u} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] dxdydz - \rho w \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) dxdy - \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho w \left(\hat{u} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] dxdydz
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Che può essere semplificata:

$$\begin{aligned}
 B = & - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho v \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] \right. \\
 & \left. - \frac{\partial}{\partial z} \left[\rho w \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] \right\} dxdydz
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

Che può essere scritta:

$$B = -\nabla \left[\rho \vec{v} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] dx dy dz \quad (\text{A.5})$$

Per quanto riguarda invece il flusso netto di calore attraverso le pareti dell'elementino si scrive sempre il bilancio osservando la Figura A.2, in cui q''_x è, ad esempio, il flusso di calore in direzione x :

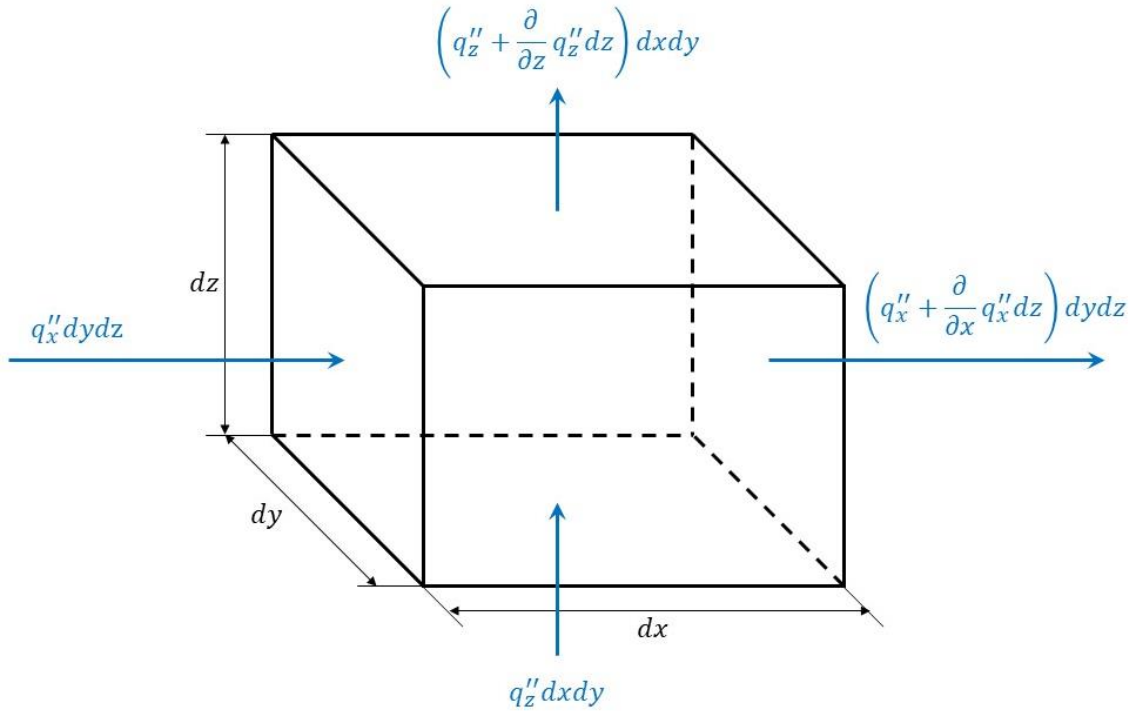


Figura A.2: flusso netto di calore.

$$C = q''_x dydz + q''_y dx dz + q''_z dx dy - \left(q''_x + \frac{\partial q''_x}{\partial x} dx \right) dydz \quad (\text{A.6})$$

$$- \left(q''_y + \frac{\partial q''_y}{\partial x} dx \right) dydz - \left(q''_z + \frac{\partial q''_z}{\partial x} dx \right) dydz$$

E, semplificando:

$$C = -\nabla \vec{q}'' dx dy dz \quad (\text{A.7})$$

Si passa ora ad esaminare il termine relativo al lavoro D , esso è composto da due termini, uno relativo alle forze di massa D_b e uno relativo alle forze di superficie D_s :

$$D = D_b + D_s \quad (\text{A.8})$$

Per quanto riguarda il tasso di lavoro generato dalle forze di massa si ha:

$$D_b = -\rho(g_x u + g_y v + g_z w) dx dy dz = -\rho(\vec{v} \cdot \vec{g}) dx dy dz \quad (\text{A.9})$$

In cui \vec{g} è l'accelerazione relativa alle forze di massa, in genere l'accelerazione di gravità.

