ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

INSIEMI COSTRUIBILI E TEOREMA DI CHEVALLEY

Tesi di Laurea in Geometria

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Luca Migliorini

Presentata da:
Ivan Lorusso

I Sessione
Anno Accademico 2010/2011

A Stefano

Introduzione

La teoria degli schemi, creata alla fine degli anni '50 da A. Grothendieck, conclude un periodo di crisi dei fondamenti della geometria algebrica che durava da vari anni.
I notevoli successi conseguiti all'inizio del XX secolo dalla scuola italiana di geometria algebrica, coi suoi metodi sintetici, si fermavano (tranne qualche rara incursione nella geometria birazionale delle varietà tridimensionale), allo studio delle superfici algebriche, e anche in questo ambito non era **sempre** chiaro quali risultati fossero stabiliti con il rigore necessario, quali solo sotto ipotesi restrittive o solo per oggetti "generici", infine quali argomenti fossero validi soltanto nel campo complesso e quali avessero maggior generalità.
La necessità di fondare su basi solide la geometria algebrica, permettendo anche la trattazione di oggetti geometrici definiti su campi di caratteristica positiva, che sorgono in modo naturale nelle applicazioni di tipo aritmetico, è alla base dell'opera fondazionale di O. Zariski e A. Weil, che si basava su un ampio utilizzo dell'algebra commutativa. Il loro approccio, seppur soddisfacente dal punto di vista formale, risultava essere estremamente pesante.
L'input decisivo per una fondazione della geometria algebrica che fosse capace di trattare nella massima generalità le questioni di carattere aritmetico senza perdere la vivacità del linguaggio geometrico è costituito dalla formulazione, negli anni '40, delle congetture di Weil, con la conseguente necessità di trovare una "coomologia di Weil" che avesse le proprietà formali necessarie.
Negli anni '50, dopo i fondamentali contributi dei seminari parigini di H. Cartan e C. Chevalley (entrambi, come Weil, membri fondatori del gruppo

Bourbaki), e i lavori di J. P. Serre, che, in special modo nel suo *Faisceaux Algébriques Cohérents* (Ann. of Math. 61 (1955), 197-278) introduce in geometria algebrica i metodi coomologici, già di notevole successo nel campo dell'analisi complessa, mostrandone la straordinaria efficacia, Grothendieck si cimenta in una monumentale opera di rifondazione della geometria algebrica, prima con una serie di seminari Bourbaki noti col nome di *FGA* (*Fondements de la géométrie algébrique*), poi col trattato *Éléments de géométrie algébrique*, scritto in collaborazione con J. Dieudonné, e la sua serie di seminari *SGA*, alla cui realizzazione contribuirono alcuni dei suoi studenti (Demazure, Raynaud, Artin, Verdier, Illusie, Deligne). Entrambe le opere si interrompono dopo l'improvviso ritiro di Grothendieck dalla scena matematica nel 1970.
Ad oltre 50 anni dalla sua introduzione, è sempre più chiaro che l'impostazione grothendieckiana gioca un ruolo fondamentale in geometria algebrica. Molti sviluppi successivi (come l'introduzione degli stacks per trattare problemi di moduli, la geometria algebrica derivata e la geometria non commutativa di A. Connes) si ispirano ancora alla filosofia di Grothendieck. Come scrive D. Mumford, nel 1988, nell'introduzione al suo *The red book of varieties and schemes*:

> *Then Grothendieck came along and turned a confused world of researchers upside down, overwhelming them with the new terminology of schemes as well as with a huge production of new and very exciting results.* [...] *Grothendieck being sixty this year, it is a great pleasure to dedicate these notes to him and to send him the message that his ideas remain the framework on which subsequent generations will build.*

In questa tesi, dopo un primo breve capitolo che intende esporre alcune motivazioni che hanno portato alla formulazione della teoria degli schemi, viene trattato il modello locale di uno schema, cioè lo spettro di un anello commutativo dotato della topologia di Zariski e del suo fascio di struttura, e vengono introdotte le prime definizioni e proprietà relative agli schemi. La parte centrale consiste nella trattazione di un risultato fondazionale sui morfismi di schemi, il teorema di Chevalley, che afferma che l'immagine mediante un morfismo di un sottoinsieme algebrico, pur non essendo necessariamente chiusa o aperta, non e' molto lontana dall'esserlo; essa è infatti un insieme costruibile, cioè un elemento dell'algebra booleana generata dai sottoinsiemi chiusi. Questo teorema, che vale anche nel caso particolare delle varietà algebriche complesse, mostra con esattezza la distanza tra le proprietà topologiche delle applicazioni olomorfe, che possono essere anche estremamente complicate (si pensi ad esempio alla chiusura del grafico della funzione esponenziale in $\mathbb{P}^2$), e quelle, molto più regolari, delle varietà algebriche.

Indice

Capitolo 1

Motivazioni

Il seguente celebre teorema di analisi funzionale, che mostra che uno spazio topologico compatto può essere ricostruito a partire dal dato algebrico dell'anello (o più precisamente $\mathbb{C}$-algebra) delle funzioni continue a valori complessi su esso, evidenzia il ruolo centrale giocato dagli ideali di questo anello, e fornisce la motivazione per l'idea base della teoria degli schemi, cioè esprimere le proprietà geometriche di un oggetto mediante proprietà algebriche di un anello di funzioni.

Dato un anello commutativo R, si indica con $\operatorname{Max} R$ l'insieme dei suoi ideali massimali (si ricorda che un ideale proprio $\mathfrak{a}$ di R si dice massimale se, equivalentemente, $\mathfrak{a}$ non è contenuto in alcun ideale proprio o l'anello quoziente $R/\mathfrak{a}$ è un campo).

Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff e sia $C(X)$ lo spazio vettoriale complesso delle funzioni continue a valori complessi. Le operazioni naturali di somma e prodotto di funzioni dotano $C(X)$ di una struttura di $\mathbb{C}$-algebra commutativa. Per ogni $x \in X$, l'insieme $\mathfrak{m}_x$ delle funzioni $f \in C(X)$ tali che $f(x) = 0$ è chiaramente un ideale, massimale in quanto $\mathfrak{m}_x$ è il nucleo dell'omomorfismo $C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ che associa ad f il suo valore $f(x)$ in x. Il teorema di Gelfand-Naimark afferma che viceversa ogni ideale massimale di $C(X)$ è del tipo $\mathfrak{m}_x$ per un unico $x \in X$, e che inoltre la topologia su X può essere ricostruita in modo algebrico da $C(X)$.

Teorema 1.0.1. *(Gelfand-Naimark) L'applicazione $\mu : X \longrightarrow MaxC(X)$, $x \mapsto \mathfrak{m}_x$ è biunivoca. Dotando l'insieme $MaxC(X)$ della topologia una cui base di aperti è data dagli insiemi*

$$\widetilde{U}_f = \{\mathfrak{m} \in MaxC(X) | f \notin \mathfrak{m}\}$$

al variare di $f \in C(X)$, l'applicazione μ diventa un omeomorfismo.

Dimostrazione.

(i) (Suriettività) Sia $\mathfrak{m}$ un massimale di $C(X)$, sia $V(\mathfrak{m})$ il luogo degli zeri comuni delle funzioni di $\mathfrak{m}$.
Per assurdo sia $V(\mathfrak{m}) = \varnothing$; allora $\forall x \in X$ esiste $f_x \in \mathfrak{m}$ tale che $f_x(x) \neq 0$. Poiché f_x è continua, esiste un intorno aperto U_x di x in X su cui f_x non si annulla. Essendo X compatto, allora ammette un ricoprimento finito di intorni $U_{x_1}, \dots U_{x_n}$ di questo tipo. Sia ora $f = f_{x_1}\overline{f}_{x_1} + \dots f_{x_n}\overline{f}_{x_n}$; tale funzione è diversa da zero in ogni punto di X, quindi è un'unità di $C(X)$. Questo tuttavia contraddice l'ipotesi $f \in \mathfrak{m}$, quindi $V(\mathfrak{m}) \neq \varnothing$.
Sia ora $x \in V(\mathfrak{m})$. Allora $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_x$, cioè $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$, quindi μ è suriettiva.

(ii) (iniettività) Per il lemma di Urysohn le funzioni continue separano i punti di X; infatti, essendo X compatto di Hausdorff due punti di X sono separati da due chiusi ed esiste una funzione continua f da X a valori complessi tale che su uno dei due chiusi $f(x) \equiv 0$ e sull'altro $f(x) \equiv 1$. Allora $x \neq y \Rightarrow \mathfrak{m}_x \neq \mathfrak{m}_y$, quindi μ è iniettiva.

(iii) (Omeomorfismo) Per $f \in C(X)$, si definisce $U_f = \{x \in X | f(x) \neq 0\}$. Si vede facilmente che gli aperti U_f formano una base di X; infatti per ogni $x \in X$ esiste $f \in C(X)$ tale che $x \in U_f$ e $U_f \cap U_g = \{x \in X | f(x), g(x) \neq 0\} = \{x \in X | f(x)g(x) \neq 0\} = U_{fg}$. Si ha inoltre $\mu(U_f) = \widetilde{U}_f$, quindi μ è aperta ed, essendo biunivoca, è un omeomorfismo.

□

Osservazione 1. Gli aperti $\widetilde{U}_f$ sono definiti in modo puramente algebrico in termini dell'anello $C(X)$. Il teorema di Gelfand-Naimark fornisce quindi un dizionario che permette di passare dalla struttura topologica dello spazio X a quella algebrica del suo anello di funzioni a valori complessi e viceversa.
Analogamente il teorema degli zeri di Hilbert esplicita una forte correlazione tra una varietà algebrica affine su un campo algebricamente chiuso ed il suo anello delle coordinate, che in questo caso è un'algebra A finitamente generata, cioè è il quoziente di un anello di polinomi in un numero finito di indeterminate per un suo ideale (si veda l'appendice A).
Anche in questo caso gli ideali massimali corrispondono ai punti della varietà, ed è possibile definire una topologia (la topologia di Zariski) sull'insieme degli ideali massimali $\operatorname{Max} A$, definendo una base di aperti strettamente analoghi agli $\widetilde{U}_f$ del teorema di Gelfand-Naimark. La topologia pero' risulta estremamente diversa, a causa della struttura di A; in particolare, se si prescinde dal caso degli insiemi discreti, non è mai Hausdorff. Il dizionario tra varietà algebriche affini e algebre finitamente generate è però estremamente potente e completo; ad esempio un omomorfismo $F : A \longrightarrow B$ di algebre è indotto da uno e un solo morfismo delle varietà affini corrispondenti, e l'immagine di un punto corrispondente ad un ideale massimale $\mathfrak{m}$ è il punto di ideale massimale $F^{-1}(\mathfrak{m})$.
La teoria degli schemi rappresenta una naturale, estremamente feconda, generalizzazione di queste costruzioni, in cui il ruolo dell'anello di funzioni è svolto da un qualunque anello commutativo R.
In tale generalità ci si rende facilmente conto che gli ideali massimali non si comportano bene rispetto a omomorfismi generali di anelli; in particolare la preimmagine di un ideale massimale non è necessariamente un ideale massimale, ma soltanto primo, come si vede ad esempio per l'inclusione $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$.
Per questa ragione gli ideali primi, in quanto stabili per immagine inversa, assumono un ruolo preponderante nella teoria degli schemi. Come si vedrà in seguito, si può dare all'insieme degli ideali primi di un anello una struttura di spazio topologico le cui funzioni sono gli elementi dell'anello, con la

topologia, detta di Zariski, una cui base è data da aperti U_f analoghi agli $\widetilde{U}_f$ del teorema di Gelfand-Naimark.
La costruzione della localizzazione di un anello rispetto a un insieme moltiplicativo definisce inoltre per ogni $f \in R$ l'anello R_f, che gioca il ruolo dell'anello delle funzioni sull'aperto, mentre l'omomorfismo canonico $R \longrightarrow R_f$ ha il significato di restrizione di una funzione su $\operatorname{Spec} R$ a una funzione sull'aperto U_f. Il linguaggio più efficace per formulare tale sistema di anelli associati ad aperti e omomorfismi di restrizione è quello dei fasci a cui sarà dedicato il prossimo capitolo di questo elaborato.
Per finire, si osserva che il comportamento delle funzioni definite su uno schema affine non è così semplice come quello di una funzione in $C(X)$, in quanto ogni elemento di R assume valori in campi diversi a seconda del punto in cui viene valutato; per essere più precisi, preso un punto $\mathfrak{p}$ dello schema affine associato ad R e un elemento $a \in R$, la valutazione $a(\mathfrak{p})$ appartiene al campo dei residui della localizzazione $R_{\mathfrak{p}}$ di R in $\mathfrak{p}$.

