

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

IL POLINOMIO DI TUTTE

Relatore:
Prof.ssa
Marta Morigi

Presentata da:
Lorenzo Perrone

Sessione 4
Anno Accademico 2019/2020

A chiunque vorrà leggere

Sommario

Il polinomio di Tutte è un polinomio in due indeterminate che, associato a un grafo, ne codifica molte informazioni attraverso sue particolari valutazioni e normalizzazioni. In questa tesi vengono esposte nel dettaglio alcune proprietà del suddetto polinomio e vengono approfonditi i suoi legami con il polinomio cromatico e il polinomio di flusso, due dei tanti polinomi associati a grafi che vengono generalizzati da quello di Tutte. Infine, studiando le azioni di gruppo su un grafo, si arriva a dare un'altra versione del polinomio di Tutte che, con particolari valutazioni, restituisce il numero delle orbite di flussi e colorazioni del grafo a cui è associato.

Indice

Introduzione	2
1 Nozioni di base di Teoria dei Grafi	3
2 Il polinomio di Tutte	10
2.1 Definizione e proprietà caratterizzante	10
2.2 Valutazioni notevoli	16
2.3 Costruzione originale	21
3 Applicazione alla colorazione di grafi	24
4 Polinomio di Tutte orbitale	30
4.1 Nozioni utili sulle azioni di gruppo	30
4.2 Costruzione e proprietà	33
A Principio di inclusione-esclusione	43
Bibliografia	44

Introduzione

Un grafo è una struttura matematica costituita da vertici e archi, solitamente rappresentati graficamente da punti e segmenti che li uniscono. Grazie a questa intuitiva rappresentazione grafica, questa struttura è largamente utilizzata in diversi ambiti, come la Chimica, la Fisica, ma anche la Geografia, al fine di creare modelli di sistemi da analizzare. In Matematica, la Teoria dei Grafi si colloca principalmente all'interno della Combinatoria, ma lo studio dei grafi è anche approfondito con approcci algebrici o topologici.

Il polinomio di Tutte è uno dei più importanti polinomi associati a grafi, infatti, la maggior parte di questi polinomi risultano essere delle particolari valutazioni o normalizzazioni dello stesso; grazie a questo, il polinomio di Tutte codifica moltissime informazioni riguardo il grafo a cui è associato, principalmente di carattere combinatorio. Nel capitolo 2, ad esempio, vengono mostrate numerose valutazioni del polinomio di Tutte che forniscono il numero di particolari sottografi del grafo a cui è associato; inoltre, si introduce il polinomio di flusso associato a un grafo e si mostra l'identità che lo lega a quello di Tutte.

Nel terzo capitolo viene trattata la colorazione dei vertici di un grafo, sottolineandone l'importanza storica per il legame al famoso Teorema dei 4 colori. Si introduce il polinomio cromatico associato a un grafo, si mostrano alcune sue proprietà e ne viene descritto il collegamento con il polinomio di Tutte. Infatti, il primo nome che William Thomas Tutte diede al suo polinomio fu proprio "dicromato" del grafo, per rimarcare il fatto che risulti una generalizzazione a due indeterminate del polinomio cromatico.

Infine, nel quarto e ultimo capitolo vengono studiate le azioni di gruppo su un grafo e viene presentata una più moderna versione del polinomio di Tutte che chiameremo il polinomio di Tutte orbitale. Come preannuncia il nome, questo polinomio risulta uno strumento utile al conteggio delle orbite di un'azione di gruppo sul grafo a cui è associato.

Capitolo 1

Nozioni di base di Teoria dei Grafi

In questo capitolo diamo alcune definizioni e proprietà di concetti di Teoria dei Grafi, in modo da fissare la terminologia e la notazione che saranno utilizzate in seguito. Iniziamo, quindi, introducendo la struttura fondamentale della teoria.

Definizione 1.1 (Grafo orientato). *Un **grafo orientato** Γ è una coppia ordinata di insiemi disgiunti (V, E) tale che E è un sottoinsieme di $V \times V$.*

*L'insieme V è detto **insieme dei vertici** di Γ , mentre E è detto **insieme degli archi** di Γ . Inoltre, un grafo orientato è detto **finito** se i suoi insiemi dei vertici e degli archi sono finiti.*

Dato un grafo orientato $\Gamma = (V, E)$ e un arco $(x, y) \in E$, diciamo che l'arco ha x come vertice di partenza e y come vertice d'arrivo o, equivalentemente, che *esce* da x ed *entra* in y ; le coppie ordinate $(a, b), (b, a) \in V \times V$ rappresentano, quindi, archi distinti. Nel seguito chiamiamo **grafo** una struttura rappresentata con la stessa notazione di quella di un grafo orientato, cioè $\Gamma = (V, E)$, ma in cui non ci sia distinzione tra vertice di partenza e d'arrivo di un qualunque arco. In un grafo, dunque, le coppie (a, b) e (b, a) rappresentano lo stesso arco e diremo semplicemente che a e b sono vertici dell'arco (a, b) .

Notazione 1.2. *Dato un grafo Γ , indicheremo mediante $V(\Gamma)$ e $E(\Gamma)$ rispettivamente l'insieme dei vertici e l'insieme degli archi di Γ .*

Questa definizione di grafo ammette la presenza dei cosiddetti *cappi* nell'insieme degli archi, cioè archi che collegano un vertice a sé stesso, rappresentati dalle coppie del tipo (x, x) con $x \in V$. In Figura 1.1 è rappresentato il grafo Γ con $V(\Gamma) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $E(\Gamma) = \{(1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (4, 6), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 8)\}$.

Ora introduciamo le principali sottostrutture di un grafo e ne diamo degli esempi.

Definizione 1.3 (Sottografo). *Un grafo $\Gamma' = (V', E')$ è detto **sottografo** di $\Gamma = (V, E)$ se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E$. In questo caso scriviamo $\Gamma' \subseteq \Gamma$.*

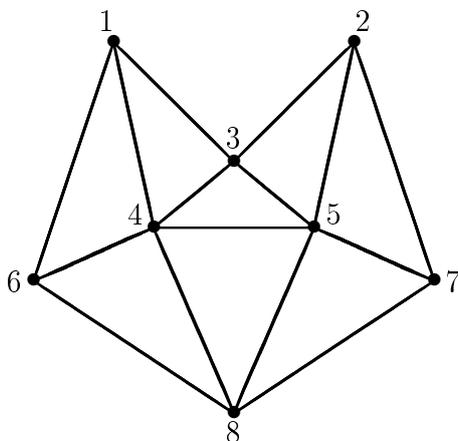


Figura 1.1: Grafo con 8 vertici e 15 archi.

