

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Teoria dei gruppi e simmetrie:
il modello a quark**

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Laura Pecorari

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

In questa tesi si discutono i principali risultati della teoria dei gruppi per lo studio delle simmetrie e se ne presentano alcuni successi nel contesto della fisica fondamentale. Vengono studiate la teoria di Lie per i gruppi continui, la teoria delle rappresentazioni e la teoria delle algebre di Lie semisemplici, sottolineando gli aspetti più rilevanti di tali teorie in funzione della loro applicazione in fisica. Si studiano due simmetrie approssimate agenti a livello fondamentale: la simmetria di isospin, associata al gruppo $SU(2)$, e la sua naturale generalizzazione in una simmetria associata al gruppo $SU(3)$, accompagnando la trattazione con esempi e illustrazioni grafiche. Concentrando, infine, l'attenzione sul modello a quark, si mostra come sia possibile ricostruire la struttura a quark degli adroni leggeri studiando le simmetrie dell'interazione forte con i soli strumenti forniti dalla teoria dei gruppi.

Indice

Introduzione	5
1 Simmetrie e Teoria dei Gruppi	9
1.1 Concetti generali	10
1.2 Gruppi e algebre di Lie	11
1.3 Teoria delle rappresentazioni	13
1.3.1 Rappresentazioni di gruppi finiti	14
1.3.2 Rappresentazioni di gruppi e algebre di Lie	17
1.4 Teoria delle algebre di Lie semisemplici	19
1.4.1 Aspetti generali, sottoalgebre di Cartan e radici	19
1.4.2 Rappresentazioni e teorema del massimo peso	21
1.5 Il gruppo $U(1)$	23
1.5.1 Proprietà generali e algebra di Lie	23
1.5.2 Rappresentazioni	24
1.5.3 Operatore di carica	25
1.6 Il gruppo $SU(2)$	25
1.6.1 Proprietà generali e algebra di Lie	25
1.6.2 Operatori di innalzamento e abbassamento	27
1.6.3 Rappresentazioni	29
1.7 Il gruppo $SU(3)$	31
1.7.1 Proprietà generali e algebra di Lie	31
1.7.2 Operatori e vettori radice	32
1.7.3 Rappresentazioni	34
1.8 Principali simmetrie di interesse fisico	36
2 Simmetria di Isospin	39
2.1 Isospin	40
2.2 Pioni	41
2.3 Isospin nei processi di scattering	42

3	Modello a Quark	45
3.1	Oltre l'isospin: the eightfold way	46
3.2	Quark	49
3.3	Carica di colore	50
3.4	Struttura degli adroni leggeri	51
3.4.1	Mesoni	51
3.4.2	Barioni	53
3.5	Libertà asintotica e confinamento	55
	Conclusioni	57
	Appendici	58
A	Simmetria di Parità	59
A.1	Definizione e concetti generali	59
A.2	Parità intrinseca	60
A.2.1	Parità intrinseca dei pioni carichi	61
A.2.2	Parità intrinseca del pione neutro	61
A.3	Violazione della parità e teorema CPT	62
	Bibliografia	63

Introduzione

“At the deepest level, all we find are symmetries and responses to symmetries.”

Steven Weinberg

Lo studio sistematico e quantitativo delle simmetrie affonda le proprie radici in tempi ben più antichi rispetto agli anni dello sviluppo della *teoria dei gruppi*, la teoria matematica che ne formalizza i concetti tramite gli strumenti dell'algebra. La testimonianza, forse, più remota può, infatti, essere rintracciata nella scuola pitagorica, la cui matematica, più simile a una teologia che a una scienza, indagava i concetti di rapporto, regolarità e armonia in un contesto puramente geometrico, come mostrano i numerosi studi sui poligoni e sui poliedri regolari. In seguito, questi stessi concetti, sfronati dal misticismo pitagorico, furono ampliati e formalizzati da Euclide nelle pagine degli *Elementi*, testo chiave del sapere matematico antico. Molti anni più tardi, in epoca medievale, l'eredità matematico-geometrica del genio greco venne raccolta dalle civiltà arabe, il cui interesse per i concetti di regolarità e simmetria è testimoniato dai prodotti dell'arte figurativa giunti fino ai nostri giorni. Tuttavia, fu solo a partire dagli anni Trenta dell'Ottocento, grazie agli studi di Hessel, Bravais e Möbius in cristallografia, che lo studio delle simmetrie iniziò ad essere utilizzato come chiave interpretativa della realtà fisica.

La teoria dei gruppi cominciò, invece, a prendere forma negli anni Quaranta dell'Ottocento, quando lo studio del gruppo delle permutazioni venne impiegato nella ricerca delle soluzioni algebriche delle equazioni polinomiali, grazie alle intuizioni, fra gli altri, di Évariste Galois, benché se ne trovino tracce già nei lavori di Lagrange della fine del secolo precedente. In particolare, è proprio a Galois che si deve l'introduzione del termine *gruppo*. Molti dei primi importanti risultati della teoria dei gruppi sono, inoltre, associati ai nomi dei matematici Augustin-Louis Cauchy e Arthur Cayley, grazie ai loro contributi allo studio dei gruppi di permutazioni.

Negli anni Settanta i gruppi cominciarono ad essere impiegati anche in geometria grazie al lavoro di Sophus Lie, il quale, con la collaborazione di Felix Klein, elaborò una teoria dei gruppi di trasformazioni continue, complementare alla teoria dei gruppi discreti di Henri Poincaré e dello stesso Klein. Tale teoria, oggi nota come *teoria di Lie*,

fu sviluppata in analogia alla teoria di Galois per le equazioni polinomiali e venne inizialmente concepita da Lie soltanto come strumento per integrare equazioni differenziali. Fu, invece, grazie ai successivi contributi di Hermann Weyl, Wilhelm Killing e soprattutto Élie Cartan che la teoria di Lie divenne una delle colonne portanti della moderna teoria dei gruppi. Fra i risultati di maggiore rilevanza si citano la teoria delle rappresentazioni dei gruppi compatti (Weyl), la completa determinazione delle algebre di Lie complesse semplici (Killing) e il criterio di classificazione delle algebre semisemplici tramite la loro forma di Cartan-Killing (Cartan).

Va, poi, osservato che la teoria dei gruppi ebbe importanti sviluppi anche negli anni successivi, grazie ai lavori di illustri matematici quali Coxeter, Borel, Chevalley, lo stesso Weyl, e ad oggi continua ad essere diffusamente oggetto di studio. Tuttavia, per lo scopo di questa tesi, sarà sufficiente richiamare i maggiori risultati ottenuti principalmente fra il XVIII e il XIX secolo.

Venendo alla fisica, dopo sporadiche applicazioni come quella in cristallografia, nel 1918 simmetrie e teoria dei gruppi si rivelarono improvvisamente uno strumento imprescindibile per lo studio e la comprensione delle leggi della natura. In quell'anno, infatti, Emmy Noether, con il teorema che porta il suo nome, promosse il concetto di simmetria dal contesto estetico e astratto della geometria e dell'algebra a quello più concreto della fisica, scoprendo che ad ogni simmetria continua deve corrispondere una legge fisica di conservazione. Da questo momento, il concetto di simmetria venne, quindi, ad assumere un ruolo sempre più importante nella descrizione dei fenomeni naturali, non senza numerose conferme sperimentali. Ma fu nel XX secolo, con lo sviluppo delle grandi teorie moderne, che si assistette al suo coronamento: la fisica scoprì, infatti, che ad uno sguardo sempre più profondo, la natura rivela sempre più simmetrie a livello fondamentale, proprio come affermato da Weinberg.

Questa tesi si propone di ripercorrere i principali risultati della teoria dei gruppi per poi studiarne le applicazioni al modello a quark, uno dei più grandi successi della fisica teorica della seconda metà del secolo scorso.

Infatti, di fronte ad un quadro sempre più complesso e frammentato a livello fondamentale, la teoria dei gruppi fornì gli strumenti per orientarsi in questa complessità facendo ordine nella vastità dei dati sperimentali raccolti. Così, per esempio, fu possibile elaborare una teoria dell'interazione forte senza conoscere i dettagli precisi della sua struttura, ma soltanto studiando le sue simmetrie. Infatti, se un approccio perturbativo è possibile soltanto ad alte energie, a causa della libertà asintotica della teoria, il regime delle basse energie può comunque essere esplorato grazie alla teoria dei gruppi. Fu, poi, possibile comprendere che la forza forte che tiene uniti i nuclei atomici non è altro che l'interazione residua delle interazioni fra quark, mediate dai gluoni, che avvengono all'interno di protoni e neutroni, senza che quark e gluoni siano mai stati osservati sperimentalmente, in quanto confinati permanentemente all'interno degli adroni. Oppure, ancora, fu possibile individuare l'esistenza di nuove particelle e calcolarne le principali caratteristiche fisiche prima della loro effettiva scoperta sperimentale.

In questa tesi si cercherà, quindi, di rendere conto della forza di tale teoria nel contesto della fisica fondamentale presentando alcuni dei suoi maggiori successi.

Dopo un primo capitolo più matematico in cui vengono discusse la teoria di Lie, la teoria delle rappresentazioni e la teoria delle algebre di Lie semisemplici, di cui ci si limita ad esporre i risultati di maggior interesse fisico, nel secondo capitolo viene illustrata la simmetria di isospin, primo esempio di simmetria approssimata della fisica, insieme ad alcune sue applicazioni.

Nel terzo capitolo viene, invece, illustrato il modello a quark: si studia come sia possibile generalizzare la simmetria di isospin, associata al gruppo $SU(2)$, tramite una teoria associata al gruppo $SU(3)$ e vengono riportate le considerazioni teoriche che storicamente portarono alla scoperta dei quark e della carica di colore. Quindi, si chiarisce la natura composta degli adroni, vero fulcro del modello, trattando separatamente mesoni e barioni. Il capitolo termina con alcune considerazioni qualitative sui concetti di libertà asintotica e confinamento.

Alla fine dell'elaborato è riportata un'appendice che contiene un approfondimento sulla simmetria di parità, con una particolare attenzione al concetto di parità intrinseca e al suo ruolo all'interno del Modello Standard. A titolo esemplificativo, viene studiato come sia possibile determinare la parità intrinseca dei tre pioni. Si conclude con alcuni cenni alla violazione della simmetria di parità da parte delle interazioni deboli e con l'enunciato del teorema CPT.

Capitolo 1

Simmetrie e Teoria dei Gruppi

“My work always tried to unite the truth with the beautiful, but when I had to choose one or the other, I usually chose the beautiful.”

Hermann Weyl

Nel presente capitolo viene mostrato come sia possibile astrarre e formalizzare il concetto di simmetria ricorrendo agli strumenti dell'algebra nel contesto della teoria dei gruppi. Una simmetria è genericamente una proprietà di invarianza. Più precisamente, una simmetria di un osservabile fisico è una proprietà di invarianza del valore di tale osservabile, mentre una simmetria di una legge fisica è una proprietà di invarianza delle equazioni del moto del sistema rispetto a un insieme di trasformazioni. Tale invarianza può, poi, essere sostanziale o soltanto formale e in quest'ultimo caso si parla, propriamente, di proprietà di covarianza. Inoltre, ripetute trasformazioni di simmetria costituiscono ancora una simmetria, esiste la trasformazione identità, che consiste nel non eseguire alcuna azione sul sistema, e per ogni trasformazione di simmetria esiste la trasformazione inversa, pertanto una simmetria costituisce, da un punto di vista matematico, un gruppo, dal momento che ne soddisfa tutti gli assiomi definenti.

Vengono, dunque, richiamati i principali concetti della teoria a partire dalla definizione assiomatica di gruppo, con una particolare attenzione ai gruppi e alle algebre di Lie e ai principali risultati che coinvolgono questi due oggetti matematici. In particolare, viene enunciato il teorema di Cartan per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici definite sul campo complesso e si cita la formula di Baker-Campbell-Hausdorff che stabilisce la relazione che sussiste fra gruppi e algebre di Lie. Si espone la teoria delle rappresentazioni, che permette di realizzare i gruppi astratti tramite opportune applicazioni lineari, e se ne espongono i principali risultati, quali il lemma di Schur. Vengono definiti i concetti di rappresentazione aggiunta di un gruppo e di un'algebra di Lie e

viene enunciato il teorema di completa riducibilità. Viene, poi, brevemente illustrata la teoria delle algebre di Lie complesse semisemplici, mostrando che, come la struttura di un gruppo di Lie è implicitamente codificata nella sua algebra, la struttura dell'algebra è codificata nelle sue radici. Si definisce il concetto di peso e si enuncia il teorema del massimo peso. Quindi, vengono descritti tre dei gruppi di Lie più importanti e ricorrenti in fisica: i gruppi $U(1)$, $SU(2)$ e $SU(3)$. Si conclude con una panoramica sulle principali simmetrie di interesse fisico.

1.1 Concetti generali

Definizione 1.1.1 (Gruppo). Un gruppo astratto G è una collezione non vuota di elementi $\{g_\alpha\}$ dotata di un'operazione binaria, chiamata *legge di composizione*, così definita:

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

$$g_1, g_2 \longmapsto g_1 \cdot g_2$$

che deve soddisfare i seguenti assiomi:

1. Associatività: $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) \equiv g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \quad \forall g_1, g_2, g_3 \in G$.
2. Esistenza dell'elemento identità: $\exists e \in G : e \cdot g = g \cdot e = g \quad \forall g \in G$.
3. Esistenza dell'elemento inverso: $\exists g^{-1} \in G : g^{-1} \cdot g = g \cdot g^{-1} = e \quad \forall g \in G$.

La commutatività non è garantita in generale, tuttavia, se verificata, ossia se $g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$, il gruppo è detto *abeliano*.

Un gruppo può essere *discreto*, ossia composto da un insieme numerabile (finito o infinito) di elementi, oppure *continuo*, ossia composto da un insieme di elementi indicizzabili mediante una o più variabili continue. Tutti i gruppi continui sono infiniti, ma non tutti i gruppi infiniti sono continui. Per gruppi finiti, il numero di elementi del gruppo è detto *ordine* del gruppo.

Definizione 1.1.2 (Sottogruppo). Data una collezione di elementi $\{g_\alpha\}$ che forma un gruppo G , se un suo sottoinsieme $\{h_\beta\}$ forma a sua volta un gruppo H sotto la medesima legge di composizione, allora H è detto sottogruppo di G e si indica: $H \subset G$.

Definizione 1.1.3 (Omomorfismo). Siano G e G' gruppi, una mappa $f : G \longrightarrow G'$ è un omomorfismo se conserva la struttura moltiplicativa del gruppo G , ossia se $f(g_1) \cdot f(g_2) = f(g_1 \cdot g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$. Se la mappa è iniettiva, si parla, propriamente, di isomorfismo.

Definizione 1.1.4 (Gruppo Simmetrico). Sia M un insieme non vuoto, l'insieme G i cui elementi siano le permutazioni di M , con l'operazione di composizione di permutazioni, costituisce un gruppo. Il gruppo di tutte le permutazioni di M è chiamato gruppo simmetrico e viene indicato $Sym(M)$ o, se $M = \{1, 2, \dots, n\}$, S_n . L'ordine del gruppo delle permutazioni di n elementi è $n!$.

Teorema 1.1.1 (di Cayley). Ogni gruppo G di ordine n è isomorfo a un gruppo di permutazioni, ossia ad un sottogruppo di S_n .

1.2 Gruppi e algebre di Lie

I principali gruppi di interesse fisico sono *gruppi di Lie*. La forza della teoria di tali gruppi risiede nel fatto che il comportamento locale del gruppo vicino all'identità determina la maggior parte delle sue proprietà. Tali proprietà sono catturate e riassunte da una struttura algebrica chiamata *algebra di Lie*. Le algebre di Lie rivestono un ruolo di fondamentale importanza all'interno della teoria, soprattutto in virtù della loro semplice struttura di spazi vettoriali, che le rende più facilmente manipolabili rispetto agli omonimi gruppi, i quali, invece, sono oggetti più complessi, che possiedono contemporaneamente la struttura di gruppo e di varietà liscia.

Definizione 1.2.1 (Gruppo di Lie). Si definisce gruppo di Lie un gruppo G dotato di una struttura di varietà differenziabile compatibile con le operazioni di composizione e inversione del gruppo, ossia tale che

$$\begin{aligned} \cdot : G \times G &\longrightarrow G & i : G &\longrightarrow G \\ g_1, g_2 &\longmapsto g_1 \cdot g_2 & g &\longmapsto i(g) \equiv g^{-1} \end{aligned}$$

siano entrambe di classe C^∞ , cioè differenziabili infinite volte.

Definizione 1.2.2 (Algebra di Lie). Sia G un gruppo di Lie, l'algebra di Lie di G , indicata $Lie(G)$ o \mathfrak{g} , è definita come lo spazio tangente a G nell'identità: $\mathfrak{g} \equiv T_e G$, il quale definisce uno spazio vettoriale su un campo \mathbb{K} che viene dotato di un'operazione binaria:

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X, Y &\longmapsto [X, Y] \equiv XY - YX \end{aligned}$$

che $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \forall a, b \in \mathbb{K}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1. Antisimmetria: $[X, Y] = -[Y, X]$.
2. Bilinearità: $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$.
3. Identità di Jacobi: $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

L'operazione $[\cdot, \cdot]$ è chiamata *parentesi* di Lie o, spesso, *commutatore*, in quanto fornisce una misura della non commutatività degli elementi cui è applicata, infatti $[X, Y] = 0 \Leftrightarrow X$ e Y commutano.¹

¹Occorre precisare che \mathfrak{g} è uno spazio vettoriale totalmente arbitrario, quindi non necessariamente uno spazio di matrici. Pertanto, nel caso più generale, $[X, Y]$ non è necessariamente uguale a $XY - YX$, espressione che potrebbe non avere significato se su \mathfrak{g} non è definita un'operazione di moltiplicazione. Tuttavia, dal momento che la maggior parte dei gruppi di interesse fisico sono gruppi matriciali, nel presente elaborato si considererà valida la definizione di algebra di Lie data sopra.

In quanto spazio vettoriale, un'algebra di Lie \mathfrak{g} ammette, dunque, una base $\{X^k\}$ t.c. $[X^a, X^b] = c^{ab}_c X^c$, dove $c^{ab}_c \in \mathbb{K}$ sono chiamate *costanti di struttura* dell'algebra di Lie.

Si osserva, inoltre, che mentre il gruppo G determina l'algebra di Lie \mathfrak{g} , l'algebra di Lie non determina il gruppo. E' l'esempio di $SU(2)$ e $SO(3)$, rispettivamente gruppo delle matrici 2×2 unitarie con determinante unitario e gruppo delle matrici 3×3 ortogonali con determinante unitario: i due gruppi sono topologicamente differenti, ma hanno la medesima algebra di Lie, $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3)$.

Si procede a definire alcuni concetti fondamentali della teoria delle algebre di Lie che saranno utili per la trattazione successiva.