Capitolo 2

Prefasci e fasci

2.1 Definizioni e prime proprietà

Sia X uno spazio topologico.

Definizione 2.1. Un *prefascio* $\mathscr{F}$ su X consiste del dato:

(i) Per ogni aperto $U \subseteq X$, di un insieme $\mathscr{F}(U)$

(ii) Per ogni coppia di aperti $U_1 \subseteq U_2$, una mappa $res_{U_2,U_1} : \mathscr{F}(U_2) \longrightarrow \mathscr{F}(U_1)$

in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà:

(a) $res_{U,U} = id_U$ per ogni U

(b) Se $W \subseteq V \subseteq U$ allora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(W) & \\
& \mathscr{F}(V) \arrow[ul, "res_{V,W}"'] \\
\mathscr{F}(U) \arrow[uu, "res_{U,W}"] \arrow[ur, "res_{U,V}"'] &
\end{tikzcd}$$

commuta.

Definizione 2.2. Siano $\mathscr{F}$ e $\mathscr{G}$ due prefasci su X. Una mappa $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ è una famiglia di mappe $\phi(U) : \mathscr{F}(U) \longrightarrow \mathscr{G}(U)$ per ogni aperto U tali che, se $V \subseteq U$, allora il diagramma

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\phi(U)"] \arrow[d, "res_{U,V}"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "res_{U,V}"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\phi(V)"'] & \mathscr{G}(V)
\end{tikzcd}$$

commuta.

Definizione 2.3. Un prefascio $\mathscr{F}$ è un *fascio* se, dato per ogni U un suo ricoprimento aperto qualunque $\{U_i\}_{i\in I}$, valgono le seguenti condizioni:

(i) Se $x_1, x_2 \in \mathscr{F}(U)$ e, $\forall i \in I$, $res_{U,U_i}x_1 = res_{U,U_i}x_2$, allora $x_1 = x_2$

(ii) Presa una famiglia $x_i \in \mathscr{F}(U_i) \quad \forall i \in I$ tale che $res_{U_i,U_i\cap U_j}x_j = res_{U_j,U_i\cap U_j}x_j \;\; \forall i,j \in I$, allora $\exists x \in \mathscr{F}(U)$ tale che $res_{U,U_i}x = x_i \;\; \forall i \in I$ (inoltre tale x è unica per la condizione precedente)

Definizione 2.4. Gli elementi di $\mathscr{F}(U)$ sono detti *sezioni* di $\mathscr{F}$ su U, e tale insieme si indica con $\Gamma(U, \mathscr{F})$. Gli elementi di $\Gamma(X, \mathscr{F})$ sono detti *sezioni globali* di $\mathscr{F}$.

Definizione 2.5. Sia $\mathscr{F}$ un fascio su X, e sia $x \in X$. La famiglia degli $\mathscr{F}(U)$, per U intorno aperto di x, è un sistema diretto, quindi si può definire:

$$\mathscr{F}_x = \underset{x\in U}{\underrightarrow{lim}} \mathscr{F}(U)$$

e tale limite viene detto la *spiga* di $\mathscr{F}$ in x.

Osservazione 2. Un elemento di $\mathscr{F}_x$ è rappresentato da una coppia (U, s), dove U è un intorno aperto di x e s è un elemento di $\mathscr{F}(U)$. Due coppie (U, s) e (V, t) di questo tipo definiscono lo stesso elemento se e solo se esiste un intorno aperto W di x in $U \cap V$ tale che le restrizioni di s e t a W coincidono. Si dice che gli elementi della spiga $\mathscr{F}_x$ sono i *germi delle sezioni di $\mathscr{F}$ su x.*

Teorema 2.1.1. *(fascificazione di un prefascio) Sia $\mathscr{F}_0$ un prefascio su X. Allora esiste ed è unico un fascio $\mathscr{F}$ ed esiste un'unica mappa di prefasci $f : \mathscr{F}_0 \longrightarrow \mathscr{F}$ tale che, se $\mathscr{G}$ è un fascio e $g : \mathscr{F}_0 \longrightarrow \mathscr{G}$ è una mappa di fasci, allora esiste un'unica mappa $h : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_0 \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "g"'] & \\ & \mathscr{F} \arrow[dl, dashed, "h"] \\ \mathscr{G} & \end{tikzcd}$$

commuta. Il fascio $\mathscr{F}$ viene detto fascificazione di $\mathscr{F}_0$.

Dimostrazione. Si costruisce il fascio $\mathscr{F}$ nel modo seguente:
Per ogni aperto U di X, sia $\mathscr{F}(U)$ l'insieme delle funzioni $s : U \longrightarrow \bigcup_{x \in U} \mathscr{F}_x$ tali che:

(i) Per ogni $x \in U$ si ha che $s(x) \in \mathscr{F}_x$

(ii) Per ogni $x \in U$ esiste un intorno V di x in U e un elemento $t \in \mathscr{F}(V)$ tali che per ogni $y \in V$ il germe t_y di t in y è uguale a $s(y)$

Allora $\mathscr{F}$ con le mappe naturali di restrizione è un fascio ed esiste un morfismo naturale $f : \mathscr{F}_0 \longrightarrow \mathscr{F}$ con la proprietà universale descritta sopra. L'unicità di $\mathscr{F}$ è una conseguenza diretta proprio della proprietà universale. $\square$

2.2 Fasci di anelli

Definizione 2.6. Se per ogni aperto $U \subseteq X$ si ha che $\mathscr{F}(U)$ è un gruppo (anello, etc.) e tutte le mappe di restrizione sono morfismi di gruppi (anelli, etc.), allora $\mathscr{F}$ si chiama *fascio di gruppi (anelli, etc.).*

Esempio 2.1. Per ogni spazio topologico X sia $\mathscr{F}_X(U)$ l'insieme delle funzioni continue $U \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora $\mathscr{F}_X(U)$ è un anello e $\mathscr{F}_X$ è un fascio di anelli. Se $g : Y \longrightarrow X$ è una mappa continua, l'operazione $f \mapsto f \circ g$ dà il seguente diagramma di omomorfismi:

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_Y(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}_X(f^{-1}U) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_Y(V) \arrow[r] & \mathscr{F}_X(f^{-1}V) \end{tikzcd}$$

che commuta per ogni $V \subseteq U$. Un'insieme di mappe di questo tipo è detto *morfismo* della coppia $(X, \mathscr{F}_X)$ nella coppia $(Y, \mathscr{F}_Y)$.

Proposizione 2.2.1. *Sia $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morfismo di fasci su X. Allora ϕ è un isomorfismo se e solo se le mappe indotte sulle spighe $\phi_x : \mathscr{F}_x \longrightarrow \mathscr{G}_x$ sono isomorfismi per ogni $x \in X$.*

Definizione 2.7. Sia $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ un morfismo di prefasci di anelli. Si definiscono il *prefascio kernel*, il *prefascio cokernel* e il *prefascio immagine* come i prefasci dati dalle mappe $U \mapsto ker\phi(U)$, $U \mapsto coker\phi(U)$, $U \mapsto im\phi(U)$ rispettivamente.

Osservazione 3. Se ϕ è un morfismo di fasci, allora $ker\phi$ è un fascio, ma in generale $coker\phi$ e $im\phi$ non lo sono. Si considerano quindi come fascio cokernel e fascio immagine la loro fascificazione.

Proposizione 2.2.2. *Un morfismo di fasci $\phi : \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{G}$ è iniettivo se e solo se $ker\phi = 0$ ed è suriettivo se e solo se $im\phi = \mathscr{G}$*

Definizione 2.8. Sia $f : X \longrightarrow Y$ una mappa continua di spazi topologici. Per ogni fascio $\mathscr{F}$ su X si chiama *fascio immagine diretta di f* il fascio $f_*\mathscr{F}$ su Y definito da $(f_*\mathscr{F})(V) = \mathscr{F}(f^{-1}V)$ per ogni aperto $V \subseteq Y$. Per ogni fascio $\mathscr{G}$ su Y, si chiama *fascio immagine inversa di f* il fascio $f^{-1}\mathscr{G}$ su X ottenuto dalla fascificazione del prefascio determinato dalla mappa $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathscr{G}(V)$, dove U è un aperto qualunque di X.

Osservazione 4. f_* e f^{-1} sono dei funtori tra la categoria dei fasci su X e quella dei fasci su Y.

Definizione 2.9. Sia $Z \subseteq X$, sia $i : Z \longrightarrow X$ il morfismo di inclusione. Se $\mathscr{F}$ è un fascio su X, si chiama *restrizione* di $\mathscr{F}$ a Z, e si indica con $\mathscr{F}|_Z$, il fascio $i^{-1}\mathscr{F}$.

2.3 Varietà algebriche e affini

Definizione 2.10. Sia X una varietà algebrica affine (si veda l'appendice A) e sia R il suo anello delle coordinate. Poiché X è irriducibile, $I(X)$ è primo e R è un dominio d'integrità. Sia $\mathbb{K}(X)$ il campo delle frazioni di R, per ogni $x \in X$ sia $\mathfrak{m}_x = \{f \in R | f(x) = 0\}$ e sia $\mathscr{O}_x = R_{\mathfrak{m}_x}$; allora $\mathscr{O}_x = \left\{\frac{f}{g} | f, g \in R, \quad g(x) \neq 0\right\} \subseteq \mathbb{K}(X)$. Per ogni aperto $U \subseteq X$, sia $\mathscr{O}_X(U) = \bigcap\limits_{x \in U} \mathscr{O}_x$. Tutti gli $\mathscr{O}_X(U)$ sono sottoanelli di $\mathbb{K}(X)$; inoltre se $V \subseteq U$, allora $\mathscr{O}_X(U) \subseteq \mathscr{O}_X(V)$. Prendendo come mappa di restrizione l'inclusione, quello che si ottiene è un prefascio $\mathscr{O}_X$ su X, detto *fascio di struttura su X*.

Osservazione 5.

(i) $\mathscr{O}_X$ è un fascio

(ii) $\mathscr{O}_X(X_f) = R_f$

(iii) $\Gamma(X, \mathscr{O}_X) = R$

(iv) La spiga di $\mathscr{O}_X$ in x è $\mathscr{O}_x$

Proposizione 2.3.1. *Siano $X \subseteq \mathbb{K}^n$ e $Y \subseteq \mathbb{K}^m$ due varietà algebriche e sia $f : X \longrightarrow Y$ una mappa continua. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) f è un morfismo

(ii) $g \in \Gamma(Y, \mathscr{O}_Y) \Rightarrow g \circ f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$

(iii) Per ogni aperto $U \subseteq Y$, $g \in \Gamma(U, \mathscr{O}_Y) \Rightarrow g \circ f \in \Gamma(f^{-1}U, \mathscr{O}_X)$

(iv) Per ogni $x \in X$, $g \in \mathscr{O}_{f(x)} \Rightarrow g \circ f \in \mathscr{O}_x$

Definizione 2.11. Si chiama *varietà affine* uno spazio topologico X dotato di un fascio di funzioni a valori in $\mathbb{K}$ tale che esso sia isomorfo ad una varietà algebrica di un qualche $\mathbb{K}^n$ con il suo fascio di struttura.

Esempio 2.2. La varietà affine $(\mathbb{K}^n, \mathscr{O}_{\mathbb{K}^n})$ è isomorfa allo spazio affine n-dimensionale su $\mathbb{K}$.

Definizione 2.12. Sia Y un chiuso irriducibile di X. Si può definire un fascio indotto da $\mathscr{O}_X$ su Y nel modo seguente:
Se V è un aperto di Y, allora
$\mathscr{O}_Y(V) = \{f : V \to \mathbb{K}|\ \forall x \in V\ \exists U \subseteq X,\ x \in U,\ \exists F \in \mathscr{O}_X(U)\ t.c.\ f = F|_{U \cap V}\}$
In questo modo $(Y, \mathscr{O}_Y)$ è una varietà affine con la struttura indotta da quella di X.

