

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Buchi neri e oggetti esotici compatti

Relatore:
Prof. Roberto Casadio

Presentata da:
Cosimo Agostinelli

Anno Accademico 2019/2020

A mio fratello Arturo

Abstract

Nel presente lavoro, si discutono i caratteri salienti della relatività generale, per poi esporre le principali soluzioni dell'equazione di Einstein, utili alla descrizione di un buco nero; inoltre, vengono trattate alcune questioni aperte relative a quest'ultimi, come l'esistenza di singolarità spaziotemporali. In seguito, si discute la possibilità di modelli alternativi (genericamente indicati come ECOs), in riferimento al loro grado di somiglianza ad un buco nero, quantificato tramite un parametro ϵ . Si studiano alcune proprietà di ECOs a simmetria sferica e stazionari, come l'esistenza di curve geodetiche circolari e la stabilità gravitazionale. Il proposito è quello di trovare delle caratteristiche che siano esclusive degli ECOs, così che il riscontro con i dati sperimentali ci permetta di verificare, o smentire, la validità di questi modelli alternativi ai buchi neri. Tuttavia, distinguere queste due classi di oggetti tramite lo studio dei segnali elettromagnetici si rivela non semplice. Si mostra anche come un ECO, la cui superficie sia troppo vicina a quella del corrispondente buco nero, risulti gravitazionalmente instabile e sia forzato a collassare ulteriormente. Infine, vengono proposti due criteri di classificazione degli oggetti compatti.

Indice

Introduzione	1
1 Relatività generale e buchi neri	3
1.1 Princìpi della teoria e struttura matematica	3
1.2 Soluzioni dell'equazione di campo	6
1.3 Il problema dei buchi neri	10
1.4 Utilità dello studio di modelli alternativi	12
2 Proprietà di ECOs stazionari	14
2.1 Il parametro di somiglianza ϵ	14
2.2 Orbite circolari e sfere di fotoni	15
2.3 Traiettorie di fuga ed ombra di oggetti compatti	19
2.4 Cenni sull'instabilità gravitazionale	24
3 Classificazione degli ECOs	27
3.1 ECOs " <i>morbidi</i> " e " <i>duri</i> "	27
3.2 Classificazione tramite ϵ	28
Conclusioni e prospettive future	30
Bibliografia	33

Introduzione

Il modello dei buchi neri nasce e si sviluppa nell'ambito della relatività generale. Stando ad esso, sarebbe possibile l'esistenza di corpi (generalmente oggetti astrofisici) talmente massivi e compatti da risultare appunto neri, poiché la gravità è così intensa (o meglio, lo spaziotempo ha una struttura tale) da non permettere la fuoriuscita di alcun tipo di informazione dal suo interno, nemmeno della luce. Tuttavia, l'esistenza di questi oggetti, dapprima formulata solo a livello teorico, ma in seguito supportata anche da osservazioni sperimentali, porta con sé diversi problemi e quesiti tutt'oggi insoluti. Siccome la nostra conoscenza della natura non esclude che i corpi oscuri e compatti siano qualcosa di diverso da un buco nero, la ricerca di possibili alternative merita tutta la nostra attenzione, considerate anche le ripercussioni che questi studi potrebbero avere sulla nostra visione del cosmo. Infatti, questi argomenti coinvolgono temi come la materia oscura, l'esistenza di singolarità spaziotemporali, la gravità quantistica e la conservazione dell'informazione fisica.

Nel primo capitolo ripercorreremo le tappe fondamentali che hanno portato alla formulazione della relatività generale: i principi chiave, gli strumenti matematici, fino a giungere alla famosa equazione di campo di Einstein. Esporremo in breve le principali soluzioni di quest'ultima, ottenendo così una descrizione dei corpi celesti che generano un intenso campo gravitazionale. Dopodiché, ci confronteremo con i più urgenti problemi sollevati dal concetto di buco nero, per poi illustrare l'utilità dello studio di modelli alternativi, indicati come ECOs. Nel capitolo 2, quantificheremo la somiglianza di un oggetto compatto ad un buco nero, tramite un parametro indicato con ϵ . Studieremo le orbite che le particelle (massive e non) compiono attorno ad un ECO, interessandoci particolarmente alle orbite circolari chiuse. Questo ci aiuterà a definire l'"ombra" di un oggetto compatto, ovvero l'immagine che possiamo vedere quando esso viene illuminato da una sorgente esterna; inoltre studieremo le condizioni che permettono ai segnali elettromagnetici di "fuggire" dalla superficie dell'ECO. Si analizzerà anche la stabilità gravitazionale, caratteristica fondamentale per l'esistenza di un qualunque corpo. A tal proposito, la domanda alla quale si proverà a rispondere è la seguente: quanto piccola può essere la differenza tra il raggio di un ECO e quello di un buco nero di egual massa? Infine, nell'ultimo capitolo proporremo due diversi metodi di classificazione. Il primo basato sulla curvatura massima che un oggetto compatto può sopportare; il secondo,

invece, prende le mosse dalle caratteristiche studiate nel capitolo 2, per poi fissare dei valori di ϵ che distinguano tre famiglie di ECOs.

In questo lavoro prenderemo in considerazione principalmente corpi con simmetria sferica, senza approfondire il caso di oggetti rotanti, per i quali sarebbe necessaria una trattazione più estesa. Inoltre, si utilizzeranno generalmente unità di misura geometriche, tali per cui la velocità della luce nel vuoto e la costante di gravitazione universale sono pari ad uno ($c = 1$, $G_N = 1$). Ogni volta che si farà riferimento ad un tensore metrico, si sottintenderà un segno di tipo $(-, +, +, +)$; inoltre verrà utilizzata la convenzione di Einstein, secondo la quale due indici identici ripetuti vanno sommati. I numeri tra parentesi quadre all'interno del testo indicano i riferimenti bibliografici.

Capitolo 1

Relatività generale e buchi neri

1.1 Princìpi della teoria e struttura matematica

La relatività generale è una teoria in grado di descrivere i fenomeni legati all'interazione gravitazionale ed è, in questo ambito, la teoria migliore di cui attualmente disponiamo. Proposta da Albert Einstein nel 1916, essa fonda le proprie basi matematiche nella geometria differenziale e nel calcolo tensoriale, discipline sviluppatesi a cavallo tra il XIX ed il XX secolo, grazie al fondamentale contributo di Bernhard Riemann, Gregorio Ricci Curbastro e Tullio Levi-Civita. Da un punto di vista concettuale, la teoria si basa su due semplici princìpi: quello di relatività generale e quello di equivalenza.

Princìpio di relatività generale. *Le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento.*

Questa affermazione toglie qualunque privilegio ai sistemi di riferimento inerziali, sui quali invece si basa il princìpio di relatività ristretta. Ed è proprio qui che entrano in gioco gli strumenti matematici sopra citati: la geometria differenziale offre la possibilità di scrivere delle leggi fisiche valide per qualunque osservatore. Siccome la relatività ristretta, in quanto a descrizione di fenomeni non gravitativi, rimane una teoria valida, è naturale richiedere che essa sia incorporata nella nuova costruzione relativistica e risulti esserne un caso particolare. Per fare ciò, è però necessario chiarire il concetto di osservatore inerziale, inizialmente definito come un sistema di riferimento sul quale non agiscono forze. Per quanto ne sappiamo, ad eccezione della gravità, le interazioni fondamentali della natura (interazione forte, debole ed elettromagnetica) sono governate da cariche di segno opposto, il che significa che tali interazioni possono avere un carattere sia attrattivo che repulsivo. Possiamo allora pensare di costruire un corpo che presenti tutte le cariche in questione pari a zero, e questo ci garantirà che esso non è soggetto a nessuna delle tre forze sopra citate. Però, è altrettanto vero che in nessun caso ci sarà possibile *spegnere* la gravità per un dato corpo, in quanto il solo fatto di esistere lo rende soggetto all'interazione gravitazionale, la quale ha un carattere unicamente attrattivo e

mai repulsivo¹. Non possediamo dunque un modo per garantire a priori l'assenza di forze gravitazionali. Inoltre, ed è un fatto tanto intuitivo quanto importante, non è possibile distinguere il caso dell'assenza di gravità, da quello di una gravità alla quale però ci si abbandona senza altre resistenze. Un esempio comune è dato dagli astronauti all'interno delle stazioni spaziali: la percezione che si ha è quella che loro vivono in assenza di forza di gravità; in realtà essi sono legati alla terra, attorno alla quale orbitano, però si trovano in uno stato di "continua caduta libera" attorno ad essa, così come la stazione spaziale che li ospita. Queste considerazioni mostrano come la definizione di sistema inerziale sia inadeguata, in quanto risulta impossibile distinguere l'assenza di forze dalla presenza della sola forza di gravità. Un modo di risolvere la questione è quello di definire come *localmente inerziale* un sistema in caduta libera, ovvero soggetto alla sola interazione gravitazionale (l'aggettivo *locale* sottolinea l'impossibilità di determinare un sistema di riferimento che sia *globale* nello spazio e nel tempo). Un tale osservatore, infatti, non misurerebbe alcuna accelerazione gravitazionale in qualsivoglia esperimento. I concetti appena discussi trovano una precisa formulazione nel seguente principio, che risulta essere la causa del fenomeno di indistinguibilità esposto sopra:

Principio di equivalenza. *Per ogni corpo la carica (massa) relativa all'interazione gravitazionale, è uguale alla massa inerziale².*

Finora, non è stata fornita alcuna indicazione pratica su come ottenere le leggi fisiche, la quali dovrebbero rimanere identiche a se stesse per ogni sistema di riferimento. Una tale prescrizione è fornita dal principio di covarianza generale:

Principio di covarianza generale. *Per ottenere le leggi fisiche valide per un sistema di riferimento generico, è necessario sostituire le quantità tensoriali della relatività ristretta con quelle della varietà spaziotemporale, concepita nell'ambito della geometria differenziale.*

Per esempio, la derivata parziale ∂_μ , che compare nelle equazioni della relatività speciale, andrà sostituita con una derivata covariante, la quale, applicata ad un generico quadri-vettore v^α si esprime come [1]:

$$\nabla_\mu v^\alpha =: \partial_\mu v^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha v^\nu \quad (1.1)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ indica i simboli di Christoffel (anche detti connessione affine o connessione metrica) i quali sono legati al tensore metrico $g_{\mu\nu}$ secondo la relazione:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (1.2)$$

¹Ciò vale anche per delle particelle senza massa, come ad esempio i fotoni. Infatti essi hanno una propria energia, che corrisponde ad una massa secondo la nota relazione $E = mc^2$ della relatività ristretta.

²Questo principio è stato più volte verificato entro i limiti degli apparati sperimentali.

Inoltre, la metrica di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ andrà sostituita con una generica $g_{\mu\nu}$, la quale, pur essendo sempre diagonalizzabile "un punto alla volta" tramite un cambio di coordinate, non è detto che lo sia in una intera regione dello spaziotempo. Grazie a questo principio, siamo ora in grado di includere la relatività speciale in quella generale. Il passo successivo è la formulazione di una teoria della gravitazione coerente con i principi sopra esposti.

