

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

L'EFFETTO GIBBS

Relatore:
Chiar.ma Prof.
Annamaria Montanari

Presentata da:
Damiano Scarpellini

Sessione V
Anno Accademico 2019-2020

*Alla mia famiglia,
che mi ha sostenuto in questi anni.*

Introduzione

Questa tesi ha lo scopo di studiare e approfondire quello che in matematica viene chiamato effetto Gibbs. Questo fenomeno, scoperto per la prima volta da Henry Wilbraham nel 1848 e studiato successivamente da Willard Gibbs nel 1898, riguarda il comportamento oscillatorio che si verifica nei polinomi di Fourier associati ad alcune funzioni. In particolare, come si potrà anche vedere da alcuni esempi che verranno trattati, quando si va ad approssimare una funzione periodica che presenta delle discontinuità di prima specie con le serie di Fourier, in prossimità dei punti di discontinuità di tale funzione, si verificano delle forti oscillazioni. Si vedrà inoltre che aumentare il grado del polinomio di Fourier non porterà ad una soluzione di questo problema come invece ci si potrebbe intuitivamente (ed erroneamente) aspettare. La mancanza di un miglioramento al variare del grado dei polinomi ci porterà quindi alla ricerca di soluzioni alternative e in particolare allo studio delle somme di Fejér, che pur non essendo quelle che meglio approssimano la funzione, hanno buone proprietà di convergenza e, a differenza dei polinomi di Fourier, non subiscono l'effetto Gibbs.

La trattazione è divisa in tre capitoli: nel primo capitolo vengono affrontati i polinomi di Fourier e lo studio della convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier. Nel secondo capitolo viene introdotto il fenomeno di Gibbs attraverso due esempi particolari per poi andare a studiare il caso generale per funzioni regolari a tratti. Nel terzo e ultimo capitolo invece sono state studiate le somme di Fejér, notando come queste risultino essere una soluzione all'effetto Gibbs, vedendole inoltre applicate agli esempi studiati nel capitolo precedente.

Nelle ultime pagine inoltre, si possono trovare tutti i codici implementati con Matlab e utilizzati per generare i grafici mostrati nei vari capitoli.

Lo studio di questo fenomeno trova un'applicazione concreta nei processi di ricostruzione di immagini, suoni e segnali nei quali è fondamentale limitare e controllare il più possibile queste oscillazioni per poter ottenere una buona ricostruzione.

Indice

Introduzione	i
1 Definizioni e risultati preliminari sulle serie di Fourier	1
1.1 I polinomi trigonometrici di Fourier	1
1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier	5
1.3 Convergenza uniforme delle serie di Fourier	10
2 L'effetto Gibbs	13
2.1 L'onda quadra	13
2.1.1 Il polinomio di Fourier di q	14
2.1.2 Studio di $S_{2n-1}(q)$	18
2.2 L'onda semitriangolare	20
2.2.1 Il polinomio di Fourier di s	21
2.3 In generale	23
3 Le somme di Fejér	27
3.1 I polinomi di Fejér	27
3.2 Soluzione al fenomeno di Gibbs	30
A Codici Matlab utilizzati	35
Bibliografia	37

Elenco delle figure

2.1	Onda quadra	14
2.2	Effetto Gibbs, $n = 3, 8, 20$	16
2.3	Effetto Gibbs oscillazione, $n = 3, 8, 20$	16
2.4	Effetto Gibbs oscillazione, $n = 400$	17
2.5	Onda semitriangolare	20
2.6	Effetto Gibbs, $n=8,20,40$	22
2.7	Effetto Gibbs, oscillazione, $n=8,20,40$	22
2.8	Particolare (origine) figura 2.6	23
3.1	Somme di Fejér onda quadra, $n=50,100,300$	32
3.2	Somme di Fejér onda semitriangolare, $n=50,100,300$	33
3.3	Eliminazione effetto Gibbs onda quadra, $n=50,100,300$	33
3.4	Eliminazione effetto Gibbs onda semitriangolare, $n=50,100,300$	33

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari sulle serie di Fourier

1.1 I polinomi trigonometrici di Fourier

Definizione 1.1.1 (Polinomio Trigonometrico). Diciamo che una funzione $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è un polinomio trigonometrico di grado $n \geq 0$ con $n \in \mathbb{N}$ se è della forma

$$p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

dove $a_0, a_k, b_k \in \mathbb{R}$ e a_n e b_n non entrambi nulli ed indichiamo con T_n lo spazio vettoriale dei polinomi trigonometrici di grado $\leq n$.

Si può verificare che lo spazio T_n appena definito sia effettivamente uno spazio vettoriale e che una sua base sia data dagli elementi dell'insieme

$B = \{1, \cos(kt), \sin(kt); k = 1, \dots, n\}$. Da questo segue che la dimensione dello spazio T_n è $2n + 1$ e inoltre, definendo un prodotto scalare ed una norma sullo spazio T_n come quelli dello spazio delle funzioni $L^2([-\pi, \pi])$ ovvero, $\forall p, q \in T_n$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(t)q(t)dt \quad \|p\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |p(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

si può facilmente verificare risolvendo gli integrali che

$$\langle 1, \cos(kt) \rangle = \langle 1, \sin(kt) \rangle = \langle \cos(kt), \sin(mt) \rangle = 0 \quad \forall k, m = 1, \dots, n$$

$$\langle \cos(kt), \cos(mt) \rangle = \langle \sin(kt), \sin(mt) \rangle = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ \pi & k = m \end{cases}$$

e banalmente che

$$\langle 1, 1 \rangle = 2\pi$$

Tutto ciò ci permette quindi di ricavare, dalla base B , una base ortonormale per T_n data da: $B^* = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos(kt)}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin(kt)}{\sqrt{\pi}}; k = 1, \dots, n \right\}$ che sarà utile in seguito.

Definizione 1.1.2 (Polinomio di Fourier di f). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ si definisce il polinomio di Fourier di f di grado $n \in \mathbb{N}$

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

dove

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$$

e

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt \quad \forall k = 1, \dots, n$$

Osservazione 1.1.3. Si può notare che la definizione appena data è ben posta in quanto gli integrali che determinano i coefficienti a_0, a_k e b_k sono tutti ben definiti, poiché per ipotesi $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e inoltre si ha che $|\cos(kt)| \leq 1$ e $|\sin(kt)| \leq 1$.

Osservazione 1.1.4. Nel seguito si parlerà sempre di funzioni 2π -periodiche, ma si potrebbe studiare allo stesso modo una qualsiasi funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di periodo $T > 0$, facilmente riconducibile al caso precedente mediante un cambiamento di variabile $x \rightarrow \frac{2\pi x}{T}$. Se g è invece una qualsiasi funzione definita su un intervallo limitato $[a, b]$, si può considerare quello che viene detto un prolungamento periodico di g , al quale poi sarà possibile applicare i risultati riguardanti le funzioni 2π -periodiche.

Teorema 1.1.5. Sia $f \in L^2((-\pi, \pi))$ allora $\forall p \in T_n$ si ha che $\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|p - f\|_2$. In altre parole il polinomio di Fourier di f di grado $n \in \mathbb{N}$ è, tra i polinomi trigonometrici, quello che meglio approssima la funzione f nello spazio $L^2((-\pi, \pi))$.

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che, siccome $f \in L^2((-\pi, \pi))$ e l'intervallo $(-\pi, \pi)$ ha misura finita, allora $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e dunque ha senso parlare di $S_n(f)$.

Per come sono stati definiti gli elementi della base B^* si ha che

$S_n(f)(t) = \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle e_k)$ con $e_k \in B^*$. Siccome B^* è una base ortonormale possiamo scrivere un generico $p \in T_n$ come $p = \sum_{k=0}^{2n} c_k e_k$ con $c_k \in \mathbb{R}$ ottenendo così:

$$\|p - f\|_2^2 = \|p\|_2^2 - 2\langle p, f \rangle + \|f\|_2^2$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} \|S_n(f)\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{2n} (\langle f, e_k \rangle \langle e_k, S_n(f) \rangle) = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle \sum_{m=0}^{2n} \langle f, e_m \rangle \langle e_k, e_m \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle \langle f, e_k \rangle = \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle^2 \end{aligned}$$

Sfruttando questa uguaglianza si arriva ad avere

$$\begin{aligned} \|S_n(f) - f\|_2^2 &= \langle S_n(f), S_n(f) \rangle + \langle f, f \rangle - 2\langle f, S_n(f) \rangle = \\ &= \|S_n(f)\|_2^2 + \|f\|_2^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle^2 = -\|S_n(f)\|_2^2 + \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

da cui si può ricavare la disuguaglianza nota come disuguaglianza di Bessel

$$\|S_n(f)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \quad (1.1)$$

Dunque

$$\begin{aligned} \|p - f\|_2^2 - \|S_n(f) - f\|_2^2 &= \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle^2 + \|p\|_2^2 - 2\langle p, f \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} c_k^2 - 2 \sum_{k=0}^{2n} c_k \langle f, e_k \rangle + \sum_{k=0}^{2n} \langle f, e_k \rangle^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{2n} (c_k - \langle f, e_k \rangle)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

Corollario 1.1.6. La disuguaglianza di Bessel appena trovata ci dice che se $f \in L^2((-\pi, \pi))$ allora $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in l^2$ dove a_k e b_k sono i coefficienti di $S_n(f)$.