Osservazione 6. Sia $(X, \mathscr{O}_X)$ una varietà affine e sia $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$. Allora anche $(X_f, \mathscr{O}_{X|X_f})$ è una varietà affine.

Capitolo 3

Lo spettro primo di un anello

3.1 La topologia di $\operatorname{Spec} R$

Definizione 3.1. Si chiama *spettro primo* di un anello R l'insieme degli ideali primi di R, e si indica con $\operatorname{Spec} R$.
Si può dare a $\operatorname{Spec} R$ una struttura di spazio topologico, definendo i chiusi come insiemi del tipo $V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di R. Tale topologia è detta *topologia di Zariski* o *topologia spettrale*. Si definiscono anche gli aperti $(\operatorname{Spec} R)_f = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p}\} = V((f))^C \quad \forall f \in R$ (detti *aperti distinti*). Tali aperti formano una base per la topologia di Zariski su $\operatorname{Spec} R$.

Osservazione 7. In generale la topologia di Zariski non è T_1, infatti la chiusura del punto $\mathfrak{p}$ corrisponde all'insieme $V(\mathfrak{p})$, quindi i punti chiusi di $\operatorname{Spec} R$ sono tutti e soli gli ideali massimali.

Osservazione 8.

(i) $(\operatorname{Spec} R)_f = \varnothing$ se e solo se f è nilpotente

(ii) $(\operatorname{Spec} R)_f = \operatorname{Spec} R$ se e solo se f è invertibile

Definizione 3.2. Sia Z sottoinsieme chiuso irriducibile di $\operatorname{Spec} R$ e sia $z \in Z$. z si dice *punto generico* di Z se $\overline{\{z\}} = Z$.

Proposizione 3.1.1. *Se $x \in \mathit{Spec}\, R$, allora $\overline{\{x\}}$ è irriducibile e un suo punto generico è x. Viceversa, ogni chiuso irriducibile $Z \subseteq \mathit{Spec}\, R$ è uguale a $V(\mathfrak{p})$ per un qualche $\mathfrak{p} \in \mathit{Spec}\, R$, e $\mathfrak{p}$ è il suo unico punto generico.*

Dimostrazione. Sia per assurdo $\overline{\{x\}} = W_1 \amalg W_2$, con W_1 e W_2 chiusi. Allora $x \in W_1$ o $x \in W_2$, quindi esiste un chiuso che contiene x ed è contenuto nella chiusura di x, quindi la chiusura di x è irriducibile.
Viceversa, sia $V(\mathfrak{a})$ sia irriducibile. Poichè $V(\mathfrak{a}) = V(\sqrt{\mathfrak{a}})$, si può supporre che $\mathfrak{a}$ sia radicale. Sia per assurdo $\mathfrak{a}$ non primo; allora esistono $f, g \in R$ tali che $f, g \in \mathfrak{a}$ e $fg \notin \mathfrak{a}$. Siano $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + (f)$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + (g)$. Allora $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cup \mathfrak{c}$; infatti, se $h = \alpha f + a_1 = \beta g + a_2$ è un elemento di $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$ ($a_1, a_2 \in \mathfrak{a}$, $\alpha, \beta \in R$), allora $h^2 \in A$, quindi anche $h \in A$. Allora $V(\mathfrak{a}) = V(\mathfrak{b}) \cap V(\mathfrak{c})$. D'altra parte $\mathfrak{a}$ è intersezione di primi che lo contengono, ed in particolare esisterà un primo $\mathfrak{p}$ che contiene $\mathfrak{a}$ ma non f. Allora $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \smallsetminus \mathfrak{b}$, quindi $V(\mathfrak{b}) \nsubseteq V(\mathfrak{a})$. Analogamente $V(\mathfrak{c}) \nsubseteq V(\mathfrak{a})$, quindi $V(\mathfrak{a})$ è riducibile. Questa contraddizione mostra che $\mathfrak{a}$ è primo. Allora $V(\mathfrak{a})$ è la chiusura di x e $\mathfrak{a}$ è un suo punto generico.
Se $\mathfrak{p}$ è un altro punto generico, allora $\mathfrak{a}$ è nella chiusura di $\mathfrak{p}$ (e viceversa), quindi $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}$. □

Proposizione 3.1.2. *Sia $\{f_\alpha\}_{\alpha \in S}$ una famiglia di elementi di R. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $\{(\mathit{Spec}\, R_{f_\alpha})\}_{\alpha \in S}$ *è un ricoprimento aperto di Spec R*

(ii) $1 \in \left(\{f_\alpha\}_{\alpha \in S}\right)$

Dimostrazione. Spec R è l'unione degli $(\mathrm{Spec}\, R)_{f_\alpha}$ se e solo se ogni suo punto non contiene almeno uno degli f_α, cioè se e solo se nessun ideale primo contiene $\left(\{f_\alpha\}_{\alpha \in S}\right)$, e questo succede se e solo se $1 \in \left(\{f_\alpha\}_{\alpha \in S}\right)$. □

Osservazione 9. Lo spettro di un anello è uno spazio topologico quasi-compatto, e gli aperti distinti sono anch'essi quasi-compatti. Non è però sempre vero che gli aperti sono tutti quasi-compatti, a meno che lo spazio non sia noetheriano.

Proposizione 3.1.3. *Sia R un anello, sia $X = Spec\,R$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) X è sconnesso

(ii) R è isomorfo ad un prodotto di anelli $R_1 \times R_2$

(iii) R contiene un idempotente diverso da 0 e da 1

3.2 Il fascio di struttura di Spec R

Osservazione 10. A questo punto si vuole dotare lo spazio topologico Spec R di un fascio di struttura. Per poter costruire tale fascio sono necessarie due proprietà degli aperti distinti, che sono:

(i) $(\operatorname{Spec} R)_f \cap (\operatorname{Spec} R)_g = (\operatorname{Spec} R)_{fg}$

(ii) $(\operatorname{Spec} R)_g \subseteq (\operatorname{Spec} R)_f \iff g \in \sqrt{(f)}$

Si può quindi associare ad ogni aperto del tipo $(\operatorname{Spec} R)_f$ la localizzazione R_f. Inoltre se $(\operatorname{Spec} R)_g \subseteq (\operatorname{Spec} R)_f$, allora esiste una mappa canonica $R_f \longrightarrow R_g$; infatti, poiché $g^n = hf$ per qualche n e f, questa mappa manda $\dfrac{a}{f^m}$ in $\dfrac{ah^m}{g^{mn}}$. In particolare, se $(\operatorname{Spec} R)_f = (\operatorname{Spec} R)_g$ ci sono due mappe canoniche $R_f \longrightarrow R_g$ e $R_g \longrightarrow R_f$ che sono una l'inversa dell'altra, quindi si possono identificare R_f e R_g. Inoltre, se $(\operatorname{Spec} R)_k \subseteq (\operatorname{Spec} R)_g \subseteq (\operatorname{Spec} R)_f$, si ottiene un diagramma commutativo di mappe canoniche:

$$\begin{tikzcd} R_f \arrow[dr] \arrow[dd] & \\ & R_g \arrow[dl] \\ R_k & \end{tikzcd}$$

In più, se $\mathfrak{p} \in (\operatorname{Spec} R)_f$, allora $f \notin \mathfrak{p}$ ed esiste una mappa naturale $R_f \longrightarrow R_{\mathfrak{p}}$.

Lemma 3.2.1. *Sia* $(\mathrm{Spec}\, R)_f = \bigcup_{\alpha \in S} (\mathrm{Spec}\, R)_{f_\alpha}$*. Se un elemento* $g \in R_f$ *ha immagine zero in tutti gli anelli* R_{f_α}*, allora* $g = 0$*.*

Lemma 3.2.2. *Sia* $(\mathrm{Spec}\, R)_f = \bigcup_{\alpha \in S} (\mathrm{Spec}\, R)_{f_\alpha}$*, siano* $g_\alpha \in R_{f_\alpha}$ *tali che* g_α *e* g_β *hanno la stessa immagine in* $R_{f_\alpha f_\beta}$*. Allora esiste* $g \in R_f$ *che ha immagine* g_α *in* R_{f_α} *per ogni* $\alpha \in S$*.*

Osservazione 11. I due lemmi precedenti mostrano come, assegnando R_f a $(\mathrm{Spec}\, R)_f$, si ottiene la cosa più vicina possibile ad un fascio. C'è uno ed un solo modo per estendere questa corrispondenza in modo tale da ottenere un fascio.

Definizione 3.3. Per ogni aperto U di $X = \mathrm{Spec}\, R$ sia $\mathscr{O}_X(U)$ l'insieme delle funzioni $s : U \longrightarrow \coprod_{\mathfrak{p} \in U} R_\mathfrak{p}$ tali che $s(\mathfrak{p}) \in R_\mathfrak{p}$ per ogni $\mathfrak{p} \in X$ e tali che s sia localmente un quoziente di elementi di R. Per essere più precisi, questo significa che per ogni $\mathfrak{p} \in U$ deve esistere un intorno V di $\mathfrak{p}$ in U e due elementi $a, f \in R$ tali che per ogni $\mathfrak{q} \in V$ si ha che $f \notin \mathfrak{q}$ e $s(\mathfrak{q}) = \dfrac{a}{f}$ in $R_\mathfrak{q}$. $\mathscr{O}_X(U)$ è un anello, e se $V \subseteq U$ allora si può prendere come mappa di restrizione l'inclusione di $\mathscr{O}_X(U)$ in $\mathscr{O}_X(V)$, ottenendo così un prefascio. Per la natura locale della definizione, è evidente che $\mathscr{O}_X$ è un fascio.

Proposizione 3.2.3. *Sia* R *un anello e sia* $(X, \mathscr{O}_X)$ *il suo spettro. Allora valgono le cose seguenti:*

(i) Per ogni $\mathfrak{p} \in X$*, la spiga di* $\mathscr{O}_X$ *in* $\mathfrak{p}$ *è isomorfa ad* $R_\mathfrak{p}$

(ii) Per ogni $f \in R$*,* $\mathscr{O}_X(X_f)$ *è isomorfo ad* R_f

(iii) $\Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ *è isomorfo ad* R

(iv) Se $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$*, allora esiste un morfismo canonico tra le spighe di* $\mathscr{O}_X$ *in* $\mathfrak{p}_1$ *e* $\mathfrak{p}_2$*, cioè esiste un morfismo* $R_{\mathfrak{p}_2} \longrightarrow R_{\mathfrak{p}_1}$

Esempio 3.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora $\mathrm{Spec}\, \mathbb{K}$ ha un solo punto (0), ed il fascio di struttura di $\mathrm{Spec}\, \mathbb{K}$ è $\mathbb{K}$ stesso.

Più in generale, sia R un anello artiniano. Allora R si scompone in un prodotto di anelli primari, cioè $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$. In generale lo spettro di una somma diretta di anelli è l'unione disgiunta degli spettri dei singoli anelli, quindi $\operatorname{Spec} R = \coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} R_i = \{\mathfrak{p}_i \dots \mathfrak{p}_n\}$ con la topologia discreta. Inoltre il suo fascio di struttura associa semplicemente l'anello R_i al punto $\mathfrak{p}_i$ per ogni i.

Esempio 3.2. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso. Allora $\mathbb{K}[x]$ ha come ideali primi solo (0) e i massimali della forma $(x-a)$, $a \in \mathbb{K}$, quindi si possono identificare i punti chiusi di $\operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]$ con quelli della retta affine $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$, aggiungendo però il punto generico (0), che è denso.
La spiga di $\mathscr{O}_{\mathbb{A}_1(\mathbb{K})}$ nel punto $(x-a)$ è $\mathbb{K}[x]_{(x-a)}$, mentre la spiga in (0) è $\mathbb{K}[x]_{(0)} = \mathbb{K}(x)$, detto il *campo delle funzioni* di $\operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]$.