Abbiamo già stabilito che un corpo in caduta libera non risente di alcuna accelerazione gravitazionale. Nel sistema di riferimento (localmente inerziale) di tale corpo, la metrica sarà dunque quella di Minkowski $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ mentre il suo moto sarà rettilineo uniforme. Ciò significa che la sua quadriaccelerazione è nulla, e così i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, i quali sono proporzionali alle derivate parziali della metrica secondo la relazione (1.2). Nel sistema solidale con il corpo in caduta libera, essendo la metrica costante, vale la seguente catena di uguaglianze:

$$0 = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha \quad (1.3)$$

dove τ è il tempo proprio dell'oggetto e u^μ indica la sua quadrivelocità. Nella (1.3) riconosciamo l'equazione delle geodetiche e questo risultato è indipendente dalla scelta del sistema di riferimento. Ciò conduce a due importanti considerazioni: per prima cosa, un corpo soggetto alla sola forza gravitazionale si muove lungo curve geodetiche, definite dalla metrica dello spaziotempo. Inoltre, se effettuiamo un generico cambio di sistema di riferimento, la quadriaccelerazione non sarà più nulla, e così anche i simboli di Christoffel; ciò suggerisce che quest'ultimi descrivano l'effetto gravitazionale. Inoltre, poiché essi dipendono dalle derivate prime del tensore metrico, siamo portati a considerare la metrica come una sorta di potenziale dell'interazione gravitazionale.

Rimangono ancora due passi da compiere per implementare la teoria: definire una quantità che descriva la sorgente gravitazionale a livello matematico; infine trovare un set di equazioni che leghino tale quantità alla metrica dello spaziotempo. Non c'è un modo rigoroso di ricavare queste equazioni di campo, ma si possono dedurre seguendo un'analogia con la formulazione covariante dell'elettromagnetismo, fornita dalla relatività ristretta. Le equazioni di Maxwell in presenza di sorgenti hanno la seguente forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu \quad (1.4)$$

dove J^ν è la quadricorrente e $F^{\mu\nu}$ indica il tensore elettromagnetico. Siccome quest'ultimo dipende dalle derivate prime del quadripotenziale $A_{\mu\nu}$, secondo la formula:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (1.5)$$

in totale le equazioni di Maxwell dipendono dalle derivate seconde di A_μ . Analogamente, ci aspettiamo che anche le equazioni della relatività generale contengano derivate della metrica al massimo del secondo ordine. Il migliore candidato a svolgere questo ruolo è

indubbiamente il tensore di Riemann, il quale, in una varietà metrica, si può esprimere come segue:

$$R^a{}_{bcd} = \partial_c \Gamma_{bd}^a - \partial_d \Gamma_{bc}^a + \Gamma_{bd}^e \Gamma_{ce}^a - \Gamma_{bc}^e \Gamma_{de}^a. \quad (1.6)$$

In particolare, si rivelano utili i seguenti tensori ottenuti come sue contrazioni: il tensore di Ricci $R_{ab} = R^c{}_{acb}$, il tensore di Einstein $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$ e lo scalare di curvatura $R = R^a{}_a$. Essendo i primi due simmetrici e di tipo $(0, 2)$, è naturale richiedere che anche la controparte di J^μ si simmetrizza rispetto allo scambio degli indici e dello stesso rango. Se consideriamo la sorgente gravitazionale come un fluido, di densità e pressione (proprie) ρ e p rispettivamente, possiamo supporre che il seguente *tensore energia-impulso* sia la quantità che cerchiamo:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (1.7)$$

dove u^μ denota il campo di (quadri)velocità del fluido. Senza entrare nel dettaglio di questo tensore e delle sue proprietà, è però necessario notare che la seguente equazione di continuità è valida:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

Essa garantisce la compatibilità con il tensore di Einstein $G_{\mu\nu}$, per il quale vale una relazione analoga (nota come *identità di Bianchi*):

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0. \quad (1.9)$$

La necessità di ricondursi ad una descrizione newtoniana, nel limite di un campo gravitazionale debole, fissa un'ultima condizione su eventuali costanti moltiplicative. Ora abbiamo tutti gli ingredienti per formulare un set di equazioni in grado di descrivere l'interazione gravitazionale. Il risultato finale che abbiamo raggiunto è la seguente *equazione di campo di Einstein*:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu}. \quad (1.10)$$

G_N è la costante di gravitazione universale già introdotta da Newton. Anche se in seguito utilizzeremo unità di misura tali per cui $G_N = 1$, qui è stata volutamente resa esplicita per sottolinearne la presenza anche in una formulazione relativistica della gravità.

1.2 Soluzioni dell'equazione di campo

Una volta specificato il tensore energia-impulso, il quale varia a seconda della situazione considerata, risolvere l'equazione di Einstein significa trovare una metrica che soddisfi la (1.10) e delimitare il suo dominio di definizione. Siamo interessati alle soluzioni dell'equazione di campo che permettano di descrivere oggetti compatti, come ad esempio i buchi neri. Per questo motivo, nel presente paragrafo ricaveremo sinteticamente alcune soluzioni della (1.10) omettendo però una loro analisi completa, per la quale si rimanda a dei testi più specifici.

Consideriamo inizialmente un corpo di massa totale M , con simmetria sferica e statico nel tempo. Utilizziamo delle coordinate polari standard $\{r, \theta, \phi\}$ per descrivere le ipersuperfici spaziali a t costante. Usiamo quest'ultima come quarta coordinata e poniamo l'origine del sistema di riferimento al centro del corpo. L'esistenza di particolari simmetrie, come quelle che abbiamo richiesto, agevola enormemente la ricerca di una metrica che soddisfi la (1.10). Infatti, dalla simmetria sferica e dalla staticità, possiamo dedurre l'esistenza di quattro vettori di Killing, che definiscono curve lungo le quali il tensore metrico rimane invariato. Tre di essi sono di tipo spazio e corrispondono alle rotazioni attorno ai tre assi cartesiani; l'altro è di tipo tempo e rispecchia la staticità³. Se assumiamo che quest'ultimo sia ortogonale alle rotazioni, possiamo allora scrivere la metrica in forma diagonale come segue:

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.11)$$

sapendo già che i coefficienti A e B potranno dipendere solo da r a causa delle simmetrie. All'esterno dell'oggetto, nello spazio vuoto, non si hanno sorgenti di gravità, quindi il tensore energia-impulso sarà nullo in tutte le sue componenti. Ciò significa che l'equazione di Einstein si riduce a:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (1.12)$$

Moltiplicando la (1.12) per $g^{\mu\nu}$ si ottiene:

$$R^\mu{}_\mu - \frac{1}{2} R g^\mu{}_\mu = R - \frac{4}{2} R = -R = 0 \quad (1.13)$$

per cui l'equazione da risolvere (1.12) si riduce ulteriormente a:

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.14)$$

Se ora sostituiamo la (1.11) nella (1.14) ricaviamo delle condizioni per le funzioni A e B ; infine, il limite di campo debole, nel quale presupponiamo di ritrovare una descrizione newtoniana, fissa un'ulteriore restrizione, grazie alla quale è possibile scrivere la ben nota *metrica di Schwarzschild* [1]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.15)$$

Senza soffermarci sull'analisi della (1.15), entriamo subito in un secondo scenario per il quale è possibile ricavare una soluzione della (1.10): quello di un oggetto compatto

³Ricordiamo che un quadrivettore v^μ si dice *di tipo spazio* o *di tipo tempo* a seconda che $v^\mu v_\mu$ sia rispettivamente maggiore o minore di zero. Si dice invece *di tipo luce* se $v^\mu v_\mu = 0$.

a simmetria sferica, statico ma elettricamente carico [2]. La carica elettrica totale Q può essere pensata, per semplicità, come puntiforme e posta nell'origine del sistema di riferimento. Essa produrrà quindi un campo elettrostatico in direzione radiale. Abbiamo a disposizione gli stessi quattro vettori di Killing del caso precedente, per cui la metrica sarà sempre nella forma (1.11). La differenza sta nel fatto che ora il tensore energia-impulso non è più nullo, in quanto abbiamo una densità di energia data dal campo elettromagnetico $F_{\mu\nu}$. Si può dimostrare che, per regioni in cui non sono presenti sorgenti (elettromagnetiche), vale la relazione:

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left(g^{cd} F_{ac} F_{bd} - \frac{1}{4} g_{ab} F^{cd} F_{cd} \right). \quad (1.16)$$

Questo tensore energia-impulso ha inoltre traccia nulla, come si può mostrare moltiplicando la (1.16) per g^{ba} :

$$T^a_a = \frac{1}{4\pi} \left(g^{ab} F_b^d F_{ad} - \frac{1}{4} g^a_a F^{cd} F_{cd} \right) = \frac{1}{4\pi} (F^{ad} F_{ad} - F^{cd} F_{cd}) = 0. \quad (1.17)$$

Ciò significa che resta valida la condizione (1.13) per cui l'equazione di campo da risolvere assume la seguente forma:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (1.18)$$

Riprendiamo ora l'equazione di Maxwell (1.4). Per un generico sistema di riferimento e in assenza di sorgenti essa assumerà la forma:

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (1.19)$$

Per risolvere la (1.19) dovremo far uso della metrica non ancora specificata, del tipo (1.11) ed anche dell'espressione del campo elettromagnetico. Quest'ultimo può essere scritto come segue, utilizzando le coordinate polari e sfruttando la simmetria sferica:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{bmatrix} = E(r) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

Sostituendo la (1.11) e la (1.20) nella (1.19) è possibile ottenere la seguente condizione:

$$\frac{d}{dr} \left[(AB)^{-\frac{1}{2}} r^2 E \right] = 0 \quad (1.21)$$

integrando la quale si ottiene:

$$E(r) = \sqrt{AB} \frac{Q}{r^2}. \quad (1.22)$$

Q è una costante di integrazione ma, per la piatezza asintotica, si deve avere $A, B \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$, ovvero $E \sim Q/r^2$. Questo ci porta ad identificare Q proprio con la carica elettrica del buco nero. Ora che abbiamo un'espressione esplicita del campo elettromagnetico ed una implicita del tensore metrico, possiamo sostituirle nella (1.17) per ottenere il tensore energia-impulso in funzione di $A(r)$ e $B(r)$. Inserendo il $T_{\mu\nu}$ così ricavato nella (1.18) si giunge alle seguenti condizioni:

$$A(r) = B(r)^{-1}, \quad A(r) = 1 + \frac{K}{r} + \frac{Q^2}{r^2}. \quad (1.23)$$

Volendo recuperare la metrica di Schwarzschild nel caso in cui $Q = 0$, è ragionevole porre la costante di integrazione $K = -2M$. Si ottiene così l'espressione della *metrica di Reissner-Nordstrøm*, che descrive lo spaziotempo all'esterno di un oggetto statico, a simmetria sferica ed elettricamente carico:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.24)$$

Senza entrare nel merito del discorso, riportiamo una terza soluzione dell'equazione di Einstein: la metrica di Kerr. Essa descrive un oggetto compatto rotante attorno ad un asse fisso, passante per il suo centro. In questo caso non si ha più simmetria sferica, ma simmetria assiale e quindi si fa riferimento ad uno scenario fisicamente più realistico (si pensi per esempio a dei corpi astrofisici, che generalmente possiedono una rotazione intrinseca). Ci sono diversi modi di scrivere questa metrica; qui riportiamo la cosiddetta forma di *Boyer-Linquist*, con riferimento al set di coordinate già utilizzato [3]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4Mra \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2 \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (1.25)$$

dove $a = J/M$ è il momento angolare per unità di massa, inoltre:

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (1.26)$$

Per finire, è naturale domandarsi se sia possibile combinare la metrica di Reissner-Nordstrøm con quella di Kerr, così da ottenere una soluzione per un buco nero rotante e dotato di carica elettrica. In effetti ciò è possibile e conduce alla *metrica di Kerr-Newman*. Essa è formalmente uguale alla (1.25) con la differenza che Δ è definito nella seguente maniera:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad (1.27)$$

mentre l'espressione per ρ^2 rimane invariata. Questo risultato rispecchia il caso più generale possibile, in quanto, partendo dalla metrica di Kerr-Newman, con $Q = 0$ si riottiene quella di Kerr; ponendo $J = 0$ si ritorna al caso di Reissner-Nordstrøm; infine, se $Q = J = 0$, si ritrova la geometria di Schwarzschild.