Definizione 1.4 (Sottografo indotto). Sia $\Gamma' = (V', E')$ un sottografo di $\Gamma = (V, E)$; Γ' è detto il **sottografo indotto** da V' se E' contiene tutti gli archi di E che collegano due vertici di V' . In questo caso scriviamo $\Gamma' = \Gamma[V']$.

Definizione 1.5 (Sottografo ricoprente). Un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ è detto **sottografo ricoprente** di Γ se $V(\Gamma') = V(\Gamma)$, cioè se, nelle notazioni precedenti, V' contiene tutti i vertici di Γ .

Osservazione 1.6. Notiamo che un sottografo ricoprente di un grafo $\Gamma = (V, E)$ è identificato naturalmente dal suo insieme degli archi. Preso $F \subseteq E$, per indicare il sottografo ricoprente $\Gamma' = (V, F)$ di Γ usiamo la notazione $\langle F \rangle$.

Nella Figura 1.2 diamo degli esempi di sottografi del grafo rappresentato in Figura 1.1, in particolare un sottografo, un sottografo indotto e uno ricoprente.

Definizione 1.7 (Ordine e dimensione). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo finito; il numero $|V| \in \mathbb{N}$ dei suoi vertici è detto **ordine** di Γ ed è indicato talvolta con $|\Gamma|$. Il numero degli archi $|E| \in \mathbb{N}$ di Γ è detto, invece, **dimensione** del grafo e può essere indicato anche con $e(\Gamma)$.

Definizione 1.8 (Grafo completo e grafo vuoto). Un grafo Γ di ordine $|\Gamma| = n$ con $n \in \mathbb{N}$ è detto **completo** se è privo di cappi e $|E(\Gamma)| = \binom{n}{2}$, cioè se i suoi archi sono rappresentati da tutte le possibili coppie di vertici distinti; è detto, invece, **vuoto** se è composto solo da vertici, cioè se $|E| = 0$. Un grafo di ordine n è denotato con K_n se è completo e con E_n se è vuoto.

Il grafo in Figura 1.1 ha ordine 8 e dimensione 15, quindi non è un grafo completo. Introduciamo, adesso, delle particolari strutture che si possono trovare all'interno dei grafi: i cammini, i cicli e i circuiti.

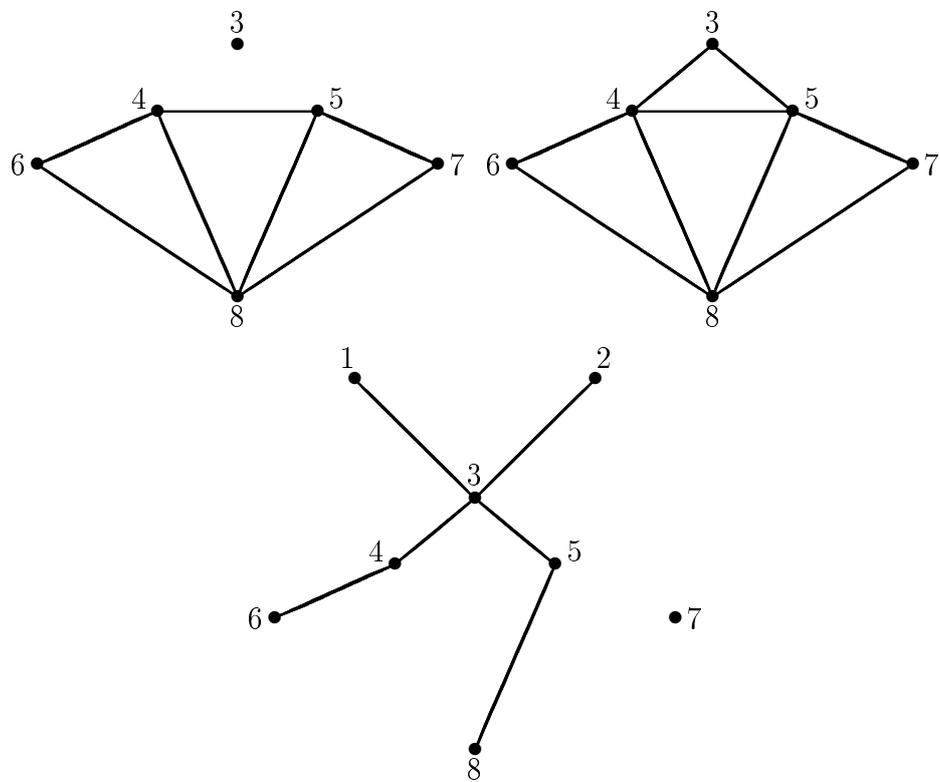


Figura 1.2: Esempio di sottografo, sottografo indotto e sottografo ricoprente

Definizione 1.9 (Cammino e ciclo). Sia Γ un grafo; un **cammino** è un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tale che i suoi insiemi dei vertici e degli archi siano della forma $V(\Gamma') = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ e $E(\Gamma') = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{l-1}, x_l)\}$, dove $x_{j-1} \neq x_j$ con $j = 1, \dots, l$. I vertici x_0 e x_l sono detti rispettivamente vertice di partenza e di arrivo del cammino, inoltre diciamo che il cammino Γ' collega x_0 a x_l .

Un **ciclo** è un cammino tale che $x_0 = x_l$.

In particolare, se Γ è un grafo orientato, allora un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ è detto **cammino diretto** se è un cammino e in ogni suo vertice c'è un arco che esce e uno che entra; un **ciclo diretto** è definito in modo analogo.

Definizione 1.10 (Circuito). Sia Γ un grafo; un **circuito** è un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ tale che i suoi insiemi dei vertici e degli archi siano della forma $V(\Gamma') = \{x_0, x_1, \dots, x_l\}$ e $E(\Gamma') = \{(x_0, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{l-1}, x_l)\}$, dove $x_0 = x_l$ e se $j \neq k$ allora $(x_{j-1}, x_j) \neq (x_{k-1}, x_k)$ per ogni $j, k = 1, \dots, l$.

Osservazione 1.11. Notiamo che, in generale, un circuito non è un cammino perché "percorrendo" i suoi archi si può "passare" più volte dallo stesso vertice.

Troviamo vari cicli tra i sottografi del grafo in Figura 1.1; un esempio è il sottografo $\Gamma' = (V', E')$ con $V' = \{3, 4, 5, 8\}$ e $E' = \{(3, 5), (5, 8), (8, 4), (4, 3)\}$.

Un grafo aciclico, ovvero che non contiene cicli, è chiamato *foresta*. Un esempio di foresta è il sottografo ricoprente in Figura 1.2. Per introdurre il concetto di albero e di ponte ci serve parlare di connessione di grafi. Diamo la definizione di grafo connesso e componente connessa notando che è equivalente a quella topologica.

Definizione 1.12 (Grafo connesso e componente connessa). Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; Γ è **connesso** se per ogni $x, y \in V$ vertici distinti esiste un cammino $\Gamma' \subseteq \Gamma$ che collega x a y .

