

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**LE CURVE PIANE: DALLO  
STUDIO IN GEOMETRIA ALLA  
TRATTAZIONE SCOLASTICA.**

Tesi di Laurea in Analisi

**Relatore:**  
**Prof.**  
**PAOLO NEGRINI**

**Presentata da:**  
**DANIELA DAL SANTO**

Sessione I  
Anno Accademico 2010-2011

*L'universo è scritto in linguaggio matematico, e le lettere sono triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza le quali è umanamente impossibile comprendere una singola parola.*

*Galileo Galilei.*

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>III</b>
<b>1 Curve continue di <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>1</b>
1.1 Curve come 1-varietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$	1
1.2 Curve come funzioni continue	1
1.2.1 Lunghezza di una curva	8
<b>2 Curve classiche</b>	<b>11</b>
2.0.2 Costruzione e studio delle coniche	14
2.0.3 Esempi di luoghi geometrici	17
2.0.4 Equazione generale. Caso degenere	20
2.0.5 Le tre specie di coniche	23
2.0.6 Equazioni normali	26
2.0.7 Proprietà	31
<b>3 Le Curve a scuola</b>	<b>35</b>
3.1 Coniche	35
3.1.1 Equazione generale ed equazione normale	48
3.1.2 Coniche immaginarie o degeneri	50
3.1.3 Proprietà ottiche	51
3.2 Equazioni parametriche di una curva	53
3.2.1 Equazioni parametriche della retta	55
3.2.2 Equazioni parametriche della circonferenza	56
3.2.3 Equazioni parametriche dell'ellisse	57

---

3.2.4	Equazioni parametriche dell'iperbole . . . . .	57
3.2.5	Equazioni parametriche della parabola . . . . .	58
3.3	Curve in coordinate polari . . . . .	59
3.3.1	Circonferenza . . . . .	59
3.3.2	Coniche . . . . .	60
3.3.3	Spirale di Archimede . . . . .	61
3.3.4	Spirale iperbolica . . . . .	63
3.3.5	Spirale logaritmica . . . . .	65
3.3.6	Cardioide . . . . .	66
3.3.7	Cissoide di Diocle . . . . .	68
3.3.8	Lemniscata di Bernoulli . . . . .	70
3.4	Curve trigonometriche . . . . .	72
3.4.1	Grafici delle funzioni goniometriche o circolari . . . . .	73
3.5	Curve esponenziali . . . . .	77
3.6	Curve logaritmiche . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Curve particolari</b>	<b>83</b>
4.1	Curva di Peano . . . . .	83
4.1.1	Costruzione di Peano . . . . .	84
4.1.2	Costruzione di un'altra curva avente come immagine un quadrato . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>95</b>
	<b>Elenco delle figure</b>	<b>98</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>99</b>

# Introduzione

Uno dei concetti primitivi della nostra intuizione spaziale è quello di linea o curva piana. Già i geometri dell'antica Grecia consideravano curve piane particolari, ottenute come luoghi geometrici: ad esempio la circonferenza come luogo dei punti equidistanti dal centro.

La nozione stessa di curva ha subito un'evoluzione. Inizialmente, ad esempio nella scuola pitagorica (VI sec. a.C.), una curva era definita in modo empirico come aggregato di piccoli corpuscoli. Successivamente, con Platone ed Aristotele, tale definizione lasciò il posto ad altre, ad esempio a quella di luogo descritto da un punto che si muove in un piano.

Ancora nel XVIII secolo veniva chiamata curva "piana" qualsiasi linea che si potesse tracciare con un tratto di penna.

Tali definizioni sono prive di significato per la matematica di oggi; d'altra parte, alla definizione rigorosa si è giunti solo attraverso approssimazioni successive, di cui le precedenti sono esempi.

In matematica, una curva è un oggetto unidimensionale e continuo, come ad esempio la circonferenza e la retta. Una curva può giacere nello spazio euclideo, o in uno spazio topologico più generale. Può essere pensata intuitivamente come la traiettoria descritta da un oggetto (puntiforme) che si muove con continuità in qualche spazio; non dovrebbe sorprendere quindi il fatto che per "catturare" nel linguaggio matematico quest'idea si faccia ricorso alle nozioni di funzione continua e funzione differenziabile.

Per uno studio più generale occorrerebbe considerare curve definite in un piano euclideo, o in un piano affine o proiettivo sul campo  $K$ . La definizione

intuitiva di “luogo generato da un punto mobile” corrisponde a quella di curva definita nello spazio affine  $A^2(K)$  da equazioni parametriche, come luogo dei punti  $P(x, y)$  di coordinate

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t),$$

con  $x = \alpha(t)$  e  $y = \beta(t)$  opportune funzioni non entrambe costanti di un parametro  $t$  variabile in  $K$ , o in un suo sottoinsieme. Si pensi ad esempio alle equazioni parametriche di una retta.

Un'altro punto di vista è quello di definire una curva mediante un'equazione cartesiana. Il caso più importante è costituito dalle curve algebriche, che sono ottenute uguagliando a zero un polinomio e comprendono come casi particolari le rette. Il loro studio corrisponde a quello delle soluzioni di un'equazione polinomiale.

L'argomento trattato in questa tesi riguarderà lo studio geometrico delle curve piane.

Una prima parte sarà dedicata alle varie definizioni di curve: “curve” come varietà differenziabili di dimensione uno in  $\mathbb{R}^n$ , “curve” come funzioni continue di  $\mathbb{R}^n$  e in seguito “curve” come luoghi di punti caratterizzati da proprietà geometriche.

La seconda parte tratterà la presentazione delle curve da un punto di vista scolastico. Il mio lavoro è stato quello di analizzare alcuni testi delle scuole superiori allo scopo di evidenziare, laddove è stato possibile il tipo di approccio didattico utilizzato per presentare tali argomenti.

# Capitolo 1

## Curve continue di $\mathbb{R}^n$

È importante, ai fini della trattazione, fare una distinzione tra le definizioni di “curve” in matematica.

### 1.1 Curve come 1-varietà differenziabili di $\mathbb{R}^n$

**Definizione 1.1.** Sia  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , si dice che  $M$  è una **1-varietà** di  $\mathbb{R}^n$  di classe  $C^k$ , con  $k \geq 1$  se:

$$\forall a \in M \exists \Omega \text{ aperto di } \mathbb{R}^n \text{ tale che } a \in \Omega$$

e

$$\exists f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \text{ con } f \in C^k$$

vale che:

$$(i) M \cap \Omega = \{x \in \Omega \mid f(x) = 0\};$$

$$(ii) \text{rank}(\mathcal{J}_f(x)) = n - 1 \quad \forall x \in M \cap \Omega.$$

### 1.2 Curve come funzioni continue

**Definizione 1.2.** In topologia una **curva continua** è una funzione continua

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

con  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $X$  è un qualsiasi spazio topologico.

**Osservazione 1.**

Quando l'intervallo di partenza  $I$  è quello unitario  $[0, 1]$  si usa spesso uno dei termini equivalenti *cammino* o *arco* o *curva di Jordan*.

**Osservazione 2.**

Ricordiamo che una qualsiasi funzione  $f : A \longrightarrow B$  è una particolare *relazione*  $f \subseteq A \times B$  per cui vale che

$$\forall a \in A \exists ! b \in B \text{ tale che } (a, b) \in f.$$

**Definizione 1.3.** *Sia data una curva continua*

$$\gamma : I \longrightarrow X$$

*allora  $\gamma^* := \gamma(I)$  si chiama **traccia** o **supporto** della curva.*

Spesso con un piccolo abuso di linguaggio si indica con la parola “curva” il supporto e non la funzione. In sostanza la traccia di una curva è l'equivalente dell'immagine della funzione che la rappresenta.

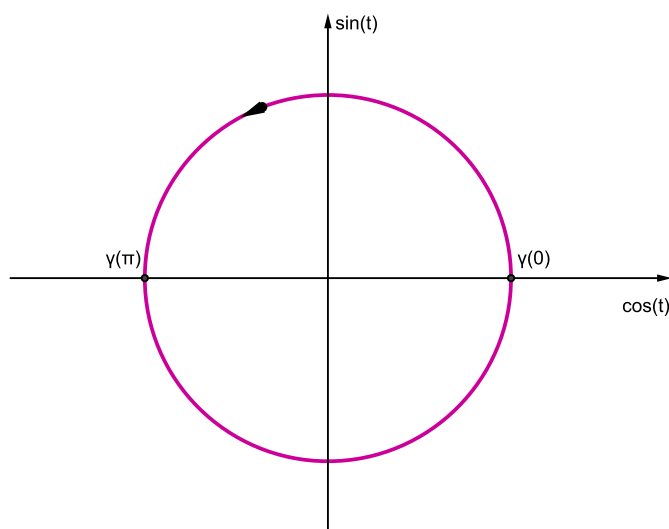
D'ora in avanti tratteremo curve il cui codominio è rappresentato dallo spazio euclideo  $\mathbb{R}^n$ .

**Esempio 1.1.** Ad esempio, la circonferenza è il supporto della curva continua (poichè le funzioni  $\cos$  e  $\sin$  sono continue)

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos t, \sin t) \end{aligned}$$

e la sua traccia è data dal seguente grafico:



Figura 1.1: Traccia della curva  $\gamma$ 

Poichè funzioni differenti possono avere la stessa traccia, privilegiando l'aspetto geometrico, daremo ora un'altra definizione di curva che identifica, mediante una relazione d'equivalenza, curve aventi la stessa traccia.

**Definizione 1.4.** Sia  $F$  l'insieme di tutte le funzioni continue da un compatto di  $\mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F = \{f \text{ continue} \mid f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n\}.$$

Siano  $\gamma, \Gamma \in F$

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Gamma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Si dice che  $\Gamma$  è **equivalente** a  $\gamma$ , cioè  $\gamma \sim \Gamma \iff \exists$  un omeomorfismo

$$\varphi : [c, d] \xrightarrow[1-1]{su} [a, b] \quad \text{tale che} \quad \gamma \circ \varphi = \Gamma.$$

**Osservazione 3.**

La relazione  $\sim$  è una relazione d'equivalenza che determina in  $F$  una partizione in classi d'equivalenza:

$$[\gamma] = \{\Gamma \in F \mid \Gamma \sim \gamma\}.$$

Ciascuna classe d'equivalenza  $[\gamma]$  si chiama *curva continua*.

**Definizione 1.5.** Se  $[\gamma]$  è una curva continua e  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  è una funzione appartenente alla classe  $[\gamma]$ , allora si dice che  $\gamma$  è una **rappresentazione parametrica** sull'intervallo base  $[a, b]$  della curva continua  $[\gamma]$ .

Quindi una stessa curva, intesa come classe d'equivalenza, può avere infinite parametrizzazioni.

**Definizione 1.6.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  una curva continua, allora se:

- $\gamma(a) \neq \gamma(b)$  la curva si dice **aperta**;
- $\gamma(a) = \gamma(b)$  la curva si dice **chiusa**.

I punti  $\gamma(a), \gamma(b)$  si dicono **estremi** della curva.

Sia  $\gamma$  una curva continua definita su un intervallo  $I$  reale e a valori in  $\mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)), \end{aligned}$$

cioè tale che le componenti  $\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)$  siano funzioni continue della variabile  $t$ .

Fissato in  $\mathbb{R}^n$  un riferimento cartesiano  $(O, x_1, \dots, x_n)$  e indicati con  $j_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  i versori degli assi coordinati,  $\gamma(t)$  è il luogo dei punti  $P(x_1, \dots, x_n)$  di  $\mathbb{R}^n$  tali che:

$$P = O + \gamma_1(t)j_1 + \gamma_2(t)j_2 + \dots + \gamma_n(t)j_n \quad t \in I \quad (1.1)$$

ovvero:

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t) \\ x_2 = \gamma_2(t) \\ \vdots \\ x_n = \gamma_n(t) \end{cases}$$

La 1.1 si dice *equazione vettoriale* di  $\gamma$  mentre la 1.2 si dice *equazione scalare* di  $\gamma$ .

Entrambe le equazioni rappresentano la *parametrizzazione* di  $\gamma$ .

**Osservazione 4.**

È importante ricordare che curve differenti possono avere la stessa traccia.

**Esempio 1.2.** Consideriamo le seguenti parametrizzazioni della circonferenza di centro l'origine e raggio unitario nel piano  $\mathbb{R}^2$ :

$$(a) \begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]; \quad (b) \begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, k\pi] \text{ con } k = 3, 4, \dots;$$

$$(c) \begin{cases} x_1 = \cos(2t) \\ x_2 = \sin(2t) \end{cases} \quad t \in [0, \pi]; \quad (d) \begin{cases} x_1 = \cos(t) \\ x_2 = -\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

È evidente da questo esempio che la rappresentazione parametrica fornisce molte più informazioni rispetto alla traccia  $\gamma^*$  che la curva individua. In particolare, se  $t$  rappresenta il tempo e  $\gamma(t)$  la legge oraria del moto di una particella o del baricentro di un corpo, allora la rappresentazione parametrica  $\gamma(t)$  fornisce informazioni su come viene percorsa la curva (quante volte, in che verso, con quale velocità...).

Nell'esempio precedente si nota che la (a) rappresenta l'equazione di una circonferenza percorsa in senso antiorario una sola volta; la (b) rappresenta l'equazione di una circonferenza percorsa in senso antiorario più volte al variare di  $k$ ; la (c), come la (a), rappresenta l'equazione di una circonferenza percorsa in senso antiorario una sola volta, quello che però cambia è la velocità di percorrenza che è due volte maggiore rispetto quella della (a); la (d) rappresenta l'equazione di una circonferenza percorsa in senso orario una sola volta.

**Definizione 1.7.** Data  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  una curva continua, se esistono  $m > 1$  punti distinti  $t_1, \dots, t_m \in (a, b)$  tali che

$$\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \dots = \gamma(t_m)$$

mentre  $\forall t \in (a, b)$  con  $t \neq t_k \forall k = 1, \dots, m$  vale che

$$\gamma(t) \neq \gamma(t_1)$$

allora si dice che  $\gamma(t_1)$  è un **punto m-plo** della curva.

Se una curva non ha punti m-plici si dice che è una **curva semplice**.

In sostanza, una parametrizzazione  $\gamma$  si dice *parametrizzazione semplice* se a valori distinti di  $t$  corrispondono punti distinti, esclusi al più gli estremi dell'intervallo  $I$  che possono avere per immagine lo stesso punto.

Una curva è detta *curva semplice* se esiste una sua parametrizzazione semplice.

Si osservi che una curva semplice può essere chiusa, ma non può autointersecarsi.

**Definizione 1.8.** Siano date due curve continue:

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \Gamma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

si dice che  $\Gamma$  è **positivamente-equivalente** a  $\gamma$ ,  $\gamma \stackrel{(+)}{\sim} \Gamma \iff \exists$  una funzione

$$\varphi : [c, d] \xrightarrow[1-1]{su} [a, b] \quad \text{continua e crescente tale che} \quad \gamma \circ \varphi = \Gamma.$$

Si dice che  $\Gamma$  è **negativamente-equivalente** a  $\gamma$ ,  $\gamma \stackrel{(-)}{\sim} \Gamma \iff \exists$  una funzione

$$\psi : [c, d] \xrightarrow[1-1]{su} [a, b] \quad \text{continua e decrescente tale che} \quad \gamma \circ \psi = \Gamma.$$

**Osservazione 5.**

La relazione  $\stackrel{(+)}{\sim}$  è una relazione d'equivalenza, per cui la classe d'equivalenza che genera

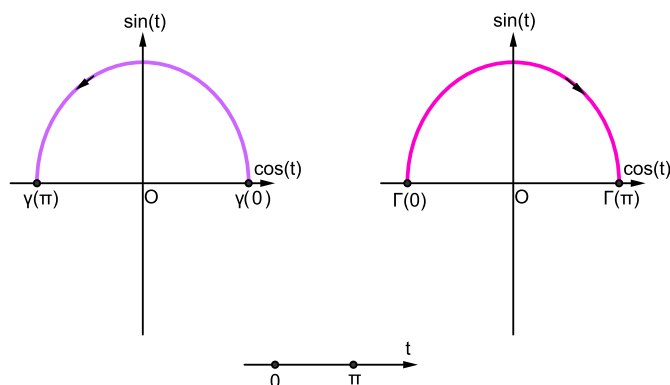
$$[\gamma]^+ = \{\Gamma \mid \gamma \stackrel{(+)}{\sim} \Gamma\}$$

rappresenta l'insieme delle curve aventi la stessa *orientazione* di  $\gamma$ .

Se al contrario  $\gamma \stackrel{(-)}{\sim} \Gamma$ , allora si dice che  $\Gamma$  ha *orientazione opposta* rispetto  $\gamma$ .

**Esempio 1.3.** Date le seguenti curve:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 & \Gamma : [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \rho(\cos t, \sin t) & t &\longmapsto (\rho \cos(\pi - t), \rho \sin(\pi - t)) \end{aligned}$$

Figura 1.2: Semicirconferenze  $\gamma$  e  $\Gamma$ 

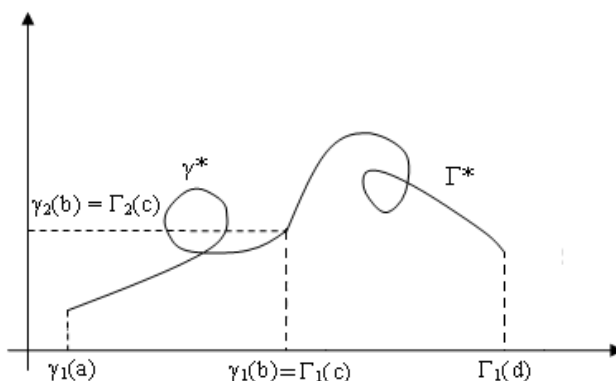
si ha che  $\Gamma = -\gamma$ , cioè sono orientate nel senso opposto.

Se  $\gamma$  è una curva con estremi  $P$  e  $Q$  distinti, è evidente che le sue parametrizzazioni si possono ripartire in due classi, una contenente quelle per le quali  $P$  è punto iniziale e  $Q$  è punto finale e l'altra contenente quelle per le quali  $Q$  è punto iniziale e  $P$  è punto finale. Se invece  $\gamma$  è una curva chiusa semplice, le sue parametrizzazioni semplici possono ripartirsi in due classi, a seconda che  $\gamma$  venga percorsa nel verso orario o antiorario, al crescere del parametro  $t$ . In entrambi i casi, ognuna di tali classi determina un verso di percorrenza (orientamento) di  $\gamma$ .

La curva si dice *orientata* se si è scelto su di essa un orientamento, il quale sarà detto orientamento positivo. Talvolta la curva orientata positivamente sarà indicata con  $+\gamma$ , mentre la curva avente orientamento opposto sarà indicata con  $-\gamma$ .

**Definizione 1.9.** *Siano date due curve continue orientate:*

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^n, & \Gamma : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) & t &\longmapsto (\Gamma_1(t), \dots, \Gamma_n(t)) \end{aligned}$$

Figura 1.3: Due curve in  $\mathbb{R}^2$ 

tali che  $\gamma(b) = \Gamma(c)$ , allora definiamo la **curva somma** come

$$\gamma + \Gamma : [a, b + (d - c)] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(\gamma + \Gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [a, b] \\ \Gamma(t - b + c) & \text{se } t \in [b, b + (d - c)] \end{cases}$$

Quindi  $(\gamma + \Gamma)^* = \gamma^* \cup \Gamma^*$ .

**Definizione 1.10.** Una curva  $[\gamma]$  di  $\mathbb{R}^n$  si chiama **regolare** se esiste una sua parametrizzazione

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

di classe  $C^1$  in  $[a, b]$  tale che

$$\gamma'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$$

La funzione  $\gamma$  si dice allora una **parametrizzazione regolare** di  $[\gamma]$ .

### 1.2.1 Lunghezza di una curva

In generale sappiamo che:

**Definizione 1.11.** Data  $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , con  $[a, b]$  un compatto di  $\mathbb{R}$ .

Per ogni scomposizione  $\sigma = \{t_1, \dots, t_n\}$  di  $[a, b]$  poniamo:

$$v(\varphi, \sigma) := \sum_{k=1}^n |\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|.$$

Si dice che  $\varphi$  è a **variazione limitata** su  $[a, b]$  se

$$\sup_{\sigma} v(\varphi, \sigma) < +\infty,$$

e in questo caso si pone

$$\bigvee_a^b(\varphi) = \sup_{\sigma} v(\varphi, \sigma)$$

e  $\bigvee_a^b(\varphi)$  si chiama **variazione totale** di  $\varphi$  su  $[a, b]$ .

**Teorema 1.2.1.** Se  $\varphi \in C'([a, b], \mathbb{R}^n)$  allora  $\varphi$  è a variazione limitata su  $[a, b]$  e la sua variazione limitata è

$$\bigvee_a^b(\varphi) = \int_a^b \|\varphi'(t)\| dt.$$

**Definizione 1.12.** Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  si dice **rettificabile** se è a variazione limitata su  $[a, b]$ .

In questo caso si pone:

$$l(\gamma) := \sup_{\sigma} v(\gamma, \sigma) = \bigvee_a^b(\gamma),$$

con  $l(\gamma)$  la lunghezza della curva.

### Osservazione 6.

Se la curva  $\gamma$  è regolare allora si ha che

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

**Esempio 1.4.** Lunghezza della circonferenza unitaria  $\mathcal{C}$  in  $\mathbb{R}^2$  di centro un punto  $C(x_0, y_0)$ .

Data la rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = x_0 + \cos(t) \\ y = y_0 + \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi];$$

si osserva che è regolare infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{C} : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

è una parametrizzazione di classe  $C^1$  con

$$\mathcal{C}'(t) = (-\sin(t), \cos(t)) \neq (0, 0) \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

Quindi la sua lunghezza è data da:

$$l(\mathcal{C}) = \int_0^{2\pi} \|\mathcal{C}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin(t))^2 + (\cos(t))^2} dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi$$

**Esempio 1.5.** Lunghezza del ramo di parabola  $\mathcal{P}$  in  $\mathbb{R}^2$  di estremi i punti  $O(0, 0)$  e  $A(1, 1)$ .

Assegnata la sua rappresentazione parametrica:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases} \quad \text{con } t \in [0, 1];$$

poichè è una rappresentazione parametrica regolare, allora la lunghezza di  $\mathcal{P}$  sarà pari a:

$$l(\mathcal{P}) = \int_0^1 \|\mathcal{P}'(t)\| dt = \int_0^1 \sqrt{1 + (2t)^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 + 4t^2} dt = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{4} \log(2 + \sqrt{5})$$



## Capitolo 2

### Curve classiche

[1] Con il termine “curve classiche” intenderemo le *coniche*.