Per quanto riguarda il tasso di lavoro generato dalle forze di superficie occorre invece effettuare un bilancio osservando la Figura A.3:

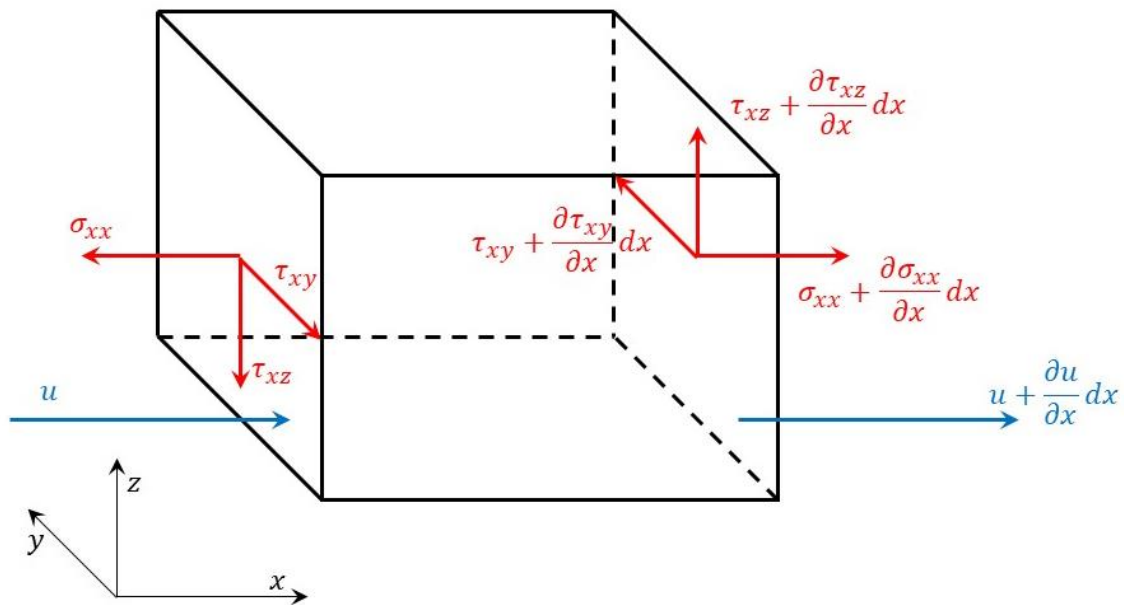


Figura A.3: lavoro delle forze di superficie.

Ottenendo:

$$\begin{aligned}
D_s = & - \left[u \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) + \right. \\
& + w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) + \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\
& + \left(\tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
& \left. \left. + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] dx dy dz
\end{aligned} \tag{A.10}$$

E dunque:

$$\begin{aligned}
D = & - \left\{ \rho (\vec{v} \cdot \vec{g}) + \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + \right. \right. \\
& \left. \left. + v \sigma_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \sigma_{zz}) \right] \right\} dx dy dz
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Di conseguenza è possibile scrivere il bilancio di energia sull'elementino, nel quale si trascura momentaneamente il termine generativo E , che verrà aggiunto successivamente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] = & - \nabla \left[\rho \vec{v} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] - \nabla \vec{q}'' + \rho (\vec{v} \cdot \vec{g}) + \\
& + \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{yx} + v \sigma_{yy} + \right. \\
& \left. + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{zx} + v \tau_{zy} + w \sigma_{zz}) \right]
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Se ora si effettua il bilancio dei momenti, osservando la Figura A.3, si ottiene:

$$\begin{cases} \rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dv}{Dt} = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\ \rho \frac{Dw}{Dt} = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{cases} \tag{A.13}$$

