

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

**MAPPING CLASS GROUP E  
COMPLESSO DELLE CURVE  
PER SUPERFICI DI HEEGAARD**

Tesi di Laurea in Topologia

**Relatore:**  
Chiar.mo Prof.  
Massimo Ferri

**Presentata da:**  
Lorenzo Ruffoni

**I Sessione**  
**Anno Accademico 2010/11**



*Ai miei genitori,  
per la fiducia e la forza che ricevo.*



# Introduzione

Lo studio delle 3-varietà è un problema che cattura l'interesse dei topologi fin dalla nascita della disciplina. In particolare la loro classificazione è un ambito di ricerca tutt'ora aperto, a differenza delle dimensioni inferiori, in cui tale problema è stato completamente risolto, e di quelle superiori, in cui esso è dimostrabilmente impraticabile. Questo lavoro intende presentare un'interessante connessione tra questo problema e un altro problema di classificazione, quello degli automorfismi di una superficie: essendo quest'ultimo completamente risolto, la speranza è di poter fare progressi nel primo sfruttando la conoscenza che abbiamo del secondo.

Questa connessione si basa su una tecnica di spezzamento di una 3-varietà introdotta da Poul Heegaard: prendiamo dei tori solidi, saldiamoli tramite somme connesse e infine incolliamoli lungo i bordi dopo aver applicato un automorfismo del bordo stesso, che è una 2-varietà. Questo procedimento produce una 3-varietà, anzi, una generica 3-varietà si può ottenere in questo modo, e l'automorfismo che abbiamo usato è un eccezionale dispensatore di informazioni sulla topologia della 3-varietà ottenuta.

Altre preziose informazioni possono infine essere desunte studiando come le curve sulla superficie siano modificate sotto l'azione dell'automorfismo di incollamento: se ne possono costruire interessanti oggetti combinatori, che sono stati recentemente riscoperti in quanto ammettono una metrica che interagisce bene con le proprietà delle varietà e delle mappe coinvolte.

Infine, ricordiamo esplicitamente che, per risultati di Moise e Radò, in dimensione inferiore a 3 ogni varietà topologica ammette una triangolazione essenzialmente unica e che il corpo di un complesso simpliciale (o poliedro) può essere opportunamente liscio in modo da risultare una varietà differenziabile; poiché discorsi analoghi valgono anche per i morfismi, ciò si può

riformulare dicendo che **Top**, **PL** e **Diff** sono categorie equivalenti in queste dimensioni. Prese le opportune precauzioni, questo ci permetterà di non curarci eccessivamente della categoria in cui lavoreremo.

Gli automorfismi di una data superficie costituiscono un gruppo. Il primo capitolo è interamente dedicato all'introduzione di un'utile relazione di equivalenza su di esso e allo studio del relativo quoziente (detto Mapping Class Group) per le superfici più semplici.

Nel secondo capitolo affrontiamo invece la teoria generale, con attenzione particolare a due risultati classici e di interesse autonomo, ossia il teorema di finita generazione per tale gruppo e il teorema di classificazione dei suoi elementi.

L'ultimo capitolo si occupa infine della connessione con lo studio delle 3-varietà: dopo un breve sguardo al panorama del problema di classificazione, introduciamo la tecnica degli spezzamenti di Heegaard e il complesso delle curve, quindi concludiamo illustrando un risultato di finitezza e di isomorfismo per il Mapping Class Group di una 3-varietà e quello di una sua opportuna 2-sottovarietà.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Mapping Class Group</b>	<b>1</b>
1.1 La relazione di isotopia e il gruppo . . . . .	1
1.2 Mapping Class Group di superfici . . . . .	4
1.3 Rappresentazione simplettica . . . . .	8
<b>2 Risultati strutturali</b>	<b>11</b>
2.1 Dehn Twist . . . . .	11
2.2 Successione di Birman e finita generazione . . . . .	14
2.3 Classificazione Nielsen-Thurston . . . . .	21
<b>3 Complesso delle curve su una superficie di Heegaard</b>	<b>29</b>
3.1 Classificazione di 3-varietà . . . . .	29
3.2 Spezzamenti di Heegaard . . . . .	32
3.3 Il complesso e la distanza di Hempel . . . . .	37
3.4 Morfismo canonico e finitezza . . . . .	39
<b>Conclusioni</b>	<b>45</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>



# Elenco delle figure

1.1	Base geometrica simplettica standard per $H_1(S_g)$ . . . . .	9
2.1	Relazione delle trecce . . . . .	14
2.2	<i>Push</i> come prodotto di Dehn Twist . . . . .	15
2.3	Generatori di Humphries . . . . .	20
2.4	Foliazioni singolari . . . . .	21
2.5	Pseudo-Anosov su $S_{0,0,4}$ . . . . .	24



# Capitolo 1

## Mapping Class Group

In questo capitolo introduciamo e presentiamo l'oggetto centrale dello studio, ossia il mapping class group di una varietà. Dopo la definizione per una generica varietà, attacchiamo subito lo studio delle superfici e concludiamo costruendo una rappresentazione lineare del gruppo.

### 1.1 La relazione di isotopia e il gruppo

In questo paragrafo introduciamo e discutiamo una relazione di equivalenza tra mappe e sottovarietà che sostituisce la tradizionale nozione di omotopia nell'ambito della topologia basso-dimensionale.

**Definizione 1.1.** Sia  $M$  una varietà topologica connessa e orientabile. Siano  $Homeo(M)$  il gruppo degli auto-omeomorfismi della varietà che ne conservano l'orientazione e  $Homeo^\pm(M)$  il gruppo di tutti gli auto-omeomorfismi, compresi quelli che non mantengono l'orientazione. Se  $M$  è una varietà con bordo  $\partial M \neq \emptyset$ , chiederemo che gli auto-omeomorfismi restringano all'identità su  $\partial M$ . Se  $M$  ha delle punture (cioè dei punti marcati o rimossi) chiederemo che gli auto-omeomorfismi mappino l'insieme delle punture su se stesso.

*Osservazione 1.1.1.* Assegnando ad un omeomorfismo 0 se mantiene l'orientazione e 1 altrimenti, otteniamo questa successione esatta corta

$$1 \rightarrow Homeo(M) \rightarrow Homeo^\pm(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

**Definizione 1.2.** Siano  $f$  e  $g \in \text{Homeo}^\pm(M)$ . Un'*isotopia* da  $f$  a  $g$  è un'omotopia  $H : M \times I \rightarrow M$  tale che  $\forall t \in I H|_{M \times t}$  sia un auto-omeomorfismo. Se una tale isotopia esiste diremo che  $f$  e  $g$  sono auto-omeomorfismi *isotopi*. Se la varietà ha bordo o punture, chiederemo che le isotopie restringano all'identità sul bordo e che mappino l'insieme delle punture su se stesso.

*Osservazione 1.1.2.* La relazione di isotopia definisce una relazione di equivalenza sui gruppi  $\text{Homeo}^\pm(M)$  e  $\text{Homeo}(M)$ . Il sottogruppo normale associato a questa equivalenza è il sottogruppo degli omeomorfismi isotopi all'identità  $\text{Id}_M$ , che indicheremo rispettivamente con  $\text{Homeo}_0^\pm(M)$  e  $\text{Homeo}_0(M)$ .

**Definizione 1.3.** Si definiscono rispettivamente *Mapping Class Group* di  $M$  e *Mapping Class Group Esteso* di  $M$  i gruppi quozienti

$$\mathcal{MCG}(M) = \text{Homeo}(M) / \text{Homeo}_0(M)$$

$$\mathcal{MCG}^\pm(M) = \text{Homeo}^\pm(M) / \text{Homeo}_0^\pm(M)$$

Restano allora individuate le seguenti successioni esatte

$$1 \rightarrow \text{Homeo}_0(M) \rightarrow \text{Homeo}(M) \rightarrow \mathcal{MCG}(M) \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \text{Homeo}_0^\pm(M) \rightarrow \text{Homeo}^\pm(M) \rightarrow \mathcal{MCG}^\pm(M) \rightarrow 1$$

$$1 \rightarrow \mathcal{MCG}(M) \rightarrow \mathcal{MCG}^\pm(M) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

Osserviamo esplicitamente che, siccome mappe omotope agiscono allo stesso modo sull'omologia della varietà, due auto-omeomorfismi isotopi sono tali che o entrambi mantengono l'orientazione o entrambi la rovesciano. Di conseguenza anche l'ultima successione è ben posta.

*Osservazione 1.1.3.* Nel seguito, quando questo non crei confusione, confonderemo per comodità un auto-omeomorfismo con la sua classe di isotopia, ovvero parleremo di auto-omeomorfismi considerandoli però sempre a meno di isotopia. Osserviamo esplicitamente che se un auto-omeomorfismo ha periodo  $k$  in  $\text{Homeo}^\pm(M)$ , allora la sua classe di isotopia ha lo stesso periodo in  $\mathcal{MCG}^\pm(M)$ . Viceversa, presa una classe di periodo  $k$  in  $\mathcal{MCG}^\pm(M)$ , anche se non è vero che un qualsiasi rappresentante della classe ha periodo  $k$

in  $\text{Homeo}^\pm(M)$ , questo è tuttavia vero a meno di isotopia, cioè la potenza  $k$ -esima del rappresentante è isotopa a  $\text{Id}_M$ , o in altri termini c'è almeno un rappresentante che ha effettivamente periodo  $k$  in  $\text{Homeo}^\pm(M)$ ; questo risultato classico è dovuto a Fenchel e Nielsen.

A questa definizione puramente algebrica del gruppo, ne corrisponde un'altra di carattere più topologico, che ora presentiamo.

*Osservazione 1.1.4.* I gruppi  $\text{Homeo}^\pm(M)$  e  $\text{Homeo}(M)$  possono essere muniti della topologia compatto-aperto in modo compatibile rispetto all'operazione di gruppo. Da questo punto di vista, un'isotopia da  $f$  a  $g$  non è altro che un cammino continuo in questi spazi topologici; ciò dà un buon motivo per considerare l'isotopia e non l'omotopia: una semplice omotopia tra omeomorfismi non sarebbe interpretabile come un cammino in questi spazi topologici. Chiaramente si ha che due omeomorfismi sono isotopi se e solo se si trovano nella stessa componente connessa per archi, e che il sottogruppo normale degli omeomorfismi isotopi a  $\text{Id}_M$  coincide con la componente connessa per archi di  $\text{Id}_M$ . Questi discorsi giustificano dunque le seguenti scritture:

$$\mathcal{MCG}(M) = \pi_0(\text{Homeo}(M)) \quad \text{e} \quad \mathcal{MCG}^\pm(M) = \pi_0(\text{Homeo}^\pm(M))$$

cioè, oltre a pensare gli elementi dei gruppi come classi di isotopia di auto-omeomorfismi, li possiamo anche vedere come componenti connesse per archi di auto-omeomorfismi.

Questa era la definizione più generale per una varietà topologica qualunque, e definizioni analoghe si possono dare nelle altre categorie, nelle quali sarà necessario modificare opportunamente la definizione di isotopia, come risulta chiaro dall'osservazione 1.1.4.

Nel caso generale chiaramente non abbiamo alcuna garanzia che il gruppo che alla fine otteniamo sia indipendente dalla categoria in cui ci siamo messi per calcolarlo. Nel presente lavoro tuttavia rimaniamo in dimensione 2 o al più 3, dunque non avremo bisogno di distinguere tra le tre categorie. Anzi introduciamo fin da ora una differente notazione, che, almeno a livello psicologico, consente più flessibilità nel passare da una categoria all'altra. Parleremo semplicemente di varietà e di automorfismi della varietà; indicheremo

con  $Aut^\pm(M)$  e  $Aut(M)$  rispettivamente il gruppo di tutti gli automorfismi di  $M$  e il gruppo di quelli che mantengono l'orientazione; comunque sia, la maggior parte del lavoro si svolge in **Top**, e quando non altrimenti specificato questa è la categoria di riferimento.

Si dà una nozione di isotopia anche per sottovarietà di una data varietà.

**Definizione 1.4.** Chiameremo *isotopia* di una varietà  $M$  un suo automorfismo che sia isotopo a  $Id_M$ . Inoltre due sottovarietà  $N_1$  ed  $N_2$  saranno dette isotope in  $M$  se esiste un'isotopia di  $M$  che mappa  $N_1$  su  $N_2$ .

Un altro buon motivo per considerare l'isotopia anziché l'omotopia è che se due sottovarietà sono isotope significa che possiamo deformarle una nell'altra con continuità in modo che ad ogni istante della trasformazione la sottovarietà rimanga sempre omeomorfa a se stessa. Si ha il seguente utile risultato, per una cui dimostrazione in **Diff** si rimanda a [10, Capitolo 8, Teorema 1.3].

**Teorema 1.1.5.** *Sia  $M$  una varietà e  $K \subset M$  una sottovarietà compatta. Allora ogni isotopia di  $K$  estende ad una di  $M$ .*

## 1.2 Mapping Class Group di superfici

Nel resto del capitolo, e anche nel prossimo, ci dedichiamo esclusivamente al caso delle superfici, in quanto sono questi i gruppi che per primi hanno stimolato lo sviluppo della teoria. Richiamiamo prima di tutto alcuni risultati classici sulle superfici. Nel resto della tesi, ove non diversamente specificato, tutte le superfici sono connesse ed orientabili; spesso saranno anche compatte, o addirittura chiuse (cioè compatte e senza bordo), ma queste ultime due ipotesi saranno esplicitamente dichiarate dove necessario, a differenza delle prime due.

**Teorema 1.2.1 (Classificazione delle superfici).** *Sia  $S$  una 2-varietà chiusa. Allora  $\exists g \in \mathbb{N}$  (detto genere di  $S$ ) tale che  $S$  è omeomorfa alla somma connessa di  $g$  tori.*

Nel seguito indicheremo con  $S_{g,b,n}$  la superficie di genere  $g$  con  $b$  componenti di bordo e  $n$  punture, omettendo i pedici qualora questi siano nulli. Chiaramente se  $n > 0$  la superficie non è più compatta, quindi per superficie compatta con  $n$  punture intenderemo una superficie con  $n$  punture che risulti compatta dopo aver rimosso le punture.

**Proposizione 1.2.2.** *Sia  $S$  una 2-varietà compatta di genere  $g$ , con  $b$  componenti di bordo e  $n$  punture. Allora la Caratteristica di Eulero-Poincaré di  $S$  è  $\chi(S) = 2 - 2g - (b + n)$ .*

Nel caso delle superfici lo studio del mapping class group risulta semplificato, rispetto alle dimensioni superiori, dai seguenti risultati.

**Lemma 1.2.3.** *Sia  $S$  una superficie compatta. Allora  $\exists \iota \in \mathcal{MCG}^\pm(M)$  tale che  $\iota^2 = Id_S$ .*

*Dimostrazione.* Immergiamo  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ , e sia  $i$  la riflessione di  $S$  rispetto ad un punto esterno. Allora  $i$  non è isotopo a  $Id_S$  perché rovescia l'orientazione, ma  $i^2 = Id_S$ , cioè  $\iota = [i]$  soddisfa l'enunciato.  $\square$

**Corollario 1.2.4.**  $\mathcal{MCG}^\pm(S) \cong \mathcal{MCG}(S) \rtimes \mathbb{Z}_2$

*Dimostrazione.* Sia  $\iota \in \mathcal{MCG}^\pm(S)$  la classe che soddisfa il lemma. Allora ho uno split destro nella successione

$$1 \rightarrow \mathcal{MCG}(S) \rightarrow \mathcal{MCG}^\pm(S) \hookrightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

ottenuto mandando  $0 \in \mathbb{Z}_2$  nell'identità e  $1 \in \mathbb{Z}_2$  in  $\iota$ . Infatti, grazie al fatto che  $\iota$  rovescia l'orientazione e ha periodo 2, questa mappa è una sezione della proiezione su  $\mathbb{Z}_2$ . Lo Splitting Lemma nel caso generale di categorie non abeliane asserisce appunto che se una successione esatta corta di gruppi ammette uno split destro allora il gruppo centrale è il prodotto semidiretto del primo per il terzo.  $\square$

Grazie a questo fatto, la nostra attenzione si concentrerà nel seguito del capitolo solo su  $\mathcal{MCG}(S)$ , dato che per conoscere il gruppo esteso basta prendere il prodotto semidiretto con  $\mathbb{Z}_2$ .

Procediamo ora al calcolo diretto di alcuni  $\mathcal{MCG}(S)$  per le superfici fondamentali, cominciando con le superfici che hanno gruppo banale.