Queste curve sono luoghi di punti caratterizzati da una proprietà geometrica che prescinde dalla loro rappresentazione cartesiana o parametrica che abbiamo visto nel paragrafo precedente.

Le coniche furono dapprima considerate come sezioni piane di un cono rotondo. Inizialmente, sembra che tali sezioni, si facessero esclusivamente con piani normali ad una generatrice del cono; si ottenevano così *ellissi*, *iperboli*, *parabole*, a seconda che il cono sezionato fosse rispettivamente acutangolo, rettangolo, ottusangolo.

Menechmo (circa 350 a.C.) discepolo di Eudosso, è considerato l’inventore di queste curve, che da lui furono introdotte per la soluzione del *problema di Delo* cioè della *duplicazione del cubo*.

Pappo Alessandrino nell’introduzione al VII libro delle sue *Collezioni* ci dà notizia di otto libri di Euclide sulle coniche e di altri cinque di Aristeo (370 a.C.) sui *Luoghi Solidi*, libri che oggi sono andati perduti; anche Archimede (287-212 a.C.) tratta le coniche nella sua opera sui *Conoidi* e sugli *Sferoidi*. Questi autori, che sono anteriori ad Apollonio, distinguevano le tre specie di coniche con i nomi *Sezioni del cono acuto*, *Sezioni del cono ottuso*, *Sezioni del cono retto*.

Ma presto si conobbero proprietà locali caratteristiche di queste curve, con-

siderate come curve piane.

La determinazione di tali proprietà si otteneva con mezzi estremamente semplici. Ne daremo ora dei cenni.

Si consideri un cono retto rettangolo attraversato da un piano passante per il punto  $E$ : l'intersezione di questo piano con il cono genera una parabola. Consideriamo con  $ABC$  la sezione del cono ottenuta mediante il piano passante per l'asse  $AF$  e per la generatrice  $AB$ . Si osserva che questo piano è normale a quello che genera la sezione conica  $MEN$ .

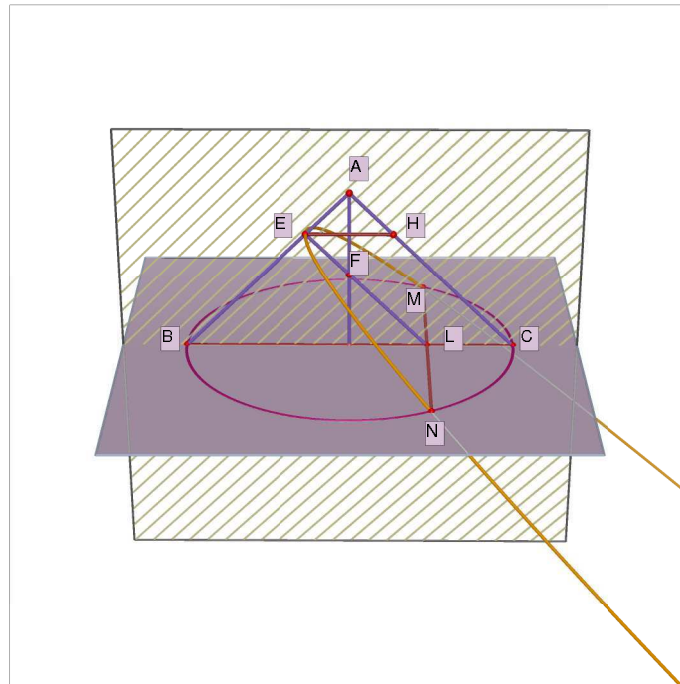


Figura 2.1: Sezione di un cono rettangolo

Se si considera la base circolare del cono si osserva che i triangoli  $BMC$  e  $MLC$  sono simili, quindi per la proporzione

$$\overline{MC} : \overline{LC} = \overline{BC} : \overline{MC}$$

si ottiene

$$\overline{MC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{LC}.$$

Ora applicando il teorema di Pitagora al triangolo  $LMC$  si ha che

$$\overline{LM}^2 = \underbrace{\overline{MC}^2}_{\overline{BC} \cdot \overline{LC}} - \overline{LC}^2 = \overline{LC} \underbrace{(\overline{BC} - \overline{LC})}_{\overline{BL}} = \overline{LC} \cdot \overline{BL}. \quad (2.1)$$

Poichè il triangolo  $BEL$  è rettangolo ed isoscele, si ha che

$$\overline{BL} = \sqrt{2} \cdot \overline{EL}$$

e

$$\overline{LC} = \overline{EH} = \sqrt{2} \cdot \overline{EF}$$

quindi

$$\overline{LM}^2 = 2\overline{EF} \cdot \overline{EL}. \quad (2.2)$$

Se indichiamo con  $y$  la lunghezza dell'ordinata  $\overline{LM}$ , con  $x$   $\overline{EL}$  e con  $p$  il segmento  $\overline{EF}$ , si ottiene l'equazione della parabola

$$y^2 = 2px. \quad (2.3)$$

Per i coni acutangoli (a sezione ellittica) e ottusangoli (a sezione iperbolica), la ricerca dell'equazione locale è fondata sul seguente Lemma:

**Lemma 2.0.2.** *Se da un punto  $L$  qualsiasi del piano dell'angolo  $BAC$ , escono due rette  $BLC$  e  $ELD$ , parallele a due rette fisse, il rapporto*

$$\overline{BL} \cdot \overline{LC} : \overline{EL} \cdot \overline{LD}$$

*dei prodotti dei segmenti intercetti fra il punto  $L$  e i lati dell'angolo è costante.*

Indicando con  $2a$  il segmento  $\overline{ED}$  (asse trasverso della sezione conica) e con  $p$  la porzione  $\overline{EF}$  fino all'asse del cono, si osserva che il valore costante del rapporto è  $\pm \frac{p}{a}$ , quindi vale

$$\frac{\overline{BL} \cdot \overline{LC}}{\overline{EL} \cdot \overline{LD}} = \pm \frac{p}{a}$$

che per la 2.1 diviene

$$\frac{\overline{LM}^2}{\overline{EL} \cdot \overline{LD}} = \pm \frac{p}{a}$$

cioè

$$y^2 = \pm \frac{p}{a} x(2a - x) \quad (2.4)$$

dove il segno positivo vale nel caso ellittico e quello negativo nel caso iperbolico.

Le proposizioni dimostrate ci dicono che le *sezioni coniche* sono *curve del secondo ordine*. La proposizione reciproca: *qualunque curva del secondo ordine è una sezione conica* risulta immediatamente. Ed infatti, un'equazione del 2° grado nelle variabili  $x, y$  può sempre, con opportune trasformazioni lineari, ridursi alla forma:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

e dal confronto con la

$$y^2 = \pm 2px \mp \frac{p}{a}x^2,$$

si determinano immediatamente i valori del parametro  $p$  e dell'asse trasverso  $a$ :

$$p = \mp \frac{a_{13}}{a_{22}}, \quad a = -\frac{a_{13}}{a_{11}}.$$

## 2.0.2 Costruzione e studio delle coniche

È interessante vedere come gli antichi costruivano per punti la conica, data mediante la sua equazione:

$$y^2 = \pm 2px \mp \frac{p}{2a}x^2$$

*Sia  $AB$  il diametro trasverso (per semplicità supporremo che sia l'asse trasverso), in uno degli estremi di esso si innalzi la perpendicolare  $AC$ , si porti su questa un segmento  $AC$  eguale al doppio del parametro e si congiunga  $CB$ . Se da un punto qualunque  $L$  del diametro si conduce una retta  $LP$  ordinatamente applicata al diametro, si avrà su questa un punto  $M$  della conica*

prendendo  $LM$  in modo che

$$\overline{LM}^2 = \overline{AL} \cdot \overline{LP}. \quad (2.5)$$

Questa equazione deriva dalla 2.2.

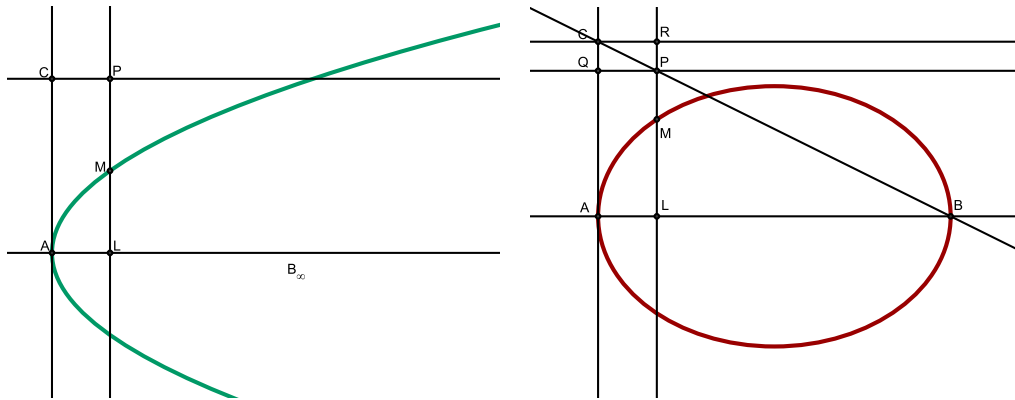


Figura 2.2: Parabola e Ellisse

Si vede infatti che nel caso parabolico  $\overline{LP} = \overline{AC} = 2p$ , da cui indicando  $\overline{AL}$  con  $x$ ,

$$y^2 = 2px.$$

E per le coniche a centro, si ha similmente:

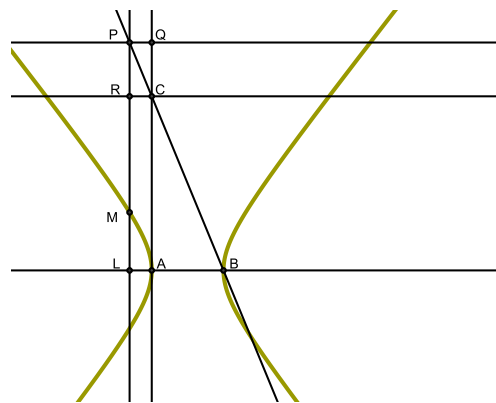


Figura 2.3: Iperbole

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{LB}}{\overline{AB}}, \quad \overline{LP} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \overline{LB} = \frac{p}{a} \cdot \overline{LB},$$

cioè

$$\overline{LP} = \frac{p}{a}(2a \mp x)$$

e la 2.5 diventa

$$y^2 = \pm \frac{p}{a}x(2a - x).$$

Non occorre notare che assumendo come origine delle ascisse il centro O della conica, si ha

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{ap} = 1;$$

e che basta porre  $p = \frac{b^2}{a}$  per avere l'equazione delle coniche a centro.

Non deve meravigliare il fatto che anche gli antichi, dalle costruzioni appena indicate, ricavavano tutte le proprietà delle sezioni coniche, con trasformazioni perfettamente analoghe a quelle che noi ora operiamo sulle loro equazioni. È opportuno a questo proposito osservare che l'operazione che si fa per trovare l'ascissa  $x = \overline{AL}$ , corrispondente ad una data ordinata  $y = \overline{LM}$ , nel caso

- *parabolico*, consiste nell'applicazione sul lato retto  $AC$  di un rettangolo di area  $y^2$ ;
- *ellittico* o *iperbolico*, consiste nel dividere il lato retto  $\overline{AC}$  in due parti  $\overline{AQ}$  e  $\overline{QC}$ , si possono costruire due rettangoli di uguale altezza, nel primo caso  $ALPQ$  (equivalente al quadrato dato  $y^2$ ), nel secondo caso  $QPRC$  (simile al rettangolo contenuto dal lato retto e dal lato trasverso).

Tali operazioni, che Euclide insegna nelle prop. XXVIII e XXIX del libro VI, e che, nell'algebra geometrica, corrispondono alle formule di risoluzione delle equazioni di 2° grado, erano notissime agli antichi, che le usavano correntemente e le indicavano con i seguenti nomi: *applicazione in difetto* o *in ellisse*, *applicazione in eccesso* o *in iperbole*. Da qui derivano le denominazioni di

*parabola, ellisse, iperbole* date da Apollonio ai tre generi di coniche.

Nomi dunque provenienti da proprietà analitiche delle equazioni ad esse pertinenti.

In possesso di queste equazioni, gli antichi videro, anche prima di Apollonio che non era necessario sezionare il cono con piani normali ad una generatrice, e che da un qualunque cono era possibile ottenere una sezione conica di genere qualunque.

Apollonio ha inoltre osservato che occorre considerare entrambi i rami dell'iperbole, corrispondenti alle due falde del cono, come costituenti un'unica curva che egli chiamava *opposte sezioni*.

### 2.0.3 Esempi di luoghi geometrici

Fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali nel piano, ed indicate con  $x, y$  le coordinate di un punto  $P(x, y)$  nel piano, supponiamo data una relazione analitica tra  $x$  ed  $y$ , espressa da un'equazione

$$f(x, y) = 0,$$

dove  $f$  è simbolo di una funzione continua nelle variabili  $x$  ed  $y$ .

Il luogo dei punti del piano le cui coordinate soddisfano una tale equazione, è, in generale una *curva* (grafico della funzione, o dell'equazione  $f(x, y) = 0$ ).

**1) Equazione del cerchio**, *luogo dei punti del piano che da un punto  $C(\alpha, \beta)$  hanno distanza data  $r$ .*

Indicando con  $P(x, y)$  un punto del luogo e ricordando la formula riguardante la distanza tra due punti ( $d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$ ), avremo in coordinate ortogonali

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2.$$

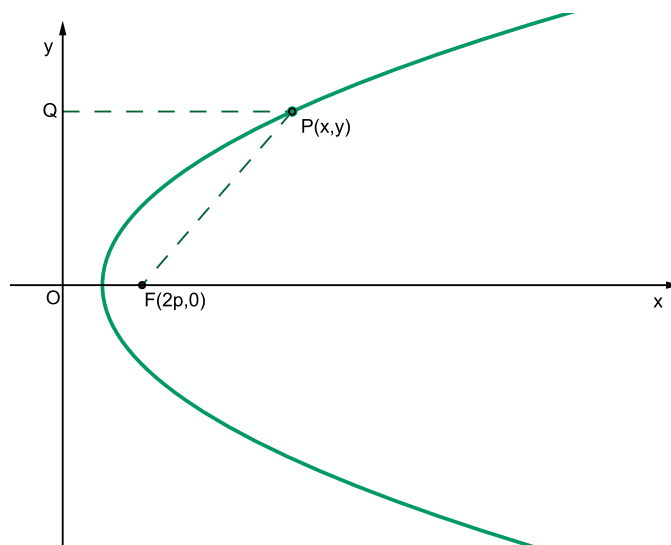
Questa è l'equazione del cerchio di centro  $C(\alpha, \beta)$  e raggio  $r$ .

Se il centro è nell'origine, cioè se  $\alpha = 0 = \beta$ , si ha più semplicemente

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

**2) Equazione della parabola**, luogo dei punti del piano ugualmente distanti da un punto dato (fuoco) e da una retta data (direttrice).

Assumiamo che la retta data sia l'asse  $y$ , facciamo passare l'asse delle  $x$  per il punto dato  $F$ , ed indichiamo con  $2p$  l'ascissa di questo punto, quindi  $F(2p, 0)$ .



La distanza  $\overline{QP}$  di un punto  $P(x, y)$  dalla retta assegnata, sarà data dalla ascissa  $x$  di un tale punto, e, per le condizioni del luogo si dovrà avere:

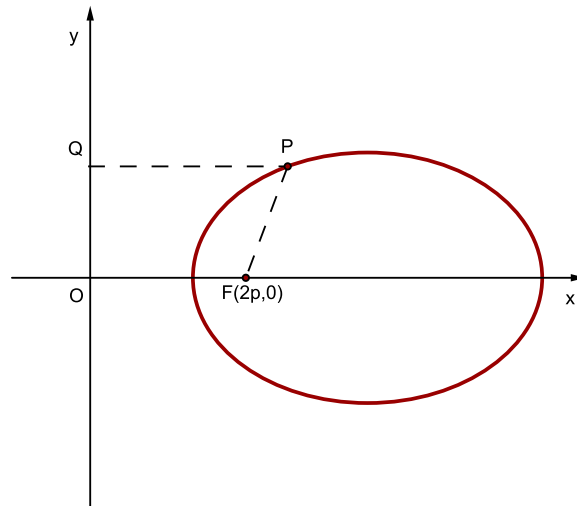
$$\overline{QP} = \overline{FP}$$

cioè

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{(x - 2p)^2 + y^2} \\ x^2 &= x^2 - 4px + 4p^2 + y^2 \\ y^2 &= 4p(x - p). \end{aligned}$$



**3) Equazione dell'ellisse**, luogo dei punti del piano aventi, da una data retta, distanza doppia rispetto quella che hanno da un punto dato  $F(2p, 0)$  (fuoco).

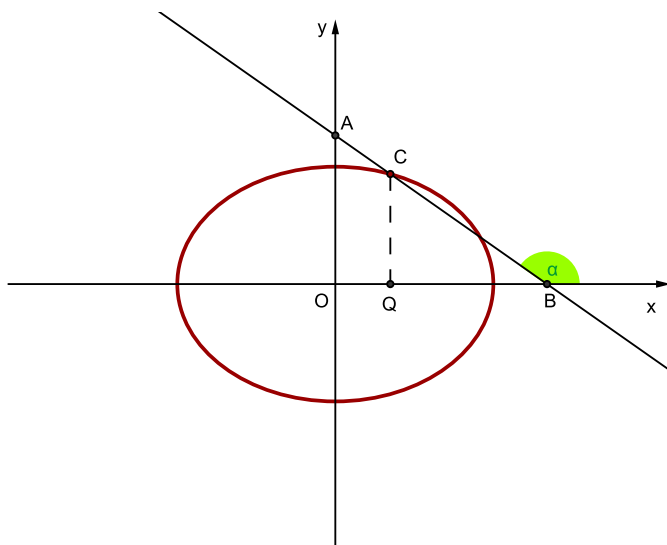


In maniera analoga al caso precedente si avrà

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= 2\overline{PF} \\ x &= 2\sqrt{(x-2p)^2 + y^2} \\ x^2 &= 4x^2 - 16px + 16p^2 + 4y^2 \\ 3x^2 + 4y^2 - 16px + 16p^2 &= 0. \end{aligned}$$

Una maniera differente per esprimere l'ellisse è come *luogo geometrico di un punto C compreso tra due punti A e B tali che:*

- $\overline{AC} = a, \overline{CB} = b$
- $\overline{AB} = a + b$
- *il segmento AB si muove in modo che i suoi estremi rimangano sempre sugli assi coordinati.*



Indicando con  $\alpha$  l'angolo formato dalla retta passante per i punti  $A$  e  $B$  con l'asse delle  $x$ , si avrà

$$\begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{AC} \cos \alpha = a \cos \alpha \\ y &= \overline{QC} = \overline{BC} \sin \alpha = -b \sin \alpha. \end{aligned}$$

Da cui

$$\frac{x}{a} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{b} = -\sin \alpha;$$

quadrando e sommando si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

### 2.0.4 Equazione generale. Caso degenere

Si dice **conica** il luogo dei punti del piano le cui coordinate  $x$ ,  $y$ , rispetto ad un sistema di assi cartesiani, soddisfano un'equazione di secondo grado nelle variabili  $x$  ed  $y$ .

Scriveremo l'equazione generale delle coniche sotto la forma

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad (2.6)$$

e supporremo di poter scambiare tra loro gli indici di ciascun coefficiente senza che cambi il suo valore: ammetteremo cioè che sia

$$a_{mn} = a_{nm} \quad n, m = 1, 2. \quad (2.7)$$

Riferendoci ad un sistema di coordinate cartesiane omogenee  $x_1, x_2, x_3$  definite dalle

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

l'equazione generale della conica assumerà la forma omogenea

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0. \quad (2.8)$$

Basterà poi fare  $x_3 = 1, x_1 = x, x_2 = y$  per passare da questa alla forma non omogenea 2.6. Il primo membro della 2.8 è una *forma quadratica* nelle 3 variabili  $x_1, x_2, x_3$ .

Nell'equazione generale della conica compaiono 6 parametri (i coefficienti) dei quali solo 5 sono essenziali, perchè il primo membro di tale equazione può sempre supporre diviso per uno dei coefficienti non nullo; la conica è perciò determinata da 5 condizioni fra loro indipendenti, in particolare dalle condizioni di appartenenza di 5 punti dati  $P'(x'_1, x'_2, x'_3), \dots, P^V(x_1^V, x_2^V, x_3^V)$  del piano.

Scrivendo l'equazione della conica e le identità che risultano dal fatto che tale equazione deve essere soddisfatta dalle coordinate di tali punti, si hanno, tra le quantità incognite  $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}$ , le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ a_{11}x_1'^2 + a_{22}x_2'^2 + a_{33}x_3'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + 2a_{13}x_1'x_3' + 2a_{23}x_2'x_3' = 0 \\ \vdots \\ a_{11}x_1^{V2} + a_{22}x_2^{V2} + a_{33}x_3^{V2} + 2a_{12}x_1^Vx_2^V + 2a_{13}x_1^Vx_3^V + 2a_{23}x_2^Vx_3^V = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

per la coesistenza delle quali è condizione necessaria e sufficiente:

$$\det \begin{pmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_2x_3 \\ x_1'^2 & x_2'^2 & x_3'^2 & x_1'x_2' & x_1'x_3' & x_2'x_3' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{V2} & x_2^{V2} & x_3^{V2} & x_1^Vx_2^V & x_1^Vx_3^V & x_2^Vx_3^V \end{pmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Questa rappresenta *l'equazione della conica per i cinque punti assegnati*.

In generale, per 5 punti del piano, passa *una ed una sola* conica: un'eccezione

si presenta quando una delle cinque equazioni di 2.9 è conseguenza delle altre quattro, ossia quando tutte le coniche che passano per quattro dei dati punti, passano anche per il quinto.

Si osserva che un caso del genere si verifica solo quando *quattro dei dati punti sono allineati*. Ed infatti, se almeno tre dei punti non sono allineati allora almeno la conica (degenere) costituita dalle rette  $P'P'''$ ,  $P''P^{IV}$ , non può passare per  $P^V$  (perchè altrimenti  $P^V$  sarebbe allineato con due degli altri punti).

Se tre soltanto dei punti sono allineati, per esempio  $P', P'', P'''$ , la conica per i cinque punti si spezza nella coppia di rette  $P'P''P'''$ ,  $P^{IV}P^V$  ed è determinata univocamente.