Se ora si moltiplica la prima equazione per u , la seconda per v , la terza per w e si sommano, si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} \cdot \frac{D\vec{v}^2}{Dt} &= \rho\vec{v} \cdot \vec{g} + u \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ &+ v \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ &+ w \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Inoltre, se si osserva l'equazione (A.12), i primi due termini di tale equazione possono essere scritti come:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] \right] &= \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \\ \left[\nabla \left[\rho\vec{v} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] \right] &= \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \nabla\rho\vec{v} + \rho\vec{v}\nabla \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Sostituendo tutto all'interno dell'equazione (A.12), si ottiene:

$$\begin{aligned} - \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \cdot \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\rho\vec{v} \right) - \rho \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + \vec{v}\nabla \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] - \nabla\vec{q}'' + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{D\vec{v}^2}{Dt} + \left(\sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ \left(\tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \left(\tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

In cui il primo termine si elide, in quanto l'equazione di continuità della massa assicura che $\partial\rho/\partial t + \nabla\rho\vec{v} = 0$ mentre si ha che:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) + \vec{v}\nabla \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \right] = \frac{D}{Dt} \left(\hat{u} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} \right) \quad (\text{A.17})$$

Si esplicita ora il termine relativo al flusso di calore mediante la legge di Fourier:

$$q_x'' = -k_x \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{A.18})$$

Ma, dato che nel caso in esame si sta considerando un fluido, esso può essere considerato isotropo, quindi:

$$k_x = k_y = k_z = k \quad (\text{A.19})$$

E dunque:

$$q'' = -k \nabla T \quad (\text{A.20})$$

Si suppone ora che il fluido sia newtoniano in modo che le tensioni tangenziali risultino proporzionali alla viscosità, si ha quindi:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{zy} &= \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \sigma_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \vec{v} \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \nabla \vec{v} \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \nabla \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Dunque, l'equazione (A.16), può essere riscritta come:

$$-\rho \frac{D\hat{u}}{Dt} = -\nabla(k\nabla T) - p\nabla \vec{v} - \mu\Phi \quad (\text{A.22})$$

In cui Φ prende il nome di funzione di dissipazione e risulta pari a:

$$\begin{aligned}
\Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
& - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Per il momento, le uniche ipotesi che sono state introdotte, per ottenere l'equazione (A.22), sono:

- Ipotesi di mezzo continuo
- Fenomeni di generazione trascurabili, il termine E che si aggiungerà successivamente in termini di calore
- Fluido isotropo e newtoniano

Si prosegue poi esprimendo il bilancio di energia in termini di entalpia specifica, ricordando che:

$$h = \hat{u} + \frac{p}{\rho} \tag{A.24}$$

Di conseguenza, effettuando la derivata totale si ha:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{D\hat{u}}{Dt} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{D\rho}{Dt} \tag{A.25}$$

Quindi la (A.22) diventa:

$$-\rho \frac{Dh}{Dt} - \frac{Dp}{Dt} + \frac{p}{\rho} \cdot \frac{D\rho}{Dt} = -\nabla(k\nabla T) - p\nabla\vec{v} - \mu\Phi \tag{A.26}$$

Da cui, riordinando:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\frac{Dp}{Dt} + \nabla(k\nabla T) + \frac{p}{\rho} \cdot \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \vec{v} \right) + \mu\Phi \quad (\text{A.27})$$

In cui $D\rho/Dt + \rho \nabla \vec{v} = 0$ per l'equazione di continuità della massa, quindi:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\frac{Dp}{Dt} + \nabla(k\nabla T) + \mu\Phi \quad (\text{A.28})$$