Una **componente connessa** di un grafo $\Gamma = (V, E)$ è un sottografo connesso massimale $\Gamma' = (V', E')$, cioè tale che, aggiungendo un vertice qualsiasi di $V \setminus V'$ a V' non esista un arco in E che aggiunto a E' renda Γ' connesso.

Denotiamo con $c(\Gamma)$ il numero di componenti connesse di un grafo $\Gamma = (V, E)$ e notiamo che se Γ è connesso si ha $c(\Gamma) = 1$. Chiamiamo *albero* un grafo aciclico connesso, cioè una foresta connessa. Inoltre, un albero (risp. foresta) è detto *albero* (risp. foresta) *ricoprente* se è anche un sottografo ricoprente.

Il seguente risultato è trattato nel dettaglio nel libro [6] di König ed è di importanza notevole per la definizione originale del polinomio di Tutte.

Proposizione 1.13. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso; allora esiste un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ che è un albero ricoprente di Γ .

Dimostrazione. Se Γ è aciclico allora è già un albero ricoprente in quanto sottografo di sé stesso. Se Γ non è un albero allora esiste un suo sottografo $C_1 \subseteq \Gamma$ che è un ciclo; in

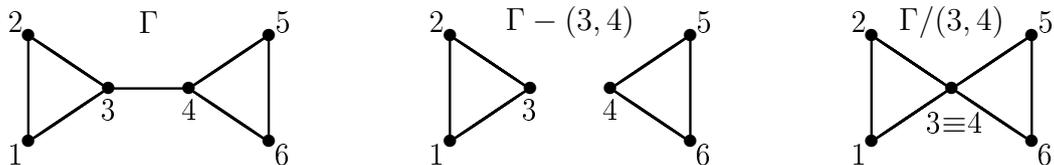


Figura 1.3: Esempio di cancellazione e contrazione di un arco

questo caso cancelliamo un arco qualsiasi $e_1 \in E(C_1)$ e otteniamo che $\Gamma - e_1$ è ancora un grafo connesso ma non contiene il ciclo C_1 . A questo punto se $\Gamma - e_1$ è aciclico, allora è un albero ricoprente di Γ in quanto contiene tutti i vertici in V , altrimenti contiene un sottografo che è un ciclo $C_2 \subseteq \Gamma - e_1$ e basta procedere come in precedenza eliminando un arco qualsiasi dell'insieme $E(C_2)$. Se non si ottiene un grafo aciclico basta procedere ancora nello stesso modo e, siccome il grafo è finito, si deve arrivare alla fine del procedimento ottenendo un grafo aciclico, connesso e che ha gli stessi vertici di Γ , cioè un albero ricoprente di Γ . \square

Introduciamo un altro tipo di sottografo che, come le componenti connesse, si può utilizzare per partizionare un grafo.

Definizione 1.14 (Blocco). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; un **vertice di taglio** è un vertice $v \in V$ che, se eliminato dall'insieme dei vertici, aumenta il numero di componenti connesse del grafo. Un sottografo $\Gamma' \subseteq \Gamma$ è un **blocco** di Γ se è un sottografo indotto senza vertici di taglio che sia massimale, cioè tale che aggiungendo un qualsiasi vertice di $V \setminus V(\Gamma')$ a $V(\Gamma')$ si ha che Γ' contiene un vertice di taglio.*

Osservazione 1.15. *Se Γ è un grafo che contiene vertici di taglio allora può essere riscritto nella forma $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $|V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)| = 1$, in particolare, se il vertice di taglio è uno solo, allora Γ_1 e Γ_2 sono blocchi di Γ .*

Ad esempio, in Figura 1.2 il sottografo ricoprente ha 3, 4 e 5 come vertici di taglio e potrebbe essere scritto nella $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, dove $\Gamma_1 = (\{1, 2, 3\}, \{(1, 3), (2, 3)\})$ e $\Gamma_2 = (\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \{(3, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 8)\})$ non sono blocchi di Γ .

Definiamo, ora, due importanti operazioni su grafi e le proprietà conseguenti che si possono evidenziare sul numero di componenti connesse di sottografi ricoprenti.

Definizione 1.16 (Cancellazione e contrazione). *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo ed $e \in E$ un suo arco; indichiamo con $\Gamma - e$ il grafo ottenuto eliminando e dall'insieme degli archi, quindi $\Gamma - e = (V, E \setminus \{e\})$ e con Γ/e il grafo ottenuto da $\Gamma - e$ identificando i vertici dell'arco e , di fatto, riducendo di uno la cardinalità dell'insieme dei vertici V . Queste due operazioni sono chiamate rispettivamente **cancellazione** e **contrazione** di un arco.*

In Figura 1.3 diamo un esempio di cancellazione e contrazione dell'arco $(3, 4)$ dal grafo $\Gamma = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 4)\})$.

Introduciamo, ora, un particolare tipo di arco che, insieme al cappio introdotto sopra, ricopre un ruolo importante per la caratterizzazione del polinomio di Tutte: il *ponte*.

Definizione 1.17 (Ponte). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; un arco $e \in E$ è detto **ponte** se rimuovendolo dall'insieme degli archi si aumenta il numero di componenti connesse del grafo, cioè se $c(\Gamma - e) > c(\Gamma)$.*

Considerando il grafo Γ in Figura 1.3, l'arco $(3, 4)$ è un esempio di ponte, infatti $\Gamma - (3, 4)$ ha una componente connessa in più rispetto a Γ . Notiamo che un *albero* può anche essere definito come un grafo connesso in cui ogni arco è un ponte.

Notazione 1.18. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $e \in E$ un suo arco e consideriamo $F \subseteq E \setminus \{e\}$; indichiamo con $c'(\langle F \rangle)$ e $c''(\langle F \rangle)$ il numero di componenti connesse di $\langle F \rangle$ come sottografo ricoprente di $\Gamma - e$ e di Γ/e rispettivamente.*

Osservazione 1.19. *Evidenziamo due proprietà delle notazioni appena definite.*

1.

$$c'(\langle F \rangle) = c(\langle F \rangle) \quad (1.1)$$

2.

$$c''(\langle F \rangle) = \begin{cases} c(\langle F \rangle) - 1 & \text{se } e \text{ è un ponte di } \langle F \cup \{e\} \rangle \\ c(\langle F \rangle) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (1.2)$$

La proprietà 1. è verificata semplicemente notando che il grafo $\langle F \rangle \subseteq \Gamma$ ha gli stessi vertici di $\Gamma - e$ e il suo insieme degli archi non contiene e . Il numero delle componenti connesse di $\langle F \rangle$ come sottografo ricoprente di $\Gamma - e$ resta, quindi, invariato.