Esempio 3.3. Si consideri ora lo spettro di $\mathbb{Z}$. Gli ideali primi di $\mathbb{Z}$ sono (0) e tutti gli ideali (p), dove p è un numero primo. Allora si può visualizzare $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ come una linea contenente tutti i punti chiusi (p), in aggiunta al punto generico (0).
La spiga di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ in (p) è la localizzazione $\mathbb{Z}_{(p)}$, mentre la spiga in (0) è $\mathbb{Q}$, che è il campo delle funzioni di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. I campi dei residui delle spighe di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ sono quindi tutti e soli i campi primi presi una volta ciascuno.

Esempio 3.4. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, sia $X = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x,y]$. I punti di X sono i massimali del tipo $(x-a, y-b)$, gli ideali primi (f) con f irriducibile e (0). I massimali possono essere identificati con i punti del piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$, ma in aggiunta a questi sono presenti il punto generico (0) e i punti (f), la cui chiusura coincide in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ con la curva di equazione $f(x,y) = 0$.

Definizione 3.4. Sia R un anello. Si definisce *spazio affine n-dimensionale su R* lo spazio $\operatorname{Spec} R[x_1, \dots x_n]$ e si indica con $\mathbb{A}^n(R)$.

Esempio 3.5. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso, sia $Z = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x] / (x^2)$. Allora Z è costituito di un solo punto, ma in aggiunta alle funzioni costanti,

Z supporta anche la funzione $f(x) = x$. D'altra parte ${}^{\mathbb{K}[x]}\!\big/_{(x^2)}$ non è altro che un quoziente di $\mathbb{K}[x]$ ottenuto ponendo x "quasi uguale a zero", quindi si può identificare Z con il punto $0 \in \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$; il suo fascio di struttura si ottiene prendendo le funzioni di $\mathscr{O}_{\mathbb{A}^1(\mathbb{K})}$ modulo le funzioni che si annullano fino al second'ordine del loro sviluppo di Taylor. Allora le funzioni che si annullano in zero sono tutte e sole le funzioni tali che $f(0) = f'(0) = 0$, cioè i dati di una funzione su Z sono il suo valore e il valore della sua derivata prima in 0. Più in generale, si può pensare a $\operatorname{Spec} {}^{\mathbb{K}[x_1, \dots x_n]}\!\big/_{\mathfrak{a}}$ come a $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(\mathbb{K})$ dal punto di vista topologico, ma con un fascio sufficientemente allargato, in modo tale da contenere alcuni sviluppi di Taylor in direzione normale a $V(\mathfrak{a})$.

3.3 Spazi localmente anellati

Osservazione 12. Dopo aver associato ad ogni anello il suo spettro, si vuole trovare una categoria tale che questa corrispondenza sia funtoriale. Serve dunque una categoria di spazi dotati di fasci di anelli, e tale categoria è quella degli *spazi localmente anellati.*

Definizione 3.5. Uno *spazio anellato* è una coppia $(X, \mathscr{O}_X)$ che consiste di uno spazio topologico X e di un fascio di anelli $\mathscr{O}_X$ su X.
Un *morfismo di spazi anellati* da $(x, \mathscr{O}_X)$ a $(Y, \mathscr{O}_Y)$ è una coppia $(f, f^\sharp)$, dove $f : X \longrightarrow Y$ è una mappa continua tra spazi topologici e $f^\sharp : \mathscr{O}_Y \longrightarrow f_*\mathscr{O}_X$ è un morfismo di fasci di anelli su Y.
$(X, \mathscr{O}_X)$ si dice *localmente anellato* se per ogni $x \in X$ la spiga di $\mathscr{O}_X$ in x è un anello locale.
Un *morfismo di spazi localmente anellati* è un morfismo $(f, f^\sharp)$ di spazi anellati tale che per ogni $x \in X$ la mappa indotta sulle spighe $f^\sharp_x : \mathscr{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathscr{O}_{X,x}$ sia un morfismo di anelli locali, cioè è tale che la preimmagine dell'ideale massimale di $\mathscr{O}_{X,x}$ sia il massimale di $\mathscr{O}_{Y,f(x)}$.

Proposizione 3.3.1.

(i) *Se R è un anello, allora $(\mathit{Spec}\, R, \mathscr{O}_{\mathit{Spec}\, R})$ è uno spazio localmente anellato*

(ii) *Se $\phi : R \longrightarrow S$ è un omomorfismo di anelli, allora esso induce un morfismo naturale di spazi localmente anellati $(f, f^\sharp) : (\mathit{Spec}\, S, \mathscr{O}_{\mathit{Spec}\, S}) \longrightarrow (\mathit{Spec}\, R, \mathscr{O}_{\mathit{Spec}\, R})$*

(iii) *Ogni morfismo di spazi localmente anellati è indotto da un omomorfismo di anelli*

Dimostrazione.

(i) Segue direttamente dalla proposizione 3.2.3.

(ii) Dato un omomorfismo $\phi : R \longrightarrow S$, si può definire una mappa $f : \operatorname{Spec} S \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ ponendo $f(x) = \phi^{-1}(x)$. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di R, allora è immediato verificare che $f^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\phi(\mathfrak{a}))$, quindi f è continua.
Per ogni $x \in \operatorname{Spec} S$, si può localizzare ϕ, ottenendo così un morfismo di anelli locali $\phi_x : R_{\phi^{-1}(x)} \longrightarrow S_x$. Allora per ogni aperto V di $\operatorname{Spec} R$ si ottiene un omomorfismo di anelli $f^\sharp : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R}(V) \longrightarrow \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S}(f^{-1}V)$. Questo dà un morfismo di fasci $f^\sharp : \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R} \longrightarrow f_*\mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S}$, e le mappe indotte da $f^\sharp$ sulle spighe sono i morfismi locali ϕ_x, quindi $(f, f^\sharp)$ è un morfismo di spazio localmente anellati.

(iii) Sia $(f, f^\sharp)$ un morfismo di spazi localmente anellati da $\operatorname{Spec} S$ a $\operatorname{Spec} R$. Prendendo le sezioni globali, $f^\sharp$ induce un omomorfismo di anelli $\phi : \Gamma(\operatorname{Spec} R, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} R}) \longrightarrow \Gamma(\operatorname{Spec} S, \mathscr{O}_{\operatorname{Spec} S})$. Per la proposizione 3.2.3, questi anelli sono R e S rispettivamente, quindi ϕ è un omomorfismo da R a S. Per ogni $x \in \operatorname{Spec} S$ si ha dunque un omomorfismo sulle spighe $R_{f(x)} \longrightarrow S_x$ che deve essere compatibile con la mappa ϕ sulle sezioni globali e con i morfismi di localizzazione, cioè il diagramma

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & S \arrow[d] \\ R_{f(x)} \arrow[r, "f^\sharp_x"'] & S_x \end{tikzcd}$$

deve commutare. Poiché $f^\sharp$ è un omomorfismo di anelli locali, ne segue che $\phi^{-1}(x) = f(x)$, quindi f coincide con la mappa indotta da ϕ sugli spettri. A questo punto è immediato mostrare che anche $f^\sharp$ è indotta da ϕ, cioè che il morfismo di spazi anellati $(f, f^\sharp)$ è proprio quello indotto da ϕ.

□

Osservazione 13. La proposizione 3.3.1 mostra che si possono definire due funtori controvarianti Spec dalla categoria degli anelli a quella degli spazi localmente anellati e Γ dalla categoria degli spazi localmente anellati (ristretta agli spettri di anelli) a quella degli anelli.

Teorema 3.3.2. *I funtori Spec e Γ definiscono un'antiequivalenza tra la categoria degli anelli e quella degli spettri di anelli.*

Dimostrazione. Il funtore Spec è suriettivo essenzialmente per definizione; in più $\Gamma \circ \operatorname{Spec}$ è chiaramente isomorfo all'identità nella categoria degli anelli. Allora è sufficiente dimostrare che per ogni coppia di anelli R e S le mappe $\operatorname{Spec} : Mor(R, S) \longrightarrow Mor(\operatorname{Spec} S, \operatorname{Spec} R)$ e $\Gamma : Mor(\operatorname{Spec} S, \operatorname{Spec} R) \longrightarrow Mor(R, S)$ sono delle biezioni e sono una l'inversa dell'altra, ma questo segue direttamente dalla proposizione 3.3.1, quindi il teorema è provato. □

Capitolo 4

Schemi

4.1 Schemi e loro morfismi

Definizione 4.1. Uno *schema affine* è uno spazio localmente anellato $(X, \mathscr{O}_X)$ isomorfo (come spazio localmente anellato) allo spettro di un qualche anello con il suo fascio di struttura.
Uno *schema* è uno spazio localmente anellato tale che per ogni punto $x \in X$ esiste un intorno aperto U tale che $(U, \mathscr{O}_{X|U})$ è isomorfo allo spettro di un qualche anello (cioè localmente è uno schema affine).
Si chiama l'insieme X *spazio topologico sottostante* ed $\mathscr{O}_X$ il suo *fascio di struttura*; con abuso di notazione spesso si scrive solo X per indicare la coppia $(X, \mathscr{O}_X)$, e nel caso in cui ci si voglia riferire solo allo spazio topologico senza la sua struttura di schema, si scrive $Sp(X)$ (*spazio di* X).
Un *morfismo di schemi* è un morfismo come spazi localmente anellati.

Definizione 4.2. Un aperto di uno schema X si dice *aperto affine* se è isomorfo (come spazio localmente anellato) allo spettro di un qualche anello.

Proposizione 4.1.1. *(criterio per l'affinità) Uno schema X è affine se e solo se esiste un numero finito di elementi $f_1, \dots f_r \in \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$ tali che X_{f_i} è affine per ogni $i \in I$ e $1 \in (f_1, \dots f_r)$.*

Lemma 4.1.2. *(di incollamento) Siano X_1 e X_2 due schemi, siano $U_1 \subseteq X_1$ e $U_2 \subseteq X_2$ insiemi aperti, sia $\phi : (U_1, \mathscr{O}_{X_1|U_1}) \longrightarrow (U_2, \mathscr{O}_{X_2|U_2})$ un isomorfi-*

smo di spazi localmente anellati. Allora si può definire un nuovo schema X, ottenuto incollando X_1 e X_2 lungo U_1 e U_2 tramite ϕ. Lo spazio di X sarà quindi ${}^{(X_1 \amalg X_2)}\!/\!_{\sim}$, dove $\sim$ è una relazione d'equivalenza che identifica x_1 e $\phi(x_1)$ per ogni $x_1 \in U_1$ (a X ovviamente viene data la topologia quoziente). Allora ci sono due mappe $i : X_1 \longrightarrow X$ e $j : X_2 \longrightarrow X$ e si ha che $V \subseteq X$ è aperto se e solo se $i^{-1}V$ e $j^{-1}V$ sono aperti. Si può quindi definire il fascio di struttura $\mathscr{O}_X$ nel modo seguente:
Per ogni aperto $V \subseteq X$ sia
$\mathscr{O}_X(V) = \{(s_1, s_2) | s_1 \in \mathscr{O}_{x_1}(i^{-1}V), s_2 \in \mathscr{O}_{x_2}(j^{-1}V), \phi(s_1|_{i^{-1}V \cap U_1}) = s_2|_{j^{-1}V \cap U_2}\}$
In questo modo si ha che $\mathscr{O}_X$ è un fascio e X è uno spazio localmente anellato; inoltre, essendo X_1 e X_2 schemi, ogni punto di X ammette un'intorno aperto affine, quindi X è uno schema.

Esempio 4.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia $X_1 = X_2 = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$, sia $U_1 = U_2 = \mathbb{A}^1(\mathbb{K})$ meno il punto (x) e sia $\phi : U_1 \longrightarrow U_2$ il morfismo identità. Sia X lo schema ottenuto incollando X_1 e X_2 lungo U_1 e U_2 tramite ϕ; allora lo schema X è la retta affine con il punto (x) doppio (X inoltre è un esempio di schema non affine).