Andiamo ora a dare la definizione di nucleo di Dirichlet che sfrutteremo per ottenere una scrittura in forma integrale di un generico polinomio $S_n(f)$, più comoda di quella usata fin ora.

Definizione 1.1.7 (Nucleo di Dirichlet). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si definisce il Nucleo di Dirichlet

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$$

Proposizione 1.1.8 (Proprietà nucleo di Dirichlet). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ il nucleo di Dirichlet D_n è un nucleo unitario ovvero $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = 1$. D_n è inoltre una funzione pari, 2π -periodica e per ogni $t \in (0, \pi)$ può essere scritta come

$$D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \quad (1.2)$$

Dimostrazione. È immediato verificare che per n fissato la funzione $D_n(t)$ sia pari, 2π -periodica e un nucleo unitario. Per scriverla invece nella forma di 1.2 si può procedere come segue:

$$\begin{aligned} D_n(t) \sin \frac{t}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{t}{2} \cos(kt) \stackrel{\text{Prostaferesi}}{=} \\ &= \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} (\sin((k + \frac{1}{2})t) - \sin((k - \frac{1}{2})t)) = \\ &= \frac{1}{2} \sin((n + \frac{1}{2})t) \Rightarrow D_n(t) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})} \end{aligned}$$

□

Diamo ora la scrittura in forma integrale del polinomio di Fourier $S_n(f)$ associato ad una funzione f . Per una dimostrazione di si veda [2].

Teorema 1.1.9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$ si ha che

$$S_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds$$

Con questa scrittura è ora più facile studiare la convergenza delle serie di Fourier.

1.2 Convergenza puntuale delle serie di Fourier

Definizione 1.2.1 (Serie di Fourier associata ad f). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$, sia $S_n(f)$ il polinomio di Fourier associato ad f e siano a_0 , a_k e b_k $k \in \mathbb{N}$ i suoi coefficienti. Si definisce la serie di Fourier associata ad f

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

Definizione 1.2.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e sia $S_n(f)$ il polinomio di Fourier associato ad f , allora se vale che:

- Fissato $t \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f(t)$

diciamo che la f è sviluppabile in serie di Fourier nel punto $t \in \mathbb{R}$.

Vediamo ora un lemma utile per dimostrare il teorema di localizzazione di Riemann che ci fornisce una condizione equivalente alla convergenza di $S_n(f)(t)$ per $n \rightarrow \infty$.

Lemma 1.2.3 (Riemann-Lebesgue). Sia $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ e $M \in \mathbb{R}$ e sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ con $f \in L^1((a, b))$ allora si ha che

$$\lim_{|M| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \sin(Mt) dt = 0$$

Dimostrazione. Indichiamo con C_0^∞ l'insieme delle funzioni $\phi \in C^\infty$ con $\overline{\text{supp}(\phi)}$ compatto in (a, b) , dove con $\text{supp}(\phi)$ si intende $\{t \in (a, b); \phi(t) \neq 0\}$. Sappiamo che C_0^∞ è denso in $L^1((a, b))$, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \phi \in C_0^\infty$ tale che $\|f - \phi\|_{L^1} < \varepsilon$. Dunque si ha che

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) \sin(Mt) dt \right| &= \left| \int_a^b (f(t) - \phi(t)) \sin(Mt) dt + \int_a^b \phi(t) \sin(Mt) dt \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(t) - \phi(t)| dt + \left| \int_a^b \phi(t) \sin(Mt) dt \right| \leq \\ &\leq \varepsilon + \left| \int_a^b \phi(t) \sin(Mt) dt \right|. \end{aligned}$$

Sviluppando per parti l'integrale rimasto e sfruttando che $\phi(a) = \phi(b) = 0$ si ottiene

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \phi(t) \sin(Mt) dt \right| &= \left| \left[-\phi(t) \frac{\cos(Mt)}{M} \right]_a^b + \frac{1}{M} \int_a^b \phi' \cos(Mt) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|M|} \int_a^b |\phi'| dt = \frac{\|\phi'\|_{L^1}}{|M|} \rightarrow 0, \text{ per } M \rightarrow \infty \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

Si può notare che con un procedimento molto simile è possibile dimostrare il lemma precedente anche con $\cos(Mt)$ al posto di $\sin(Mt)$.

Teorema 1.2.4 (di localizzazione di Riemann). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Allora

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda \in \mathbb{R}$$

se e solo se $\exists c \in (0, \pi)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{s} \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda \right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0$$

Dimostrazione. Abbiamo che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = \lambda \iff \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) - \lambda = 0 \iff$$

ponendo $G(t, s) := \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lambda$ e sfruttando la scrittura in forma integrale di $S_n(f)$ vista in 1.1.9

$$\begin{aligned} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} D_n(s) ds - \lambda &= 0 \\ \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi G(t, s) D_n(s) ds &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

dove nell'ultima equivalenza è stata usata la proprietà di nucleo unitario vista in 1.1.8.

A questo punto andiamo a considerare $h(s) := G(t, s) \frac{1}{2\sin(s/2)}$.

$\forall c \in (0, \pi)$ si ha che $h \in L^1((c, \pi))$ e grazie al lemma di Riemann-Lebesgue si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^\pi h(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0$$

Per come è stata costruita h e per quello che abbiamo appena visto si ha che 1.3 è equivalente a chiedere che $\exists c \in (0, \pi)$ tale che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c h(s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0 &\iff \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c G(t, s) \left(\frac{1}{2\sin(s/2)} - \frac{1}{s} \right) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{s} G(t, s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dato che

$$\frac{1}{2\sin(s/2)} - \frac{1}{s} = \frac{s - 2\sin(s/2)}{2s \sin(s/2)} = \frac{s - 2\left(\frac{s}{2} - \frac{s^3}{3!} + o(s^3)\right)}{2s\left(\frac{s}{2} + o(s)\right)} \text{ per } s \rightarrow 0$$

allora la funzione $s \rightarrow \left(\frac{1}{2\sin(s/2)} - \frac{1}{s}\right)$ è continua e limitata su $(0, \pi)$ e dunque la funzione $s \rightarrow G(t, s)\left(\frac{1}{2\sin(s/2)} - \frac{1}{s}\right)$ è sommabile su $(0, \pi)$ e si può quindi applicare nuovamente il lemma di Riemann-Lebesgue sul primo pezzo dell'integrale di 1.4.

Dunque vale 1.4 se e solo se $\exists c \in (0, \pi)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^c \frac{1}{s} G(t, s) \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)s\right) ds = 0$$

da cui la tesi. \square

Definizione 1.2.5. Sia $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che esistano finiti i limiti $\lim_{t \rightarrow t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$ e $\lim_{t \rightarrow t_0^-} f(t) = f(t_0^-)$. Si definisce

$$f^*(t_0) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}$$

Vediamo ora il teorema di Dini, che a questo punto non è che un immediato corollario del teorema di localizzazione di Riemann

Teorema 1.2.6 (Dini). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e sia $t \in \mathbb{R}$. Supponiamo che esista finito $f^*(t)$ e supponiamo inoltre che esista $c \in (0, \pi)$ tale che la funzione $G(s) := \left(\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - f^*(t)\right)\frac{1}{s}$ sia sommabile su $(0, c)$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f^*(t)$$

Dimostrazione. È sufficiente applicare il teorema di localizzazione di Riemann prendendo $\lambda = f^*(t)$. \square

Sfruttando ora il teorema di Dini ci è possibile ottenere un altro risultato noto come *criterio di Hölder*.

Definizione 1.2.7 (*Condizione di Hölder*). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $t \in \mathbb{R}$ fissato. Diciamo che f soddisfa la condizione di Hölder se esiste un $\delta > 0$, un $\alpha \in (0, 1]$ e un $M > 0$ tali che

$$|f(t+s) - f(t+u)| \leq M|s-u|^\alpha \quad \forall s, u \in (0, \delta) \text{ e } \forall s, u \in (-\delta, 0).$$

Notare che per $\alpha = 1$ si ha la Lipschitzianità.

Teorema 1.2.8 (*Criterio di Hölder*). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e supponiamo inoltre che la f verifichi la condizione di Hölder in un certo punto $t \in \mathbb{R}$. Allora si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f^*(t)$$

Dimostrazione. Ci è sufficiente mostrare che valgono le condizioni del teorema di Dini per ottenere il risultato cercato.

Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$.

Per ipotesi vale che $|f(t+a_n) - f(t+a_m)| \leq M|a_n - a_m|^\alpha \rightarrow 0$ per $n, m \rightarrow \infty$ e quindi $f(t+a_n)$ è una successione di Cauchy ed $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(t+a_n) = f(t^+)$. In modo analogo si dimostra che $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(t-a_n) = f(t^-)$ e dunque è ben definito $f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$.

Andiamo ora a definire $G(s) := \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) \frac{1}{s}$ e notiamo che

$$\begin{aligned} G(s) &= \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{f(t+u) + f(t-u)}{2} \right) \frac{1}{s} = \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{f(t+s) - f(t+u)}{2} + \frac{f(t-s) + f(t-u)}{2} \right) \frac{1}{s} \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} |G(s)| &\leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\left| \frac{f(t+s) - f(t+u)}{2} \right| + \left| \frac{f(t-s) + f(t-u)}{2} \right| \right) \frac{1}{s} \leq \\ &\leq \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{M}{2}|s-u|^\alpha + \frac{M}{2}|s-u|^\alpha \right) \frac{1}{s} = M|s|^\alpha \frac{1}{s} = M \frac{1}{s^{1-\alpha}} \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $\alpha \in (0, 1)$ allora $M \frac{1}{s^{1-\alpha}} \in L^1((0, \delta))$ e quindi anche $G(s) \in L^1((0, \delta))$, perciò sono verificate le ipotesi del teorema di Dini, da cui la tesi. \square

Corollario 1.2.9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica con $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e supponiamo che per un certo $t \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ f sia derivabile in $(t - a, t) \cup (t, t + a)$ con derivata limitata, allora il $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f^*(t)$.

Dimostrazione. Siano $s, u \in (0, a)$ e dunque $t + s, t + u \in (t, t + a)$ e supponiamo $s < u$. Andando ad applicare il teorema del valor medio di Lagrange e sfruttando l'ipotesi di limitatezza della derivata otteniamo che $\exists \theta \in (s, u)$ e $\exists M > 0$ tali che

$$|f(t + s) - f(t + u)| = |f'(t + \theta)(s - u)| \leq M|s - u| \quad \forall s, u \in (0, a).$$

Lavorando in modo analogo sull'intervallo $(-a, 0)$ si ottiene:

$$|f(t + s) - f(t + u)| \leq M|s - u| \quad \forall s, u \in (-a, 0).$$

Possiamo quindi applicare il criterio di Hölder con $\alpha = 1$. □

Definizione 1.2.10. Una funzione $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ si dice regolare a tratti su (a, b) se esiste una partizione finita $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ dell'intervallo (a, b) tale che:

- f sia di classe C^1 sugli intervalli aperti (t_{k-1}, t_k) per ogni $k = 1, \dots, n$;
- esistano finiti i limiti destri della derivata di f nei punti t_k per ogni $k = 0, \dots, n-1$ e sinistri per ogni $k = 1, \dots, n$;
- esistano finiti i limiti destri di f nei punti t_k per ogni $k = 0, \dots, n-1$ e sinistri per ogni $k = 1, \dots, n$.

Osservazione 1.2.11. L'ultimo punto della definizione appena data potrebbe essere omesso in quanto conseguenza dei primi due, se si usa il teorema del valor medio di Lagrange.

Osservazione 1.2.12. Il corollario 1.2.9 può essere esteso alle funzioni 2π -periodiche, sommabili su $(-\pi, \pi)$ e regolari a tratti.

Definizione 1.2.13. Diciamo che un funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è a variazione limitata se, denotando con $\sigma = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ una generica scomposizione dell'intervallo $[a, b]$ tale

che $t_0 = a, t_n = b$ e $t_j < t_{j+1} \forall j = 0, \dots, n-1$ si ha che

$$\sup_{\sigma} \sum_{j=1}^n \|f(t_j) - f(t_{j-1})\| < \infty$$

e scriveremo $f \in BV([a, b])$ dove $BV([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n; f \text{ a variazione limitata}\}$.

Teorema 1.2.14. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ allora $f \in BV([a, b])$ se e solo se $f = g_1 - g_2$ con g_1, g_2 funzioni monotone crescenti.

Teorema 1.2.15 (di Jordan). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica, $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e tale che $f \in BV([a, b])$. Allora $\exists f^*(t)$ e si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(t) = f^*(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Le dimostrazioni dei due teoremi appena enunciati si possono trovare in [2].

1.3 Convergenza uniforme delle serie di Fourier

Definizione 1.3.1 (Funzione assolutamente continua). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che esista f' derivata debole di f q.d. su $[a, b]$ tale che $f' \in L^1([a, b])$. Diciamo che f è assolutamente continua su $[a, b]$ e scriveremo $f \in AC([a, b])$ se

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Osservazione 1.3.2. Se $f \in AC([a, b])$ allora $f \in BV([a, b])$, infatti nelle notazioni del teorema 1.2.14 basta considerare $h^+(t) = \max\{f', 0\}$, $h^-(t) = \max\{-f', 0\}$ e porre

$$g_1 = f(a) + \int_a^x h^+(t) dt \quad g_2 = \int_a^x h^-(t) dt$$

Teorema 1.3.3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica, $f \in L^1((-\pi, \pi))$, $f \in AC([-\pi, \pi])$ e supponiamo che $f' \in L^2((-\pi, \pi))$. Allora $S_n(f) \rightarrow f$ uniformemente per $n \rightarrow \infty$

Dimostrazione. Sia

$$S_n(f)(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)).$$

Siccome $f \in AC([-\pi, \pi])$, per il teorema Jordan abbiamo che $S_n(f)(t)$ converge puntualmente a $f(t)$. Inoltre si può verificare che

$$S_n(f')(t) = \sum_{k=1}^n (-ka_k \sin(kt) + kb_k \cos(kt)).$$

Poiché per ipotesi $f' \in L^2((-\pi, \pi))$, possiamo sfruttare la disuguaglianza di Bessel e nelle notazioni del teorema 1.1.5 otteniamo

$$\|S_n(f')\|_2^2 = \sum_{k=1}^{2n} \langle f', e_k \rangle^2 \leq \|f'\|_2^2 < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e quindi per $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left((ka_k)^2 + (kb_k)^2 \right) < \infty.$$

Sfruttando ora la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha che

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|a_k| + k|b_k|}{k} \leq \frac{a_0}{2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (k|a_k|)^2 + (k|b_k|)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} < \infty$$

e dunque la serie converge totalmente e quindi anche uniformemente. \square

Enunciamo ora un ultimo teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier senza darne una dimostrazione, che riguarda le funzioni regolari a tratti.

Teorema 1.3.4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periodica e regolare a tratti su \mathbb{R} . Allora $S_n(f)$ converge a f uniformemente in ogni intervallo $[a, b]$ su cui f è continua.

Capitolo 2

L'effetto Gibbs

Introduciamo l'argomento andando a studiare due esempi famosi: l'onda quadra e l'onda semitriangolare, che saranno utili a comprendere il comportamento dei polinomi di Fourier in casi particolari. Andremo poi a generalizzare il tutto studiando la teoria dell'effetto Gibbs nel caso di una qualsiasi funzione che presenta delle discontinuità di prima specie.

2.1 L'onda quadra

Andiamo ora a definire l'onda quadra come una funzione $q : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ regolare a tratti che viene poi estesa periodicamente a tutto \mathbb{R} nel modo seguente:

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t = -\pi \\ -1, & \text{se } -\pi < t < 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ 1, & \text{se } 0 < t < \pi \\ 0, & \text{se } t = \pi \end{cases}$$

e poniamo $q(t) = q(t + 2k\pi) \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$.