Definizione 1.2.3 (Sottoalgebra di Lie). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie, una sottoalgebra di Lie di \mathfrak{g} è un sottoinsieme $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ chiuso rispetto alle parentesi di Lie.

Definizione 1.2.4 (Generatori). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie, gli elementi di \mathfrak{g} tali che la più piccola sottoalgebra che li contiene sia \mathfrak{g} stessa sono chiamati generatori.

Definizione 1.2.5 (Centro). Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, si definisce centro dell'algebra l'insieme degli elementi di \mathfrak{g} che commutano con tutti gli elementi dell'algebra: $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} \subset \mathfrak{g}$.

Definizione 1.2.6 (Ideale). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie, una sottoalgebra $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ è un ideale se soddisfa la seguente condizione: $[X, Y] \in \mathfrak{h} \forall X \in \mathfrak{h}$ e $\forall Y \in \mathfrak{g}$.

Definizione 1.2.7 (Algebra di Lie Semisemplice). Un'algebra di Lie è detta semisemplice se è isomorfa alla somma diretta di algebre di Lie semplici, cioè di algebre di Lie \mathfrak{g} non abeliane i cui unici ideali siano $\{0\}$ e \mathfrak{g} stessa.

Teorema 1.2.1 (sulle Algebre di Lie Semplici). Con cinque eccezioni, ogni algebra di Lie complessa (cioè definita sul campo \mathbb{C}) semplice è isomorfa a $\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$ o $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$ o $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ o $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$, per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Le cinque eccezioni sono: \mathfrak{g}_2 , \mathfrak{f}_4 , \mathfrak{e}_6 , \mathfrak{e}_7 e \mathfrak{e}_8 .²

Si riportano di seguito alcune considerazioni che saranno utili per la successiva trattazione fisica.

Un gruppo di Lie G è, dunque, un gruppo continuo, cioè un gruppo infinito, i cui elementi dipendono in modo continuo da uno o più parametri. Sia, quindi, $g \in G$ un

² $\mathfrak{sl}_{n+1}\mathbb{C}$, $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$, $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ e $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ sono chiamate *algebre di Lie classiche*, a differenza delle altre che sono, invece, chiamate *algebre di Lie eccezionali*. $\mathfrak{sl}_{2n}\mathbb{C}$ è l'algebra di Lie di $SL_{2n}\mathbb{C}$ (gruppo speciale lineare), $\mathfrak{so}_{2n+1}\mathbb{C}$ di $SO_{2n+1}\mathbb{C}$ (gruppo speciale ortogonale di grado dispari), $\mathfrak{sp}_{2n}\mathbb{C}$ di $Sp_{2n}\mathbb{C}$ (gruppo simplettico) e $\mathfrak{so}_{2n}\mathbb{C}$ di $SO_{2n}\mathbb{C}$ (gruppo speciale ortogonale di grado pari). Sulle algebre di Lie eccezionali ci si limita ad affermare che si tratta di strutture particolarmente complicate, ma che trovano comunque importanti applicazioni in fisica (\mathfrak{e}_8 , per esempio, trova applicazioni nella Teoria delle Stringhe e nella Teoria della Supergravità). Per maggiori informazioni si rimanda al testo *Representation Theory. A First Course*. W. Fulton e J. Harris. Springer, 2004.

generico elemento del gruppo, esso può essere scritto come $g \equiv g(\theta_1, \theta_2, \dots) \equiv g(\theta_a)$, con $a = 1, 2, \dots, \dim(G)$, dove i θ_a sono parametri continui. D'altra parte, si è visto che G è dotato di una struttura di varietà differenziabile e che la sua algebra di Lie coincide con lo spazio tangente a tale varietà nell'identità. Intuitivamente, se si immerge una varietà in \mathbb{R}^n , lo spazio tangente in un punto è il piano che meglio approssima la varietà in quel punto. Piccole variazioni intorno al punto saranno, quindi, ancora elementi dello spazio tangente al prim'ordine di approssimazione. Pertanto, risulta possibile espandere gli elementi del gruppo intorno all'identità trascurando i termini di ordine superiore al primo: $g \approx I + A$, dove I è la matrice identità e $A = i \sum_a \theta_a T^a \equiv i \theta_a T^a$ è una combinazione lineare delle matrici $T^a \in \mathfrak{g}$, che rappresentano i generatori del gruppo. Una trasformazione, invece, non più infinitesima, ma finita, può essere vista come iterazione di trasformazioni infinitesime, ottenendo, così, il seguente risultato:

$$g(\theta_a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(g \left(\frac{\theta_a}{N} \right) \right)^N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i \theta_a T^a}{N} \right)^N = e^{i \theta_a T^a}. \quad (1.1)$$

Tale relazione descrive la parametrizzazione esponenziale di un arbitrario elemento del gruppo ed è valida solo se G è connesso all'identità.³

L'algebra di Lie del gruppo è data, adottando la notazione fisica più utilizzata, dai commutatori dei generatori:

$$[T^a, T^b] = i f^{ab}_c T^c \quad (1.2)$$

dove f^{ab}_c sono le costanti di struttura che codificano la struttura del gruppo. Dall'identità di Jacobi per i generatori segue, poi, un'analogia identità per le costanti di struttura:

$$f^{ab}_d f^{dc}_e + f^{bc}_d f^{da}_e + f^{ca}_d f^{db}_e = 0. \quad (1.3)$$

Si riporta, infine, la *formula di Baker-Campbell-Hausdorff* che mette in relazione gruppi e algebre di Lie:

$$e^X e^Y = e^Z, \quad \text{con} \quad Z = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}([X, [X, Y]] - [Y, [X, Y]] + \dots) \quad (1.4)$$

1.3 Teoria delle rappresentazioni

La teoria delle rappresentazioni realizza e descrive i gruppi astratti tramite particolari applicazioni lineari che ne preservano la struttura moltiplicativa. Ciò risulta particolarmente utile e vantaggioso, in quanto consente di ricondurre molti problemi di teoria dei gruppi a problemi di algebra lineare, facilmente trattabili.

In generale, una rappresentazione può essere finito o infinito dimensionale in base allo spazio vettoriale su cui agisce. Inoltre, su uno stesso spazio vettoriale possono essere

³Nel presente elaborato verrà utilizzata la notazione di Einstein che sottintende il simbolo di sommatoria sugli indici ripetuti.

rappresentati gruppi diversi tramite rappresentazioni diverse. Di seguito ci si concentrerà sulle rappresentazioni agenti su spazi vettoriali di dimensione finita, realizzabili, pertanto, tramite matrici.

Prima di procedere nell'esposizione, si richiamano alcuni concetti algebrici. In algebra astratta un *automorfismo* è un isomorfismo da una struttura algebrica in se stessa. Calato nel contesto dell'algebra lineare, un automorfismo di uno spazio vettoriale V , definito su un campo \mathbb{K} , è un operatore lineare invertibile da V in se stesso. L'insieme degli automorfismi di V con l'operazione di composizione di funzioni forma un gruppo chiamato *gruppo generale lineare*, che viene indicato $GL(V)$. Quando $\dim(V) = n < \infty$, fissata una base, è possibile identificare operatori lineari e matrici: ciò equivale ad affermare che $GL(V)$ è isomorfo a $GL(n, \mathbb{K})$, dove $GL(n, \mathbb{K})$, con l'usuale operazione di prodotto matriciale, costituisce il gruppo delle matrici $n \times n$ invertibili, cioè con determinante non nullo, a coefficienti in \mathbb{K} .

1.3.1 Rappresentazioni di gruppi finiti

Definizione 1.3.1 (Rappresentazione). Una rappresentazione di un gruppo finito G su uno spazio vettoriale V , definito su un campo \mathbb{K} , è un omomorfismo da G al gruppo degli automorfismi di V :

$$\begin{aligned} \rho : G &\longrightarrow GL(V) \\ g &\longmapsto \rho(g) \end{aligned}$$

La dimensione di V è detta *dimensione* della rappresentazione. Se l'omomorfismo è iniettivo (cioè, propriamente, un isomorfismo), la rappresentazione è detta *fedele*. Inoltre, $\rho(g)$, operatore lineare su V , soddisfa la seguente relazione:

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 \cdot g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \quad (1.5)$$

dunque la rappresentazione preserva la struttura moltiplicativa del gruppo, come richiesto dalla (1.1.3). Si mostra esplicitamente come, per rappresentazioni di dimensione finita con $\dim(V) = n < \infty$, gli operatori $\rho(g)$ siano realizzabili tramite matrici $n \times n$ indicate $\{D(g), g \in G\}$. Sia, infatti, $\{\mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n\}$ una base di V , allora

$$\rho(g) |e_i\rangle = |e_j\rangle D(g)^j_i \quad \forall g \in G. \quad (1.6)$$

Applicando ora gli operatori di entrambi i membri della (1.5) ai vettori di base, si ottiene

$$\begin{aligned} \rho(g_1)\rho(g_2) |e_i\rangle &= \rho(g_1) |e_j\rangle D(g_2)^j_i = |e_k\rangle D(g_1)^k_j D(g_2)^j_i \\ &= \rho(g_1 \cdot g_2) |e_i\rangle = |e_k\rangle D(g_1 \cdot g_2)^k_i \end{aligned}$$

e siccome i vettori $\{\mathbf{e}_i\}$ formano, per ipotesi, una base, si può concludere che

$$D(g_1)D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (1.7)$$

Tale relazione implica, inoltre, che $D(e) = I$, infatti: $D(e)D(g) = D(e \cdot g) = D(g)$, moltiplicando entrambi i membri per $D(g^{-1})$ si ha $D(e)D(g \cdot g^{-1}) = D(g \cdot g^{-1})$, cioè $D(e)D(e) = D(e)$, moltiplicando ora entrambi i membri per $(D(e))^{-1}$, resta $D(e) = I$. La (1.7) implica anche che $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$, infatti: $D(g^{-1})D(g) = D(e) = I$, moltiplicando entrambi i membri per $(D(g))^{-1}$, si trova subito che $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1}$.

Osservazione 1.3.1. Dato che il gruppo S_n ammette una rappresentazione matriciale, dal teorema di Cayley (1.1.1) segue che ogni gruppo finito può essere rappresentato tramite delle matrici.

Si pone, a questo punto, il problema di contare il numero di rappresentazioni di un gruppo: a tale scopo, occorre introdurre i concetti di rappresentazioni *equivalenti* o *inequivalenti*, *riducibili* o *irriducibili*. Un gruppo ammette, infatti, infinite rappresentazioni riducibili. Uno degli obiettivi principali della teoria delle rappresentazioni è quello di individuare le sole rappresentazioni irriducibili e inequivalenti del gruppo.⁴

Definizione 1.3.2 (Rappresentazioni Equivalenti). Due rappresentazioni $D(g), D'(g)$ di un gruppo G sono equivalenti se sono collegate da una trasformazione di similitudine:

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S, \quad \forall g \in G \quad (1.8)$$

diversamente, le rappresentazioni sono dette inequivalenti.

Si mostra di seguito che la matrice $D'(g)$ è effettivamente una rappresentazione, cioè soddisfa la (1.7): $D'(g_1)D'(g_2) = (S^{-1}D(g_1)S)(S^{-1}D(g_2)S) = S^{-1}D(g_1)D(g_2)S = S^{-1}D(g_1 \cdot g_2)S = D'(g_1 \cdot g_2)$.

Due rappresentazioni equivalenti sono sostanzialmente la stessa rappresentazione scritta in basi diverse, la (1.8) può, infatti, essere interpretata come un cambio di base. Si sottolinea che la matrice di similitudine S è indipendente dagli elementi del gruppo.

Definizione 1.3.3 (Rappresentazione Riducibile). Una rappresentazione è detta riducibile se è equivalente ad una rappresentazione diagonale a blocchi:

$$D'(g) = S^{-1}D(g)S = \begin{pmatrix} D_1(g) & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & D_2(g) & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \forall g \in G. \quad (1.9)$$

Ne consegue che una rappresentazione è, invece, detta irriducibile se non è equivalente a una rappresentazione diagonale a blocchi, cioè se non ammette sottorappresentazioni.

La rappresentazione $D'(g)$ della (1.3.3) è, quindi, decomponibile nella somma diretta delle rappresentazioni $D_1(g), D_2(g), \dots$ come $D'(g) = D_1(g) \oplus D_2(g) \oplus \dots$ e analogamente

⁴Di seguito e nei capitoli successivi, come è convenzione in fisica, gli operatori (rappresentazioni) $\rho(g)$ saranno spesso identificati con le matrici $D(g)$ ad essi associate.

lo spazio vettoriale V su cui $D'(g)$ agisce è decomponibile come $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots$, con V_1, V_2, \dots spazi vettoriali su cui agiscono $D_1(g), D_2(g), \dots$, rispettivamente.

Se $D(g)$ è una rappresentazione di un gruppo G su uno spazio vettoriale V , si possono subito trovare altre tre rappresentazioni, non necessariamente inequivalenti fra loro: $D(g)^*$, $D(g)^{-1T}$ e $D(g)^{-1\ddagger}$, agenti rispettivamente su V^* (spazio vettoriale complesso coniugato), \tilde{V} (spazio duale) e \tilde{V}^* (spazio duale complesso coniugato). Si può, infatti, mostrare facilmente che soddisfano la (1.7). È, poi, possibile combinare un numero arbitrario, finito, di rappresentazioni facendone il prodotto tensoriale: così facendo si ottiene ancora una rappresentazione del gruppo, generalmente riducibile. Siano, quindi, $D_1(g)$ e $D_2(g)$ rappresentazioni di un gruppo G agenti, rispettivamente, sugli spazi vettoriali V_1 e V_2 , allora $D_1(g) \otimes D_2(g)$ è ancora una rappresentazione di G , che agisce sullo spazio vettoriale $V_1 \otimes V_2$.

Per gruppi non soltanto finiti, ma più in generale compatti, vale, inoltre, il seguente teorema:

Teorema 1.3.1 (di Unitarietà). Tutti i gruppi compatti ammettono rappresentazioni unitarie $D(g)$ t.c. $D^\dagger(g)D(g) = I$, ovvero $D^\dagger(g) = D^{-1}(g)$, $\forall g \in G$.

Osservazione 1.3.2. Se la rappresentazione è reale, il concetto di unitarietà coincide con quello di ortogonalità, pertanto la richiesta del teorema si traduce nell'esistenza di rappresentazioni $D(g)$ t.c. $D^T(g)D(g) = I$, ovvero $D^T(g) = D^{-1}(g)$, $\forall g \in G$.

Si procede ora ad enunciare un importante lemma che determina la condizione di irriducibilità di una rappresentazione agente su uno spazio vettoriale complesso.

Lemma 1.3.1 (di Schur). Siano V_1, V_2 spazi vettoriali complessi, ρ_1, ρ_2 rappresentazioni di un gruppo G così definite:

$$\begin{aligned}\rho_1 &: G \longrightarrow GL(V_1) \\ \rho_2 &: G \longrightarrow GL(V_2)\end{aligned}$$

e sia $M : V_1 \longrightarrow V_2$ un'applicazione lineare tale che $M\rho_1(g) = \rho_2(g)M$, $\forall g \in G$, allora:

1. Se ρ_1 e ρ_2 sono inequivalenti, $M = \mathbf{0}$.
2. Se $\rho_1 = \rho_2$ (e quindi $V_1 = V_2$), allora $M = \lambda I$, con $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. La dimostrazione viene suddivisa in due parti.

Punto 1. $\forall v \in \ker(M)$ $M(\rho_1(g)v) = \rho_2(g)M(v) = \rho_2(g)0 = 0$, dunque $\rho_1(g)v \in \ker(M)$. Inoltre, $\forall v' \in \text{Im}(M) \exists v \in V$ t.c. $v' = M(v)$. Pertanto, $\rho_2(g)v' = \rho_2(g)M(v) = M(\rho_1(g)v)$, dunque $\rho_2(g)v' \in \text{Im}(M)$. Ciò significa che $\forall g \in G$ $\rho_1(g)(\ker(M)) = \ker(M)$ e $\rho_2(g)(\text{Im}(M)) = \text{Im}(M)$, il che dimostra l'esistenza di due applicazioni, $\tilde{\rho}_1$ e $\tilde{\rho}_2$:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_1 &: G \longrightarrow GL(\ker(M)) \\ \tilde{\rho}_2 &: G \longrightarrow GL(\text{Im}(M))\end{aligned}$$

sottorappresentazioni di ρ_1 e ρ_2 , rispettivamente. Ma ρ_1 e ρ_2 sono per ipotesi irriducibili, quindi ammettono come sottorappresentazioni soltanto quella banale e se stesse. Se $\ker(M) = \{0\}$ e $\text{Im}(M) = V_2$, allora M è invertibile. Questo porta ad una contraddizione, in quanto si avrebbe $M^{-1}\rho_1(g)M = \rho_2(g) \forall g \in G$, ma ρ_1 e ρ_2 sono, per ipotesi, inequivalenti. Se, invece, $\ker(M) = V_1$ e $\text{Im}(M) = \{0\}$, allora $M = \mathbf{0}$.

Punto 2. Per il teorema fondamentale dell'algebra $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ t.c. $\det(M - \lambda I) = 0$, dunque gli autospazi V_λ saranno non banali e, in particolare, $V_\lambda = \{v \in V : Mv = \lambda v\} = \{v \in V : (M - \lambda I)v = 0\} = \ker(M - \lambda I)$. Dall'ipotesi di commutatività $M\rho(g) = \rho(g)M, \forall g \in G$, in quanto $\rho_1 = \rho_2 \equiv \rho$, segue che

$$\begin{aligned} v \in \ker(M - \lambda I) &\implies (M - \lambda I)\rho(g)v = \rho(g)(M - \lambda I)v = \rho(g)0 = 0 \\ &\implies \rho(g)v \in \ker(M - \lambda I) \implies \ker(M - \lambda I) \subset V. \end{aligned}$$

Ciò definisce un'applicazione $\tilde{\rho} : G \longrightarrow GL(\ker(M - \lambda I))$ sottorappresentazione di ρ . Siccome, però, ρ è irriducibile, o $\ker(M - \lambda I) = \{0\}$ o $\ker(M - \lambda I) = V$. Il fatto che λ sia un autovalore esclude la prima possibilità, pertanto $\ker(M - \lambda I) = V$ e $M = \lambda I$. \square

Corollario 1.3.1. Se G è un gruppo abeliano, tutte le sue rappresentazioni irriducibili su uno spazio vettoriale complesso sono unidimensionali.

1.3.2 Rappresentazioni di gruppi e algebre di Lie

A questo punto si pone il problema di generalizzare quanto visto per i gruppi finiti anche ai gruppi infiniti, quali sono, in particolare, i gruppi di Lie. In questa sezione ci si limiterà alle rappresentazioni di gruppi di Lie su spazi vettoriali di dimensione finita, per le quali resta valida la definizione (1.3.1) data in precedenza. Conseguentemente, restano validi anche tutti i risultati ottenuti: fissata una base, anche un gruppo di Lie ammette rappresentazioni matriciali, queste possono essere equivalenti o inequivalenti fra loro, riducibili o irriducibili secondo le definizioni già incontrate. Se il gruppo di Lie è compatto, ogni rappresentazione finito-dimensionale è equivalente ad una rappresentazione unitaria. Su spazi vettoriali complessi continua a valere anche il Lemma di Schur.