Osservazione 14. La nozione di incollamento di schemi può essere estesa ad un'infinità numerabile di schemi nel modo seguente:
Sia $\{X_i\}_{i \in I}$ una famiglia di schemi, sia X_{ij} un aperto di X_i per ogni $i \neq j$ in I, sia $\{\psi_{ij}\}$ una famiglia di isomorfismi di schemi del tipo $\psi_{ij} : X_{ij} \longrightarrow X_{ji}$ con le seguenti proprietà:

(i) ${\psi_{ij}}^{-1} = \psi_{ji}$ per ogni $i \neq j$ in I

(ii) $\psi_{ij}(X_{ij} \cap X_{ik}) = X_{ji} \cap X_{jk}$ per ogni $i, j, k \in I$

(iii) $\psi_{jk} \circ \psi_{ij}|_{X_{ij} \cap X_{ik}} = \psi_{ik}|_{X_{ij} \cap X_{ik}}$

Allora è possibile definire un nuovo schema X ottenuto incollando X_i e X_j lungo X_{ij} e X_{ji} tramite il morfismo ψ_{ij} per ogni $i \neq j$ in I come si è fatto in precedenza nel caso di due schemi.

Definizione 4.3. Sia S uno schema fissato. Uno *schema su* S è uno schema X, insieme ad un morfismo $X \longrightarrow S$.
Se X e Y sono schemi su S, un *morfismo di schemi su* S (detto anche S-*morfismo*), è uno morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ tale che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & S & \end{tikzcd}$$

commuta.

Teorema 4.1.3. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo algebricamente chiuso. Allora esiste un funtore* t *dalla categoria delle varietà algebriche su* $\mathbb{K}$ *alla categoria degli schemi su* $\mathbb{K}$. *Inoltre per ogni varietà* V *si ha che il suo spazio topologico è omeomorfo all'insieme dei punti chiusi di* $t(V)$ *dotato della topologia indotta, e il fascio su* V *si ottiene semplicemente restringendo il fascio su* $t(V)$ *tramite questo omeomorfismo.*

Definizione 4.4. Sia X uno schema, per ogni $x \in X$ sia $\mathscr{O}_x$ l'anello locale in x, e sia $\mathfrak{m}_x$ il suo massimale. Si definisce *campo dei residui* di x su X il campo $\mathbb{K}(x) = {}^{\mathscr{O}_x}\!/\!_{\mathfrak{m}_x}$.

Osservazione 15.

(i) Sia V una varietà su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso. Allora $x \in t(V)$ è chiuso $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{K}(x)$ è isomorfo a $\mathbb{K}$

(ii) Se $f : X \longrightarrow Y$ è un morfismo di schemi su $\mathbb{K}$ e $x \in X$ è un punto con campo dei residui $\mathbb{K}$, allora $f(x) \in Y$ ha campo dei residui $\mathbb{K}$

(iii) Se V e W sono due varietà, allora esiste una biezione naturale tra l'insiemi di morfismi su $\mathbb{K}$ da V a W e l'insieme dei morfismi su $\mathbb{K}$ da $t(V)$ a $t(W)$

Proposizione 4.1.4. *Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi. Se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}_{i\in I}$ di X tale che la mappa indotta $f^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i$ è un isomorfismo per ogni $i \in I$, allora f è un isomorfismo.*

Definizione 4.5. Un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ si dice *dominante* se $\overline{f(X)} = Y$.

Proposizione 4.1.5. *Sia $\phi : R \longrightarrow S$ un omomorfismo di anelli e sia $f : Spec\, S \longrightarrow Spec\, R$ il morfismo di schemi affini indotto da ϕ. Allora sono vere le seguenti affermazioni:*

(i) $f^\sharp : \mathscr{O}_{Spec\, R} \longrightarrow f_*\mathscr{O}_{Spec\, S}$ è iniettiva se e solo se ϕ è iniettiva. Inoltre in questo caso f è un morfismo dominante

(ii) ϕ è suriettiva se e solo se f è un omeomorfismo di $Spec\, S$ in un sottoinsieme chiuso di $Spec\, R$ e $f^\sharp : \mathscr{O}_{Spec\, R} \longrightarrow f_*\mathscr{O}_{Spec\, S}$ è suriettiva

4.2 Prime proprietà

Definizione 4.6. Uno schema X si dice *connesso* se $Sp(X)$ è connesso.
X si dice *irriducibile* se $Sp(X)$ è irriducibile.

Definizione 4.7. Uno schema X si dice d'integrità se per ogni aperto $U \subseteq X$ l'anello $\mathscr{O}_X(U)$ è un dominio d'integrità.
X si dice *ridotto* se per ogni $x \in X$ la spiga $\mathscr{O}_x$ non contiene nilpotenti.

Esempio 4.2. Sia $X = \operatorname{Spec} R$ uno schema affine. Allora:

(i) X è ridotto se e solo se il nilradicale di R è nullo

(ii) X è irriducibile se e solo se il nilradicale di R è primo

(iii) X è d'integrità se e solo se R è un dominio d'integrità

Proposizione 4.2.1. *Sia X uno schema. Allora:*

(i) X è ridotto se e solo se per ogni aperto U di X l'anello $\mathscr{O}_X(U)$ non contiene nilpotenti

(ii) *Se X è d'integrità, allora per ogni $x \in X$ l'anello locale $\mathscr{O}_x$ è un dominio d'integrità*

Dimostrazione.

(i) Sia X ridotto, sia U un aperto di X, sia $f \in \mathscr{O}_X(U)$ tale che $f^n = 0$. Se fosse $f \neq 0$, allora esisterebbe $x \in U$ tale che $f_x \neq 0$ in $\mathscr{O}_x$,ma $f_x^n = 0$. Viceversa, sia $\overline{f} \in \mathscr{O}_x$ un nilpotente. Allora esistono un aperto U e $f \in \mathscr{O}_X(U)$ tale che $f_x = \overline{f}$. Restringendo U, se necessario, si può assumere che f sia nilpotente, quindi nullo

(ii) Ovvio, poiché la localizzazione di un dominio è un dominio (se non è nulla)

□

Proposizione 4.2.2. *Uno schema X è d'integrità se e solo se è ridotto e irriducibile.*

Definizione 4.8. Uno schema X su $\operatorname{Spec} R$ si dice di tipo finito su R se X è quasi-compatto e per ogni aperto affine U di X l'anello $\Gamma(U, \mathscr{O}_X)$ è una R-algebra finitamente generata.

Proposizione 4.2.3. *Sia X uno schema su Spec R. Se esiste un ricoprimento finito di aperti affini $\{U_i\}$ tale che $\Gamma(U_i, \mathscr{O}_X)$ è una R-algebra finitamente generata, allora X è di tipo finito su R.*

Definizione 4.9. Uno schema X si dice *localmente noetheriano* se esiste un ricoprimento di aperti affini $\{\operatorname{Spec} R_i\}_{i \in I}$ tale che R_i è un anello noetheriano per ogni $i \in I$.
X si dice *noetheriano* se è localmente noetheriano e quasi-compatto.

Proposizione 4.2.4. *X è noetheriano se e solo se esiste un ricoprimento finito di aperti affini $\{\mathit{Spec}\, R_i\}_{i \in I}$ tale che R_i è un anello noetheriano per ogni $i \in I$.*

Osservazione 16. Se X è uno schema noetheriano allora $Sp(X)$ è uno spazio topologico noetheriano, ma in generale non vale il contrario.

Proposizione 4.2.5. *Uno schema X è localmente noetheriano se e solo se per ogni sottoinsieme aperto affine $U = \mathrm{Spec}\, R$, R è noetheriano.*

Lemma 4.2.6. *Sia R un anello, sia $\{(\mathrm{Spec}\, R)_{f_i}\}$ un ricoprimento finito di aperti affini di $\mathrm{Spec}\, R$, sia M un R-modulo. Allora M è finitamente generato se e solo se la localizzazione M_{f_i} è un R_{f_i}-modulo finitamente generato per ogni i.*

Proposizione 4.2.7. *$\mathrm{Spec}\, R$ è noetheriano se e solo se R è noetheriano.*

Dimostrazione. Per definizione se R è noetheriano, allora $\mathrm{Spec}\, R$ è uno schema noetheriano.
Sia ora X uno schema noetheriano, sia $\mathfrak{a}$ un ideale di R; è sufficiente dimostrare che $\mathfrak{a}$ è finitamente generato. Per definizione $\mathrm{Spec}\, R$ può essere ricoperto da un'infinità numerabile di sottoschemi aperti affini, che sono spettri di anelli noetheriani. Poiché ogni localizzazione di un anello noetheriano è ancora noetheriana, è possibile ricoprire $\mathrm{Spec}\, R$ con dei sottoschemi aperti affini della forma $(\mathrm{Spec}\, R)_{f_i}$, dove gli f_i sono un numero finito di elementi di R, tali che tutti gli R_{f_i} sono anelli noetheriani. Gli ideali $\mathfrak{b}_i = \mathfrak{a}R_{f_i}$ di R_{f_i} sono quindi finitamente generati, e la prova risulta così conclusa per il lemma 4.2.6. □

Definizione 4.10. Un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ si dice *localmente di tipo finito* se esiste un ricoprimento di aperti affini $\{V_i\}_{i\in I}$ di Y, con $V_i = \mathrm{Spec}\, S_i$, tale che per ogni $i \in I$ l'aperto $f^{-1}V_i$ può essere ricoperto da aperti affini $\{U_{ij}\}_{j\in J_i}$, con $U_{ij} = \mathrm{Spec}\, R_{ij}$, dove R_{ij} è una S_i-algebra finitamente generata.
Il morfismo f si dice *di tipo finito* se in più ogni insieme di indici J_i è finito.

Definizione 4.11. Un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ si dice *finito* se esiste un ricoprimento di aperti affini $\{V_i\}_{i\in I}$ di Y, con $V_i = \mathrm{Spec}\, S_i$ tale che per ogni $i \in I$ l'aperto $f^{-1}V_i = \mathrm{Spec}\, R_i$, dove R_i è una S_i-algebra finitamente generata come S_i-modulo.

Esempio 4.3. Se V è una varietà su un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso, allora $t(V)$ è uno schema d'integrità noetheriano di tipo finito su $\mathbb{K}$. Infatti V può essere ricoperto da un numero finito di varietà aperte affini, quindi $t(V)$ può essere ricoperto da un numero finito di aperti affini della forma $\operatorname{Spec} R_i$, dove R_i è un dominio d'integrità e una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, quindi è noetheriano.

Definizione 4.12. Sia R un dominio d'integrità e sia $\mathbb{K}$ il suo campo delle frazioni. Un elemento di $\mathbb{K}$ si dice *integrale su R* se è radice di un polinomio monico a coefficienti in R, e si chiama *chiusura integrale* di R l'insieme degli elementi di $\mathbb{K}$ integrali su R. R si dice *integralmente chiuso* se coincide con la sua chiusura integrale.

Definizione 4.13. Uno schema X si dice *normale* se per ogni $x \in X$ la spiga $\mathscr{O}_{X,x}$ è un dominio integralmente chiuso.

Teorema 4.2.8. *Sia X uno schema d'integrità. Per ogni sottoinsieme aperto affine $U = \operatorname{Spec} R$ sia $\widetilde{U} = \operatorname{Spec} \widetilde{R}$, dove $\widetilde{R}$ è la chiusura integrale di R nel suo campo dei quozienti. Allora si possono incollare questi schemi e ottenere uno schema $\widetilde{X}$ d'integrità e normale, detto la normalizzazione di X.*
Inoltre esiste un morfismo $f : \widetilde{X} \longrightarrow X$ con la seguente proprietà universale: Per ogni schema Z d'integrità e normale, per ogni morfismo dominante $g : Z \longrightarrow X$, esiste ed è unico il morfismo $h : Z \longrightarrow \widetilde{X}$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
X & \\
 & \widetilde{X} \arrow[ul, "f"'] \\
Z \arrow[uu, "g"] \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

commuta. Inoltre se X è di tipo finito su $\mathbb{K}$, allora f è un morfismo finito.

4.3 Sottoschemi

Definizione 4.14. Un *sottoschema aperto* di uno schema X è uno schema U tale che $Sp(U)$ è un aperto di $Sp(X)$ e $\mathscr{O}_U$ è isomorfo a $\mathscr{O}_{X|U}$, dove $\mathscr{O}_X$ è il fascio di struttura di X.
Un'*immersione aperta* è un morfismo di schemi $f : X \longrightarrow Y$ che induce un isomorfismo tra X e un sottoschema aperto di Y.