**Lemma 1.2.5.** *Sia  $S$  un piano di  $\mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathcal{MCG}(S) \cong 1$ .*

*Dimostrazione.* Identifichiamo  $S$  con  $\mathbb{R}^2$ . Sia  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{R}^2)$ . Allora  $F : \mathbb{R}^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, t) = t\varphi(x) + (1-t)x$  è un'isotopia tra  $\varphi$  e  $\text{Id}_{\mathbb{R}^2}$ .  $\square$

**Corollario 1.2.6.** *Sia  $S^2$  la sfera unitaria di  $\mathbb{R}^3$ . Allora  $\mathcal{MCG}(S^2) \cong 1$*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in \text{Aut}(S^2)$ . Per il teorema della Palla Pelosa,  $\exists x \in S^2$  tale che  $\varphi(x) = x \vee \varphi(x) = -x$ , quindi, a meno di isotopia, possiamo supporre che  $\varphi$  abbia un punto fisso  $p$ . Così  $\varphi$  corrisponde ad un automorfismo di  $S_{0,1} \cong S^2 \setminus \{p\} \cong \mathbb{R}^2$ , e dunque è isotopicamente banale per il lemma 1.2.5.  $\square$

Il prossimo lemma, di dimostrazione semplice ma non banale, risulta essere un utile strumento per il calcolo dei gruppi di superfici più articolate.

**Lemma 1.2.7 (Trucco di Alexander).** *Sia  $D^2$  la palla chiusa del piano  $\mathbb{R}^2$ . Allora  $\mathcal{MCG}(D^2) \cong 1$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in \text{Aut}(D^2)$ ; ricordiamo che, per definizione,  $\varphi|_{S^1} = \text{Id}_{S^1}$ . Allora se definiamo una  $F : D^2 \times I \rightarrow D^2$  come

$$F(x, t) = \begin{cases} (1-t)\varphi\left(\frac{x}{1-t}\right) & \text{se } 0 \leq |x| < 1-t \text{ e } t < 1 \\ x & \text{se } 1-t \leq |x| \leq 1 \text{ e } t < 1 \end{cases}$$

per  $t \leq 1$ , e  $F(x, 1) = x$ , otteniamo un'isotopia tra  $\varphi$  e  $\text{Id}_{D^2}$ . L'idea è che all'istante  $t$  si fa  $\varphi$  sul disco di raggio  $1-t$  e l'identità nel complementare.  $\square$

*Osservazione 1.2.8.* Sia  $S_{0,1,1}$  la palla chiusa del piano  $\mathbb{R}^2$  con una puntura. Allora  $\mathcal{MCG}(S_{0,1,1}) \cong 1$ . Infatti, senza perdita di generalità, possiamo supporre che la puntura coincida con l'origine. La dimostrazione del lemma 1.2.7 si applica anche a questo caso.

Vediamo ora alcune superfici che hanno gruppo non banale; la strategia è studiare l'automorfismo attraverso il modo in cui agisce su opportune curve sulla superficie. Sia  $\mathfrak{S}_n$  il gruppo simmetrico su  $n$  oggetti. Per definizione, se una superficie ha delle punture, gli automorfismi devono agire su di esse permutandole.

**Proposizione 1.2.9.** *Siano  $S_{0,0,2} = S^2 \setminus \{p, q\}$  e  $S_{0,0,3} = S^2 \setminus \{p, q, r\}$  le sfere rispettivamente con 2 e 3 punture. Allora  $\mathcal{MCG}(S_{0,0,2}) \cong \mathfrak{S}_2 \cong \mathbb{Z}_2$  e  $\mathcal{MCG}(S_{0,0,3}) \cong \mathfrak{S}_3$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\varphi \in \text{Aut}(S_{0,0,2})$ . Poiché il gruppo della sfera è banale, si hanno solo due casi, che dipendono dall'azione sulle punture. Se  $\varphi$  scambia le punture allora è certamente isotopicamente non banale. Se invece le fissa entrambe, consideriamo un cammino  $\alpha : I \rightarrow S_{0,0,2}$  tale che  $\alpha(0) = p$  e  $\alpha(1) = q$ . Poiché gli estremi sono punti fissi, avremo che  $\varphi \circ \alpha$  è un cammino isotopo ad  $\alpha$ ; equivalentemente,  $\varphi$  è isotopo ad un automorfismo  $\varphi'$  che è l'identità sul supporto di  $\alpha$ . Tagliando  $S_{0,0,2}$  lungo il supporto di  $\alpha$  ottengo un disco il cui bordo è dato dal supporto di  $\alpha$  stesso. Poiché  $\varphi'$  è l'identità su  $\alpha$ , corrisponde ad un automorfismo del disco e quindi, per il lemma 1.2.7 di Alexander, è isotopicamente banale; per transitività anche  $\varphi$  lo è.

Nel caso di tre punture si procede allo stesso modo; se un automorfismo permuta le punture, corrisponde ad un elemento non banale di  $\mathfrak{S}_3$ , altrimenti, come prima si prova che è isotopicamente banale: si taglia lungo un cammino ottenendo un disco con una puntura e ci si rifà all'osservazione precedente.  $\square$

Il seguente esempio è significativo in quanto ci dice come è fatto il gruppo per il tipico intorno di una curva semplice chiusa su una superficie.

**Proposizione 1.2.10.** *Sia  $A = S^1 \times I = S_{0,2}$ . Allora  $\mathcal{MCG}(A) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $\varphi \in \text{Aut}(A)$ ,  $\tilde{A} = \mathbb{R} \times I$  il rivestimento universale di  $A$  e  $\tilde{\varphi}$  la restrizione del sollevamento di  $\varphi$  a  $\mathbb{R} \times \{1\} \cong \mathbb{R}$ . Definiamo una mappa di gruppi  $\rho : \mathcal{MCG}(A) \rightarrow \mathbb{Z}, [\varphi] \mapsto \tilde{\varphi}(0)$ . Consideriamo ora la trasformazione di  $\mathbb{R}^2$  data da  $M = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ : essa fissa il sottospazio  $\mathbb{R} \times I$  ed è invariante per automorfismi di rivestimento, dunque scende ad un automorfismo  $\varphi$  di  $A$ ; infine, poiché  $M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}$ , segue che  $\rho([\varphi]) = n$ , e dunque  $\rho$  è suriettiva. Vediamo infine l'iniettività. Sia  $[\varphi] \in \ker(\rho)$ , e sia  $\tilde{\varphi}$  il sollevamento ad  $\tilde{A}$ ; poiché  $\rho([\varphi]) = 0$ ,  $\tilde{\varphi}$  restringe all'identità su  $\partial\tilde{A}$ . Si può provare che c'è un omotopia lineare tra  $\tilde{\varphi}$  e  $Id_{\tilde{A}}$  che è l'identità su  $\partial\tilde{A}$  ed è

invariante rispetto agli automorfismi di rivestimento; pertanto tale omotopia discende ad un'omotopia di  $A$  tra  $\varphi$  e  $Id_A$  che fissa  $\partial A$ . Ne segue che  $[\varphi]$  è banale<sup>1</sup>.  $\square$

Il prossimo risultato merita di essere menzionato in quanto costituisce un notevole ponte tra la teoria del mapping class group e la teoria dei nodi. Per una sua trattazione si rimanda a [1].

**Teorema 1.2.11.** *Sia  $S_{0,1,n} = (D^2, \{p_1, \dots, p_n\})$  un disco con  $n$  punture. Allora  $\mathcal{MCG}(S_{0,1,n}) \cong B_n$ , ove  $B_n$  denota il gruppo delle trecce su  $n$  lacci.*

Chiudiamo la sezione con la prima superficie di genere positivo. Questo esempio è paradigmatico rispetto alle superfici di genere superiore, come risulterà chiaro nel prossimo paragrafo.

**Teorema 1.2.12.** *Sia  $S_1 = S^1 \times S^1$ . Allora  $\mathcal{MCG}(S_1) \cong SL_2\mathbb{Z}$ .*

*Dimostrazione.* Ogni omeomorfismo di  $S_1$  induce un automorfismo sul primo gruppo di omologia<sup>2</sup>  $H_1(S_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , e automorfismi isotopi inducono lo stesso automorfismo. Abbiamo dunque una mappa ben definita  $\sigma : \mathcal{MCG}(S_1) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_1)) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}^2) \cong GL_2\mathbb{Z}$ . Siccome stiamo considerando automorfismi che mantengono l'orientazione, in realtà possiamo restringere il codominio a  $SL_2\mathbb{Z}$ . Poiché ogni  $M \in SL_2\mathbb{Z}$  fissa il sottomodulo  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  ed è invariante per automorfismi di rivestimento, discende ad un automorfismo di  $S_1$ , cioè  $\sigma$  è suriettiva. La prova dell'iniettività è analoga al caso dell'anello.  $\square$

### 1.3 Rappresentazione simplettica

In questa sezione studiamo una rappresentazione del mapping class group che, oltre ad essere interessante di per sé, individua un sottogruppo di centrale importanza nello studio del gruppo.

---

<sup>1</sup>Un risultato classico di topologia differenziale assicura che se la superficie è compatta, allora due omeomorfismi che mantengono l'orientazione sono isotopi se (e solo se) sono omotopi. Si rimanda a [4, Teorema 1.12].

<sup>2</sup>Dove non diversamente specificato, l'omologia si intende sempre a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ .

**Definizione 1.5.** Si definisce *gruppo simplettico intero* il gruppo  $Sp_{2g}\mathbb{Z} = Sp_{2g}\mathbb{R} \cap GL_{2g}\mathbb{Z}$ .

*Osservazione 1.3.1.*  $\forall g \in \mathbb{N}$  si ha che  $Sp_{2g}\mathbb{Z} \subset SL_{2g}\mathbb{Z}$  e che  $Sp_2\mathbb{Z} \equiv SL_2\mathbb{Z}$ .

Data una superficie  $S_g$ , quello che vogliamo fare è dotare il suo primo gruppo di omologia di una struttura simplettica e scrivere una rappresentazione del mapping class group sul relativo gruppo simplettico.

**Definizione 1.6.** Siano  $a$  e  $b$  classi di omologia di curve chiuse semplici su  $S$ ; definiamo *numero algebrico di intersezione* tra  $a$  e  $b$  il numero  $\tilde{\iota}(a, b)$  pari alla somma degli indici dei punti di intersezione di due rappresentanti di  $a$  e  $b$ , ove due curve si intersecano con indice  $+1$  se l'orientazione dell'intersezione concorda con quella di  $S$  e  $-1$  altrimenti.

*Osservazione 1.3.2.* Si ha subito che  $\tilde{\iota}(a, b) = -\tilde{\iota}(b, a)$

*Osservazione 1.3.3.* Se un automorfismo di  $S$  mantiene l'orientazione, allora mantiene il numero algebrico di intersezione.

*Osservazione 1.3.4.* Il numero di intersezione algebrica  $\tilde{\iota}$  definito su  $H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  si può estendere ad una forma simplettica sul primo gruppo di omologia a coefficienti reali  $H_1(S_g, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{2g}$ , che con essa risulta essere uno spazio simplettico. Siamo interessati alla restrizione di questa struttura simplettica al sottomodulo  $H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  e al relativo  $Sp_{2g}\mathbb{Z}$  ottenuto fissando una base. Con riferimento alla decomposizione canonica di  $S_g$  come somma connessa di  $g$  tori, una base canonica (detta base geometrica simplettica standard) per tale sottomodulo, nonché per l'intero spazio, è data dall'immagine nella somma connessa dei generatori dei primi gruppi di omologia dei singoli tori (vedi figura 1.1). Supporremo fissata questa base nel seguito.

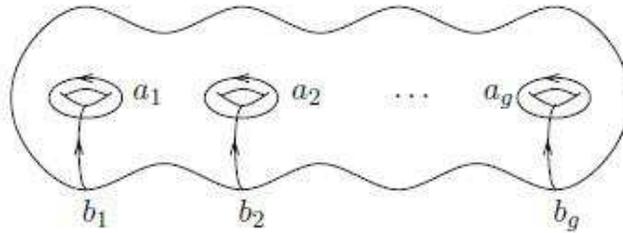


Figura 1.1: Base geometrica simplettica standard per  $H_1(S_g)$

*Osservazione 1.3.5.* Ogni automorfismo di  $S_g$  induce un automorfismo su  $H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$ , e automorfismi isotopi inducono lo stesso automorfismo. Abbiamo dunque una mappa ben definita  $\Psi : \mathcal{MCG}(S_g) \rightarrow \text{Aut}(H_1(S_g)) \cong \text{Aut}(\mathbb{Z}^{2g}) \cong GL_{2g}\mathbb{Z}$ . Tuttavia, siccome gli elementi di  $\mathcal{MCG}(S_g)$  conservano l'orientazione e la forma simplettica  $\tilde{\iota}$ , possiamo restringere il codominio e considerare invece la rappresentazione  $\Psi : \mathcal{MCG}(S_g) \rightarrow Sp_{2g}\mathbb{Z}$ . Chiameremo tale  $\Psi$  rappresentazione simplettica di  $\mathcal{MCG}(S_g)$ .

Si ha allora il seguente risultato, per la cui trattazione si rimanda a [4, Capitolo 5].

**Teorema 1.3.6.** *La rappresentazione  $\Psi : \mathcal{MCG}(S_g) \rightarrow Sp_{2g}\mathbb{Z}$  è suriettiva.*

*Osservazione 1.3.7.* Dal teorema precedente segue che abbiamo una successione esatta

$$1 \rightarrow \ker(\Psi) \rightarrow \mathcal{MCG}(S_g) \rightarrow Sp_{2g}\mathbb{Z} \rightarrow 1$$

In particolare, per il teorema 1.2.12, nel caso  $g = 1$  il sottogruppo  $\ker(\Psi)$  è banale e la rappresentazione è dunque un isomorfismo. Invece per  $g > 1$   $\ker(\Psi)$  risulta essere un sottogruppo fondamentale nello studio dei mapping class group in quanto contiene la parte più intricata del gruppo, ossia quella che non può essere investigata tramite la rappresentazione simplettica; una parte consistente della letteratura si dedica allo studio di questo sottogruppo, noto come sottogruppo di Torelli.

*Osservazione 1.3.8.* Notiamo esplicitamente che questa rappresentazione ci fornisce un metodo effettivo per decidere se due automorfismi non sono isotopi; basta infatti scegliere un'identificazione  $H_1(S_g) \cong \mathbb{Z}^{2g}$  e una base per tale modulo e poi confrontare le matrici associate: se queste sono diverse allora gli automorfismi presi in considerazione non possono essere isotopi.

# Capitolo 2

## Risultati strutturali

Dedichiamo il secondo capitolo ad un'indagine più approfondita della struttura algebrica del gruppo per le superfici, affrontando in particolare il problema della sua generazione e della classificazione dei suoi elementi.

### 2.1 Dehn Twist

In questo paragrafo presentiamo una classe di automorfismi che riveste un ruolo fondamentale: come vedremo nel prossimo paragrafo, infatti, ogni automorfismo della superficie si scrive come composizione di questi.

**Definizione 2.1.** Sia  $A = S^1 \times I$ . Chiameremo *Dehn Twist* l'automorfismo  $T \in \text{Aut}(A)$  definito da  $T(\theta, t) = (\theta + 2\pi t, t)$ .

**Definizione 2.2.** Sia  $S$  una superficie e  $\gamma$  una curva chiusa semplice (nel seguito c.c.s. ) su  $S$ . Allora  $\exists \varphi : A \rightarrow N \subset S$ , ove  $\varphi$  è un omeomorfismo e  $N$  è un intorno anulare, cioè omeomorfo ad  $A$ , di  $\gamma$ . Chiameremo *Dehn Twist lungo  $\gamma$*  l'automorfismo  $T_\gamma \in \text{Aut}(S)$  definito da

$$T_\gamma(x) = \begin{cases} \varphi \circ T \circ \varphi^{-1}(x) & \text{se } x \in N \\ x & \text{se } x \notin N \end{cases}$$

Si può dimostrare che la classe di isotopia di  $T_\gamma$  in realtà non dipende dalla scelta di  $N$  e  $\varphi$ , né dalla scelta di  $\gamma$  all'interno della sua classe di isotopia. Possiamo dunque estendere questa definizione a  $\mathcal{MCG}(S)$  e, data una classe

di isotopia  $c$  di c.c.s. su  $S$ , chiamare Dehn Twist lungo  $c$  l'elemento  $T_c$  di  $\mathcal{MCG}(S)$  che ha come rappresentante il Dehn Twist lungo  $\gamma \in c$  appena definito.