Infine, dato che si vuole sfruttare l'equazione di bilancio dell'energia per determinare il campo di temperatura, si esprime la (A.28) in termini di temperatura, ricordando che:

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp \quad (\text{A.29})$$

In cui β è il coefficiente di dilatazione termica:

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.30})$$

Quindi, facendo la derivata totale si ottiene:

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) \frac{Dp}{Dt} \quad (\text{A.31})$$

Si sostituisce dunque la (A.31) nell'equazione (A.28), per ottenere:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla(k\nabla T) + \mu\Phi \quad (\text{A.32})$$

A questo punto, avendo espresso tutto in funzione della potenza per unità di volume si può aggiungere il termine di generazione del calore $E = q_{gen}$ che nel nostro caso sarà dovuto all'effetto Joule causato dal campo elettrico imposto sul micro-canale.

In definitiva, dunque, l'equazione di conservazione dell'energia, risulta:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \beta T \frac{Dp}{Dt} + \nabla(k\nabla T) + \mu\Phi + q_{gen} \quad (\text{A.33})$$

[16].

APPENDICE B: SCRIPT PEC

Il primo script carica i dati relativi alle singole simulazioni, nei quali si determinano il numero di Nusselt e quello di Poiseuille per la specifica geometria e genera delle matrici con i dati relativi a tutte le simulazioni, in modo da poter caricare solamente quelli nello script di ogni PEC e diminuire così il tempo di calcolo di ogni script.

```
%%%%%%%%%% Salvataggio dei parametri necessari ai PEC %%%%%%%%%%%
close all
clear
clc

%% Definisco le variabili
beta = [0.1 0.25 0.5 1]; % rapporto di forma a/b ()
R_c = (0:0.1:1); % raggio di raccordo adimensionale r_c/2a ()
D_h_r = 3E-6; % diametro idraulico (m)
rho = 997; % densità dell'acqua (kg/m^3)
mu = 8.94E-4; % viscosità dinamica dell'acqua (Pa*s =
Kg*s/m^2)
Pr = 7; % Numero di Prandtl dell'acqua ()
T_mi = 2.9315E+02; % temperatura di mescolamento in ingresso (K)
T_p = 2.9615E+02; % temperatura di parete (K)
gamma = T_mi/T_p; % rapporto fra la temperatura in ingresso e
quella di parete ()
c_p = 4189; % capacità termica specifica a pressione
costante dell'acqua (J/KgK)
percorso = 'C:\Users\utente\Desktop\Script_PEC\Dati_simulazioni\'; %
percorso cartella di lavoro

%% Definisco la dimensione delle matrici
Nu = zeros(length(beta), length(R_c));
Po = Nu;
w_m = Nu;
Re = Nu;
St = Nu;
L_th = Nu;
D_h_ad = Nu;
P_h_ad = Nu;
S_ad = Nu;

%% Definizione della geometria
% supponiamo, per la determinazione del rapporto a/a_ref, che D_h^*=1
=>
% scelta = 4;

for ii = 1:length(beta)
    for jj = 1:length(R_c)
        [D_h_ad(ii,jj), P_h_ad(ii,jj), S_ad(ii,jj)] =
geometria_rettangolare(beta(ii), R_c(jj), 4);
    end
end
```



```

D_h = D_h_ad .* D_h_r;

%% Load dati e assegnazione dei valori

for ii = 1:length(beta)
    for jj = 1:length(R_c)
        name = name_folder(beta(ii), R_c(jj));
        load([percorso, name, '\pde2D-binary.mat'])
        load([percorso, name, '\pde3D-binary.mat'])
        Nu(ii,jj) = pde3D.Nu(end,2);
        Po(ii,jj) = pde2D.Po;
        w_m(ii,jj) = sum(pde2D.ut)/length(pde2D.ut);
        Re(ii,jj) = rho * w_m(ii,jj) * D_h(ii,jj) / mu;
        St(ii,jj) = Nu(ii,jj)/(Re(ii,jj)*Pr);
        kk = 1;
        RSS = 1;
        while RSS > 0.00000005
            RSS = abs(1 - (pde3D.Nu(kk,2)/pde3D.Nu(end,2)));
            kk = kk + 1;
        end
        kk = kk - 1;
        L_th(ii,jj) = pde3D.p((kk*length(pde2D.p)+3),3) * D_h_r;
    end
end
save('parametri_PEC.mat')

```

A titolo di esempio si riporta un singolo script, quello relativo al criterio FG1a, che calcola le matrici delle funzioni obiettivo e le salva in un file .mat.