Definizione 4.15. Un'immersione chiusa è un morfismo di schemi $f : Y \longrightarrow X$ che induce un omeomorfismo tra $Sp(Y)$ e un sottoinsieme chiuso di $Sp(X)$ e tale che il morfismo di fasci su X $f^\sharp : \mathscr{O}_X \longrightarrow f_*\mathscr{O}_Y$ è suriettivo.
Un sottoschema chiuso di X è una classe d'equivalenza di immersioni chiuse, dove $f : Y \longrightarrow X$ e $f' : Y' \longrightarrow X$ sono equivalenti se esiste un isomorfismo $h : Y' \longrightarrow Y$ tale che il diagramma:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f"] & \\ & X \\ Y' \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

commuta.

Osservazione 17. Sia R un anello, sia $\mathfrak{a}$ un ideale di R, sia $X = \operatorname{Spec} R$, sia $Y = \operatorname{Spec} R/\mathfrak{a}$. Allora il morfismo di anelli $\pi : R \longrightarrow R/\mathfrak{a}$ induce un morfismo di schemi $f : Y \longrightarrow X$ che è un'immersione chiusa. Infatti f è un omeomorfismo di Y nell'insieme chiuso $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$, e la mappa di fasci su X $f^\sharp : \mathscr{O}_X \longrightarrow f_*\mathscr{O}_Y$ è suriettiva perché è suriettiva sulle spighe, che sono localizzazioni di R e $R/\mathfrak{a}$ rispettivamente.
Allora per ogni ideale di R si ottiene una struttura di sottoschema chiuso su $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. In particolare, ogni chiuso $C \subseteq X$ può avere più strutture di sottoschema chiuso di X, corrispondenti agli ideali $\mathfrak{a}$ di R tali che C è isomorfo a $V(\mathfrak{a})$.

Definizione 4.16. Sia X uno schema, sia Y un suo sottoinsieme chiuso. In generale Y può avere più strutture di sottoschema chiuso, ma tra queste

ce n'è una particolare, detta *struttura ridotta indotta di sottoschema chiuso*, definita nel modo seguente:
Sia $X = \operatorname{Spec} R$ uno schema affine, sia $\mathfrak{a}$ l'ideale di R ottenuto intersecando tutti gli ideali primi in Y; quindi $\mathfrak{a}$ è il più grande ideale di R tale che $V(\mathfrak{a}) = Y$. Allora si prende come struttura di sottoschema chiuso quella determinata da $\mathfrak{a}$ come visto in precedenza.
Sia invece X uno schema qualunque. Per ogni aperto affine $U_i \subseteq X$ si considera il chiuso $Y_i = Y \cap U_i$ di U_i, e gli si dà la struttura ridotta indotta definita per gli schemi affini. Allora per ogni i, j le restrizioni da U_i e U_j a $U_i \cap U_j$ sono isomorfe e per ogni i, j, k i tre isomorfismi su $U_i \cap U_j \cap U_k$ sono compatibili. Allora si possono incollare i fasci definiti sugli Y_i in modo tale da ottenere un fascio su Y, che ha la struttura voluta.

Teorema 4.3.1. *Sia X uno schema, sia Y un suo sottoschema chiuso con la struttura ridotta indotta, sia Y' è un altro sottoschema chiuso di X tale che $Sp(Y)$ è omeomorfo a $Sp(Y')$. Allora il diagramma:*

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "f"] & \\
& X \\
Y' \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

dove f e g sono immersioni chiuse, commuta.
Questo significa che la struttura ridotta indotta è la più piccola struttura che si può dare a Y (cioè è quella con meno funzioni regolari).

Osservazione 18. Se Y è un sottoschema chiuso di uno schema affine $\operatorname{Spec} R$, allora Y è uno schema affine della forma $\operatorname{Spec} R/\mathfrak{a}$.

Teorema 4.3.2. *Sia $f : Z \longrightarrow X$ un morfismo di schemi. Allora esiste ed è unico il sottoschema chiuso Y di X con la seguente proprietà universale:*
Il morfismo f fattorizza attraverso Y, e se Y' è un altro sottoschema chiuso di X attraverso cui f fattorizza, allora il morfismo $Y \longrightarrow X$ fattorizza

attraverso Y', cioè il diagramma

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[ur] & Y' \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}$$

commuta. Y viene detta immagine schematica di f.

Proposizione 4.3.3. *Nella notazione precedente, se Z è uno schema ridotto, allora l'immagine schematica di f è $\overline{f(Z)}$ con la struttura ridotta indotta di sottoschema chiuso.*

4.4 Prodotto fibrato

Osservazione 19. $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ è un oggetto terminale della categoria degli schemi, cioè per ogni schema X esiste ed è unico il morfismo $X \longrightarrow \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$.

Definizione 4.17. Sia S uno schema, siano X e Y schemi su S. Si definisce il *prodotto fibrato* di X e Y su S, denotato con $X \times_S Y$, come uno schema, insieme ai morfismi $p_1 : X \times_S Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times_S Y \longrightarrow Y$, in modo tale che siano compatibili con i morfismi su S. Si ottiene cioè il seguente diagramma commutativo.

$$\begin{tikzcd}
& X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\
X \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.4.1. *Sia Z uno schema su S e siano $\phi : Z \longrightarrow X$ e $\psi : Z \longrightarrow Y$ due morfismi compatibili con i morfismi di X e Y su S. Allora esiste ed è* *unico il morfismo $\theta : Z \longrightarrow X \times_S Y$ tale che il diagramma*

$$\begin{tikzcd} & X \times_S Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X & & Y \\ & Z \arrow[ul, "\phi"] \arrow[ur, "\psi"'] \arrow[uu, dashed, "\theta"] & \end{tikzcd}$$

commuta.

Definizione 4.18. Se X e Y sono schemi qualunque, possono essere pensati come schemi su $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, e si definisce il *prodotto* di X e Y, denotato con $X \times Y$, come il prodotto fibrato $X \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{Z}} Y$.

Teorema 4.4.2. *Per ogni coppia di schemi X e Y su S, il prodotto fibrato $X \times_S Y$ esiste ed è unico a meno di isomorfismi.*

Osservazione 20. Nel caso in cui $X = \operatorname{Spec} A$ e $Y = \operatorname{Spec} B$ siano schemi affini su $S = \operatorname{Spec} R$, allora il prodotto fibrato $X \times_S Y$ è uguale a $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$. Nel caso più generale, si ricopre S con aperti affini $\operatorname{Spec} R_i$ e la loro preimmagine tramite le mappe $X \longrightarrow Z$ e $Y \longrightarrow Z$ con aperti affini $\operatorname{Spec} A_{ij}$ e $\operatorname{Spec} B_{ik}$ rispettivamente, in modo tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

sia "ricoperto" da diagrammi del tipo

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} A_{ij} \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} B_{ik} \arrow[r] & \operatorname{Spec} R_i \end{tikzcd}$$

Per quanto detto prima il prodotto fibrato $\operatorname{Spec} A_{ij} \times_{\operatorname{Spec} R_i} \operatorname{Spec} B_{ik}$ è $\operatorname{Spec}(A_{ij} \otimes_{\operatorname{Spec} R_i} \operatorname{Spec} B_{ik})$. Inoltre questi schemi si possono incollare tra di loro, ottenendo così il prodotto fibrato $X \times_S Y$.

Definizione 4.19. Sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di schemi, sia $y \in Y$, sia $\mathbb{K}(y)$ il suo campo dei residui su Y e sia $\operatorname{Spec} \mathbb{K}(y) \longrightarrow Y$ il morfismo naturale. Si definisce la *fibra di f in y* come il prodotto fibrato $X_y = X \times_Y \operatorname{Spec} \mathbb{K}(y)$. X_y è uno schema su $\mathbb{K}(y)$, e $Sp(X_y)$ è omeomorfo a $f^{-1}(y)$ in X.

Osservazione 21. La nozione di fibra di un morfismo permette di vedere un morfismo di schemi $X \longrightarrow Y$ come una famiglia di schemi parametrizzati dai punti dello schema immagine. Un tipo di famiglia particolarmente interessante si ottiene considerando il morfismo (unico) $X \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. In questo caso la fibra sul punto generico dà uno schema X_0 su $\mathbb{Q}$, mentre la fibra sul punto chiuso (p) dà uno schema X_p su $\mathbb{F}_p$. Si dice che X_p è ottenuto come *riduzione modulo p* dello schema X.

Esempio 4.4. (Lo spettro di $\mathbb{Z}[x]$) Tutti gli ideali primi di $\mathbb{Z}[x]$ sono di uno dei seguenti tipi:

(i) (0)

(ii) (p), con p primo

(iii) (f), con f polinomio irriducibile a coefficienti in $\mathbb{Z}$

(iv) (p, f), con p primo e f monico irriducibile in $\mathbb{F}_p[x]$

Di questi ideali solo gli ultimi sono massimali, quindi corrispondono ai punti chiusi di $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] = \mathbb{A}^1(\mathbb{Z})$; (0) invece ovviamente ha come chiusura tutto $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$.

Un buono modo per visualizzare $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x]$ è quello d studiare le fibre del morfismo (unico) $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[x] \longrightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. In questa mappa, i punti del primo e del terzo tipo hanno come immagine (0), mentre gli altri punti vanno in (p). Allora la fibra su (p) di questa mappa è isomorfa ad $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p) = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]$, e il punto (p, f) corrisponde al punto di $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ dato dalle radici di f nella chiusura algebrica $\overline{\mathbb{F}}_p = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n}$ di $\mathbb{F}_p$. Inoltre i punti di $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ corrispondono alle orbite dell'azione di $Gal\left(\overline{\mathbb{F}}_p / \mathbb{F}_p \right)$ su $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Analogamente la fibra su (0) corrisponde allo schema $\mathbb{A}^1(\mathbb{Q}) = \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[x]$, e (f) incontra $\mathbb{A}^1(\mathbb{Q})$ nel punto che corrisponde alle radici di f in $\overline{\mathbb{Q}}$. Inoltre, come in precedenza, si vede che i punti di $\mathbb{A}^1(\mathbb{Q})$ corrispondono alle orbite dell'azione di $Gal\left({\overline{\mathbb{Q}}}/{\mathbb{Q}}\right)$ su $\overline{\mathbb{Q}}$.
Allora la chiusura dei punti di secondo tipo corrisponde alla fibra $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ sul punto (p). La chiusura dei punti di terzo tipo invece consiste del punto stesso nella fibra $\mathbb{A}^1(\mathbb{Q})$ su (0), insieme ai punti (p, g), dove g è un fattore di f su $\overline{\mathbb{F}}_p$ (cioè in ogni fibra $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ consiste dell'unione dei punti di $\mathbb{A}^1(\mathbb{F}_p)$ che corrispondono alle radici di f modulo p).

Esempio 4.5. Sia $X = \operatorname{Spec} {\mathbb{Z}[x, y]}/{(x^2 - y^2 - 5)}$. Anche in questo caso conviene studiare questo schema tramite il suo morfismo in $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. La fibra sul punto (0) è lo schema affine $\operatorname{Spec} {\mathbb{Q}[x, y]}/{(x^2 - y^2 - 5)}$, i cui punti corrispondono all'orbita dell'azione di $Gal\left({\overline{\mathbb{Q}}}/{\mathbb{Q}}\right)$ sui punti di $\overline{\mathbb{Q}}^2$ tali che $x^2 - y^2 = 5$, mentre la fibra su (p) corrisponde allo schema affine $\operatorname{Spec} {\mathbb{F}_p[x, y]}/{(x^2 - y^2 - 5)}$, i cui punti corrispondono all'orbita dell'azione di $Gal\left({\overline{\mathbb{F}}_p}/{\mathbb{F}_p}\right)$ sui punti di $\overline{\mathbb{F}}_p^2$ tali che $x^2 - y^2 = 5$.
Allora le fibre di questo schema su tutti gli ideali primi diversi da (2) e da (5) sono coniche non singolari, così come la fibra su (0). Invece la fibra su (2) corrisponde alla curva di equazioni $(x + y + 1)^2$, cioè è una retta doppia, mentre la fibra su (5) è la conica $(x + y)(x - y)$, cioè è una coppia di rette incidenti.

Definizione 4.20. Siano S e S' due schemi fissati, sia $S' \longrightarrow S$ un morfismo di schemi, sia X uno schema su S. Allora il prodotto fibrato $X' = X \times_S S'$ è uno schema su S'; si dice che X' è ottenuto da X tramite un'*estensione di base* $S' \longrightarrow S$.