**Definizione 2.3.** Siano  $a$  e  $b$  classi di omotopia di c.c.s. su  $S$ ; definiamo *numero geometrico di intersezione* tra  $a$  e  $b$  il numero  $i(a, b) = \min\{\text{card}(\alpha \cap \beta) \mid \alpha \in a, \beta \in b\}$ . Diremo che  $\alpha \in a$  e  $\beta \in b$  sono in posizione minimale se  $i(a, b) = \text{card}(\alpha \cup \beta)$ .

*Osservazione 2.1.1.* Si ha subito che  $i(a, b) = i(b, a)$  e che  $i(a, a) = 0$ .

*Osservazione 2.1.2.* Ogni automorfismo di  $S$  conserva il numero geometrico di intersezione.

**Definizione 2.4.** Sia  $\alpha : I \rightarrow S$  una curva su  $S$ ; diremo che è *essenziale* se non è omotopa a un punto, una puntura o una componente di bordo di  $S$ . Diremo che è *separante* se la superficie  $S \setminus \alpha$ , ottenuta da  $S$  tagliando lungo il supporto di  $\alpha$ , è non connessa.

Siccome la topologia algebrica classica ha per lo più a che fare con l'omotopia, è utile sapere quando questa si può promuovere ad un'isotopia: si ha il seguente risultato per cui si rimanda a [4, Proposizione 1.10].

**Proposizione 2.1.3.** *Siano  $\alpha, \beta : I \rightarrow S$  due c.c.s. essenziali sulla superficie  $S$ . Allora esse sono isotope se e solo se sono omotope.*

Dopo le prime definizioni, passiamo ora ad indagare le relazioni algebriche tra questi automorfismi: si ha il seguente utile lemma, per la cui dimostrazione si veda [4, Proposizione 3.2].

**Lemma 2.1.4.** *Siano  $a$  e  $b$  classi di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$  e  $k \in \mathbb{Z}$ . Allora  $i(T_a^k(b), b) = |k|i(a, b)^2$ .*

*Osservazione 2.1.5.* Segue dal lemma che i Dehn Twist su c.c.s. essenziali sono elementi non banali di  $\mathcal{MCG}(S)$ ; anzi sono proprio elementi di periodo infinito.

**Proposizione 2.1.6.** *Siano  $a$  e  $b$  classi di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$ . Allora  $T_a = T_b \Leftrightarrow a = b$ .*

*Dimostrazione.* Resta solo da verificare che  $T_a = T_b \Rightarrow a = b$ . Per assurdo sia  $a \neq b$ . Sia  $c$  una classe di isotopia di c.c.s. su  $S$  tale che  $i(a, c) = 0$  e  $i(b, c) \neq 0$ . Per il lemma 2.1.4 abbiamo  $i(T_a(c), c) = i(a, c)^2 = 0 \neq i(b, c)^2 = i(T_b(c), c)$ , da cui segue che  $T_a(c) \neq T_b(c)$ , e dunque  $T_a \neq T_b$ , assurdo.  $\square$

Seguono a cascata alcune interessanti relazioni:

**Corollario 2.1.7.** *Siano  $a$  e  $b$  classi di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$ ,  $f \in \mathcal{MCG}(S)$  e  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Allora*

1.  $T_a^k = T_b^j \Leftrightarrow a = b \wedge k = j$
2.  $T_{f(a)}^k = fT_a^k f^{-1}$
3.  $fT_a^k = T_a^k f \Leftrightarrow f(a) = a$
4. (Relazione di separazione)  $i(a, b) = 0 \Leftrightarrow T_a^j(b) = b \Leftrightarrow T_a^j T_b^k = T_b^k T_a^j$

*Dimostrazione.* La sola implicazione non banale è l'inversa di 4). Abbiamo che  $T_a^j T_b^k = T_b^k T_a^j \Rightarrow T_a^j(b) = b$  per 3). Ma  $T_a^j(b) = b \Rightarrow i(T_a^j(b), b) = i(b, b) = 0$ . Dal lemma 2.1.4 segue  $i(T_a^j(b), b) = |j|i(a, b)^2$  e dunque  $i(a, b) = 0$ .  $\square$

**Corollario 2.1.8 (Relazione delle trecce).** *Siano  $a \neq b$  classi di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$ . Allora  $i(a, b) = 1 \Leftrightarrow T_a T_b T_a = T_b T_a T_b$ .*

*Dimostrazione.* Si ha che  $T_a T_b T_a = T_b T_a T_b \Leftrightarrow (T_a T_b) T_a (T_a T_b)^{-1} = T_b$ , che per il punto 2) del corollario precedente equivale a  $T_{T_a T_b(a)} = T_b$ , che a sua volta equivale a  $T_a T_b(a) = b$  per il punto 1) dello stesso corollario. Resta dunque da provare che  $i(a, b) = 1 \Leftrightarrow T_a T_b(a) = b$ . La sufficienza è illustrata in figura 2.1, ove  $\alpha \in a, \beta \in b$ . Vediamo dunque la necessità.  $T_a T_b(a) = b \Rightarrow i(a, T_a T_b(a)) = i(a, b)$ . Ma poiché  $T_a^{-1}(a) = a$ , dal lemma 2.1.4 segue  $i(a, T_a T_b(a)) = i(a, b)^2$  e pertanto ho  $i(a, b)^2 = i(a, b)$ , da cui  $i(a, b) \in \{0, 1\}$ . Se per assurdo fosse  $i(a, b) = 0$ , per il punto 4) del corollario avrei  $T_a = T_b$  e dunque  $a = b$ , contro l'ipotesi.  $\square$

L'interesse degli ultimi due corollari risiede nel fatto che, eccettuati alcuni casi, la relazione di separazione e quella delle trecce sono le sole relazioni

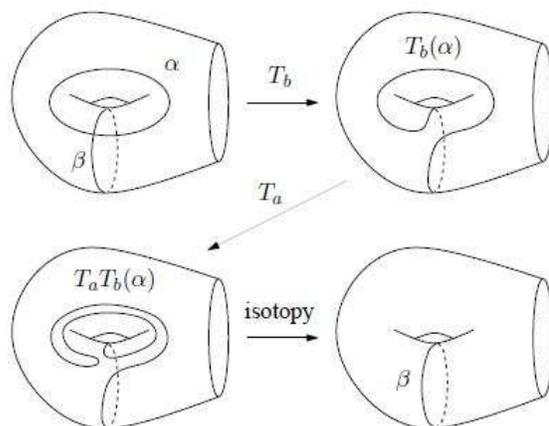


Figura 2.1: Relazione delle trecce:  $i(a, b) = 1 \Rightarrow T_a T_b(a) = b$

che intercorrono tra Dehn Twist in  $\mathcal{MCG}(S)$ . In particolare queste sono le relazioni alla base della (finita) presentazione del gruppo stesso<sup>1</sup>.

## 2.2 Successione di Birman e finita generazione

Questo paragrafo è interamente dedicato a provare il seguente risultato:

**Teorema 2.2.1 (di Dehn-Lickorish).**  $\forall g \geq 0$   $\mathcal{MCG}(S_g)$  è finitamente generato da Dehn twist su opportune c.c.s. essenziali e non separanti.

Il primo a fornirne una dimostrazione è stato lo stesso Dehn negli anni '20, esibendo una collezione di  $2g(g-1)$  curve tali che i relativi Dehn Twist generano il gruppo. Seguiamo qui l'elegante impostazione di Birman, ma prima è necessario introdurre l'opportuna strumentazione: per ragioni tecniche proveremo infatti un risultato più generale, ammettendo che la superficie abbia delle punture. Non avendo bisogno di considerare superfici con bordo, per semplicità di notazione indicheremo nel resto del paragrafo con  $S_{g,n}$  la

<sup>1</sup>Si veda [4, Paragrafi 3.5, 5.1-3] per una discussione del problema della presentazione del gruppo.

superficie di genere  $g$  con  $n$  punture. Si riottiene il teorema enunciato sopra per  $n = 0$ .

**Definizione 2.5.** Chiameremo *Mapping Class Group Puro* di  $S_{g,n}$  il sottogruppo  $\mathcal{PMCG}(S_{g,n})$  di  $\mathcal{MCG}(S_{g,n})$  delle classi di automorfismi che fissano individualmente ogni puntura. Abbiamo la successione esatta

$$1 \rightarrow \mathcal{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow \mathcal{MCG}(S_{g,n}) \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow 1$$

ottenuta associando ad un automorfismo la permutazione indotta sulle punture. Chiaramente nel caso  $n \leq 1$  si ha  $\mathcal{PMCG}(S_{g,n}) \equiv \mathcal{MCG}(S_{g,n})$ .

**Definizione 2.6.** Sia  $S$  una superficie e  $S^*$  la superficie che si ottiene da essa aggiungendo una puntura. L'inclusione  $S^* \rightarrow S$  induce una mappa sui gruppi che indichiamo con  $\mathcal{Forget}: \mathcal{MCG}(S^*) \rightarrow \mathcal{MCG}(S)$ , che consiste nel dimenticare la puntura.

**Definizione 2.7.** Sia  $S$  una superficie,  $x \in S$  e  $\alpha : I \rightarrow S$  un cappio basato in  $x$ . Pensando  $\alpha$  come isotopia di punti (che sono banalmente una sottovarietà compatta), possiamo estendere tale isotopia ad una isotopia di  $S$  per il teorema 1.1.5. Sia  $\varphi_\alpha$  l'automorfismo che otteniamo alla fine di tale isotopia. Poiché  $\alpha$  è basato in  $x$ , possiamo pensare  $\varphi_\alpha$  come automorfismo di  $S^*$ . I prossimi teoremi sono dedicati a provare che questa costruzione produce un morfismo che indichiamo con  $\mathcal{Push}: \pi_1(S, x) \rightarrow \mathcal{MCG}(S^*)$ , in cui intendiamo che  $x$  coincide con la puntura.

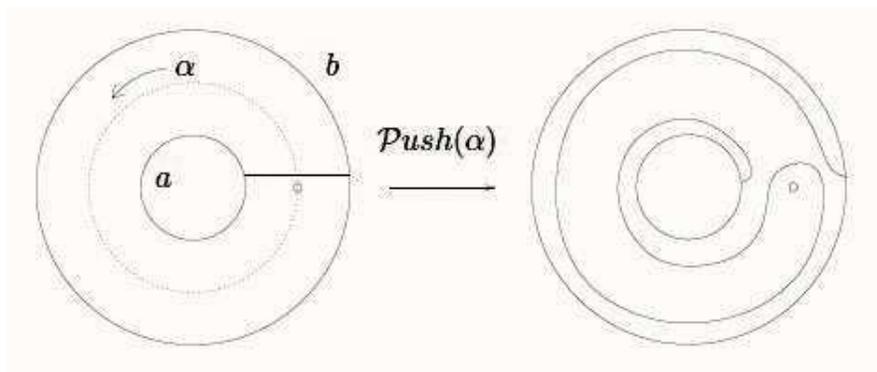


Figura 2.2:  $\mathcal{Push}$  come prodotto di Dehn Twist

**Proposizione 2.2.2.** *Sia  $\alpha$  un coppia semplice su  $S$  con punto base  $x$ . Allora  $\exists a, b$  classi di isotopia di c.c.s. su  $S$  tali che  $\mathcal{P}ush([\alpha]) = T_a T_b^{-1}$ . In particolare, se  $\alpha$  è non separante, anche  $a$  e  $b$  possono essere scelte non separanti.*

*Dimostrazione.* Identifichiamo un intorno  $N$  di  $\alpha$  su  $S$  con l'anello  $A = S^1 \times [0, 2]$ , in modo che  $x$  corrisponda al punto  $(0, 1) \in A$ . Definiamo un'isotopia di  $A$  come segue

$$F((\theta, r), t) = \begin{cases} (\theta + 2\pi r t, r) & \text{se } 0 \leq r \leq 1 \\ (\theta + 2\pi(2-r)t, r) & \text{se } 1 \leq r \leq 2 \end{cases}$$

ed estendiamola ad un'isotopia di  $S$ , che chiamiamo ancora  $F$ . Su  $x$  l'isotopia agisce così:  $F((0, 1), t) = (2\pi t, 1)$ , cioè lo trascina lungo la circonferenza centrale  $S^1 \times \{1\}$ . Sia infine  $\varphi$  l'automorfismo di  $S^* = S \setminus x$  dato da  $F((\theta, r), 1)$ , ossia quello che abbiamo chiamato  $\mathcal{P}ush([\alpha])$ ; esso si scrive allora come prodotto di Twist  $T_a T_b^{-1}$ , ove  $a$  e  $b$  sono le classi di isotopia dei bordi dell'intorno  $N$  di  $\alpha$ . Infine se  $\alpha$  è non separante, allora  $S \setminus N$  è connessa, e in particolare anche le componenti di  $\partial N$  sono non separanti.  $\square$

**Teorema 2.2.3 (Successione esatta di Birman).** *Sia  $S$  una superficie con  $\chi(S) < 0$ , e sia  $S^*$  ottenuta aggiungendo una puntura  $x$  a  $S$ . Allora è ben posta ed esatta la seguente successione di gruppi:*

$$1 \longrightarrow \pi_1(S, x) \xrightarrow{\mathcal{P}ush} \mathcal{MCG}(S^*) \xrightarrow{\mathcal{F}orget} \mathcal{MCG}(S) \longrightarrow 1$$

*Dimostrazione.* Cominciamo costruendo un fibrato

$$\mathit{Homeo}(S, x) \longrightarrow \mathit{Homeo}(S) \xrightarrow{\mathcal{E}} S$$

ove  $\mathit{Homeo}(S, x)$  è il sottogruppo degli automorfismi che fissa la puntura  $x$  e  $\mathcal{E}$  è la valutazione in essa. Sia  $U \cong B^2$  un aperto di  $S$  con  $x \in U$  e  $u \in U$ ; possiamo scegliere  $\varphi_u \in \mathit{Homeo}(U)$  tale che  $\varphi_u(x) = u$ , in modo continuo rispetto a  $u$ . Otteniamo così una mappa  $U \times \mathit{Homeo}(S, x) \rightarrow \mathcal{E}^{-1}(U)$ ,  $(u, \psi) \mapsto \varphi_u \circ \psi$ , con inversa  $\psi \mapsto (\psi(x), \varphi_{\psi(x)}^{-1} \circ \psi)$ , cioè un omeomorfismo. Per ogni altro  $y \in S$  scegliamo un automorfismo  $\chi$  di  $S$  che mappa  $y$  su  $x$  e

combiniamo l'omeomorfismo costruito prima con  $\chi$ , ottenendo così la struttura di fibrato su tutta  $S$ . Consideriamo ora la successione lunga esatta di gruppi di omotopia associata a questo fibrato

$$\rightarrow \pi_1(\text{Homeo}(S)) \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(S, x)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(S)) \rightarrow \pi_0(S) \rightarrow$$

Ora,  $\pi_0(S)$  è banale, e si può provare che, avendo assunto  $\chi(S) < 0$ , anche  $\pi_1(\text{Homeo}(S))$  lo è<sup>2</sup>. Dunque la successione si riduce a

$$\rightarrow 1 \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(S, x)) \rightarrow \pi_0(\text{Homeo}(S)) \rightarrow 1 \rightarrow$$

i cui gruppi corrispondono a quelli della successione di Birman per definizione. Infine, si può verificare che le mappe in questa successione corrispondono proprio a *Forget* e *Push* definite prima.  $\square$

*Osservazione 2.2.4.* Il teorema resta valido anche considerando i gruppi estesi e quelli puri. Si tratta semplicemente di cambiare la scelta di  $\text{Homeo}(S)$  con l'opportuno gruppo di trasformazioni cui si è interessati.

*Osservazione 2.2.5.* Nel caso di  $g = 1$ , non è vero che  $\pi_1(\text{Homeo}(S)) = 1$ , infatti risulta<sup>3</sup> essere  $\mathbb{Z}^2$ . La successione lunga esatta dei gruppi di omotopia si riduce pertanto a

$$\rightarrow \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{id} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{0} \mathcal{MCG}(S_{1,1}) \rightarrow \mathcal{MCG}(S_1) \rightarrow 1 \rightarrow$$

il che fornisce una dimostrazione del fatto che  $\mathcal{MCG}(S_{1,1}) \cong \mathcal{MCG}(S_1)$ .

Il seguente risultato corrisponde a [4, Proposizione 3.20].

**Proposizione 2.2.6.** *Sia  $a$  una classe di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$ . Allora è ben definita ed esatta la seguente successione*

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow \mathcal{MCG}(S, a) \rightarrow \mathcal{MCG}(S \setminus a) \rightarrow 1$$

ove  $S \setminus a$  è ottenuta tagliando  $S$  lungo un rappresentante di  $a$ , e  $\mathcal{MCG}(S, a)$  è lo stabilizzatore di  $a$  in  $\mathcal{MCG}(S)$ .