1.3 Il problema dei buchi neri

Finora si è parlato in maniera abbastanza generica di "oggetti compatti", come di corpi (tipicamente di carattere astrofisico) che possono essere ben descritti dalle soluzioni della (1.10). La teoria relativistica, però, ammette l'esistenza di particolari oggetti, i buchi neri, che presentano alcune notevoli peculiarità. Accontentiamoci, almeno per il momento, della seguente definizione (non rigorosa): un buco nero è un corpo talmente compatto che la sua attrazione gravitazionale non permette, entro una certa distanza, la fuoriuscita di alcuna informazione dal suo interno, nemmeno della luce (da cui il nome "buco nero"). Ciò detto, vogliamo discutere due delle principali questioni aperte relative a questi corpi, senza la pretesa di esaurire l'argomento, né di esporre i diversi approcci che si possono seguire per tentare di risolvere tali problemi.

La prima difficoltà sollevata dal modello dei buchi neri è senza dubbio l'esistenza di singolarità spaziotemporali. Consideriamo uno di questi corpi, ed assumiamo che sia statico nel tempo e dotato di simmetria sferica. Detta M la sua massa totale, utilizziamo delle coordinate polari standard $\{t, r, \theta, \phi\}$ ponendo l'origine del sistema di riferimento al centro del corpo in questione. Sappiamo allora che la geometria dello spaziotempo all'esterno di esso sarà descritta dalla metrica di Schwarzschild (1.15). Per un valore della coordinata radiale pari a $r = R_H =: 2M$ (detto raggio di Schwarzschild) si ha la formazione di una superficie di tipo luce, comunemente nota come *orizzonte degli eventi*: essa può essere intuitivamente pensata come il "bordo" del buco nero, dall'interno del quale nessuna informazione può uscire. In effetti, basta guardare la (1.15) per capire che $r = R_H$ è una superficie particolare: nel sistema di coordinate utilizzato, la componente temporale della metrica si annulla, mentre quella radiale diverge. Inoltre, studiando le equazioni del moto di un ipotetico osservatore in caduta radiale libera, dall'infinito spaziale verso il buco nero, è facile mostrare che la quantità⁴ $dt/d\tau$ diverge mano a mano che ci si avvicina verso tale orizzonte. Tuttavia ciò non è particolarmente significativo; infatti, a priori, t è una semplice coordinata geometrica, introdotta per descrivere lo spaziotempo come varietà quadridimensionale. Essa rappresenta effettivamente la misura di un intervallo temporale solo per un osservatore posto a distanza $r \gg R_H$, per il quale, grazie alla proprietà di piattezza asintotica del tensore metrico, la geometria è approssimabile con quella di Minkowski. L'osservatore in caduta radiale libera infatti, non rivelerebbe alcuna anomalia nella misura del tempo proprio τ e supererebbe l'orizzonte degli eventi senza problemi. Per questo motivo la superficie $r = R_H$ è comunemente chiamata *singolarità rimovibile* o *apparente*, in quanto può essere eliminata tramite la scelta di un diverso sistema di coordinate (come, ad esempio, le coordinate di Eddington-Finkelstein). Un secondo indicatore del fatto che l'orizzonte non rappresenta una *singolarità reale* è lo scalare di Kretschmann, una grandezza che si ottiene come

⁴Si noti che t è la coordinata geometrica di tipo tempo, mentre τ rappresenta il tempo proprio misurato dall'osservatore in caduta, ed usato per parametrizzare la curva geodetica percorsa da esso.

contrazione del tensore di Riemann. Esso misura la deviazione geodetica, cioè quantifica la curvatura in un dato punto dello spaziotempo ed essendo uno scalare, per definizione assume lo stesso valore in tutti i sistemi di riferimento. Nel caso a simmetria sferica che stiamo studiando, esso risulta essere: [4]

$$K =: R^{abcd}R_{abcd} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (1.28)$$

da cui appare chiaro che per $r = R_H = 2M$ non si hanno problemi. L'unica singolarità reale, non rimovibile tramite un cambio di coordinate, si ha invece per $r = 0$, ovvero nel centro del buco nero. Solo per questo valore della coordinata radiale si ha la divergenza della quantità $dr/d\tau$. In tale punto infatti anche lo scalare di Kretschmann diverge e, almeno secondo la teoria relativistica, si dovrebbe avere una densità di energia infinita. Quest'ultima affermazione è tutt'oggi molto dibattuta, in quanto non è accettabile da un punto di vista quantistico.

All'inizio del XX secolo, la teoria classica dell'elettromagnetismo prevedeva che un elettrone in rotazione attorno ad un nucleo dovesse in breve tempo collassare su di esso, il che renderebbe impossibile l'esistenza dell'universo come lo conosciamo. Fu necessaria la meccanica quantistica, per ottenere una descrizione soddisfacente dei fenomeni che avvengono su scale spaziali così piccole. Allo stesso modo, ci si aspetterebbe che degli effetti quantistici impediscano il collasso gravitazionale oltre un certo limite, prevenendo la formazione di singolarità reali; tuttavia, almeno per il momento, non possediamo una teoria quantistica della gravità, capace di descrivere la fisica che si cela all'interno di un buco nero. Inoltre, sembrerebbe che le singolarità spaziotemporali siano sempre racchiuse all'interno di un orizzonte, e dunque inaccessibili ad un osservatore esterno. Questa impossibilità di osservare singolarità *nude* (cioè non protette da un orizzonte) è l'essenza della cosiddetta *ipotesi di censura cosmica debole*, formulata per la prima volta da Roger Penrose nel 1969. Al livello di conoscenza attuale, dunque, il problema delle singolarità e degli orizzonti rimane uno dei misteri più rilevanti della fisica contemporanea.

Una seconda difficoltà che scaturisce dal modello classico dei buchi neri è rappresentata dalla conservazione dell'informazione fisica. Nel corso degli anni, è stato dimostrato un teorema, denominato *no hair*, il quale afferma che un buco nero può essere descritto in maniera completa da tre soli parametri: la massa, il momento angolare (intrinseco) e la carica elettrica⁵. Ciò significa che un buco nero descritto dalla metrica di Kerr-Newman rappresenta il caso più generale possibile. Supponiamo ora di conoscere, ad un certo istante di tempo, tutte le informazioni possibili riguardanti un certo oggetto, diciamo una stella. Saranno dunque noti la sua massa, la composizione chimica, il momento angolare, l'età, l'interazione tra le sue componenti, ecc. Supponiamo inoltre che tale stella sia sufficientemente massiva da dover affrontare un collasso gravitazionale che la porti

⁵La validità di questo teorema è dibattuta. Esistono numerosi studi di buchi neri con ulteriori "capelli", cioè che possiedono altre caratteristiche identificative, in aggiunta alle tre sopra citate.

allo stadio di buco nero. In tal caso, tutte le informazioni riguardanti la stella andrebbero irreversibilmente perse in seguito al collasso, ad eccezione dei tre parametri citati.

Almeno in linea di principio e da un punto di vista classico, le leggi che utilizziamo per descrivere i fenomeni dovrebbero permetterci di risalire ad uno stato precedente di un corpo, a patto di conoscere con sufficiente precisione il suo stato attuale. Se invece ci trovassimo di fronte ad un buco nero di cui conoscessimo massa, carica elettrica e momento angolare, non potremmo in nessun modo risalire alla stella che l'ha originato, in quanto l'informazione fisica su di essa non viene conservata nel buco nero, ma va irrimediabilmente persa. Un ragionamento analogo si può fare nel caso in cui immaginassimo di gettare un oggetto all'interno del buco nero: esso sprofonderebbe sino a raggiungere l'ipotetica singolarità spaziotemporale, e l'universo non conserverebbe alcun "ricordo" di ciò che era stato l'oggetto precedentemente.

Così come per il problema delle singolarità, anche riguardo alla presente questione il dibattito è tutt'oggi aperto, e una buona parte della comunità scientifica ritiene che l'informazione fisica non possa andare persa e che dunque è la nostra descrizione dei buchi neri che vada modificata.

1.4 Utilità dello studio di modelli alternativi

Le osservazioni astronomiche non forniscono prove determinanti del fatto che corpi estremamente massivi, che non emettono radiazione elettromagnetica, siano precisamente buchi neri, così come li descrive la relatività generale. Per quanto ne sappiamo, potrebbe anche trattarsi di oggetti che all'apparenza si comportano proprio come tali, ma la cui descrizione effettiva si discosta (in misura minore o maggiore) dalla teoria che utilizziamo. Abbiamo dunque un certo margine per speculare su cosa effettivamente siano questi corpi celesti che non emettono radiazione, ma dei quali misuriamo i prodigiosi effetti gravitazionali. Sarà poi l'osservazione sperimentale delle loro caratteristiche a confermare, oppure smentire, la validità di modelli alternativi; questa procedura è estremamente utile poiché, anche nel caso in cui il paradigma dei buchi neri venisse ulteriormente confermato, a discapito di approcci diversi, otterremmo comunque una misura della precisione descrittiva della teoria attuale. In altre parole, potremmo quantificare i limiti di eventuali deviazioni dalla relatività generale.

Quanto detto finora, in aggiunta ai problemi affrontati nel paragrafo 1.3, sarebbe già di per sé sufficiente a motivare lo studio di modelli alternativi di oggetti oscuri e compatti; tuttavia, c'è almeno un altro mistero della fisica contemporanea che potrebbe trarre giovamento da questo tipo di ricerche: la materia oscura. Essa non interagisce con il campo elettromagnetico ed è osservabile solo indirettamente, per mezzo dei suoi effetti gravitazionali. Inoltre, secondo i modelli cosmologici attuali, costituirebbe circa il 25% della densità di energia e materia presente nell'universo. Da cosa sia composta tale

materia (ammesso che esista⁶) è un altro degli interrogativi fondamentali della scienza moderna, per risolvere il quale non è sufficiente la fisica del modello standard. Delle ipotesi avanzate in questa direzione sono strettamente collegate alla descrizione di corpi celesti oscuri e compatti. Infatti, è possibile che la materia oscura sia formata da particelle esotiche, diverse da quelle finora trovate sperimentalmente, e che tali particelle si aggregino a causa della reciproca attrazione gravitazionale. In questo modo andrebbero a formare corpi celesti che appaiono neri, proprio come quelli che ci proponiamo di analizzare in questo lavoro. È dunque ragionevole pensare che lo studio teorico di oggetti esotici compatti (ECOs⁷) possa fornire informazioni utili per risolvere l'enigma legato alla materia oscura (si veda ad esempio [5]).

Nel seguente capitolo verranno studiate alcune proprietà generali degli ECOs a simmetria sferica, basandosi sul loro "grado di somiglianza" ad un buco nero e senza indagare la natura della materia che li compone.