Dai parametri salvati vengono poi generati i grafici che vengono riportati nel capitolo relativo all'ottimizzazione.

```

%%%%%%%%%% Definizione del PEC FG1a %%%%%%%%%%%
% L_ad = m_ad = DT_i_ad = 1; Q_ad = ?
close all
clear
clc

%% Carico i parametri delle simulazioni
load('parametri_PEC.mat')

%% Determinazione delle relazioni dei PEC
Q_ad = zeros(length(beta), length(R_c));
M_z = Q_ad;
rapp_T_mo = Q_ad;
rapp_DT_o = Q_ad;
N_T = Q_ad;
N_p = Q_ad;
phi = zeros(length(beta),1);
alpha_r = phi;
for ii = 1:length(beta)
    alpha_r(ii) = 4*(St(ii,1)*L_th(ii,1)/D_h(ii,1));
    for jj = 1:length(R_c)

```

```

        Q_ad(ii,jj) = (1 - exp(-
alpha_r(ii)*((St(ii,jj)/St(ii,1))/D_h_ad(ii,jj)))/(1 - exp(-
4*(St(ii,1)*L_th(ii,1)/D_h(ii,1))));
        M_z(ii,jj) =
(Po(ii,jj)/Po(ii,1))^2/((D_h_ad(ii,jj)*S_ad(ii,jj))^2);
        rapp_T_mo(ii,jj) = (0.95 + Q_ad(ii,jj)*(1-0.95))^-1;
        rapp_DT_o(ii,jj) = exp(alpha_r(ii)*(1 -
((St(ii,jj)/St(ii,1))/D_h_ad(ii,jj))));
        N_T(ii,jj) = Q_ad(ii,jj)*rapp_T_mo(ii,jj)*rapp_DT_o(ii,jj);
        N_p(ii,jj) =
(Po(ii,jj)/Po(ii,1))/((D_h_ad(ii,jj)^2)*S_ad(ii,jj));
    end
%     phi(ii) = 2*Po(ii,1)*w_m(ii,1)*L_th(ii,1)*mu*(1-(1-gamma)*exp(-
alpha_r(ii)))*gamma/(rho*(D_h_r^2)*T_p*((1-gamma)^2)*exp(-
2*alpha_r(ii)));
    phi(ii) = 0.1;

end
N_S = N_T .*0;
for ii = 1:length(phi)
    N_S(ii,:) = (N_T(ii,:) + N_p(ii,:).*phi(ii))./(phi(ii)+1);
end
save('PEC_FG1a.mat', 'Q_ad', 'M_z', 'N_T', 'N_p', 'beta', 'R_c',
'N_S')

```

BIBLIOGRAFIA

- [1] A. J. C. L. B. G. H. M. U. N. S. K. B. Gale, “A Review of Current Methods in Microfluidic Device Fabrication and Future Commercialization Prospects,” *Inventions*, vol. 3, no. Issue 60, 2018.
- [2] K. C. S. D. E. C. Michael Ohadi, *Next Generation Microchannel Heat Exchangers*, Londra: Springer, 2013.
- [3] J. W. Z. L. R. P. L. Missaggia, «Microchannel heat sinks for two-dimensional high-power-density diode laser arrays,» *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, n. Issue 9, Page(s) 1988-1992, 1989.
- [4] C. S. A. B. C. Gillot, «Integrated micro heat sink for power multichip module,» St. Louis, MO, USA, 1998.
- [5] Y. X. G. W. Dong Qin, «Soft lithography for micro- and nanoscale patterning,» *Nature Protocols*, n. Issue 5, Page(s) 491-502, 2010.
- [6] B. B. A. W. G. N. H. Gong, «Custom 3D printer and resin for 18 μm \times 20 μm microfluidic flow channels,» *Lab on a chip*, n. Issue 17, Page(s) 2899-2909, 2017.
- [7] GN_News_Story, «IBM Developed A Fingernail-Sized Chip That Holds 30 Billion Transistors,» IBM, [Online]. Available: <https://gineersnow.com/industries/ibm-developed-fingernail-sized-chip-holds-30-billion-transistors>. [Consultato il giorno 1 Febbraio 2018].