Se poi sono allineati quattro punti, ad esempio  $P', P'', P''', P^{IV}$  allora esistono infinite coniche degeneri per i cinque punti, e cioè le coppie di rette costituite dalla retta passante per i primi quattro punti allineati e da una qualsiasi retta del piano passante per il punto  $P^V$ .

Infine se tutti e cinque i punti sono allineati, si ha una doppia infinità di coniche per quei punti, costituita da tutte le coppie di rette che si ottengono associando la retta passante per i cinque punti ad una retta qualsiasi del piano.

Concludiamo da questo esame che: *per cinque punti, quattro dei quali non allineati, passa una ed una sola conica, la cui equazione è data da 2.10.*

**Definizione 2.1.** *Si dicono **razionali** (o unicursali, o di genere zero) le curve caratterizzate dalla proprietà che le coordinate  $x, y$  dei punti  $P(x, y)$  appartenenti ad essa, si possono esprimere come funzioni razionali di un parametro.*

Dimostriamo che le coniche sono curve razionali.

**Dimostrazione.** Supponiamo che la conica sia riferita ad un sistema di assi cartesiani aventi l'origine in un punto di essa. L'equazione (in forma non omogenea) della conica sarà:

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y = 0.$$

Se consideriamo il fascio di rette con centro l'origine

$$y = mx,$$

vediamo che ad ogni valore del parametro  $m$ , corrisponde un punto della conica  $P(x, mx)$ , ulteriore intersezione della retta  $y = mx$  con la curva, e che ad ogni punto  $P$  della curva corrisponde un valore  $m$ , coefficiente angolare del raggio  $OP$  che proietta il punto  $P$  dall'origine.

Dunque i punti della curva corrispondono biunivocamente ai valori di  $m$  e le coordinate  $x, y$  di tali punti si possono esprimere razionalmente per  $m$ .

Per realizzare tale rappresentazione basta sostituire nell'equazione della conica l'espressione di  $y$ ,

$$y = mx.$$

Si ottiene così:

$$a_{11}x^2 + a_{22}m^2x^2 + 2a_{12}mx^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}mx = 0$$

che, trascurando la radice  $x = 0$ , corrispondente all'origine, ha per soluzione

$$x = -\frac{2(a_{13} + a_{23}m)}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2} \Rightarrow y = -\frac{2m(a_{13} + a_{23}m)}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2}.$$

Quindi le formule

$$\begin{cases} x = -\frac{2(a_{13} + a_{23}m)}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2} \\ y = -\frac{2m(a_{13} + a_{23}m)}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2} \end{cases}$$

danno, sotto forma parametrica, le equazioni di una conica riferita ad un sistema di assi cartesiani la cui origine appartiene alla conica.

Per scrivere l'equazione parametrica di una conica non passante per l'origine degli assi, basterà supporre eseguita una traslazione di assi che trasporti l'origine in un punto  $P_o(\alpha, \beta)$  appartenente alla curva.

### 2.0.5 Le tre specie di coniche

Una conica  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$  può essere intersecata dalla retta impropria  $x_3 = 0$  in tre modi distinti:

- in due punti immaginari (coniugati)  $\Rightarrow$  **ellisse**;
- in due punti reali distinti  $\Rightarrow$  **iperbole**;
- in due punti reali coincidenti  $\Rightarrow$  **parabola**.

Analizziamo ora, come dall'esame dei coefficienti dell'equazione della conica, si possa desumere la specie cui essa appartiene.

Mettendo a sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

si ottiene:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \quad (2.11)$$

l'equazione che determina le due prime coordinate  $x_1, x_2$  dei punti impropri della curva, cioè dei punti dove la retta impropria interseca la curva. E trattandosi di coordinate omogenee, ci basterà determinare i valori del rapporto  $m = \frac{x_2}{x_1}$  che soddisfano la 2.11, cioè che sono radici dell'equazione di secondo grado

$$a_{22}m^2 + 2a_{12}m + a_{11} = 0. \quad (2.12)$$

Ora in base alla tipologia di radici di questa equazione, si otterrà che la conica apparterrà alla specie *iperbole*, o *parabola*, o *ellisse*.

Il criterio per questa distinzione si ricava dall'esame del discriminante  $4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22}$  dell'equazione 2.12

$$\text{se } 4a_{12}^2 - 4a_{11}a_{22} \begin{cases} > 0 & \text{allora si ha un'iperbole;} \\ = 0 & \text{allora si ha una parabola;} \\ < 0 & \text{allora si ha un'ellisse.} \end{cases}$$

Osservando che nel discriminante della forma quadratica

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

il complemento algebrico di  $a_{33}$  è

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2,$$

possiamo enunciare la regola precedente nel modo seguente

$$\text{se } A_{33} \begin{cases} < 0 & \text{allora si ha un'iperbole;} \\ = 0 & \text{allora si ha una parabola;} \\ > 0 & \text{allora si ha un'ellisse.} \end{cases}$$

Se è  $A = 0$ , la conica degenera in una coppia di rette. Se queste sono reali, distinte ed incidenti, determinano sulla retta impropria due punti reali e distinti; se sono parallele determinano un solo punto reale, se sono immaginarie coniugate determinano due punti immaginari coniugati.

Quindi

$$\text{se } A = 0 \begin{cases} \text{l'iperbole degenera in una coppia di rette reali, distinte ed incidenti;} \\ \text{la parabola degenera in una coppia di rette reali parallele;} \\ \text{l'ellisse degenera in una coppia di rette immaginarie coniugate.} \end{cases}$$

Se l'equazione della conica è data in forma non omogenea

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

l'equazione 2.12 si ottiene semplicemente uguagliando a zero la somma dei termini di secondo grado

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

e prendendo come quantità incognita il quoziente  $m = \frac{y}{x}$ . Le radici di questa equazione ci danno i coefficienti angolari delle direzioni corrispondenti ai punti impropri della curva.

## 2.0.6 Equazioni normali

Scegliendo in modo opportuno gli assi cartesiani cui una conica si suppone riferita, si può fare in modo che l'equazione di questa conica assuma una forma più semplice.

### Coniche a centro

Rendiamo uguali a zero i coefficienti dei termini di primo grado nell'equazione di una conica a centro mediante una *traslazione* degli assi che porti l'origine nel centro della conica.

Sapendo che le coordinate del centro sono:

$$\alpha = \frac{A_{13}}{A_{33}} = \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}, \quad \beta = \frac{A_{23}}{A_{33}} = \frac{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

se supponiamo eseguita la traslazione che porta l'origine degli assi  $O(0,0)$  nel punto  $(\alpha, \beta)$ , allora l'equazione della conica, nel nuovo sistema, avrà coefficienti tali che per essi risulti  $\alpha = 0 = \beta$ , cioè saranno:

$$\begin{cases} a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0 \\ a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13} = 0. \end{cases} \quad (2.13)$$

Ma poichè si tratta di una conica a centro dovrà essere  $A_{33} \neq 0$  quindi  $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$  ed il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0 \end{cases}$$

non può essere risolto se non da valori entrambi nulli di  $x_1$  e  $x_2$ .

Le 2.13 ci dicono che tale sistema ha soluzioni per  $x_1 = a_{23}$  e  $x_2 = a_{13}$ .

Quindi sarà

$$a_{13} = a_{23} = 0,$$



cioè saranno nulli i coefficienti dei termini di primo grado nella  $F(x, y) = 0$ .  
Eseguendo effettivamente la traslazione

$$\begin{cases} x = X + \frac{A_{13}}{A_{33}} \\ y = Y + \frac{A_{23}}{A_{33}}, \end{cases}$$

si ritrova l'equazione della conica sotto la forma

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + F\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right) = 0;$$

cioè i termini di secondo grado rimangono invariati ed il termine noto risulta uguale al valore che assume il primo membro dell'equazione primitiva calcolata nel centro.

Risulterà che

$$F\left(\frac{A_{13}}{A_{33}}, \frac{A_{23}}{A_{33}}\right) = \frac{A}{A_{33}},$$

quindi l'equazione della conica diventerà

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + \frac{A}{A_{33}} = 0.$$

Ora poichè

$$\begin{aligned} A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12} \overbrace{a_{23}}^0 a_{31} + \overbrace{a_{13}}^0 a_{21}a_{32} - \overbrace{a_{13}}^0 a_{22}a_{31} - a_{11} \overbrace{a_{23}}^0 a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) \\ A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \end{aligned}$$

allora si otterrà

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + a_{33} = 0.$$

Se oltre ad una traslazione degli assi si compie anche una *rotazione*, in modo da far coincidere i diametri coniugati con gli assi cartesiani, allora l'equazione della conica riferita al nuovo sistema mancherà del termine in  $xy$ .

Partiamo da

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + a_{33} = 0$$

e supponiamo che l'asse  $y$  sia sul diametro coniugato alla direzione dell'asse  $x$ , allora l'equazione di tale diametro sarà

$$a_{11}x + a_{12}y = 0, \quad (2.14)$$

e dovrà ridursi a quella dell'asse  $y$  di equazione  $x = 0$ , quindi il coefficiente della  $y$  di 2.14 dovrà essere nullo, cioè

$$a_{12} = 0.$$

Quindi una conica a centro, riferita ad un sistema di diametri coniugati (come assi cartesiani) assume la forma trinomia:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0 \quad (2.15)$$

detta anche **equazione normale** o **canonica** per le *coniche a centro*.

### Parabola

Per il caso *parabolico* è opportuna una trasformazione che permetta di assumere come origine degli assi cartesiani un punto della conica, come asse delle  $x$  il diametro della conica passante per tale punto, come asse delle  $y$  la tangente alla conica per lo stesso punto.

Poichè la conica passa per la nuova origine degli assi, mancherà il termine noto, quindi

$$a_{33} = 0.$$

L'equazione della retta tangente alla conica nell'origine è

$$a_{13}x + a_{23}y + \overbrace{a_{33}}^0 = a_{13}x + a_{23}y = 0.$$

Questa deve ridursi all'equazione dell'asse  $y$  che è  $x = 0$ , perciò deve essere che anche il coefficiente della  $y$  è zero

$$a_{23} = 0.$$

E l'equazione del diametro coniugato alla direzione dell'asse  $y$ , che in generale è

$$\begin{aligned} a_{12}x + a_{22}y + \overbrace{a_{23}}^0 &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y &= 0, \end{aligned}$$

deve ridursi a quella dell'asse  $x$  di equazione  $y = 0$ , quindi deve essere soddisfatta la condizione

$$a_{12} = 0$$

Ora l'equazione generale di tale conica si trasforma nella forma trinomia

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \quad (2.16)$$

Supponendo  $a_{22} \neq 0$ , scriveremo la 2.16 sotto la forma:

$$y^2 = 2px + kx^2 \quad \text{con } k = -\frac{a_{11}}{a_{22}} \quad (2.17)$$

e per questa equazione  $A_{33} = a_{11}a_{22}$ .

Da un'analisi precedente sappiamo che:

$$\begin{cases} \text{se } A_{33} < 0 & \text{si ha un'iperbole,} \\ \text{se } A_{33} > 0 & \text{si ha un'ellisse,} \\ \text{se } A_{33} = 0 & \text{si ha una parabola.} \end{cases}$$

Così nel caso parabolico la 2.17 assume la forma binomia

$$y^2 = 2px$$

detta anche **equazione normale** o **canonica** per le *parabole*.

Vedremo ora che, poichè per passare dall'equazione generale a quella normale mediante queste trasformazioni di coordinate può essere complicato calcolare i nuovi coefficienti, utilizzando delle *proprietà invariantive* il calcolo diventa più semplice.

Ricordiamo che si dicono **invarianti ortogonali** della conica, quelle funzioni

dei coefficienti che conservano il medesimo valore per qualsiasi trasformazione di assi ortogonali; essi sono:

$$I = a_{11} + a_{22}, \quad A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2, \quad A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Se consideriamo

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \rightsquigarrow \begin{cases} a'_{11}X^2 + a'_{22}Y^2 + a'_{33} = 0 \\ a'_{22}Y^2 + 2a'_{13}X = 0 \end{cases}$$

dove la prima rappresenta l'equazione normale delle coniche a centro e la seconda quella delle parabole, calcoliamo gli invarianti ortogonali

- per la *conica a centro*:

$$\begin{aligned} \diamond I &= a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} \\ \diamond A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = a'_{11}a'_{22} \\ \diamond A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{vmatrix} = a'_{11}a'_{22}a'_{33} \end{aligned}$$

- per la *parabola*:

$$\begin{aligned} \diamond I &= a_{11} + a_{22} = a'_{22} \\ \diamond A_{33} &= a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0 \\ \diamond A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & a'_{13} \\ 0 & a'_{22} & 0 \\ a'_{31} & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a'_{22}a'_{13} \end{aligned}$$

Da  $I$  e  $A_{33}$  della *conica a centro* si osserva che si ha la somma ed il prodotto di due numeri, quindi questi potranno essere calcolati risolvendo l'equazione di secondo grado

$$\rho^2 - (a_{11} + a_{22})\rho + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0.$$

Per avere il terzo coefficiente sfruttiamo A

$$a'_{33} = \frac{A}{a'_{11}a'_{22}} = \frac{A}{A_{33}}.$$

Per la *parabola* si ha che  $a'_{22} = I$  e  $a'_{13} = -\frac{A}{I}$ .

## 2.0.7 Proprietà

### Ellisse

Consideriamo  $a_{11}, a_{22}, a_{33} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , allora l'equazione normale dell'ellisse si presenta sotto una delle tre forme

- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{33}$
- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = -a_{33}$
- $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = 0$

La seconda di queste rappresenta una conica priva di punti reali, detta *ellisse immaginaria*. La terza rappresenta la *coppia di rette immaginarie coniugate uscenti dall'origine*. Solo la prima rappresenta una *conica reale, non degenera*.

Scriveremo questa equazione sotto la forma

$$\frac{x^2}{\frac{a_{33}}{a_{11}}} + \frac{y^2}{\frac{a_{33}}{a_{22}}} = 1$$

e, poichè  $a_{11}, a_{22}, a_{33}$  sono numeri positivi, porremo

$$a^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

e così ne verrà

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.18}$$

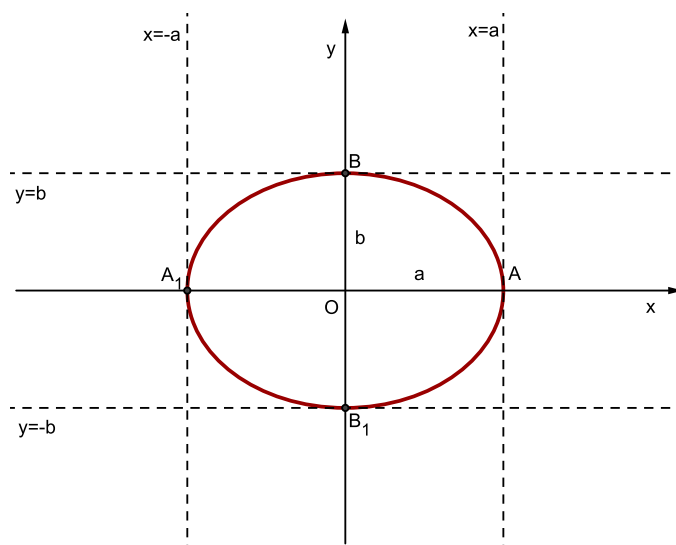
La stessa equazione scritta

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

mostra che non esistono punti reali della curva le cui coordinate  $x, y$  rendano le frazioni  $\left(\frac{x}{a}\right)^2, \left(\frac{y}{b}\right)^2$  maggiori dell'unità.  
 Per i punti  $P(x, y)$  dell'ellisse devono essere soddisfatte le condizioni

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b,$$

le quali ci dicono che i punti dell'ellisse sono tutti contenuti entro il rettangolo determinato dalle quattro rette  $x = \pm a, y = \pm b$ .



### Iperbole

L'equazione normale dell'iperbole ha una delle due forme

- $a_{11}x^2 - a_{22}y^2 = a_{33}$
- $-a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{33}$ .

Poichè queste due formule differiscono solo per la posizione degli assi, consideriamo solo la prima di queste.

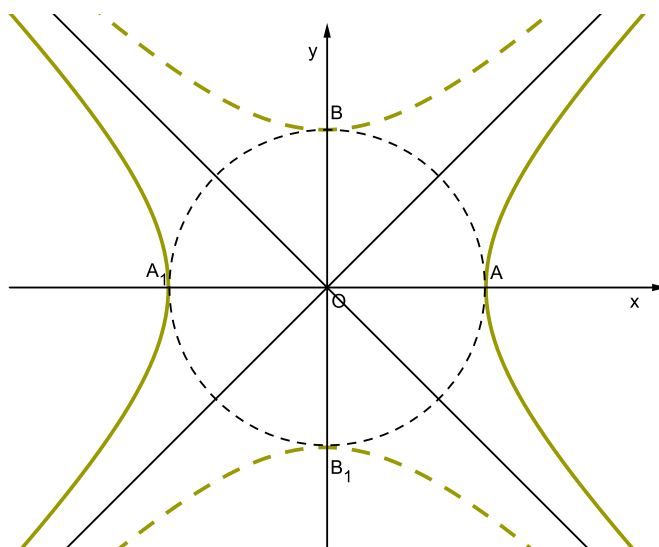
Dividendo per  $a_{33}$  e ponendo

$$a^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}, \quad b^2 = \frac{a_{33}}{a_{22}}$$

l'equazione dell'iperbole diventerà

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.19)$$

Anche nell'iperbole, le lunghezze  $a$  e  $b$  si dicono rispettivamente *semiasse principale (trasverso)* e *semiasse immaginario (non trasverso)*.



Si osserva che l'asse  $Oy$  è il trasverso dell'iperbole coniugata  $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  disegnata in figura con le linee tratteggiate, ed in questa i vertici sono i punti  $B, B_1$  che corrispondono ai segmenti  $\overline{OB} = b, \overline{OB_1} = -b$ .

La lunghezza  $b$  è il semiasse trasverso dell'iperbole coniugata. Se i due semiasse  $a$  e  $b$  sono uguali, l'iperbole si dice *equilatera* ed è uguale alla sua coniugata.

L'equazione degli asintoti è

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

ed è la medesima per le due iperboli coniugate; in generale si vede che se  $k \in \mathbb{R}$ , tutte le iperboli  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm k^2$  hanno gli stessi asintoti.

L'iperbole, al pari dell'ellisse, è simmetrica rispetto agli assi coordinati.

**Parabola**

Esaminando l'equazione  $y^2 = 2px$ , vediamo che la  $y \in \mathbb{R}$  solo per valori della  $x$  di segno concorde con quello del parametro  $p$ , e che per ciascuno di tali valori, assume valori uguali e contrari; ciò significa che la parabola è tutta nel semipiano a destra, o tutta nel semipiano a sinistra dell'asse  $y$ , ed è simmetrica rispetto l'asse delle  $x$ .



# Capitolo 3

## Le Curve a scuola

Ciò di cui tratterà questo capitolo, è l'analisi delle curve da un punto di vista scolastico. Più precisamente si studierà come le curve vengono presentate a scuola ed in seguito seguirà un'analisi su quelle che sono le differenze tra le definizioni generali date nel capitolo precedente. Questo studio è stato svolto esaminando vari testi di matematica delle scuole superiori.

### 3.1 Coniche

[5] La geometria elementare, che esamina nel dettaglio soltanto alcune “curve” (la retta, le poligonali e la circonferenza), non è sufficiente, di per sé, a rispondere alle sempre maggiori esigenze indotte dall'evoluzione della tecnica, che richiedono invece lo studio di un'ampia gamma di curve estremamente varie per forma e proprietà.

Per risolvere questo problema occorrono allora i metodi forniti dall'algebra (e dall'analisi), che si sviluppano a partire dalla definizione di curve (piane) come quei particolari insiemi di punti del piano che soddisfano un'equazione.

**Definizione 3.1.** *Si chiama **equazione algebrica** in due variabili  $x$  ed  $y$ , un'equazione che sia riducibile alla forma:*

$$F(x, y) = 0,$$

dove  $F(x, y)$  è un polinomio nelle due variabili  $x, y$ .

Se la coppia  $(x, y)$  è una soluzione dell'equazione  $F(x, y) = 0$ , allora  $x$  ed  $y$  possono in generale variare, ma la loro variazione non è più arbitraria: il valore numerico di  $x$ , una volta dato, limita i possibili valori di  $y$ .

Si dice perciò che  $F(x, y) = 0$  stabilisce tra le due variabili una **dipendenza funzionale**.

**Definizione 3.2.** *In un sistema di coordinate  $Oxy$ , si dice **curva algebrica** il luogo geometrico (figura costituita da tutti e soli i punti che godono di una determinata proprietà) di tutti e soli i punti del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione algebrica.*

Il grado del polinomio  $F(x, y)$  si dice **ordine** della curva algebrica.

**Osservazione 7.**

L'ordine di una curva algebrica rappresenta il massimo numero di punti che essa può avere in comune con una retta generica del piano.

**Osservazione 8.**

Se l'equazione  $F(x, y) = 0$  si può porre nella forma esplicita:

$$y = f(x),$$

dove  $f(x)$  è una funzione, allora la curva di equazione  $F(x, y) = 0$  non è altro che il grafico della funzione  $f(x)$ .

Se una curva è definita come luogo geometrico dei punti che soddisfano una determinata condizione, allora, esprimendo questa condizione mediante le coordinate, si può ottenere una relazione tra di esse, che rappresenta l'equazione della curva data in quanto è soddisfatta da tutti e soli i punti che appartengono alla curva.

*Nel testo analizzato, le sezioni coniche vengono prima introdotte da un punto di vista cartesiano, illustrandone la definizione e le principali proprietà,*

mentre successivamente vengono studiate dal punto di vista geometrico come sezioni di un cono.

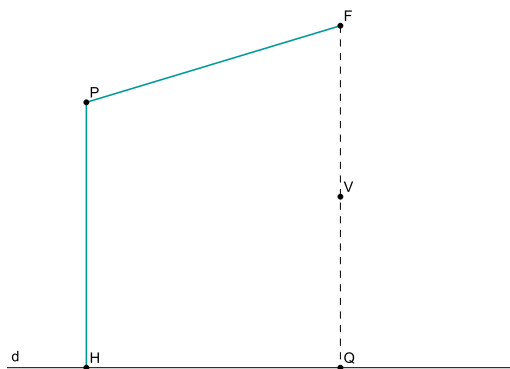
Dopo le rette (curve rappresentabili analiticamente da equazioni algebriche di primo grado), sono molto importanti, sia dal punto di vista teorico che applicativo, le **coniche**, ovvero curve rappresentabili analiticamente da equazioni algebriche di secondo grado.