Per la 2. basta notare che $c''(\langle F \rangle) = c(\langle F \cup \{e\} \rangle)$ perché i vertici di e sono identificati in Γ/e e $c(\langle F \cup \{e\} \rangle)$ verifica la proprietà per definizione di ponte.

Gli ultimi concetti che trattiamo in questo capitolo sono quelli di *isomorfismo* e di *automorfismo* di grafi.

Definizione 1.20 (Isomorfismo). *Due grafi $\Gamma = (V, E)$ e $\Gamma' = (V', E')$ sono **isomorfi** e scriviamo $\Gamma \cong \Gamma'$ se esiste una biiezione $\Phi : V \rightarrow V'$ tale che $(x, y) \in E$ se e solo se $(\Phi(x), \Phi(y)) \in E'$.*

Osservazione 1.21. *Notiamo che due grafi isomorfi hanno stesso ordine e dimensione. Inoltre, se $e \in E(\Gamma)$ è un cappio allora $\Gamma/e \cong \Gamma - e$.*

In Figura 1.4 i grafi Γ e Γ' sono isomorfi mediante la biiezione $\Phi : V(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma')$ definita da $\Phi(1) = 4, \Phi(2) = 3, \Phi(3) = 1, \Phi(4) = 2$.

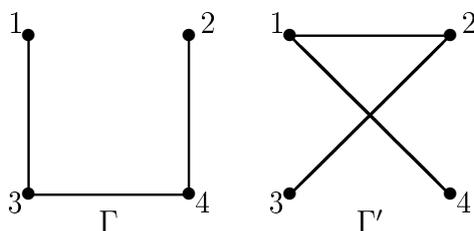


Figura 1.4: Esempio di grafi isomorfi

Definizione 1.22 (Automorfismo). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; un **automorfismo** di Γ è un isomorfismo da Γ in sé stesso, quindi ogni biiezione $\Phi : V \rightarrow V$ tale che $(x, y) \in E$ se e solo se $(\Phi(x), \Phi(y)) \in E$ identifica un automorfismo di Γ e, viceversa, ogni automorfismo di Γ è identificato da una tale biiezione. Denotiamo l'insieme degli automorfismi di Γ con $Aut(\Gamma)$.*

Proposizione 1.23. *L'insieme $Aut(\Gamma)$ degli automorfismi di un grafo $\Gamma = (V, E)$ è un gruppo rispetto alla composizione di morfismi.*

Dimostrazione. Verifichiamo le proprietà di gruppo per $Aut(\Gamma)$.

- **Chiusura:** siano $\varphi_1, \varphi_2 \in Aut(\Gamma)$ con biiezioni associate $\Phi_1, \Phi_2 : V \rightarrow V$, allora $\varphi_1 \circ \varphi_2$ è composizione di isomorfismi che mandano Γ in sé stesso, quindi per ogni $u, v \in V$ tali che $(u, v) \in E$ si ha $(\Phi_1(\Phi_2(u)), \Phi_1(\Phi_2(v))) \in E$, dunque $\varphi_1 \circ \varphi_2 \in Aut(\Gamma)$.
- **Associatività:** vale per definizione di composizione di morfismi.
- **Elemento neutro:** l'identità $id : V \rightarrow V$ è una biiezione che identifica l'automorfismo $\varphi_{id} \in Aut(\Gamma)$ e per ogni $\varphi \in Aut(\Gamma)$ con biiezione associata $\Phi : V \rightarrow V$ si ha $id \circ \Phi = \Phi = \Phi \circ id$, quindi φ_{id} è l'elemento neutro di $Aut(\Gamma)$.
- **Elemento inverso:** per ogni $\varphi \in Aut(\Gamma)$ la biiezione associata $\Phi : V \rightarrow V$ ha un inversa $\Phi^{-1} : V \rightarrow V$ con automorfismo associato $\varphi^{-1} \in Aut(\Gamma)$; infatti, per ogni $(x, y) \in E$ esistono $x', y' \in V$ tali che $(\Phi(x'), \Phi(y')) = (x, y)$, dunque $(\Phi^{-1}(x), \Phi^{-1}(y)) = (x', y') \in E$.

□

Osservazione 1.24. *Notiamo che il grafo vuoto E_n e il grafo completo K_n , con $n \in \mathbb{N}$ hanno lo stesso gruppo di automorfismi, infatti, ogni permutazione dei vertici di entrambi i grafi determina un automorfismo degli stessi, perciò sia $Aut(E_n)$ che $Aut(K_n)$ sono gruppi isomorfi al gruppo simmetrico S_n .*

Capitolo 2

Il polinomio di Tutte

2.1 Definizione e proprietà caratterizzante

Prima di dare la definizione di polinomio di Tutte, abbiamo bisogno di considerare un insieme ancora più generale rispetto a quello dei grafi definiti nel primo capitolo. Esiste, infatti, un'ulteriore generalizzazione della struttura che alcuni autori chiamano *multigrafo*. Un multigrafo è un grafo che ammette la presenza di più di un arco che collega due vertici, ovvero ammette archi multipli. Detto questo, in questa trattazione con il termine *grafo* ci riferiremo a un elemento dell'insieme $\mathcal{G} = \{ [\Gamma] \mid \Gamma \text{ multigrafo}, |\Gamma| = n, e(\Gamma) = m \text{ con } n, m \in \mathbb{N}, [\Gamma] = [\Gamma'] \text{ se e solo se } \Gamma \cong \Gamma' \}$, cioè una classe di isomorfismo di multigrafi finiti. Continueremo a utilizzare la notazione Γ al posto di $[\Gamma]$.

Osservazione 2.1. *Dato un grafo $\Gamma = (V, E)$, siano $u, v \in V$ vertici non necessariamente distinti; se $e \in E$ è un arco tra u e v allora in Γ/e i vertici u e v sono rimpiazzati da un singolo vertice che denotiamo con $(uv) \in V(\Gamma/e)$ e ogni arco $f \in E \setminus \{e\}$ con vertici u e v è rimpiazzato con un cappio con vertice (uv) .*

Introduciamo, adesso, il *rango* e la *nullità* di un grafo e le loro proprietà principali che risultano utili nella dimostrazione della proprietà caratterizzante del polinomio di Tutte.

Definizione 2.2 (Rango e nullità). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; chiamiamo **rango** di Γ il numero*

$$r(\Gamma) = |V| - c(\Gamma) \tag{2.1}$$

*e **nullità** di Γ il numero*

$$n(\Gamma) = |E| - |V| + c(\Gamma) = |E| - r(\Gamma). \tag{2.2}$$

La seguente proposizione fornisce una possibile interpretazione delle quantità appena introdotte.

Proposizione 2.3. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $F \subseteq E$; allora*

1. $r(\langle F \rangle)$ è la massima dimensione che un sottografo aciclico di $\langle F \rangle$ può avere;
2. se $n(\langle F \rangle) = 0$ allora $\langle F \rangle$ è una foresta.