Un altro strumento di cui avremo bisogno per dimostrare la finita generazione è il seguente.

---

<sup>2</sup>Si veda [6] per una trattazione di questo risultato.

<sup>3</sup>Si rimanda ancora a [6].

**Definizione 2.8.** Sia  $S$  una superficie. Definiamo *complesso delle curve non separanti* di  $S$  il complesso simpliciale  $\tilde{N}(S)$  i cui vertici sono le classi di isotopia di c.c.s. non separanti, e in cui due vertici  $a$  e  $b$  generano un 1-simplesso se e solo se  $i(a, b) = 1$ .

L'utilità dell'aver introdotto questo complesso risulta chiara dai prossimi due lemmi, per la cui dimostrazione si veda [4, Paragrafi 4.1, 4.3]:

**Lemma 2.2.7.** Per  $g \geq 2$  e  $n \geq 0$  il complesso  $\tilde{N}(S_{g,n})$  è connesso.

**Lemma 2.2.8.** Sia  $G$  un gruppo che agisce su un 1-complesso simpliciale connesso  $K$  in modo transitivo sia sui vertici che sulle coppie di vertici che generano un 1-simplesso. Siano  $v$  e  $w$  due vertici che generano un 1-simplesso e sia  $g \in G$  tale che  $g(w) = v$ . Sia infine  $G_v$  lo stabilizzatore di  $v$ . Allora  $G$  è generato da  $\{g\} \cup G_v$ .

*Osservazione 2.2.9 (Importante!).* La strategia della dimostrazione è una doppia induzione sul numero di punture e sul genere; in particolare per la prima faremo uso della successione di Birman, e per la seconda del complesso delle curve non separanti. Tuttavia occorre notare che la prima si applica solo per  $\chi(S) < 0$ , lasciando scoperti i casi  $S_{0,0}$ ,  $S_{0,1}$ ,  $S_{0,2}$ ,  $S_{0,3}$ ,  $S_{1,0}$  e  $S_{1,1}$ , e il secondo è connesso solo per  $g \geq 2$ , lasciando scoperti i casi  $S_{0,n}$  e  $S_{1,n}$ . Per i calcoli diretti della sezione 1.1 sappiamo però già che per  $n \leq 3$   $\mathcal{PMCG}(S_{0,n}) \cong 1$  e dunque è banalmente generato da Twist sulle curve richieste; l'induzione sul numero di punture che presentiamo nella dimostrazione del teorema ci garantisce che esso vale dunque per  $S_{0,n}$ , per ogni  $n$ .

Anche per il toro,  $\mathcal{MCG}(S_{1,0})$  è generato dai Dehn Twist su un meridiano e un parallelo: infatti tramite l'isomorfismo del teorema 1.2.12 tali Twist corrispondono alle matrici  $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , che sono generatori di  $SL_2\mathbb{Z}$ . Infine, per l'osservazione 2.2.5, sappiamo che  $\mathcal{MCG}(S_{1,1}) \cong \mathcal{MCG}(S_1)$ ; di nuovo, l'induzione su  $n$  che presentiamo nella dimostrazione prova che il teorema è valido anche per  $S_{1,n}$ , per ogni  $n$ . Queste osservazioni preliminari servono a coprire i casi che la dimostrazione del teorema, così come la presenteremo, trascura, nonché a fornire i casi base per i passaggi induttivi.

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il teorema nel caso generale. Otteniamo il teorema di finita generazione per  $\mathcal{MCG}(S_g)$  nel caso  $n = 0$ .

**Teorema 2.2.10 (di Dehn-Lickorish esteso).**  $\forall g \geq 0$  e  $\forall n \geq 0$  il gruppo  $\mathcal{PMCG}(S_{g,n})$  è finitamente generato; un insieme di generatori è dato dai Dehn twist su opportune c.c.s. essenziali; se  $g \geq 1$ , tali curve possono essere scelte non separanti<sup>4</sup>.

*Dimostrazione.* Cominciamo dall'induzione sulle punture. Per l'osservazione precedente ci basta lavorare con  $\chi(S) < 0$  e provare il passaggio induttivo. Assumiamo che  $\mathcal{PMCG}(S_{g,n})$  sia finitamente generato da Dehn twist  $\{T_{\alpha_i}\}$  su una collezione finita  $\{\alpha_i\}$  di c.c.s. non separanti su  $S_{g,n}$ . Possiamo allora applicare la sequenza esatta di Birman:

$$1 \rightarrow \pi_1(S_{g,n}) \rightarrow \mathcal{PMCG}(S_{g,n+1}) \rightarrow \mathcal{PMCG}(S_{g,n}) \rightarrow 1$$

Ora,  $\pi_1(S_{g,n})$  può essere finitamente generato dalle classi di c.c.s. non separanti; per il lemma 2.2.2 la loro immagine è un prodotto di Dehn Twist su c.c.s. non separanti. Costruiamo un insieme di generatori prendendo questi Twist e scegliendo un sollevamento a  $\mathcal{PMCG}(S_{g,n+1})$  dei  $\{T_{\alpha_i}\}$ . Possiamo effettuare il sollevamento richiesto in quanto, data una  $\alpha_i$ , c'è una curva di  $S_{g,n+1}$  che viene mappata su  $\alpha_i$  da  $\mathcal{Forget}: S_{g,n+1} \rightarrow S_{g,n}$ ; dunque solleviamo ogni  $T_{\alpha_i}$  al Twist sulla rispettiva curva così ottenuta.

Veniamo ora all'induzione sul genere. Di nuovo, per l'osservazione precedente possiamo supporre  $g \geq 2$  e provare il passaggio induttivo; assumo che  $\forall n \geq 0$   $\mathcal{PMCG}(S_{g,n})$  sia finitamente generato da Dehn twist  $\{T_{\alpha_i}\}$  su una collezione finita  $\{\alpha_i\}$  di c.c.s. non separanti su  $S_{g,n}$ . Ora  $\tilde{N}(S_g)$  è connesso per il lemma 2.2.7, e  $\mathcal{MCG}(S_g)$  agisce su di lui transitivamente soddisfacendo le ipotesi del lemma 2.2.8. Siano  $a$  e  $b$  due vertici di uno stesso 1-simplesso di  $\tilde{N}(S_g)$ , cioè  $i(a, b) = 1$ . Dalla relazione delle trecce 2.1.8, e dalla sua dimostrazione, segue che  $i(a, b) = 1 \Leftrightarrow T_b T_a(b) = a$ . Se con  $\mathcal{MCG}(S_g, a)$  indichiamo lo stabilizzatore di  $a$  in  $\mathcal{MCG}(S_g)$ , allora per il lemma 2.2.8

---

<sup>4</sup>Chiaramente sulla superficie di genere 0 non ci sono curve chiuse non separanti; tuttavia, per non appesantire la dimostrazione con varie distinzioni di casi, considereremo sempre c.c.s. non separanti, sottintendendo che nel caso della sfera si tratta semplicemente di c.c.s. (necessariamente separanti).

$\mathcal{MCG}(S_g)$  è generato da  $T_a, T_b$  e  $\mathcal{MCG}(S_g, a)$ . Basta dunque provare l'enunciato per quest'ultimo. Indichiamo con  $\mathcal{MCG}(S_g, \vec{a})$  il sottogruppo che mantiene l'orientazione di  $a$ ; abbiamo allora la successione esatta

$$1 \rightarrow \mathcal{MCG}(S_g, \vec{a}) \rightarrow \mathcal{MCG}(S_g, a) \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow 1$$

Poiché  $T_b T_a^2 T_b$  inverte l'orientazione di  $a$ , ho che il laterale non banale di  $\mathcal{MCG}(S_g, \vec{a})$  è già rappresentato da  $T_a$  e  $T_b$ . Mi riduco infine a provare l'enunciato per  $\mathcal{MCG}(S_g, \vec{a})$ . Per la proposizione 2.2.6 ho una successione esatta<sup>5</sup>

$$1 \rightarrow \langle T_a \rangle \rightarrow \mathcal{MCG}(S_g, \vec{a}) \rightarrow \mathcal{PMCG}(S_g \setminus a) \rightarrow 1$$

ove  $S_g \setminus a$  è omeomorfa a  $S_{g-1,2}$ , che per ipotesi induttiva soddisfa la tesi; ragionando come prima, tramite la mappa *Forget* solleviamo i Twist che generano  $\mathcal{PMCG}(S_g \setminus a)$  a  $\mathcal{MCG}(S_g, \vec{a})$  e aggiungiamo il generatore  $T_a$ .  $\square$

*Osservazione 2.2.11.* La scelta concreta di una collezione di curve su  $S$  determina una scelta concreta di generatori per il gruppo, in particolare determina il numero di tali generatori. Humphries ha esibito nel 1979 l'insieme di  $2g+1$  curve indicato in figura 2.3 per  $g \geq 1$ , e ha provato che tale numero è effettivamente il numero minimo di Dehn Twist con cui è possibile generare il gruppo. La minimalità di questo numero di generatori è conseguenza (non banale) della suriettività della rappresentazione simplettica (teorema 1.3.6).

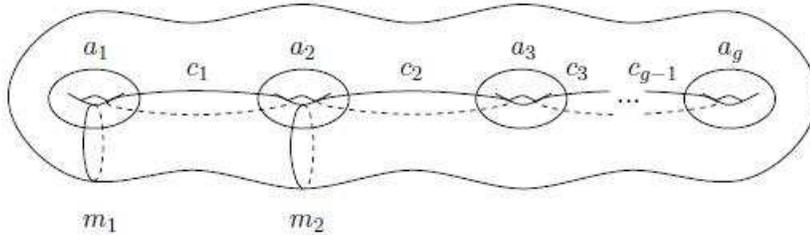


Figura 2.3: Generatori di Humphries

<sup>5</sup>Volendo essere precisi, nella proposizione si considera tutto lo stabilizzatore e tutto il mapping class group; qui, essendo interessati al gruppo puro, dobbiamo restringere lo stabilizzatore agli automorfismi che mantengono  $a$  non solo come supporto, ma anche come orientazione, e che di conseguenza non ne scambiano gli estremi.

## 2.3 Classificazione Nielsen-Thurston

Concludiamo lo studio del mapping class group di una superficie con la classificazione dei suoi elementi.

**Definizione 2.9.** Una *foliazione affine*  $\mathfrak{F}_A$  di  $\mathbb{R}^2$  è un fascio di rette parallele in  $\mathbb{R}^2$ ; solitamente si conviene di fissare la foliazione data dalle rette orizzontali, e nel seguito chiameremo  $\mathfrak{F}_A$  questa particolare foliazione affine. Una *foliazione*  $\mathfrak{F}$  su una 2-varietà  $S$  è una decomposizione di  $S$  in un'unione disgiunta di 1-sottovarietà di  $S$ , dette foglie, tale che  $\forall x \in S$  ci siano due aperti  $U \subset S, V \subset \mathbb{R}^2, x \in U$  e una carta  $\varphi : U \rightarrow V$  che porti  $\mathfrak{F} \cap U$  in  $\mathfrak{F}_A \cap V$ . Più in generale, una foliazione è detta *singolare* se la condizione vale su tutti i punti tranne al più un numero finito di punti (dette singolarità), in ciascuno dei quali alcune foglie  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$  ( $k$ , detto indice della singolarità, finito, ma può eventualmente dipendere dal punto), dette separatrici, si incontrano in modo che ci sia un opportuno intorno  $W$  tale che  $\mathfrak{F} \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$  sia una foliazione non singolare su  $W \setminus \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\}$ .

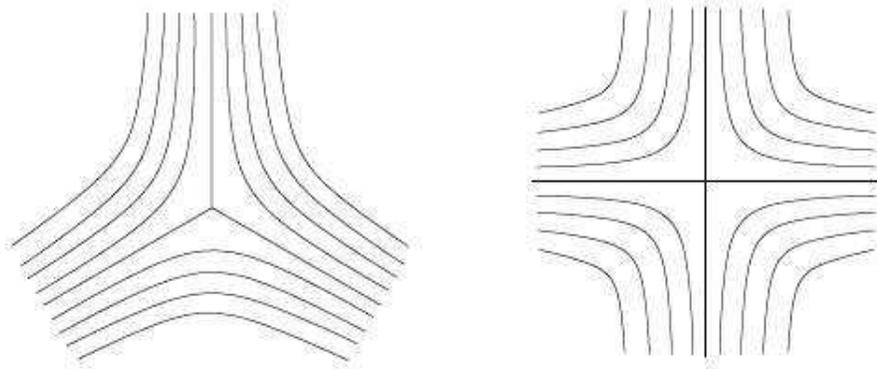


Figura 2.4: Immagini locali di due foliazioni con singolarità di indice 3 e 4

**Definizione 2.10.** Diciamo che due curve su  $S$  sono *trasverse* in un punto  $x$  se non sono tangenti in  $x$ . Diremo che una curva è trasversa a una foliazione singolare  $\mathfrak{F}$  su  $S$  se non passa per le sue singolarità e se in ogni suo punto è trasversa alla foglia di  $\mathfrak{F}$  che passa per quel punto. Se  $\alpha$  e  $\beta$  sono curve

trasverse a  $\mathfrak{F}$ , un'isotopia  $H : I \times I \rightarrow S$  tra  $\alpha$  e  $\beta$  si dice *relativa a  $\mathfrak{F}$*  se  $\forall t \in I$  la curva  $H_t = H|_{I \times t}$  è trasversa a  $\mathfrak{F}$  e se esistono due foglie  $f_0, f_1 \in \mathfrak{F}$  tali che  $\forall t \in I$   $H_t(0) \in f_0$  e  $H_t(1) \in f_1$ . Infine due foliazioni singolari si dicono *trasverse* se, quando una foglia dell'una e una foglia dell'altra si intersecano, lo fanno in modo trasverso.

**Definizione 2.11.** Una *misura trasversa* su una foliazione singolare  $\mathfrak{F}$  è una misura di Borel  $\mu$  sull'insieme delle curve trasverse a  $\mathfrak{F}$  che sia invariante per isotopie di  $S$  relative a  $\mathfrak{F}$ . Chiameremo la coppia  $(\mathfrak{F}, \mu)$  foliazione (singolare) misurata.

*Osservazione 2.3.1.* Con le notazioni della definizione 2.9, possiamo pensare la misura trasversa  $\mu$  come indotta dalla misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^2$  attraverso la carta  $\varphi$ .

*Osservazione 2.3.2.* C'è un'azione naturale di  $Aut(S)$  su una foliazione misurata data da  $\varphi \cdot (\mathfrak{F}, \mu) = (\varphi(\mathfrak{F}), \varphi_*(\mu))$ , ove  $\varphi_*(\mu)(\alpha)$  è definita come  $\mu(\varphi^{-1}(\alpha))$ .

*Osservazione 2.3.3.* Si dimostra che una superficie con  $\chi(S) > 0$  non ammette foliazioni e che una superficie con  $\chi(S) < 0$  non ammette foliazioni non singolari. Il caso più semplice è quello di  $\chi(S) = 0$ , che descriviamo nel seguente esempio.

**Esempio 2.1** (Foliazione non singolare misurata sul toro). Sia  $r \subset \mathbb{R}^2$  una retta affine. Allora  $r$  determina una foliazione affine  $\mathfrak{F}_A$  su  $\mathbb{R}^2$  attraverso le sue parallele. Poiché tutti gli automorfismi del rivestimento  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  sono traslazioni di  $\mathbb{R}^2$  e queste rispettano  $\mathfrak{F}_A$  nel senso che mandano rette di  $\mathfrak{F}_A$  in rette di  $\mathfrak{F}_A$ , tale foliazione ne induce una  $(\mathfrak{F})$  sul toro. Precisamente, se la giacitura di  $r$  è  $\langle (p, q) \rangle$ , con  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $MCD(p, q) = 1$ , allora ogni foglia è una c.c.s. che si avvolge  $p$  volte sul toro in senso meridiano e  $q$  volte in senso parallelo, ossia è nella classe  $(p, q) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong \pi_1(S_1)$ . Sia poi  $\nu_r : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione distanza da  $r$ . Allora se  $\alpha$  è una curva piana  $\mu(\alpha) = \int_\alpha d\nu_r$  è la misura della variazione totale di  $\alpha$  rispetto alla direzione ortogonale a  $r$ . Chiaramente  $\mu$  è invariante per traslazioni e per isotopie che rispettano la foliazione, e quindi scende ad una misura trasversa sul toro.