È, inoltre, possibile estendere il concetto di rappresentazione anche alle algebre di Lie. Di nuovo, si considereranno solo algebre di Lie associate a gruppi agenti su spazi vettoriali finiti, così da poter richiamare i risultati della sezione precedente.

Alcune premesse: siano V uno spazio vettoriale e \mathfrak{g} un'algebra di Lie, $\mathfrak{gl}(V)$ indica l'insieme degli endomorfismi da V in se stesso. Si tratta di uno spazio vettoriale che, se dotato delle parentesi di Lie: $[f, g] \equiv f \circ g - g \circ f, \forall f, g \in \mathfrak{gl}(V)$, acquista la struttura di algebra di Lie, come la notazione utilizzata suggerisce. Si dà, quindi, la seguente definizione:

Definizione 1.3.4 (Rappresentazione di un'algebra di Lie). Una rappresentazione di un'algebra di Lie \mathfrak{g} su uno spazio vettoriale V è un omomorfismo fra algebre di Lie:

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(V) \\ X &\longmapsto \rho(X) \end{aligned}$$

In quanto omomorfismo, dalla (1.5) ρ deve soddisfare la relazione

$$\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.10)$$

Si citano due rappresentazioni particolarmente importanti per la trattazione successiva:

Definizione 1.3.5 (Rappresentazione aggiunta di un gruppo di Lie). Sia G un gruppo di Lie e \mathfrak{g} la sua algebra di Lie, si definisce rappresentazione aggiunta di G l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} Ad : G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad_g : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ X &\longmapsto Ad_g(X) \equiv gXg^{-1} \end{aligned}$$

Definizione 1.3.6 (Rappresentazione aggiunta di un'algebra di Lie). Sia \mathfrak{g} l'algebra di Lie di G , si definisce rappresentazione aggiunta di \mathfrak{g} l'omomorfismo:

$$\begin{aligned} ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ X &\longmapsto ad_X \equiv d(Ad)_e(X) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto ad_X(Y) \equiv [X, Y] \end{aligned}$$

Si osserva, poi, che in generale un omomorfismo fra gruppi di Lie dà luogo ad un omomorfismo fra algebre di Lie. Per gruppi di Lie matriciali, siccome le rappresentazioni sono omomorfismi, una rappresentazione del gruppo dà luogo ad una rappresentazione dell'algebra. Per gruppi semplicemente connessi accade, invece, il contrario, cioè è una rappresentazione dell'algebra a dare luogo a una rappresentazione del gruppo. In particolare, tale corrispondenza è biunivoca. Invece, per gruppi non semplicemente connessi, potrebbero esistere rappresentazioni dell'algebra a cui non corrispondono rappresentazioni del gruppo.

Si definisce ora la nozione di completa riducibilità, che risulta particolarmente utile nello studio delle rappresentazioni dei gruppi e della algebre di Lie, in quanto permette di concentrare l'attenzione sulle sole rappresentazioni irriducibili.

Definizione 1.3.7 (Completa Riducibilità). Una rappresentazione finito-dimensionale di un gruppo o di un'algebra di Lie è detta completamente riducibile se è isomorfa alla somma diretta di un numero finito di rappresentazioni irriducibili.

Ne consegue che se tutte le rappresentazioni finito-dimensionali di un gruppo o di un'algebra sono completamente riducibili, il gruppo o l'algebra in esame avrà la proprietà di completa riducibilità. A differenza dei gruppi finiti, che sono sempre completamente

riducibili, non tutti i gruppi e le algebre di Lie godono di questa proprietà; in particolare, se il gruppo di Lie in questione è un gruppo di matrici compatto, allora la proprietà è verificata.

Teorema 1.3.2. Ogni rappresentazione unitaria finito-dimensionale di un gruppo di Lie matriciale, agente su uno spazio di Hilbert finito dimensionale, è completamente riducibile, e può, quindi, essere decomposta nella somma diretta di rappresentazioni irriducibili.

1.4 Teoria delle algebre di Lie semisemplici

In questa sezione si svolge una breve trattazione della teoria delle algebre di Lie semisemplici definite sul campo dei numeri complessi, riportando i soli risultati di maggior interesse fisico. La grande importanza di tale teoria, i cui maggiori risultati sono principalmente dovuti a Cartan, Killing e Weyl, risiede nel fatto che essa fornisce gli strumenti per descrivere e classificare le rappresentazioni finito-dimensionali delle algebre di Lie semisemplici, tramite il loro *massimo peso*, con l'omonimo teorema.

Nel processo di classificazione si procederà cercando il maggior numero di elementi H_1, \dots, H_r dell'algebra che possano essere diagonalizzati simultaneamente in ogni rappresentazione. Se questi sono diagonalizzabili in ogni rappresentazione, lo saranno, in particolare, anche nella rappresentazione aggiunta. Ciò porta alla definizione di *sottoalgebra di Cartan*. Gli autovalori simultanei non nulli di $ad_{H_1}, \dots, ad_{H_r}$ sono chiamati *radici* e i corrispondenti autovettori *vettori radice*. I vettori radice possono essere utilizzati per incrementare e decrementare gli autovalori di $\rho(H_1), \dots, \rho(H_r)$, dove ρ è una rappresentazione arbitraria. Questo porta alla definizione degli *operatori di innalzamento e abbassamento*. Infine, si introdurrà la nozione di peso e, quindi, di massimo peso, giungendo alla formulazione del *teorema del massimo peso*.

1.4.1 Aspetti generali, sottoalgebre di Cartan e radici

Come visto nella (1.2.7), un'algebra di Lie semisemplice è un'algebra isomorfa alla somma diretta di algebre semplici e, quindi, classificata (vedasi teorema (1.2.1)). Esistono, tuttavia, altre caratterizzazioni equivalenti: in particolare, un'algebra è semisemplice se e solo se possiede la proprietà di completa riducibilità. Una terza caratterizzazione è rappresentata dal *criterio di Cartan*, per il quale occorre definire il concetto di *forma di Cartan-Killing*.

Definizione 1.4.1. Data un'algebra di Lie \mathfrak{g} di dimensione finita definita su un campo \mathbb{K} , si definisce forma di Cartan-Killing la forma simmetrica bilineare:

$$\begin{aligned} B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ X, Y &\longmapsto B(X, Y) \equiv \text{Tr}(ad_X \circ ad_Y) \end{aligned}$$

Criterio 1.4.1 (di Cartan). Un'algebra di Lie è semisemplice se e solo se la sua forma di Cartan-Killing è non degenere.

Si procede ora a definire le strutture che saranno utilizzate per la classificazione delle algebre di Lie semisemplici.

Definizione 1.4.2 (Sottoalgebra di Cartan). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie semisemplice di dimensione finita, si definisce sottoalgebra di Cartan la più grande sottoalgebra abeliana $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ tale che $\forall H \in \mathfrak{h}$ ad_H sia diagonalizzabile.

Da ciò segue che, poiché tutti gli $H \in \mathfrak{h}$ commutano, anche le applicazioni ad_H commutano $\forall H$, pertanto sono simultaneamente diagonalizzabili.⁵

Inoltre, si può dimostrare che, data una forma reale compatta di \mathfrak{g} , cioè una sua sottoalgebra reale \mathfrak{k} tale che ogni $X \in \mathfrak{g}$ possa essere univocamente scritto come $X = X_1 + iX_2$ con $X_1, X_2 \in \mathfrak{k}$, e sia \mathfrak{t} una massima sottoalgebra abeliana di \mathfrak{k} , allora $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$ è una sottoalgebra di Cartan di \mathfrak{g} . Infatti, ogni $H \in \mathfrak{h}$ può essere scritto come $H = H_1 + iH_2$ con $H_1, H_2 \in \mathfrak{t}$, i quali, per ipotesi, commutano, quindi commutano anche ad_{H_1} e ad_{H_2} . Da ciò segue che ad_H è diagonalizzabile in quanto combinazione lineare di operatori diagonalizzabili commutanti.

Ogni algebra di Lie complessa semisemplice possiede una forma reale compatta, la quale è unica a meno di coniugazione. Di conseguenza, anche una sottoalgebra di Cartan è, in un certo senso, unica a meno di coniugazione. In particolare, le sottoalgebre di Cartan di un'algebra di Lie complessa semisemplice hanno tutte la stessa dimensione, la quale prende il nome di *rango* dell'algebra.

Si osserva che se l'algebra in questione non fosse semisemplice, l'esistenza di una sottoalgebra di Cartan non sarebbe, in generale, garantita, pur restando valida la (1.4.2).

Data questa definizione preliminare, risulta possibile definire il concetto di *radice*, assumendo fissate, per tutta la trattazione successiva, una forma reale compatta \mathfrak{k} , una massima sottoalgebra abeliana \mathfrak{t} di \mathfrak{g} e una sottoalgebra di Cartan definita come $\mathfrak{h} = \mathfrak{t} + i\mathfrak{t}$.

Definizione 1.4.3 (Radice). Si definisce radice dell'algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} , relativamente a \mathfrak{h} , un funzionale lineare non nullo $\alpha \in \tilde{\mathfrak{h}}$ tale che $\forall H \in \mathfrak{h}$ esista un $X \in \mathfrak{g}$ non nullo e valga la relazione

$$ad_H(X) \equiv [H, X] = \alpha(H)X . \quad (1.11)$$

Dunque, X è un autovettore per ogni ad_H con autovalore $\alpha(H)$ e una radice non è altro che una collezione non nulla di autovalori simultanei per le ad_H . Si definisce, poi,

⁵Due matrici A e B sono dette simultaneamente diagonalizzabili se $\exists S$ tale che $D_A = S^{-1}AS$ e $D_B = S^{-1}BS$ siano diagonali. E' un noto risultato dell'algebra lineare che ciò si verifica se e solo se A e B commutano, infatti: $AB = SD_AS^{-1}SD_BS^{-1} = SD_AD_BS^{-1} = SD_BD_AS^{-1} = SD_BS^{-1}SD_AS^{-1} = BA$. Per la seconda implicazione si rimanda a un qualunque testo di algebra lineare.

spazio radice lo spazio $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : ad_H(X) = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{h}\}$, i cui vettori sono detti *vettori radice* con radice α .

L'insieme delle radici è chiamato *sistema di radici* ed è solitamente indicato con R . Esso è, inoltre, simmetrico rispetto all'origine, cioè se $\alpha \in R$, allora anche $-\alpha \in R$.

Sia, poi, W uno spazio vettoriale finito-dimensionale dotato di un prodotto scalare e sia $R \subset W$ un sistema di radici, si definisce *base* per R un insieme $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ che sia una base per W e tale che $\forall \alpha \in R$ si abbia $\alpha = n_1\alpha_1 + \dots + n_r\alpha_r$, dove gli n_i sono interi tutti maggiori o uguali a zero oppure tutti minori o uguali a zero. Questa definizione permette di suddividere le radici in *radici positive* e *radici negative*. Se $n_i \geq 0$ si parla di radici positive, se invece $n_i \leq 0$ si parla di radici negative. Gli insiemi delle radici positive e negative sono indicati R^+ e R^- , rispettivamente.

Vale, inoltre, la seguente decomposizione dell'algebra di Lie semisemplice \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left(\bigoplus \mathfrak{g}_\alpha \right), \quad (1.12)$$

che significa che ogni elemento di \mathfrak{g} può essere univocamente scritto come la somma di un elemento di \mathfrak{h} e di un elemento di ogni spazio radice \mathfrak{g}_α .

Inoltre, si può dimostrare che ogni spazio radice \mathfrak{g}_α è unidimensionale.

1.4.2 Rappresentazioni e teorema del massimo peso

Si procede, quindi, a studiare le rappresentazioni irriducibili finito-dimensionali delle algebre di Lie semisemplici. Queste possono essere classificate tramite il teorema del massimo peso, il quale consta di una serie di risultati: ogni rappresentazione ha un unico massimo peso, due rappresentazioni irriducibili con lo stesso massimo peso sono equivalenti e i massimi pesi sono elementi dominanti integrali. Di seguito si darà per scontata l'esistenza di rappresentazioni irriducibili accennando soltanto alle condizioni per la loro esistenza e alle proprietà che queste devono soddisfare. Si citano soltanto, ma esulano dallo scopo del presente elaborato, i tre principali metodi per costruire concretamente tali rappresentazioni: la prima costruzione utilizza i moduli di Verma, la seconda utilizza il teorema di Peter-Weyl per gruppi compatti, la terza consiste nella teoria di Borel-Weil.

Nella trattazione successiva si farà uso, invece, della *decomposizione di Clebsch-Gordan* che, applicata a prodotti tensoriali di rappresentazioni note, consente di ricavare le rappresentazioni irriducibili del gruppo in esame. Benché non sia sempre applicabile, dal punto di vista fisico si tratta dell'approccio più semplice ed efficace.

A questo punto si può definire la nozione di *peso*:

Definizione 1.4.4 (Peso). Sia \mathfrak{g} un'algebra di Lie semisemplice, ρ una sua rappresentazione su uno spazio vettoriale V e \mathfrak{h} una sottoalgebra di Cartan, siano poi $\mu \in \tilde{\mathfrak{h}}$ un funzionale lineare e $v \in V$, se $\forall H \in \mathfrak{h}$ si ha

$$H(v) = \mu(H)v \quad (1.13)$$

allora μ è detto peso del vettore v . L'insieme dei vettori non nulli aventi peso μ forma un autospazio V_μ e, se V_μ è non banale, μ è detto peso della rappresentazione ρ e $\dim(V_\mu)$ rappresenta la sua molteplicità.

Da questa definizione si vede, in particolare, come le radici non siano altro che i pesi non nulli della rappresentazione aggiunta.

Tutto ciò fornisce già alcune informazioni sulle rappresentazioni irriducibili di \mathfrak{g} : in particolare si avrà che lo spazio vettoriale V su cui agisce un'arbitraria rappresentazione ρ finito-dimensionale sarà decomponibile come

$$V = \bigoplus V_\mu, \quad (1.14)$$

ciò implica che gli operatori $\rho(H)$, con $H \in \mathfrak{h}$, saranno simultaneamente diagonalizzabili in ogni rappresentazione finito-dimensionale.

Si può, inoltre, fare la seguente osservazione, alla base del concetto di operatori di innalzamento e abbassamento e della loro generalizzazione in dimensione superiore, come sarà meglio chiarito in seguito. Dato un vettore peso v con peso μ e un vettore radice X con radice α , dalle relazioni (1.11) e (1.13) segue che

$$\begin{aligned} H(X(v)) &= [H, X](v) + X(H(v)) \\ &= (\alpha(H)X)(v) + X(\mu(H)v) \\ &= (\alpha(H) + \mu(H))X(v), \end{aligned}$$

in cui si vede come $X(v)$ sia ancora un autovettore per $H \in \mathfrak{h}$ con autovalore $\alpha + \mu$, dunque, tramite l'azione di \mathfrak{g}_α , è possibile passare dall'autospazio V_μ all'autospazio $V_{\mu+\alpha}$.

Occorre, ora, definire il criterio con cui confrontare i pesi. Siano, quindi, μ_1 e μ_2 due pesi, si dirà che μ_1 è maggiore di μ_2 se esistono dei numeri reali non negativi a_1, \dots, a_r tali che $\mu_1 - \mu_2 = a_1\alpha_1 + \dots + a_r\alpha_r$, dove $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ è una base del sistema di radici R definito in precedenza.

Sia, quindi, ρ una rappresentazione di \mathfrak{g} , μ_{MAX} è detto massimo peso se è maggiore di tutti gli altri pesi della rappresentazione, nel senso appena chiarito. Si può dare, inoltre, la seguente definizione:

Definizione 1.4.5 (Rappresentazione di massimo peso). Sia $v \in V$ un vettore non nullo contemporaneamente autovettore per \mathfrak{h} , cioè $H(v) = \mu(H)v \forall H \in \mathfrak{h}$, e appartenente al kernel di $\mathfrak{g}_\mu \forall \mu \in R^+$, allora $v \in V$ è un vettore di massimo peso. Una rappresentazione ρ su V con un vettore di questo tipo è detta rappresentazione di massimo peso.

Ancora un po' di nomenclatura prima di concludere: fissato un prodotto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su \mathfrak{g} , ristretto a \mathfrak{h} e invariante sotto l'azione aggiunta del gruppo, un elemento $\mu \in \mathfrak{h}$ è detto *elemento integrale* se la quantità

$$2 \frac{\langle \mu, \alpha \rangle}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$$

è un numero intero $\forall \alpha \in R^+$. Se poi tale quantità è anche non negativa, allora μ è detto *elemento integrale dominante*.

Si può, a questo punto, enunciare il teorema del massimo peso per rappresentazioni finito-dimensionali di algebre di Lie semisemplici.

Teorema 1.4.1 (del massimo peso). Il teorema consta di una serie di risultati:

1. Ogni rappresentazione irriducibile possiede un massimo peso.
2. Due rappresentazioni irriducibili aventi lo stesso massimo peso sono equivalenti, cioè isomorfe.
3. Il massimo peso di ogni rappresentazione irriducibile è un elemento integrale dominante.
4. Ogni elemento integrale dominante è il massimo peso di una rappresentazione irriducibile.

Si discuteranno più approfonditamente nelle sezioni seguenti, nei casi specifici dei gruppi $SU(2)$ e $SU(3)$, le applicazioni del teorema del massimo peso insieme alla decomposizione di Clebsch-Gordan per la ricerca delle rappresentazioni irriducibili.