Dimostrazione. Per dimostrare la 1. notiamo che un generico grafo connesso aciclico $\Gamma' = (V', E')$ deve necessariamente verificare la condizione $|E'| < |V'|$ per non contenere cicli. In particolare, ogni componente connessa di un sottografo aciclico di $\langle F \rangle$ la verifica, dunque, $|V| - c(\langle F \rangle) = r(\langle F \rangle)$ è sicuramente un maggiorante per la dimensione di questo tipo di sottografi. Inoltre, per la Proposizione 1.13 sappiamo che ogni grafo connesso ammette un albero ricoprente e, quindi, otteniamo che esiste sempre un sottografo aciclico di $\langle F \rangle$ che abbia dimensione esattamente $r(\langle F \rangle)$.

Mostriamo la 2. supponendo, per comodità, che $c(\Gamma) = n$ e ottenendo dall'ipotesi $|E| = |V| - n$. Supponiamo che Γ non sia una foresta; allora, se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sono le sue componenti connesse, esiste $k \in \{1, \dots, n\}$ tale che Γ_k contiene un ciclo e, quindi, vale $|E(\Gamma_k)| \geq |V(\Gamma_k)|$. Per la proprietà di connessione si deve avere $|E(\Gamma_i)| \geq |V(\Gamma_i)| - 1$ per ogni i , ma allora $|E| = \sum_{i=1}^n |E(\Gamma_i)| \geq |V| - (n-1) > |V| - n$ e questo è assurdo. \square

In modo analogo a come abbiamo fatto nel primo capitolo per il numero delle componenti connesse, considerando un grafo $\Gamma = (V, E)$, un suo arco $e \in E$ e $F \subseteq E \setminus \{e\}$, definiamo $r'(\langle F \rangle)$ e $r''(\langle F \rangle)$ come il rango di $\langle F \rangle$ come sottografo ricoprente di $\Gamma - e$ e di Γ/e rispettivamente e $n'(\langle F \rangle)$ e $n''(\langle F \rangle)$ come la nullità di $\langle F \rangle$ come sottografo ricoprente di $\Gamma - e$ e di Γ/e rispettivamente.

Osservazione 2.4. *Notiamo che le definizioni appena date si traducono attraverso la Notazione 1.18 con le seguenti uguaglianze.*

1. $r'(\langle F \rangle) = |V| - c'(\langle F \rangle)$
2. $r''(\langle F \rangle) = |V| - 1 - c''(\langle F \rangle)$
3. $n'(\langle F \rangle) = |F| - |V| + c'(\langle F \rangle)$
4. $n''(\langle F \rangle) = |F| - (|V| - 1) + c''(\langle F \rangle)$

Dimostriamo nella seguente proposizione alcune utili proprietà del rango e della nullità di un grafo.

Proposizione 2.5. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $e \in E$ un suo arco e $F \subseteq E \setminus \{e\}$; allora valgono le seguenti proprietà.*

1.
$$r'(\langle F \rangle) = r(\langle F \rangle). \tag{2.3}$$

2.

$$n'(\langle F \rangle) = n(\langle F \rangle). \quad (2.4)$$

3.

$$r(\langle E \rangle) - r(\langle F \cup \{e\} \rangle) = r''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - r''(\langle F \rangle) = r(\Gamma/e) - r''(\langle F \rangle). \quad (2.5)$$

4.

$$r(\langle E \rangle) = \begin{cases} r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) + 1 & \text{se } e \text{ è un ponte di } \Gamma \\ r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.6)$$

5.

$$n(\langle F \cup \{e\} \rangle) = \begin{cases} n''(\langle F \rangle) + 1 & \text{se } e \text{ è un cappio di } \Gamma \\ n''(\langle F \rangle) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.7)$$

Dimostrazione. La 1. e la 2. si verificano facilmente utilizzando l'identità (1.1) dell'Osservazione 1.19. Per dimostrare la 3. consideriamo le stesse argomentazioni esposte nell'Osservazione 1.19 per dire che $c''(\langle F \rangle) = c(\langle F \cup \{e\} \rangle)$ e dunque abbiamo che $r(\langle E \rangle) - r(\langle F \cup \{e\} \rangle) = c(\langle F \cup \{e\} \rangle) - c(\langle E \rangle) = c''(\langle F \rangle) - c(\langle E \rangle)$ e, notando che $c''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = c(\langle E \rangle)$ anche che $r''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - r''(\langle F \rangle) = c''(\langle F \rangle) - c''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = c''(\langle F \rangle) - c(\langle E \rangle)$, quindi la prima uguaglianza è soddisfatta. Per la seconda basta notare che $c''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = c''(\Gamma/e) = c(\Gamma/e)$, quindi $r''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = r(\Gamma/e)$. La 4. è verificata usando il fatto che $r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = r(\langle E \setminus \{e\} \rangle)$ e la definizione di ponte. Infine, per provare la 5. usiamo ancora il fatto che $c(\langle F \cup \{e\} \rangle) = c''(\langle F \rangle)$, quindi, $n(\langle F \cup \{e\} \rangle) = |F| + 1 - |V| + c''(\langle F \rangle)$ e notiamo che, se e è un cappio allora Γ/e ha lo stesso ordine di Γ e, in particolare, $n''(\langle F \rangle) = |F| - |V| + c''(\langle F \rangle) = n(\langle F \cup \{e\} \rangle) - 1$. Se e non è un cappio, invece, Γ/e ha un vertice in meno di Γ e si ottiene $n''(\langle F \rangle) = |F| - (|V| - 1) + c''(\langle F \rangle) = n(\langle F \cup \{e\} \rangle)$. \square

Siamo, finalmente, in grado di dare la definizione di polinomio di Tutte associato a un grafo; tuttavia, ci sembra doveroso specificare che la seguente è una definizione dovuta ad Hassler Whitney. La definizione originale del polinomio che William Thomas Tutte diede nel 1954 è equivalente, ma di costruzione più laboriosa; ad essa è dedicato il paragrafo 2.3 di questo capitolo.

Definizione 2.6 (Polinomio di Tutte). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; allora il **polinomio di Tutte** associato a Γ è definito come*

$$T(\Gamma; x, y) = \sum_{F \subseteq E} (x - 1)^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} (y - 1)^{n(\langle F \rangle)}. \quad (2.8)$$

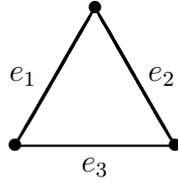


Figura 2.1: Grafo completo di ordine 3

Notazione 2.7. Nella trattazione ci riferiamo al polinomio di Tutte associato a Γ anche indicandolo più sinteticamente con T_Γ ; la notazione $T(\Gamma; x, y)$ usata nella definizione, però, esprime meglio il fatto che T sia una mappa dall'insieme dei grafi all'anello dei polinomi in due indeterminate a coefficienti interi, cioè $T : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}[x, y]$.