Proposizione 4.4.3. *Sia $f : X \longrightarrow S$ un morfismo di schemi di tipo finito, sia $S' \longrightarrow S$ un'estensione di base. Allora $f' : X' \longrightarrow S'$ è ancora di tipo finito, cioè la proprietà "essere di tipo finito" è stabile rispetto all'estensione di base.*

Proposizione 4.4.4. *Sia Y uno schema su S tale che $Y \longrightarrow S$ è un'immersione chiusa, sia $S' \longrightarrow S$ un'estensione di base. Allora il morfismo indotto $Y \times_X X' \longrightarrow X$ è un'immersione chiusa.*

Esempio 4.6. Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso.
Sia $X = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x,y,z] / (zy - x^2)$, sia $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[z]$ e sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo determinato dall'omomorfismo naturale $\mathbb{K}[z] \longrightarrow \mathbb{K}[x,y,z] / (zy - x^2)$.
Allora X e Y sono schemi di tipo finito su $\mathbb{K}$ e f è suriettivo. Si possono identificare i punti chiusi di Y con gli elementi di $\mathbb{K}$; allora per $a \in \mathbb{K}^*$ la fibra X_a è la curva piana di equazione $ay = x^2$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$, ed è ridotta e irriducibile, mentre per $a = 0$ la fibra X_0 è la retta doppia di equazione $x^2 = 0$ in $\mathbb{A}^2(\mathbb{K})$.

Capitolo 5

Insiemi costruibili

5.1 Definizione di costruibili e loro proprietà

Lemma 5.1.1. *(induzione noetheriana) Sia X uno spazio topologico noetheriano, sia $\mathscr{P}$ una proprietà riguardante i chiusi di X. Supponiamo che, per ogni chiuso $Y \subseteq X$, se $\mathscr{P}$ vale per tutti i chiusi propri di Y (compreso l'insieme vuoto), allora vale anche per Y. Allora anche X soddisfa la proprietà $\mathscr{P}$.*

Definizione 5.1. Uno spazio topologico X si dice *spazio di Zariski* se è noetheriano e ogni suo sottoinsieme non vuoto, chiuso e irriducibile ha un unico punto generico.

Osservazione 22.

(i) Uno spazio di Zariski è T_0

(ii) I sottoinsiemi chiusi minimale non vuoti di uno spazio di Zariski sono tutti e soli i suoi punti chiusi

(iii) Se X è uno spazio di Zariski irriducibile, allora il suo punto generico è contenuto in ogni aperto non vuoto di X

(iv) Se X è uno schema noetheriano, allora $Sp(X)$ è uno spazio di Zariski

Definizione 5.2. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme di X si dice *localmente chiuso* se può essere scritto come intersezione di un chiuso e di un aperto.

Definizione 5.3. Sia X uno spazio di Zariski. Un sottoinsieme C di X si dice *costruibile* se può essere scritto come unione finita disgiunta di insiemi localmente chiusi.

Proposizione 5.1.2. *I sottoinsiemi costruibili sono tutti e soli gli insiemi appartenenti alla famiglia $\mathscr{L}$ tale che:*

(i) Ogni aperto di X appartiene ad $\mathscr{L}$

(ii) Se $A \in \mathscr{L}$, allora $A^C \in \mathscr{L}$ (quindi tutti i chiusi appartengono ad $\mathscr{L}$)

(iii) $\mathscr{L}$ è chiusa per unione finita (quindi anche per intersezione finita)

Dimostrazione. La famiglia $\mathscr{L}$ contiene gli aperti e i chiusi, quindi tutti i localmente chiusi, quindi tutti i costruibili. D'altra parte, ogni aperto è costruibile e l'unione finita di costruibili è costruibile. Allora basta mostrare che il complementare di un costruibile è costruibile.
Sia quindi C un insieme costruibile; allora $C = \bigcup\limits_{i \in I} (U_i \cap Z_i)$ (con I finito), dove U_i è un aperto di X e Z_i è un chiuso di X per ogni $i \in I$. Allora $C^C = \bigcap\limits_{i \in I} \left({U_i}^C \cup {Z_i}^C\right)$, cioè C^C può essere scritto come unione di insiemi del tipo $\left(\bigcap\limits_{i \in J} {U_i}^C\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i \in I \smallsetminus J} {Z_i}^C\right)$, con $J \subseteq I$. Tutti questi insiemi sono localmente chiusi, quindi C^C è costruibile. □

Definizione 5.4. Sia X uno spazio topologico. Un sottoinsieme di X si dice *ovunque non denso* se il complementare della sua chiusura è denso in X.

Proposizione 5.1.3. *Sia X uno spazio di Zariski. Un sottoinsieme E di X è costruibile se e solo se per ogni chiuso irriducibile Y di X, $E \cap Y$ contiene un aperto non vuoto di Y (quindi denso) oppure è ovunque non denso in Y.*

Dimostrazione. Se E è costruibile in X, allora $E \cap Y$ è costruibile in X, cioè è unione finita di insiemi localmente chiusi. Se uno di questi è denso in Y, allora contiene un aperto di Y; se invece nessuno di essi è denso in Y, allora la loro unione non è densa in Y, quindi è ovunque non densa in Y, poiché Y è irriducibile.
Per mostrare l'implicazione inversa si applica l'induzione noetheriana ai chiusi Y di X rispetto alla proprietà "avere intersezione con E costruibile". Allora si può assumere che per tutti i chiusi propri Y di X l'intersezione $E \cap Y$ è costruibile.
Se X non è irriducibile, siano X_i le componenti irriducibili di X. Gli insiemi X_i sono chiusi in X, quindi per l'induzione noetheriana $E \cap X_i$ è costruibile, dunque lo è la loro unione.
Sia invece X irriducibile. Se E è ovunque non denso in X, cioè è contenuto in un chiuso proprio di X, si applica di nuovo l'induzione noetheriana; se invece E contiene un aperto non vuoto U di X, poiché $E \smallsetminus U = E \cap (X \smallsetminus U)$ è costruibile, allora lo è anche $E = U \cup (E \smallsetminus U)$. □

5.2 Il teorema di Chevalley

Lemma 5.2.1. *Sia X uno schema noetheriano, sia C costruibile in X. Allora esiste uno schema affine X' e un morfismo di schemi $f : X' \longrightarrow X$ di tipo finito tale che $f(X') = C$.*

Dimostrazione. Poichè C può essere scritto come unione disgiunta di un numero finito di insiemi localmente chiusi, si può assumere che C stesso sia localmente chiuso e ottenere X' come unione disgiunta di schemi affini. Allora $C = U \cap Z$, dove U è un aperto di X e Z è un chiuso di X. In modo del tutto analogo considerando un ricoprimento di aperti affini di U, ci si restringe al caso in cui U è affine. Ma allora $U \cap Z$ è un sottoschema chiuso di U, quindi è anch'esso affine, e il morfismo $U \cap Z \longrightarrow X$ è un'immersione chiusa in uno schema noetheriano, quindi in particolare è un morfismo finito, e si pone $X' = U \cap Z$. □

Teorema 5.2.2. *(normalizzazione di Noether) Sia $\mathbb{K}$ un campo, sia A una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. Allora $\exists n \in \mathbb{N}$, $\exists t_1, \dots t_n \in A$ tali che il morfismo di algebre $\mathbb{K}[t_1, \dots t_n] \longrightarrow A$ è iniettivo e finito.*

Proposizione 5.2.3. *Sia R un dominio d'integrità, sia $R \longrightarrow A$ un omomorfismo iniettivo tale che A è una R-algebra finitamente generata. Allora esiste $s \in R \setminus \{0\}$ ed esiste un morfismo iniettivo e finito $R_s[x_1, \dots x_n] \longrightarrow A_s$.*

Dimostrazione. Sia $S = R \setminus \{0\}$; allora $\mathbb{K} = S^{-1}R$ è il campo delle frazioni di R. Poiché $S^{-1}A$ è una $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata, si può applicare il teorema di normalizzazione di Noether e trovare $y_1, \dots y_n \in S^{-1}A$ algebricamente indipendenti su $\mathbb{K}$ e tali che $S^{-1}A$ sia finito su $\mathbb{K}[y_1, \dots y_n]$. Sostituendo ad R e ad A una loro localizzazione, si può affermare che $y_1, \dots y_n \in A$. Inoltre i generatori (finiti) di A come R-algebra sono zeri di polinomi monici a coefficienti in $\mathbb{K}[y_1, \dots y_n]$, ed $\exists s \in R \setminus \{0\}$ tale che tutti questi polinomi hanno coefficienti in $R_s[y_1, \dots y_n]$, quindi l'inclusione di $R_s[y_1, \dots y_n]$ in A_s è un morfismo iniettivo e finito. $\square$

Teorema 5.2.4. *Siano X e Y schemi noetheriani, sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo dominante di tipo finito. Allora $f(X)$ contiene un aperto.*

Dimostrazione. Sia Y irriducibile. Poiché l'enunciato si riferisce solo alle proprietà topologiche degli schemi, si può assumere che X e Y siano ridotti. Dato che X e Y si possono ricoprire con degli aperti affini, si può supporre che X e Y siano affini. Allora f è indotto da un omomorfismo di anelli $\phi : R \longrightarrow S$, dove R è un dominio d'integrità. Poiché f è dominante, si ha che ϕ è iniettivo. Allora $\exists s \in R \setminus \{0\}$ tale che il morfismo indotto $\phi_s : R_s \longrightarrow S_s$ fattorizza in $R_s \longrightarrow R_s[x_1, \dots x_n] \longrightarrow S_s$, e il secondo di questi morfismi è iniettivo e finito. Allora ϕ_s induce una mappa suriettiva $\operatorname{Spec} S_s \longrightarrow \operatorname{Spec} R_s$. Inoltre si ha che $Y_s \subseteq f(X)$.
Sia ora Y non irriducibile, siano $Y_1, \dots Y_n$ le sue componenti irriducibili, sia f_i la restrizione $f^{-1}(Y_i) \longrightarrow Y_i$ di f. Per quanto detto prima, l'immagine di

f_i contiene un aperto denso V_i di Y_i. Poiché V_i è aperto anche in Y, allora $\bigcup_{i=1}^{n} V_i$ è un aperto denso di Y contenuto in $f(X)$. □

Osservazione 23. Il teorema 5.2.4 non vale se non si suppone che il morfismo sia di tipo finito. Sia infatti $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[x]$, $X = \operatorname{Spec} \mathbb{K}(x)$, sia $f : \mathbb{K}[x] \longrightarrow \mathbb{K}(x)$ l'omomorfismo d'inclusione. Allora il morfismo $f^\sharp : X \longrightarrow Y$ è dominante, poiché la sua immagine è il punto (0), che è denso in Y; tuttavia (0) non contiene alcun aperto.

Proposizione 5.2.5. *Siano X e Y spazi di Zariski, sia $f : X \longrightarrow Y$ una mappa continua. Allora ogni insieme costruibile $C \subseteq Y$ ha preimmagine costruibile in X.*

Dimostrazione. Poiché C è costruibile, può essere scritto come unione disgiunta di insiemi localmente chiusi. Allora si può supporre che C stesso sia localmente chiuso, cioè della forma $C = U \cap Z$, con U aperto in Y e Z chiuso in Y. Poiché f è continua, allora $f^{-1}(U)$ è aperto in X e $f^{-1}(Z)$ è chiuso in X, quindi $f^{-1}(U \cap Z)$ è localmente chiuso in X, dunque costruibile. □

Teorema 5.2.6. *(teorema di Chevalley) Siano X e Y due schemi noetheriani, sia $f : X \longrightarrow Y$ un morfismo di tipo finito. Allora per ogni insieme costruibile $C \subseteq X$, la sua immagine tramite f è costruibile in Y. In particolare $f(X)$ è costruibile in Y.*

Dimostrazione. Per il lemma 5.2.1 si può assumere $C = X$, e per la proposizione 5.1.3 basta mostrare che per ogni chiuso irriducibile Z di Y il cui punto generico appartiene a $f(X)$, l'insieme $f(X) \cap Z$ contiene un aperto di Z. Questo segue dal teorema 5.2.4 applicato alla restrizione $f^{-1}(Z) \longrightarrow Z$. □

Esempio 5.1. Sia $f : \mathbb{A}^2(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{A}^2(\mathbb{K})$ il morfismo di schemi tale che $x \mapsto x$ e $y \mapsto xy$.
Si ha che i punti del tipo $(u, v - v_0)$, con $v_0 \neq 0$, non appartengono all'immagine di f, mentre il punto (u, v) ha come fibra $\mathbb{A}^1(\mathbb{K})$. I punti del tipo $(u - u_0, v - v_0)$, con $u_0 \neq 0$ hanno invece come fibra il punto $(x - u_0, y - \frac{u_0}{v_0})$, cioè f è iniettiva al di fuori dell'insieme $\{(u - u_0, v - v_0) \mid u_0 = 0\}$.