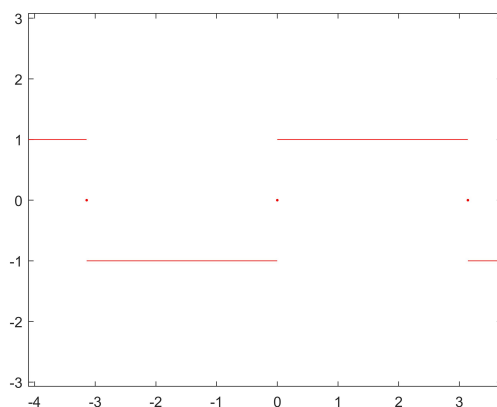


Figura 2.1: Onda quadra

2.1.1 Il polinomio di Fourier di q

Andiamo a calcolare esplicitamente i coefficienti di Fourier di q , per poi andare a studiare il comportamento del polinomio $S_n(q)$. Indicando come di consueto con a_0 , a_k e b_k tali coefficienti, possiamo innanzitutto notare che questi sono ben definiti poiché q è sommabile su $[-\pi, \pi]$ e risultano essere

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) dt = 0 \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \cos(kt) dt = 0$$

perché integrali di funzioni dispari su un dominio simmetrico rispetto l'origine e

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} q(t) \sin(kt) dt = \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ è pari} \\ \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque otteniamo

$$S_{2n-1}(q)(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t)}{2k-1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

e sfruttando le proprietà delle funzioni seno e coseno otteniamo una scrittura più maneggevole di tale polinomio nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 S_{2n-1}(q)(t) &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\sin((2k-1)t) - \sin(0)}{2k-1} = \\
 &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^n \int_0^t \cos((2k-1)x) dx = \\
 &= \frac{4}{\pi} \int_0^t \sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x) dx
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dato che

$$\left(\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x) \right) \sin(x) \stackrel{\text{Prostaferesi}}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \sin(2kx) - \sin((2k-2)x) = \frac{1}{2} \sin(2nx)$$

allora

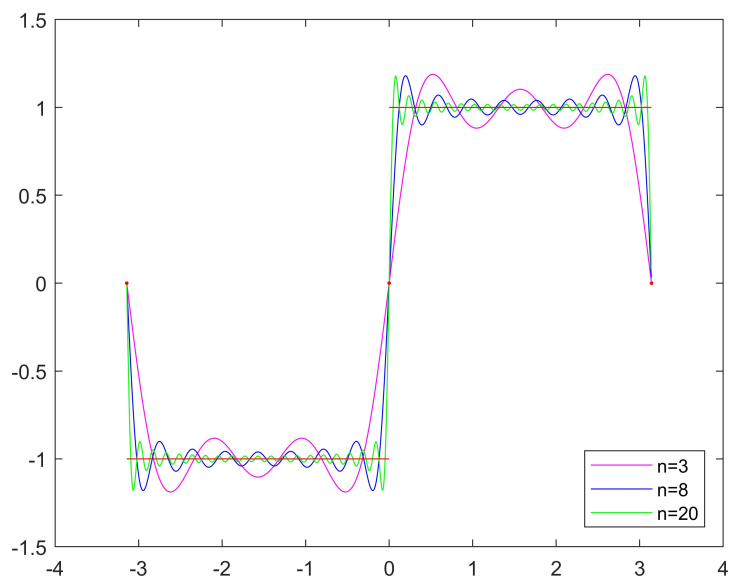
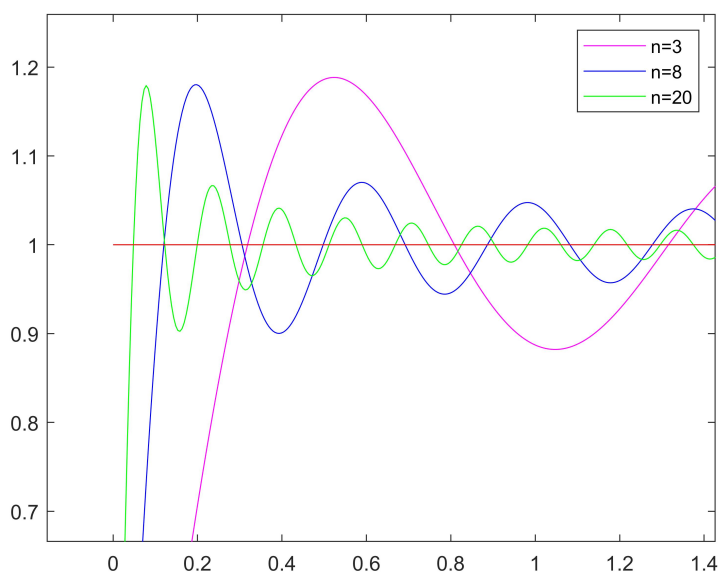
$$\sum_{k=1}^n \cos((2k-1)x) = \frac{\sin(2nx)}{2\sin(x)} \quad \forall t \in (0, \pi)$$

e, proseguendo dalla 2.1, si ottiene

$$S_{2n-1}(q)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} dx \tag{2.2}$$

A questo punto, scegliendo a campione alcuni $n \in \mathbb{N}$, andiamo a tracciare e a sovrapporre i grafici delle funzioni q e $S_{2n-1}(q)$, in modo tale da capire, almeno graficamente, come si comporta il polinomio di Fourier di q al variare del grado n .

I codici Matlab necessari a produrre i grafici che sono riportati di seguito, possono essere trovati nell'appendice A.

Figura 2.2: Effetto Gibbs, $n = 3, 8, 20$ Figura 2.3: Effetto Gibbs oscillazione, $n = 3, 8, 20$

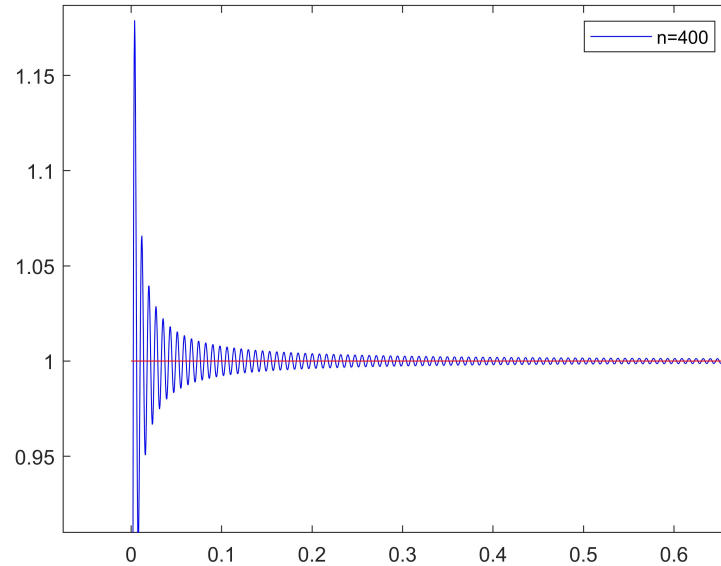


Figura 2.4: Effetto Gibbs oscillazione, $n = 400$

Esaminando i grafici si può vedere che all'interno degli intervalli $(-\pi, 0)$ e $(0, \pi)$ e all'aumentare di $n \in \mathbb{N}$, la convergenza di $S_{2n-1}(q)$ è buona e per periodicità lo stesso accade all'interno degli intervalli del tipo $(z\pi, (z+1)\pi)$ al variare di $z \in \mathbb{Z}$. Questa cosa non ci stupisce, infatti l'onda quadra è una funzione regolare a tratti e quindi si può sfruttare il corollario 1.2.9 per dire che il polinomio $S_{2n-1}(q)$ converge puntualmente a $q^*(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, notando oltretutto che in questo caso particolare $q^*(t) = q(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.

In prossimità dei punti di discontinuità $0, \pi$ e $-\pi$ (e quindi per periodicità anche in prossimità dei punti che si ottengono da questi, aggiungendo multipli interi di π) si può invece osservare come le sovraelongazioni e le sottoelongazioni si mantengano sempre maggiori del salto della funzione al variare di $n \in \mathbb{N}$ e come la frequenza dell'oscillazione aumenti al crescere di $n \in \mathbb{N}$, garantendo comunque la convergenza puntuale ma non quella uniforme. Ciò che ci è stato mostrato dai grafici 2.2 e 2.3 prende il nome di fenomeno di Gibbs.

Andiamo ora a studiare le funzioni q e $S_n(q)$ per capire che relazione ci sia tra il salto dell'onda quadra in un suo punto di discontinuità e l'ampiezza dell'oscillazione del

polinomio di Fourier.

2.1.2 Studio di $S_{2n-1}(q)$

Prima di iniziare la ricerca dei massimi e dei minimi del polinomio $S_{2n-1}(q)$ possiamo notare che siccome per k pari i coefficienti a_k e b_k sono entrambi nulli, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ $S_{2n-1}(q)(t) = S_{2n}(q)(t)$ e inoltre, grazie alle proprietà della funzione seno, si ha che $S_{2n-1}(q)(-t) = -S_{2n-1}(q)(t)$ e $S_{2n-1}(q)(\pi - t) = S_{2n-1}(q)(t)$.