Osservazione 2.8. Considerato il grafo vuoto E_n , con $n \in \mathbb{N}$, si ha $T_{E_n} = 1$. Infatti, poiché $E(E_n)$ ha un solo sottoinsieme, cioè sé stesso, dalla definizione si ottiene $T_{E_n} = (x - 1)^0 (y - 1)^{n(E_n)} = (y - 1)^{-|V(E_n)| + c(E_n)} = (y - 1)^0 = 1$.

Attraverso la (2.8) è possibile calcolare a mano il polinomio di Tutte di grafi molto semplici. A titolo di esempio, calcoliamo il polinomio di Tutte associato al grafo completo K_3 in Figura 2.1. Sia $E(K_3) = \{e_1, e_2, e_3\}$ il suo insieme degli archi; prendendo ogni suo sottoinsieme consideriamo gli 8 sottografi ricoprenti di K_3 e notiamo che, a parità di dimensione, questi sottografi hanno stesso rango e stessa nullità. In particolare, $r(E_3) = n(E_3) = 0$, $r(\{e_1\}) = r(\{e_2\}) = r(\{e_3\}) = 1$, $n(\{e_1\}) = n(\{e_2\}) = n(\{e_3\}) = 0$, $r(\{e_1, e_2\}) = r(\{e_1, e_3\}) = r(\{e_2, e_3\}) = 2$, $n(\{e_1, e_2\}) = n(\{e_1, e_3\}) = n(\{e_2, e_3\}) = 0$, $r(K_3) = 2$ e $n(K_3) = 1$; dunque dalla (2.8) si ottiene

$$T(K_3; x, y) = (x - 1)^2 + 3(x - 1) + 3 + (y - 1) = x^2 + x + y.$$

Mostriamo, adesso, quella che chiamiamo *proprietà caratterizzante* del polinomio di Tutte. Sfruttando le operazioni di cancellazione e contrazione di un arco, questa proprietà permette di dare una definizione ricorsiva del polinomio che può essere utile per la sua computazione.

Teorema 2.9 (Proprietà caratterizzante). *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $e \in E$ un suo arco e T_Γ il suo polinomio di Tutte; allora si ha*

$$T_\Gamma = \begin{cases} xT_{\Gamma-e} & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ yT_{\Gamma-e} & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ T_{\Gamma-e} + T_{\Gamma/e} & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.9)$$

Dimostrazione. Riscriviamo il polinomio in (2.8) come somma di due polinomi $T_0(\Gamma; x, y)$ e $T_1(\Gamma; x, y)$ partizionando l'insieme delle parti di E in due parti: sottoinsiemi che contengono e e sottoinsiemi che non lo contengono.

$$T_\Gamma(x, y) = T_0(\Gamma; x, y) + T_1(\Gamma; x, y), \quad (2.10)$$

dove

$$T_0(\Gamma; x, y) = \sum_{F \subseteq E \setminus \{e\}} (x-1)^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} (y-1)^{n(\langle F \rangle)}$$

e

$$T_1(\Gamma; x, y) = \sum_{F \subseteq E, e \in F} (x-1)^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} (y-1)^{n(\langle F \rangle)}.$$

Notiamo, adesso, che gli insiemi degli archi $E(\Gamma - e)$ e $E(\Gamma/e)$ sono naturalmente identificati con $E \setminus \{e\}$. Utilizzando, inoltre, le proprietà (2.3), (2.4) e (2.6) otteniamo

$$\begin{aligned} T_0(\Gamma; x, y) &= \begin{cases} \sum_{F \subseteq E(\Gamma - e)} (x-1)^{r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) + 1 - r'(\langle F \rangle)} (y-1)^{n'(\langle F \rangle)} & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ \sum_{F \subseteq E(\Gamma - e)} (x-1)^{r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - r'(\langle F \rangle)} (y-1)^{n'(\langle F \rangle)} & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (x-1)T(\Gamma - e; x, y) & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ T(\Gamma - e; x, y) & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Ora, notando che $T_1(\Gamma; x, y) = \sum_{F \subseteq E(\Gamma - e)} (x-1)^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \cup \{e\} \rangle)} (y-1)^{n(\langle F \cup \{e\} \rangle)}$ e utilizzando le proprietà (2.5) e (2.7) otteniamo

$$\begin{aligned} T_1(\Gamma; x, y) &= \begin{cases} \sum_{F \subseteq E(\Gamma/e)} (x-1)^{r(\Gamma/e) - r''(\langle F \rangle)} (y-1)^{n''(\langle F \rangle) + 1} & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ \sum_{F \subseteq E(\Gamma/e)} (x-1)^{r(\Gamma/e) - r''(\langle F \rangle)} (y-1)^{n''(\langle F \rangle)} & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} (y-1)T(\Gamma/e; x, y) & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ T(\Gamma/e; x, y) & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

Resta da notare che se e è un ponte o un cappio si ha $T(\Gamma/e; x, y) = T(\Gamma - e; x, y)$. Se e è un cappio è ovvio perchè $\Gamma/e \cong \Gamma - e$; se, invece, è un ponte usiamo le proprietà (1.1) e (1.2) per ottenere

$$\begin{aligned} r''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - r''(\langle F \rangle) &= c''(\langle F \rangle) - c''(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = \\ &= c(\langle F \rangle) - 1 - (c(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - 1) = c'(\langle F \rangle) - c'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) = \\ &= r'(\langle E \setminus \{e\} \rangle) - r'(\langle F \rangle) \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} n''(\langle F \rangle) &= |F| - (|V| - 1) + c''(\langle F \rangle) = |F| - (|V| - 1) + c(\langle F \rangle) - 1 = \\ &= |F| - |V| + c'(\langle F \rangle) = n'(\langle F \rangle), \end{aligned}$$

per ogni $F \subseteq E \setminus \{e\}$.

A questo punto sommando in (2.10) si ottiene la tesi. \square

Osservazione 2.10. *Il polinomio di Tutte di un grafo $\Gamma = (V, E)$ può essere definito ricorsivamente dalla formula*

$$T(\Gamma; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Gamma \text{ è un grafo vuoto} \\ xT(\Gamma - e; x, y) & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ yT(\Gamma - e; x, y) & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ T(\Gamma - e; x, y) + T(\Gamma/e; x, y) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.11)$$

Per convincerci di questa definizione la utilizziamo per calcolare nuovamente il polinomio di Tutte associato al grafo K_3 . Usando la notazione in Figura 2.1, consideriamo per primo l'arco e_3 che non è né un ponte né un cappio di K_3 , dunque $T_{K_3} = T_{K_3 - e_3} + T_{K_3/e_3}$. Il grafo $K_3 - e_3$ è formato da due ponti, quindi ottengo $T_{K_3 - e_3} = xT_{(K_3 - e_3) - e_2} = x^2$, mentre l'arco e_2 in K_3/e_3 non è né un cappio né un ponte, quindi $T_{K_3/e_3} = T_{(K_3/e_3) - e_2} + T_{(K_3/e_3)/e_2}$. Infine, il grafo $(K_3/e_3) - e_2$ è formato da un ponte, mentre $(K_3/e_3)/e_2$ da un cappio, perciò $T_{(K_3/e_3) - e_2} = x$ e $T_{(K_3/e_3)/e_2} = y$; ritroviamo, quindi, il polinomio $T_{K_3} = x^2 + x + y$.