Lo studio delle coniche, storicamente iniziato per via geometrica, è stato sviluppato e approfondito nel piano cartesiano considerando tali curve come luoghi di punti, le cui coordinate cartesiane verificano un'equazione algebrica di secondo grado.

**Definizione 3.3.** Si dice **parabola** il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano equidistanti da un punto dato  $F$ , detto fuoco, e da una retta assegnata  $d$ , detta direttrice.

Il punto  $F$  e la retta  $d$  si considerano assegnati quando è nota la distanza del punto  $F$  dalla direttrice  $d$ . Tale distanza, che si indica con  $p$ , viene detta *parametro* della parabola ed è l'elemento caratteristico della parabola stessa.

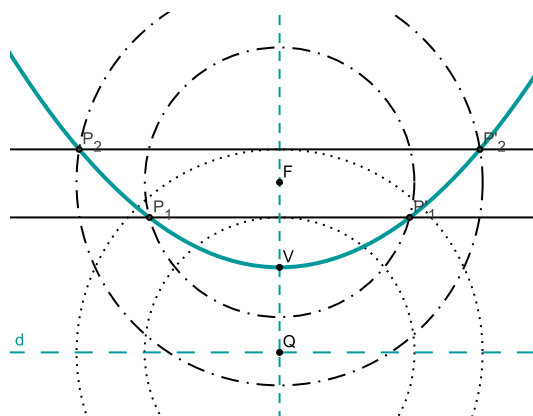
Facendo riferimento alla figura, osserviamo che (per definizione) il punto  $P$  appartiene alla parabola di parametro  $p = \overline{FQ}$  se  $\overline{PF} = \overline{PH}$ . In particolare il punto medio  $V$  del segmento  $FQ$  appartiene anch'esso alla parabola e viene detto *vertice*.



Dalla definizione data è possibile ora eseguire una costruzione per punti della parabola servendosi di riga e compasso.

**Costruzione:** costruiamo prima una circonferenza di centro  $F$  e raggio  $r$  maggiore di  $\overline{FV}$ ; nel semipiano di origine  $d$  e contenente  $F$ , tracciamo una

retta parallela alla direttrice  $d$ , ad una distanza  $r$  da questa, ed indichiamo con  $P_1$  e  $P'_1$  i punti d'intersezione con la circonferenza precedente.



Questi punti appartengono alla parabola, poichè in base alla costruzione eseguita, sono equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

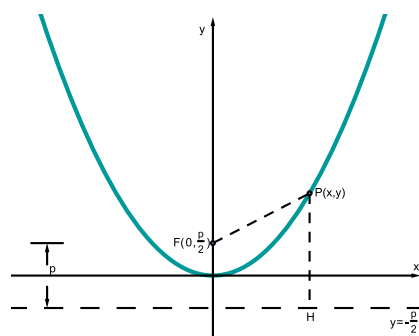
Se tracciamo un'ulteriore circonferenza, ancora di centro  $F$  e raggio diverso da  $r$  ma sempre maggiore di  $\overline{FV}$ , seguendo la costruzione precedente, possiamo trovare altri due punti  $P_2$  e  $P'_2$  della parabola.

Iterando questo procedimento, potremo allora determinare tutti i punti della parabola che desideriamo.

Infine osserviamo che la retta  $QF$  è perpendicolare a  $d$  ed è *asse di simmetria* della parabola.

Per determinare l'equazione normale della parabola assumiamo:

- la perpendicolare alla direttrice passante per  $F$  come asse  $y$ ;
- il punto medio del segmento  $FQ$ , cioè il vertice  $V$ , come origine  $O$ ;
- la perpendicolare a  $FQ$  in  $O$  come asse  $x$ .



Nel riferimento scelto, essendo  $\overline{FQ} = p$ , si ha:

$$F\left(0, \frac{p}{2}\right) \quad \text{e pertanto la direttrice ha equazione } y = -\frac{p}{2}.$$

Sappiamo dalla definizione, che un punto  $P(x, y)$  appartiene alla parabola se:

$$\overline{PF} = \overline{PH}, \quad \text{ossia} \quad \overline{PF}^2 = \overline{PH}^2,$$

da cui, per la formula della distanza di due punti:

$$x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(y + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - py + \frac{p^2}{4} = y^2 + py + \frac{p^2}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{2p}x^2,$$

o anche, ponendo  $a = \frac{1}{2p}$

$$y = ax^2, \tag{3.1}$$

che rappresenta l'equazione della parabola cercata.

*Vengono presentati successivamente il caso della parabola di equazione  $y = ax^2 + bx + c$  e quelli delle parabole con asse parallelo all'asse  $x$ .*

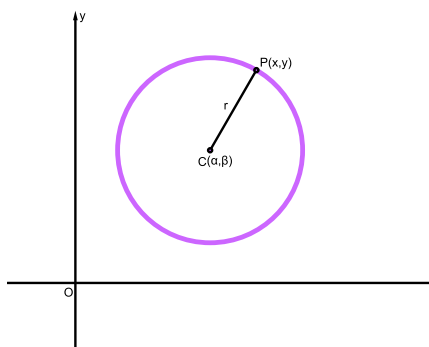
**Definizione 3.4.** Si chiama **circonferenza**  $\mathcal{S}$  di centro  $C(\alpha, \beta)$  e raggio  $r$ , l'insieme di tutti e soli i punti del piano che hanno distanza  $r$  da  $C$ .

Se vengono fissati un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$  ed un generico punto  $P(x, y)$  della circonferenza, allora, per definizione, deve essere:

$\overline{PC} = r$ , cioè  $\overline{PC}^2 = r^2$ , ossia :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \quad (3.2)$$

che si dice *equazione della circonferenza* di centro  $C(\alpha, \beta)$  e raggio  $r$ , poichè i punti di tale circonferenza sono tutti e soli quelli rappresentati dalle coppie di numeri che verificano questa equazione.



In particolare, la circonferenza di raggio  $r$  che ha per centro l'origine degli assi, ha equazione:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Sviluppando la 2.2, si ottiene:

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0,$$

che ponendo  $a = -2\alpha$ ,  $b = -2\beta$ ,  $c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2$ , si può scrivere:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad (3.3)$$

con  $\alpha = -\frac{a}{2}$ ,  $\beta = -\frac{b}{2}$ ,  $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ .

Si noti che l'equazione 3.3 è un'equazione algebrica di secondo grado in due variabili, che è priva del termine in  $xy$  ed ha i coefficienti dei termini di secondo grado uguali.

Ci si può ora chiedere se ogni equazione di secondo grado dotata di questa particolarità rappresenti una circonferenza. La risposta è negativa, infatti se consideriamo  $x^2 + y^2 + 4 = 0$ , pur essendo del tipo 3.3, non è verificata da alcuna coppia di valori reali.

Per approfondire la questione, notiamo che:

$$x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \quad \text{e} \quad y^2 + by = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4},$$

per cui la 3.3 si può ridurre alla forma:

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}, \quad (3.4)$$

in cui il primo membro rappresenta il quadrato della distanza tra il punto variabile  $(x, y)$  e il punto fisso  $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$ , mentre il secondo membro è costante.

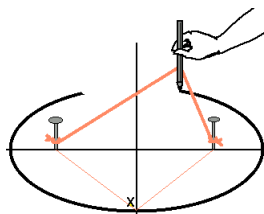
Pertanto si può concludere che la 3.3 rappresenta:

- una circonferenza se  $a^2 + b^2 - 4c > 0$
- un punto se  $a^2 + b^2 - 4c = 0$

**Definizione 3.5.** Si chiama **ellisse** il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze dai due punti fissi  $F$  ed  $F'$ , detti fuochi.

Vediamo due diversi tipi di costruzioni.

**Costruzione Meccanica:** fissiamo i due capi di un filo inestensibile in due punti  $F$  ed  $F'$  di un foglio da disegno. Facendo scorrere la punta  $P$  di una matita lungo il filo tenuto ben teso, si traccia una linea curva chiusa formata da punti per i quali la somma delle distanze da  $F$  ed  $F'$  è costante, in quanto uguale alla lunghezza del filo.

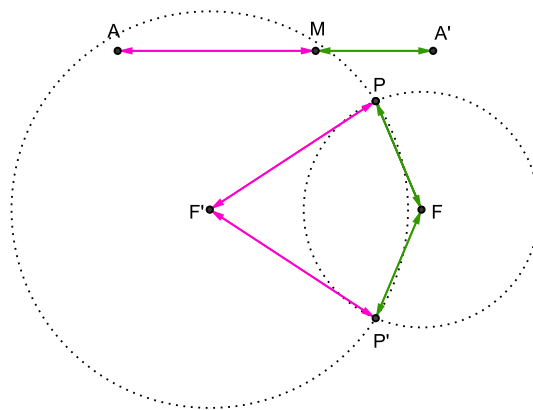


**Costruzione Geometrica:** dopo aver fissato sul piano i due fuochi  $F$  ed  $F'$ , si traccia un segmento  $AA'$  uguale alla somma delle distanze di un punto dell'ellisse dai due fuochi. In seguito, scelto ad arbitrio un punto  $M$  interno al segmento  $AA'$ , si tracciano due archi di circonferenza rispettivamente di

centro  $F$  e raggio  $AM$  e di centro  $F'$  e raggio  $A'M$ . I punti  $P$  e  $P'$  in cui gli archi si intersecano appartengono all'ellisse perchè

$$\overline{FP} + \overline{F'P} = \overline{FP'} + \overline{F'P'} = \overline{AA'}.$$

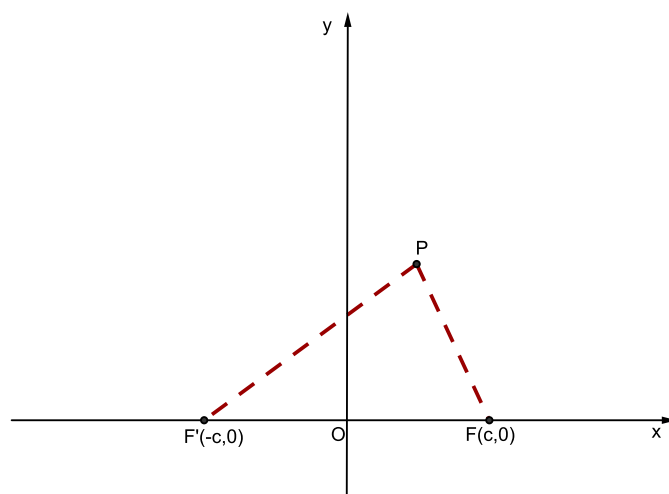
Facendo variare  $M$  su  $AA'$  si ottengono così, a coppie, tutti i punti della curva.



Per determinare l'equazione normale dell'ellisse:

- si pongono i fuochi sull'asse  $x$ ;
- si sceglie l'asse  $y$  perpendicolare al segmento  $FF'$  nel suo punto medio;
- si fissano i punti  $F(c, 0)$ ,  $F'(-c, 0)$ ;
- si considera un generico punto  $P(x, y)$  dell'ellisse.





In questo riferimento, detta  $2a$  la somma costante delle distanze di  $P$  dai fuochi ( $\overline{PF'} + \overline{PF} = 2a$ ), si ottiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\ (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ 4xc - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ x^2c^2 + a^4 - 2a^2xc &= a^2x^2 + a^2c^2 - 2a^2xc + a^2y^2 \\ a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 &= a^2(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Poichè nel triangolo  $PF'F$  risulta:  $\overline{PF} + \overline{PF'} > \overline{F'F}$ , cioè  $2a > 2c$  (e quindi  $a > c$ ), si può porre  $b^2 = a^2 - c^2$  nell'ultima equazione trovata:

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2.$$

Dividendo infine per  $a^2b^2$  si ottiene:

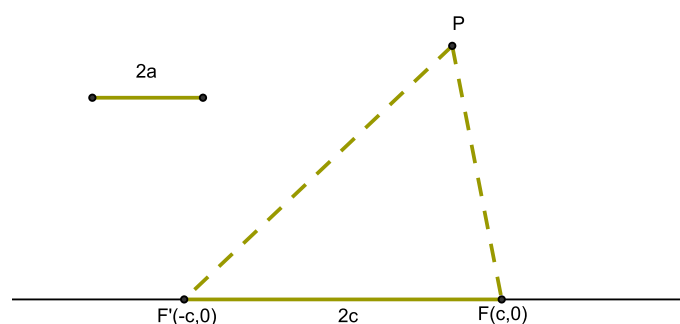
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{con } a > b, \quad (3.5)$$

che è l'equazione normale o canonica dell'ellisse.

*In maniera analoga è presentata la costruzione dell'equazione dell'ellisse avente i fuochi sull'asse  $y$ .*

**Definizione 3.6.** Si chiama *iperbole* il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi  $F$  ed  $F'$ , detti fuochi.

Siano  $2a$  ( $a > 0$ ) la differenza costante delle distanze di un punto  $P(x, y)$  dai fuochi e  $2c$  ( $c > 0$ ) la distanza tra i due fuochi  $\overline{FF'}$ .



Se  $P$  è un punto del luogo geometrico che abbiamo appena definito, allora deve essere:

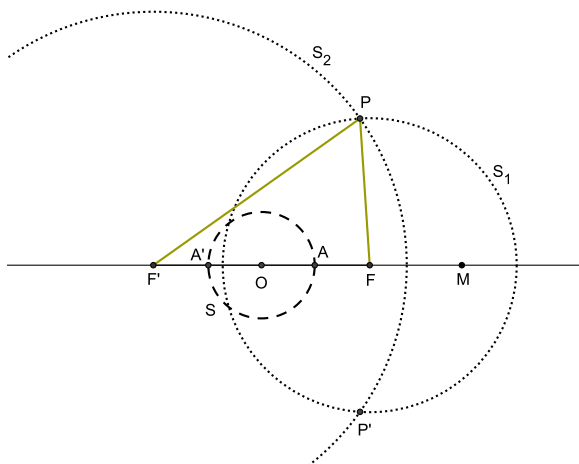
$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2a.$$

Inoltre se  $P \notin FF'$ , dal triangolo  $PF'F$  si deduce che:

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| < \overline{FF'} \Rightarrow 2a < 2c \Rightarrow a < c, \quad (3.6)$$

poichè in un triangolo la differenza tra due lati qualsiasi è sempre minore del terzo lato.

**Costruzione per punti:** preso il punto medio  $O$  del segmento  $FF'$ , descriviamo una circonferenza  $\mathcal{S}$  di centro  $O$  e raggio  $a$ , che incontri la retta  $FF'$  nei punti  $A$  e  $A'$ . Consideriamo ora un punto arbitrario  $M \in FF'$  che sia esterno al segmento  $FF'$  e descriviamo due circonferenze  $\mathcal{S}_1$  ed  $\mathcal{S}_2$  di centri  $F$  ed  $F'$  e raggi rispettivamente  $AM$  e  $AM'$ .



I punti d'intersezione di queste due circonferenze,  $P$  e  $P'$  appartengono all'iperbole. Infatti:

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = |\overline{P'F} - \overline{P'F'}| = |\overline{A'M} - \overline{AM}| = 2a. \quad (3.7)$$

Se poi descriviamo altre due circonferenze, con gli stessi centri ma con raggi scambiati, otteniamo altri due punti dell'iperbole. Pertanto, variando la posizione del punto  $M$ , possiamo determinare tutti i punti dell'iperbole.

Per ricavare l'equazione normale dell'iperbole, riferiamo innanzitutto il piano ad un sistema cartesiano ortogonale  $Oxy$  in cui l'asse  $x$  sia la retta contenente i fuochi, orientata positivamente da  $F'$  verso  $F$ , e l'origine sia il punto medio del segmento  $FF'$ . In questo riferimento si ha dunque  $F(c, 0)$  ed  $F'(-c, 0)$ . Considerato ora un punto generico  $P(x, y)$  del piano, per la definizione di iperbole, dovrà essere:

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a, \quad \text{oppure} \quad \overline{PF} - \overline{PF'} = 2a.$$

Seguendo infine un procedimento analogo a quello descritto per l'ellisse, e tenendo presente che, per la 3.6 si può porre:

$$c^2 - a^2 = b^2,$$

si giunge così all'equazione normale o canonica dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.8)$$

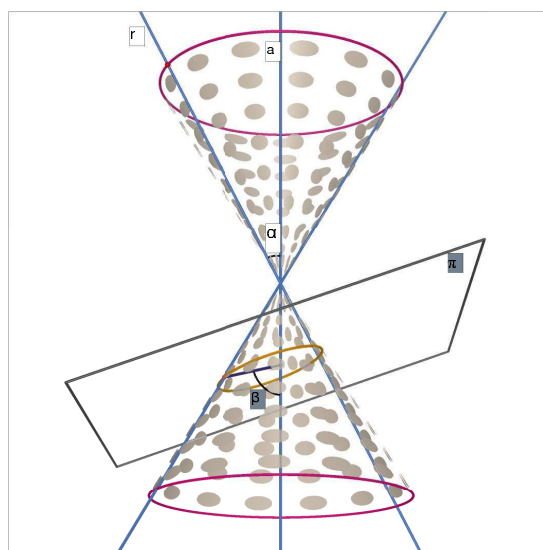
Per quanto riguarda l'approccio geometrico si parla di curve che possono essere ottenute come sezioni tra una superficie conica a due falde ed un piano. Da un punto di vista strettamente geometrico, esse erano già conosciute dai Greci, molto prima quindi della nascita del metodo delle coordinate cartesiane.

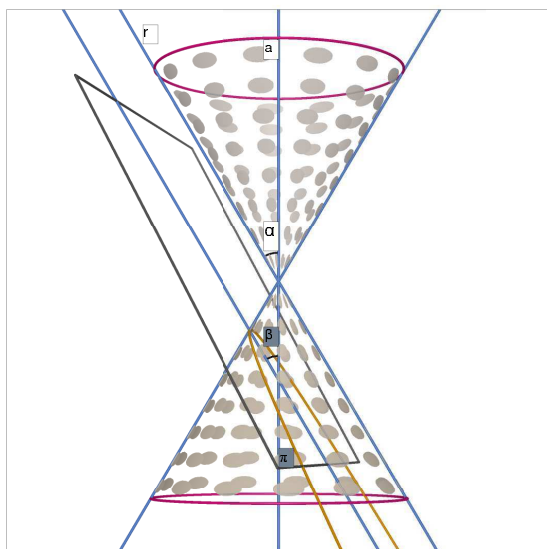
Consideriamo una superficie conica di vertice  $V$ , generata dalla rotazione di  $360^\circ$  di una retta  $r$  (detta *generatrice*) intorno ad una retta secante  $a$  (detta *asse*) e sia  $\alpha$  l'angolo tra le due rette (e quindi l'angolo di semiapertura del cono). Sia  $\pi$  un piano secante la superficie conica a due falde e non passante per  $V$ , e sia  $\beta$  l'angolo acuto che  $\pi$  forma con l'asse del cono.

Si presentano i seguenti casi:

$$\beta > \alpha$$

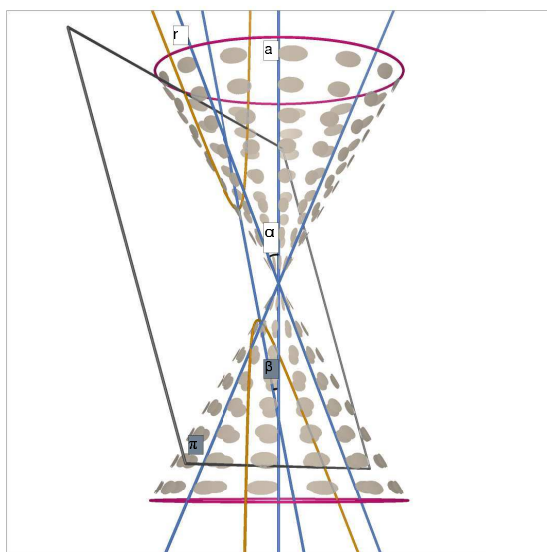
L'intersezione è un'**ellisse**; se  $\beta = 90^\circ$  si ha una **circonferenza**.





$$\beta = \alpha$$

L'intersezione è una **parabola**.



$$\beta < \alpha$$

L'intersezione è una **iperbole**.

L'intersezione della superficie conica con un piano  $\pi$  passante per il vertice  $V$  dà luogo a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ellisse (circonferenza) degenera costituita da un solo punto se } \beta > \alpha \ (\beta = 90^\circ); \\ \text{parabola degenera costituita da due rette coincidenti se } \beta = \alpha; \\ \text{iperbole degenera costituita da due rette incidenti se } \beta < \alpha. \end{array} \right.$$

### 3.1.1 Equazione generale ed equazione normale

Vediamo invece come viene trattato lo studio delle coniche a partire dall'equazione generale.

**Definizione 3.7.** *In un sistema di riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ , si chiama **conica reale (curva algebrica del secondo ordine)** l'insieme dei punti  $P(x, y)$  del piano le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado nelle variabili  $x$  e  $y$ , a coefficienti reali, del tipo:*

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad (3.9)$$

Si dimostra che il valore delle espressioni:

$$I = a + c, \quad \delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix},$$

resta inalterato quando si esegue un qualunque cambiamento d'assi, che può essere o una traslazione, o una rotazione, o l'inversione dell'orientamento di uno degli assi, oppure la composizione di due (o più) di queste trasformazioni elementari.

Le tre espressioni  $I$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  prendono rispettivamente il nome di *invariante lineare*, *invariante quadratico*, *invariante cubico* del polinomio:

$$F(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f.$$

**Definizione 3.8.** *Una conica si dice **degenera** se e solo se  $\Delta = 0$ .*

Sulla teoria delle coniche ci limitiamo a segnalare, con la presente tabella, i risultati che seguono:

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Ellisse $\begin{cases} \text{reale se } I\Delta < 0 \\ \text{immaginaria se } I\Delta > 0 \end{cases}$	Punto
$\delta < 0$	Iperbole (se $I = 0$ è equilatera)	Rette incidenti (se $I = 0$ sono perpendicolari)
$\delta = 0$	Parabola	Rette parallele (reali o immaginarie)

### Schema per la riduzione a forma normale di una conica

[6] Analizziamo prima il caso delle coniche a centro.