1.5 Il gruppo $U(1)$

1.5.1 Proprietà generali e algebra di Lie

Definizione 1.5.1. $U(1)$ è il gruppo delle fasi, costituito dai punti sulla circonferenza unitaria, indicizzabili mediante numeri complessi del tipo $e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, i quali sono pensabili come matrici 1×1 unitarie. Si tratta del più semplice gruppo di Lie ed è un gruppo abeliano.

$$U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi]\} .$$

Per trasformazioni infinitesime vale lo sviluppo

$$e^{i\theta} \approx 1 + i\theta , \tag{1.15}$$

in cui è facile individuare in $T = 1$ il generatore infinitesimo del gruppo. Risulta, quindi, immediata la natura abeliana del gruppo $U(1)$, la cui algebra di Lie è, infatti, data da:

$$[T, T] = 0 . \tag{1.16}$$

1.5.2 Rappresentazioni

Teorema 1.5.1. Tutte le rappresentazioni irriducibili del gruppo $U(1)$ sono rappresentazioni unitarie del tipo

$$\begin{aligned} \rho_k : U(1) &\longrightarrow U(1) \subset GL(1, \mathbb{C}) \\ e^{i\theta} &\longmapsto \rho_k(\theta) \equiv e^{ik\theta} \end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. La rappresentazione ρ_k dovrà riflettere la periodicità dell'angolo θ di cui è funzione, pertanto

$$\rho_k(2\pi) = \rho_k(0) = 1 .$$

Inoltre, in quanto rappresentazione, dovrà soddisfare anche la proprietà di omomorfismo (1.5), ossia

$$\rho_k(\theta_1 + \theta_2) = \rho_k(\theta_1)\rho_k(\theta_2) .$$

A questo punto è sufficiente mostrare che un'arbitraria funzione differenziabile

$$f : U(1) \longrightarrow \tilde{\mathbb{C}}$$

che soddisfi le proprietà di periodicità e omomorfismo di cui sopra, è nella forma dell'enunciato del teorema. Essendo, quindi, la derivata prima di tale funzione

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\theta + \Delta\theta) - f(\theta)}{\Delta\theta} \\ &= f(\theta) \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{f(\Delta\theta) - 1}{\Delta\theta} \\ &= f(\theta)f'(0) , \end{aligned}$$

dove, nel secondo passaggio, si è fatto uso della proprietà di omomorfismo, ci si è ricondotti ad un problema di Cauchy con equazione differenziale del tipo $f'(\theta) = cf(\theta)$ e condizione al contorno $f(0) = 1$, la cui unica soluzione è $f(\theta) = e^{c\theta}$. Richiedendo, ora, la periodicità $f(2\pi) = e^{2\pi c} = f(0) = 1$, si trova che $c = ik$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ciò prova che

$$f(\theta) \equiv \rho_k(\theta) = e^{ik\theta} , \quad k \in \mathbb{Z} .$$

Tali rappresentazioni sono evidentemente unitarie, in quanto

$$(e^{ik\theta})^{-1} = e^{-ik\theta} = \overline{e^{ik\theta}}$$

e irriducibili. □

1.5.3 Operatore di carica

Sia \mathcal{H} lo spazio di Hilbert del sistema fisico in esame, una generica rappresentazione del gruppo $U(1)$, per il teorema (1.5.1), dovrà essere nella forma ρ_q , per qualche $q \in \mathbb{Z}$, mentre, per il teorema (1.3.2), dovrà essere decomponibile come

$$\rho_q = \rho_{q_1} \oplus \rho_{q_2} \oplus \cdots \oplus \rho_{q_n}$$

e, analogamente, lo spazio \mathcal{H} su cui ρ_q agisce sarà anch'esso decomponibile come

$$H = H_{q_1} \oplus H_{q_2} \oplus \cdots \oplus H_{q_n}$$

con $n = \dim(\mathcal{H})$ e $q_j \in \mathbb{Z}$.

Date queste premesse, si può definire il seguente operatore:

Definizione 1.5.2 (Operatore di Carica). L'operatore di carica Q per la rappresentazione ρ_q del gruppo $U(1)$ è l'operatore lineare autoaggiunto che agisce sullo spazio \mathcal{H} , decomponibile come sopra, come la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}.$$

Da un punto di vista quanto-meccanico, in quanto operatore lineare autoaggiunto, Q rappresenta un osservabile. Dal punto di vista della teoria dei gruppi, invece, Q è il generatore dell'azione del gruppo $U(1)$ sullo spazio \mathcal{H} tramite trasformazioni unitarie. In particolare, l'azione del gruppo $U(1)$ su \mathcal{H} sarà data da

$$\rho_q(e^{i\theta}) = e^{iQ\theta} = \begin{pmatrix} e^{iq_1\theta} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{iq_2\theta} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{iq_n\theta} \end{pmatrix} \in U(n) \subset GL(n, \mathbb{C}). \quad (1.17)$$

Si conclude osservando che se l'operatore Q commuta con l'hamiltoniana del sistema, $[Q, H] = 0$, il gruppo $U(1)$ agirà come gruppo di simmetria del sistema, tramite trasformazioni di simmetria $\rho_q(e^{i\theta})$, e gli autovalori q_j non evolveranno nel tempo, ossia saranno quantità conservate. Per esempio, la carica elettrica è il generatore del gruppo di simmetria $U(1)$ dell'elettromagnetismo.

1.6 Il gruppo $SU(2)$

1.6.1 Proprietà generali e algebra di Lie

Definizione 1.6.1. $SU(2)$ è il gruppo speciale unitario delle matrici 2×2 unitarie a coefficienti complessi. Si tratta del più semplice gruppo di Lie compatto non abeliano.

$$SU(2) = \{U \text{ matrici complesse } 2 \times 2 : U^\dagger U = I, \det(U) = 1\}.$$

Matrici che differiscono infinitesimalmente dall'identità possono essere scritte come

$$U \approx I + iH, \quad H^i_j \ll 1. \quad (1.18)$$

Dalla richiesta di unitarietà $U^\dagger U = I$, segue che $(I + iH)^\dagger(I + iH) \approx I - i(H^\dagger - H) = I$, cioè $H^\dagger = H$. Dunque le matrici H devono essere hermitiane. Dalla richiesta di unimodularità $\det(U) = 1$ segue, invece, che $\det(I + iH) \approx I + iTr(H) = 1$, cioè $Tr(H) = 0$. Dunque le matrici H devono avere anche traccia nulla. Una base di matrici hermitiane a traccia nulla è data dalle matrici di Pauli:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

le quali soddisfano una serie di proprietà sintetizzate nella seguente relazione:

$$\sigma^a \sigma^b = \delta^{ab} I + i\epsilon^{abc} \sigma^c. \quad (1.20)$$

Pertanto, una generica matrice hermitiana a traccia nulla può essere scritta come combinazione lineare di tali matrici nel modo seguente

$$H = \frac{1}{2} \vec{\theta} \cdot \vec{\sigma} = \sum_{a=1}^3 \theta_a \frac{\sigma^a}{2} \quad (1.21)$$

dove il fattore $\frac{1}{2}$ è convenzionale. Ricordando la parametrizzazione esponenziale di un elemento del gruppo (1.1), si ha, inoltre, che un generico elemento di $SU(2)$ può essere scritto come

$$\begin{aligned} U &= \exp\left(i\vec{\theta} \cdot \frac{\vec{\sigma}}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \left(\frac{\vec{\theta} \cdot \vec{\sigma}}{2}\right)^n \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k} \right] I + i \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^{2k+1} \right] \hat{\theta} \cdot \vec{\sigma} \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) I + i\hat{\theta} \cdot \vec{\sigma} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned} \quad (1.22)$$

dove si è fatto uso della notazione $\vec{\theta} = \theta \hat{\theta}$.

A questo punto è possibile procedere a studiare l'algebra di Lie di $SU(2)$, osservando che la relazione di commutazione soddisfatta dalle matrici di Pauli è

$$[\sigma^a, \sigma^b] = 2i\epsilon^{abc} \sigma^c. \quad (1.23)$$

Ricordando, poi, che una generica algebra di Lie è data dalla (1.2), dalla relazione precedente si trova

$$\left[\frac{\sigma^a}{2}, \frac{\sigma^b}{2}\right] = i\epsilon^{abc}\frac{\sigma^c}{2} \quad (1.24)$$

che, convenzionalmente, viene riscritta come

$$[T^a, T^b] = i\epsilon^{abc}T^c, \quad T^a \equiv \frac{\sigma^a}{2}, \quad a = 1, 2, 3. \quad (1.25)$$

Dunque, le matrici T^a sono i generatori di $SU(2)$ e ϵ^{abc} , simboli di Levi-Civita, le sue costanti di struttura.

1.6.2 Operatori di innalzamento e abbassamento

Siccome i generatori T^a non commutano, non sono simultaneamente diagonalizzabili, d'altra parte $\mathfrak{su}(2)$ ha rango unitario: ciò significa che è possibile trovare una base in cui solo uno dei tre, convenzionalmente T^3 , sia diagonale.

Si procede, quindi, definendo gli operatori $T^\pm \equiv T^1 \pm iT^2$, detti di innalzamento e abbassamento, e si sceglie, quindi, come base per $\mathfrak{su}(2)$:

$$T^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

che soddisfano le relazioni di commutazione

$$[T^3, T^\pm] = \pm T^\pm, \quad [T^+, T^-] = 2T^3. \quad (1.27)$$

Indicando, poi, con $|m\rangle$ l'autostato di T^3 , inteso ora come operatore, con autovalore m , la (1.13) si traduce nella semplice equazione agli autovalori

$$T^3 |m\rangle = |m\rangle m \quad (1.28)$$

dove $m \in \mathbb{R}$, in quanto T^3 è hermitiano. Agendo, quindi, con T^3 sullo stato $T^+ |m\rangle$ si ha

$$\begin{aligned} T^3 T^+ |m\rangle &= (T^+ T^3 + [T^3, T^+]) |m\rangle = (T^+ T^3 + T^+) |m\rangle \\ &= (mT^+ + T^+) |m\rangle = T^+ |m\rangle (m + 1) \end{aligned}$$

dunque $T^+ |m\rangle$ è un autovettore di T^3 con autovalore $(m + 1)$. In modo analogo, agendo con T^3 sullo stato $T^- |m\rangle$ si ha:

$$\begin{aligned} T^3 T^- |m\rangle &= (T^- T^3 + [T^3, T^-]) |m\rangle = (T^- T^3 - T^-) |m\rangle \\ &= (mT^- - T^-) |m\rangle = (m - 1)T^- |m\rangle (m - 1) \end{aligned}$$

dunque $T^- |m\rangle$ è un autovettore di T^3 con autovalore $(m - 1)$.

Gli stati $|m\rangle$ possono essere immaginati come i pioli di una scala sulla quale è possibile salire e scendere tramite gli operatori di innalzamento e abbassamento. Risulta, quindi, chiaro il senso dei nomi con cui sono comunemente indicati questi operatori. Un'illustrazione intuitiva è fornita in Fig.1.1. Siccome, poi, le rappresentazioni di $SU(2)$ sono finito-dimensionali, occorre richiedere che tale scala abbia un inizio e una fine, cioè occorre richiedere che $-j \leq m \leq +j$, con j , si vedrà in seguito, un opportuno intero non negativo.

Dunque, è ora possibile definire gli operatori di innalzamento e abbassamento in funzione dei numeri quantici j e m , ottenendo

$$T^+ |m\rangle = |m+1\rangle c_{m+1} = |m+1\rangle \sqrt{(j+1+m)(j-m)}, \quad (1.29a)$$

$$T^- |m\rangle = |m-1\rangle c_m^* = |m-1\rangle \sqrt{(j+1-m)(j+m)}. \quad (1.29b)$$

Da tali espressioni si vede facilmente che $T^+ |j\rangle = 0$ e $T^- |-j\rangle = 0$, come richiesto.

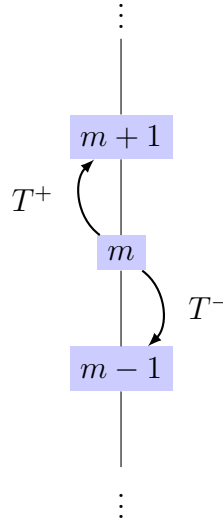


Figura 1.1: Illustrazione dell'azione degli operatori di innalzamento e abbassamento, T^+ e T^- , sullo stato $|m\rangle$.

È utile osservare, poi, che $(T)^2 = (T^1)^2 + (T^2)^2 + (T^3)^2$ è un *invariante di Casimir*, cioè un operatore che commuta con tutti i generatori del gruppo: $[T^a, (T)^2] = 0$, $a = 1, 2, 3$, e in particolare $[T^\pm, (T)^2] = 0$. Ciò implica che $(T)^2$, valutato negli stati di una rappresentazione irriducibile j , fornisce sempre lo stesso valore. Infatti,

$$(T)^2 = \frac{1}{2}(T^+T^- + T^-T^+) + (T^3)^2 \quad (1.30)$$

e si può facilmente mostrare che

$$(T)^2 |j, m\rangle = |j, m\rangle j(j+1) \quad (1.31)$$

quindi $(T)^2$ dipende soltanto da j e non da m .

1.6.3 Rappresentazioni

Per costruire le rappresentazioni irriducibili del gruppo si possono seguire due approcci, tra loro equivalenti. Il primo consiste nell'individuare la rappresentazione di massimo peso e applicare ripetutamente l'operatore di abbassamento fino ad ottenere una rappresentazione irriducibile. Il secondo fa, invece, uso del formalismo tensoriale.

Per quanto riguarda il primo approccio, il teorema del massimo peso per $SU(2)$ afferma che le rappresentazioni irriducibili n -dimensionali hanno pesi:

$$-n, -n + 2, \dots, n - 2, n$$

con n intero non negativo. Rappresentazioni di questo tipo hanno dimensione $n + 1$, ogni peso ha molteplicità 1 e n è un massimo peso. Tuttavia, per motivi storici legati alla Meccanica Quantistica, in fisica si preferisce utilizzare $j = \frac{n}{2}$, pertanto, la dimensione della rappresentazione avente massimo peso j , anche detta *rappresentazione di spin j* , è pari a $2j + 1$.

Si analizza ora il caso in cui due rappresentazioni, dette j e j' , vengano combinate insieme a formare una rappresentazione più grande, tramite il prodotto tensoriale. Si avranno allora due set di ket $|j, m\rangle$ e $|j', m'\rangle$ con $m \in [-j, j]$ e $m' \in [-j', j']$ interi. Il prodotto $|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle$ fornisce una rappresentazione $(2j + 1)(2j' + 1)$ -dimensionale che, nella maggior parte dei casi, è riducibile. Si osserva, poi, che $|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle$ è un autostato dell'operatore T^3 con autovalore $m + m'$, infatti

$$\begin{aligned} T^3(|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle) &= (T^3 |j, m\rangle) \otimes |j', m'\rangle + |j, m\rangle \otimes (T^3 |j', m'\rangle) \\ &= (|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle)(m + m') . \end{aligned}$$

Per semplicità notazionale, di seguito si indicherà $|j, m\rangle \otimes |j', m'\rangle \equiv |j, j', m, m'\rangle$.

I massimi valori che m e m' possono assumere sono, rispettivamente, j e j' , quindi il massimo autovalore di T^3 è $j + j'$, associato all'autostato $|j, j', j, j'\rangle$. La rappresentazione $|j, j', m, m'\rangle$ può, quindi, essere decomposta nelle sue sottorappresentazioni irriducibili applicando ripetutamente l'operatore di abbassamento T^- all'autostato $|j, j', j, j'\rangle$, in quanto vettore di massimo peso. Tale processo è noto come decomposizione di Clebsch-Gordan. Si riporta di seguito un esempio.

Esempio 1.6.1. Si consideri la rappresentazione $|j = \frac{1}{2}, m\rangle \otimes |j' = \frac{1}{2}, m'\rangle$ di dimensione $(2j + 1)(2j' + 1) = 4$. Trattandosi di una rappresentazione quadridimensionale, ci saranno quattro stati $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, m, m'\rangle$ con $m = \pm\frac{1}{2}$ e $m' = \pm\frac{1}{2}$ che, essendo j e j' fissati, possono essere indicati semplicemente come $|m, m'\rangle$. Essi, quindi, sono: $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, $|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ e $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Si indicizzeranno, poi, tramite J le rappresentazioni irriducibili risultanti dalla decomposizione e con $|J, M\rangle$, $M \in [-J, J]$ intero, gli stati corrispondenti. Lo stato

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ ha il massimo autovalore, $M = m + m' = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$, quindi corrisponde ad una rappresentazione irriducibile, pertanto si ha

$$|J = 1, M = 1\rangle = \left| m = \frac{1}{2}, m' = \frac{1}{2} \right\rangle .$$

Applicando, quindi, l'operatore di abbassamento ad entrambi i membri dell'equazione, utilizzando la (1.29b), si trova $T^- |1, 1\rangle = |1, 0\rangle \sqrt{2}$ e $T^- |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = |-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Procedendo in questo modo si trova, poi, $T^- |1, 0\rangle = |1, -1\rangle \sqrt{2}$ e $T^- (|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) = (|-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}$. L'ultimo stato, corrispondente a $|0, 1\rangle$, dalla richiesta di ortogonalità sarà dato dalla combinazione $|-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$. Riassumendo, si sono trovati i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right), \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \right), \\ |1, -1\rangle &= \left| -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (1.32)$$

I coefficienti moltiplicativi dei ket nell'esempio precedente sono chiamati *coefficienti di Clebsch-Gordan*. In generale la decomposizione di $j \otimes j'$ può essere scritta nella forma

$$|J, M\rangle = \sum_{m=-j}^j \sum_{m'=-j'}^{j'} |j, j', m, m'\rangle \langle j, j', m, m' | J, M\rangle \quad (1.33)$$

dove $|J, M\rangle$ è una combinazione lineare dei $|j, j', m, m'\rangle$ con coefficienti di Clebsch-Gordan $\langle j, j', m, m' | J, M\rangle$.

Per quanto riguarda, invece, l'approccio tensoriale, occorre prima di tutto osservare che per $SU(2)$, a differenza del caso generale $SU(n)$, indici in alto e indici in basso sono equivalenti. Questo si può vedere facilmente utilizzando i simboli di Levi-Civita, invarianti del gruppo: infatti, dato, per esempio, un tensore T_{mn}^{ijk}

$$\epsilon^{pm} \epsilon^{qn} T_{mn}^{ijk} \sim T^{pqijk} .$$

Inoltre, è possibile considerare soltanto tensori simmetrici nei loro indici in alto, cioè tensori che non cambiano segno per permutazioni dei loro indici. Si può, infatti, ragionare per induzione: si suppone che tale affermazione sia valida per tensori, per esempio, con meno di quattro indici in alto e si mostra che vale anche per tensori con quattro indici in alto. Sia, quindi, T^{ikjl} un tensore che non goda di particolari simmetrie sotto lo scambio di due indici, siano i e k , esso può essere scritto come

$$T^{ijkl} = \underbrace{\frac{1}{2} (T^{ijkl} + T^{kjil})}_{S^{ijkl}} + \underbrace{\frac{1}{2} (T^{ijkl} - T^{kjil})}_{A^{ijkl}} .$$

Ora, A^{ijkl} contratto con il simbolo ϵ_{ik} , cioè $\epsilon_{ik}A^{ijkl}$, si trasforma come un tensore con due indici in alto, quindi non dà problemi. D'altra parte, S^{ijkl} è simmetrico in i e k per costruzione, quindi ciò dimostra l'affermazione.

A questo punto, dato un tensore con j indici in alto T^{i_1, i_2, \dots, i_j} , è possibile calcolare la dimensione della rappresentazione da esso fornita. Fissato un valore x che gli indici possono assumere, il numero di x può andare da 0 a j , per un totale di $j + 1$ possibilità. Usando, quindi, la formula di Gauss per le sommatorie, il numero di componenti del tensore T^{i_1, i_2, \dots, i_j} è

$$\sum_{k=0}^j (k+1) = \frac{1}{2} (j+1)(j+2) . \quad (1.34)$$

Occorre, ora, imporre la condizione di traccia nulla: $\delta^{i_1 i_2} T^{i_1, i_2, \dots, i_j} = 0$, da cui si vede che il membro sinistro dell'equazione è un tensore avente $j - 2$ indici, che, per la (1.34), ha, quindi, $\frac{1}{2} (j-1)j$ componenti. Dunque, la dimensione della rappresentazione irriducibile j è

$$d = \frac{1}{2} (j+1)(j+2) - \frac{1}{2} (j-1)j = 2j + 1 \quad (1.35)$$

in perfetto accordo con il risultato ottenuto in precedenza utilizzando il teorema del massimo peso.