**Definizione 2.12.** Sia  $\varphi \in MCG(S)$ . Diremo che  $\varphi$  è

- *periodico* se  $\exists n > 0$  tale che  $\varphi^n = Id_S$ ;
- *riducibile* se  $\exists a_1, \dots, a_m$  classi di isotopia di c.c.s. essenziali tali che  $\forall i, j \ i(a_i, a_j) = 0$  e  $\varphi(a_i) = a_i$ . L'insieme di tali curve è detto *sistema di riduzione* per  $\varphi$ , ed è in sostanza una 1-sottovarietà che, a meno di isotopia, è fissata da  $\varphi$ ;
- *pseudo-Anosov* se ci sono due foliazioni singolari misurate trasverse  $(\mathfrak{F}_i, \mu_i)$  e  $(\mathfrak{F}_s, \mu_s)$  su  $S$  e  $\lambda > 1$  tali che  $\varphi \cdot (\mathfrak{F}_i, \mu_i) = (\mathfrak{F}_i, \lambda\mu_i)$  e  $\varphi \cdot (\mathfrak{F}_s, \mu_s) = (\mathfrak{F}_s, \lambda^{-1}\mu_s)$ . In altri termini le foliazioni sono fissate da  $\varphi$  e le misure sono trasformate in modo che dopo l'applicazione di  $\varphi$  le foglie di  $\mathfrak{F}_i$ , detta foliazione instabile, siano dilatate e quelle di  $\mathfrak{F}_s$ , detta foliazione stabile, contratte:  $\lambda$  è detto fattore di deformazione di  $\varphi$ .

**Esempio 2.2.** Se realizziamo  $S_g$  come sfera con  $g$  manici incollati su uno stesso parallelo, allora la rotazione di  $\frac{2\pi}{g}$  è un automorfismo periodico di periodo  $g$ .

**Esempio 2.3.** Il Dehn Twist  $T_a$  è un chiaro esempio di automorfismo riducibile, con sistema di riduzione costituito dalla sola  $a$ .

*Osservazione 2.3.4.* Periodicità e riducibilità non sono in generale caratteristiche incompatibili: se realizziamo  $S_g$  ( $g \geq 2$ ) come toro con  $g - 1$  manici incollati su uno stesso parallelo, allora la rotazione di  $\frac{2\pi}{g-1}$  attorno al buco centrale è un automorfismo periodico di periodo  $g - 1$  che fissa il parallelo interno del buco centrale, e dunque è anche riducibile. Dal lemma 2.1.4 segue che i Dehn Twist sono invece automorfismi riducibili che non sono periodici.

**Esempio 2.4.** La superficie più semplice che presenta un automorfismo pseudo-Anosov è  $S_{0,0,4}$ , ossia la sfera con 4 punture, esempio che fu proposto originariamente da Thurston stesso. Pensando la sfera come compatificazione del piano, consideriamo il piano con 3 punture e immaginiamo che la quarta sia il punto all'infinito. Prendiamo poi una c.c.s. che racchiude due punture e due automorfismi  $g$  ed  $h$  ciascuno dei quali scambia due punture fissando le altre due, come mostrato nelle prime due immagini della figura 2.4. La terza immagine mostra l'effetto della composizione dei due automorfismi sulla curva; tale composizione risulta essere un automorfismo

di tipo pseudo-Anosov, e la quarta immagine rappresenta l'effetto, sempre sulla stessa curva, della sua iterazione.

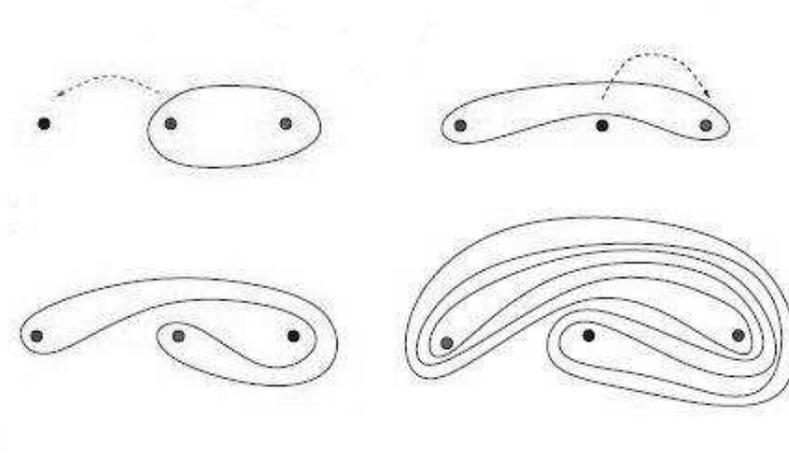


Figura 2.5: Pseudo-Anosov su  $S_{0,0,4}$

Il vero contenuto del teorema di classificazione è che un automorfismo irriducibile non periodico è automaticamente pseudo-Anosov, ossia si presenta equipaggiato con la coppia di foliazioni misurate trasverse descritte sopra. Cominciamo col semplice caso del toro. Tradizionalmente le mappe del terzo tipo sul toro sono dette semplicemente Anosov, e le pseudo-Anosov devono proprio il loro nome al fatto che sono l'analogo delle Anosov sul toro alle superfici di genere superiore.

**Teorema 2.3.5 (di Nielsen-Thurston per  $S_1$ ).** *Ogni automorfismo del toro è periodico, riducibile o Anosov, e i tre casi sono disgiunti.*

*Dimostrazione.* Dal teorema 1.2.12 abbiamo che  $\mathcal{MCG}(S_1) \cong SL_2\mathbb{Z}$ , e sia dunque  $\Phi$  la matrice che rappresenta  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S_1)$ . Poiché  $\Phi$  è speciale, i suoi autovalori sono uno l'inverso dell'altro, diciamo  $\lambda$  e  $\lambda^{-1}$ ; inoltre il polinomio caratteristico si scrive come  $x^2 - Tr(\Phi)x + 1$ . Abbiamo dunque 3 casi da distinguere:

- $\lambda \in \mathbb{C}$ , cioè  $|Tr(\Phi)| \in \{0, 1\}$ . In questo caso, segue dal teorema di Cayley-Hamilton che  $\Phi$  ha periodo finito, dunque  $\varphi$  è periodico.

- $\lambda = \lambda^{-1} = \pm 1$ , cioè  $|Tr(\Phi)| = 2$ . In questo caso abbiamo un autospazio generato in  $\mathbb{R}^2$  da un vettore a coordinate intere (perché  $\Phi$  è a coefficienti in  $\mathbb{Z}$ ). Tale autospazio scende tramite proiezione di rivestimento ad una c.c.s. sul toro; siccome è un autospazio, la curva è un sistema di riduzione, dunque  $\varphi$  è riducibile.
- $\lambda \neq \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$ , cioè  $|Tr(\Phi)| > 2$ . In questo caso ho due autospazi distinti in  $\mathbb{R}^2$ , uno che viene dilatato di un fattore  $\lambda$  dall'azione di  $\Phi$ , e l'altro che viene compresso dello stesso fattore. Questi inducono sul toro due foliazioni (non singolari) trasverse misurate, per quanto detto nell'osservazione 2.1, con le quali  $\varphi$  è Anosov.

□

Questa dimostrazione ci dà un modo comodo per visualizzare gli Anosov, almeno sul toro: si tratta infatti di automorfismi indotti, tramite proiezione di rivestimento, da endomorfismi lineari di  $\mathbb{R}^2$  che abbiano come autovalori un numero reale e il suo inverso; questi producono una deformazione del piano in modo che ci siano due direzioni indipendenti (cioè autospazi distinti), delle quali una viene compressa e l'altra viene invece dilatata, e questa deformazione ne induce una analoga sul toro, ove l'idea di direzione è da intendersi nel senso delle foliazioni.

Veniamo ora a superfici di genere superiore: in questo caso non possiamo avvalerci della rappresentazione simplettica, perché non è iniettiva. In particolare perdiamo la disgiunzione dei casi, come già osservato. Diamo solo una traccia della dimostrazione del teorema generale, che si basa consistentemente su risultati di geometria iperbolica (si ha infatti che, per  $g \geq 2$ ,  $\mathbb{H}^2$  è il rivestimento universale di  $S_g$ ). Nel corso della dimostrazione avremo bisogno dei seguenti oggetti e lemmi.

**Definizione 2.13.** Una *laminazione* su  $S$  è un chiuso di  $S$  che sia unione disgiunta di curve semplici, dette foglie della laminazione<sup>6</sup>. Si denota con  $\Lambda(S)$  lo spazio delle laminazioni su  $S$ , e si pone su di esso la metrica di Hausdorff

---

<sup>6</sup>Si noti che la differenza rispetto a una foliazione è che una laminazione non ricopre necessariamente tutta  $S$ .

$d_H(A, B) = \max\{\supinf_{a \in A, b \in B} d(a, b), \supinf_{b \in B, a \in A} d(a, b)\}$ , ove  $d$  è la restrizione della metrica euclidea di  $\mathbb{R}^3$  a  $S$ .

Si ha il seguente lemma, per il quale si rimanda a [3, Teorema 3.4].

**Lemma 2.3.6.** *Con la topologia indotta da  $d_H$ ,  $\Lambda(S)$  è compatto.*

**Definizione 2.14.** Sia  $(S, \mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_i)$  una superficie equipaggiata con due foliazioni trasverse. Un rettangolo su  $(S, \mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_i)$  è una mappa  $R : I \times I \rightarrow S$  tale che  $R$  sia un'immersione dell'interno di  $I \times I$  e tale che  $\forall t \in I \exists f_{s,t} \in \mathfrak{F}_s$  tale che  $R(I \times \{t\}) \subset f_{s,t}$  e  $\forall u \in I \exists f_{i,u} \in \mathfrak{F}_i$  tale che  $R(\{u\} \times I) \subset f_{i,u}$ . Useremo le notazioni  $\partial_s R = R(I \times \partial I)$  e  $\partial_i R = R(\partial I \times I)$ . Nel seguito non distingueremo tra un rettangolo e la sua immagine.

**Definizione 2.15.** Sia  $\varphi$  un automorfismo di  $(S, \mathfrak{F}_s, \mathfrak{F}_i)$ . Una *partizione di Markov* per  $\varphi$  consiste in una decomposizione finita di  $S$  in rettangoli  $S = \bigcup_{k=1}^n R_k$  tali che:

$$\mathring{R}_h \cap \mathring{R}_k = \emptyset \text{ se } h \neq k, \quad \varphi \left( \bigcup_{k=1}^n \partial_s R_k \right) \subset \bigcup_{k=1}^n \partial_s R_k \quad \text{e} \quad \bigcup_{k=1}^n \partial_i R_k \subset \varphi \left( \bigcup_{k=1}^n \partial_i R_k \right)$$

**Teorema 2.3.7 (di Nielsen-Thurston).** *Ogni automorfismo di  $S_g$  ( $g \geq 2$ ) è periodico, riducibile o pseudo-Anosov; inoltre ogni automorfismo non periodico e irriducibile è pseudo-Anosov.*

*Traccia della dimostrazione.* Sia  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S_g)$  irriducibile e aperiodico. Dalle definizioni segue che  $\exists c$  c.c.s. su  $S_g$  ( $c \in \Lambda(S_g)$ ) tale che  $\varphi^n(c) \neq c$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Per compattezza di  $\Lambda(S_g)$ , la successione  $\varphi^n(c)$  ammette una sottosuccessione convergente  $\varphi^{n_i}(c)$  e sia  $\lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^{n_i}(c) = k \in \Lambda(S_g)$ . Inoltre  $\forall r \in \mathbb{N}$  la sottosuccessione  $\varphi^{n_i+r}(c)$  converge a  $k_r = \varphi^r(c)$  e per  $r \neq s$  si ha che  $k_r$  è disgiunta da  $k_s$ . Così  $L_s = \overline{\bigcup_{r \in \mathbb{N}} k_r} \in \Lambda(S_g)$ , e per costruzione ho che  $\varphi(L_s) = L_s$ .

Chiamiamo questa laminazione stabile.

Applicando lo stesso procedimento a  $\varphi^{-1}$  si ottiene una  $L_i \in \Lambda(S_g)$  tale che  $\varphi(L_i) = L_i$ , e che chiameremo laminazione instabile.

Definiamo ora una relazione di equivalenza su  $S_g$  ponendo  $x \sim y$  se si verifica una delle seguenti condizioni:

1.  $x = y$
2.  $\exists U \subset S_g \setminus (L_s \cup L_i)$  connesso, tale che  $x, y \in \overline{U}$
3.  $\exists V \subset L_s \setminus L_i$  connesso, tale che  $x, y \in \overline{V}$
4.  $\exists W \subset L_i \setminus L_s$  connesso, tale che  $x, y \in \overline{W}$

Si dimostra che  $S_g/\sim \cong S_g$  e che tramite la proiezione sul quoziente le due laminazioni danno luogo ad una coppia di foliazioni trasverse singolari  $\mathfrak{F}_s$  e  $\mathfrak{F}_i$  che sono fissate da  $\varphi$ . In particolare le singolarità corrispondono alla condizione 2) della definizione della relazione.

Resta da rendere misurate queste foliazioni. Si dimostra che  $\varphi$  ammette una partizione di Markov  $S_g = \bigcup_{k=1}^n R_k$  relativamente a queste foliazioni. Segue dalla definizione stessa che  $\varphi(R_h) \cap R_k$  consiste di un numero finito di sottorettangoli  $\{S_j\}$  di  $R_k$  tali che  $\partial_i S_j \subset \partial_i R_k$ ; sia  $a_{hk}$  il numero di tali rettangoli e sia  $A = (a_{hk})$ . Si può provare che tale matrice ha un autovettore  $y$  con  $y_1, \dots, y_n > 0$  relativo ad un autovalore  $\lambda > 1$ .

Sia ora  $\alpha$  una curva trasversa a  $\mathfrak{F}_s$  e sia  $u_{km}$  il numero di componenti di  $\alpha \cap \varphi^m(R_k)$ . Definiamo allora una funzione  $\mu_s(\alpha) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda^{-m} y_k u_{km}$ . Questa definisce effettivamente una misura trasversa a  $\mathfrak{F}_s$  tale che  $\varphi(\mu_s) = \lambda \mu_s$ . Applicando la stessa costruzione a  $\varphi^{-1}$  si ottiene una misura  $\mu_i$  trasversa a  $\mathfrak{F}_i$  tale che  $\varphi(\mu_i) = \bar{\lambda}^{-1} \mu_i$ , per un qualche  $\bar{\lambda} > 1$  che risulta essere lo stesso  $\lambda$  definito prima. Questo rende  $(\mathfrak{F}_i, \mu_i)$  e  $(\mathfrak{F}_s, \mu_s)$  foliazioni singolari trasverse misurate su  $S$  e  $\lambda$  il fattore di deformazione per l'automorfismo  $\varphi$ , che dunque risulta essere pseudo-Anosov.  $\square$

Sottolineiamo che i punti nodali della dimostrazione (una cui trattazione esaustiva è riportata in [3]) sono stati la compattezza di  $\Lambda(S_g)$  (per la costruzione delle laminazioni), il fatto che  $S_g/\sim \cong S_g$  e che le laminazioni inducono delle foliazioni singolari trasverse su tale quoziente, che  $\varphi$  ammette una partizione di Markov e che la matrice  $A$  associata alla partizione ha un autovalore  $\lambda > 1$ . In particolare il secondo punto è tutt'altro che banale e richiede in maniera consistente tecniche di geometria iperbolica. Dal teorema di classificazione segue un interessante corollario (si veda [4, Corollario 13.3]) che ci dà una forma canonica per un automorfismo della superficie.

**Definizione 2.16.** Sia  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S)$  un automorfismo riducibile. Un sistema di riduzione si dice massimale quando è *massimale* rispetto all'inclusione tra i sistemi di riduzione per  $\varphi$ ; l'intersezione di tutti i sistemi di riduzione massimali è detta *sistema di riduzione canonico* per  $\varphi$ .

**Corollario 2.3.8** (Forma normale per un automorfismo). *Sia  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S)$  e sia  $\Gamma = \{c_1, \dots, c_n\}$  il suo sistema canonico di riduzione. Siano  $N_1, \dots, N_n$  opportuni intorno disgiunti di opportuni rappresentanti degli elementi di  $\Gamma$ , e siano  $N_{n+1}, \dots, N_{n+p}$  le componenti connesse di  $S \setminus \bigcup_{i=1}^n N_i$ . Allora  $\exists k \in \mathbb{N}$  tale che  $\varphi^k(N_i) = N_i$  e  $\varphi_i^k = \varphi^k|_{N_i}$  è periodico per  $i \leq n$  e pseudo-Anosov o banale per  $i \geq n + 1$ . In particolare, possiamo scegliere  $k = 1$  se  $\exists m \geq 3$  tale che  $\varphi \in \Psi_m^{-1}(Sp_{2g}\mathbb{Z}_m)$ , ove  $\Psi_m$  è la riduzione modulo  $m$  della rappresentazione simplettica descritta nel paragrafo 1.3.*

In sostanza possiamo fare a meno della classe dei riducibili, a patto di tagliare la superficie lungo il sistema canonico di riduzione; questo produce una superficie sconnessa e ci forza a vedere  $\mathcal{MCG}(S)$  come somma diretta dei gruppi delle varie componenti, ma riotteniamo l'univocità della classificazione. Si può pensare a ciò come ad un analogo della forma di Jordan per le matrici; il ruolo dei blocchi di Jordan è svolto qui dai  $\varphi_i$ .