1. Le equazioni che ne determinano il centro  $C(x_0, y_0)$  sono:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

2. Dopo la traslazione dell'origine delle coordinate nel centro  $C$ , tramite le equazioni:

$$\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0, \end{cases}$$

l'equazione della curva assume la forma:

$$aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0, \quad (3.11)$$

dove

$$F = ax_0^2 + 2bx_0y_0 + cy_0^2 + 2dx_0 + 2ey_0 + f.$$

Applicando la seguente identità

$$F = (ax_0 + by_0 + d)x_0 + (bx_0 + cy_0 + e)y_0 + (dx_0 + ey_0 + f)$$

e tenendo conto della 3.10 si ottiene:

$$F = dx_0 + ey_0 + f.$$

3. Un'ulteriore semplificazione dell'equazione 3.11 si ha con la rotazione degli assi di un angolo  $\alpha$ :

$$\begin{cases} X = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ Y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.12)$$

Si sceglie  $\alpha$  in modo che, a trasformazione avvenuta, risulti uguale a zero il coefficiente di  $x'y'$ .

I valori richiesti di  $\alpha$  si ottengono dall'equazione:

$$b \tan^2 \alpha - (c - a) \tan \alpha - b = 0. \quad (3.13)$$

4. Con i valori di  $\alpha$ , l'equazione della curva assume la *forma normale*:

$$a'x'^2 + c'y'^2 + F = 0.$$

Se la 3.10 rappresenta un sistema incompatibile, allora saremo nel caso di una conica non a centro, per cui si procederà operando direttamente dal passo 3. con la rotazione degli assi di un angolo  $\alpha$  scelto in modo tale che il coefficiente di  $x'y'$  si annulli.

*Prima di arrivare alla formulazione di questo schema, quello che si è fatto è stato dare un esempio di riduzione a forma normale di una conica a centro; quindi si è operato in maniera induttiva.*

### 3.1.2 Coniche immaginarie o degeneri

Riprendiamo il sistema di equazioni 3.10 della sessione precedente che determina il centro della curva data:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + d = 0 \\ bx_0 + cy_0 + e = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Indichiamo con  $\delta$  il determinante di questo sistema:

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2.$$



Se  $\delta \neq 0$ , il sistema 3.14 ha una sola soluzione. In questo caso la curva del secondo ordine ha un solo centro e si chiama *curva a centro*. Sono curve a centro le ellissi e le iperboli.

Può accadere anche che per  $\delta \neq 0$ , l'equazione data si riduca alla forma normale, simile all'equazione normale dell'ellisse o dell'iperbole, ma non coincida completamente né con l'una né con l'altra. Ed è in questo caso che si parla di *curva immaginaria* (quando non individua nel piano reale nessun ente geometrico) e *curva degenera* (quando si riduce ad un solo punto, nel caso dell'ellisse, e a due rette incidenti, nel caso dell'iperbole).

Se  $\delta = 0$  allora sono possibili due casi:

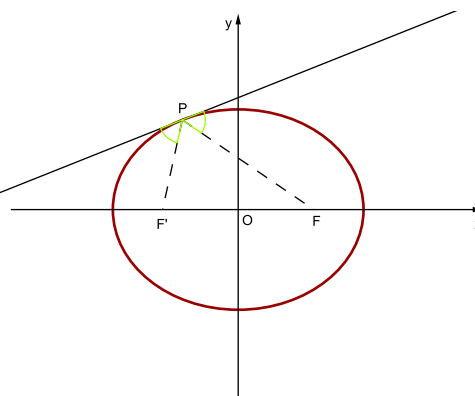
**CASO 1** il sistema 3.14 non ha soluzioni, allora la curva del secondo ordine non ha un centro. In tal caso, l'equazione data può essere sempre ridotta a forma normale e si otterrà sempre l'equazione della parabola;

**CASO 2** il sistema 3.14 ha infinite soluzioni, allora la curva del secondo ordine ha un'infinità di centri (coppia di rette parallele).

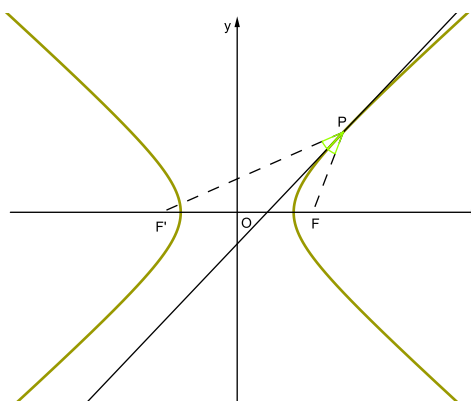
### 3.1.3 Proprietà ottiche

Formuliamo le proprietà dal punto di vista puramente geometrico:

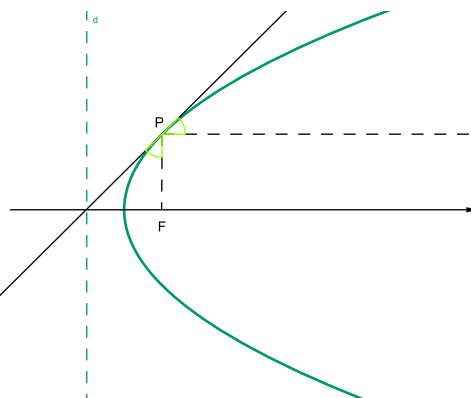
**P1.** La retta tangente all'ellisse in un dato punto  $P$  forma angoli uguali con i raggi focali  $FP$  e  $F'P$  ed è esterna all'angolo  $F\hat{P}F'$ .



**P2.** La retta tangente all'iperbole in un dato punto  $P$  forma angoli uguali con i raggi focali  $FP$ ,  $F'P$  ed è interna all'angolo  $F\hat{P}F'$ .



**P3.** La retta tangente alla parabola in un dato punto  $P$  forma angoli uguali con il raggio focale  $FP$  e con la semiretta uscente dal punto  $P$  e parallela all'asse della parabola nella direzione in cui la parabola si estende infinitamente.



Di tali proprietà, per semplicità ci limitiamo al solo enunciato. Tuttavia per rendere evidente il senso fisico di queste proprietà, immaginiamo che l'ellisse, o l'iperbole, o la parabola, ruotino attorno all'asse sul quale si trovano i fuochi. Si genera così una superficie detta rispettivamente *ellissoide*, *iperboloide*, *paraboloide*.

Una superficie reale di questo genere rappresenta, rispettivamente, uno specchio ellittico, iperbolico o parabolico.

Prendendo in considerazione le leggi di riflessione della luce fornita dall'ottica, possiamo concludere che:

**P1'.** Se la sorgente luminosa si trova in uno dei fuochi di uno specchio ellittico, i raggi luminosi riflessi dallo specchio convergono nell'altro fuoco.

**P2'**. Se la sorgente luminosa si trova in uno dei fuochi di uno specchio iperbolico, i raggi luminosi riflessi dallo specchio proseguono oltre come se fossero usciti dall'altro fuoco.

**P3'**. Se la sorgente luminosa si trova in uno dei fuochi di uno specchio parabolico, i raggi luminosi riflessi dallo specchio si dirigono parallelamente all'asse.

Su tale proprietà degli specchi parabolici è basato il principio di funzionamento dei proiettori.

## 3.2 Equazioni parametriche di una curva

[5]Fino ad ora abbiamo rappresentato una curva  $\gamma$  analiticamente mediante un'equazione in due variabili (le coordinate cartesiane) del tipo  $F(x, y) = 0$ , o del tipo  $y = f(x)$ .

In modo analogo, è possibile rappresentare una curva in coordinate polari mediante un'equazione del tipo  $F(\rho, \vartheta) = 0$ , oppure  $\rho = \rho(\vartheta)$ .

Una curva piana si può tuttavia rappresentare anche in un altro modo quando le coordinate  $x, y$  (oppure  $\rho, \vartheta$ ) di un punto variabile su  $\gamma$  si possono esprimere in funzione di una terza variabile  $t$  (detta *parametro*).

**Definizione 3.9.** *Data una curva  $\gamma$  in un riferimento cartesiano o polare, si chiamano **equazioni parametriche** di  $\gamma$  quelle che esprimono le coordinate di un generico punto  $P(x, y) \in \gamma$  in funzione del parametro  $t$ , cioè:*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \vartheta = \vartheta(t). \end{cases} \quad (3.15)$$

Il parametro  $t$ , variando nel suo intervallo, fa descrivere la curva  $\gamma$  al punto mobile  $P$ , tramite le 3.15.

L'equazione cartesiana della stessa curva si ottiene eliminando il parametro

$t$  fra le due equazioni di 3.15. Si osservi infine che il modo ordinario di rappresentare una curva con l'equazione esplicita:

$$y = f(x),$$

non è che un caso particolare della rappresentazione parametrica, essendo qui l'ascissa il parametro; le equazioni parametriche corrispondenti sono evidentemente:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t). \end{cases}$$

**Esempio 3.1.** Nel seguente esempio, si costruisce il grafico di una curva rappresentata in forma parametrica e lo si fa assegnando dei valori al parametro  $t$  e congiungendo i rispettivi valori  $(x(t), y(t))$ .

$$\begin{cases} x = t^3 + 2t^2 \\ y = t^3 - t. \end{cases}$$

Assegnamo a  $t$  i valori:  $-2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$ ; troviamo che i punti corrispondenti sono:  $(0, -6), \left(\frac{9}{8}, -\frac{15}{8}\right), (1, 0), \left(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right), (0, 0), \left(\frac{5}{8}, -\frac{3}{8}\right), (3, 0)$ . Congiungendo tali punti, si ottiene il grafico richiesto:

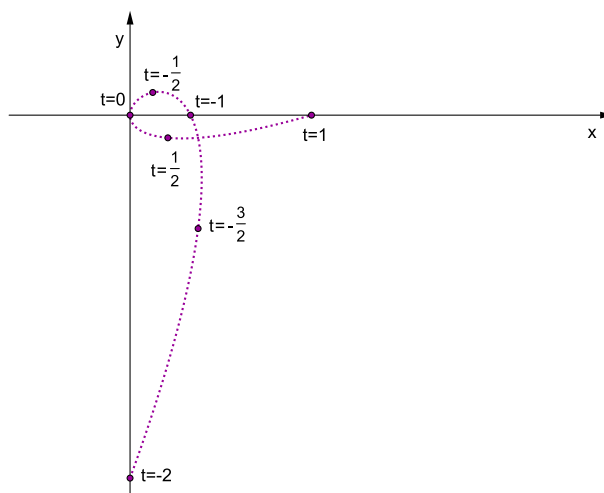


Figura 3.1: Grafico di una curva dipendente dal parametro  $t$ .

*Una costruzione così fatta non è in realtà precisa nè didatticamente corretta: al contrario delle coniche, dove una costruzione puntuale rispecchia l'andamento della curva, in questo caso non conosciamo alcuna proprietà geometrica di tale curva e quindi andrebbe svolto uno studio più approfondito per determinarne, ad esempio, i punti singolari ed altre proprietà.*

*Tale studio si presterà solamente quando verranno introdotti gli strumenti dell'analisi infinitesimale.*

### 3.2.1 Equazioni parametriche della retta

L'equazione di una retta passante per il punto  $P_1(x_1, y_1)$  si può scrivere nella forma:

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0.$$

Se questa retta non è parallela a nessuno dei due assi, i coefficienti  $a$  e  $b$  sono entrambi diversi da zero e possiamo allora scrivere la stessa equazione nella forma seguente:

$$\frac{x - x_1}{b} = \frac{y - y_1}{-a},$$

ossia, posto  $l = b$ ,  $m = -a$ :

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}. \quad (3.16)$$

Indicando con  $t$  il valore comune che i due membri di quest'ultima equazione assumono nel punto generico  $(x, y)$  della retta data (cosicchè  $t$  viene ad avere in ogni punto della retta un valore ben determinato, variabile da punto a punto), sarà:

$$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases} \quad (3.17)$$

Le coordinate di un punto generico della retta 3.17 sono così espresse in funzione di un parametro  $t$ .

Mediante le 3.17, ad ogni valore di  $t \in \mathbb{R}$  corrisponde un punto  $(x, y)$  della retta 3.16.

Le 3.17 sono dunque le *equazioni parametriche della retta* 3.16.

Se  $l = 0$ ,  $m \neq 0$  ( $l \neq 0$ ,  $m = 0$ ) allora le 3.17 rappresentano la retta  $x = x_1$ , ( $y = y_1$ ).

Se  $l = m = 0$  allora le 3.17 non rappresentano una retta, bensì il punto  $P(x_1, y_1)$ .

### 3.2.2 Equazioni parametriche della circonferenza

Sia data una circonferenza  $\mathcal{C}$  di raggio  $r$  con centro nell'origine degli assi  $O$  di un riferimento cartesiano ortogonale  $Oxy$ .

Un punto  $P$  della circonferenza ha coordinate polari  $(r, \vartheta)$ , e quindi coordinate cartesiane:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta, \end{cases} \quad (3.18)$$

che sono anche *equazioni parametriche della  $\mathcal{C}$* , se si considera  $\vartheta$  come parametro variabile nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .

Se la circonferenza ha il centro nel punto  $O'(x_0, y_0)$ , le 3.18 diventano:

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos \vartheta \\ y = y_0 + r \sin \vartheta, \end{cases} \quad (3.19)$$

che sono *equazioni parametriche della circonferenza* di centro  $O'(x_0, y_0)$  e raggio  $r$ , con  $\vartheta$  parametro variabile in  $[0, 2\pi]$ .

Poichè dalla geometria si ha:

$$\cos \vartheta = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin \vartheta = \frac{2t}{1 + t^2},$$

dove  $t = \tan \frac{\vartheta}{2}$ , le 3.18 e 3.19 diventano rispettivamente:

$$\begin{cases} x = r \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = r \cdot \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_0 + r \cdot \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = y_0 + r \cdot \frac{2t}{1 + t^2}, \end{cases} \text{ con } t \in \mathbb{R}. \quad (3.20)$$

Le 3.20 sono altre *rappresentazioni parametriche della circonferenza  $\mathcal{C}$*  con il centro in  $O$  oppure in  $O'$ .

### 3.2.3 Equazioni parametriche dell'ellisse

Data l'equazione dell'ellisse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ponendo

$$\frac{x}{a} = \cos \vartheta, \quad \frac{y}{b} = \sin \vartheta, \quad (3.21)$$

si ottiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1.$$

Pertanto le 3.21, scritte nella forma

$$\begin{cases} x = a \cos \vartheta \\ y = b \sin \vartheta, \end{cases} \quad (3.22)$$

sono le *equazioni parametriche dell'ellisse* se si considera  $\vartheta$  come parametro variabile in  $[0, 2\pi]$ .

Ora, sostituendo a queste equazioni i valori

$$\cos \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \vartheta = \frac{2t}{1+t^2},$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ y = b \cdot \frac{2t}{1+t^2}, \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad (3.23)$$

che è un'altra *rappresentazione parametrica dell'ellisse*.

### 3.2.4 Equazioni parametriche dell'iperbole

Data l'equazione dell'iperbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ponendo

$$\frac{x}{a} = \frac{1}{\cos \vartheta}, \quad \frac{y}{b} = \tan \vartheta, \quad (3.24)$$

con  $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ , si ottiene:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta} - \tan^2 \vartheta = 1.$$

Pertanto le 3.24, scritte nella forma

$$\begin{cases} x = \frac{a}{\cos \vartheta} \\ y = b \tan \vartheta, \end{cases} \quad (3.25)$$

sono una *rappresentazione parametrica dell'iperbole*, se si considera  $\vartheta$  come parametro variabile in  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ora, sostituendo a queste equazioni i valori

$$\cos \vartheta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \vartheta = \frac{2t}{1+t^2},$$

si ottiene:

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ y = b \cdot \frac{2t}{1-t^2}, \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \quad (3.26)$$

che è un'altra *rappresentazione parametrica dell'iperbole*.

### 3.2.5 Equazioni parametriche della parabola

Data l'equazione della parabola:

$$y = \frac{1}{2p}x^2,$$

si hanno *equazioni parametriche*, ponendo, ad esempio

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{2p}t^2 \end{cases} \quad \text{con } t \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

*Si osserva che le coniche, per la loro scrittura in forma parametrica, vengono definite come curve razionali, proprietà che non si estende a tutte le curve in generale.*



### 3.3 Curve in coordinate polari

[10] Ad ogni curva piana, data mediante una legge assegnata, è possibile associare un'equazione in due variabili  $x, y$ , che risulta soddisfatta dalle coordinate cartesiane di tutti e soli i punti della curva.

Questa equazione è stata chiamata *equazione cartesiana* della curva.

Se dei punti della curva consideriamo ora le coordinate polari, anziché quelle cartesiane, è evidente allora che a tale curva si potrà associare un'equazione in due variabili  $\rho, \vartheta$ , che risulta soddisfatta dalle coordinate polari di tutti e soli i punti della curva.

Tale equazione verrà chiamata *equazione polare* della curva.

Spesso l'equazione polare, per la sua forma molto semplice o per altre particolarità, si presta meglio dell'equazione cartesiana per lo studio delle curve.

#### 3.3.1 Circonferenza

Sia data una circonferenza di equazione:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \quad (3.28)$$

e siano:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta, \end{cases} \quad (3.29)$$

le formule di trasformazione tra due sistemi di coordinate, cartesiane e polari, associati.

Mediante il sistema 3.29, l'equazione normale 3.28 di una data circonferenza si trasforma nella sua equazione polare:

$$\begin{aligned} (\rho \cos \vartheta)^2 + (\rho \sin \vartheta)^2 + a(\rho \cos \vartheta) + b(\rho \sin \vartheta) + c &= 0 \\ \rho^2 + \rho(a \cos \vartheta + b \sin \vartheta) + c &= 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

Indicate con  $(\rho_0, \vartheta_0)$  le coordinate polari del centro  $C$  e ricordando che  $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$  sono le coordinate cartesiane di  $C$ , risulta che:

$$-\frac{a}{2} = \rho_0 \cos \vartheta_0, \quad -\frac{b}{2} = \rho_0 \sin \vartheta_0,$$

da cui:

$$c = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - r^2 = \rho_0^2 - r^2.$$

In virtù delle ultime tre relazioni trovate, la 3.30 si scrive:

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0(\cos\vartheta_0\cos\vartheta + \sin\vartheta_0\sin\vartheta) + \rho_0^2 - r^2 = 0,$$

da cui, ricordando le formule di sottrazione del coseno, si ha:

$$\rho^2 - 2\rho\rho_0\cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho_0^2 = r^2. \quad (3.31)$$

La 3.31 è, pertanto, *l'equazione polare* della circonferenza 3.28, scritta in funzione delle coordinate polari  $(\rho_0, \vartheta_0)$  del suo centro  $C$ .

In particolare:

- Se consideriamo come polo un punto della circonferenza e come asse polare il diametro passante per il polo, si ha  $C(r, 0)$  e quindi la 3.31 diventa:

$$\rho = 2r \cos\vartheta.$$

- Se come polo si assume il centro della circonferenza, la 3.31 assume la forma:

$$\rho = r.$$

### 3.3.2 Coniche

Se consideriamo le coniche:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad y^2 = 2px,$$

e introduciamo il sistema di coordinate polari associato al sistema cartesiano di riferimento (avente come polo l'origine degli assi  $O$  e come asse polare l'asse  $x$ ) mediante le formule di trasformazione 3.29, si ottengono le seguenti equazioni polari dell'ellisse, dell'iperbole e della parabola:

$$\rho^2 \left( \frac{\cos^2\vartheta}{a^2} \pm \frac{\sin^2\vartheta}{b^2} \right) = 1, \quad \rho = 2p \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}. \quad (3.32)$$

Sono molto più utili e più importanti le equazioni polari delle coniche che si ottengono assumendo come polo un fuoco  $F$  (o  $F'$ ) e come asse polare l'asse focale orientato dal fuoco verso la relativa direttrice.

### 3.3.3 Spirale di Archimede

**Definizione 3.10.** *Si chiama **spirale di Archimede** la curva che ha la seguente equazione polare:*

$$\rho = a\vartheta \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+, \quad (3.33)$$

dove  $a$  si dice *passo della spirale*.

Questa equazione esprime la proporzionalità diretta tra  $\rho$  e  $\vartheta$ . Per  $\vartheta = 0$  si ottiene  $\rho = 0$ , quindi la curva passa per il polo.

Attribuendo a  $\vartheta$  valori positivi crescenti, i valori corrispondenti di  $\rho$  aumentano proporzionalmente, superando qualunque numero positivo comunque fissato: pertanto la curva avvolge il polo con infinite spirali successive che vanno via via allargandosi.

Una semiretta uscente dal polo incontra così la curva in infiniti punti, e, detti  $P_1(\rho_1, \vartheta_1)$ ,  $P_2(\rho_2, \vartheta_2)$  due consecutivi di essi, si ha che  $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2\pi$ , ed essendo  $\rho = a\vartheta$ ,  $\rho_2 - \rho_1 = 2a\pi$ . Ne segue che i raggi vettori degli infiniti punti della curva appartenenti ad una semiretta con l'origine nel polo formano una progressione aritmetica di ragione  $2a\pi$ .

Queste considerazioni si possono utilizzare per disegnare la curva.

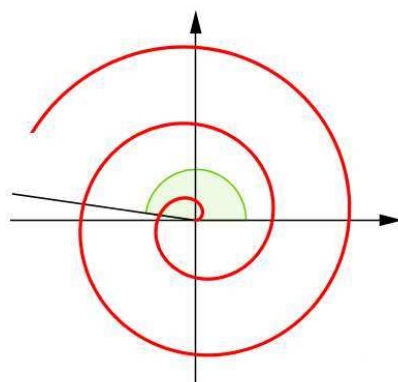


Figura 3.2: Spirale archimedeica di passo unitario.

Nella figura è riportata la curva corrispondente ad  $a = 1$ .

Dimostriamo ora che la spirale di Archimede è la curva descritta da un punto che si muove di moto uniforme sopra una semiretta mentre questa ruota di moto uniforme intorno alla propria origine.

A tale scopo, riferiamo il piano ad un sistema polare con il polo  $O$  nell'origine della semiretta  $d$  e con l'asse polare coincidente con la posizione iniziale della semiretta.

Siano poi  $v$ , la velocità costante del punto  $P$  che si muove sulla semiretta  $d$  e  $\omega$ , la velocità angolare costante di  $d$  che ruota in senso antiorario intorno ad  $O$ . Supponiamo che il punto  $P$  (che genera la curva) si trovi nel polo all'istante iniziale del moto. Dopo un certo tempo  $t$ , il punto  $P$  si troverà in  $P_t(\rho, \vartheta)$  e, di conseguenza, la semiretta  $d$  coinciderà con la semiretta passante per  $O$  e  $P_t$ . Le equazioni dei due moti del punto  $P$  sono:

$$\rho = vt \quad \text{e} \quad \vartheta = \omega t \quad \text{con } t > 0,$$

che sono anche le equazioni parametriche del luogo descritto da  $P$ . Eliminando il parametro  $t$  si ottiene:

$$\rho = \frac{v}{\omega} \vartheta,$$

dove ponendo  $\frac{v}{\omega} = a$ , si ottiene l'equazione iniziale 2.28.