Convenzionalmente, le rappresentazioni dei gruppi vengono spesso identificate con la loro dimensione. A titolo di esempio si citano la rappresentazione **2** ($j = \frac{1}{2}$), anche detta *definite* o *fondamentale* e la rappresentazione **3** ($j = 1$), anche detta rappresentazione *aggiunta*.

Si può, infine, ricavare la seguente formula generale:

$$j \otimes j' = (j + j') \oplus (j + j' - 1) \oplus (j + j' - 2) \oplus \dots \oplus (|j - j'| + 1) \oplus |j - j'| . \quad (1.36)$$

In questa forma la decomposizione dell'Es.1.6.1 si traduce in $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$.

1.7 Il gruppo SU(3)

1.7.1 Proprietà generali e algebra di Lie

Definizione 1.7.1. $SU(3)$ è il gruppo speciale unitario delle matrici 3×3 unitarie a coefficienti complessi. Si tratta di un gruppo di Lie compatto non abeliano.

$$SU(3) = \{U \text{ matrici complesse } 3 \times 3 : U^\dagger U = I, \det(U) = 1\} .$$

La trattazione del gruppo $SU(3)$ ricalca e generalizza quella seguita per il gruppo $SU(2)$.

Una base di otto matrici hermitiane senza traccia è data dalle matrici di Gell-Mann, che generalizzano quelle di Pauli:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda^6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & (1.37) \\ \lambda^8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

I generatori sono le matrici $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ e l'algebra di Lie che essi generano è:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (1.38)$$

Le costanti di struttura f^{abc} sono totalmente antisimmetriche; fatta questa osservazione, si riportano, quindi, i valori dei soli elementi non nulli:

$$\begin{aligned} f^{123} &= 1, \\ f^{147} &= -f^{156} = f^{246} = f^{257} = f^{345} = -f^{367} = \frac{1}{2}, \\ f^{458} &= f^{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

1.7.2 Operatori e vettori radice

Si procede sempre in analogia con quanto fatto per $SU(2)$. Gli otto generatori di $\mathfrak{su}(3)$ non commutano, pertanto non sono simultaneamente diagonalizzabili, tuttavia si osserva che $[T^3, T^8] = 0$, dunque è possibile trovare una base in cui T^3 e T^8 siano in forma diagonale. Infatti, il rango di $\mathfrak{su}(3)$ è pari a 2. Seguendo la storica convenzione fisica, si indicheranno $I_3 \equiv T^3$, terza componente dell'isospin, e $Y \equiv \frac{2}{\sqrt{3}}T^8$, ipercarica. Per rappresentare l'algebra di Lie del gruppo, generalizzando la (1.28), si utilizzano gli autostati dei due operatori appena definiti, cioè $|i_3, y\rangle$, tali che

$$I_3 |i_3, y\rangle = |i_3, y\rangle i_3, \quad (1.40)$$

$$Y |i_3, y\rangle = |i_3, y\rangle y. \quad (1.41)$$

Dunque, se gli stati $|m\rangle$ di $SU(2)$ potevano essere rappresentati, visivamente, come i $2j + 1$ pioli di una scala, gli stati $|i_3, y\rangle$ di $SU(3)$ devono, invece, essere pensati come i nodi di un reticolo bidimensionale.⁶

⁶In generale, gli stati di una rappresentazione irriducibile di un'algebra di Lie di rango l , indicizzati mediante l numeri quantici, possono essere arrangiati all'interno di un reticolo l -dimensionale.

Oltre a I_3 e Y già definiti, si possono, quindi, definire i seguenti operatori, per un totale di otto operatori che insieme costituiscono una base di $\mathfrak{su}(3)$:

$$I^\pm = T^1 \pm iT^2, \quad U^\pm = T^6 \pm iT^7, \quad V^\pm = T^4 \pm iT^5 \quad (1.42)$$

che soddisfano le regole di commutazione

$$[I_3, I^\pm] = \pm I^\pm, \quad [I_3, U^\pm] = \mp \frac{1}{2} U^\pm, \quad [I_3, V^\pm] = \pm \frac{1}{2} V^\pm, \quad (1.43a)$$

$$[Y, I^\pm] = 0, \quad [Y, U^\pm] = \pm U^\pm, \quad [Y, V^\pm] = \pm V^\pm, \quad (1.43b)$$

$$[I^+, I^-] = 2I_3, \quad [U^+, U^-] = \frac{3}{2} Y - I_3 \equiv 2U_3, \quad [V^+, V^-] = \frac{3}{2} Y + I_3 \equiv 2V_3, \quad (1.43c)$$

$$[I^+, V^-] = -U^-, \quad [I^+, U^+] = V^+, \quad [U^+, V^-] = I^-, \quad (1.43d)$$

$$[I^+, V^+] = 0, \quad [I^+, U^-] = 0, \quad [U^+, V^+] = 0. \quad (1.43e)$$

Le restanti relazioni di commutazione possono facilmente essere ricavate dalle precedenti per coniugazione hermitiana.

Da tali relazioni si vede anche come $\mathfrak{su}(3)$ possa essere vista come la sovrapposizione di tre $\mathfrak{su}(2)$ con operatori di innalzamento e abbassamento I^\pm , U^\pm e V^\pm per le tre rispettive algebre. Si mostra ora esplicitamente come questi sei operatori agiscono sui ket $|i_3, y\rangle$. Ancora una volta $SU(2)$ fa da guida, infatti, gli I^\pm incrementano o decrementano i_3 di una unità, lasciando y immutato:

$$I^\pm |i_3, y\rangle \propto |i_3 \pm 1, y\rangle. \quad (1.44)$$

Per trovare come gli U^\pm agiscono su $|i_3, y\rangle$ si procede nel modo seguente:

$$\begin{aligned} I_3 U^\pm |i_3, y\rangle &= (U^\pm I_3 + [I_3, U^\pm]) |i_3, y\rangle = \left(U^\pm I_3 \mp \frac{1}{2} U^\pm \right) |i_3, y\rangle \\ &= U^\pm \left(I_3 \mp \frac{1}{2} \right) |i_3, y\rangle = U^\pm |i_3, y\rangle \left(i_3 \mp \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

e analogamente

$$\begin{aligned} Y U^\pm |i_3, y\rangle &= (U^\pm Y + [Y, U^\pm]) |i_3, y\rangle = (U^\pm Y \pm U^\pm) |i_3, y\rangle \\ &= U^\pm (Y \pm 1) |i_3, y\rangle = U^\pm |i_3, y\rangle (y \pm 1), \end{aligned}$$

dunque si conclude che

$$U^\pm |i_3, y\rangle \propto \left| i_3 \mp \frac{1}{2}, y \pm 1 \right\rangle. \quad (1.45)$$

Con procedimenti del tutto analoghi si trova che

$$V^\pm |i_3, y\rangle \propto \left| i_3 \pm \frac{1}{2}, y \pm 1 \right\rangle. \quad (1.46)$$

Riassumendo, i ket $|i_3, y\rangle$ possono essere arrangiati all'interno di un reticolo bidimensionale, ogni ket corrisponde a un nodo e gli operatori I^\pm , U^\pm e V^\pm consentono di muoversi da un nodo all'altro. Nello specifico, in un piano (i_3, y) , I^\pm muovono di $(\pm 1, 0)$, U^\pm muovono di $(\mp \frac{1}{2}, \pm 1)$ e V^\pm muovono di $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$. I vettori $(\pm 1, 0)$, $(\mp \frac{1}{2}, \pm 1)$ e $(\pm \frac{1}{2}, \pm 1)$ sono i vettori radice di $\mathfrak{su}(3)$.

Prima di qualunque commento sulla lunghezza dei vettori radice e sugli angoli che essi formano reciprocamente, occorre che i generatori siano tutti normalizzati nello stesso modo. Abbandonando, quindi, la notazione fisica per quella matematica, si ha che $T^3 = I_3$ e $T^8 = \frac{\sqrt{3}}{2}Y$. I vettori radice opportunamente normalizzati diventano, quindi:

$$\vec{I}^\pm = (\pm 1, 0), \quad \vec{U}^\pm = \left(\mp \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right), \quad \vec{V}^\pm = \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right). \quad (1.47)$$

Si osserva ora che i tre vettori hanno tutti lunghezza unitaria e formano fra loro angoli di 60° e 120° , come si può vedere in Fig.1.2.

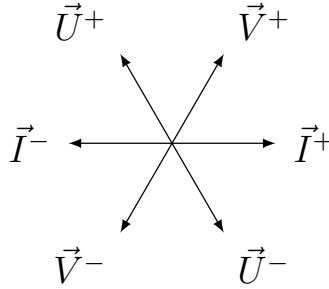


Figura 1.2: Vettori radice di $\mathfrak{su}(3)$.

1.7.3 Rappresentazioni

Anche per il gruppo $SU(3)$ si possono seguire due diversi approcci per lo studio delle rappresentazioni irriducibili, uno, come visto, consiste nel generalizzare i concetti di operatori di innalzamento e abbassamento visti per il gruppo $SU(2)$, l'altro consiste nell'utilizzare i tensori.

Per quanto riguarda questo secondo approccio, occorre osservare, per prima cosa, che indici in alto e in basso non sono equivalenti per $SU(3)$, infatti, dato un tensore T_i , la sua contrazione con il simbolo di Levi-Civita fornisce

$$\epsilon^{ijk} T_i \sim T^{jk}$$

che si trasforma evidentemente come un tensore con due indici in alto e non uno solo. Si ha, tuttavia, un'importante semplificazione, che non vale nel caso generale di $SU(n)$ con

$n > 3$: si possono, infatti, considerare soltanto tensori $T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m}$ senza traccia simmetrici in tutti i loro indici in alto e simmetrici in tutti i loro indici in basso. Pertanto, le rappresentazioni di $SU(3)$ possono essere univocamente indicizzate mediante coppie di interi non negativi (m, n) . Si può, quindi, determinare la dimensione di una rappresentazione fornita da un generico tensore $T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m}$ contando le diverse possibili configurazioni degli indici simmetrizzati. Fissato un valore x che gli indici possono assumere, il numero di x può andare da 0 a m , per un totale di $m + 1$ possibilità, dunque, usando la formula di Gauss per le sommatorie, si trova

$$\sum_{k=0}^m (k+1) = \frac{1}{2} (m+1)(m+2) . \quad (1.48)$$

Con considerazioni analoghe anche sugli indici in basso si trova che il tensore in esame ha $\frac{1}{4} (m+1)(m+2)(n+1)(n+2)$ componenti. Richiedendo, ora, l'annullarsi della traccia, si trova che deve valere $\delta_i^j T_{j, j_2, \dots, j_n}^{i, i_2, \dots, i_m} = 0$. Essendo il tensore a primo membro un tensore di tipo $(m-1, n-1)$, occorre che $\frac{1}{2} m(m+1)n(n+1)$ combinazioni di $T_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{i_1, i_2, \dots, i_m}$ siano nulle. Pertanto, la dimensione della rappresentazione irriducibile (m, n) di $SU(3)$ è pari a

$$\mathcal{D}(m, n) = \frac{1}{4} (m+1)(m+2)(n+1)(n+2) - \frac{1}{2} m(m+1)n(n+1) \quad (1.49)$$

$$= \frac{1}{2} (m+1)(n+1)(m+n+2) . \quad (1.50)$$

Anche in questo caso si possono analizzare le rappresentazioni tensoriali e studiarne la decomposizione in sottoparti irriducibili. Si riportano di seguito alcuni esempi di particolare interesse fisico.

Si considerino, per prima cosa, due tensori ψ^i e χ_j , il cui prodotto fornisce un tensore T^i_j che può essere decomposto estraendone la traccia, che è un invariante. Si trova, quindi, nelle due notazioni

$$(1, 0) \otimes (0, 1) = (1, 1) \oplus (0, 0) \iff 3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1 . \quad (1.51)$$

Considerando, invece, due tensori ψ^i e χ^j , il loro prodotto è un tensore T^{ij} che può essere decomposto separando la sua parte simmetrica da quella antisimmetrica: $T^{ij} = \frac{1}{2} (T^{ij} + T^{ji}) + \frac{1}{2} (T^{ij} - T^{ji}) \equiv S^{ij} + A^{ij}$. Siccome, poi, $\epsilon_{ijk} A^{ij} \sim A_k$, si ha

$$(1, 0) \otimes (1, 0) = (2, 0) \oplus (0, 1) \iff 3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3} . \quad (1.52)$$

Siano, ora ψ^i e χ^{jk} il cui prodotto fornisce un tensore con tre indici in alto del tipo T^{ijk} . Come prima, si procede separando la parte simmetrica da quella antisimmetrica e contraendo quest'ultima con il simbolo di Levi-Civita $\epsilon_{lij} = A^{ijk} \sim A_l^k$, ottenendo così

un tensore di tipo $(1, 1)$ a traccia nulla. La parte restante è totalmente simmetrica nei tre indici, pertanto

$$(1, 0) \otimes (2, 0) = (3, 0) \oplus (1, 1) \iff 3 \otimes 6 = 10 \oplus 8. \quad (1.53)$$

Combinando i tre risultati precedenti si può immediatamente trovare come si decompone il prodotto di tre tensori di tipo $(1, 0)$, infatti

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = (6 \oplus \bar{3}) \otimes 3 = (6 \otimes 3) \oplus (\bar{3} \otimes 3) = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \quad (1.54)$$

Si riporta un ultimo esempio. Si considerino due tensori ψ_j^i e χ_l^k il cui prodotto si trasforma come un tensore T_{jl}^{ik} di tipo $(2, 2)$. Per prima cosa si possono definire i tensori $P_j^k = \psi_j^i \chi_i^k$ e $Q_l^i = \psi_j^i \chi_l^j$, dai quali è possibile estrarre la traccia $P_j^j = Q_i^i$, che sottratta la tensore di partenza fornisce un tensore ora senza traccia \tilde{T}_{jl}^{ik} . A questo punto si può separare la parte simmetrica da quella antisimmetrica rispetto agli indici superiori ottenendo, così, un tensore A_{jl}^{ik} simmetrico negli indici inferiori. Infatti, sia $B_{mjl} \equiv \epsilon_{ikm} A_{jl}^{ik}$, esso è totalmente simmetrico in quanto $B_{mjl} \epsilon^{jln} = \epsilon_{ikm} \epsilon^{jln} A_{jl}^{ik} = 0$, essendo A_{jl}^{ik} senza traccia. Analogamente, si ha anche $B_{mjl} \epsilon^{mjp} = 0$. Dunque, B_{mjl} fornisce una rappresentazione irriducibile di tipo $(0, 3)$ e, ripetendo procedimenti del tutto analoghi rispetto agli indici in basso, si trova che un'altra rappresentazione irriducibile è data da un tensore di tipo $(3, 0)$. In conclusione, si ottiene

$$\begin{aligned} (1, 1) \otimes (1, 1) &= (2, 2) \oplus (3, 0) \oplus (0, 3) \oplus (1, 1) \oplus (1, 1) \oplus (0, 0) \\ &\quad \updownarrow \\ 8 \oplus 8 &= 27 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1. \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.8 Principali simmetrie di interesse fisico

Si conclude il presente capitolo elencando rapidamente le principali simmetrie che si incontrano in fisica.

1. Simmetrie continue dello spazio-tempo:

- (a) **Traslazioni spaziali.** Tale simmetria si basa sull'omogeneità dello spazio, in base alla quale i fenomeni fisici devono essere riproducibili in ogni luogo, e consta di trasformazioni del tipo $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$, con \mathbf{a} costante vettoriale tridimensionale. La legge di conservazione associata, per il teorema di Noether, è quella della quantità di moto.
- (b) **Traslazioni temporali.** Tale simmetria si basa, invece, sull'assunto dell'omogeneità del tempo, che afferma che i fenomeni fisici devono essere riproducibili in tempi diversi, e consta di trasformazioni del tipo $t \rightarrow t + a_0$, con a_0 costante scalare. La legge di conservazione associata è quella dell'energia.

- (c) Rotazioni tridimensionali. Tale simmetria riflette l'isotropia dello spazio, secondo cui il comportamento di un sistema isolato è indipendente dalla sua orientazione nello spazio, e consta di trasformazioni del tipo $x^i \rightarrow x'^i \equiv R^i_j x^j$, con $i, j = 1, 2, 3$, x^i componente i -esima di un vettore tridimensionale \mathbf{x} e R matrice ortogonale 3×3 . La legge di conservazione associata è quella del momento angolare.
- (d) Trasformazioni di Lorentz. Si tratta della simmetria alla base della relatività ristretta, basata su trasformazioni del tipo

$$\begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \longrightarrow \Lambda \begin{pmatrix} t' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

con Λ matrice 4×4 , detta matrice di Lorentz.

2. Simmetrie discrete dello spazio-tempo:

- (a) Trasformazione di parità. Del tipo $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, si tratta di una simmetria di tutte le interazioni fondamentali, ad eccezione dell'interazione debole.
- (b) Inversione temporale. Del tipo $t \rightarrow -t$, è una simmetria violata nella termodinamica macroscopica e in alcuni processi deboli.
- (c) Traslazioni e rotazioni discrete in un reticolo. Si tratta di due simmetrie che emergono, per esempio, in cristallografia.

3. Simmetrie di permutazione: si tratta di simmetrie proprie di sistemi contenenti più particelle identiche e quantisticamente indistinguibili.

4. Simmetrie di gauge e conservazione di carica: si tratta di simmetrie di spazi interni in cui la lagrangiana del sistema è invariante sotto trasformazioni locali e non globali. L'esempio più semplice è quello associato all'interazione elettromagnetica e a cui corrisponde la legge di conservazione della carica elettrica.

5. Simmetrie interne della fisica nucleare e della fisica delle particelle elementari: si tratta di simmetrie come quella di isospin, discussa in seguito nel presente elaborato. Ad oggi il Modello Standard descrive tre delle quattro interazioni fondamentali (ad eccezione dell'interazione gravitazionale) tramite una teoria di gauge associata al gruppo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$.

Capitolo 2

Simmetria di Isospin

“From somewhere had come the divine message forbidding to think about any other particle. To think outside of these limits was to be arrogant, not to fear the wrath of the gods. It was because the concept that matter continues forever had been a tradition since the time of Democritus and Epicurus.”

Hideki Yukawa

Nel 1932 James Chadwick scoprì il neutrone, una particella all’epoca ancora sconosciuta, elettricamente neutra e quasi prossima, per massa, al protone. Il quadro delle interazioni fondamentali dovette, quindi, arricchirsi di una nuova interazione, più intensa di quella elettromagnetica, in quanto capace di tenere insieme protoni e neutroni all’interno dei nuclei atomici, e a corto raggio: la forza nucleare forte.