# Capitolo 3

## Complesso delle curve su una superficie di Heegaard

Questo capitolo si propone di illustrare una naturale connessione tra lo studio del mapping class group e quello delle 3-varietà: gli elementi che consideriamo e che rendono possibile tale connessione sono gli spezzamenti di Heegaard per una 3-varietà e il complesso delle curve su una 2-varietà.

### 3.1 Classificazione di 3-varietà

Prima di introdurre gli spezzamenti di Heegaard e il complesso di curve, e prima di discuterne le relazioni col mapping class group, riassumiamo brevemente alcune pietre miliari della classificazione delle 3-varietà; un buon riferimento è [8]. Ricordiamo esplicitamente che le varietà di dimensione 1 e 2 sono completamente classificate, mentre per quelle di dimensione superiore a 3 vale un risultato di non classificabilità effettiva: ad esempio il problema della classificazione in dimensione 4 è dimostrabilmente tanto impraticabile quanto il problema di riconoscere l'equivalenza di diverse presentazioni di gruppi; al contrario il problema in dimensione 3 è tutt'ora aperto e costituisce un ambito molto vivace di ricerca.

Sia nel seguito  $M$  una 3-varietà topologica chiusa, connessa e orientabile.

**Definizione 3.1.** Diremo che  $M$  è *prima* se non esistono due varietà  $V, W \neq S^3$  tali che  $M = V \# W$ . Diremo che è *irriducibile* se ogni copia di  $S^2$

contenuta in  $M$  è bordo di una copia di  $B^3$  contenuta in  $M$ .

Per i prossimi risultati si rimanda rispettivamente a [8, Teorema 1.5] e [8, Proposizione 1.4].

**Teorema 3.1.1 (di Scomposizione Primaria di Kneser-Milnor).**

$M$  si scrive in modo unico come somma connessa  $P_1 \# \dots \# P_n$ , dove le  $P_i$  sono varietà prime diverse da  $S^3$ .

*Osservazione 3.1.2.* Si può provare che una varietà irriducibile è prima, e che, viceversa, l'unica varietà prima non irriducibile è il fibrato banale  $S^2 \times S^1$ .

Dopo questo teorema, provato da Kneser negli anni '30 per quanto riguarda l'esistenza della scomposizione e da Milnor negli anni '60 per l'unicità, e per l'osservazione precedente, ci si riduce quindi ad indagare le varietà irriducibili. Risultano essere di centrale importanza i seguenti due tipi di varietà.

**Definizione 3.2.** Una superficie  $S \subset M, S \neq S^2$  si dice *incomprimibile* se per ogni disco<sup>1</sup>  $D \subset M$  tale che  $D \cap S = \partial D$  esiste un altro disco  $D' \subset S$  tale che  $\partial D = \partial D'$ . Se  $M$  non contiene tori incomprimibili allora si dice *atoroidale*.

**Definizione 3.3.** La *fibrazione modello di Seifert* è la struttura di fibrato banale di  $S^1 \times D^2$  in cui le fibre sono le  $S^1 \times \{p\}$  con  $p \in D^2$ . Un *toro fibrato alla Seifert* è il fibrato che si ottiene dalla fibrazione modello tagliando lungo un meridiano e reincollando i due bordi così ottenuti dopo un twist di  $2\pi \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$  coprimi. Una *fibrazione di Seifert* di  $M$  è una decomposizione di  $M$  in copie di  $S^1$  (le fibre) tale che ogni fibra ammette un intorno omeomorfo a un toro fibrato alla Seifert e saturo rispetto alla relazione di equivalenza data dall'appartenenza alla stessa fibra. La 3-varietà  $M$  si dice *di Seifert* se ammette una fibrazione di Seifert.

**Teorema 3.1.3 (di Scomposizione Torale, o JSJ, di Jaco, Shalen e Johannson).**

Se  $M$  è irriducibile, allora ammette una collezione di tori incomprimibili

---

<sup>1</sup>Qui, e nel seguito, chiameremo disco un qualsiasi sottospazio di una varietà che sia omeomorfo al disco standard del piano euclideo  $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ .

$T_1, \dots, T_n$  tali che, tagliando  $M$  lungo questi tori, si ottengono sottovarietà  $M_i$  che sono atoroidali o di Seifert. Una collezione minimale di tali tori è unica a meno di isotopia di  $M$ .

Questo teorema (per una cui trattazione si veda [8, Teorema 1.9]) è dovuto a diversi contributi dei tre autori che risalgono alla fine degli anni '70. Le varietà di Seifert sono state completamente classificate da Seifert stesso. Quindi, l'interesse si riduce infine allo studio delle 3-varietà che sono, per così dire, rimaste più misteriose, ossia quelle che sono atoroidali e non di Seifert. Non si deve pensare che si tratti di casi patologici o remoti: ad esempio nella quasi totalità dei casi il complementare di un nodo in  $S^3$  è proprio una varietà di questo tipo. È in questo panorama che Thurston nel 1982 ha proposto la sua celebre Congettura di Geometrizzazione, l'idea di fondo della quale è che la topologia di una 3-varietà determina in modo naturale una geometria sulle varie componenti che si ottengono dopo una scomposizione JSJ. Di particolare interesse risultano essere le geometrie di tipo iperbolico.

**Definizione 3.4.** Una varietà di dimensione  $n$  si dice *iperbolica* se ammette un atlante di carte sullo spazio iperbolico  $n$ -dimensionale  $\mathbb{H}^n$ , tale che le mappe di transizione siano isometrie di  $\mathbb{H}^n$ .

L'enunciato che ci interessa qui è il seguente.

**Teorema 3.1.4 (di Geometrizzazione di Thurston-Perelman).**

$M$  è atoroidale e non di Seifert  $\iff M$  è iperbolica.

Più precisamente, il fatto che le varietà iperboliche fossero atoroidali e non-Seifert era già noto: Thurston congetturò l'implicazione inversa. La congettura inizialmente proposta è stata provata nel 2003 da Perelman, che ha ottenuto, come corollario di questa, una prova della congettura di Poincaré.

Vediamo infine alcune interessanti proprietà delle varietà iperboliche, ottenute attorno al 1970, per una cui trattazione si rimanda al capitolo 5 di [18] in particolare il teorema 5.7.2 e il corollario 5.7.4.

**Teorema 3.1.5 (di Rigidità di Mostow).**

Sia  $n \geq 3$  e siano  $M, N$  due  $n$ -varietà iperboliche complete e di volume finito; allora ogni isomorfismo tra i loro gruppi fondamentali è indotto da un'unica isometria.

Nel caso  $M = N$  abbiamo che in particolare ogni automorfismo della varietà è omotopo ad un'unica auto-isometria. Inoltre, il rivestimento universale di  $M$  è  $\mathbb{H}^n$ , che è contraibile, e dunque si può provare che si ha isomorfismo tra il gruppo delle isometrie di  $M$  e il gruppo degli automorfismi esterni<sup>2</sup> del suo gruppo fondamentale, e che questi due gruppi sono finiti. La conseguenza per noi rilevante di ciò è che anche il Mapping Class Group di  $M$  risulta allora essere un gruppo finito.

## 3.2 Spezzamenti di Heegaard

Introduciamo qui la tecnica degli spezzamenti di Heegaard, mostrando, anche su esempi concreti, perché la teoria del mapping class group di superfici entra in modo naturale nello studio delle 3-varietà. Nel seguito consideriamo solo 3-varietà connesse e orientabili. Le note [11] costituiscono una trattazione di base ma completa di questa tecnica.

**Definizione 3.5.** Sia  $D^3$  la palla chiusa di  $\mathbb{R}^3$  e siano  $D_1^2, \dots, D_{2g}^2 \in \partial D^3$  copie omeomorfe della palla chiusa  $D^2$  di  $\mathbb{R}^2$ . Un *corpo con manici* è la 3-varietà con bordo ottenuta incollando  $D_i^2$  e  $D_{i+1}^2$  per  $i = 1, 3, \dots, 2g - 1$ . Equivalentemente possiamo definire un corpo con manici come somma connessa di  $g$  tori solidi  $T = D^2 \times S^1$ . Evidentemente  $\partial H$  è una superficie orientabile chiusa e connessa di genere  $g$ ; diremo che anche  $H$  ha genere  $g$ .

*Osservazione 3.2.1.* A meno di omeomorfismo, la costruzione sopra descritta è unica e dipende solo dalla scelta di  $g$ , cioè dato  $g$  è univocamente determinato a meno di omeomorfismo il corpo con manici di genere  $g$ , detto anche corpo con  $g$  manici.

**Definizione 3.6.** Uno *spezzamento di Heegaard* per una 3-varietà chiusa  $M$  consiste in una quaterna  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$ , ove  $\Sigma$  è una superficie chiusa connessa e orientabile immersa in  $M$ ,  $H^+$  e  $H^-$  sono corpi con manici e  $\varphi \in \text{Homeo}^\pm(\Sigma)$  tali che  $H^+ \cup H^- = M$ ,  $H^+ \cap H^- = \Sigma = \partial H^+ = \partial H^-$  e  $M \cong$

---

<sup>2</sup>Sia  $G$  un gruppo. Un automorfismo  $f \in \text{Aut}(G)$  si dice interno se è del tipo  $f(x) = gxg^{-1}$  per un qualche  $g \in G$ . Gli automorfismi interni formano un sottogruppo normale  $\text{Inn}(G) \triangleleft \text{Aut}(G)$ . Si chiama automorfismo esterno un elemento di  $\text{Out}(G) = \text{Aut}(G)/\text{Inn}(G)$ .

$H^+ \cup_{\varphi} H^-$ , cioè  $M$  si ottiene dall'unione disgiunta di  $H^+$  e  $H^-$  identificando  $x$  e  $\varphi(x)$  sui rispettivi bordi. Osserviamo esplicitamente che  $\varphi$  deve rovesciare l'orientazione di  $\Sigma$  e che  $\Sigma$ ,  $H^+$  e  $H^-$  hanno necessariamente lo stesso genere  $g$ ; diremo anche che  $g$  è il genere dello spezzamento e che  $\Sigma$  è una *superficie di Heegaard* per  $M$ . Infine chiameremo *genere di Heegaard* di  $M$  il minimo  $g$  per cui  $M$  ammette uno spezzamento di Heegaard di genere  $g$ .

Data una varietà, viene subito spontaneo chiedersi se ammetta o meno uno spezzamento di Heegaard, quale sia il suo genere di Heegaard, quanti e quali siano i suoi spezzamenti al variare del genere e della mappa di incollamento. Vediamo se e come è possibile rispondere a queste domande.

**Teorema 3.2.2.** *Ogni 3-varietà chiusa  $M$  ammette uno spezzamento di Heegaard.*

*Dimostrazione.* Per il teorema di Moise,  $M$  è triangolabile; sia  $K$  un 3-complesso simpliciale che la triangola. Sia poi  $N \subset \mathbb{R}^3$  un intorno tubolare, cioè localmente omeomorfo al cilindro  $D^2 \times I$ , del corpo del suo 1-scheletro. Se scegliamo  $N$  di raggio abbastanza piccolo, ad esempio avendo cura che non contenga nessun 2-simplesso, allora  $H^+ = \overline{N}$  risulta essere un corpo con manici. Siano  $H^- = M \setminus N$ ,  $\Sigma = \partial H^+ = \partial H^-$  e  $\varphi$  la mappa ovvia che lascia fissa  $\Sigma$  invertendone però l'orientazione. Allora per provare che  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$  è uno spezzamento di Heegaard per  $M$  basta provare che  $H^-$  è un corpo con manici. Siccome  $H^+$  contiene tutto l'1-scheletro,  $H^-$  interseca soltanto 2-simplessi e 3-simplessi di  $K$ . Chiaramente l'intersezione con un 2-simplesso è omeomorfa a un disco e quella con un 3-simplesso a un palla tridimensionale; inoltre per la stessa struttura del complesso simpliciale  $K$ , se due 3-simplessi si intersecano dentro  $H^-$  lo fanno lungo un 2-simplesso, così  $H^-$  risulta essere un'unione di 3-palle incollate lungo coppie di 2-dischi contenuti nei loro bordi, e dunque è un corpo con manici.  $\square$

Descriviamo ora i primi spezzamenti della sfera tridimensionale.

**Esempio 3.1** (Spezzamento di genere 0 di  $S^3$ ). Siano  $M$  ed  $N$  due corpi con manici di genere 0; rimuoviamo dai rispettivi bordi due punti  $p \in \partial M$  e  $q \in \partial N$ . Restiamo con due semispazi chiusi omeomorfi a  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+$ ; incolliamoli tramite l'ovvia mappa  $\varphi$  che lascia fisso ogni punto dei loro bordi, invertendo

però l'orientazione: otteniamo  $\mathbb{R}^3$ . Dobbiamo ora riaggiungere i punti che abbiamo tolto, i quali vengono chiaramente identificati tra loro, cioè aggiungiamo un solo punto, ottenendo così alla fine  $S^3$  come compattificazione di Alexandroff di  $\mathbb{R}^3$ . Questo prova che  $(S^2, D^3, D^3, \varphi)$  è uno spezzamento per  $S^3$ , e che dunque  $S^3$  ha genere di Heegaard nullo.

**Esempio 3.2** (Spezzamento di genere 1 di  $S^3$ ). Consideriamo lo spezzamento di genere 0 di  $S^3$  dell'esempio 3.1. Rimuoviamo dalla prima palla l'intersezione con un cilindro di raggio abbastanza piccolo in modo da ottenere un toro solido. Rimuovere un cilindro dalla prima equivale a incollare i suoi bordi sul bordo della seconda, ottenendo così un toro solido anche dalla seconda. L'identificazione dei bordi è quella ovvia (non siamo mai usciti da  $S^3$  durante queste operazioni) e chiaramente la varietà risultante è sempre  $S^3$ . Da questa costruzione è facile intuire che dato uno spezzamento di genere  $g$  di  $S^3$ , è sempre possibile ottenerne uno di genere  $g + 1$  rimuovendo un cilindro da un corpo con manici e aggiungendolo all'altro incollandone i bordi sul bordo del secondo; in altri termini  $S^3$  ammette spezzamenti di ogni genere. Osserviamo esplicitamente che la mappa di incollamento usata qui non è l'automorfismo (isotopicamente) banale, infatti tramite essa vengono identificati un parallelo del primo toro e un meridiano del secondo: la trasformazione indotta sul gruppo fondamentale della superficie di Heegaard è uno scambio dei fattori in  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

Dopo questi esempi è ovvio chiedersi che varietà avremmo ottenuto se avessimo usato una diversa mappa per incollare i bordi dei corpi considerati. La strategia per rispondere a questa domanda è di sfruttare la struttura del mapping class group della superficie di Heegaard.

**Definizione 3.7.** Siano  $\mathfrak{S}_1 = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi_1)$  e  $\mathfrak{S}_2 = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi_2)$  due spezzamenti di Heegaard dello stesso genere per due varietà  $M_{\varphi_1}$  e  $M_{\varphi_2}$ . Diremo che sono spezzamenti *equivalenti* se  $\exists h : M_{\varphi_1} \rightarrow M_{\varphi_2}$  omeomorfismo che mantiene l'orientazione e tale che  $h(\Sigma) = \Sigma$ ,  $h(H^+) = H^+$  e  $h(H^-) = H^-$ . In particolare definiscono (a meno di omeomorfismo) la stessa 3-varietà  $M$ , e  $h$  si può pensare come elemento di  $Aut(M)$ . Diremo che i due spezzamenti sono *isotopi* (come spezzamenti di questa varietà  $M$ ) se  $[h] = [Id_M]$  in  $\mathcal{MCG}(M)$ .

*Osservazione 3.2.3.* Segue dal teorema 1.1.5 che due spezzamenti sono isotopi se e solo se lo sono le rispettive superfici di Heegaard.