Ora, derivando la 2.2 si ottiene

$$S'_{2n-1}(q)(t) = \frac{2 \sin(2nt)}{\pi \sin(t)} \quad t \neq k\pi$$

che su $(0, \pi)$ si annulla se e solo se $2nt = k\pi$, ovvero nei punti del tipo $t_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n}$ per $k = 1, \dots, 2n - 1$ e, calcolando la derivata seconda, possiamo andare a verificare quali siano effettivamente i punti di massimo relativo e di minimo relativo:

$$S''_{2n-1}(q)(t) = \frac{2 \cdot 2n \cos(2nt) \sin(t) - \cos(t) \sin(2nt)}{\pi \sin(t)^2}$$

Sostituendo i t_k si ha

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2 \cdot 2n \cos(k\pi) \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \sin(k\pi)}{\pi \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2}$$

che per k pari vale

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{2 \cdot 2n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\pi \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2} > 0 \quad \text{per } k = 2, 4, \dots, 2n - 2$$

mentre per k dispari vale

$$S''_{2n-1}(q)\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = -\frac{2 \cdot 2n \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}{\pi \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)^2} < 0 \quad \text{per } k = 1, 3, \dots, 2n - 1$$

Tutto questo ci dice che i punti $t_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n}$ sono punti di massimo relativo se k è dispari e di minimo relativo se k è pari. Sfruttando inoltre le proprietà di $S_{2n-1}(q)$ (in particolare la simmetria) possiamo dedurre che i punti del tipo $-t_k^{(n)}$ e $-\pi + t_k^{(n)} \in (-\pi, 0)$ saranno di massimo relativo per k pari e di minimo relativo per k dispari.

Prendiamo dunque in considerazione, ad esempio, un intorno dell'origine e andiamo a confrontare il salto della funzione q con l'oscillazione del polinomio di Fourier $S_{2n-1}(q)$ al variare del grado n .

Fissato un $n \in \mathbb{N}$, il primo punto di massimo relativo che si incontra dopo l'origine è, nelle notazioni precedenti, $t_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$ e quindi il picco corrispondente sarà dato dal punto

$$(t_1^{(n)}, S_{2n-1}(q)(t_1^{(n)})) = \left(\frac{\pi}{2n}, \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} dx \right)$$

Mandiamo ora $n \rightarrow \infty$ e mostriamo che il valore trovato continua a mantenersi maggiore del salto dell'onda quadra.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}(q) \left(\frac{\pi}{2n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nx)}{\sin(x)} dx = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) \sin(2nx) dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nx)}{x} dx \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ma dato che

$$\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - \sin(x)}{x \sin(x)} = \frac{\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)} \text{ per } x \rightarrow 0$$

allora la funzione $\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}$ è limitata in un intorno dell'origine. Dunque esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right) \sin(2nx) dx \right| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \left| \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x} \right| dx \leq \frac{C}{n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

e sostituendo nella 2.3 si ottiene che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n-1}(q) \left(\frac{\pi}{2n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2n} \frac{\sin(2nx)}{x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt =: G$$

La quantità G appena trovata è nota come costante di Wilbraham-Gibbs e si può dimostrare, con metodi numerici, che vale circa 1.178980... e dunque per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$ il massimo corrispondente al punto $t_1^{(n)} = \frac{\pi}{2n}$ si mantiene strettamente maggiore di 1. Tutto ciò dunque è coerente con quanto si era visto nel grafico 2.4.

Ora è sufficiente sfruttare la simmetria rispetto l'origine di $S_{2n-1}(q)$ per dire che il minimo corrispondente al punto $-t_1^{(n)} = -\frac{\pi}{2n}$ per $n \rightarrow \infty$ si troverà ad un'altezza pari a $-1.178980...$ strettamente minore di -1 .

Per concludere possiamo quindi vedere che, indicando con $\Delta(q)(0)$ il salto della funzione nell'origine, si ha che $\Delta(q)(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} q(t) - \lim_{t \rightarrow 0^-} q(t) = 1 - (-1) = 2$, mentre per $n \rightarrow \infty$ la differenza tra il massimo e il minimo vicino all'origine del polinomio è data da

$$\Delta S_{2n-1}(q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n-1}(q)(t_1^{(n)}) - S_{2n-1}(q)(-t_1^{(n)})) = 2G$$

e quindi

$$\Delta S_{2n-1}(q) = |\Delta(q)(0)|G.$$

Vedremo in seguito che tutto questo non accade solo nel caso dell'onda quadra, ma che tutte le funzioni regolari a tratti si comportano allo stesso modo.

2.2 L'onda semitriangolare

Vediamo ora un ultimo esempio di effetto Gibbs relativo ad una funzione nota come onda semitriangolare. Definiamo la funzione

$$s(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \leq t < 0, \\ t, & \text{se } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

e poniamo $s(t) = s(t + 2k\pi)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall k \in \mathbb{Z}$.

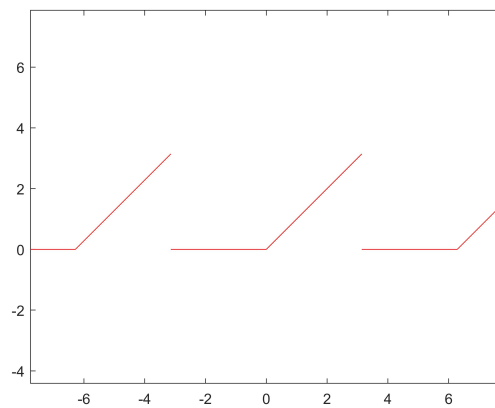


Figura 2.5: Onda semitriangolare

2.2.1 Il polinomio di Fourier di s

Indichiamo ancora una volta con a_0 , a_k e b_k i coefficienti del polinomio di Fourier di s e notiamo innanzitutto che questi sono ben definiti poiché s è sommabile su $[-\pi, \pi]$ e risultano essere

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{\pi}{2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos(kt) dt = \frac{1}{k\pi} \left([t \sin(kt)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin(kt) dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{k^2\pi} [-\cos(kt)]_0^{\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} = \begin{cases} \frac{-2}{k^2\pi} & \text{se } k \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

e

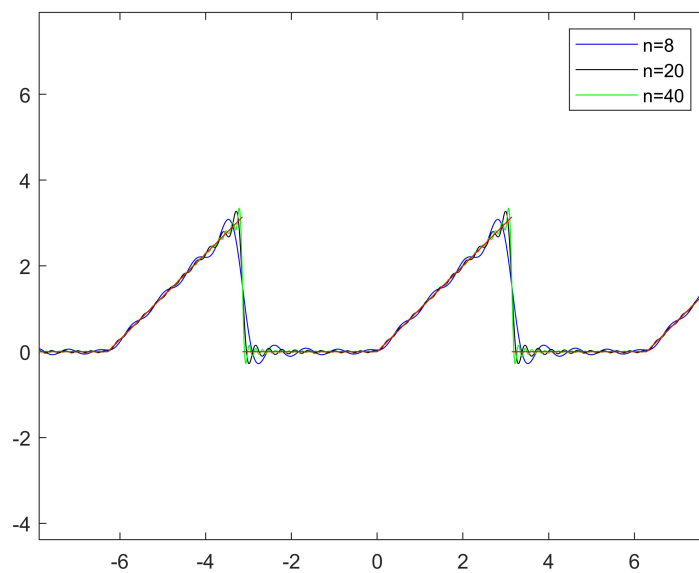
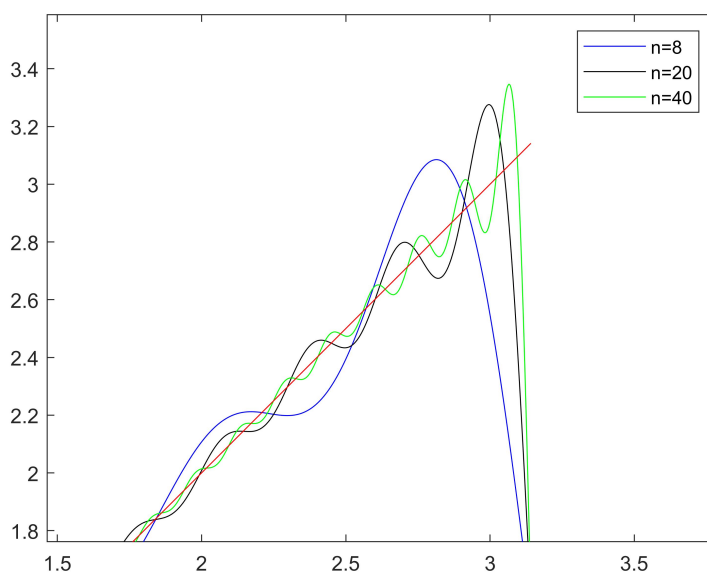
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} s(t) \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin(kt) dt = -\frac{1}{k\pi} \left([t \cos(kt)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos(kt) dt \right) =$$

$$= -\frac{1}{k\pi} \pi (-1)^k - \left[\frac{\sin(kt)}{k} \right]_0^{\pi} = -\frac{(-1)^k}{k} = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } k \text{ dispari} \\ -\frac{1}{k} & \text{se } k \text{ pari} \end{cases}$$

Per definizione si ha quindi che il polinomio di Fourier associato a s di grado $n \in \mathbb{N}$ è

$$S_n(s)(t) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} \cos(kt) - \frac{(-1)^k}{k} \sin(kt)$$

Nei grafici riportati di seguito è possibile vedere che anche in questo caso si verifica un fenomeno molto simile a quello dell'onda quadra. Infatti, come l'onda quadra, anche l'onda semitriangolare presenta dei punti di discontinuità di prima specie vicino ai quali il polinomio di Fourier $S_n(s)$ oscilla in modo considerevole ed inoltre, come anche si può vedere nella figura 2.7, aumentando il grado non si ha alcun miglioramento.