### 3.3.4 Spirale iperbolica

**Definizione 3.11.** Si chiama **spirale iperbolica** la curva piana di equazione polare:

$$\rho = \frac{a}{\vartheta} \quad \text{con } \vartheta \neq 0, a \in \mathbb{R}^+. \quad (3.34)$$

La curva fu descritta per la prima volta da Pierre Varignon nel 1704. Fu studiata da Johann Bernoulli tra il 1710 e il 1713, e da Roger Cotes nel 1722. A differenza della spirale archimedeica si ha una proporzionalità inversa tra  $\rho$  e  $\vartheta$ .

Per  $\vartheta$  crescente, i valori corrispondenti di  $\rho$  decrescono, divenendo minori di qualunque numero positivo, piccolo a piacere, comunque fissato. Analogamente, attribuendo a  $\vartheta$  valori decrescenti, i valori corrispondenti di  $\rho$  aumentano, superando qualunque numero positivo fissato, comunque grande.

L'espressione della curva in coordinate parametriche è:

$$\begin{cases} x = a \cdot \frac{\cos t}{t} \\ y = a \cdot \frac{\sin t}{t}, \end{cases}$$

dove il parametro  $t$  è l'equivalente della coordinata polare  $\vartheta$ .

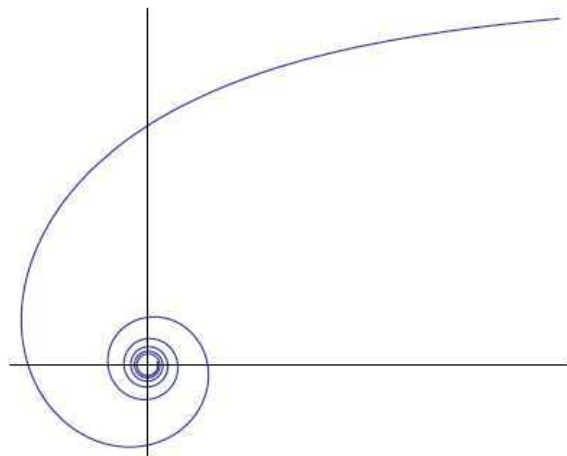


Figura 3.3: Spirale iperbolica di passo uno.

Una semiretta per  $O$  e di angolo  $\vartheta$  incontra la curva in infiniti punti di raggi vettori:

$$\rho = \frac{a}{\vartheta + 2n\pi} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+,$$

e quindi la curva si avvolge infinite volte intorno al polo, avvicinandosi ad esso indefinitamente senza mai raggiungerlo, per questo il polo è detto *punto asintotico*. La distanza  $d$  di un generico punto  $P(\rho, \vartheta)$  della curva dall'asse polare è uguale a

$$\rho \sin \vartheta$$

e, poichè  $\rho = \frac{a}{\vartheta}$ , risulta:

$$d = a \left| \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right|,$$

pertanto, essendo  $\left| \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right| < 1$ , si ha  $d < a$ . I punti della spirale appartengono perciò alla striscia di piano delimitata dalle rette  $y = \pm a$  parallele all'asse polare. E poichè al decrescere di  $\vartheta$ , il valore del rapporto  $\left| \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right|$  si avvicina indefinitamente a 1 ( $\lim_{\vartheta \rightarrow 0} \left| \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} \right| = 1$ ), si ha che la spirale si avvicina alla retta  $y = a$  senza mai toccarla, per cui  $y = a$  è asintoto della curva.

### 3.3.5 Spirale logaritmica

**Definizione 3.12.** Si chiama *spirale logaritmica* la curva definita dall'equazione polare:

$$\rho = ae^{b\vartheta} \quad \text{oppure} \quad \vartheta = \frac{1}{b} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right), \quad (3.35)$$

con  $a, b \in \mathbb{R}$ .

I due parametri  $a$  e  $b$  sono, rispettivamente, tali da ruotare la spirale e controllare quanto è stretta e in quale direzione si avvolge.

La spirale logaritmica è stata descritta la prima volta da Descartes e successivamente indagata estesamente da Jakob Bernoulli, che la definì *Spira mirabilis*, “la spirale meravigliosa”, e ne volle una incisa sulla sua lapide. Sfortunatamente venne incisa una spirale archimedeica al suo posto.

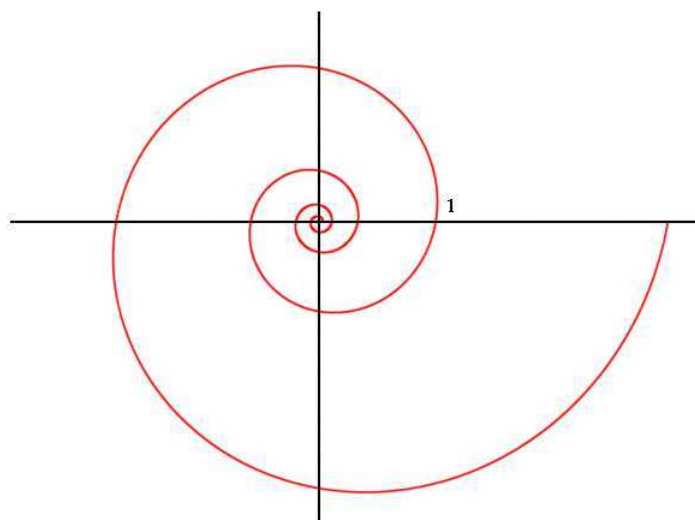


Figura 3.4: Spirale logaritmica con il parametro  $a = 1$ .

Per la costruzione della curva, supponendo  $a = 1$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  osserviamo che: per  $\vartheta = 0$  si ha  $\rho = 1$ ; inoltre al crescere di  $\vartheta$  i corrispondenti valori di  $\rho$  aumentano, superando qualunque numero positivo comunque grande. Pertanto la curva 3.35, partendo dal punto  $A(1, 0)$ , si allontana indefinitamente dal

polo descrivendo infinite spire che vanno via via allargandosi. Al decrescere di  $\vartheta$ , i corrispondenti valori di  $\rho$ , che si mantengono positivi, diminuiscono, risultando minori di qualsiasi numero positivo comunque piccolo; quindi la curva si avvicina indefinitamente al polo senza mai raggiungerlo.

Pertanto, una semiretta generica  $s$  passante per il polo incontra il ramo della curva corrispondente a  $\vartheta > 0$  in infiniti punti di raggi vettori:

$$\rho = e^{b(\vartheta+2n\pi)} \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}^+.$$

E due punti consecutivi  $P_1$  e  $P_2$  hanno raggi vettori:

$$\rho_1 = e^{b(\vartheta+2n\pi)}, \quad \rho_2 = e^{b(\vartheta+2(n+1)\pi)},$$

e poichè

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{2b\pi},$$

si può affermare che i raggi vettori dei punti di intersezione formano una progressione geometrica di ragione  $e^{2b\pi}$ .

In maniera analoga la stessa semiretta  $s$  incontra il ramo della curva corrispondente a  $\vartheta < 0$  in infiniti punti i cui raggi vettori formano una progressione geometrica di ragione  $e^{-2b\pi}$ .

### 3.3.6 Cardioide

**Definizione 3.13.** Si chiama **cardioide** la curva che ha la seguente equazione polare:

$$\rho = a(1 + \cos \vartheta) \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^+. \quad (3.36)$$

La cardioide è una curva e più precisamente una *epicicloide* con una e una sola cuspid. Essa è quindi una curva che si può ottenere tracciando il percorso di un punto scelto su una circonferenza che viene fatta rotolare senza scivolamenti intorno ad un'altra circonferenza di raggio uguale e mantenuta fissa. Il nome esprime la forma di un cuore stilizzato e deriva dal greco *kardioeides* = *kardia* (cuore) + *idos* (forma).



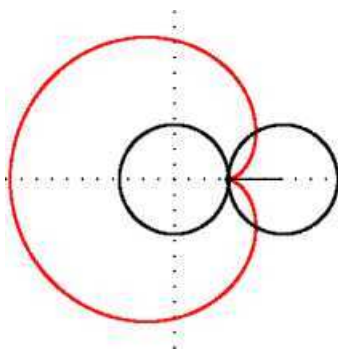


Figura 3.5: Cardioide.

Un'altra costruzione della curva  $\gamma$  può essere fatta considerando una circonferenza  $\mathcal{C}$  di centro  $O_1$  e raggio  $\frac{a}{2}$ , e due punti diametralmente opposti  $O$  e  $O'$  su di essa. Sia  $r$  una generica retta passante per  $O$  che interseca ulteriormente  $\mathcal{C}$  nel punto  $M$ . Su questa retta siano  $P$  e  $P'$  tali che:

- $P, P' \in \gamma$ ;
- $\overline{PM} = \overline{P'M} = a$ .

Al variare del coefficiente angolare della retta  $r$  i punti  $P$  e  $P'$  descrivono la curva detta cardioide.

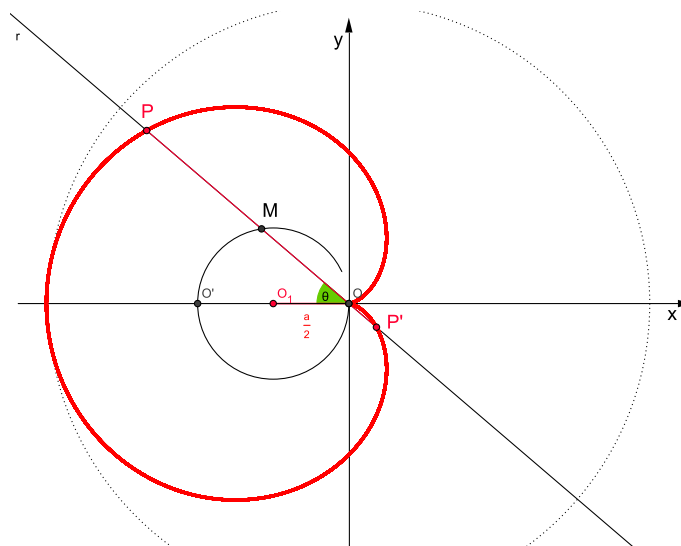


Figura 3.6: Cardioide.

Determiniamo ora l'equazione polare di questa curva.

Scegliamo come polo il punto  $O$  e come asse polare la semiretta passante per  $O$  e  $O'$ .

Facciamo variare la pendenza  $\vartheta$  della retta  $r$

$$\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{3}{2}\pi.$$

Per  $\vartheta$  che varia in questo intervallo si ottiene:

$$\rho = \overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} = a \cos \vartheta + a = a(\cos \vartheta + 1). \quad (3.37)$$

L'equazione parametrica è invece data da:

$$\begin{cases} x(\vartheta) = a \left( \frac{1}{2} + \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right) \\ y(\vartheta) = a \left( \sin \vartheta + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right), \end{cases} \quad (3.38)$$

da cui, sviluppando la coordinata polare radiale:

$$\begin{aligned} \rho(\vartheta) &= \sqrt{x^2(\vartheta) + y^2(\vartheta)} = \sqrt{a^2 \left( \frac{1}{2} + \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta \right)^2 + a^2 \left( \sin \vartheta + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta \right)^2} = \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{4} + \cos(\vartheta - 2\vartheta) + \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta} = \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + 1 + \cos \vartheta + \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta} = \\ &= a \cdot \sqrt{\frac{3}{2} + 2 \cos \vartheta + \frac{1}{2} \cos 2\vartheta} = a \cdot \sqrt{\frac{3}{2} + 2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta - \frac{1}{2}} = \\ &= a \cdot \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta + 2 \cos \vartheta} = a \cdot \sqrt{(1 + \cos \vartheta)^2} = a(1 + \cos \vartheta). \end{aligned}$$

### 3.3.7 Cissoide di Diocle

**Definizione 3.14.** Si chiama *cissoide di Diocle* la curva definita dalla seguente costruzione geometrica:

segnata una circonferenza di diametro  $\overline{OA} = a$ , si conduca per  $O$  una retta qualsiasi  $r$  e da  $A$  la tangente  $d$  alla circonferenza. La retta  $r$  incontra ulteriormente la circonferenza in un punto  $M$  e la tangente  $d$  in  $N$ . Preso su  $r$

un segmento  $OP$  uguale in valore e segno a  $MN$ , il punto  $P$ , al variare della retta  $r$  attorno ad  $O$ , descrive una curva che si chiama, appunto, Cissoide di Diocle.

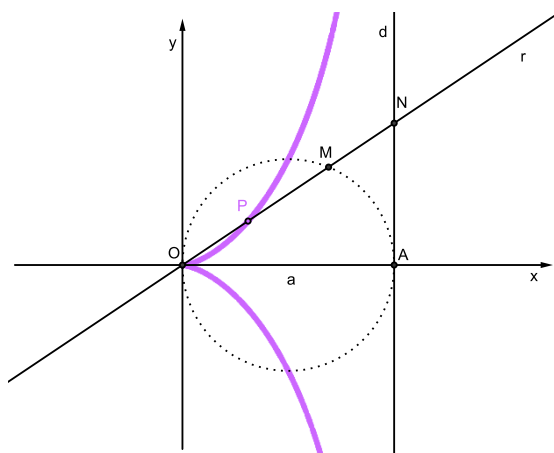


Figura 3.7: Cissoide di Diocle

Questa curva fu utilizzata da Diocle per risolvere il problema della duplicazione del cubo. La parola “cissoide” proviene dal greco *kissoeides* (a forma di edera) composto di *kissos* (edera) e *oeides* (forma).

Assumiamo il punto  $O$  come polo ed  $OA$ , orientato da  $O$  verso  $A$  come asse polare.

Dette  $(\rho, \vartheta)$  le coordinate di un punto  $P$  qualsiasi della curva, si ha:

$$\rho = \overline{OP} = \overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}.$$

Inoltre dai triangoli rettangoli  $OAN$ ,  $OMA$  segue:

$$a = \overline{OA} = \overline{ON} \cos \vartheta, \quad \overline{OM} = a \cos \vartheta,$$

quindi:

$$\rho = \frac{a}{\cos \vartheta} - a \cos \vartheta = \frac{a(1 - \cos^2 \vartheta)}{\cos \vartheta},$$

cioè:

$$\rho = \frac{a \sin^2 \vartheta}{\cos \vartheta}, \quad (3.39)$$

che è l'equazione polare della cissoide.

Dalla 3.39 si vede che, per  $\vartheta = 0$ , si ha  $\rho = 0$ . Inoltre al crescere di  $\vartheta$  che varia nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , anche  $\rho$  cresce e precisamente: quando  $\vartheta$  va avvicinandosi a  $\frac{\pi}{2}$  la  $\rho$  cresce indefinitamente, cioè tende all'infinito. Lo stesso comportamento si ha quando  $\vartheta$  varia in  $\left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$ .

Per avere l'equazione cartesiana della curva, scritta la 3.39 sottoforma:

$$\rho \cos \vartheta = a \sin^2 \vartheta,$$

e ricordando che

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \vartheta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \vartheta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

si ha:

$$x = a \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{ossia: } x(x^2 + y^2) - ay^2 = 0.$$

La cissoide è dunque una curva algebrica di terzo grado, simmetrica rispetto l'asse  $x$ .

### 3.3.8 Lemniscata di Bernoulli

**Definizione 3.15.** *Si chiama **lemniscata di Bernoulli** il luogo geometrico dei punti del piano tali che il prodotto delle loro distanze da due punti fissi  $F$  e  $F'$ , detti fuochi, è uguale al quadrato della semidistanza focale.*

La lemniscata fu descritta per la prima volta nel 1694 da Jakob Bernoulli, come modificazione dell'ellisse, che è il luogo dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi è costante. Una lemniscata, viceversa, è il luogo dei punti per i quali il prodotto di queste distanze è costante. Bernoulli la chiamò lemniscus, che è l'equivalente latino di fiocco pendente. La lemniscata era in effetti già stata trattata da Giovanni Cassini nel suo studio del 1680 sull'ovale di Cassini, di cui la lemniscata costituisce un caso particolare. Giovanni Fagnano dei Toschi nel 1750 ne studiò le principali proprietà.

Di questa curva si scrive subito l'equazione cartesiana, assumendo gli assi come, nel caso dell'ellisse, e ponendo sempre  $\overline{F'F} = 2c$ .

Si ha:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = c^2,$$

ossia sviluppando e riducendo:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2). \quad (3.40)$$

Si vede dalla 3.40 che la curva è simmetrica rispetto ad ambedue gli assi cartesiani.

Introducendo le coordinate polari ponendo  $x = \rho \cos \vartheta$  e  $y = \rho \sin \vartheta$ , l'equazione diventa:

$$\rho^2 = 2c^2 \cos 2\vartheta,$$

ossia prendendo soltanto il valore positivo:

$$\rho = c \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\cos 2\vartheta}.$$

Si vede così che quando  $\vartheta$  varia nell'intervallo  $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\rho$  decresce dal valore massimo  $c\sqrt{2}$  al valore minimo che è zero. Per  $\vartheta$  che varia tra  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ , il  $\cos 2\vartheta$  è negativo e perciò non esiste il corrispondente valore di  $\rho$ .

Perciò i punti effettivi della curva si trovano soltanto nel primo ottante. Tenendo allora conto delle simmetrie della curva rispetto agli assi, la si traccia facilmente.

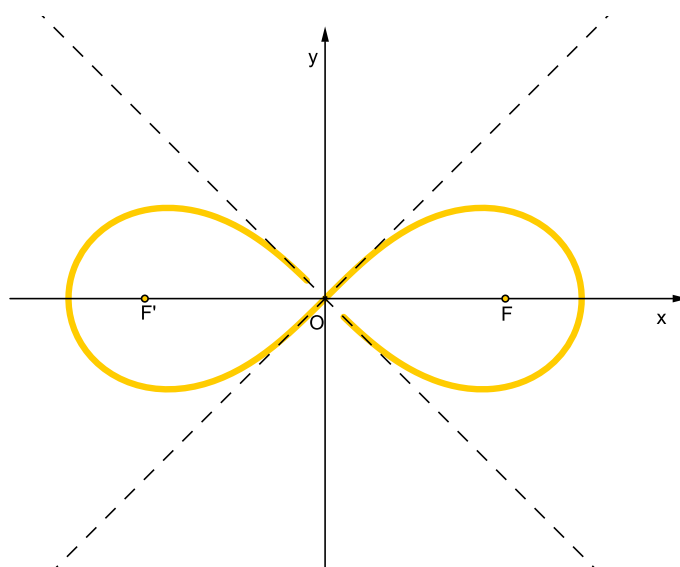


Figura 3.8: Lemniscata di Bernoulli.

### 3.4 Curve trigonometriche

[7] Anticamente non si utilizzavano le funzioni *seno* e *coseno*, ma si parlava solo di corde degli archi. Ad usare seno e coseno furono dapprima i matematici indiani Brahmagupta (VI sec. d.C.) e Bhascara, in opere destinate alla formazione degli astronomi, ed, in seguito, gli arabi Albategno e Abu'l Wafa (cui si deve anche l'introduzione della circonferenza goniometrica) del IX e X sec. d.C..

I concetti astratti di seno e coseno, così come li conosciamo oggi, furono però utilizzati solo molto più tardi, nel XVIII secolo.

Una delle ipotesi più attendibili per la genesi della parola *seno* (dal latino *sinus* = curva, golfo, piegatura della toga sul petto) è che la scelta sia dovuta alla traduzione dell'opera di Albategno da parte di Platone Tiburtino (inizio del XII sec.): gli arabi infatti, che in un primo tempo avevano indicato il seno con il termine *jîba* (dall'indiano *jîva* = corda), ne avevano mutato, all'epoca della traduzione, la pronuncia in *giaib* (insenatura).

Tuttavia esistono anche altre interpretazioni, secondo le quali il termine seno

deriva semplicemente dal latino *semi – inscripta* (semicorda inscritta nella circonferenza goniometrica), abbreviata in *S – ins*, da cui *sins* ed infine *sinus*.

Per quanto riguarda invece la parola *coseno*, questa fu conosciuta dall'inglese Gunter (contemporaneo di Galileo) a partire dal latino *complementi sinus* (seno del complemento).

Gli arabi furono i primi ad utilizzare le funzioni tangente e cotangente per tracciare i quadrati delle meridiane e questo impiego si trova anche nelle opere dell'astronomo Albategno (850-929) e del matematico Habash (che stilò una tavola di circa 860 tangenti e cotangenti).

Per questo motivo, tali funzioni furono chiamate, in origine, *ombrarecta* (la tangente) ed *ombraversa* (la cotangente) ed i nomi attuali furono introdotti solo nel 1583 dal danese T. Fink.

In Europa, la prima tavola delle tangenti fu opera del Regiomontano, che le calcolò grado per grado dopo aver diviso la circonferenza goniometrica in 100 mila parti uguali.

Questa tavola (*tabulafoecunda*) fu pubblicata nel 1490 in uno scritto ad uso astrologico.

Il regiomontano fu anche l'autore del primo trattato europeo di trigonometria (*De triangulis omnia modi libri quinque*, 1533).

### 3.4.1 Grafici delle funzioni goniometriche o circolari

**Definizione 3.16.** Una funzione  $f(x) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ , si dice **periodica**, di periodo  $\tau \neq 0$ , se:

- $\forall x \in A \quad x \in A \iff (x + \tau) \in A;$
- $\forall x \in A \quad f(x + \tau) = f(x).$

**Grafico di  $y = \sin x$** 

La funzione

$$y = \sin x,$$

in cui  $x$  rappresenta la misura in radianti di un angolo orientato ed  $y$  il valore corrispondente del seno, è definita in tutto l'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali, ovvero per ogni valore reale di  $x$ .

Prima di passare a studiarne il grafico, osserviamo che  $\sin x$  è anche una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e pertanto, per stabilire quale sia l'andamento del grafico in tutto  $\mathbb{R}$ , possiamo limitarci a considerare i valori di  $x \in [0, 2\pi]$ .

In questa ipotesi, fissati sul piano un sistema di coordinate cartesiane ed un'unità di misura  $u$  per i segmenti, consideriamo i segmenti di misura  $2\pi$  ed indichiamo i punti di ascissa  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = \pi$ ,  $x = \frac{3}{2}\pi$ .