Allora si ha che l'immagine di X tramite f è l'insieme:

$$\{(u - u_0, v - v_0) \,|\, u_0 \neq 0\} \cup \{(u, v)\}$$

.

Tale insieme non è chiuso né aperto, tuttavia il teorema di Chevalley garantisce che esso è costruibile (infatti è unione di un aperto e di un chiuso).

Appendice A

Insiemi algebrici

Sia $\mathbb{K}$ un campo algebricamente chiuso.

Definizione A.1. Si definisce *sottoinsieme algebrico chiuso* di $\mathbb{K}^n$ l'insieme $\Sigma = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}$, dove $f_1, \ldots f_m$ sono polinomi a coefficienti in $\mathbb{K}$.

Si osserva subito che l'insieme Σ non dipende dai polinomi $f_1, \ldots f_m$, ma dall'ideale che essi generano. Ha senso quindi dare una nuova definizione di sottoinsieme algebrico chiuso:

Definizione A.2. Si definisce *sottoinsieme algebrico chiuso* di $\mathbb{K}^n$ l'insieme $V(\mathfrak{a}) = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathfrak{a}\}$, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \ldots x_n]$.

Definizione A.3. Sia Σ un insieme algebrico chiuso. Si può associare a Σ l'ideale $I(\Sigma) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \ldots x_n] \mid f(x) = 0 \; \forall x \in \Sigma\}$

Risulta evidente dalla definizione che $\Sigma = V(I(\Sigma))$. Uno dei risultati più importanti sugli è il teorema seguente, dovuto ad Hilbert:

Teorema A.0.7. *(Nullstellensatz)*

$$I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Allora I e V danno una corrispondenza biunivoca tra i sottoinsiemi algebrici chiusi di $\mathbb{K}^n$ e gli ideali radicali di $\mathbb{K}[x_1, \ldots x_n]$.

Definizione A.4. Un insieme algebrico chiuso si dice *irriducibile* (o *varietà algebrica*) se non può essere scritto come unione disgiunta finita di insiemi algebrici chiusi propriamente contenuti in esso.

Proposizione A.0.8. *I e V danno una corrispondenza biunivoca tra le varietà algebriche di $\mathbb{K}^n$ e gli ideali primi di $\mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$.*

Osservazione 24. Poiché $\sqrt{\mathfrak{a}}$ può essere scritto come unione finita di ideali primi, allora ogni insieme algebrico può essere scritto come unione disgiunta di varietá algebriche, che sono detti le *componenti irriducibili* dell'insieme.

Definizione A.5. Sia $X \in \mathbb{K}^n$ una varietà algebrica. Si chiama *anello delle coordinate affini* $\Gamma(X)$ l'anello delle funzioni polinomiali ristrette a X, cioè l'anello $\mathbb{K}[x_1, \dots x_n] / I(X)$.

Definizione A.6. Siano $X \in \mathbb{K}^n$, $Y \in \mathbb{K}^m$ varietà algebriche. Una mappa $f: X \longrightarrow Y$ è detta *morfismo di varietà algebriche* se esistono $f_1, \dots f_m \in \mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$ tali che $f(x) = (f_1(x), \dots f_m(x))$ per ogni $x \in X$

Osservazione 25. Sia $g \in \Gamma(Y)$. Poichè possiamo vedere g come una funzione polinomiale su Y, per la definizione data di morfismo la funzione $g \circ f$ su X appartiene a $\Gamma(X)$. Infatti:

$$g \circ f = g(f_1(x), \dots f_m(x)) \; \forall x \in X$$

Allora f induce un omomorfismo $f^* : \Gamma(Y) \longrightarrow \Gamma(X)$ che manda g in $g \circ f$. Inoltre si osserva che f è determinato a partire da f^* semplicemente ponendo $f_i = f^*(x_i)$.

Proposizione A.0.9. *Se X e Y sono varietà algebriche, allora l'insieme dei morfismi da X e Y è canonicamente isomorfo all'insieme dei morfismi da $\Gamma(Y)$ a $\Gamma(X)$.*

Corollario A.0.10. *Se X è una varietà algebrica, allora $\Gamma(X)$ è canonicamente isomorfo all'insieme dei morfismi da X a $\mathbb{K}$.*

Proposizione A.0.11. *La funzione $X \mapsto \Gamma(X)$ si estende ad un funtore controvariante Γ tra la categoria delle varietà algebriche e relativi morfismi e la categoria dei domini d'integrità finitamente generati su $\mathbb{K}$ e relativi $\mathbb{K}$-omomorfismi.*

Osservazione 26. Gli insiemi algebrici chiusi $V(\mathfrak{a})$ definiscono una topologia su $\mathbb{K}^n$, detta *topologia di Zariski*, la quale induce una topologia sulle varietà algebriche, i cui chiusi sono gli insiemi del tipo $V(\mathfrak{a})$, dove $\mathfrak{a}$ è un ideale dell'anello delle coordinate della varietà.
Una base di aperti per la topologia di Zariski su $\mathbb{K}^n$ è formata dagli insiemi $X_f = \{x \in \mathbb{K}^n \mid f(x) \neq 0\}$ $\forall f \in \mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$.

Definizione A.7. Uno spazio topologico X si dice *noetheriano* se i chiusi soddisfano la d.c.c..

Proposizione A.0.12. *Uno spazio topologico X è noetheriano se e solo se ogni aperto di X è quasi-compatto.*

Osservazione 27. La topologia di Zariski è noetheriana; infatti gli ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots x_n]$ soddisfano la a.c.c., quindi i chiusi soddisfano la d.c.c..

Appendice B

Alcune costruzioni categoriche

Definizione B.1. Sia $\mathscr{C}$ una categoria. Un oggetto P di $\mathscr{C}$ si dice *terminale* se esiste un unico morfismo di ogni oggetto di $\mathscr{C}$ in P, e si dice *iniziale* se esiste un unico morfismo da P a qualunque oggetto di $\mathscr{C}$.
Quando è chiaro dal contesto in quale dei due casi ci si trova si parla semplicemente di *oggetto universale*.

Definizione B.2. Sia $\mathscr{C}$ una categoria e siano A, B due oggetti di $\mathscr{C}$. Si definisce *prodotto di A e B* la terna (P, f, g), dove P è un oggetto di $\mathscr{C}$, $f \in Mor(P, A)$ e $g \in Mor(P, B)$, tale che, dati due morfismi $\phi : C \longrightarrow A$ e $\psi : C \longrightarrow B$, allora esiste ed è unico il morfismo $h : C \longrightarrow P$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\
A & & B \\
 & P \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

commuta.

Osservazione 28. Più in generale, data un famiglia di oggetti $\{A_i\}_{i\in I}$ in $\mathscr{C}$, un prodotto per questa famiglia consiste di una coppia $(P, \{f_i\}_{i\in I})$, dove P è un oggetto di $\mathscr{C}$ e $\{f_i\}_{i\in I}$ è una famiglia di morfismi di P in A_i che soddisfa

la seguente condizione:
Data una famiglia di morfismi $g_i : C \longrightarrow A_i$ per ogni $i \in I$, allora esiste un unico morfismo $h : C \longrightarrow P$ tale che $f_i \circ h = g_i$ per ogni $i \in I$.
Il morfismo h viene detto *morfismo indotto dalla famiglia* $\{g_i\}_{i \in I}$.

Definizione B.3. Sia $\mathscr{C}$ una categoria, sia Z un oggetto su $\mathscr{C}$. Si può definire una nuova categoria, detta *categoria degli oggetti su* Z e denotata con $\mathscr{C}_Z$, i cui oggetti sono i morfismi $X \longrightarrow Z$ in $\mathscr{C}$. Un morfismo da $f : X \longrightarrow Z$ a $g : Y \longrightarrow Z$ in $\mathscr{C}_Z$ è un morfismo $h : X \longrightarrow Y$ in $\mathscr{C}$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & Z \\ Y \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

commuta.

Definizione B.4. Un prodotto in $\mathscr{C}_Z$ è detto *prodotto fibrato* di $f : X \longrightarrow Z$ e $g : Y \longrightarrow Z$ in $\mathscr{C}$ ed è denotato con $X \times_Z Y$; si hanno inoltre due morfismi $p_1 : X \times_Z Y \longrightarrow X$ e $p_2 : X \times_Z Y \longrightarrow Y$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & X \times_Z Y \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

commuta.
Il morfismo p_1 è detto *pull-back di g tramite f*, mentre p_2 si chiama *pull-back di f tramite g*.

Osservazione 29. Il prodotto fibrato soddisfa la seguente proprietà universale:
Dato un oggetto T di $\mathscr{C}$ e due morfismi $T \longrightarrow X$ e $T \longrightarrow Y$ tali che il

diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & T \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
X \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\
 & Z &
\end{tikzcd}$$

commuta, allora esiste ed è unico il morfismo $\theta : T \longrightarrow X \times_Z Y$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Z Y \arrow[dl, "p_2"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
X & & Y \\
 & T \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, dashed, "\theta"] &
\end{tikzcd}$$

commuta.

Definizione B.5. Sia I un insieme di indici. I si dice *sistema diretto di indici* se, dato un ordinamento parziale $\leqslant$, per ogni $i, j \in I$ esiste $k \in I$ tale che $i \leqslant k$ e $j \leqslant k$.

Definizione B.6. Sia I un sistema diretto di indici, sia $\mathscr{C}$ una categoria, sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di oggetti di $\mathscr{C}$. Per ogni coppia i, j tale che $i \leqslant j$ sia dato un morfismo $f_{ij} : A_i \longrightarrow A_j$ tale che valgono le seguenti condizioni:

(i) $f_{ii} = id_{A_i}$

(ii) Per ogni $i \leqslant j \leqslant k$ si ha che $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$.

Una tale famiglia è detta *famiglia diretta di morfismi.* Si chiama *limite diretto della famiglia* $\{f_{ij}\}_{i,j \in I}$ un oggetto universale nella categoria $\mathscr{D}$ delle coppie $(A, \{f_i\})$, dove A è un oggetto di $\mathscr{C}$ e $\{f_i\}$ è la famiglia dei morfismi

$f_i : A_i \longrightarrow A$ tali che il diagramma

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & A_j \arrow[dl, "f_j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commuta.
Inoltre se $(A, \{f_i\})$ è il limite diretto e $(B, \{g_i\})$ è un oggetto di $\mathscr{D}$, allora esiste ed è unico il morfismo $\phi : A \longrightarrow B$ tale che il diagramma

$$\begin{tikzcd} & B & \\ A_i \arrow[ur, "g_i"] \arrow[rr, "f_{ij}"] \arrow[dr, "f_i"'] & & A_j \arrow[ul, "g_j"'] \arrow[dl, "f_j"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commuta.
Per semplicità di notazione di solito si scrive $A = \varinjlim A_i$.

Bibliografia

[1] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison Wesley series in mathematics, 1969

[2] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*, Springer-Verlag New York, 2004

[3] D. Eisenbud, J. Harris, *The geometry of schemes*, Springer-Verlag New York, 2000

[4] U. Görtz, T. Wedhorn, *Algebraic geometry I, schemes with examples and exercises*, Vieweg+Teubner Verlag, 2010

[5] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique*, Institut des Hautes Études Scientifiques, 1960-1967

[6] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Springer-Verlag New York, 1977

[7] S. Lang, *Algebra*, Springer-Verlag New York, 2002

[8] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999

[9] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1973