I primi tentativi interpretativi proposero un modello in cui il neutrone appariva come una particella costituita da un protone e da un elettrone: ciò permetteva di spiegare la neutralità di carica elettrica e la piccola differenza di massa rispetto al singolo protone (il neutrone risulta, infatti, leggermente più massivo). Sul calco dell’elettromagnetismo, l’interazione forte venne, di conseguenza, pensata come mediata dagli elettroni, scambiati reciprocamente fra le due particelle. Tuttavia, una visione di questo tipo, che non prevede che due protoni possano interagire fortemente, fu subito confutata dalle evidenze sperimentali.

Il problema venne risolto, nello stesso anno, da Werner Heisenberg, il quale intuì la possibilità di pensare neutrone e protone come due diversi stati di una stessa particella: il nucleone. La piccola differenza di massa fra le due particelle veniva, così, imputata al fatto che il protone, a differenza del neutrone, è dotato di carica, suggerendo, cioè,

che se fosse idealmente possibile spegnere l'interazione elettromagnetica, tale differenza di massa non sussisterebbe. Per quanto riguarda, poi, l'evidenza sperimentale per cui l'intensità della forza forte è circa la stessa qualunque coppia di nucleoni si consideri, lo stesso Heisenberg propose che l'interazione forte fosse invariante sotto un gruppo di simmetria che trasforma il neutrone e il protone in combinazioni lineari dell'uno e dell'altro. In accordo con il teorema di Noether, a tale simmetria deve essere associata una legge di conservazione di una quantità fisica, chiamata isospin: gli unici processi forti permessi sono, dunque, soltanto quelli che conservano l'isospin. La simmetria di isospin, nome coniato alcuni anni più tardi da Eugene Wigner, rappresenta il primo esempio di simmetria approssimata della storia della fisica.

Per quanto riguarda, invece, la natura a corto raggio dell'interazione forte, nel 1935 Hideki Yukawa postulò che l'interazione forte fosse generata dallo scambio fra i nucleoni di una nuova particella, sempre in analogia con l'interazione elettromagnetica generata dallo scambio di fotoni fra due particelle cariche. Tale particella, chiamata pione, in virtù del principio di indeterminazione, può esistere soltanto per un tempo, e quindi entro un raggio, limitato, pena la violazione della conservazione dell'energia. Noto il raggio di interazione della forza forte, Yukawa riuscì a ricavare una stima di alcune proprietà fisiche del pione, quali massa e carica, molti anni prima della sua scoperta sperimentale.

Nel presente capitolo si descrive la simmetria di isospin alla luce della teoria dei gruppi, mostrando come qualsiasi particella che interagisca fortemente debba appartenere a una rappresentazione del gruppo $SU(2)$ e come particelle appartenenti alla stessa rappresentazione, simili per massa ed energia, appartengano a dei multipletti di isospin. Anche i pioni, quindi, interagendo fortemente con i nucleoni, devono trasformarsi sotto questo gruppo di simmetria: in particolare, la teoria richiede che i pioni appartengano a un tripletto, prevedendo che insieme ai pioni carichi π^+ e π^- , già noti a Yukawa, vi sia anche una controparte neutra: il π^0 . Infine, vengono brevemente analizzati alcuni processi di scattering fra nucleoni, con una particolare attenzione al ruolo dell'isospin in questo quadro teorico.

2.1 Isospin

Le osservazioni sperimentali riportano per le masse del protone e del neutrone:

$$M_p \approx 938.27 \text{ MeV}/c^2, \quad M_n \approx 939.57 \text{ MeV}/c^2,$$

valori talmente prossimi da indurre Heisenberg a ipotizzare che protone e neutrone siano in realtà due stati di una stessa particella, chiamata nucleone.

Il nucleone è, quindi, un sistema a due stati, pertanto, dalla teoria quantistica, il corrispondente spazio di Hilbert è bidimensionale e una base di vettori complessi per

tale spazio è convenzionalmente data dai ket:

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

che descrivono, rispettivamente, lo stato di protone e quello di neutrone. Un generico stato sarà, quindi, dato dalla combinazione lineare dei ket di base:

$$|N\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = |p\rangle c_1 + |n\rangle c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad (2.2)$$

dove $|c_1|^2$ e $|c_2|^2$ rappresentano, rispettivamente, la probabilità di trovare il sistema nello stato $|p\rangle$ e nello stato $|n\rangle$, inoltre $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, in quanto la funzione d'onda che descrive il nucleone deve essere normalizzata per poter ammettere un'interpretazione probabilistica. Il gruppo di trasformazioni rispetto al quale l'interazione forte sia invariante, dovrà, quindi, essere rappresentato da matrici complesse unitarie e unimodulari: si tratta del gruppo $SU(2)$.

In questo contesto si indicano con I^a i generatori della corrispondente algebra di Lie, definiti, dalla (1.25), come $I^a \equiv \sigma^a/2$, e con I^\pm gli operatori di innalzamento e abbassamento, i quali agiscono trasformando protone in neutrone e viceversa:

$$I^-|p\rangle = |n\rangle \quad I^+|n\rangle = |p\rangle. \quad (2.3)$$

Di seguito si utilizzerà la notazione $|N\rangle \equiv |I, I^3\rangle$, con I^3 terza componente dell'isospin, in analogia con la teoria dello spin. Dunque, i ket di base saranno indicati come

$$|p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle,$$

assumendo che il nucleone si trasformi secondo la rappresentazione definente, bidimensionale ($I = \frac{1}{2}$, appunto) di $SU(2)$, come postulato da Heisenberg. Si può, infine, definire l'operatore carica elettrica

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y, \quad (2.4)$$

dove $I_3 \equiv I^3$ è la terza componente dell'isospin, mentre Y è un operatore non appartenente a $SU(2)$ che prende il nome di ipercarica. Per i nucleoni si vede subito che $Y = 1$.

2.2 Pioni

Yukawa postulò che l'interazione forte fosse mediata dallo scambio fra i nucleoni di un nuovo tipo di particella, il pione, che, interagendo con i nucleoni, deve trasformarsi sotto

isospin. Per individuare il multipletto di isospin a cui appartengono i pioni, si utilizza il seguente semplice argomento. I pioni interagiscono con i nucleoni tramite processi fondamentali del tipo $p \rightarrow n + \pi^+$ e $n \rightarrow p + \pi^-$, in cui lo stato iniziale è caratterizzato da $I = \frac{1}{2}$, pertanto, dovendo l'interazione forte conservare l'isospin, anche nello stato finale si deve avere $I = \frac{1}{2}$. Ricorrendo, quindi, alla teoria dei gruppi, dalla (1.36) per lo stato finale si ha

$$\frac{1}{2} \otimes I_\pi = \left(I_\pi + \frac{1}{2} \right) \oplus \left| I_\pi - \frac{1}{2} \right| ,$$

dove gli unici valori permessi per garantire la conservazione dell'isospin nell'intero processo sono $I_\pi = 0, 1$. Siccome, però, $I_\pi = 0$ corrisponde a un singoletto e un singoletto non può, evidentemente, contenere i due π^+ e π^- , se ne deduce che $I_\pi = 1$, che corrisponde, invece, a un tripletto, cioè alla rappresentazione irriducibile tridimensionale del gruppo $SU(2)$. Storicamente fu questo argomento teorico che portò alla previsione dell'esistenza di un terzo pione: il π^0 , il quale è neutro di carica elettrica, in accordo con la (2.4), in quanto per i pioni $Y = 0$.

I due pioni carichi π^+ e π^- furono scoperti sperimentalmente nel 1947, mentre il π^0 fu scoperto tre anni dopo, nel 1950. Inoltre, coerentemente con quanto previsto teoricamente, appartenendo allo stesso tripletto, le masse dei tre pioni risultarono piuttosto prossime:

$$M(\pi^+) \approx 139.57 MeV/c^2 \quad M(\pi^-) \approx 139.57 MeV/c^2 \quad M(\pi^0) \approx 134.98 MeV/c^2 .$$

2.3 Isospin nei processi di scattering

Fra le numerose conferme sperimentali dell'isospin vi è la corretta previsione del valore della sezione d'urto nei processi di scattering nucleari.

Si analizzano, quindi, i due seguenti processi di scattering nucleone-nucleone con produzione di deuterio:

$$p + p \rightarrow d + \pi^+ \tag{2.5a}$$

$$p + n \rightarrow d + \pi^0 . \tag{2.5b}$$

I valori dell'isospin dei nucleoni e dei pioni sono noti, mentre per il deuterio, stato legato p - n , si trova $I = 0$, in quanto $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$ e la soluzione $I = 1$ è esclusa dalle osservazioni sperimentali, non essendovi evidenze che il deuterio appartenga a un tripletto insieme a ipotetici stati legati p - p e n - n (come si trova utilizzando sul deuterio gli operatori di innalzamento e abbassamento). Dunque, per entrambi i processi (2.5a) e (2.5b), l'isospin totale dello stato finale è $0 \otimes 1 = 1$, mentre per gli stati iniziali si ha, rispettivamente $|I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\rangle \otimes |I' = \frac{1}{2}, I'_3 = \frac{1}{2}\rangle \equiv |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ e $|I = \frac{1}{2}, I_3 = \frac{1}{2}\rangle \otimes |I' = \frac{1}{2}, I'_3 = -\frac{1}{2}\rangle \equiv |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$, nella notazione già adottata in precedenza. Si è chiaramente di fronte allo stesso problema

di decomposizione di Clebsch-Gordan dell'Es.1.6.1. Richiamando, quindi, le relazioni della (1.32) opportunamente invertite, si trova:

$$|p, p\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |1, 1\rangle \quad (2.6)$$

$$|p, n\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle) , \quad (2.7)$$

dove la seconda equazione mostra che lo stato iniziale del secondo processo di scattering è una sovrapposizione degli stati con $I = 1$ e $I = 0$. Tuttavia, essendo nello stato finale $I = 1$, in accordo con la conservazione dell'isospin, la componente con $I = 0$ non dà contributo. Si è, così, trovato che l'ampiezza del processo (2.5b) è scalata di un fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$ rispetto a quella del processo (2.5a).

Quanto trovato può anche essere formalizzato introducendo l'operatore di transizione \mathcal{T} che permette di passare dallo stato iniziale a quello finale, ottenendo:

$$\langle d, \pi^+ | \mathcal{T} | p, p \rangle = \langle 1, 1 | \mathcal{T} | 1, 1 \rangle \quad (2.8a)$$

$$\langle d, \pi^0 | \mathcal{T} | p, n \rangle = \langle 1, 0 | \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 0\rangle - |0, 0\rangle) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle 1, 0 | \mathcal{T} | 1, 0 \rangle , \quad (2.8b)$$

dove il modulo quadrato di tali elementi di matrice definisce la sezione d'urto quantistica, pertanto si trova:

$$\frac{\sigma(p + p \rightarrow d + \pi^+)}{\sigma(p + n \rightarrow d + \pi^0)} = 2 , \quad (2.9)$$

valore coerente con quello misurato sperimentalmente, compatibilmente con la natura approssimata della simmetria di isospin.

Si tratta, come è evidente, di un approccio molto potente in quanto permette, con poca e semplice matematica, di fare previsioni accurate prescindendo totalmente dai dettagli dinamici del problema.

Capitolo 3

Modello a Quark

*Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside
the mark.*

James Joyce, Finnegans Wake

Con la fine della guerra e la realizzazione di rilevatori di particelle capaci di raggiungere energie sempre maggiori, la fisica fondamentale assistette alla scoperta di una grande quantità di nuove particelle, tutte interagenti fortemente e denominate, collettivamente, con il nome di adroni: furono gli anni della cosiddetta *proliferazione degli adroni*. Contemporaneamente, dall'analisi dei prodotti delle collisioni si scoprì, in modo puramente empirico, che i processi forti obbediscono a una legge di conservazione di una nuova quantità fisica, denominata stranezza (*strangeness*), propria solo di alcune particelle.

L'insieme di queste scoperte portò i fisici sperimentali ad attuare una grande classificazione delle particelle, che vennero suddivise in leptoni, che non sentono l'interazione forte, e adroni, che, invece, interagiscono fortemente. Questi ultimi furono, poi, suddivisi in barioni, tendenzialmente più massivi, e mesoni, tendenzialmente meno massivi. I barioni vennero ulteriormente suddivisi in nucleoni e iperoni.

Cominciò, quindi, ad apparire sempre più chiaro che la natura dovesse presentare una simmetria più grande della semplice simmetria di isospin.

Nel 1956 Shoichi Sakata tentò la generalizzazione più naturale, quella, cioè, dal gruppo $SU(2)$ al gruppo $SU(3)$, ipotizzando che il protone, il neutrone e l'iperone lambda si trasformassero come un tripletto nella rappresentazione definente di $SU(3)$. Una teoria di questo tipo non era, però, in grado di accomodare i restanti cinque barioni nelle altre rappresentazioni del gruppo e venne scartata.

Occorre aspettare fino al 1961, quando, indipendentemente, Murray Gell-Mann e Yuval Ne'eman compresero che gli otto barioni appartengono alla rappresentazione otto-

dimensionale di $SU(3)$. Questo schema, in seguito avvalorato da numerose conferme sperimentali, è noto, nella denominazione di Gell-Mann, come “the eightfold way”.

Due anni più tardi, nel 1963, lo stesso Gell-Mann e, indipendentemente, George Zweig sciolsero un altro importante nodo della teoria, ossia il problema dell’assenza di un tripletto di particelle corrispondente alla rappresentazione fondamentale del gruppo $SU(3)$: venne formulato il *modello a quark*. Venne, cioè, proposta l’esistenza di tre particelle fondamentali: quark up, quark down e quark strange, nella denominazione di Gell-Mann, fino ad allora sempre sfuggite alla rivelazione sperimentale perché confinate all’interno degli adroni, i quali non sono, quindi, particelle elementari, ma particelle composte. In particolare, la teoria dei gruppi suggerisce che i barioni siano stati legati di tre quark, mentre i mesoni di un quark e di un antiquark, compatibilmente con l’osservazione sperimentale per cui i barioni sono generalmente più massivi dei mesoni.

Nel presente capitolo, dunque, si studia come sia possibile generalizzare la simmetria di isospin del gruppo $SU(2)$, trattata nel precedente capitolo, tramite una simmetria associata al gruppo $SU(3)$. Viene mostrato come arrangiare gli adroni all’interno di opportuni multipletti delle rappresentazioni di $SU(3)$ e vengono fornite le illustrazioni grafiche di alcuni diagrammi dei pesi. Viene chiarito il ruolo dei quark all’interno del modello e vengono riportate le considerazioni teoriche che storicamente portarono all’introduzione della carica di colore. Alla luce delle precedenti considerazioni, si giunge, quindi, a chiarire la natura composta degli adroni. Si conclude il capitolo con alcune considerazioni sui concetti di libertà asintotica e confinamento, formalizzati nel postulato fondamentale della cromodinamica quantistica sulla neutralità di carica di colore.

3.1 Oltre l’isospin: the eightfold way

Contemporaneamente alla scoperta di un numero sempre maggiore di particelle interagenti fortemente, cioè di adroni, vennero osservate nei processi di collisione anche alcune regolarità, sintetizzabili in alcune leggi empiriche. In particolare, si osservò che alcune particelle erano prodotte sempre in coppia, come il kaone K^0 e l’iperone Σ^+ , esiti da collisioni nucleari. Ciò portò ad ipotizzare l’esistenza di una nuova grandezza fisica, denominata stranezza e indicata S , conservata nei processi forti ed elettromagnetici, ma non nei processi deboli.

Ormai chiaro che una tale abbondanza di particelle dovesse nascondere una più grande simmetria, si pose il problema di generalizzare la simmetria di isospin del gruppo $SU(2)$ a un gruppo di rango superiore. Tale operazione, però, non fu semplice, in quanto la grande variabilità di massa degli adroni mostrava che la simmetria cercata doveva essere ancora più approssimata della già approssimata simmetria di isospin. Dopo diversi tentativi di accomodare i barioni di spin $\frac{1}{2}$ nella rappresentazione definente di $SU(3)$ o in quella di gruppi di rango superiore, tutti rivelatisi fallimentari, Gell-Mann e, indipendentemente, Neéman riuscirono ad individuare la corretta generalizzazione nel gruppo

$SU(3)$, intuendo che gli otto barioni dovevano essere accomodati nel multipletto della rappresentazione otto-dimensionale di tale gruppo. Tale schema è anche noto come “the eightfold way”. Forte del successo di questa proposta, sempre Gell-Mann ipotizzò che le nove risonanze barioniche (stati eccitati che decadono molto rapidamente) note appartenessero alla rappresentazione irriducibile 10-dimensionale, cioè costituissero un decupletto, prevedendo, quindi, in modo puramente teorico, l’esistenza di un’ulteriore particella: il barione Ω^- , effettivamente scoperto poco tempo dopo.

A questo punto, richiamando i risultati teorici per il gruppo $SU(3)$, ottenuti nell’omonima sezione, si può mostrare come visualizzare tali schemi tramite i diagrammi dei pesi, ossia gli insiemi dei punti del piano $(i_3, i_8) = (i_3, \frac{\sqrt{3}}{2}y)$ corrispondenti a ciascuno stato della rappresentazione. Per quanto riguarda l’ottetto dei barioni di spin $\frac{1}{2}$, partendo dal protone $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, tramite il vettore radice \vec{I}^- , si giunge al neutrone $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$; invece, con \vec{U}^- dal protone si giunge al barione Σ^+ $(1,0)$; da questo, tramite \vec{V}^- , si giunge al barione Ξ^0 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$; con \vec{V}^- ancora dal protone si arriva ai barioni Σ^0 e Λ $(0,0)$; da qui, con \vec{I}^- , si giunge al barione Σ^- $(-1,0)$; infine, da quest’ultimo, tramite \vec{U}^- , si giunge al barione Ξ^- $(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Il diagramma dei pesi che ne risulta è riportato in Fig.3.1. Si osserva che oltre al noto doppietto di isospin costituito da protone e neutrone, i tre barioni Σ costituiscono un tripletto, i due barioni Ξ un doppietto, mentre in barione Λ un singoletto. Tutti gli otto barioni obbediscono, poi, alla (2.4), dove il numero quantico di ipercarica Y è definito come la somma del numero barionico e del numero di stranezza, $Y = B + S$. Il numero barionico è un numero quantico che vale +1 per i barioni e 0 per i mesoni.