A questo punto, assegnando ad  $x$  dei valori reali compresi tra 0 e  $2\pi$  otteniamo i corrispondenti valori di  $y$  secondo la legge  $y = \sin x$ .

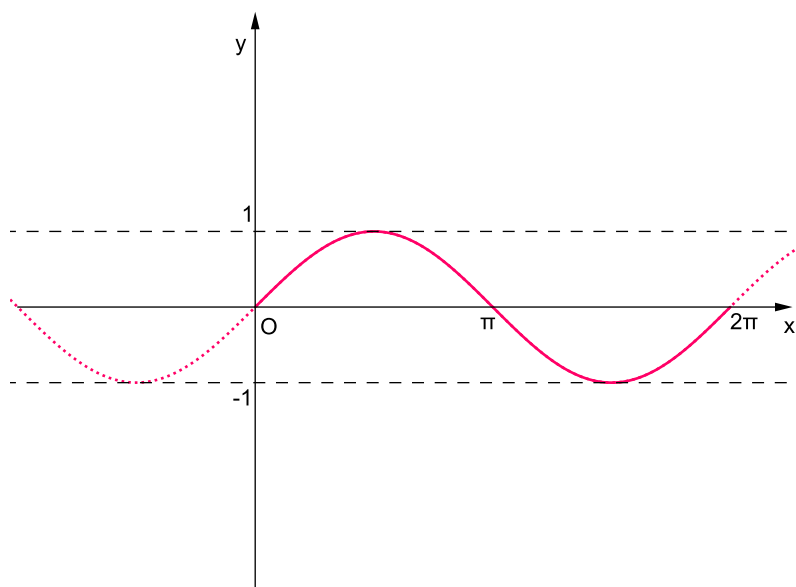


Figura 3.9: Grafico della funzione  $y = \sin x$ .



Il grafico che otteniamo si chiama **sinusoide**. Questo grafico, essendo  $\sin x$  periodica di periodo  $2\pi$ , si ripeterà poi con le stesse caratteristiche, in ogni intervallo di misura  $2\pi$ , precedente e successivo all'intervallo considerato.

### Grafico di $y = \cos x$

Con un procedimento del tutto analogo a quello seguito per disegnare il grafico di  $\sin x$  e tenendo conto del fatto che anche  $\cos x$  è una funzione periodica di periodo  $2\pi$ , si può tracciare il grafico approssimativo di  $\cos x$  al variare di  $x$  tra  $0$  e  $2\pi$ .

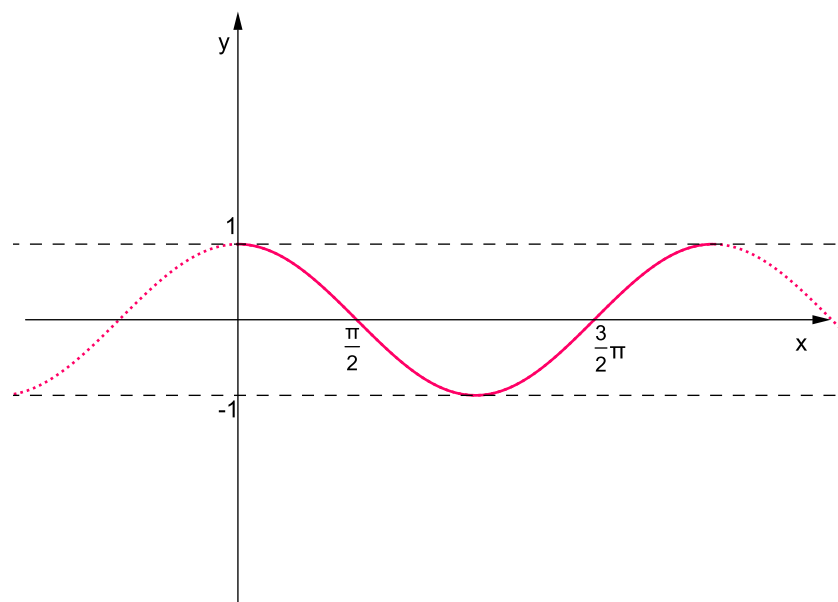


Figura 3.10: Grafico della funzione  $y = \cos x$ .

Il grafico ottenuto è anche detto **cosinusoide**.

*Si osservi che la classificazione di questo grafico come “cosinusoide” è eccessiva, infatti quest’ultimo altro non è che quello della funzione seno traslato di  $\frac{\pi}{2}$ ; in sostanza il grafico di ogni funzione del tipo  $y = a \cos(bx)$  corrisponde a quello della funzione  $y = a \sin(by) + \frac{\pi}{2}$ .*

**Grafico di  $y = \tan x$** 

Poichè  $\tan x$  è una funzione periodica di periodo  $\pi$ , si può tracciarne il grafico approssimativo al variare di  $x$  tra 0 e  $\pi$ , tenendo conto dei valori corrispondenti di  $\tan x$  in questo intervallo.

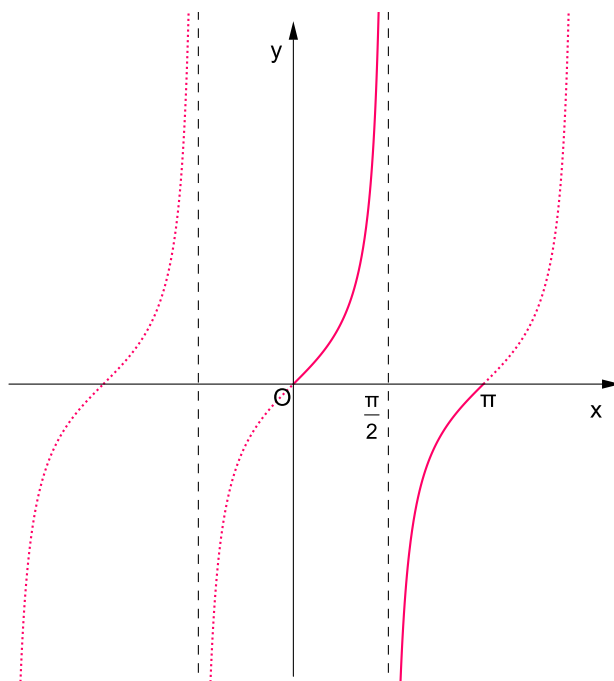


Figura 3.11: Grafico della funzione  $y = \tan x$ .

Come si può osservare, il grafico della funzione si avvicina indefinitamente, sia a sinistra che a destra, alla retta  $x = \frac{\pi}{2}$ , senza mai raggiungerla.

Questo rappresenta graficamente il fatto che la funzione  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$  non sia definita per  $x = \frac{\pi}{2}$ , in quanto, in tale punto,  $\cos x = 0$ .

La retta a cui  $\tan x$  si approssima quando  $x$  si avvicina al valore  $\frac{\pi}{2}$  è chiamata *asintoto*.

Il grafico ottenuto è anche detto **tangenteide**.

**Grafico di  $y = \cot x$** 

Anche la funzione  $\cot x$  è periodica di periodo  $\pi$  e pertanto, valutando come varia  $\cot x$  per  $x \in [0, \pi]$ , è possibile tracciarne il grafico in questo intervallo.

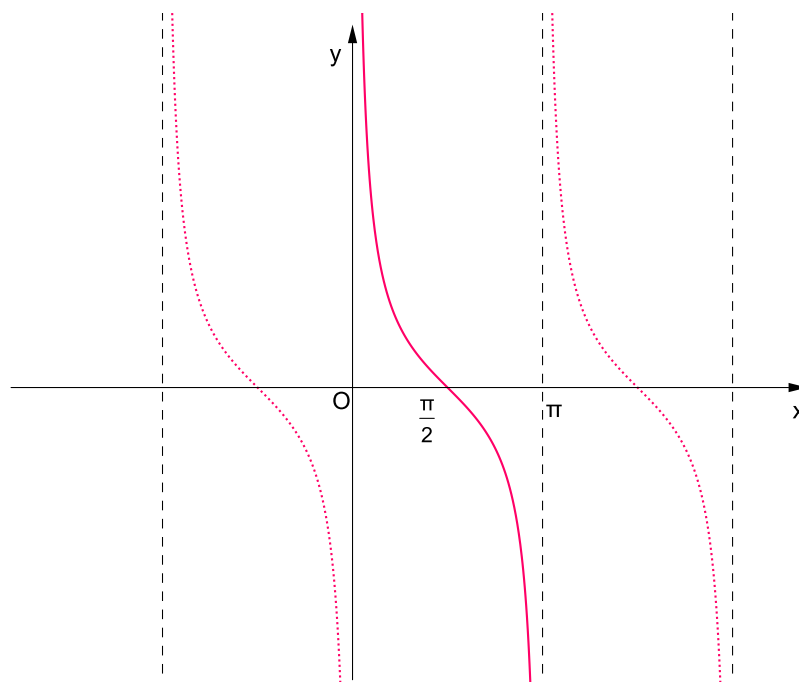


Figura 3.12: Grafico della funzione  $y = \cot x$ .

In base a considerazioni analoghe a quelle fatte per il grafico di  $\tan x$ , si osservi che sono asintoti sia l'asse  $y$ , sia la retta  $x = \pi$ .

Il grafico ottenuto è anche detto **cotangentoide**.

### 3.5 Curve esponenziali

[7] Fissato un numero positivo  $a$ , ad ogni numero reale  $x$  si può associare il numero reale  $a^x$ .

Possiamo quindi definire la funzione  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$  ponendo  $\forall x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = a^x. \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} f \text{ è costante } \forall x \in \mathbb{R}, & \text{se } a = 0; \\ f \text{ si dice } \textit{funzione esponenziale a base } a, & \text{se } a > 0 \text{ e } a \neq 1. \end{cases}$$

La più importante proprietà della funzione esponenziale è data dal seguente teorema:

**Teorema 3.5.1.** *Se  $a$  è positivo e diverso da 1, allora la funzione esponenziale:*

$$y = a^x,$$

*assume, uno alla volta, come valore, qualsiasi numero positivo  $b$ .*

### Proprietà:

La funzione esponenziale:

1. ha dominio  $\mathbb{R}$  e codominio  $\mathbb{R}^+$ ;
2. è biiettiva;
3. è monotona  $\begin{cases} \text{crescente,} & \text{se } a > 1; \\ \text{decrescente,} & \text{se } 0 < a < 1; \end{cases}$
4. è invertibile in  $\mathbb{R}$ .

Determiniamo il grafico della funzione esponenziale.

### CASO 1 $a > 1$

- Poichè  $a^x$  risulta positiva, il grafico è posto sopra l'asse  $x$ . Inoltre, per  $x = 0$ , si ha  $y = a^0 = 1$  e quindi il grafico taglia l'asse  $y$  nel punto  $(0, 1)$ .
- Attribuendo a  $x$  valori positivi via via crescenti, la  $y$  cresce in modo che, fissato qualunque numero  $k > 0$  arbitrariamente grande, la  $y$  finisce per diventare e rimanere maggiore di  $k$ , pur di prendere anche  $x$  sufficientemente grande.

- Quando  $x < 0$ , essendo  $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ , la  $y$  finisce per diventare e rimanere minore di qualunque numero positivo arbitrariamente piccolo, pur di prendere  $x$  negativo sufficientemente grande in valore assoluto.

Ne segue che il grafico della 3.41, quando  $x$  assume valori negativi via via crescenti in valore assoluto, si avvicinerà sempre più all'asse  $x$  rimanendo, però, sempre nel II quadrante.

In tal caso si dice che il grafico ha come asintoto l'asse  $x$ .

Scegliendo un numero sufficientemente grande di valori per la  $x$ , si può intuire che il grafico della 3.41, per  $a > 1$ , ha un andamento del tipo:

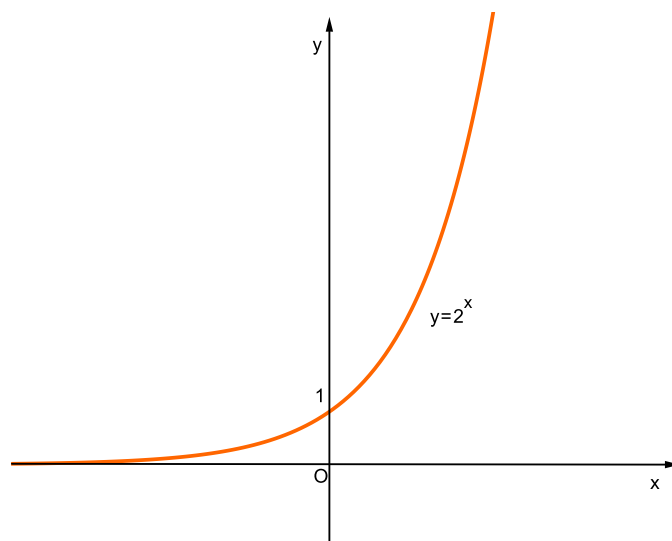


Figura 3.13: Grafico della funzione esponenziale  $2^x$ .

### CASO 2 $0 < a < 1$

Con considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel CASO 1, si vede che, per  $0 < a < 1$ , il grafico decresce al crescere di  $x$ .

Si ottiene così un grafico del tipo:

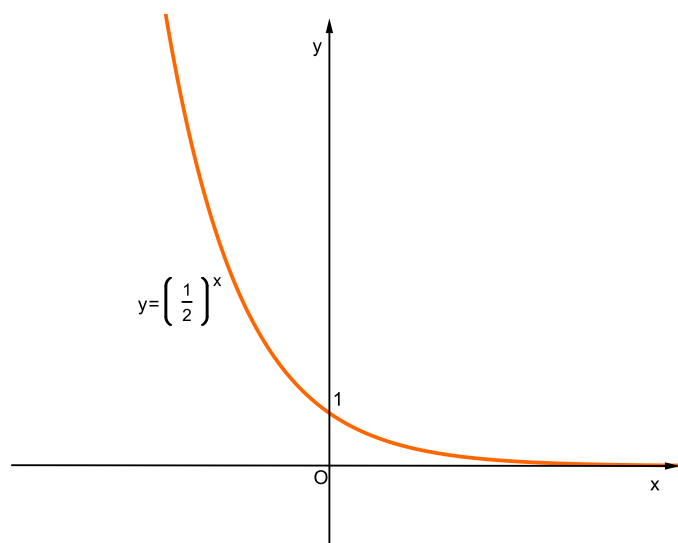


Figura 3.14: Grafico della funzione esponenziale  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ .

Il grafico della funzione esponenziale si chiama **curva esponenziale** e gode delle seguenti proprietà.

**P1** Date due funzioni esponenziali:  $y = a^x$  e  $y = b^x$ , se  $a < b$ , allora:

- per  $x < 0 \Rightarrow a^x > b^x > 0$ ;
- per  $x = 0 \Rightarrow a^x = b^x = 1$ ;
- per  $x > 0 \Rightarrow b^x > a^x > 0$ .

**P2** I grafici delle funzioni  $y = a^x$  e  $y = a^{-x}$  sono simmetrici rispetto l'asse  $y$ .

Infatti se il punto  $P(x, y)$  appartiene al grafico della funzione  $y = a^x$ , il punto  $P'(-x, y)$  simmetrico di  $P$  rispetto l'asse  $y$ , appartiene al grafico della  $y = a^{-x}$ .

**P3** La tangente nel punto  $(0, 1)$  al grafico della funzione  $y = e^x$  ha equazione  $y = x + 1$  e quindi forma un angolo di  $45^\circ$  con l'asse  $x$ .

### 3.6 Curve logaritmiche

[7] Sia  $x$  un numero positivo qualunque e  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , allora  $\exists \log_a x$  e ad ogni valore di  $x$  corrisponde uno ed un solo valore di  $\log_a x$ .

Possiamo dunque considerare la funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \log_a x \end{aligned}$$

con  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ; questa funzione si chiama **funzione logaritmica di base  $a$** .

Per tale funzione possiamo costruire, con buona approssimazione, un numero qualunque di punti del grafico rispetto a un sistema di riferimento cartesiano, calcolando, per dati valori positivi di  $x$ , i valori approssimati di  $y = \log_a x$ .

Il grafico della funzione  $y = \log_a x$  può essere tracciato anche osservando che

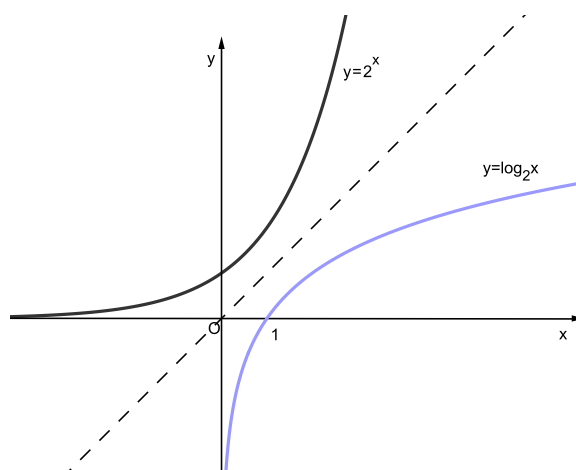
$$y = a^x \iff x = \log_a y,$$

e quindi i grafici delle due funzioni sono uguali se si scambiano, in una delle due, l'asse delle  $x$  con quello delle  $y$ .

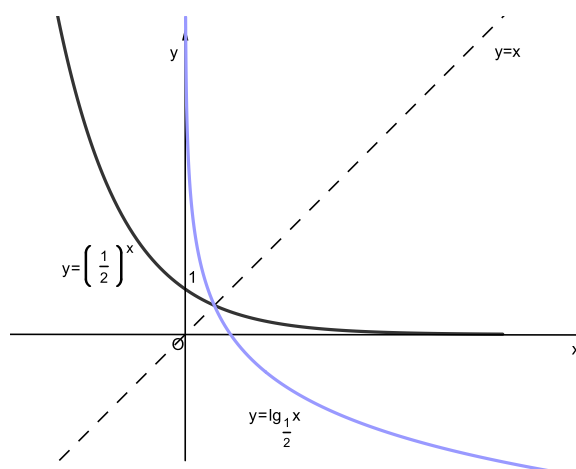
In altre parole i due grafici sono simmetrici rispetto la bisettrice del I e del III quadrante  $y = x$ .

Così:

- se  $a > 1$



- se  $0 < a < 1$



*Il fatto che esistano delle simmetrie in grado di trasformare una curva logaritmica in una esponenziale, o viceversa, fa sì che esse siano tra loro affinemente equivalenti. Si osserva anche che variando la base della curva esponenziale e di conseguenza quella della curva logaritmica, si ottiene sempre una curva affinemente equivalente a quella di partenza.*



# Capitolo 4

## Curve particolari

### 4.1 Curva di Peano

Nel 1890 Giuseppe Peano (1858-1932) pubblicò un articolo intitolato *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane* sul *Mathematische Annalen*. Vi si descriveva una funzione

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

che è continua e suriettiva.

La funzione  $f$  viene detta curva di Peano. Qui *curva* è intesa nel senso di descrizione del moto di una particella, tramite la legge  $f$  che associa ad ogni istante a  $t \in [0, 1]$ , la posizione  $f(t)$  della particella.

Per afferrare l'importanza della curva di Peano bisogna capire che a quei tempi l'Analisi Matematica era grosso modo divisa in due floni:

1. quello tradizionale studiava le proprietà speciali di particolari classi di funzioni, quali le funzioni algebriche, esponenziali, trigonometriche;
2. uno più recente usava il concetto di continuità per dimostrare teoremi su funzioni generiche.

L'esperienza quotidiana con le funzioni speciali tradizionali porta naturalmente a congetturare alcune proprietà di tipo "generico". Una di queste era

che l'insieme dei punti attraversati da una particella in moto (la "traiettoria") fosse un oggetto "unidimensionale", se non si sta a cavillare su eccezioni isolate, come i punti di incrocio. Ci si aspettava che il concetto di continuità bastasse a dare una dimostrazione rigorosa. Le cose non sono così semplici. La curva di Peano è continua ma la sua traiettoria decisamente non è unidimensionale.

### 4.1.1 Costruzione di Peano

La curva di Peano è definita come una funzione continua

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

$$t \longmapsto (x, y)$$

Adottiamo come sistema di numerazione quello in base 3.

Consideriamo adesso una sequenza di cifre  $T$ :

$$T = 0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots \quad \text{con } a_i \in \{0, 1, 2\} \quad \forall i \geq 1.$$

Inoltre introduciamo un operatore  $k$  che opera nel seguente modo:

se  $a$  è una cifra  $k(a) = 2 - a$  è il complementare di  $a$ ,

quindi se  $T$  è in base tre, le sue cifre assumono solo i valori 0, 1, 2, per cui:

- $k(0) = 2 - 0 = 2$
- $k(1) = 2 - 1 = 1$
- $k(2) = 2 - 2 = 0$

Se  $k$  viene applicato  $n$  volte allora:

$$k^n(a) = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ è pari} \\ k(a) & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

L'introduzione di questo operatore serve per definire le funzioni  $X$  ed  $Y$  che applicate alla sequenza  $T$ , agiscono in questo modo:

$$X(T) := 0, b_1 b_2 b_3 \dots \quad Y(T) = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$$

con

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 & c_1 &= k^{a_1}(a_2) \\ b_2 &= k^{a_2}(a_3) & c_2 &= k^{a_1+a_3}(a_4) \\ b_3 &= k^{a_2+a_4}(a_5) & c_3 &= k^{a_1+a_3+a_5}(a_6) \\ \vdots & & \vdots & \\ b_n &= k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}) & c_n &= k^{a_1+a_3+\dots+a_{2n-1}}(a_{2n}) \end{aligned}$$

**Esempio 4.1.** Consideriamo un numero a quattro cifre significative  $T = 0,2122$ , con  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = 2$ ,  $a_4 = 2$ , applicando le relazioni scritte da Peano, si ottiene:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 = 2 & c_1 &= k^{a_1}(a_2) = k^2(1) = 1 \\ b_2 &= k^{a_2}(a_3) = k^1(2) = 0 & c_2 &= k^{a_1+a_3}(a_4) = k^{2+2}(2) = 2 \end{aligned}$$

quindi:

$$X(T) = 0,20 \quad Y(T) = 0,12.$$

Chiamiamo **valore** della sequenza  $T$  la quantità:

$$t = val.T = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \dots + \frac{a_n}{3^n} + \dots$$

Quindi a qualsiasi sequenza  $T$  corrisponderà un solo valore, quindi un numero  $t \in [0, 1]$ .