⁶Sono stati elaborati modelli che propongono una spiegazione degli effetti gravitazionali osservati senza l'utilizzo della materia oscura; l'idea alla loro base è lo sviluppo di una teoria alternativa della gravitazione. Il tentativo più valido in questo senso è probabilmente la cosiddetta *Modified Newtonian Dynamics* (MOND).

⁷Dall'inglese *Exotic Compact Objects*.

Capitolo 2

Proprietà di ECOs stazionari

2.1 Il parametro di somiglianza ϵ

In questa sezione, ci proponiamo di quantificare matematicamente la somiglianza tra un ECO e un buco nero. Però, prima di fare ciò, è bene chiarire alcune caratteristiche degli oggetti che ci accingiamo a studiare. Ogni volta che si parlerà di ECOs, si intenderanno corpi massivi, oscuri e compatti, che non emettono radiazione elettromagnetica, ma che non presentano alcun orizzonte, a differenza dei buchi neri. Non specificheremo da cosa siano composti, né indagheremo quali siano i meccanismi che regolano l'equilibrio gravitazionale, evitando così un ulteriore collasso. Potremo dunque utilizzare il concetto di superficie di un ECO, pur con le dovute precauzioni, dettate dalla nostra ignoranza riguardo alla composizione interna di questi oggetti⁸.

Vogliamo ora introdurre un *parametro di somiglianza* ϵ , tale per cui, nel limite in cui $\epsilon \rightarrow 0$, ci riduciamo al caso di un buco nero di Schwarzschild. La scelta su come definire questa grandezza non è univoca ed anche in letteratura sono presenti diversi approcci; tuttavia, i risultati finali che si ottengono non dipendono dal particolare modo in cui si sceglie questo parametro. Nel presente studio, utilizzeremo la seguente definizione, suggerita da V. Cardoso e P. Pani per i corpi a simmetria sferica (si veda [6]):

$$r_0 = 2M(1 + \epsilon). \quad (2.1)$$

Ci occuperemo perciò di oggetti che presentano una superficie sferica ad $r = r_0$. È immediato vedere che per $\epsilon \rightarrow 0$ si ha $r_0 = 2M = R_H$, dunque si ritrova un buco nero di Schwarzschild, come richiesto. La compattezza di un ECO, definita come il rapporto

⁸Infatti, esistono anche modelli nei quali la densità di materia cala con continuità, mentre ci si allontana dal centro del corpo, il che non permette di parlare di superficie in senso stretto. È comunque possibile definire una *superficie efficace* come, ad esempio, la sfera che contiene il 90% della massa totale. Un esempio molto studiato di corpi che mostrano questa caratteristica è dato dalle cosiddette *boson stars*.

tra la sua massa ed il raggio, è quindi esprimibile come segue:

$$C =: \frac{M}{r_0} = \frac{1}{2(1+\epsilon)} \simeq \frac{1}{2}(1-\epsilon) \quad (2.2)$$

dove l'ultimo passaggio è valido solo se $\epsilon \ll 1$.

A seconda del contesto, può essere utile considerare diversi valori di questo parametro. Infatti, nel caso in cui si vogliano approfondire teorie quantistiche della gravità, buchi neri, oppure proprietà degli orizzonti, sarà utile studiare il caso in cui $\epsilon \ll 1$. Invece, per oggetti composti da materia oscura ad esempio, ϵ assume valori dell'ordine dell'unità⁹. Lo studio di questa quantità, oltre ad implementare l'analisi di oggetti alternativi ai buchi neri, potrebbe aiutarci a comprendere meglio le proprietà dei buchi neri stessi, tramite lo studio del limite $\epsilon \rightarrow 0$. Infine, se ci si volesse confrontare con un contesto dinamico, ϵ potrebbe dipendere dal tempo, senza essere fissato a priori. Tuttavia, nei prossimi paragrafi ci limiteremo al caso di ECOs in uno stato di equilibrio, ovvero stazionari.

2.2 Orbite circolari e sfere di fotoni

Consideriamo dunque un ECO di massa M , a simmetria sferica. Assumiamo inoltre che almeno la regione all'esterno dell'ECO sia ben descritta dalla relatività generale. Vale allora la seguente proposizione [7]:

Teorema di Birkhoff. *Una soluzione delle equazioni di campo nel vuoto, se è a simmetria sferica, dev'essere necessariamente statica all'esterno della sorgente.*

Questo ci assicura l'esistenza dei quattro vettori di Killing già visti, corrispondenti alle rotazioni ed alla staticità. Possiamo allora affermare che la geometria, all'esterno dell'ECO, è descritta dalla metrica di Schwarzschild (1.15), proprio come nel caso di un buco nero che presenti le stesse simmetrie del tensore metrico.

Vogliamo allora ricavare le equazioni del moto geodetico di una particella di prova, soggetta al solo campo gravitazionale prodotto dall'ECO. A tal scopo, si consideri la seguente azione, parametrizzata tramite il tempo proprio della particella τ [1]:

$$S(x^\mu(\tau)) = m \int_0^\tau \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau' \equiv m \int_0^\tau \sqrt{2L} d\tau'. \quad (2.3)$$

$g_{\mu\nu}$ è il tensore metrico, m è la massa della particella¹⁰ ed il punto indica la derivazione rispetto a τ . Per la metrica (1.15) si ha:

$$2L = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \left(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\phi}^2\right) = -\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu = 1. \quad (2.4)$$

⁹Anche le già citate *boson stars*, nonché le stelle di neutroni, presentano questo stesso ordine di grandezza di ϵ .

¹⁰Se si volesse considerare una particella non massiva (ad esempio un fotone) non sarebbe possibile parametrizzare la geodetica tramite un tempo proprio (vedi in seguito).

Utilizzando il principio di minima azione (imponendo cioè $\delta S = 0$) si ottengono le ben note equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}. \quad (2.5)$$

Notando che L non dipende né da t né da ϕ , il teorema di Noether ci garantisce l'esistenza dei seguenti integrali del moto:

$$\mathcal{E} = m \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{t}} \right) = m \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} \quad (2.6)$$

$$J = -m \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}. \quad (2.7)$$

\mathcal{E} , nel limite asintotico di campo debole ($r \gg 2M$, $\dot{t} \rightarrow 1$) si riduce alla massa della particella di prova; inoltre, se poniamo¹¹ $\theta = \pi/2$, J rappresenta la proiezione del momento angolare sull'asse z , il quale definisce l'angolo ϕ . Invertendo la (2.6) e la (2.7) si ottengono delle espressioni per \dot{t} e $\dot{\phi}$ le quali, inserite nella (2.4), conducono alla seguente equazione per \dot{r} (avendo posto $\theta = \pi/2$, si ha che $\dot{\theta} = 0$):

$$\dot{r}^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{m^2} - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{J^2}{m^2 r^2} + 1 \right) \equiv \frac{\mathcal{E}^2}{m^2} - V_{eff}(r) \quad (2.8)$$

dove è stato introdotto il potenziale efficace $V_{eff}(r)$.

Grazie a questo risultato, possiamo ora studiare l'esistenza e la stabilità di orbite chiuse, in particolare di orbite circolari [8]. Derivando la (2.8) rispetto a r e dividendo per \dot{r} si ottiene:

$$2\dot{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{m^2} - V_{eff}(r) \right). \quad (2.9)$$

Le condizioni per l'esistenza di orbite circolari sono: $\dot{r} = 0$, che implica $r = r_c = const$, e $\ddot{r} = 0$. Quindi dalla (2.9) segue (ricordiamo che \mathcal{E} è costante):

$$\frac{dV_{eff}(r)}{dr} = 0 \quad \implies \quad r_c^2 - \frac{J^2}{Mm^2} r_c + \frac{3J^2}{m^2} = 0. \quad (2.10)$$

La soluzione di questa equazione di secondo grado in r_c risulta essere:

$$r_{c\pm} = \frac{J^2}{2Mm^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2 m^2}{J^2}} \right). \quad (2.11)$$

¹¹È sempre possibile effettuare tale scelta, in quanto la simmetria sferica permette di orientare gli assi in maniera arbitraria.

Nella (2.11) il segno $+$ corrisponde ad un minimo del potenziale (quindi le relative orbite circolari sono stabili); invece r_{c-} è un punto di massimo di V_{eff} , per cui le corrispondenti orbite circolari sono instabili. Inoltre, il momento angolare J funge da parametro, variando il quale si ottiene una famiglia di orbite stabili o instabili, a seconda dei casi. Vogliamo ora conoscere il minimo valore di r per cui si ha ancora un'orbita circolare stabile (essa viene solitamente indicata con l'acronimo *ISCO*, dall'inglese *Innermost Stable Circular Orbit*). È chiaro che r_c ha valori reali solo per $J/m \geq 2\sqrt{3}M$, e si può mostrare che la ISCO corrisponde al valore di J che satura questo limite. Quindi l'orbita circolare stabile più vicina all'ECO si ha per $J_{ISCO} = 2\sqrt{3}Mm$, cioè per un valore della coordinata radiale pari a $r_{ISCO} = 6M$. La presenza di questa orbita limite gioca un ruolo importante nello studio dei dischi di accrescimento che possono circondare un ECO, e tali processi di assorbimento sono attualmente molto studiati, in quanto possono mostrare caratteristiche diverse a seconda dell'oggetto compatto in questione. L'osservazione sperimentale dei dischi di accrescimento, quindi, potrebbe fornire informazioni sulla natura della sorgente gravitazionale e fungere da discriminante per i vari modelli teorici.

Un'altra proprietà interessante degli oggetti compatti è l'esistenza di curve geodetiche chiuse di tipo luce. Vogliamo dunque studiare l'esistenza e stabilità di orbite circolari per delle particelle non massive (tipicamente fotoni). Per fare ciò, possiamo ripercorrere il ragionamento già visto per le geodetiche di tipo tempo, applicando le opportune modifiche. La curva non può più essere parametrizzata tramite un tempo proprio, il quale non è definito, quindi utilizzeremo il parametro affine λ , che definisce la curva; inoltre nell'espressione dell'azione (2.3) non comparirà la massa m . La (2.4) assume quindi la seguente forma:

$$2L_{(l)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left[\left(\frac{d\theta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 \right] = 0 \quad (2.12)$$

dove il pedice (l) indica che stiamo trattando curve di tipo luce. Le espressioni per \mathcal{E} e J diventano rispettivamente:

$$\mathcal{E}_{(l)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (2.13)$$

$$J_{(l)} = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right). \quad (2.14)$$

La (2.8) rimane invece formalmente identica, con la differenza che il potenziale efficace è definito in maniera leggermente diversa:

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \mathcal{E}_{(l)}^2 - V_{eff(l)}(r) = \mathcal{E}_{(l)}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{J_{(l)}^2}{r^2}. \quad (2.15)$$

Con un ragionamento analogo a quello già esposto sopra, si ottiene la seguente condizione per le orbite circolari di tipo luce:

$$\frac{dV_{eff(l)}(r)}{dr} = 0 \quad \implies \quad r_{PS} = 3M. \quad (2.16)$$

Questo valore della coordinata radiale definisce una superficie detta *sfera di fotoni*¹², oppure, se si considera una sezione equatoriale, *anello di luce*. r_{PS} è però un punto di massimo del potenziale efficace, quindi le orbite situate su questa superficie sono instabili. Infatti:

$$\left. \frac{d^2V_{eff(l)}(r)}{dr^2} \right|_{r=3M} = \frac{-2J_{(l)}^2}{81M^4} < 0. \quad (2.17)$$

Inoltre, è possibile dimostrare la seguente affermazione: se la traiettoria di un fotone si discosta di una piccola quantità δ dall'anello di luce, ad esempio a causa di una perturbazione esterna, allora tale spostamento cresce esponenzialmente nel tempo (coordinato) con il seguente andamento [9]:

$$\delta(t) \sim \delta_0 e^{\lambda t}, \quad \lambda = \frac{1}{3\sqrt{3}M}. \quad (2.18)$$

A questo punto, è bene notare che i risultati ottenuti finora si basano su una sola ipotesi: che la geometria dello spaziotempo sia descritta dalla metrica di Schwarzschild. Ciò significa che i ragionamenti fin qui fatti hanno una valenza generale, e prescindono dalla natura della sorgente gravitazionale, per la quale richiediamo unicamente la simmetria sferica¹³.