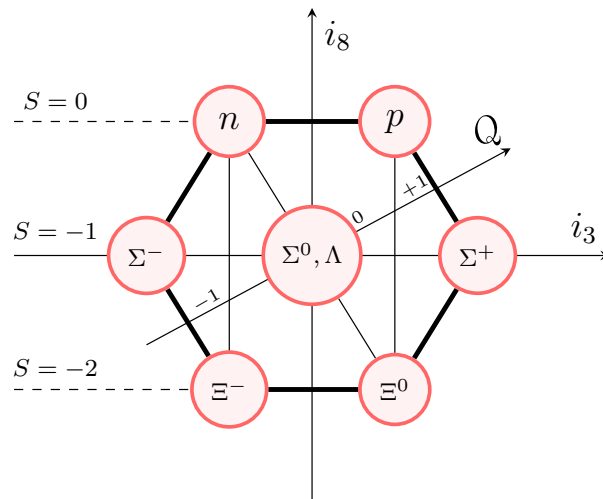


Figura 3.1: Ottetto barionico.

In modo del tutto analogo, si può costruire il diagramma dei pesi del decupletto di risonanze barioniche, per esempio a partire dal barione Δ^- $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Lo schema è riportato

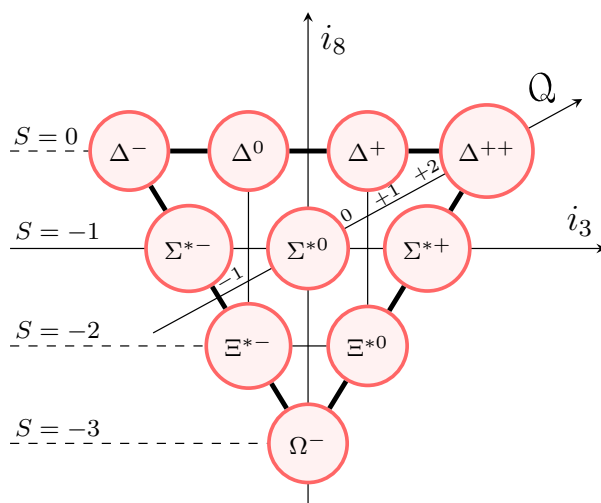


Figura 3.2: Decupletto barionico.

in Fig.3.2.

Per quanto riguarda, invece, i mesoni, oltre ai già citati pioni, se ne scoprirono sperimentalmente altri, per un totale di otto, raggruppabili, per massa, in multipletti di isospin. Come per i barioni, poi, anche gli otto mesoni di spin zero possono essere accomodati nella rappresentazione 8-dimensionale del gruppo $SU(3)$, ottenendo un analogo diagramma dei pesi riportato in Fig.3.3. I quattro mesoni K sono le particelle strane meno massive e, come si evince anche dal diagramma dei pesi, K^+ e K^0 costituiscono un doppietto di isospin, come anche le rispettive antiparticelle, K^- e \bar{K}^0 .

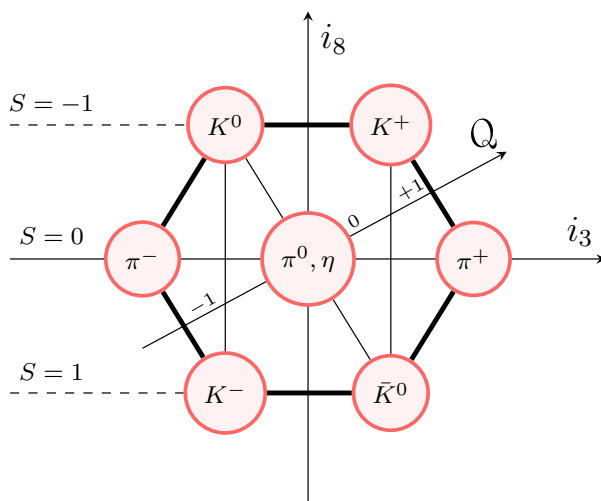


Figura 3.3: Ottetto mesonico.

3.2 Quark

I quark furono introdotti indipendentemente da Gell-Mann e Zweig (da quest'ultimo con il nome di *aces*, assi, pensando fossero di soli quattro tipi, come le carte da gioco) in corrispondenza della rappresentazione fondamentale di $SU(3)$. I quark up, down e strange (u, d, s) appartengono, quindi, alla $\mathbf{3}$, mentre la $\bar{\mathbf{3}}$ definisce i corrispondenti antiquark ($\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}$). Il diagrammi dei pesi della rappresentazione fondamentale e della sua coniugata constano di soli tre punti posti ai vertici di un triangolo equilatero. Un'illustrazione è riportata in Fig.3.4.

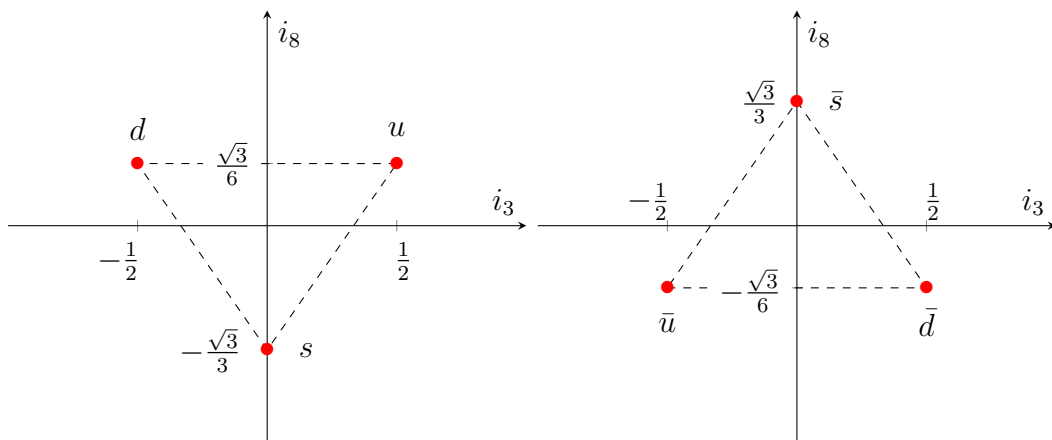


Figura 3.4: Diagramma dei pesi per i tre quark up, down e strange, a sinistra, e per i tre antiquark antiup, antidown e antistrange, a destra.

La scoperta teorica dei tre quark up, down e strange fu di fondamentale importanza per la comprensione della struttura interna di barioni e mesoni, che si rivelarono essere non particelle elementari, ma stati legati di quark e antiquark. In particolare, i barioni sono stati legati di tre quark (o antiquark gli antibarioni), mentre i mesoni sono stati legati di un quark e un antiquark, come si vedrà meglio in seguito.

Oltre a chiarire la natura composta degli adroni, la formulazione del modello a quark permise di fare luce sulla natura approssimata della simmetria di isospin, dovuta, quindi, in gran parte alle masse diverse, per quanto prossime, dei due quark up e down che costituiscono protoni e neutroni. Un protone è, infatti, uno stato legato di due quark up e un quark down, mentre il neutrone di due quark down e un quark up. Il fatto che l'entità di tale differenza sia circa uguale a quella dell'effetto dell'interazione elettromagnetica si rivelò puramente accidentale.

Un anno dopo la proposta del modello di Gell-Mann e Zweig, Sheldon Lee Glashow e James Bjorken proposero l'esistenza di un quarto sapore di quark, il quark charm,

sulla base di considerazioni legate a processi deboli. Nel 1973 Makoto Kobayashi e Toshihide Maskawa, per spiegare le evidenze sperimentali di violazione della simmetria CP, portarono il numero di quark a sei, introducendo quelli che, in seguito, furono denominati quark top e quark bottom. L'esistenza di tutti e sei i quark fu confermata dalle evidenze sperimentali.

Si riassumono in Tab.3.1 le caratteristiche fisiche più importanti dei quark, insieme al valore dei numeri quantici discussi in precedenza.

Quark	Massa	Q	I	I_3	Y	B	S
Up (u)	$2.2 \text{ MeV}/c^2$	$+2/3e$	$+1/2$	$+1/2$	$+1/3$	$1/3$	0
Down (d)	$4.7 \text{ MeV}/c^2$	$-1/3e$	$+1/2$	$-1/2$	$+1/3$	$1/3$	0
Charm (c)	$1.28 \text{ GeV}/c^2$	$+2/3e$	0	0	0	$1/3$	0
Strange (s)	$96 \text{ MeV}/c^2$	$-1/3e$	0	0	$-2/3$	$1/3$	-1
Top (t)	$173.1 \text{ GeV}/c^2$	$+2/3e$	0	0	0	$1/3$	0
Bottom (b)	$4.18 \text{ MeV}/c^2$	$-1/3e$	0	0	0	$1/3$	0

Tabella 3.1: Principali caratteristiche fisiche dei sei quark. I valori riportati per le masse dipendono dal modello e sono, ovviamente, valori approssimati, non essendo possibile effettuare misure dirette.

3.3 Carica di colore

Una volta compreso il ruolo dei quark all'interno della materia, si presentò il problema di giustificare l'esistenza di alcuni adroni, come il barione Ω^- , in cui tre quark strange coesistono nello stesso stato quantico violando, apparentemente, il principio di esclusione di Pauli. I quark, infatti, hanno spin $\frac{1}{2}$, pertanto sono descritti dalla statistica di Fermi-Dirac.

Il problema fu risolto nel 1964 da Oscar W. Greenberg introducendo un nuovo grado di libertà interno, denominato carica di colore, descrivibile, matematicamente, tramite un vettore complesso tridimensionale. Ogni sapore di quark può, quindi, esistere in tre diversi colori, convenzionalmente rosso, verde e blu, o anticolori, antirosso, antiverde e antiblu. Quark dello stesso sapore, ma di diverso colore hanno esattamente la stessa massa.

Il gruppo delle trasformazioni che cambiano il colore dei quark, lasciandone inalterato il sapore, è il gruppo $SU(3)$, convenzionalmente indicato $SU(3)_{color}$ per distinguerlo dal gruppo $SU(3)_{flavour}$ dell'eightfold way. Tuttavia, a differenza della simmetria di sapore che è approssimata, quella di colore è una simmetria esatta.

La teoria prevede, inoltre, l'esistenza di $3^2 - 1 = 8$ campi di gauge, chiamati campi gluonici, in quanto tengono "incollati" i quark all'interno degli adroni. L'interazione fra quark è, dunque, mediata dai gluoni come l'interazione elettromagnetica dai fotoni.

Come i fotoni, poi, anche i gluoni hanno massa nulla, tuttavia, a differenza dei fotoni che sono privi di carica elettrica, i gluoni sono dotati di carica di colore, pertanto sono autointeragenti.

Tale teoria dell'interazione forte è una teoria di gauge locale chiamata cromodinamica quantistica (QCD).

La QCD, inoltre, postula la neutralità di carica di colore dei composti adronici, per rendere conto delle evidenze sperimentali in base alle quali tutti gli adroni osservati sono neutri di carica di colore, cioè, come si usa anche dire, sono bianchi.

Nel linguaggio della teoria di gruppi, la neutralità di carica di colore corrisponde a un tensore di rango zero, cioè a uno scalare. Sia, quindi

$$\Psi_{\mathbf{q}} = \psi_{space} \otimes \xi_{spin} \otimes \phi_{flavour} \otimes c_{color} \quad (3.1)$$

la funzione d'onda complessiva di un composto adronico, concentrando l'attenzione sulla sola funzione d'onda di colore, un singolo quark sarà descritto da c^i , mentre un antiquark da \bar{c}_i , con $i = 1, 2, 3$. Per gli adroni, invece, le combinazioni più semplici che danno luogo a degli scalari si trovano imponendo le richieste di unitarietà e unimodularità. Pertanto, mesoni, barioni e antibarioni, saranno, rispettivamente, descritti da:

$$\bar{c}_i c^j \delta^i_j \quad (3.2a)$$

$$c^i c^j c^k \epsilon_{ijk} \quad (3.2b)$$

$$\bar{c}_i \bar{c}_j \bar{c}_k \epsilon^{ijk} . \quad (3.2c)$$

Storicamente, furono tali relazioni a suggerire l'identificazione dei mesoni con stati legati di un quark e un antiquark e quella dei barioni con stati legati di tre quark.

3.4 Struttura degli adroni leggeri

3.4.1 Mesoni

Nella presente sezione si discuterà brevemente la struttura interna dei mesoni leggeri, nome con cui sono indicati i composti mesonici costituiti dai soli quark up, down e strange, e dai corrispondenti antiquark, detti leggeri in quanto meno massivi rispetto agli altri tre sapori di quark. In generale, sono ammessi, e sono stati osservati sperimentalmente, anche stati legati dei quark charm e bottom, che qui non saranno trattati. Non possono, invece, esistere stati legati contenti quark top, in quanto, a causa della sua massa molto elevata (vedasi Tab.3.1), esso decade debolmente prima di poter formare composti per interazione forte.

Quark up e quark down formano un isodoppietto e lo stesso i corrispondenti antiquark

$$u = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad d = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.3a)$$

$$\bar{d} = -\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad \bar{u} = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle, \quad (3.3b)$$

richiamando, quindi, ancora una volta i risultati (1.32) dell'Es.1.6.1, combinando i due stati con $I = \frac{1}{2}$ si ottiene un tripletto e un singoletto di isospin, che, tenendo conto del segno meno e utilizzando una nomenclatura più fisica, hanno espressione:

$$|1, 1\rangle = -|u\bar{d}\rangle \quad (3.4)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (3.5)$$

$$|1, -1\rangle = |d\bar{u}\rangle \quad (3.6)$$

lo stato di tripletto, e

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle) \quad (3.7)$$

quello di singoletto. Lo stato di tripletto, fisicamente, corrisponde ai pioni nel caso di mesoni pseudoscalari e ai mesoni ρ nel caso di mesoni vettori. Inoltre, è convenzione, all'interno di un multipletto, assegnare alla particella con carica maggiore il maggior valore di I_3 , pertanto:

$$|\pi^+\rangle, |\rho^+\rangle = -|u\bar{d}\rangle \quad (3.8)$$

$$|\pi^0\rangle, |\rho^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle) \quad (3.9)$$

$$|\pi^-\rangle, |\rho^-\rangle = |d\bar{u}\rangle. \quad (3.10)$$

Mentre lo stato di singoletto corrisponde, per quanto riguarda i mesoni pseudoscalari, ai mesoni η e η' , mentre per quanto riguarda i mesoni vettori, ai mesoni ϕ e ω (per chiarimenti riguardo alla distinzione fra mesoni pseudoscalari e vettori e altre considerazioni sulla simmetria di parità, si rimanda all'omonima appendice). Nel caso pseudoscalare:

$$|\eta\rangle, |\eta'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle). \quad (3.11)$$

A questo punto ci si aspetterebbe che i mesoni pseudoscalari, $\pi^+, \pi^0, \pi^-, \eta, \eta'$, abbiano tutti approssimativamente la stessa massa, in quanto stati legati dei medesimi quark. Tuttavia, per i mesoni η e η' sperimentalmente si trovarono valori delle masse molto maggiori, in particolare la massa di η risultò pari a circa $549 MeV/c^2$, mentre quella di

η' circa a $958 MeV/c^2$, ben più grandi dei circa $140 MeV/c^2$ dei pioni. Il problema può essere risolto ammettendo che i mesoni η , η' contengano al loro interno un altro sapore di quark, più massivo dei quark up e down e sempre nella combinazione quark-antiquark. Confrontando le masse dei due mesoni con quelle dei quark, si trova subito che l'unico sapore di quark compatibile è lo strange e, in particolare, la teoria prevede le due seguenti composizioni:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} (u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \quad (3.12a)$$

$$\eta_8 = \frac{1}{\sqrt{6}} (u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) , \quad (3.12b)$$

dove i pedici si riferiscono al fatto che η_1 appartiene a un singoletto e η_8 ad un ottetto di $SU(3)_{sapore}$. Tuttavia, per avere compatibilità con i dati sperimentali, occorre assumere che i due stati di ottetto e singoletto siano miscelati, così che l'effettiva composizione dei due mesoni sia una combinazione lineare dei due stati, formalmente:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_8 \\ \eta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta' \end{pmatrix} , \quad (3.13)$$

dove θ è chiamato angolo di miscelamento e, affinché siano riprodotti i valori di massa osservati, deve essere $\theta = -11.5^\circ$.

Per mesoni vettori ϕ e ω è, invece, prevista la seguente composizione:

$$\phi = s\bar{s} \quad (3.14a)$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} (u\bar{u} + d\bar{d}) , \quad (3.14b)$$

pertanto ϕ e ω sono prossimi al miscelamento ideale, termine con cui si indica la perfetta separazione del sapore strange dai sapori up e down.

Per completezza, si riporta in Tab.3.2 e in Tab.3.3, rispettivamente, l'elenco dei mesoni pseudoscalari e vettori, specificando i multipletti di sapore, i numeri quantici di isospin e stranezza, la composizione di quark e la massa.

Si conclude osservando che, siccome ogni particella rilevabile in natura deve essere un singoletto di carica di colore, ossia bianca, ed essendo i mesoni costituiti da coppie quark-antiquark, essi saranno caratterizzati da una struttura di colore del tipo colore-anticolore, i.e. rosso-antiroso, verde-antiverde o blu-antiblu.

3.4.2 Barioni

La struttura a quark dei barioni è, in generale, molto più complessa rispetto a quella dei mesoni: in quanto stati legati di tre quark (o antiquark), i barioni sono, infatti,

I	I_3	S	Mesone	Composizione	Massa (MeV/c^2)	
1	1	0	π^+	$u\bar{d}$	140	} ottetto
1	-1	0	π^-	$d\bar{u}$	140	
1	0	0	π^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	135	
1/2	1/2	1	K^+	$u\bar{s}$	494	
1/2	-1/2	1	K^0	$d\bar{s}$	498	
1/2	-1/2	-1	K^-	$\bar{u}s$	494	
1/2	1/2	-1	\bar{K}^0	$\bar{d}s$	498	
0	0	0	η_8	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	549	
0	0	0	η_1	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	958	} singoletto

Tabella 3.2: Mesoni pseudoscalari leggeri.

I	I_3	S	Mesone	Composizione	Massa (MeV/c^2)	
1	1	0	ρ^+	ud	775	} nonet
1	-1	0	ρ^-	$d\bar{u}$	775	
1	0	0	ρ^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$	775	
1/2	1/2	1	K^{*+}	$u\bar{s}$	892	
1/2	-1/2	1	K^{*0}	$d\bar{s}$	896	
1/2	-1/2	-1	K^{*-}	$\bar{u}s$	892	
1/2	1/2	-1	\bar{K}^{*0}	$\bar{d}s$	896	
0	0	0	ω	$\frac{1}{\sqrt{6}}(d\bar{d} + u\bar{u} - 2s\bar{s})$	783	
0	0	0	ϕ	$\frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$	1019	

Tabella 3.3: Mesoni vettori leggeri.

fermioni, pertanto sono soggetti alle restrizioni imposte dal principio di esclusione di Pauli. Ci si limita, pertanto, a discutere brevemente i soli barioni leggeri.