Notiamo che se avessimo voluto dare la (2.11) come definizione del polinomio avremmo dovuto mostrare che non dipende dall'ordine di cancellazione e contrazione degli archi. Questa non è l'unica definizione ricorsiva che si può dare del polinomio di Tutte, infatti, nella seguente proposizione dimostriamo una proprietà utilizzabile per dare una formula ricorsiva alternativa.

Proposizione 2.11. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo tale che E sia formato solamente da b ponti e l cappi, con $b, l \in \mathbb{N}$; allora il polinomio di Tutte associato a Γ è $T_\Gamma = x^b y^l$.*

Dimostrazione. Siano p_1, \dots, p_b e c_1, \dots, c_l rispettivamente i ponti e i cappi di Γ , dunque $E = \{p_1, \dots, p_b, c_1, \dots, c_l\}$. Allora, cancellando i ponti a uno a uno, si ha

$$T_\Gamma = xT_{\Gamma - p_1} = \dots = x^b T_{\Gamma - p_1 - \dots - p_b}$$

e procedendo allo stesso modo sui cappi di $T_{\Gamma - p_1 - \dots - p_b}$ risulta

$$T_{\Gamma - p_1 - \dots - p_b} = y^l T_{\Gamma - p_1 - \dots - p_b - c_1 - \dots - c_l}$$

quindi si ottiene, infine, $T_\Gamma = x^b y^l$. □

Come anticipato diamo una definizione ricorsiva del polinomio di Tutte associato a un grafo $\Gamma = (V, E)$ basato sulla proprietà appena dimostrata.

$$T(\Gamma; x, y) = \begin{cases} T(\Gamma - e; x, y) + T(\Gamma/e; x, y) & \text{se } e \text{ non è né ponte né cappio} \\ x^b y^l & \text{se } \Gamma \text{ formato da } b \text{ ponti e } l \text{ cappi} \end{cases}$$

Terminiamo il paragrafo dimostrando una proprietà del polinomio che William Thomas Tutte utilizzò per estendere la sua definizione a grafi non connessi.

Teorema 2.12 (di moltiplicazione). *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $\Gamma_1, \Gamma_2 \subseteq \Gamma$ due suoi sottografi tali che $|V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)| \leq 1$ e $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$; allora*

$$T(\Gamma; x, y) = T(\Gamma_1; x, y)T(\Gamma_2; x, y). \quad (2.12)$$

*Questa proprietà si esprime dicendo che il polinomio di Tutte è una funzione **moltiplicativa** sulle componenti connesse e sui blocchi di un grafo.*

Dimostrazione. Notiamo che i sottografi Γ_1 e Γ_2 dell'ipotesi possono essere componenti connesse se $|V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)| = 0$ o blocchi di Γ se $|V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)| = 1$ e non contengono vertici di taglio. Nel caso in cui E sia composto da b ponti e da l cappi vale $T_\Gamma = x^b y^l$, che soddisfa la tesi perché ogni cappio e ogni ponte forma da solo un blocco o una componente connessa di Γ . Procediamo per induzione sul numero di archi che non sono né ponti e né cappi, notando che il passo base è verificato per quanto detto prima. L'ipotesi $|V(\Gamma_1) \cap V(\Gamma_2)| \leq 1$ implica che Γ_1 e Γ_2 non possono avere archi in comune. Supponiamo $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con Γ_1 che contiene un arco e che non è né cappio e né ponte, allora

$$T(\Gamma; x, y) = T(\Gamma - e; x, y) + T(\Gamma/e; x, y) = T(\Gamma_1 - e \cup \Gamma_2; x, y) + T(\Gamma_1/e \cup \Gamma_2; x, y)$$

e, dal momento che la cancellazione e la contrazione di e possono solo diminuire il numero di archi di Γ che non sono né ponti e né cappi, possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva e ottenere

$$T(\Gamma; x, y) = (T(\Gamma_1 - e; x, y) + T(\Gamma_1/e; x, y))T(\Gamma_2; x, y) = T(\Gamma_1; x, y)T(\Gamma_2; x, y).$$

Notiamo che se $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ sono le componenti connesse di Γ o i blocchi di Γ allora si ha $T(\Gamma; x, y) = \prod_{i=1}^k T(\Gamma_i; x, y)$. \square

2.2 Valutazioni notevoli

In questo paragrafo mostriamo come il polinomio di Tutte riesca a codificare delle informazioni sul grafo associato, ad esempio facciamo anche vedere come generalizza il polinomio di flusso, un altro polinomio associato a grafi, anch'esso molto importante. Iniziamo fornendo delle valutazioni notevoli del polinomio di carattere combinatorio che, in particolare, contano il numero di particolari sottografi del grafo a cui è associato.

Teorema 2.13. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso e $T(\Gamma; x, y)$ il suo polinomio di Tutte; allora valgono le seguenti affermazioni*

1. $T(\Gamma; 1, 1)$ è il numero di alberi ricoprenti di Γ ,
2. $T(\Gamma; 2, 1)$ è il numero di foreste ricoprenti di Γ ,

3. $T(\Gamma; 1, 2)$ è il numero di sottografi ricoprenti connessi di Γ ,

4. $T(\Gamma; 2, 2) = 2^{|E|}$.