*Osservazione 3.2.4.* Notiamo esplicitamente che in uno spezzamento la mappa di incollamento deve necessariamente rovesciare l'orientazione della superficie di Heegaard. Tuttavia per quanto detto sulla struttura di prodotto semidiretto (vedi corollario 1.2.4), fissata una volta per tutte una  $\iota$  che realizza lo split destro della successione esatta, ogni automorfismo  $f$  che rovescia l'orientazione è univocamente determinato da un automorfismo  $\tilde{f}$ , che la mantiene, tramite composizione  $f = \iota \circ \tilde{f}$ . Possiamo dunque nuovamente restringere la nostra attenzione agli automorfismi che mantengono l'orientazione.

**Lemma 3.2.5.** *Siano  $\varphi_1, \varphi_2 \in \text{Homeo}(\Sigma)$ . Se  $[\varphi_1] = [\varphi_2] \in \mathcal{MCG}(\Sigma)$ , allora  $M_{\varphi_1} \cong M_{\varphi_2}$ .*

*Dimostrazione.* Per una dimostrazione in **Diff** si veda Hirsch, capitolo 8.  $\square$

È dunque ben posta la notazione  $M_\varphi = H^+ \cup_{\varphi} H^-$  per  $\varphi \in \mathcal{MCG}(\Sigma)$ , cioè fissato un certo genere  $g$  la varietà è univocamente determinata dalla (classe di isotopia della) mappa di incollamento. Viceversa, vediamo se e in quale misura partire da classi di isotopia diverse produce o meno lo stesso risultato.

**Definizione 3.8.** Sia  $\Sigma$  una superficie di Heegaard per  $M$ . Si definisce *sottogruppo dei manici*, o *mapping class group dello spezzamento di Heegaard*, il sottogruppo  $\mathfrak{H}_\Sigma$  di  $\mathcal{MCG}(\Sigma)$  costituito dagli automorfismi di  $\Sigma$  che estendono ad automorfismi di  $H^+$  e  $H^-$  (e dunque a tutta  $M$ ); equivalentemente lo si potrebbe definire come sottogruppo di  $\mathcal{MCG}(M)$  costituito dagli automorfismi di  $M$  che restringono ad automorfismi di  $\Sigma$ . Osserviamo in particolare che  $\iota$  è un automorfismo di  $\Sigma$  che si estende ad entrambi i corpi con manici.

**Teorema 3.2.6.** *Siano  $\mathfrak{S}_1 = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi_1)$  e  $\mathfrak{S}_2 = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi_2)$  due spezzamenti di Heegaard dello stesso genere. Allora essi sono equivalenti se e solo se  $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_\Sigma \varphi_1 \mathfrak{H}_\Sigma$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo che gli spezzamenti siano equivalenti e che  $h : M_{\varphi_1} \rightarrow M_{\varphi_2}$  sia l'omeomorfismo che realizza l'equivalenza, come nella definizione. Siano  $h_+ = h|_{H^+}$ ,  $h_- = h|_{H^-}$ ,  $\eta_+ = h_+|_\Sigma$ ,  $\eta_- = h_-|_\Sigma$  e sia  $\iota$  la solita

involuzione di  $\Sigma$ . Allora affinché  $h$  sia ben definita occorre che il diagramma

$$\begin{array}{ccccc} \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma & \xrightarrow{\iota} & \Sigma \\ \eta_+ \downarrow & & & & \downarrow \eta_- \\ \Sigma & \xrightarrow{\psi} & \Sigma & \xrightarrow{\iota} & \Sigma \end{array}$$

commuti, cioè che  $\varphi_2 = \iota^{-1}\eta_-\iota\varphi_1\eta_+^{-1}$ . Siccome  $\iota, \eta_-, \eta_+ \in \mathfrak{H}_\Sigma$ , questo significa che  $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_\Sigma\varphi_1\mathfrak{H}_\Sigma$ .

Viceversa, se  $\varphi_2 \in \mathfrak{H}_\Sigma\varphi_1\mathfrak{H}_\Sigma$ , allora posso trovare automorfismi in  $\mathfrak{H}_\Sigma$  che verificano  $\varphi_2 = \iota^{-1}\eta_-\iota\varphi_1\eta_+^{-1}$ , ed infine estenderli ai corpi con manici per ottenere un omeomorfismo  $h : M_{\varphi_1} \rightarrow M_{\varphi_2}$  che stabilisce l'equivalenza tra i due spezzamenti.  $\square$

*Osservazione 3.2.7.* Poiché  $\mathcal{MCG}(S^2) \cong 1$ , segue subito dal teorema precedente che lo spezzamento di genere 0 che abbiamo descritto per  $S^3$  è l'unico possibile e che, viceversa, dati due corpi con manici di genere nullo, possiamo incollarli lungo i bordi con la mappa che preferiamo, ma otterremo sempre  $S^3$ . In altre parole, tutti gli spezzamenti di genere 0 sono equivalenti e  $S^3$  è l'unica varietà di genere di Heegaard nullo.

*Osservazione 3.2.8.* Il discorso in genere 1 è invece differente, a causa del fatto che  $\mathcal{MCG}(S^1 \times S^1)$  ha una collezione ben più ricca di sottogruppi. Si può dimostrare che al variare di tutti laterali doppi  $\mathfrak{H}_\Sigma\varphi\mathfrak{H}_\Sigma$  si ottengono tutti e soli gli spazi lenticolari (ivi inclusi i casi degeneri di  $S^3, S^2 \times S^1$  e  $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ ). In [2] si può trovare una discussione di questa classificazione che fa uso della rappresentazione simplettica introdotta nel paragrafo 1.3.

L'ultimo risultato centra il nostro interesse sul sottogruppo dei manici  $\mathfrak{H}_\Sigma$ , ed è ad esso che dedichiamo le ultime sezioni. In particolare, gli esempi di questa sezione risolvono completamente il problema per  $g = 0, 1$ , dunque nel seguito ci rivolgeremo a spezzamenti di genere  $g \geq 2$ . Prima di procedere diamo la seguente definizione (valida anche per  $g = 0, 1$ ).

**Definizione 3.9.** Un disco  $D$  di una 3-varietà con bordo  $M$  tale che  $\partial D \subset \partial M$  si dice *essenziale* se  $\partial D$  non è il bordo di un disco interamente contenuto in  $\partial M$ .

**Definizione 3.10.** Uno spezzamento di Heegaard  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$  è detto *riducibile* se ci sono due dischi essenziali  $D_1 \subset H^+$  e  $D_2 \subset H^-$  tali che  $\partial D_1 = \partial D_2 \subset \Sigma$ . Si dice invece *debolmente riducibile* se i due dischi sono tali che  $\partial D_1 \cap \partial D_2 = \emptyset$ . Se tali dischi non esistono, lo spezzamento si dice rispettivamente *irriducibile* e *fortemente irriducibile*.

*Osservazione 3.2.9.* Se uno spezzamento è riducibile allora è anche debolmente riducibile.

L'interesse di queste definizioni risiede nel seguente risultato, per cui si veda [11, Teorema 5.23].

**Lemma 3.2.10 (di Haken).** *Se una 3-varietà ammette uno spezzamento irriducibile allora essa stessa è irriducibile.*

### 3.3 Il complesso e la distanza di Hempel

Definiamo ora un complesso simpliciale molto utile nello studio degli spezzamenti di Heegaard e dei mapping class group, che è stato introdotto da Harvey negli anni '70, ma che è stato riscoperto solo recentemente, da quando Hempel l'ha dotato di una metrica che codifica bene la topologia della varietà; la trattazione originale di Hempel è contenuta nell'articolo [9].

**Definizione 3.11.** Sia  $S$  una superficie chiusa, connessa e orientabile. Il *Complesso delle Curve* su  $S$  è il complesso simpliciale  $\mathcal{C}(S)$  i cui vertici sono le classi di isotopia di c.c.s. essenziali su  $S$  e in cui  $k + 1$  vertici  $c_0, \dots, c_k$  generano un  $k$ -simpleso se e solo se ammettono rappresentanti a due a due disgiunti, o, equivalentemente  $c_i \neq c_j$  e  $i(c_i, c_j) = 0$  per  $i \neq j$ .

In realtà ci interessa soltanto l'1-scheletro  $\mathcal{C}_1(S)$  di questo complesso, che ora rendiamo uno spazio metrico nel seguente modo.

**Definizione 3.12.** La *metrica di Hempel* su  $\mathcal{C}(S)$  è data definendo  $d(x, y)$  come il minimo numero di 1-simplex in un cammino di lati da  $x$  a  $y$ .

*Osservazione 3.3.1.* Si ha subito dalla definizione che  $d(x, y) = 1 \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$  e che  $d(x, y) \leq 2 \Leftrightarrow \exists z$  tale che  $x \cap z = \emptyset = y \cap z$ . Intuitivamente la metrica di

Hempel tra due curve ci dà una misura di quanto esse riempiono la superficie, cioè quanto è difficile trovare curve disgiunte da esse.

È interessante studiare le curve su una superficie perché da esse si può ricostruire una 3-varietà attraverso uno spezzamento di Heegaard, nel modo che ora illustriamo.

**Definizione 3.13.** Sia  $S$  una superficie chiusa, connessa e orientabile di genere  $g$  e  $C = \{c_0, \dots, c_k\}$  una collezione di curve semplici chiuse disgiunte su  $S$ . Sia  $V_C$  la 3-varietà con bordo (detta *corpo di compressione*) ottenuta considerando  $S \times I$  e incollando un manico lungo ogni  $c_i \subset S \times \{1\}$ .

*Osservazione 3.3.2.* Osserviamo esplicitamente che questa procedura non dà in generale un corpo con manici; tuttavia si dimostra che un corpo di compressione è un corpo con manici se e solo se  $S \setminus C$  ha  $k - g + 2$  componenti connesse, e nel seguito è questo il caso che ci interessa.

*Osservazione 3.3.3.* Sia  $X = \{x_0, \dots, x_n\} \subset \mathcal{C}(S)$  un sottocomplesso. Allora resta individuato un corpo di compressione  $V_X$ . Nel seguito consideriamo il caso in cui  $V_X$  è un corpo con manici, che indichiamo con  $H_X$ ; in tale caso il sottocomplesso  $X$  si dice *pieno*.

*Osservazione 3.3.4.* Sia  $X \subset \mathcal{C}(S)$  pieno e  $\varphi \in \mathcal{MCG}(S)$ . Allora resta individuato<sup>3</sup> uno spezzamento  $(S, H_X, H_{\varphi(X)}, \varphi)$  della 3-varietà  $M = H_X \cup_{\varphi} H_{\varphi(X)}$ . Viceversa, dato uno spezzamento di Heegaard  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$ , possiamo associare due sottocomplessi di  $\mathcal{C}(\Sigma)$ , prendendo come  $X_{\Sigma}$  la collezione dei meridiani su  $\Sigma$ ; la collezione  $\varphi(X_{\Sigma})$  è nota in letteratura come diagramma di Heegaard dello spezzamento.

**Definizione 3.14.** Dato  $X \subset \mathcal{C}(S)$  pieno, si chiama *sottocomplesso dei manici* di  $\mathcal{C}(S)$  relativo a  $X$  il sottocomplesso  $\mathcal{H}_X$  così definito:  $c \in \mathcal{H}_X \Leftrightarrow \exists D \subset H_X$  disco essenziale tale che  $\partial D$  è una curva di  $S$  nella classe di isotopia  $c$ .

**Definizione 3.15.** Nelle notazioni dell'osservazione precedente, chiameremo  $d(\varphi) = d(X, \varphi(X)) = \min\{d(x, y) | x \in \mathcal{H}_X, y \in \mathcal{H}_{\varphi(X)}\}$  la *distanza di Hempel dello spezzamento*; diremo che  $d \in \mathbb{N}$  è la *distanza di Heegaard* della 3-varietà  $M$  se  $M$  ammette solo spezzamenti aventi distanza di Hempel  $\geq d$ .

---

<sup>3</sup>A tale proposito segnaliamo che Ivanov ha provato che  $\mathcal{MCG}^{\pm}(S) \cong \text{Aut}(\mathcal{C}(S))$ , ma non ci soffermiamo qui su tale risultato.

*Osservazione 3.3.5.* Dopo tutte queste premesse segue automaticamente il collegamento tra la distanza di Hempel e la topologia della varietà. Si ha infatti che uno spezzamento  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$  è riducibile se e solo se  $d(\varphi) = 0$ , ed è debolmente riducibile se e solo se  $d(\varphi) \leq 1$ .

Inoltre si hanno i seguenti due risultati, dei quali ci serviremo concretamente in seguito, e per i quali si rimanda rispettivamente a [9, Corollari 3.7 e 3.8] e [17, Corollario 4.5].

**Teorema 3.3.6 (di Hempel).** *Sia  $M$  una 3-varietà chiusa, connessa e orientabile. Allora*

1.  $M$  toroidale  $\Rightarrow$  ogni  $\mathfrak{S}$  fortemente irriducibile ha distanza  $d = 2$
2.  $M$  è una varietà di Seifert  $\Rightarrow$  ogni  $\mathfrak{S}$  ha distanza  $d \leq 2$ .

**Teorema 3.3.7 (di Scharlemann-Tomova).** *Sia  $M$  una 3-varietà chiusa, connessa e orientabile e siano  $\mathfrak{S} = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$  e  $\mathfrak{S}' = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi')$  spezzamenti di genere  $g$  di  $M$ . Allora  $d(\varphi) \leq 2g$  oppure  $\mathfrak{S}'$  è isotopo a  $\mathfrak{S}$ .*

## 3.4 Morfismo canonico e finitezza

Con gli strumenti finora descritti vogliamo infine studiare le conseguenze del teorema 3.2.6, secondo l'impostazione degli articoli [12] e [13] di Johnson. Consideriamo una 3-varietà  $M$  chiusa, connessa e orientabile e un suo spezzamento  $\mathfrak{S} = (\Sigma, H^+, H^-, \varphi)$ .

*Osservazione 3.4.1.* L'inclusione  $i : \Sigma \rightarrow M$  induce un morfismo (che chiameremo morfismo canonico)  $\Phi : \mathfrak{H}_\Sigma \rightarrow \mathcal{MCG}(M)$ . Quello che vogliamo fare è convertire informazioni algebriche su  $\mathfrak{H}_\Sigma$  e  $\Phi$  in informazioni topologiche su  $M$  e viceversa.

**Proposizione 3.4.2.**  $\Phi$  è suriettiva  $\Leftrightarrow$  ogni spezzamento di  $M$  equivalente a  $\mathfrak{S}$  è isotopo a  $\mathfrak{S}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathfrak{S}' = (\Sigma', H^{+'}, H^{-'}, \varphi')$  uno spezzamento equivalente a  $\mathfrak{S}$ , e sia  $f$  l'automorfismo di  $M$  tale che  $f(\Sigma) = \Sigma'$ . Se  $\Phi$  è suriettiva, c'è un automorfismo  $\tilde{f} \in \mathfrak{H}_\Sigma$  isotopo a  $f$ . Così  $f \circ \tilde{f}^{-1}$  è banale in  $\mathcal{MCG}(M)$  e tale che  $f \circ \tilde{f}^{-1}(\Sigma) = \Sigma'$ , cioè  $\Sigma$  e  $\Sigma'$  sono isotope, il che equivale a dire

che lo sono  $\mathfrak{S}$  e  $\mathfrak{S}'$ . Viceversa sia  $g \in \text{Aut}(M)$  e sia  $\mathfrak{S}' = g(\mathfrak{S})$ . Per ipotesi  $\exists \tilde{g} \in \text{Aut}(M)$  isotopicamente banale e tale che  $\mathfrak{S}' = \tilde{g}(\mathfrak{S})$ . Così  $g \circ \tilde{g}^{-1}$  fissa  $\Sigma$  e  $[g \circ \tilde{g}^{-1}] = [g][\tilde{g}^{-1}] = [g]$  in  $\mathfrak{H}_\Sigma$ .  $\square$

Il problema consiste quindi interamente nello studio dell'iniettività di  $\Phi$ .

**Definizione 3.16.** Nel seguito sia  $J = [-1; 1]$ . Uno *sweep-out* è una funzione<sup>4</sup>  $f : M \rightarrow J$  tale che  $\forall x \in \overset{\circ}{J}$   $f^{-1}(x)$  sia una superficie chiusa, connessa ed orientabile,  $K^- = f^{-1}(1)$  sia il corpo di un 1-complesso simpliciale (grafo) e lo stesso valga per  $K^+ = f^{-1}(-1)$ ; tali grafi sono detti *spine* per lo sweep-out.