Figura 2.6: Effetto Gibbs, $n=8,20,40$ Figura 2.7: Effetto Gibbs, oscillazione, $n=8,20,40$

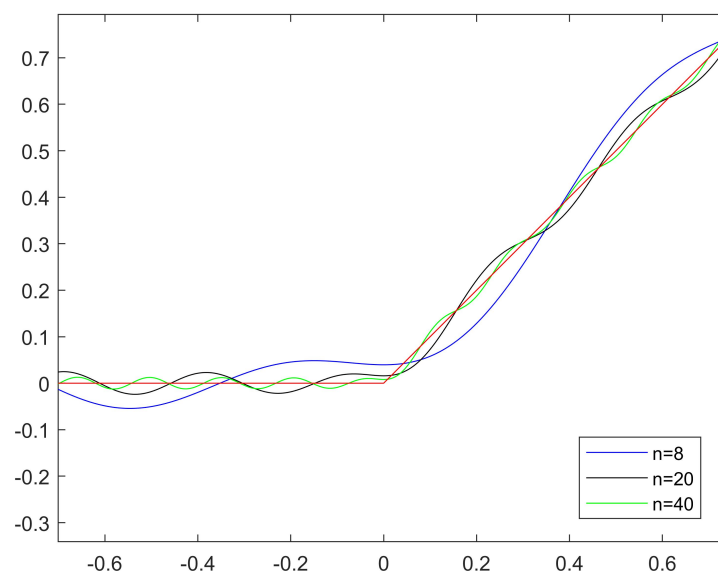


Figura 2.8: Particolare (origine) figura 2.6

C'è però una cosa interessante da notare in questi grafici: guardando la figura 2.5 si vede che per ogni $k \in \mathbb{Z}$ i punti con ascissa $t = 2k\pi$ sono "spigolosi", o meglio, la funzione non è derivabile in questi punti. Come però ci viene mostrato dalla figura 2.8, questo non crea alcun problema al polinomio $S_n(s)$ che all'aumentare del grado n approssima sempre meglio la funzione anche in tali punti. Tutto questo ci suggerisce che l'effetto Gibbs non dipende da eventuali punti di discontinuità della derivata prima di una funzione. Andiamo ora ad esaminare il caso generale per formalizzare il tutto.

2.3 In generale

Esaminiamo ora il comportamento della serie di Fourier associata ad una generica funzione f periodica e regolare a tratti, nell'intorno di un punto di discontinuità di tipo salto.

Lemma 2.3.1. Sia $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni continue su $[a, b]$ che in tale intervallo converge uniformemente ad una funzione g . Sia inoltre $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione

di punti di $[a, b]$ tale che $c_n \rightarrow c$ per $n \rightarrow \infty$. Allora la successione $(g_n(c_n))_{n \in \mathbb{N}}$ è convergente e il $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(c_n) = g(c)$.

Dimostrazione. Prima di tutto notiamo che siccome $g_n \rightarrow g$ uniformemente per $n \rightarrow \infty$, la funzione g sarà sicuramente continua dato che lo sono le g_n .

Sfruttando la convergenza uniforme delle g_n a g si ha che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > n_\varepsilon$

$$|g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ per ogni } x \in [a, b]$$

ed in particolare quindi si avrà anche che

$$|g_n(c) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Siccome $c_n \rightarrow c$ e g è continua, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n > m_\varepsilon$

$$|g(c_n) - g(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Scegliendo quindi $n_1 > \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ si ha che per ogni $n > n_1$

$$|g_n(c_n) - g(c)| \leq |g_n(c_n) - g(c_n)| + |g(c_n) - g(c)| < \varepsilon$$

da cui la tesi. □

Vediamo ora un teorema le cui conclusioni saranno molto simili a quelle ottenute dallo studio dell'onda quadra, ma valide nel caso generale.

Teorema 2.3.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2T$ -periodica e che nel punto x_0 presenta una discontinuità di prima specie con salto $\Delta(f)(x_0)$ dato da $\Delta(f)(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$. Allora posto $x_n = \frac{T}{2n}$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0 \mp x_n) = f^*(x_0) \mp \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} G$$

ed inoltre vale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(f)(x_0 + x_n) - S_n(f)(x_0 - x_n)) = |\Delta(f)(x_0)| G$$

Dimostrazione. Ridefinendo eventualmente il valore di $f(x_0)$, non è limitativo supporre che $f(x_0) = f^*(x_0)$.

Inoltre, indicando con q la funzione onda quadra trattata in precedenza, definiamo

$$q_1(x) := q\left(\frac{x - x_0}{T}\pi\right)$$

In questo modo la funzione q_1 risulta essere la composizione di q con la funzione di cambiamento di variabile $x \rightarrow \frac{x-x_0}{T}\pi$ e quindi avrà un punto di discontinuità in x_0 e periodo $2T$. Definiamo infine la funzione

$$\phi(x) = f(x) - f^*(x_0) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}q_1(x)$$

Possiamo notare intanto che ϕ è una funzione regolare a tratti (perché lo sono f e q), $2T$ -periodica e continua in x_0 . Infatti, con una semplice sostituzione, si verifica che per ogni $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(x + 2kT) = \phi(x)$ e per la continuità invece si può notare innanzitutto che $q_1(x_0^+) = q(0^+) = 1$ e $q_1(x_0^-) = q(0^-) = -1$ e dunque

$$\begin{aligned}\phi(x_0^+) &= \lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} \right) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}q(0^+) = \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} = 0 \\ \phi(x_0^-) &= \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{2f(x) - f(x_0^+) - f(x_0^-)}{2} \right) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}q(0^-) = -\frac{\Delta(f)(x_0)}{2} + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} = 0\end{aligned}$$

e quindi

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = 0 = \phi(x_0).$$

Sia ora $\delta > 0$ tale che l'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ contenga solo x_0 come punto di discontinuità di f . In questo modo la ϕ risulta essere continua su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e quindi per il teorema 1.3.4 si ha che, su tale intervallo, $S_n(\phi)$ converge uniformemente a ϕ .

Dunque se $x_n = \frac{T}{2n}$, per come è stata costruita ϕ , si ha

$$S_n(f)(x_0 \mp x_n) = S_n(\phi)(x_0 \mp x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}S_n(q)\left(\frac{\mp x_n}{T}\pi\right)$$

e, sfruttando il lemma 2.3.1 (con $g_n = S_n(f)$ e $c_n = x_n$) ed il comportamento di $S_n(q)$ studiato nella sezione 2.1, otteniamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(x_0 \mp x_n) &= \phi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(q)\left(\frac{\mp x_n}{T}\pi\right) = \\ &= \phi(x_0) + f^*(x_0) \mp \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}G = f^*(x_0) \mp \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}G\end{aligned}$$

A questo punto, per dimostrare la seconda parte dell'enunciato basta notare che

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n(f)(x_0 + x_n) - S_n(f)(x_0 - x_n)) &= \\ &= f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}G - (f^*(x_0) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2}G) = \Delta(f)(x_0)G \end{aligned}$$

□

Grazie a questo teorema ora sappiamo che l'effetto Gibbs è un fenomeno che si presenta per qualunque funzione con punti di discontinuità di tipo salto e che quindi non riguarda solo pochi casi particolari, ma un'intera famiglia di funzioni. Si vorrebbe quindi poter arrivare ad una soluzione di questo problema e, a tal proposito, nel capitolo che segue ne studieremo una: le somme di Fejér.

Capitolo 3

Le somme di Fejér

3.1 I polinomi di Fejér

Definizione 3.1.1 (Convergenza secondo Cesàro). Data la successione $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiamo la successione $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle medie aritmetiche:

$$\sigma_n := \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n}$$

Diciamo che $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende ad a secondo Cesàro se la successione $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tende (nel senso abituale) ad a e si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a$.

Nel nostro caso particolare, per studiare le serie di Fejér, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sarà solitamente una successione di somme parziali.

La proposizione seguente ci mostra che la convergenza secondo Cesàro è più debole di quella usuale.