I barioni sono stati legati di tre quark, i quali sono fermioni di spin $\frac{1}{2}$, pertanto, essendo

$$S = \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2},$$

lo spin totale ed essendo $L = 0$ il minimo momento angolare, lo stato fondamentale e il primo eccitato, saranno, rispettivamente, $J^P = \frac{1}{2}^+$ e $J^P = \frac{3}{2}^+$, anche indicati, utilizzando la notazione spettroscopica $^{2S+1}L_J$, come $^2S_{\frac{1}{2}}$ e $^4S_{\frac{3}{2}}$. Nella presente trattazione ci si limiterà, per semplicità, a questi due soli stati, benché siano stati osservati anche stati superiori. Storicamente, dall'analisi dei dati riguardanti i barioni rivelati sperimentalmente, emerse subito una singolarità: sembrava che affinché un barione, $J^P = \frac{1}{2}^+$ o $J^P = \frac{3}{2}^+$, potesse sussistere, la sua funzione d'onda dovesse essere simmetrica rispetto allo scambio di quark identici, in netto contrasto con il principio di Pauli. Come

già accennato, il problema fu risolto introducendo un nuovo grado di libertà interno, denominato carica di colore, descrivibile tramite un vettore complesso tridimensionale appartenente allo spazio di colore e a cui è associabile un nuovo numero quantico conservato dalle interazioni forti. Ovviamente, tale nuovo grado di libertà deve essere descritto da una funzione d'onda di colore antisimmetrica rispetto allo scambio di quark identici, al fine di garantire l'antisimmetria della funzione d'onda complessiva. In particolare, al fine di garantire la neutralità di carica di colore, la funzione d'onda che descrive lo stato di colore per i barioni deve essere

$$c_{color} = \frac{1}{\sqrt{6}} (rgb - rbg + gbr - grb + brg - bgr) \quad (3.15)$$

ed è la stessa per tutti i barioni.⁷

Per quanto riguarda, invece, la nomenclatura e la classificazione dei barioni, convenzionalmente si fa riferimento all'isospin e alla composizione di quark. In particolare, è possibile individuare sei gruppi: i barioni contenenti combinazioni di tre quark, up e/o down, sono chiamati N ($I = \frac{1}{2}$) o Δ ($I = \frac{3}{2}$); barioni contenenti due soli quark up e/o down sono chiamati Λ ($I = 0$) o Σ ($I = 1$) e, se non è diversamente specificato a pedice, il terzo quark è lo strange; barioni contenenti un solo quark up o down sono chiamati Ξ ($I = \frac{1}{2}$) e, anche in questo caso, se gli altri due quark sono pesanti, vengono specificati a pedice; infine, barioni che non contengono né quark up né quark down sono chiamati Ω ($I = 0$) e a pedice sono indicati i costituenti, se pesanti. Infine, a parità di simbolo, i barioni con $J = \frac{3}{2}$ sono indicati con un asterisco.

3.5 Libertà asintotica e confinamento

Per un certo tempo, dopo la proposta di Gell-Mann, non fu chiaro se i quark fossero entità fisiche realmente esistenti o soltanto astrazioni utili per fare ordine in un zoo di particelle sempre più vasto. Tuttavia, i tentativi sperimentali di estrarre e isolare i quark dagli adroni si rivelarono tutti fallimentari: l'energia prodotta dalla collisione di due adroni viene, infatti, sempre riconvertita per produrre adroni (in particolare mesoni) meno massivi. Con libertà asintotica si intende, dunque, la proprietà della forza forte di essere poco intensa (cioè caratterizzata da una costante di accoppiamento piuttosto piccola) quando i quark si trovano a brevi distanze, e di diventare, invece, sempre più intensa all'aumentare di tale distanza, rendendo, così, impossibile la separazione dei quark dagli adroni.

Ad oggi, si congetta, ma non è ancora stato dimostrato, che i quark siano entità fisiche effettivamente esistenti permanentemente confinate all'interno degli adroni. Analogamente, anche per i gluoni, che non sono mai stati osservati sperimentalmente, viene congetturato un confinamento analogo.

⁷Nell'equazione (3.15) si è utilizzata la notazione $r=red$, $g=green$, $b=blue$.

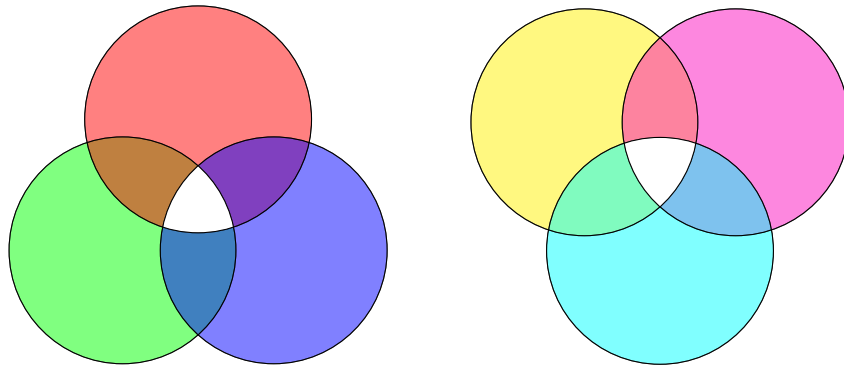


Figura 3.5: La sovrapposizione dei tre colori rosso, verde e blu dà luogo ad assenza di colore (a sinistra), così come la sovrapposizione dei tre anticolori, antirosso, antiverde e antiblu.

Il confinamento della carica di colore si traduce, quindi, nel fatto che in natura possano esistere solo stati legati di quark complessivamente bianchi, cioè neutri di carica di colore. In Fig.3.5 è mostrato come i tre colori e i tre anticolori possano combinarsi per dar luogo a composti bianchi.

Conclusioni

Con questa tesi si è cercato di sottolineare l'importanza del ruolo delle simmetrie nella fisica fondamentale formalizzandone il concetto nel contesto algebrico della teoria dei gruppi, senza la pretesa di esaurire un argomento così vasto sia dal punto di vista matematico, sia dal punto di vista fisico.

Nel XX secolo, infatti, molte furono le aree della teoria dei gruppi che conobbero importanti sviluppi e successi. A titolo esemplificativo si possono citare gli studi sui gruppi algebrici, in geometria algebrica, quelli sui gruppi topologici, in algebra astratta, o, ancora, quelli sui gruppi finiti, che trovarono il loro coronamento nella classificazione dei gruppi finiti semplici, realizzata intorno agli anni Ottanta.

Per quanto riguarda la fisica, invece, lo studio delle simmetrie non è limitato al mondo microscopico della fisica delle particelle, ma trova importanti applicazioni, per esempio, anche in Relatività, nello studio dei gruppi di Lorentz e Poincaré. Nella stessa fisica fondamentale, poi, l'argomento è molto più vasto e va ben oltre gli esempi proposti in questa tesi. Nelle precedenti pagine si è scelto di concentrare l'attenzione sull'interazione forte, discutendo le sue simmetrie, di sapore e di colore, ma anche la teoria debole, o elettrodebole, se si considera la sua unificazione all'elettromagnetismo, viene descritta tramite la teoria dei gruppi. L'intero Modello Standard è basato sulla teoria di Yang e Mills, teoria in cui viene proposta una simmetria di gauge non abeliana ed esatta, ben diversa delle simmetrie di sapore delle precedenti pagine, che, come si è visto, sono, invece, simmetrie approssimate e globali. Oltre il Modello Standard, poi, molte delle teorie ancora in attesa di un riscontro sperimentale, come le teorie che propongono l'unificazione delle tre interazioni fondamentali non gravitazionali, la teoria della supersimmetria (SUSY) o, ancora, la teoria delle stringhe, fanno tutte uso della teoria dei gruppi.

Appendice A

Simmetria di Parità

Nella presente appendice si discutono alcuni aspetti legati alla simmetria di parità, ovvero la proprietà di invarianza rispetto all'inversione degli assi spaziali di un sistema di riferimento. Si tratta di una simmetria discreta conservata da tutte le interazioni fondamentali della natura ad eccezione dell'interazione debole. Viene, inoltre, chiarito il concetto di parità intrinseca di una particella, con una particolare attenzione agli adroni. Da tale concetto deriva, infatti, la classificazione degli adroni in scalari, pseudoscalari, vettori e pseudovettori.

A.1 Definizione e concetti generali

Definizione A.1.1 (Trasformazione di Parità). La trasformazione di parità, o inversione spaziale, è una trasformazione discreta dello spazio-tempo così definita:

$$P : \mathbb{M} \longrightarrow \mathbb{M}$$
$$x^\mu \longmapsto x'^\mu \equiv P^\mu_\nu x^\nu$$

dove x^μ indica una componente di quadrivettore dello spazio di Minkowski \mathbb{M} ($\mu = 0, 1, 2, 3$), mentre P^μ_ν indica le componenti della matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la quale soddisfa le due seguenti proprietà: $P^2 = I$ e $\det(P) = -1$. Si specifica, inoltre, che per la notazione dei quadrivettori si utilizza la seguente convenzione ($c = 1$):

$$x^\mu \equiv \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} .$$

Il concetto di trasformazione di parità può anche essere formalizzato, in modo equivalente, introducendo l'operatore P , detto operatore parità, che agisce sulla funzione d'onda $\psi(\mathbf{x})$ nel seguente modo:

$$P\psi(\mathbf{x}) = \psi(-\mathbf{x}) . \quad (\text{A.1})$$

Da tale relazione si vede subito che P è un operatore lineare, autoaggiunto ($P^\dagger = P$) e unitario ($P^\dagger P = PP^\dagger = 1$). In particolare, la proprietà di autoaggiunzione garantisce che gli autovalori dell'operatore parità siano reali e, nello specifico, essi saranno uguali soltanto a ± 1 .

Trattandosi di una trasformazione discreta, la legge di conservazione associata è moltiplicativa, e non additiva come sarebbe se la trasformazione fosse continua (si pensi, per esempio, alle rotazioni o alle traslazioni nello spazio). Pertanto, la parità di un sistema composto è uguale al prodotto delle parità delle singole parti.

A.2 Parità intrinseca

Nei processi fisici in cui agiscono soltanto forze invarianti per parità, è possibile definire, per ogni particella, una quantità associata a tale simmetria e che, pertanto, deve conservarsi nell'intero processo. Tale quantità è chiamata parità intrinseca della particella, indicata η_P , e può assumere soltanto i valori ± 1 . Particelle aventi parità pari ($\eta_P = +1$) sono descritte da una funzione d'onda invariante per inversione spaziale, mentre particelle aventi parità dispari ($\eta_P = -1$) sono descritte da una funzione d'onda che cambia segno a seguito di un'inversione spaziale. La parità intrinseca è talvolta assegnata per convenzione, talvolta calcolabile come $\eta_P = (-1)^J$, con J momento angolare totale della particella, $J = L + S$. Per quest'ultima classe di particelle, solitamente si utilizza la notazione J^P .

Il concetto di parità intrinseca porta alla seguente classificazione per i mesoni (relativamente allo stato fondamentale, dove $L = 0$):

- Mesoni scalari: mesoni con spin totale nullo e parità pari, $J^P = 0^+$.
- Mesoni pseudoscalari: mesoni con spin totale nullo e parità dispari, $J^P = 0^-$.
- Mesoni vettori: mesoni con spin totale uguale a uno e parità dispari, $J^P = 1^-$.
- Mesoni pseudovettori: mesoni con spin totale uguale a uno e parità pari, $J^P = 1^+$.

Per i barioni, invece, trattandosi di fermioni, la parità intrinseca è semplicemente definita come $\eta_P = (-1)^L$, con L momento angolare orbitale totale.

Si discute di seguito, a titolo esemplificativo, come determinare la parità intrinseca dei tre pioni.

A.2.1 Parità intrinseca dei pioni carichi

Per determinare la parità intrinseca dei due pioni carichi, π^+ e π^- , si considera la già incontrata reazione di produzione del deuterio:

$$\pi^- + d \longrightarrow n + n . \quad (\text{A.2})$$

Sapendo che gli spin del deuterio e del pioni valgono, rispettivamente, $s_d = 1$ e $s_\pi = 0$, il momento angolare totale dello stato iniziale sarà pari a $J = L + S = 0 + 1 = 1$. Incognito è, invece, il momento angolare totale dello stato finale con i due neutroni, $J = L + S$. Nel contesto di una trattazione non relativistica, la funzione d'onda dei due neutroni è data soltanto da $\Psi_{\mathbf{q}} = \psi_{space} \otimes \xi_{spin}$. Indicando, quindi, con $\xi(S, S_z)$ la funzione d'onda di spin, con S e S_z , rispettivamente, il momento angolare di spin totale e la sua terza componente, e utilizzando i risultati dell'Es.1.6.1 ($s_n = \frac{1}{2}$), si trova

$$\xi(1, 1) = |\uparrow\uparrow\rangle \quad (\text{A.3})$$

$$\xi(1, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle) \quad (\text{A.4})$$

$$\xi(1, -1) = |\downarrow\downarrow\rangle \quad (\text{A.5})$$

$$\xi(0, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle) , \quad (\text{A.6})$$

dove si è utilizzata la notazione $\uparrow = \frac{1}{2}$ e $\downarrow = -\frac{1}{2}$. Come si è già discusso, le prime tre funzioni costituiscono un tripletto con $S = 1$, mentre la quarta costituisce un singoletto con $S = 0$. Si vede subito che le funzioni di tripletto sono simmetriche rispetto allo scambio dei due neutroni, mentre quella di singoletto è antisimmetrica. In modo più compatto, si può riassumere la simmetria della funzione d'onda spinoriale nell'espressione $(-1)^{S+1}$. La simmetria della funzione d'onda spaziale rispetto allo scambio delle coordinate è invece data da $(-1)^L$. Pertanto, la simmetria della funzione d'onda totale sarà data dal prodotto delle due, ossia $(-1)^{L+S+1}$. Essendo, poi, i due neutroni due fermioni identici e indistinguibili, la funzione d'onda deve essere complessivamente antisimmetrica, quindi $L + S + 1$ deve essere dispari, ossia $L + S$ deve essere pari. Da tale condizione, insieme alla richiesta $J = 1$, si vede come l'unica combinazione possibile sia quella con $L = S = 1$. Si è, così, trovato che i due neutroni si trovano in uno stato 3P_1 , con parità $\eta_P = (-1)^L = -1$. Sapendo che anche il deuterio ha parità $\eta_P = -1$, l'unica possibilità è che il pioni abbia parità intrinseca $\eta_P = -1$.

A.2.2 Parità intrinseca del pioni neutro

Per determinare la parità intrinseca del pioni neutro si considera il suo decadimento, per interazione debole, in due fotoni

$$\pi^0 \longrightarrow 2\gamma . \quad (\text{A.7})$$

Per la conservazione della quantità di moto, i due fotoni saranno emessi *back-to-back*, si indicano, quindi, con \mathbf{k} e $-\mathbf{k}$ i loro vettori d'onda nel sistema di riferimento solidale con il pione e con ϵ_1 e ϵ_2 i loro vettori polarizzazione, i quali saranno perpendicolari alla direzione di \mathbf{k} . Nello stato iniziale il π^0 ha $J = 0$, occorre, perciò, determinare le quantità incognite relative allo stato finale, in cui sono presenti due fotoni, ossia due bosoni identici e indistinguibili, descritti da funzioni d'onda simmetriche per scambi delle due particelle, scrivibili come

$$\psi_1(2\gamma) = C_1(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \propto \cos\phi \quad (\text{A.8a})$$

$$\psi_2(2\gamma) = C_2(\epsilon_1 \times \epsilon_2) \cdot \mathbf{k} \propto \sin\phi, \quad (\text{A.8b})$$

dove C_1, C_2 sono costanti e ϕ è l'angolo di polarizzazione. La funzione d'onda ψ_1 è evidentemente una quantità scalare, invariante per parità, mentre ψ_2 , in quanto prodotto di un vettore assiale (o pseudovettore) con un vettore polare, è una quantità pseudo-scalare, che cambia segno a seguito di una trasformazione di parità. Sperimentalmente, non essendo possibile effettuare misurazioni dirette delle polarizzazioni dei due fotoni, si vanno a osservare, in luogo della (A.7), processi del tipo

$$\pi^0 \longrightarrow (e^+ + e^-) + (e^+ + e^-), \quad (\text{A.9})$$

in cui ogni fotone dà luogo ad una coppia elettrone-positrone. Misurando gli angoli fra i piani in cui si trovano le due coppie, si riesce a determinare la parità del pione e quello che si trova è che, come per i due pioni carichi, anche per il pione neutro $\eta_P = -1$.

A.3 Violazione della parità e teorema CPT

La simmetria di parità è conservata dalle interazioni gravitazionali, elettromagnetiche e forti, mentre è violata dalle interazioni deboli. La violazione della parità da parte delle interazioni deboli fu prima suggerita teoricamente e, in seguito, confermata sperimentalmente tramite il celebre esperimento sul decadimento β del ^{60}Co , condotto nel 1957 da Chien-Shiung Wu. Da tale esperimento emerse come soltanto le particelle levogire e le antiparticelle destrorgire partecipino alle interazioni deboli, mostrando, quindi, come l'universo non sia simmetrico per parità.

Oltre alla simmetria di parità (P), si scoprì che le interazioni deboli violano altre due simmetrie discrete invece conservate dalle altre interazioni fondamentali: l'inversione temporale (T) e la coniugazione di carica (Q), nonché qualsiasi coppia di queste tre trasformazioni. Ad oggi, si pensa che l'unica simmetria discreta conservata da tutte e quattro le interazioni fondamentali della natura sia la simmetria CPT, corrispondente nell'invarianza rispetto alla simultanea inversione di carica, parità e tempo, indipendente dall'ordine con cui tali trasformazioni vengono effettuate. Questo risultato va sotto il nome di *teorema CPT*, dimostrato teoricamente sotto ipotesi molto generali e supportato da diverse evidenze sperimentali.

Bibliografia

- [1] A. Zee. *Group Theory in a Nutshell for Physicists*. Princeton University Press, 2016.
- [2] W-K. Tung. *Group Theory In Physics*. World Scientific, 2014.
- [3] H. Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics. From Isospin to Unified Theories*. Frontiers in Physics, 1999.
- [4] W. Fulton, J. Harris. *Representation Theory. A First Course*. Springer, 2004.
- [5] B.C. Hall. *Lie Groups, Lie Algebras and Representations. An Elementary Introduction*. Springer, 2003.
- [6] P. Woit. *Quantum Theory, Groups and Representations: An Introduction*. Department of Mathematics, Columbia University, 2017.
- [7] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. WILEY-VHC, 2004.
- [8] D. H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Cambridge University Press, 2000.
- [9] N. Bourbaki. *Elements of the History of Mathematics*. Springer, 1999.
- [10] A. Zee. *Fearful Symmetry. The search for beauty in modern physics*. Princeton University Press, 2016.
- [11] F. Bastianelli. *Appunti sulla Teoria dei Gruppi*. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna, 2019.
- [12] N. Miller. *Representations Theory And Quantum Mechanics*. Department of Physics, University of Harvard, 2018.
- [13] N. Semprini Cesari. *Fisica delle Particelle*. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna, 2019.
- [14] A. Masiero, M. Pietroni. «Il mistero della simmetria». In: *Asimmetrie (INFN)* (2011).