*Osservazione 3.4.3.* Dato uno sweep-out  $f : M \rightarrow J$ , si ha che  $\forall x \in \overset{\circ}{J}$   $f^{-1}(x)$ , detta *superficie di livello* di  $f$ , è una superficie di Heegaard per  $M$ , i cui corpi con manici  $H^+$  e  $H^-$  sono dati da intorni tubolari di  $K^+$  e  $K^-$ . In altri termini uno sweep-out  $f : M \rightarrow J$  determina uno spezzamento di  $M$ . Diremo anche che  $K^+$  e  $K^-$  sono una spina rispettivamente per  $H^+$  e  $H^-$ ; più in generale, chiameremo *spina* per un corpo con manici  $H$  un qualsiasi grafo  $K$  che ammetta un intorno tubolare omeomorfo a  $H$ .

Viceversa abbiamo il seguente risultato

**Teorema 3.4.4.** *Ogni spezzamento di  $M$  è rappresentabile da uno sweep-out.*

*Dimostrazione.* Siano  $H^+$ ,  $H^-$  e  $\Sigma$  i corpi con manici e la superficie dello spezzamento, e siano  $K^+$  e  $K^-$  le rispettive spine. Allora  $H^+ \setminus K^+$  è omeomorfo a  $\Sigma \times [0; 1[$ ; sia  $\varphi_1$  tale omeomorfismo, sia  $\pi_1$  la proiezione  $\Sigma \times [0; 1[ \rightarrow [0; 1[$  e sia  $f_1 = \pi_1 \circ \varphi_1$ . Lavorando analogamente su  $H^-$  costruiamo  $f_2 = \pi_2 \circ \varphi_2 : H^+ \setminus K^+ \rightarrow \Sigma \times ]-1; 0] \rightarrow ]-1; 0]$ . Definiamo  $g : M \setminus (K^+ \cup K^-) \rightarrow \overset{\circ}{J}$  per incollamento di queste due mappe (che coincidono su  $\Sigma \times \{0\}$ ) ed infine estendiamola ad  $f : M \rightarrow J$  mandando  $K^+$  in 1 e  $K^-$  in  $-1$ . Allora la  $f$  così costruita è uno sweep-out, e diremo che rappresenta lo spezzamento.  $\square$

Tutto ciò ci permette di confrontare spezzamenti di Heegaard attraverso il confronto di sweep-out.

---

<sup>4</sup>Solitamente si richiede che la funzione sia  $C^\infty$ .

**Definizione 3.17.** Siano dati due sweep-out  $f, g : M \rightrightarrows J$ ; il loro *prodotto* sarà la mappa  $f \times g : M \rightarrow J \times J, x \mapsto (f(x), g(x))$ . Chiamiamo *discriminante* per  $f \times g$  il sottoinsieme  $\Delta(f \times g) \subset M$  dei punti in cui una superficie di livello per  $f$  e una per  $g$  sono tangenti. Si definisce allora *Grafico di Rubinstein-Scharlemann* l'insieme  $\mathfrak{G}_{f,g} = f \times g(\Delta(f \times g)) \subset J \times J$ .

Il seguente lemma riassume il contenuto di alcuni risultati di [14] e [15].

**Lemma 3.4.5.**  $\Delta(f \times g) \subset M$  è una 1-sottovarietà di  $M$  che non interseca le spine degli sweep-out e  $\mathfrak{G}_{f,g}$  è un grafo in  $J \times J$ .

**Definizione 3.18.** Date due varietà  $M$  e  $N$ , consideriamo lo spazio  $Hom(M, N)$  delle mappe da  $M$  a  $N$  con la topologia compatto-aperto. Una  $f \in Hom(M, N)$  si dice *stabile* se  $\exists U$  intorno di  $f$  in  $Hom(M, N)$  tale che  $\forall g \in U \exists \varphi \in Aut(M)$  ed  $\exists \psi \in Aut(N)$  tali che  $\psi \circ f = g \circ \varphi$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \psi \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

**Definizione 3.19.** Dati due sweep-out  $f$  e  $g$ , diremo che  $f \times g$  è *generica* se è stabile e se  $\forall t, s \in J$  si ha che i segmenti  $\{t\} \times J$  e  $J \times \{s\}$  contengono ciascuno al più un vertice del grafico di Rubinstein-Scharlemann  $\mathfrak{G}_{f,g}$ .

*Osservazione 3.4.6.* Segue dalla definizione stessa del grafico, che i suoi vertici interni (ossia contenuti in  $\overset{\circ}{J} \times \overset{\circ}{J}$ ) sono i punti  $(t, s)$  tali che  $f^{-1}(t)$  e  $g^{-1}(s)$  sono superfici tangenti in più di un punto.

**Definizione 3.20.** Siano  $f$  e  $g$  due sweep-out rappresentanti lo stesso spezzamento, e siano  $H^+$ ,  $H^-$  e  $\Sigma$  i corpi con manici e la superficie di tale spezzamento. Definiamo  $\forall t \in \overset{\circ}{J} \Sigma'_t = f^{-1}(t)$  e  $\forall s \in \overset{\circ}{J} \Sigma_s = g^{-1}(s)$ ,  $H_s^+ = g^{-1}([s; 1])$  e  $H_s^- = g^{-1}([-1; s])$ . Diremo allora che  $\Sigma'_t$  è *per lo più superiore* (rispettivamente, *inferiore*) a  $\Sigma_s$  se ogni componente connessa di  $\Sigma'_t \cap H_s^-$  (rispettivamente, di  $\Sigma'_t \cap H_s^+$ ) è contenuta in una sottosuperficie di  $\Sigma'_t$  omeomorfa ad un disco.

**Definizione 3.21.** Nelle notazioni precedenti, definiamo  $\mathcal{R}_{sup} = \{(t, s) \in \overset{\circ}{J} \times \overset{\circ}{J} \mid \Sigma'_t \text{ è per lo più superiore a } \Sigma_s\}$  e  $\mathcal{R}_{inf} = \{(t, s) \in \overset{\circ}{J} \times \overset{\circ}{J} \mid \Sigma'_t$

è per lo più inferiore a  $\Sigma_s$ . Diremo che  $g$  genera  $f$  se  $\exists s \in \mathring{J}$  tale che  $J \times \{s\} \cap \mathcal{R}_{sup} \neq \emptyset$  e  $J \times \{s\} \cap \mathcal{R}_{inf} \neq \emptyset$ . In caso contrario diremo che  $g$  spezza  $f$ .

Consideriamo ora una 3-varietà  $M$  con spezzamento  $\mathfrak{S} = (\Sigma, H^+, H^-, \psi)$  rappresentato da uno sweep-out  $f$ . Sia poi  $\varphi \in \ker(\Psi) \subset \mathfrak{H}_\Sigma$  e sia  $\Phi : M \times I \rightarrow M$  l'isotopia tra  $\varphi$  e  $Id_M$ . È fondamentale il seguente lemma, per cui si rimanda a [13, Lemmi 9 e 10] e [14, Lemma 25].

**Lemma 3.4.7.**  *$\exists g : M \rightarrow J$  isotopo a  $f$  e tale che  $g \circ \varphi$  è uno sweep-out che genera  $f$ . Inoltre, possiamo scegliere l'isotopia  $\Phi$  in modo che, posto  $g_r = g \circ \Phi|_{M \times \{r\}}$ ,  $f \times g_r$  sia generica tranne al più un insieme finito di valori  $I' \subset I$ . Infine, si ha che*

1. se  $\forall r \in I \setminus I'$   $g_r$  genera  $f$ , allora  $\varphi$  è banale in  $\mathcal{MCG}(\Sigma)$ ;
2. se  $\forall r \in I \setminus I'$   $g_r$  spezza  $f$ , allora  $d(\psi) \leq 3$ .

**Teorema 3.4.8 (di Johnson).** *Sia  $M$  una 3-varietà e  $\mathfrak{S} = (\Sigma, H^+, H^-, \psi)$  uno spezzamento di genere  $g > 1$  rappresentato da uno sweep-out  $f$ . Allora*

1.  $d(\psi) > 3 \Rightarrow$  il morfismo canonico  $\Psi$  è iniettivo e  $\mathfrak{H}_\Sigma$  è finito;
2.  $d(\psi) > 2g \Rightarrow \Psi$  è un isomorfismo.

*Dimostrazione.*

1. Per assurdo  $\exists \varphi \in \ker(\Psi)$  non banale in  $\mathcal{MCG}(\Sigma)$  e sia  $\{g_r\}$  la famiglia di sweep-out definita nel lemma. Sempre nelle notazioni del lemma, se  $\forall r \in I \setminus I'$   $g_r$  generasse  $f$ , allora  $\varphi$  sarebbe banale in  $\mathcal{MCG}(\Sigma)$ , dunque necessariamente  $\exists r_0 \in I \setminus I'$  tale che  $g_{r_0}$  spezza  $f$ ; allora per il lemma  $d(\psi) \leq 3$ , il che è assurdo, e dunque  $\Psi$  deve essere iniettivo.

Per il teorema 3.3.6 di Hempel se  $d(\psi) > 2$  allora  $M$  è atoroidale e non è di Seifert; dal Teorema di Geometrizzazione 3.1.4 segue che allora  $M$  è una 3-varietà iperbolica; per il teorema 3.1.5 di Mostow concludiamo allora che  $\mathcal{MCG}(M)$  è finito. Di conseguenza, siccome  $\Psi$  è iniettivo, anche  $\mathfrak{H}_\Sigma$  deve essere finito.

2. Per il teorema 3.3.7 di Scharlemann e Tomova, se  $d(\psi) > 2g$  allora ogni spezzamento di  $M$  equivalente a  $\mathfrak{S}$  è isotopo a  $\mathfrak{S}$ . Per la proposizione 3.4.2 questo equivale a dire che  $\Psi$  è suriettiva. Per ipotesi  $g > 1$  e quindi  $d(\psi) > 2g > 3$ ; allora uso 1) per concludere che  $\Psi$  è anche iniettiva, cioè è un isomorfismo.

□

Segue subito che, nelle ipotesi del teorema, poiché il gruppo  $\mathcal{H}_\Sigma$  deve essere finito, non può contenere automorfismi non periodici; in particolare gli automorfismi della superficie di Heegaard che siano riducibili non periodici, come i Dehn Twist, oppure pseudo-Anosov, non si possono estendere a tutta la 3-varietà nei casi coperti dal teorema, in quanto ciascuno di essi genera un sottogruppo di ordine infinito in  $\mathcal{MCG}(\Sigma)$ . Detto in altri termini, non esistono automorfismi di  $M$  che inducano automorfismi riducibili non periodici o pseudo-Anosov sulla superficie di Heegaard dello spezzamento. Gli automorfismi di  $\Sigma$  che si estendono a  $M$  (ossia che possono essere ottenuti come restrizione di automorfismi di  $M$ ) sono tutti necessariamente periodici.

In particolare, tornando al teorema 3.2.6 da cui siamo partiti per indagare  $\mathfrak{H}_\Sigma$ , si ha che se  $\mathfrak{S} = (\Sigma, H^+, H^-, \psi)$  è uno spezzamento per  $M$ , ogni altra quaterna  $(\Sigma, H^+, H^-, \varphi_1\psi\varphi_2^{-1})$  definisce una 3-varietà non omeomorfa a  $M$  ogni qualvolta  $\varphi_1, \varphi_2$  siano scelti come automorfismi non periodici (ad esempio Dehn Twist o pseudo-Anosov).



# Conclusioni

Quella degli spezzamenti di Heegaard è una tecnica piuttosto interessante dal punto di vista teorico, in quanto ci dice che è possibile ottenere una generica 3-varietà tramite somme connesse e incollamenti di tori solidi, ma al contempo si rivela decisamente versatile anche nel concreto, siccome permette di codificare proprietà topologiche della 3-varietà in proprietà combinatorie e differenziali di altre varietà o di altri oggetti opportunamente scelti.

Questa tesi si è voluta concentrare in particolare sulla mappa di incollamento che definisce uno spezzamento e su particolari collezioni di curve presenti nella varietà, inseguendo l'idea che sia possibile procedere verso una classificazione delle varietà di dimensione 3 passando attraverso la classificazione degli automorfismi in dimensione 2, i quali, a loro volta, vengono studiati secondo il loro comportamento su 1-varietà, un po' come lo studio delle applicazioni lineari passa attraverso lo studio della loro azione sui vettori.

I risultati presentati mostrano che tutti questi oggetti entrano in gioco a meno di una relazione fondamentale, quella di isotopia; in particolare, l'interesse per la mappa di incollamento, ottimo dispensatore di informazioni, si traduce presto in interesse per il suo doppio laterale rispetto al sottogruppo dei manici. È per questo che è molto importante approfondire lo studio della struttura algebrica del Mapping Class Group, dei suoi elementi e dei suoi sottogruppi, specialmente quelli che, come questo, sono adatti ad un'utile interpretazione topologica e che permettono di fare luce sulla struttura delle varietà a cui danno luogo.



# Bibliografia

- [1] Joan S. Birman. *Braids, links and mapping class groups*. Princeton University Press, 1974. Annals of Mathematics Studies, vol. 82.
- [2] Joan S. Birman. *On the equivalence of Heegaard splittings of closed, orientable 3-manifolds*, in *Knots, groups and 3-manifolds: papers dedicated to the memory of R.H. Fox*, pagg 137-164.
- [3] Andrew J. Casson e Steven A. Bleiler. *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, *London Mathematical Society Student Texts*, vol. 9. Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
- [4] Benson Farb e Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Group*. In pubblicazione da parte di Princeton University Press. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.uchicago.edu/farb/books.html](http://www.math.uchicago.edu/farb/books.html)
- [5] Benson Farb, editor. *Problems on Mapping Class Group and Related Topics, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 74. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.uchicago.edu/farb/books.html](http://www.math.uchicago.edu/farb/books.html)
- [6] Mary-Elizabeth Hamstrom. *Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold*. Illinois Journal of Mathematics 10, pagg. 563-573, 1985.
- [7] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html](http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html)

- [8] Allen Hatcher. *Notes on Basic 3-Manifold Topology*. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mdownloads.html](http://www.math.cornell.edu/~hatcher/3M/3Mdownloads.html)
- [9] John Hempel. *3-Manifolds as viewed from the Curve Complex*. Preprint, 1997, *arXiv:math/9712220v1 [math.GT]*.
- [10] Morris W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, 1976.
- [11] Jesse Johnson. *Notes on Heegaard Splittings*. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.okstate.edu/~jjohnson](http://www.math.okstate.edu/~jjohnson)
- [12] Jesse Johnson e Hyam Rubinstein. *Mapping Class Group of Heegaard Splittings*. Preprint, 2008, *arXiv:math/0701119v3 [math.GT]*.
- [13] Jesse Johnson. *Mapping Class Group of Medium Distance Heegaard Splittings*, vol. 138 di *Proceedings of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010. Disponibile sul sito dell'autore [www.math.okstate.edu/~jjohnson](http://www.math.okstate.edu/~jjohnson)
- [14] Jesse Johnson. *Flipping and stabilizing Heegaard Splittings*, Preprint, 2008, *arXiv:math/0805.4422v1 [math.GT]*.
- [15] Tsuyoshi Kobayashi e Osamu Saeki. *The Rubinstein-Scharlemann graphic of a 3-manifold as the discriminant set of a stable map*, *Pacific Journal of Mathematics* 195 (2000), vol. 1, pagg. 101-156.
- [16] Hossein Namazi. *Big Heegaard distance implies finite mapping class group*. In *Topology and its Applications*, vol. 154-16, pagg. 2939-2949, Elsevier, 2007. Disponibile sul sito dell'autore [www.ma.utexas.edu/users/hossein](http://www.ma.utexas.edu/users/hossein)
- [17] Martin Scharlemann e Maggy Tomova. *Alternate Heegaard genus bounds distance*. *Geometry Topology*, vol. 10, 2006, pagg. 593-617.
- [18] William Thurston. *The geometry and topology of three-manifolds*. Disponibile sul sito <http://library.msri.org/books/gt3m>
- [19] Consultazione del blog online *Low Dimensional Topology*, <http://ldtopology.wordpress.com/>, a cura di Jesse Johnson.

# Ringraziamenti

Vorrei infine dedicare un ringraziamento alle persone che mi hanno accompagnato in questi tre anni di studi.

Grazie ai miei genitori, che non mi hanno mai fatto mancare il loro sostegno e il loro affetto.

Grazie al Professor Ferri, per l'infinita pazienza e disponibilità con cui ha seguito questa tesi.

Grazie anche al Professor Parmeggiani, per essere stato una guida scientifica (e non solo!) in questi anni.

Grazie agli amici di sempre, su cui so di poter contare in ogni occasione, e che non si stancano mai di esserci quando servono.

Grazie ai nuovi amici, perché è più facile chiudersi a studiare in biblioteca quando sai che in giro per il dipartimento c'è sempre qualche matto con cui prendere una boccata d'aria.

Infine il grazie più speciale a Nicole, che ogni giorno col suo amore fa di me una persona migliore.