Proposizione 3.1.2. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = a$

Dimostrazione.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |S_n - a| < \varepsilon \forall n > n_\varepsilon$$

Nelle notazioni precedenti si avrà dunque che

$$\begin{aligned} |\sigma_n - a| &= \left| \frac{\sum_{k=1}^n (S_k - a)}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |(S_k - a)| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n_\varepsilon} |(S_k - a)| + \sum_{k=n_\varepsilon+1}^n |(S_k - a)| \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{n} (C n_\varepsilon + \varepsilon (n - n_\varepsilon)) \leq \frac{C n_\varepsilon}{n} + \varepsilon \leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

con $C = \max\{|S_k - a|\}$ e per $n > n_1 > n_\varepsilon$. \square

Osservazione 3.1.3. Non vale il viceversa del teorema precedente, infatti un controesempio si ha considerando $S_n = \sum_{k=0}^n x^k$.

Definizione 3.1.4 (Somma di Fejér). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$ e sia $S_n(f)$ il polinomio di Fourier di grado n di f . Allora si definisce l' n -esima somma di Fejér

$$\sigma_n(f)(t) := \frac{S_0(f)(t) + \cdots + S_{n-1}(f)(t)}{n}$$

In modo analogo a come è stato fatto per i polinomi di Fourier andiamo ora a definire il nucleo di Fejér e a trovare una scrittura in forma integrale di $\sigma_n(f)$.

Definizione 3.1.5 (Nucleo di Fejér). Nelle notazioni della definizione 1.1.7, per ogni $n \in \mathbb{N}$ il nucleo di Fejér è dato da

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(t)$$

Proposizione 3.1.6 (Proprietà nucleo di Fejér). Sia F_n il nucleo di Fejér, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha che per $t \in (0, \pi)$ si può ottenere una scrittura più compatta data da

$$F_n(t) = \frac{1}{2n} \frac{\sin^2(\frac{nt}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})}$$

inoltre F_n è 2π -periodico, non negativo su $(0, \pi)$, pari ed è un nucleo unitario, ovvero vale che $\frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(t) dt = 1$.

Dimostrazione. Per verificare che F_n sia un nucleo unitario è sufficiente sviluppare l'integrale ricordando che tale proprietà vale anche per il nucleo di Dirichlet D_n . Sfruttando la riscrittura di D_n vista in 1.1.8 e le proprietà delle funzioni seno e coseno si ha che

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{t}{2}\right) F_n(t) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left((k + \frac{1}{2})t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \stackrel{\text{Prostaferesi}}{=} \frac{1}{4n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\cos(kt) - \cos((k+1)t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \\ &= \frac{1}{4n \sin\left(\frac{t}{2}\right)} (1 - \cos(nt)) = \frac{1}{2n} \frac{\sin^2\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \forall t \in (0, \pi) \end{aligned}$$

Con questa scrittura è ora ovvio che F_n sia 2π -periodico, positivo su $(0, \pi)$ e pari. \square

Proposizione 3.1.7. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$. Allora, nelle notazioni precedenti, vale che

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.1.9 abbiamo immediatamente che

$$\begin{aligned} \sigma_n(f)(t) &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(t)}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(s) ds = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds \end{aligned}$$

□

Teorema 3.1.8 (di Fejér). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$. Sia $t \in \mathbb{R}$ e supponiamo esista $f^*(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(t) = f^*(t)$$

Inoltre se $f \in C([-\pi, \pi])$, allora $\sigma_n(f)(t) \rightarrow f(t)$ uniformemente per $n \rightarrow \infty$.

Dimostrazione. Dato che esiste $f^*(t)$, allora $\lim_{s \rightarrow 0^+} (\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)) = 0$, quindi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_{\varepsilon, t}$ tale che $|\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)| < \varepsilon \forall s \in (0, \delta_{\varepsilon, t})$.

Per comodità poniamo $g(t, s) = |\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t)|$ e andiamo ora a considerare

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(t) - f^*(t)| &= \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} - f^*(t) \right) F_n(s) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta_{\varepsilon, t}} g(t, s) F_n(s) ds + \frac{2}{\pi} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi g(t, s) F_n(s) ds =: I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

e dunque si ha che

$$I_1 \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds = \varepsilon$$

e per una certa costante $C_{\delta_{\varepsilon, t}}$ che dipende da ε e da t

$$I_2 = \frac{2}{n\pi} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi g(t, s) \frac{\sin^2(\frac{n}{2}s)}{2 \sin^2(\frac{s}{2})} ds \leq \frac{1}{n\pi} \sup_{[\delta_{\varepsilon, t}, \pi]} \frac{1}{\sin^2(\frac{s}{2})} \int_{\delta_{\varepsilon, t}}^\pi g(t, s) ds \leq \frac{C_{\delta_{\varepsilon, t}}}{n} \rightarrow 0$$

per $n \rightarrow \infty$. Abbiamo quindi che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(t) = f^*(t)$.

Se ora $f \in C([-\pi, \pi])$, allora la f è continua su un compatto e quindi per Heine-Cantor è

uniformemente continua; dunque $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon$ tale che $|\frac{f(t+s)+f(t-s)}{2} - f^*(t)| < \varepsilon \forall s \in (0, \delta_\varepsilon)$ e $\forall t \in [-\pi, \pi]$. Riprendendo ora i passaggi fatti in 3.1 si ottiene

$$I_1 \leq \varepsilon \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds = \varepsilon$$

e, per una certa costante C_{δ_ε} che ora non dipende più da t ,

$$I_2 \leq \frac{2}{\pi} 2 \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \int_{\delta_\varepsilon}^\pi \frac{1}{2n \sin^2(\frac{s}{2})} ds \leq \frac{2}{n\pi} \sup_{[-\pi, \pi]} |f| \frac{1}{2n \sin^2(\frac{\delta_\varepsilon}{2})} \pi \leq \frac{C_{\delta_\varepsilon}}{n} \rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow \infty$$

uniformemente e quindi $\sigma_n(f)(t) \rightarrow f(t)$ uniformemente per $n \rightarrow \infty$. \square

Una conseguenza del teorema appena visto è il seguente

Teorema 3.1.9 (di approssimazione di Weierstrass). Ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e 2π -periodica è limite uniforme di una successione di polinomi trigonometrici.

Dimostrazione. Basta notare che $\sigma_n(f)$ è un polinomio trigonometrico e usare il teorema 3.1.8 appena dimostrato. \square

3.2 Soluzione al fenomeno di Gibbs

Proposizione 3.2.1. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 2π -periodica e $f \in L^1((-\pi, \pi))$. Se esistono due costanti $c, C \in \mathbb{R}$ tali che per quasi ogni $t \in (-\pi, \pi)$ si abbia $c \leq f(t) \leq C$, allora vale anche che $c \leq \sigma_n(f)(t) \leq C$ per ogni $t \in (-\pi, \pi)$.

Dimostrazione. Siccome per quasi ogni $t \in (-\pi, \pi)$ si ha $c \leq f(t) \leq C$, allora

$$\sigma_n(f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(t+s) + f(t-s)}{2} F_n(s) ds \leq \frac{2C}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F_n(s) ds = C$$

e analogamente si ottiene che $\sigma_n(f)(t) \geq c$. \square

Con il teorema seguente, molto simile al 2.3.2, possiamo ora osservare come l'effetto Gibbs scompaia se si usano le somme di Fejér.

Teorema 3.2.2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione regolare a tratti, $2T$ -periodica e che nel punto x_0 presenta una discontinuità di prima specie con salto $\Delta(f)(x_0)$. Sia $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione tale che $x_n \rightarrow x_0$ per $n \rightarrow \infty$. Allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta(f)(x_0)|$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione ϕ regolare a tratti, $2T$ -periodica e continua in x_0 , definita come in 2.3.2, e sia $\delta > 0$ tale che l'intervallo $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ contenga solo x_0 come punto di discontinuità di f .

La ϕ risulta essere continua su $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ e quindi per il teorema di Fejér (3.1.8) si ha che su tale intervallo $\sigma_n(\phi)$ converge uniformemente a ϕ . Dunque per come definita la funzione ϕ si ha che

$$\sigma_n(f)(x_0 \mp x_n) = \sigma_n(\phi)(x_0 \mp x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \sigma_n(q) \left(\frac{\mp x_n}{T} \pi \right)$$

e siccome $-1 \leq q(t) \leq 1$, e quindi per la proposizione 3.2.1 anche $-1 \leq \sigma_n(q)(t) \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in \mathbb{R}$, ne segue che

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\phi)(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(q) \left(\frac{x_n - x_0}{T} \pi \right) \leq$$

per il lemma 2.3.1

$$\begin{aligned} &\leq \phi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(q) \left(\frac{x_n - x_0}{T} \pi \right) \leq \\ &\leq \phi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} = f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \end{aligned}$$

e che

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(\phi)(x_n) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(q) \left(\frac{x_n - x_0}{T} \pi \right) \geq$$

per il lemma 2.3.1

$$\begin{aligned} &\geq \phi(x_0) + f^*(x_0) + \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(q) \left(\frac{x_n - x_0}{T} \pi \right) \geq \\ &\geq \phi(x_0) + f^*(x_0) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} = f^*(x_0) - \frac{\Delta(f)(x_0)}{2} \end{aligned}$$

e quindi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) - \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(x_n) \leq |\Delta(f)(x_0)|.$$

□

Vediamo ora graficamente il comportamento delle somme di Fejér, tornando ai due casi particolari dell'onda quadra e dell'onda semitriangolare da cui era partita l'analisi del fenomeno di Gibbs. In particolare è interessante notare il diverso andamento che queste hanno rispetto alle serie di Fourier in un intorno dei punti di discontinuità delle funzioni che approssimano. Infatti, come si vedrà dai grafici riportati di seguito, le forti oscillazioni che caratterizzavano le serie di Fourier non sono più presenti. Un'ulteriore caratteristica delle somme di Fejér, che si può notare osservando i grafici, è la loro proprietà di attenuare le piccole oscillazioni. Il che è particolarmente evidente se si osservano i tratti orizzontali dell'onda quadra e dell'onda semitriangolare.