Una peculiarità degli ECOs, assente nei buchi neri, è la presenza di una seconda sfera di fotoni. Al contrario della precedente, questa è stabile e tipicamente si trova all'interno dell'oggetto compatto [10]. In tale regione, il tensore energia-impulso non è nullo, quindi non possiamo più utilizzare la soluzione di Schwarzschild, che è una soluzione di vuoto. Tuttavia continuano a valere le simmetrie già discusse in precedenza, dunque la metrica assumerà la forma più generale (1.11). Per un corpo regolare (cioè che non presenti singolarità né orizzonti) le funzioni $A(r)$ e $B(r)$ sono positive e non cambiano mai segno; inoltre assumono un valore finito nell'origine. Si può mostrare che in queste condizioni il potenziale efficace, per curve di tipo luce, è dato da:

$$V_{eff(l)}(r) = J_{(l)}^2 \frac{A(r)}{r^2}. \quad (2.19)$$

Siccome esso diverge ed è positivo in $r = 0$, ma presenta anche un massimo locale in $r = r_{PS} = 3M$, deve esistere necessariamente un minimo locale, e quindi un secondo anello di luce, più interno del precedente e stabile.

¹²Da cui il pedice *PS*, che sta per *Photon Sphere*.

¹³Quindi la precedente trattazione resta valida anche nel caso di un buco nero.

La sfera di fotoni ha una notevole utilità nella descrizione di come gli oggetti compatti (ed i buchi neri non fanno eccezione) ci appaiono, quando vengono illuminati da dischi di accrescimento o da sorgenti di luce. Questa caratteristica ci aiuta quindi a definire l'*ombra* di un ECO o di un buco nero, come vedremo nel prossimo paragrafo. Le proprietà degli oggetti esotici compatti fin qui discusse sono illustrate in figura 2.1.

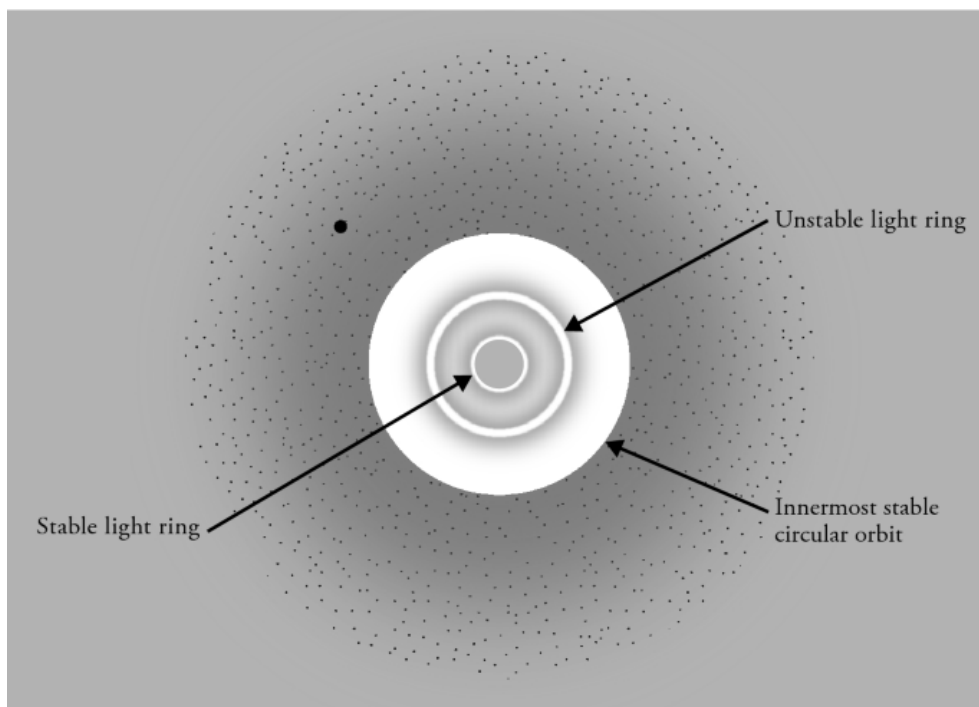


Figura 2.1: Sezione equatoriale di un ECO, con orbite geodetiche circolari. Il punto nero in alto a sinistra rappresenta un satellite, che può percorrere orbite stabili in tutta la regione grigia, fino alla ISCO, situata ad $r = 6M$. Sono anche raffigurati l'anello di luce instabile, posto a $r = 3m$, e quello più interno, stabile. Quest'ultimo è tipico di oggetti compatti privi di orizzonte (fonte: [6]).

2.3 Traiettorie di fuga ed ombra di oggetti compatti

Vogliamo ora approfondire due ulteriori caratteristiche degli oggetti compatti, che hanno attinenza con le sfere di fotoni analizzate nel paragrafo 2.2. Per prima cosa, ci chiediamo quali siano le condizioni in cui un fotone può fuggire dall'ECO. In secondo luogo, vogliamo determinare l'*ombra* di un oggetto compatto. L'osservazione di un ECO (o di un buco nero) può avvenire solo per contrasto: una sorgente che illumini l'oggetto

"da dietro" (rispetto alla posizione dell'osservatore) permette di vedere i contorni del corpo, i quali definiscono appunto la sua ombra.

Cominciamo con l'introduzione di una nuova quantità, detta *parametro d'impatto*, definita come il rapporto tra i due integrali del moto di una geodetica di tipo luce [3]:

$$b =: \frac{J_{(l)}}{\mathcal{E}_{(l)}}. \quad (2.20)$$

La linea di mondo di una particella non massiva non dipende da $J_{(l)}$ e da $\mathcal{E}_{(l)}$ in maniera separata, ma solo dal loro rapporto b ; da ciò deriva l'utilità di questa grandezza. Consideriamo ora l'equazione (2.15) e dividiamola per $J_{(l)}^2$. Riparametrizzando la curva tramite una nuova quantità $\mu =: \lambda J_{(l)}$ si ottiene:

$$\left(\frac{dr}{d\mu}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{r^2}. \quad (2.21)$$

Sappiamo che la sfera di fotoni instabile si ha per $r_{PS} = 3M$, dove il potenziale efficace ha un massimo locale. Possiamo allora ricavare il corrispondente valore critico del parametro d'impatto, ponendo $dr/d\mu = 0$ e $r = 3M$, che conduce a:

$$b_{crit} = 3\sqrt{3}M. \quad (2.22)$$

Intuitivamente, il parametro d'impatto indica quanto un fotone passi vicino alla sorgente gravitazionale. Se $b > b_{crit}$, la direzione di propagazione del raggio di luce viene deviata, ma l'orbita è aperta e il fotone prosegue verso l'infinito spaziale (è il cosiddetto effetto di *lente gravitazionale*). Se $b = b_{crit}$, allora il fotone viene catturato dall'ECO, ed inizia ad orbitare esattamente lungo la prima sfera di fotoni instabile. Infine, se $b < b_{crit}$, la luce verosimilmente tratterà una spirale attorno all'ECO per poi venirne assorbita. Si noti che il caso limite $b = 0$ corrisponde ad un valore nullo del momento angolare $J_{(l)}$; ciò significa che, come ci si aspetta, il fotone segue una geodetica radiale e punta dritto verso il centro del corpo. La casistica appena elencata è riportata nelle figure 2.2 e 2.3.

Vogliamo ora approfondire le caratteristiche dell'ombra di un ECO. Esse sono di notevole utilità, in quanto forniscono delle previsioni teoriche, da poter confrontare con le osservazioni sperimentali. Ciò permette di confutare, o al contrario, di rafforzare, modelli e paradigmi, come quello dei buchi neri. Consideriamo una sorgente elettromagnetica statica, cioè tale per cui tutte e quattro le sue coordinate rimangono costanti, posta all'esterno dell'oggetto compatto, a $r = r_{em}$. Inoltre, denotiamo con α l'angolo tra la direzione radiale (uscente) e la direzione di propagazione del raggio di luce. Il fotone emesso avrà $|\vec{v}| = 1$ e le componenti della sua velocità saranno date da:

$$v_\phi = \sin \alpha \quad v_r = \cos \alpha \quad (2.23)$$

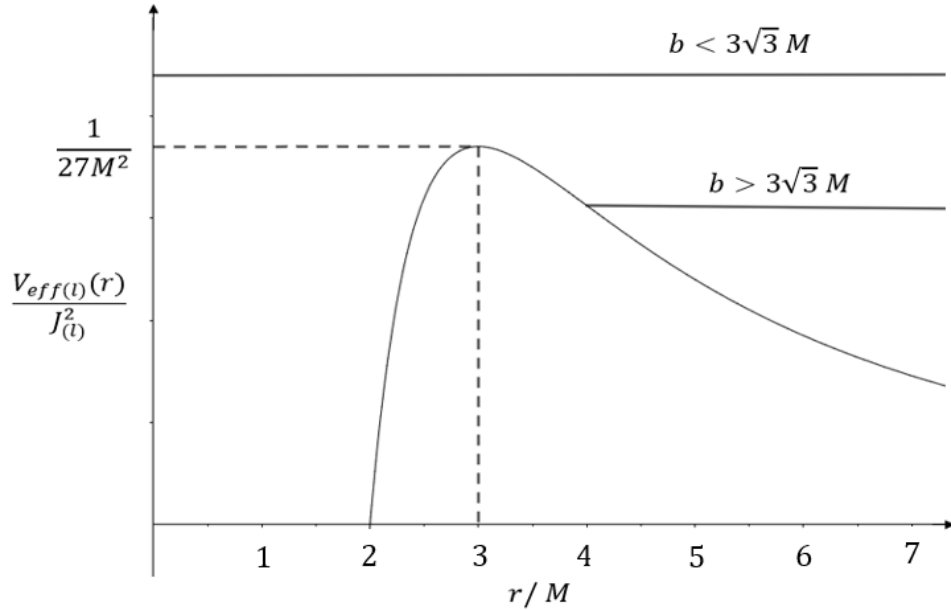


Figura 2.2: Profilo del potenziale efficace (normalizzato per $J_{(l)}^2$) per una geodetica di tipo luce. Esso presenta un massimo in $r = 3M$ (prima sfera di fotoni). Se $b > b_{crit} = 3\sqrt{3}M$, un fotone proveniente da $r = +\infty$ ritorna ad $r = +\infty$. Se $b < b_{crit}$ il fotone prosegue fino ad $r = 0$ e viene inghiottito dall'ECO (fonte: [3]).