- [8] D. L. S. Arulanandam, «Liquid transport in rectangular microchannels by electroosmotic pumping,» *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, vol. 161, n. Issue 1, Page(s) 89-102, 2000.
- [9] Kirby, *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in Microfluidic Devices*, New York: Cambridge University Press, 2010.
- [10] L. G. X. You, «Analysis of EDL effects on the flow and flow stability in microchannels,» *Journal of Hydrodynamics, Ser.B*, vol. 22, n. Issue 5, Page(s) 725-731, 2010.
- [11] X. W. Q. P. S. L. L. Li, «Advancement of electroosmotic pump in microflow analysis: A review,» *Analytica Chimica Acta*, vol. 1060, n. Page(s) 1-16, 2019.
- [12] A. L. R. Shah, *Laminar flow forced convection in duct*, New York: Academic Press, 1978.
- [13] N. K. R. Webb, *Principles of Enhanced Heat Transfer*, Taylor & Francis Group, 2005.
- [14] M. L. N. Suzzi, «Numerical Investigation of Thermally Developing and Fully Developed Electro-Osmotic Flow in Channels with Rounded Corners,» *MDPI*, vol. 22, 2021.
- [15] A. Bejan, «Method of entropy generation minimization, or modeling and optimization based on combined heat transfer and thermodynamics,» *Revue Générale de Thermique*, vol. 35, n. Issues 418–419, Page(s) 637-646, 1996.
- [16] Jiji, *Heat Convection*, Springer Berlin Heidelberg, 2010.

- [17] M. Lorenzini, «Electro-osmotic flow in rectangular microchannels: geometry optimization,» *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 923, n. 012002, 2017.
- [18] Andrini, *Valutazione delle prestazioni termo-idrauliche ed ottimizzazione di microcanali a spigoli smussati per flussi elettro-osmotici*, Forlì, 2016.
- [19] Baravelli, *Flussi elettrosmotici all'interno di microcanali*, Forlì, 2009.
- [20] Suzzi, *Valutazione delle prestazioni termo-idrauliche di*, Forlì, 2013.
- [21] R. Marchi, *Meccanica dei Fluidi: principi e applicazioni idrauliche*, Torino: UTET, 1981.
- [22] L. I. D. Bergman, *Foundamentals of Heat and Mass Transfer*, John Wiley & Sons, 2011.
- [23] G. D. C. K. Kandlikar, *Heat Transfer and Fluid Flow in Minichannels and Microchannels*, Elsevier Science, 2006.
- [24] V. Zimparov, «Extended performance evaluation criteria for enhanced heat transfer surfaces: heat transfer through ducts with constant wall temperature,» *International journal of heat and mass transfer*, Vol. %1 di %2Issue 43, Page(s) 3137-3155, 1999.

*grazie agli amici con cui ho condiviso questi anni universitari
grazie anche a quelli con cui non l'ho condiviso ma che hanno saputo regalarmi momenti di gioia nel mentre
grazie a chi si è svegliato presto per correre e a chi non ha dormito per stare al computer con me
grazie a tutta la mia famiglia che mi ha supportato in questo percorso
grazie all'artefice del teorema dell'ordine che ha contribuito a mantenere stabile la mia psiche
grazie in particolare al professor Marco Lorenzini*