Si osserva invece, che ogni  $t \in [0, 1]$  può avere al massimo due sviluppi, uno *improprio* (da un certo momento in poi le cifre assumono valore massimo) ed uno *finito* (da un certo momento in poi le cifre assumono valore minimo). Così distinguiamo due classi:

( $\alpha$ ) costituita da tutti i  $t \in (0, 1)$  che sono rappresentati da due sviluppi:

- $T = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n \bar{2}$  con  $a_n \neq 2$
- $T' = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a'_n \bar{0}$  con  $a'_n = a_n + 1$

( $\beta$ ) costituita da 0 e 1 che hanno solo uno sviluppo, finito per 0 e improprio per 1, infatti:

$$0 = 0, \bar{0}, \quad 1 = 0, \bar{2}.$$

La corrispondenza stabilita tra  $T$  e la coppia  $(X, Y)$  è tale che, se  $T$  e  $T'$  sono due sviluppi di uno stesso numero  $t$  allora:

$$\text{val}.X(T) = \text{val}.X(T') \quad \text{e} \quad \text{val}.Y(T) = \text{val}.Y(T').$$

**Dimostrazione.** Sia  $t \in (0, 1)$ , e siano  $T$  e  $T'$  i suoi due sviluppi:

$$T = 0, a_1 a_2 \dots a_{2n-1} a_{2n} \bar{2} \quad \text{con } a_{2n-1} \text{ e } a_{2n} \text{ non entrambi pari a } 2,$$

$$T' = 0, a_1 a_2 \dots a'_{2n-1} a'_{2n} \bar{0} \quad \text{con } a'_{2n} \neq 0.$$

Si osserva che, poichè le prime  $2n - 2$  cifre di  $T'$  e di  $T$  coincidono allora coincideranno anche le prime  $n - 1$  cifre di  $X$  e di  $X'$ . Infatti si otterranno:

- $X(T) := X = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b_n b_{n+1} \dots$

$$\text{con} \begin{cases} b_n = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}}(a_{2n-1}) \\ b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}+a_{2n}}(2). \end{cases}$$

- $X(T') := X' = 0, b_1 b_2 \dots b_{n-1} b'_n b'_{n+1} \dots$

$$\text{con} \begin{cases} b'_n = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}}(a'_{2n-1}) \\ b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = k^{a_2+a_4+\dots+a_{2n-2}+a'_{2n}}(0). \end{cases}$$

Ora distinguiamo due casi:

**Caso**  $\boxed{a_{2n} < 2}$ , implica che

$$\begin{cases} a'_{2n} = a_{2n} + 1 \\ a'_{2n-1} = a_{2n-1} \end{cases} \implies \begin{cases} b'_n = b_n \\ b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^{a_2+\dots+a_{2n}}(2) \\ b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = k^{a_2+\dots+a_{2n}+1}(0). \end{cases}$$

Osserviamo che per la definizione della potenza  $n$ -esima dell'operatore  $k$ , se  $n$  è pari allora

$$k^n(2) = 2 = k(0) = k^{n+1}(0),$$

allo stesso modo se  $n$  è dispari allora

$$k^n(2) = k(2) = 0 = k^{n+1}(0).$$

Quindi abbiamo appena mostrato che

$$b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots,$$

e così i due sviluppi  $X$  e  $X'$ , in questo caso, coincidono.

**Caso**  $\boxed{a_{2n} = 2.}$ , posto  $s = a_2 + a_4 + \dots + a_{2n-2}$ , allora

$$\begin{cases} a'_{2n} = 0 \\ a'_{2n-1} = a_{2n-1} + 1 \end{cases} \implies \begin{cases} b_n = k^s(a_{2n-1}) \\ b'_n = k^s(a'_{2n-1}) = k^s(a_{2n-1} + 1) \\ b_{n+1} = b_{n+2} = \dots = k^s(2) \\ b'_{n+1} = b'_{n+2} = \dots = k^s(0). \end{cases}$$

Poichè  $a_{2n-1}$  deve essere diverso da 2, allora

$$a_{2n-1} = 0 \quad \text{oppure} \quad a_{2n-1} = 1.$$

$$\text{Se } a_{2n-1} = 0 \implies \begin{cases} b_n = k^s(a_{2n-1}) = k^s(0) = \begin{cases} 0 & \text{se } s \text{ è pari} \\ 2 & \text{se } s \text{ è dispari} \end{cases} \\ b'_n = k^s(a'_{2n-1}) = k^s(a_{2n-1} + 1) = k^s(1) = 1 \end{cases}$$

$$\text{Se } a_{2n-1} = 1 \implies \begin{cases} b_n = k^s(a_{2n-1}) = k^s(1) = 1 \\ b'_n = k^s(a'_{2n-1}) = k^s(a_{2n-1} + 1) = k^s(2) = \begin{cases} 2 & \text{se } s \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } s \text{ è dispari} \end{cases} \end{cases}$$

Così si otterrà:

	$a_{2n-1} = 0$	$a_{2n-1} = 1$
$s$ pari	$X = 0, 0\bar{2} \quad X' = 0, 10$	$X = 0, 1\bar{2} \quad X' = 0, 2\bar{0}$
$s$ dispari	$X = 0, 2\bar{0} \quad X' = 0, 1\bar{2}$	$X = 0, 1\bar{0} \quad X' = 0, 0\bar{2}$

Da questa tabella è visibile che anche in questo secondo caso  $X$  e  $X'$  rappresentano, mediante sviluppi differenti, lo stesso valore.

Lo stesso viene provato con  $Y$  e  $Y'$ .

Dunque, se poniamo  $x = val.X$  e  $y = val.Y$ , deduciamo che  $x$  e  $y$  sono due funzioni uniformi nella variabile  $t \in [0, 1]$  e continue.

Infatti se  $t \rightarrow t_0$ , le prime  $2n$  cifre dello sviluppo di  $t$  coincideranno con quelle dello sviluppo di  $t_0$ , se  $t_0$  ha uno sviluppo finito, altrimenti, se lo sviluppo di  $t_0$  è improprio, allora coincideranno con quelle di uno dei due sviluppi di  $t_0$ . E allora le prime  $n$  cifre di  $x$  e di  $y$  corrispondenti a  $t$ , coincidono con quelle di  $x$ ,  $y$  corrispondenti a  $t_0$ .

Infine a tutte le coppie  $(x, y)$  tali che  $x, y \in [0, 1]$  corrisponde una coppia di sviluppi  $(X, Y)$  che ne esprime il valore. A  $(X, Y)$  corrisponde una  $T$ , e a questa una  $t$ . In questo modo è sempre possibile determinare  $t$ , in modo che le due funzioni  $x$  e  $y$  assumano valori in  $[0, 1]$ .

Volendo disegnare approssimativamente la curva di Peano, individuando i punti e collegandoli con una spezzata si ottengono buoni risultati.

Inizialmente individuo prima tutti i punti con 2 cifre significative e li collego, poi quelli con 4, successivamente quelli con 6 cifre significative e via via di seguito:

Punto	T	X(T)	Y(T)
1	0,00	0,0	0,0
2	0,01	0,0	0,1
3	0,02	0,0	0,2
4	0,10	0,1	0,2
5	0,11	0,1	0,1
6	0,12	0,1	0,0
7	0,20	0,2	0,0
8	0,21	0,2	0,1
9	0,22	0,2	0,2

Secondo questa tabella, disegnando i punti e collegandoli si ottiene:

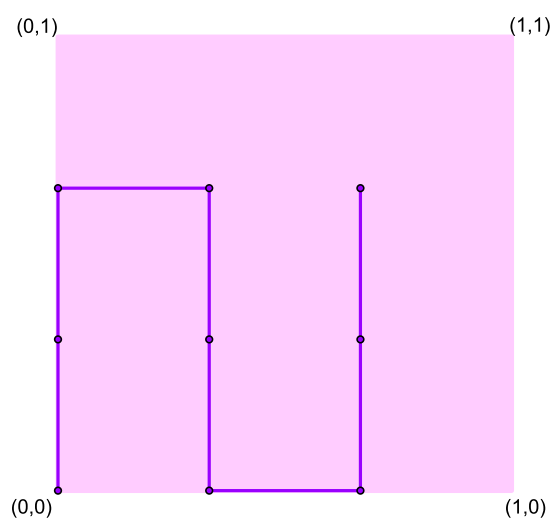


Figura 4.1: Curva di Peano di tutti e soli i punti con 2 cifre significative.

Disegnando ora la curva dei punti con 4 cifre significative si ottiene:

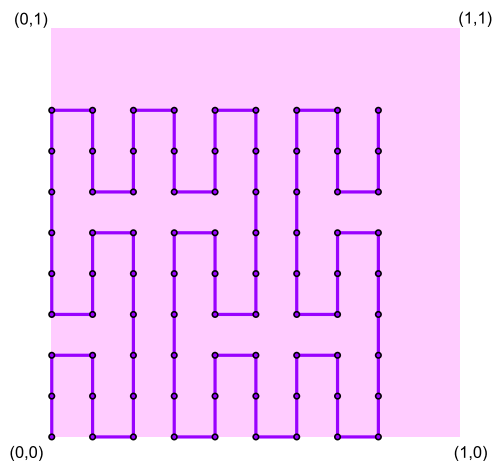


Figura 4.2: Curva di Peano di tutti e soli i punti con 4 cifre significative.

Ora, iterando il procedimento all'infinito, si otterrà una curva che ricoprirà l'intera area del quadrato.

Quindi quello che si fa ad ogni passo, è costruire una successione di funzioni  $\{f_n\}_{n \in A}$ , con  $A = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$ , dove  $2n$  indica il numero di cifre significative della variabile  $T$  rappresentante lo sviluppo in base tre di  $t$ .

Di curve aventi questa proprietà, ossia quelle di avere come immagine un'intera superficie, ve ne sono tante: si possono costruire facilmente curve che riempiono spazi ancora più grossi, come ad esempio il cubo, oppure curve definite sull'intervallo aperto  $(0, 1)$  che riempiono interamente un qualsiasi spazio euclideo di dimensione arbitraria. Nel paragrafo successivo ne analizziamo un esempio.

#### 4.1.2 Costruzione di un'altra curva avente come immagine un quadrato

Costruiremo la curva in due stadi. Dapprima definiremo una funzione  $\gamma$  continua e suriettiva dall'insieme di Cantor in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Assegneremo poi



il valore di  $f(t)$  come  $\gamma(t)$  se  $t \in C$  e opportunamente se  $t \in [0, 1] \setminus C$ , in modo tale che il risultato sia continuo e l'immagine sia contenuta in  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Vediamo prima come opera la funzione suriettiva e continua

$$\gamma : C \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1].$$

Gli stadi sono tre:

1.  $(t)_{dieci}$  viene prima trasformato nel sistema ternario di Cantor, che è quello avente come base tre e come insieme delle cifre  $\{0, 2\}$ ; quindi assumerà la forma

$$T^{-1}(t)_{dieci} = 0.a_1a_2a_3 \dots \quad \text{con } a_n \in \{0, 2\} \quad \forall n \geq 1;$$

con  $T^{-1} : C \longrightarrow \{0, 2\}^N$  funzione che trasforma ogni numero di  $C$  nel sistema ternario di Cantor.

2. mediante l'operatore  $\sigma$ ,  $T^{-1}(t)$  viene sdoppiato in  $(b, c)$ ;
3. la coppia  $(b, c)$  viene poi tradotta in base due, cioè  $(B(b), B(c))$ , con  $B : \{0, 2\}^N \longrightarrow [0, 1]$ .

**Definizione 4.1.** *Assegnato uno sviluppo nel sistema ternario di Cantor*

$$t = 0.a_1a_2a_3 \dots,$$

l'operatore  $\sigma$  viene definito nel modo seguente:

$$\sigma(t) = (\sigma'(t), \sigma''(t))$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} \sigma'(t) = 0.a_1a_3 \dots a_{2n-1} \\ \sigma''(t) = 0.a_2a_4 \dots a_{2n}. \end{cases}$$

**Esempio 4.2.** Sia  $t = \frac{1}{3} \in C$

1.  $t = 0,0\bar{2}$
2.  $\sigma(0,0\bar{2}) = (0,0\bar{2}, 0.\bar{2})$

$$3. B(0.0\bar{2}) = 0.0\bar{1} = 0.1 = \left(\frac{1}{2}\right)_{dieci} \quad \text{e} \quad B(0.\bar{2}) = 0.\bar{1} = (1)_{dieci}$$

$$\text{Quindi } \gamma\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

Quindi  $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$  è tale che:

$$\gamma(t) = (B(\sigma'(T^{-1}(t))), B(\sigma''(T^{-1}(t)))).$$

**Dimostrazione** (Suriettività di  $\gamma$ ). Per dimostrare la suriettività di  $\gamma$ , mostriamo prima quella di

$$B \circ T^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow [0, 1].$$

Ogni numero dell'intervallo  $[0, 1]$  si può scrivere in forma binaria

$$\sum_{n \geq 1} \frac{d_n}{2^n} \quad \text{con } d_n \in \{0, 1\}.$$

E questo si può ottenere applicando  $B$  alla successione  $(2d_1, 2d_2, 2d_3, \dots)$  che a sua volta corrisponde ad un punto dell'insieme di Cantor.

Quello che vogliamo provare è che

$$\forall (y, z) \in [0, 1] \times [0, 1] \exists t \in \mathbb{C} \text{ tale che } \gamma(t) = (y, z).$$

Sfruttando la suriettività di  $(B \circ T^{-1})$ ,  $\forall y, z \in [0, 1]$  sappiamo che esistono  $y', z' \in \mathbb{C}$  tali che

$$y = (B \circ T^{-1})(y') \quad \text{e} \quad z = (B \circ T^{-1})(z').$$

Ora consideriamo solo lo sviluppo ternario di  $y'$  e di  $z'$ :

$$b = T^{-1}(y') = 0.b_1b_2b_3\dots \quad c = T^{-1}(z') = 0.c_1c_2c_3\dots,$$

e costruiamo

$$a := 0.b_1c_1b_2c_2b_3c_3\dots \quad \text{con } t = T(a).$$

Si ha allora  $\sigma(a) = (b, c)$  e quindi:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (B(\sigma'(T^{-1}(t))), B(\sigma''(T^{-1}(t)))) \\ &= (B(\sigma'(a)), B(\sigma''(a))) \\ &= (B(b), B(c)) = (b, c)\end{aligned}$$

**Dimostrazione** (Continuità di  $\gamma$ ). Siano  $s, t \in C$  e  $a = T^{-1}(s)$ ,  $b = T^{-1}(t)$  le rispettive rappresentazioni nel sistema ternario di Cantor.

Allora per quanto già sappiamo su  $T^{-1}$  e sulla definizione di  $\sigma$ , si ha che se  $|x - y| < \frac{1}{3^{2n}}$ , allora  $s$  e  $t$  si trovano nello stesso intervallo  $n$ -esimo di  $C$ , quindi le loro cifre in rappresentazione ternaria coincidono fino all' $n$ -esima:

$$a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n.$$

E dal punto di vista della rappresentazione binaria, ciò significa che:

$$|B(a) - B(b)| \leq \frac{1}{2^n}.$$

Se su  $\mathbb{R}^2$  adottiamo la norma euclidea, ciò significa che

$$|s - t| < \frac{1}{3^{2n}} \implies \|\gamma(s) - \gamma(t)\| \leq \frac{1}{2^n}$$

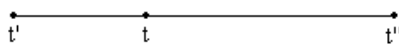
e questo dimostra la continuità di  $\gamma$ .

Veniamo finalmente alla definizione completa della curva di peano

$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1].$$

Vediamo dove vengono mandati tutti i punti  $t \in [0, 1] \setminus C$ .

Sia  $t \in [0, 1] \setminus C$  e siano  $t'$  e  $t''$  gli estremi dell'intervallo contenente  $t$  che viene tolto a  $C_{n-1}$  nel costruire  $C_n$ .



$$t' < t < t'' = t' + \frac{1}{3^n}.$$

Definiamo  $f(t)$  come quel punto di  $[0, 1] \times [0, 1]$  che divide il segmento che congiunge  $\gamma(t')$  con  $\gamma(t'')$  nella stessa proporzione in cui  $t$  divide il segmento  $[t', t'']$  (questo procedimento è detto *interpolazione lineare*). Formalmente:

$$f(t) = \frac{t - t'}{t'' - t'}\gamma(t'') + \frac{t'' - t}{t'' - t'}\gamma(t').$$

In generale, se  $u, v \in \mathbb{R}^n$ , il punto che divide l'intervallo  $[u, v]$  in parti proporzionali a  $\lambda, \mu > 0$  è  $\frac{(\lambda u + \mu v)}{(\lambda + \mu)}$ . Visto che  $\gamma(t')$  e  $\gamma(t'')$  appartengono a  $[0, 1] \times [0, 1]$ , anche tutto il segmento che li congiunge giace nel quadrato. Abbiamo ora una applicazione

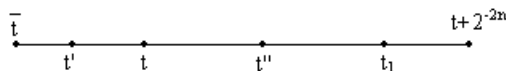
$$f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \times [0, 1]$$

che è suriettiva. L'ultima cosa da dimostrare è la continuità di  $f$ .

**Dimostrazione** (Continuità di  $f$ ). Siano  $t \notin C$  e  $\bar{t} \in C$ . Consideriamo l'intervallo  $(\bar{t}, \bar{t} + 3^{-2n})$ , allora si possono verificare due casi:

- (1) in quest'intervallo non cadono punti di  $C$ , ciò significa che  $\bar{t}$  è l'estremo sinistro di uno degli intervallo che vengono tolti per produrre  $C$ ; perciò a destra di  $\bar{t}$  la funzione  $f$  è lineare e pertanto continua;
- (2) in quest'intervallo cade almeno un punto  $t_1 \in C$ . Allora qualunque punto  $t \in [\bar{t}, t_1]$  o è un punto di  $C$  ( $\|f(t) - f(\bar{t})\| = \|\gamma(t) - \gamma(\bar{t})\| \leq 2^{-n}$ ), oppure appartiene a qualche intervallo  $(t', t'')$  che viene tolto per formare  $C$ .

Entrambi gli estremi  $t', t''$  sono in  $[\bar{t}, t_1]$ , quindi entrambi  $\gamma(t'), \gamma(t'')$  distano da  $\gamma(\bar{t})$  meno di  $2^{-n}$ . Infatti le palle rispetto a una norma sono sempre convesse, cioè se contengono due punti contengono anche il segmento che li unisce.



# Capitolo 5

## Conclusioni

Dall'analisi dei testi delle scuole superiori, è emerso un approccio algebrico alla definizione di curva; infatti essa viene definita come luogo geometrico dei punti che soddisfano una determinata condizione, espressa mediante un'equazione algebrica

$$F(x, y) = 0,$$

dove  $F(x, y)$  rappresenta un polinomio nelle variabili  $x, y$  a coefficienti reali. Con questa definizione non è però possibile individuare come curva, il grafico delle funzioni trascendenti come quelle logaritmiche ed esponenziali, per esempio, cioè di tutte quelle curve che non possono essere espresse mediante un'equazione polinomiale.

Caso particolare di  $F(x, y) = 0$  sono le curve descrivibili come  $y - f(x) = 0$ , ossia  $y = f(x)$ , cioè le curve *grafico di funzioni*.

Naturalmente, non tutte le curve si possono rappresentare come grafico di funzioni, per esempio la circonferenza.

Questo fatto non sempre è chiaro, quanto dovrebbe esserlo, agli studenti.

Un fatto singolare che emerge dall'analisi dei testi scolastici è che la parola “curva” appare per la prima volta nei testi di geometria analitica con la definizione e lo studio delle coniche, anche se, a volte, a questo punto si osserva che anche le rette e le poligonali studiate negli anni precedenti rientrano nella categoria delle curve.

In generale nell'ultimo anno scolastico viene approfondito lo studio delle curve grafico di funzione, mentre manca del tutto un approfondimento sulle curve rappresentate da  $F(x, y) = 0$  che si limita allo studio delle coniche.

Ciò può essere giustificato poichè gli strumenti necessari per questo studio, a partire dalle derivate parziali, non fanno di solito parte dei programmi scolastici.

# Elenco delle figure

1.1	Traccia della curva $\gamma$ . . . . .	3
1.2	Semicirconferenze $\gamma$ e $\Gamma$ . . . . .	7
1.3	Due curve in $\mathbb{R}^2$ . . . . .	8
2.1	Sezione di un cono rettangolo . . . . .	12
2.2	Parabola e Ellisse . . . . .	15
2.3	Iperbole . . . . .	15
3.1	Grafico di una curva dipendente dal parametro $t$ . . . . .	54
3.2	Spirale archimedeo di passo unitario. . . . .	62
3.3	Spirale iperbolica di passo uno. . . . .	64
3.4	Spirale logaritmica con il parametro $a = 1$ . . . . .	65
3.5	Cardioide. . . . .	67
3.6	Cardioide. . . . .	67
3.7	Cissoide di Diocle . . . . .	69
3.8	Lemniscata di Bernoulli. . . . .	72
3.9	Grafico della funzione $y = \sin x$ . . . . .	74
3.10	Grafico della funzione $y = \cos x$ . . . . .	75
3.11	Grafico della funzione $y = \tan x$ . . . . .	76
3.12	Grafico della funzione $y = \cot x$ . . . . .	77
3.13	Grafico della funzione esponenziale $2^x$ . . . . .	79
3.14	Grafico della funzione esponenziale $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ . . . . .	80
4.1	Curva di Peano di tutti e soli i punti con 2 cifre significative. . . . .	89

4.2 Curva di Peano di tutti e soli i punti con 4 cifre significative. . 90



# Bibliografia

- [1] Bortolotti E., (1923), *Lezioni di Geometria Analitica*. Bologna: Zanichelli.
- [2] Enriques F., Chisini O., (1985), *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*. Bologna: Zanichelli.
- [3] Loria G., (1930), *Curve algebriche*. Milano: Hoepli.
- [4] Peano G., (1890), *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, *Mathematische Annalen*, 36, 1, 157-160.
- [5] Scovenna M., (2001), *Geometria Analitica*. Padova: CEDAM.
- [6] Scovenna M., Noris C., (2001), *Complementi di Geometria Analitica*. Padova: CEDAM.
- [7] Scovenna M., (2001), *Funzioni Elementari*. Padova: CEDAM.
- [8] Scovenna M., (2001), *Analisi infinitesimale*. Padova: CEDAM.
- [9] Zwirner G., Scaglianti L., (1993), *Pensare la matematica 1*. Padova: CEDAM.
- [10] Zwirner G., Scaglianti L., (1993), *Pensare la matematica 2*. Padova: CEDAM.