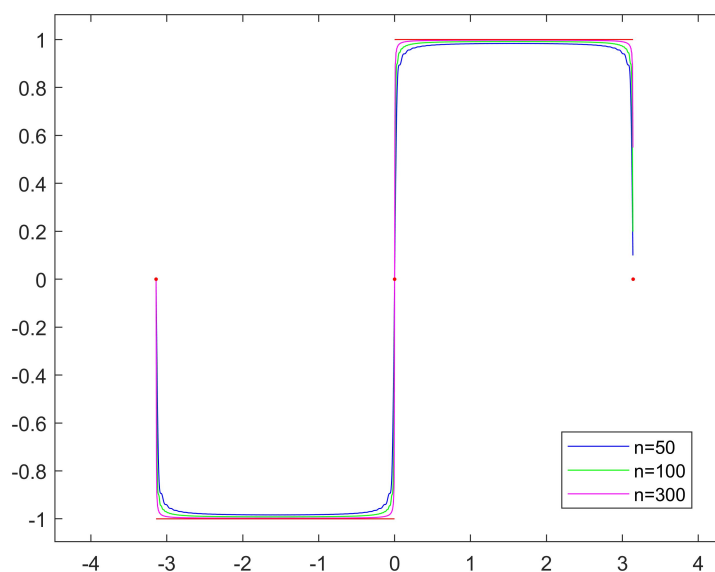
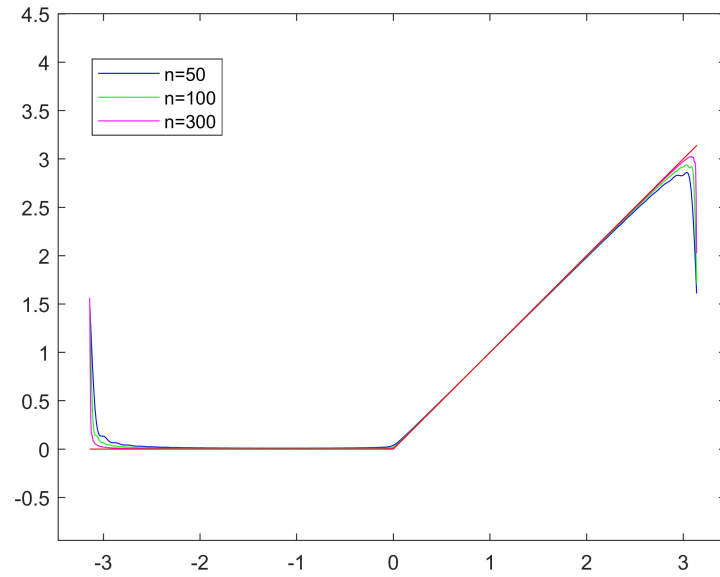
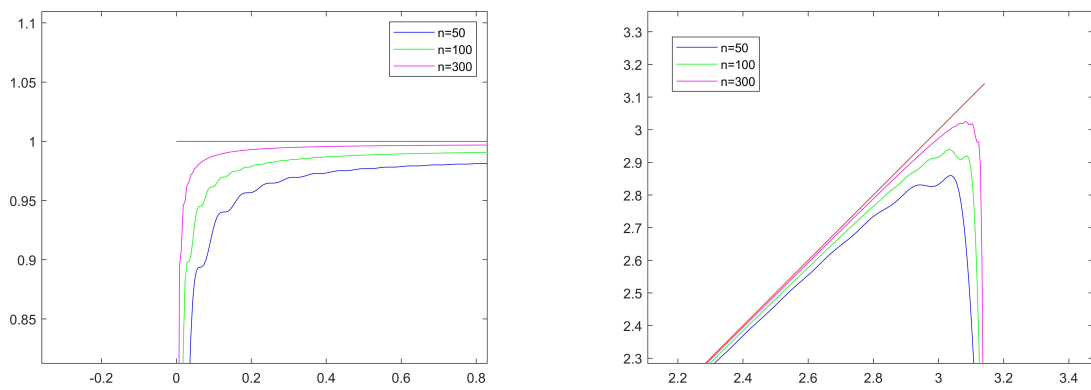


Figura 3.1: Somme di Fejér onda quadra, $n=50,100,300$

Figura 3.2: Somme di Fejér onda semitriangolare, $n=50,100,300$ Figura 3.3: Eliminazione effetto Gibbs onda quadra, $n=50,100,300$ Figura 3.4: Eliminazione effetto Gibbs onda semitriangolare, $n=50,100,300$

Appendice A

Codici Matlab utilizzati

Polinomio di Fourier $S_n(q)$

```
1 function [y]= Sq(t,n)
  L=length(t);
3 y=zeros(1,L);
  for k=1:n
5     r(k,:)=sin((2*k-1)*t)/(2*k-1);
  end
7 for i=1:L
    y(i)=(4/pi)*sum(r(:,i));
9 end
end
```

Grafico $S_n(q)$ (Figura 2.3 con $n=3,8,20$; Figura 2.4 con $n=400$).

```
n=input('inserire n ');
2 I=input('inserire intervallo [a,b] ');
  t=I(1):0.005:I(2);
4 y=Sq(t,n);
  plot(t,y)
6 clear
```

Polinomio di Fourier $S_n(s)$

```
function [y]=Ss(t,n)
2 y=zeros(1,length(t));
  y=y+pi/4;
4 for k=1:n
    y=y+(((-1)^(k-1))/(k^2*pi)*cos(k*t)-(-1)^k/k*sin(k*t));
6 end
end
```

Grafico $S_n(s)$ (Figura 2.6 con $n=8,20,40$).

```

1 n=input('inserire n ');
  I=input('inserire intervallo [a,b] ');
3 t=I(1):0.005:I(2);
  y=Ss(t,n);
5 plot(t,y)
  clear

```

Somma di Fejér $\sigma_n(q)$

```

function [y]= sigmaq(t,n)
2 L=length(t);
  y=zeros(1,L);
4 for i=1:n-1
    y=y+Sq(t,i);
6 end
  y=y/n;
8 end

```

Grafico $\sigma_n(q)$ (Figura 3.1 con $n=50,100,300$).

```

n=input('inserire n ');
2 I=input('inserire intervallo [a,b] ');
  t=I(1):0.005:I(2);
4 y=sigmaq(t,n);
  plot(t,y)
6 clear

```

Somma di Fejér $\sigma_n(s)$

```

function [y]= sigmas(t,n)
2 L=length(t);
  y=zeros(1,L);
4 y=y+pi/4;
  for i=1:n-1
6     y=y+Ss(t,i);
  end
8 y=y/n;
  end

```

Grafico $\sigma_n(s)$ (Figura 3.2 con $n=50,100,300$).

```

1 n=input('inserire n ');
  I=input('inserire intervallo [a,b] ');
3 t=I(1):0.005:I(2);
  y=sigmas(t,n);
5 plot(t,y)
  clear

```

Bibliografia

- [1] Pozzi, Gianni A. Cenni sulle serie di Fourier, <http://www-dimat.unipv.it/giulio/linkedmaterial/camb08/fourier-pozzi.pdf>, 2007
- [2] Lanconelli Ermanno, Lezioni di analisi matematica 2, Pitagora Editrice, Bologna, 1997.
- [3] Apostol, Tom Mike, Mathematical analysis, Addison-Wesley, Massachusetts, 1974.
- [4] Guidi Chiara, Tesi di laurea triennale in Complementi di Analisi, Il fenomeno di Gibbs, I sessione a.a. 2012/2013.
- [5] Barozzi, Giulio Cesare, Matematica per l'ingegneria dell'informazione, Zanichelli, Bologna, 2004
- [6] Carslaw, H.S. A trigonometrical sum and the Gibbs' phenomenon in Fourier's series, American Journal of Mathematics, Vol. 39, The Johns Hopkins University Press, Aprile 1917, pp. 185-198