(ricordiamo che siamo liberi di orientare gli assi in modo tale da avere $v_\theta = 0$). In particolare si ha [3]:

$$v_\phi = \frac{b}{r_{em}} \left(1 - \frac{2M}{r_{em}} \right)^{1/2}. \quad (2.24)$$

Se sostituiamo $b = b_{crit}$ nella (2.24), otteniamo l'angolo massimo per cui è ancora possibile la fuga del raggio di luce:

$$\sin \alpha_{crit} = \frac{3\sqrt{3}M}{r_{em}} \left(1 - \frac{2M}{r_{em}} \right)^{1/2}. \quad (2.25)$$

Questo valore, in funzione di r_{em} , funge da separatore tra due casi: se $\alpha < \alpha_{crit}$, l'impulso luminoso raggiungerà l'infinito spaziale; se $\alpha > \alpha_{crit}$ esso verrà assorbito dall'ECO; infine se $\alpha = \alpha_{crit}$ il raggio di luce rimarrà vincolato alla sfera di fotoni. Il seguente esempio è abbastanza intuitivo: per un fotone emesso da $r = r_{PS} = 3M$, si ha $\alpha_{crit} = \pi/2$. Ciò significa che un impulso elettromagnetico che parta dalla sfera di fotoni, con velocità iniziale tangente ad essa, rimarrà vincolato sulla sfera. Altrimenti, se la componente radiale della velocità è positiva, esso riuscirà a fuggire; se invece v_r è negativa, finirà con il cadere sulla superficie (eventuale) dell'ECO.

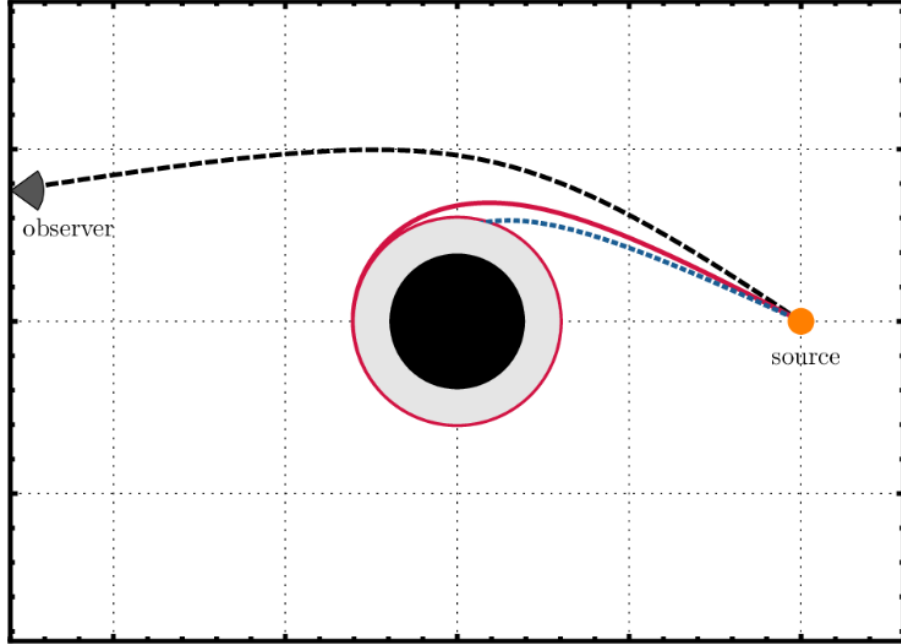


Figura 2.3: Una sorgente emette raggi luminosi che interagiscono con il campo gravitazionale di un oggetto compatto e oscuro. I fotoni con un elevato parametro d’impatto (linea nera tratteggiata) giungono all’osservatore dopo essere stati deflessi (effetto di lente gravitazionale). Quelli con $b = b_{crit}$ (linea rossa) rimangono intrappolati sulla sfera di fotoni e compiono orbite circolari. Infine, quelli con un basso parametro d’impatto (linea blu tratteggiata) cadono dentro all’ECO (fonte: [6]).

Se ora consideriamo della luce emessa a partire dalla superficie di un ECO, possiamo esprimere l’angolo critico in funzione del parametro di somiglianza ϵ . Basta sostituire la (2.1) nella (2.25) e si ottiene:

$$\sin \alpha_{crit} = \frac{3\sqrt{3}}{2(1+\epsilon)} \left(1 - \frac{1}{1+\epsilon}\right)^{1/2}. \quad (2.26)$$

Volendo studiare il limite $\epsilon \rightarrow 0$, utilizziamo la seguente espansione in serie di Taylor: $(1+\epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon + O(\epsilon^2)$. Inoltre, siccome $\epsilon \rightarrow 0$ implica $\sin \alpha_{crit} \rightarrow 0$, possiamo utilizzare l’approssimazione $\sin \alpha_{crit} \simeq \alpha_{crit}$. Sostituendo nella (2.26) si ottiene:

$$\alpha_{crit} \simeq \frac{3\sqrt{3}}{2} (1 - \epsilon) \sqrt{\epsilon} \quad (\epsilon \rightarrow 0^+). \quad (2.27)$$

Alcune traiettorie critiche di fuga sono rappresentate graficamente in figura 2.4.

Dai ragionamenti fin qui esposti si possono trarre le seguenti conclusioni: per un ECO con parametro di somiglianza abbastanza piccolo, parte della luce che giunge da

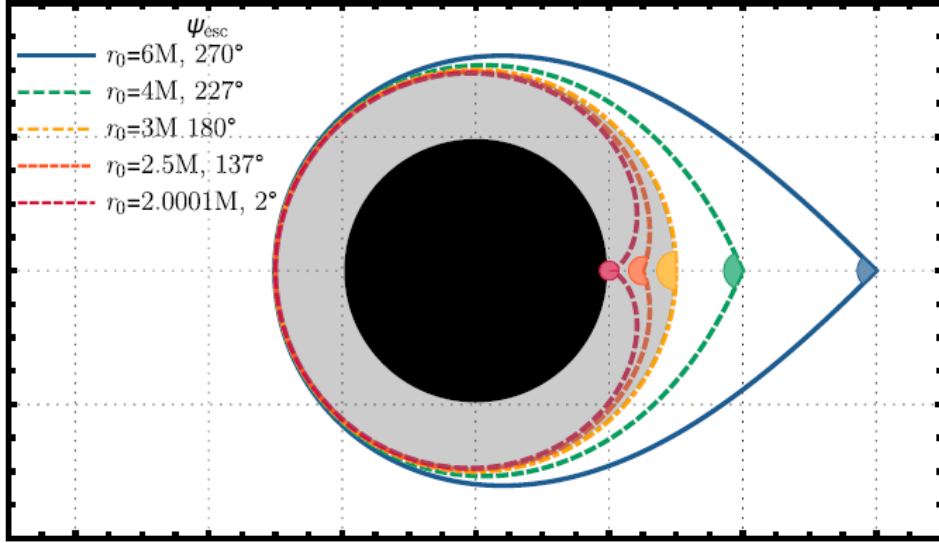


Figura 2.4: Alcune traiettorie di fuga di raggi luminosi. Il cerchio nero centrale corrisponde ad $r = 2M$, cioè alla "zona di buco nero", mentre l'area grigia delimita la sfera di fotoni ad $r = 3M$. Quello che in legenda è indicato come ψ_{esc} corrisponde a $2\alpha_{crit}$. Per ogni valore di r_0 , i raggi luminosi emessi all'interno dell'area colorata "a goccia" vengono assorbiti dall'ECO (fonte: [6]).

dietro viene assorbita, o intrappolata nella sfera di fotoni, cosicché un osservatore vede un vero e proprio "buco" nel cielo, di raggio $r_0 = 3\sqrt{3}M$ (che corrisponde al valore critico del parametro d'impatto). Ciò significa che l'ombra di un ECO può essere molto simile a quella di un buco nero. Inoltre, la radiazione emessa nelle vicinanze della superficie (causata per esempio da un disco di accrescimento) può raggiungere l'infinito spaziale solo se emessa ad un angolo minore di α_{crit} il quale, nel limite in cui $\epsilon \rightarrow 0$, va a zero come $\alpha_{crit} \sim \sqrt{\epsilon}$. Quindi, almeno tramite l'osservazione dei dischi di accrescimento, è molto difficile distinguere un ECO estremamente compatto ($\epsilon \ll 1$) da un buco nero.

Per concludere, è bene ricordare che gli studi sull'ombra di oggetti compatti sono di grande attualità: recentemente sono state ottenute le prime immagini dell'ombra di un presunto buco nero supermassiccio, noto con il nome di M87. Queste immagini (fittizie, in quanto l'osservazione è avvenuta in banda radio) sono state ottenute dalla *Event Horizon Telescope Collaboration*; una di esse è riportata in figura 2.5.

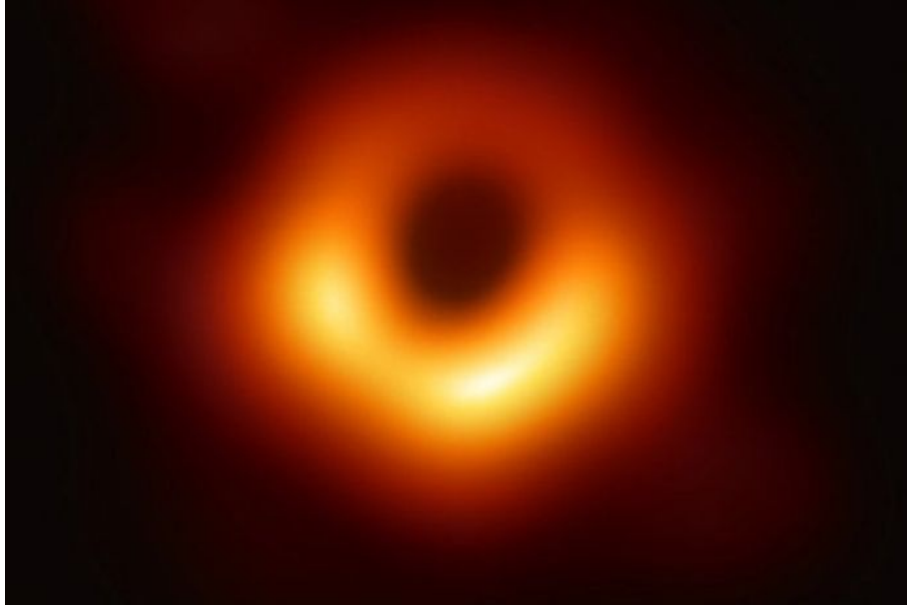


Figura 2.5: Una delle prime immagini dell'ombra di un presunto buco nero supermassiccio, denominato M87 (immagine ottenuta tramite l'osservazione in banda radio). L'emissione elettromagnetica è dovuta al disco di accrescimento che circonda l'oggetto (fonte: [11]).

2.4 Cenni sull'instabilità gravitazionale

Il modello degli ECOs di cui stiamo trattando si basa attualmente su delle supposizioni teoriche, piuttosto che su osservazioni astronomiche. Tuttavia, per dare delle basi di plausibilità a queste supposizioni, è necessario richiedere almeno una fondamentale caratteristica per questi corpi: la stabilità gravitazionale. Per affrontare questo argomento, è necessario esporre due affermazioni che solitamente vengono assunte come valide, nell'ambito della relatività generale. La prima di esse è nota in letteratura come "*null energy condition*"; essa richiede che in ogni punto dello spaziotempo valga la seguente disuguaglianza [12]:

$$T_{\mu\nu}v^\mu v^\nu \geq 0 \quad (2.28)$$

per ogni quadri-vettore di tipo luce v^μ . Intuitivamente, ciò equivale a chiedere la positività (locale) della densità di energia. L'importanza della (2.28) risiede, oltre che nella sua ragionevolezza, nel ruolo che svolge in alcuni importanti teoremi della relatività, riguardanti i buchi neri e la cosmologia. La seconda proposizione che ci interessa è detta "*congettura del cerchio*" (in inglese *hoop conjecture*). Essa afferma che: un orizzonte si forma se e solo se una massa M viene racchiusa all'interno di una regione la cui circonferenza C , in ogni direzione, soddisfa $C \leq 4\pi M$ [13]. Formulata inizialmente da K.

Thorne, essa è stata verificata in numerosi contesti fisici, in particolare nel caso di corpi statici e a simmetria sferica. Per questi ultimi, la precedente disuguaglianza è saturata dal raggio di Schwarzschild, infatti: $C = 2\pi r \Rightarrow r \leq 2M = R_H$.

In questo paragrafo vogliamo accennare al seguente fatto: gli ECOs la cui superficie dista dall'orizzonte di una quantità infinitesima, dell'ordine della lunghezza di Planck¹⁴, risultano instabili e sono forzati a collassare in un buco nero in seguito all'assorbimento di materia; in alternativa, essi devono essere esenti dalla congettura del cerchio, il che implica una violazione della *null energy condition* [14]. Questa affermazione è valida da un punto di vista "classico", il che significa che potrebbe essere smentita all'interno di una ipotetica teoria quantistica della gravità, tuttavia ancora sconosciuta.

Consideriamo allora un ECO di massa iniziale M_0 , immerso in un mezzo il quale, venendo continuamente assorbito, va ad aumentare la sua massa. Supponiamo inoltre che il raggio del corpo rimanga approssimativamente costante durante il processo di assorbimento¹⁵ ($\dot{r}_0 \simeq 0$). Se il tasso di accrescimento \dot{M} è costante e abbastanza piccolo (il che verrà verificato a posteriori), allora la massa acquistata durante un intervallo di tempo T sarà circa $\delta M = M - M_0 = \dot{M}T$. Se questa quantità supera una certa soglia, allora l'oggetto sarà forzato a collassare in un buco nero, a causa della congettura del cerchio. Affinché ciò non accada, deve valere la seguente condizione:

$$r_0 = R_H(M_0) + \delta R > R_H(M_0 + \delta M) \quad (2.29)$$

dove $R_H(X) = 2X$ è il raggio di Schwarzschild calcolato per un buco nero di massa X e δR è la distanza della superficie dell'ECO da esso. Notiamo che δr è legato al parametro di somiglianza dalla relazione $\delta r = 2M_0\epsilon$, per cui si può usare indifferentemente l'uno o l'altro. Dalla (2.29) si ottiene la seguente condizione:

$$2M_0 + \delta R > 2(M_0 + \delta M) \quad \implies \quad \delta R > 2\delta M. \quad (2.30)$$

Quindi, volendo ottenere un limite inferiore per δr , dovremo prima ricavare il tasso di accrescimento \dot{M} e poi formulare un stima ragionevole di T . Senza dimostrarlo, riportiamo un utile risultato che fornisce un'espressione per \dot{M} . La seguente formula, ricavata da H. Bondi, F. Hoyle e R. Lyttleton, è valida per un corpo statico, a simmetria sferica e completamente immerso in un mezzo, diciamo una nube di gas:

$$\dot{M} = \frac{4\pi G_N^2 M_0^2 \rho}{(c_s^2 + v_\infty^2)^{3/2}}. \quad (2.31)$$

G_N è la costante gravitazionale di Newton, ρ è la densità del mezzo (assunta costante), c_s è la velocità del suono nel mezzo e v_∞ rappresenta la velocità relativa tra l'oggetto e

¹⁴Ricordiamo che la lunghezza di Planck è definita come: $\ell_P = \sqrt{\hbar G_N / c^3} \simeq 1.6 \times 10^{-35} \text{ m}$.

¹⁵Ciò trova riscontro con diverse tipologie di ECOs, le quali presentano una superficie rigida, come ad esempio le *gravastars*.

il materiale asintoticamente distante da esso. Se ad esempio consideriamo un ECO di massa iniziale $M_0 = 10^6 M_\odot$ (M_\odot denota la massa solare), utilizzando i valori relativi ad un gas interstellare (si veda [14]) si ottiene:

$$\dot{M} \sim 10^{-10} \frac{M_\odot}{yr}. \quad (2.32)$$

Per utilizzare una scala temporale sensata, è bene pensare in funzione della nostra capacità di effettuare misure riguardanti questi oggetti. T può essere pensato come il tempo che intercorre tra la formazione dell'ECO ed il momento in cui possiamo ottenere informazioni su esso, tipicamente tramite l'emissione di onde gravitazionali da parte dell'oggetto (dovuta per esempio alla formazione di un sistema binario). Una stima grossolana potrebbe essere $T \sim (10^9 - 10^{10}) yr$, da cui si ottiene: $\delta M = \dot{M}T \sim (0.1 - 1) M_\odot$. Infine, ricordando la condizione (2.30), si ottiene:

$$\delta R \gtrsim (0.1 - 1) km \quad (2.33)$$

che risulta maggiore della lunghezza di Planck di molti ordini di grandezza ($\ell_P \sim 10^{-38} km$).

La (2.33) fa riferimento ad un ECO di $M_0 = 10^6 M_\odot$, ma se invece vogliamo ottenere un risultato più generico, valido per un qualunque valore di M_0 , allora è più utile riferirsi ad ϵ piuttosto che a δR . Lasciando M_0 in forma implicita nella (2.31), si ottiene, al posto della (2.32):

$$\dot{M} \sim 10^{-22} \frac{M_0^2}{M_\odot yr}. \quad (2.34)$$

Sostituendo il valore di T discusso sopra, si ottiene: $\delta M \sim (10^{-13} - 10^{-12}) M_0^2/M_\odot$; siccome $2M_0\epsilon = \delta R > 2\delta M$, si ottiene il seguente limite inferiore sul parametro di somiglianza:

$$\epsilon \gtrsim (10^{-13} - 10^{-12}) \frac{M_0}{M_\odot}. \quad (2.35)$$

I risultati ottenuti pongono un limite sulla compattezza che un ECO può raggiungere senza collassare in un buco nero. Se ammettiamo che la (2.35) possa essere violata, dobbiamo supporre che la congettura del cerchio non si applichi a questa classe di oggetti, ma ciò aprirebbe un'altra questione: si dovrebbe giustificare l'esistenza di materia esotica che violi la *null energy condition* e descriverne il comportamento. La validità dei ragionamenti effettuati rientra tuttavia in un contesto non quantistico della relatività generale, dunque è possibile che una futura teoria quantistico-gravitazionale ci obblighi a dover ritrattare le precedenti affermazioni sotto un nuovo punto di vista. Infine, a titolo puramente informativo, riportiamo che numerosi studi dimostrano il seguente fatto. Il collasso degli ECOs in buchi neri può essere provocato anche dall'assorbimento di onde gravitazionali, oltre che dall'accrescimento di materia.

Capitolo 3

Classificazione degli ECOs

3.1 ECOs "*morbidi*" e "*duri*"

La distinzione dei diversi tipi di ECOs può essere utile in numerosi contesti, ad esempio, laddove si vogliano svolgere studi più mirati, focalizzati su particolari aspetti di questi corpi. Vogliamo allora proporre un primo criterio di classificazione degli oggetti compatti, basato sullo scalare di Kretschmann già incontrato nel primo capitolo [15].

Consideriamo un buco nero di Schwarzschild: tutte le informazioni che possiamo ottenere riguardo alla curvatura indotta da esso provengono necessariamente dall'esterno dell'orizzonte. Perciò limitiamoci a considerare lo spaziotempo al suo esterno. In tal caso, il valore di K è massimo all'orizzonte e, sostituendo $r = R_H = 2M$ nella (1.28), risulta essere:

$$K = \frac{3}{4M^4}. \quad (3.1)$$

In relazione al caso dei buchi neri, possiamo distinguere due classi di oggetti: ECOs *morbidi* e *duri*. Per i primi, la curvatura massima è comparabile con quella dell'orizzonte di un corrispondente buco nero che abbia la stessa massa. In questo caso, la geometria spaziotemporale vicino alla superficie si avvicina con continuità a quella dell'orizzonte di un buco nero, nel limite in cui il parametro di somiglianza tende a zero. Gli ECOs duri, invece, possono sopportare sulla loro superficie una curvatura massima molto maggiore del caso precedente, senza tuttavia collassare. Questo presuppone un meccanismo nascosto altamente energetico, che si opponga alla contrazione gravitazionale e modifichi in maniera significativa la geometria della regione vicina alla superficie.

Un altro aspetto interessante, è la dipendenza della curvatura massima (intesa come massimo valore di K) da ϵ . Un ECO che abbia la superficie molto vicina ad R_H ($\epsilon \rightarrow 0$) potrebbe sempre richiedere un elevato sforzo interno, che si opponga al collasso gravitazionale, cosicché K assume valori molto grandi all'interno, anche se all'esterno la geometria è descritta esattamente dalla metrica di Schwarzschild, anche nei pressi della superficie situata ad $r_0 = 2M(1 + \epsilon)$. In pratica, si potrebbe dire che un ogget-

to compatto può essere duro all'interno e morbido all'esterno. Quindi, secondo questo ragionamento, tutti gli ECOs per i quali $\epsilon \rightarrow 0$ potrebbero risultare duri.

3.2 Classificazione tramite ϵ

Un secondo criterio di classificazione è fornito dal parametro di somiglianza, in relazione al fenomeno della sfera di fotoni (instabile) posta ad $r = 3M$ e discussa nel capitolo 2. Abbiamo già sottolineato quanto sia difficile distinguere, almeno tramite l'osservazione dei moti geodetici della luce, un buco nero da un ECO molto compatto (per il quale $\epsilon \ll 1$); vogliamo dunque fissare, tramite dei ragionamenti qualitativi, dei valori di ϵ che permettano di suddividere gli oggetti compatti in categorie più specifiche [6].

Facendo riferimento all'equazione (2.18) possiamo dire che, dopo una scala temporale di $t \sim 15M$, il numero di fotoni che rimane ad $r = 3M$ è indicativamente il 5% del valore iniziale, per cui è lecito assumere che la sfera di fotoni sia sostanzialmente scomparsa. In altre parole, a causa della sua instabilità, essa si "svuota" e, dopo una certa quantità di tempo coordinato, la sua intensità si riduce drasticamente, fino a svanire del tutto. Questo processo potrebbe però dipendere da ϵ per la seguente motivazione: la luce che lascia la sfera di fotoni per raggiungere la superficie dell'ECO potrebbe "rimbalzare" ad r_0 e tornare a ripopolare l'anello di luce. Se ciò accadesse in un intervallo sufficientemente breve di tempo coordinato, allora si avrebbe una quantità di fotoni sensibilmente maggiore del 5% che orbita nella sfera. Se invece questo rimbalzo richiedesse un tempo coordinato maggiore (il che accade se l'oggetto è estremamente compatto) la dispersione della sfera di fotoni risulterebbe identica a quella di un buco nero, con conseguente impossibilità di distinguere quest'ultimo da un ECO. Questo ragionamento, lungi dall'essere rigoroso, ci porta però a quantificare un valore di ϵ , che permette una seconda classificazione degli oggetti esotici compatti. Richiedere che un fotone impieghi una quantità di tempo coordinato minore di $15M$, per andare da $r = 3M$ alla superficie e poi tornare indietro, è equivalente a imporre la seguente condizione sul parametro di somiglianza:

$$\epsilon \gtrsim \epsilon_{crit} \sim 0.019. \quad (3.2)$$

Grazie a questo risultato, possiamo identificare tre classi di ECOs, facendo riferimento alle strutture della sfera di fotoni e della ISCO.

- *Oggetti con sfera di fotoni vuota (ClePhOs)*: sono corpi estremamente compatti, per i quali $\epsilon \lesssim 0.019$, che corrisponde a $r_0 \lesssim 2.038M$. Per essi la sfera di fotoni instabile, situata ad $r = 3M$, risulta praticamente vuota. Essi sono dei perfetti "imitatori" di buchi neri, data la difficoltà di distinzione tra le due classi di oggetti.

- *Oggetti ultra-compatti (UCOs¹⁶)*: per questi corpi è ancora presente la sfera di fotoni (la quale potrebbe essere popolata) quindi $r_0 < 3M$. Ciò significa che ϵ assume valori nell'intervallo $0.019 \lesssim \epsilon < 0.5$.
- *Oggetti compatti*: sono troppo estesi per possedere una sfera di fotoni, ma presentano comunque una ISCO ad $r = 6M$, il che si traduce in $0.5 < \epsilon < 2$.

Questa classificazione può risultare grossolana, tuttavia, oltre ad essere utilizzata in letteratura, può tornare utile per un primo approccio agli oggetti esotici compatti. Inoltre, accenniamo solamente che nella categoria dei *ClePhOs* rientrano diversi modelli di ECOs, come i *wormholes*, le *gravastars* e *stelle anisotrope* [5].

Sorge spontaneo domandarsi se la restrizione su ϵ che caratterizza i ClePhOs possa andare in contrasto con la condizione (2.35), ricavata nel paragrafo 2.4. Per risolvere la questione, calcoliamo quale dev'essere il limite superiore di M_0 affinché la classificazione sia consistente con quanto detto in precedenza. Dopodiché dovremo verificare se possano esistere o meno corpi che oltrepassano tale limite. Per un ClePhO stabile, il parametro di somiglianza dev'essere compreso nel seguente intervallo:

$$(10^{-13} - 10^{-12}) \frac{M_0}{M_\odot} \lesssim \epsilon \lesssim 10^{-2}. \quad (3.3)$$

Da ciò otteniamo la seguente condizione su M_0 :

$$M_0 \lesssim (10^{10} - 10^{11}) M_\odot. \quad (3.4)$$

Fino ad oggi, il corpo celeste più massivo di cui abbiamo notizia sembra essere il già citato M87 (vedi figura 2.5), per il quale è stimata una massa di circa $(6 - 7) \times 10^9 M_\odot$. Quindi, per quanto i nostri calcoli siano approssimativi, risultano quantomeno coerenti: tutti gli oggetti astrofisici finora osservati possono rientrare in una delle categorie di ECOs esposte sopra, senza tuttavia dover fronteggiare instabilità gravitazionali.

¹⁶Le sigle si riferiscono ai termini inglesi "*Clean Photon Sphere Objects*" e "*Ultra-Compact Objects*".

Conclusioni e prospettive future

Abbiamo ripercorso i tratti principali della relatività generale, affrontando i problemi legati ai buchi neri e prendendo in considerazione l'ipotesi di modelli alternativi, gli ECOs. Abbiamo anche studiato le principali caratteristiche di quest'ultimi: il grado di somiglianza ad un buco nero; le orbite circolari stabili ed instabili (sia per particelle massive che per segnali elettromagnetici); l'ombra proiettata da questi corpi e la loro stabilità gravitazionale. Infine abbiamo proposto due metodi differenti di classificazione degli oggetti esotici compatti.

Dagli studi effettuati, possiamo trarre le seguenti conclusioni. Tramite l'analisi dei segnali elettromagnetici, risulta difficile distinguere un ECO da un buco nero, soprattutto se $\epsilon \ll 1$. Ciò è dovuto alle orbite relative ai due corpi, le quali mostrano proprietà molto simili tra loro. Infatti, sia i buchi neri che gli ECOs presentano una ISCO ad $r = 6M$ ed una sfera di fotoni instabile ad $r = 3M$. Una seconda sfera di fotoni, questa volta stabile, è propria dei soli ECOs, ma solitamente risulta essere confinata al loro interno. Inoltre, un fotone che voglia fuggire dalla superficie di un ECO, deve formare un angolo con la direzione radiale minore di un certo α_{crit} , il quale cala come $\alpha_{crit} \sim \sqrt{\epsilon}$ nel limite in cui $\epsilon \rightarrow 0$. Abbiamo anche mostrato che entrambi i corpi, quando illuminati da dietro rispetto alla posizione dell'osservatore, si presentano come un buco circolare nel cielo, di raggio pari a $r = 3\sqrt{3}M$, che corrisponde al valore critico del parametro d'impatto. Quantomeno, gli ECOs risultano gravitazionalmente stabili, a patto che la loro superficie si trovi ad una distanza dall'orizzonte molto maggiore della lunghezza di Planck. Ciò si traduce in un limite inferiore per il parametro di somiglianza, espresso in funzione della massa M del corpo: $\epsilon \gtrsim (10^{-13} - 10^{-12})M/M_{\odot}$.

Questo lavoro ha esposto l'analisi di un generico ECO, un punto di partenza da cui poter sviluppare modelli più precisi, con caratteristiche interne ben definite. In questo senso, abbiamo occasionalmente citato alcuni esempi (come le *boson stars*, i *wormholes* e le *gravastars*) che sono attualmente oggetto di ricerca in ambito teorico. La speranza è che si possano individuare delle loro caratteristiche, la cui avvenuta o mancata osservazione ci guidi nel confermare o scartare il modello considerato.

Gli oggetti compatti potrebbero essere la chiave per comprendere alcuni dei grandi misteri della fisica moderna. Tra questi rientrano la composizione della materia oscura, l'esistenza di singolarità spaziotemporali e la conservazione dell'informazione fisica. La

descrizione classica del collasso di oggetti astrofisici suggerisce che i corpi oscuri e compatti, che popolano il nostro universo, siano buchi neri: ogni osservazione che rivelasse il contrario sarebbe un'indicatore di nuova fisica. In effetti, la nostra conoscenza teorica della natura non esclude a priori che questi oggetti possano essere qualcosa di diverso da un buco nero.

Il fatto che un paradigma debba continuamente essere sottoposto a verifiche teoriche e sperimentali è un carattere tipico del metodo scientifico. Nel nostro caso, questi controlli sono particolarmente importanti; infatti, se scopriremo che i buchi neri non esistono, oppure differiscono dall'idea che ne abbiamo ora, dovremmo affrontare conseguenze così radicali che la nostra visione dell'universo ne uscirebbe indubbiamente rinnovata. Queste verifiche meritano quindi tutti gli sforzi possibili, anche perché l'affermazione che i buchi neri esistano, e siano sempre descritti dalla metrica di Kerr-Newman, è un'ipotesi molto radicale, ma ad oggi è supportata da un numero esiguo di dati osservativi. Inoltre, è bene notare che importanti test di teorie nascono dal considerare ipotesi alternative: solo vagliando il maggior numero possibile di casi si possono escludere modelli differenti, con il risultato di ottenere un paradigma più solido. Nel presente contesto, ciò potrebbe tradursi nel quantificare limiti sempre più stringenti sul parametro di somiglianza ϵ .

In questo lavoro, abbiamo voluto esplorare la possibilità di oggetti alternativi da un punto di vista teorico, anche perché risulta molto difficile ottenere dati osservativi sui presunti buchi neri, almeno per quanto riguarda i segnali elettromagnetici. A tal proposito, bisogna però sottolineare che delle nuove tecniche (come l'osservazione in banda radio tramite interferometria) stanno iniziando a fornire immagini dei nuclei galattici, dove sappiamo che si trovano oggetti compatti supermassicci¹⁷. Parallelamente, la rivelazione delle onde gravitazionali nel 2016 ha aperto una nuova finestra sul cosmo, che potrebbe rivoluzionare il campo dell'astrofisica sperimentale. Queste onde trasportano informazioni sulla sorgente che le ha generate; tipicamente si tratta di sistemi dinamici, composti da oggetti estremamente compatti, i quali generano un campo gravitazionale molto intenso. Una peculiarità di questo fenomeno è quella di essere soggetto ad una minore incertezza, rispetto ai segnali elettromagnetici. Ciò è dovuto al fatto che le onde gravitazionali interagiscono molto debolmente con la materia, e dipendono quindi da molte meno variabili rispetto alla luce che ci arriva dall'universo. Dunque, esse potrebbero mostrarci un'immagine più "pulita" del cosmo, complementare a quella fornitaci dai telescopi e dai rivelatori di particelle. Se in futuro riuscissimo a misurare queste onde con precisione sempre maggiore, potremmo testare regimi estremi della gravità, con un'accuratezza mai avuta prima: in altre parole, avremmo l'occasione di confrontarci con una nuova fisica fondamentale, al di là della relatività generale e del modello standard.

¹⁷Questo fatto, dimostrato recentemente da A. Ghez e R. Genzel, è valso il premio Nobel per la fisica 2020 ai due ricercatori.

Bibliografia

- [1] Roberto Casadio, *Elements of General Relativity* (2019).
- [2] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992), Sezione 18.1.
- [3] S. L. Shapiro, S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects*, Wiley-VCH (1983), Capitolo 12.
- [4] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992), Sezione 16.2.
- [5] G. Bertone et al., *Gravitational wave probes of dark matter: challenges and opportunities*, arXiv:1907.10610v2 (2019), Sezione IV.
- [6] Vitor Cardoso e Paolo Pani, *Testing the nature of dark compact objects: a status report*, Springer, Living Reviews in Relativity, volume 22, articolo 4 (2019), Capitolo 2.
- [7] Ray d'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992), Sezione 14.6.
- [8] P. I. Jefremov, O. Y. Tsupko e G. S. Bisnovatyi-Kogan, *Innermost stable circular orbits of spinning test particles in Schwarzschild and Kerr space-times*, Physical Review D, volume 91, issue 12 (2015).
- [9] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, V. T. Zanchin, *Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes*, Physical Review D, volume 79, issue 6 (2009).
- [10] V. Cardoso, L. C. B. Crispino, C. F. B. Macedo, H. Okawa, P. Pani, *Light rings as observational evidence for event horizons: Long-lived modes, ergoregions and nonlinear instabilities of ultracompact objects*, Physical Review D, volume 90, issue 4 (2014).

- [11] The Event Horizon Telescope Collaboration, *First M87 Event Horizon Telescope Results*, The Astrophysical Journal Letters, volume 875, numero 1 (2019).
- [12] M. Parikh, J. P. van der Schaar, *Derivation of the Null Energy Condition*, Physical Review D, volume 91, issue 8 (2015).
- [13] Y. Peng, *Analytical studies on the hoop conjecture in charged curved spacetimes*, Springer, The European Physical Journal C, volume 79, issue 11, articolo 943 (2019).
- [14] A. Addazi, A. Marcianò, N. Yunes, *Gravitational instability of exotic compact objects*, Springer, The European Physical Journal C, volume 80, issue 1, articolo 36 (2020).
- [15] G. Raposo, P. Pani, R. Emparan, *Exotic compact objects with soft hair*, Physical Review D, volume 99, issue 10 (2019).