Dimostrazione. Verifichiamo queste affermazioni usando la definizione (2.8) del polinomio. La 1. si prova notando che gli unici addendi che non si annullano nella sommatoria sono quelli dati dai sottografi ricoprenti con rango uguale al rango di Γ e con nullità nulla. Infatti,

$$\begin{aligned} T(\Gamma; 1, 1) &= \sum_{F \subseteq E} 0^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} 0^{n(\langle F \rangle)} = \\ &= |\{F \subseteq E \mid r(\langle F \rangle) = r(\langle E \rangle), n(\langle F \rangle) = 0\}| \end{aligned}$$

e basta notare che $r(\langle F \rangle) = r(\langle E \rangle)$ implica che $c(\langle F \rangle) = c(\langle E \rangle) = 1$ e, dunque, ci dice che consideriamo solo sottografi connessi e $n(\langle F \rangle) = |F| - |V| + c(\langle F \rangle) = 0$ che consideriamo sottografi tali che $|F| = |V| - 1$, cioè alberi ricoprenti. Procedendo analogamente per la 2. e la 3. si ha

$$T(\Gamma; 2, 1) = \sum_{F \subseteq E} 1^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} 0^{n(\langle F \rangle)} = |\{F \subseteq E \mid n(\langle F \rangle) = 0\}|$$

e

$$T(\Gamma; 1, 2) = \sum_{F \subseteq E} 0^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} 1^{n(\langle F \rangle)} = |\{F \subseteq E \mid r(\langle F \rangle) = r(\langle E \rangle)\}|.$$

Allora per il risultato sulla nullità della Proposizione 2.3 la 2. è verificata; la 3. vale perché, come abbiamo visto, la condizione $r(\langle F \rangle) = r(\langle E \rangle)$ implica che $\langle F \rangle$ sia connesso. Infine, la 4. è verificata perché ogni termine della sommatoria è 1, infatti,

$$T(\Gamma; 2, 2) = \sum_{F \subseteq E} 1^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} 1^{n(\langle F \rangle)} = |\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}.$$

□

In letteratura esistono numerosi polinomi associati a grafi che svolgono la funzione di codificarne delle informazioni specifiche; un esempio è il polinomio cromatico che vedremo nel terzo capitolo. L'importanza del polinomio di Tutte sta in gran parte nell'essere in grado di generalizzare la maggior parte di questi polinomi; molti, infatti, risultano da particolari valutazioni del polinomio di Tutte adeguatamente normalizzato. Vediamo, ora, un esempio di particolare importanza chiamato *polinomio di flusso*.

Notazione 2.14. *In questo paragrafo, quando consideriamo un gruppo abeliano $(A, +)$ denotiamo sia con u_A che con 0 il suo elemento neutro.*

Definizione 2.15 (*A-flusso*). Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato e $(A, +)$ un gruppo abeliano; una funzione $f : E \rightarrow A$ è un **A-flusso** su Γ se per ogni vertice $v \in V$ la somma dei valori di f sugli archi entranti in v è uguale a quella sugli archi uscenti da v o, equivalentemente, se per ogni vertice $v \in V$, cambiando di segno i valori sugli archi uscenti da v , la somma dei valori di f su ogni arco che ha v come vertice è 0. In particolare, una funzione $f : E \rightarrow A$ è detta **A-flusso mai nullo** su Γ se $f(e) \neq u_A$ per ogni $e \in E$.

Osservazione 2.16. Notiamo che, cambiando l'orientazione di un arco $e \in E(\Gamma)$ e il segno di un A-flusso f su e , allora f rimane un A-flusso su Γ . Questo implica che il numero di A-flussi su un grafo Γ non dipende dall'orientazione scelta per $E(\Gamma)$.

Chiamiamo $q_\Gamma(A)$ il numero di A-flussi mai nulli su un grafo Γ e mostriamo in seguito che $q_\Gamma(A)$ risulta essere un polinomio in una indeterminata, l'ordine del gruppo A .

Osservazione 2.17. Il numero di A-flussi mai nulli è facilmente calcolabile sui grafi vuoti E_n e sui cicli di dimensione n , con $n \in \mathbb{N}$. Infatti, $q_{E_n}(A) = 1$ per qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, in quanto esiste un unico A-flusso da \emptyset ad A ed è mai nullo. Inoltre, se Γ è un ciclo di dimensione n , allora $q_\Gamma(A) = |A| - 1$, perché, fissato il valore su un arco, per verificare la condizione di A-flusso, i valori su tutti gli altri archi del ciclo Γ sono determinati, in particolare saranno lo stesso valore fissato o il suo opposto. Gli A-flussi mai nulli sono, quindi, $|A| - 1$.

Esponiamo nella seguente proposizione una proprietà importante dei flussi su grafi, introducendo prima una notazione molto utile.

Notazione 2.18. Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato; dato un vertice $v \in V$ indichiamo con $E^+(v)$ e $E^-(v)$ rispettivamente l'insieme degli archi di E entranti in v e quello degli archi uscenti da v ; inoltre, presi $U_1, U_2 \subseteq V$ denotiamo con $[U_1, U_2]$ l'insieme degli archi di E che hanno vertice di partenza in U_1 e vertice di arrivo in U_2 .

Proposizione 2.19. Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato, $(A, +)$ un gruppo additivo abeliano e $U \subseteq V$; allora per ogni f A-flusso su Γ , nelle notazioni appena definite, si ha

$$\sum_{e \in [V \setminus U, U]} f(e) - \sum_{e \in [U, V \setminus U]} f(e) = 0. \quad (2.13)$$

Dimostrazione. Notiamo che la condizione di A-flusso si può esprimere come

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0 \text{ per ogni } v \in V;$$

allora, preso $U \subseteq V$ si ha necessariamente

$$\sum_{v \in U} \left(\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) \right) = 0$$

e, dunque,

$$\sum_{e \in [V, U]} f(e) - \sum_{e \in [U, V]} f(e) = 0.$$

A questo punto, notiamo che se $e \in [U, U]$, allora $f(e)$ compare con entrambi i segni nel membro a sinistra dell'equazione precedente, dunque il contributo degli archi di $[U, U]$ è nullo. Per questo motivo, possiamo riscrivere la suddetta equazione come

$$\sum_{e \in [V \setminus U, U]} f(e) - \sum_{e \in [U, V \setminus U]} f(e) = 0.$$

e ottenere la tesi. □

Adesso siamo in grado di dimostrare delle proprietà di $q_\Gamma(A)$ che saranno essenziali per identificarlo come polinomio e per evidenziarne le analogie con il polinomio di Tutte.

Proposizione 2.20. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato, $e \in E$ un suo arco e $q_\Gamma(A)$ il numero di A -flussi mai nulli su Γ , dove $(A, +)$ è un gruppo abeliano; allora vale*

$$q_\Gamma(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ (|A| - 1)q_{\Gamma-e}(A) & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ q_{\Gamma/e}(A) - q_{\Gamma-e}(A) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dimostrazione. Se Γ contiene un ponte $e \in E$ con vertice di partenza in Γ_1 e vertice di arrivo in Γ_2 , dove Γ_1 e Γ_2 sono due componenti connesse di $\Gamma - e$; allora e è l'unico arco che appartiene all'insieme $[V(\Gamma_1), V(\Gamma_2)]$, quindi dalla (2.13) si ottiene $f(e) = 0$ e, dunque, non esistono A -flussi mai nulli su Γ .

Sia e un cappio di Γ , allora ogni A -flusso su Γ è ottenuto da un A -flusso di $\Gamma - e$ dando un valore qualsiasi a e . Un A -flusso mai nullo è, quindi, ottenuto in $|A| - 1$ modi a partire da un A -flusso mai nullo di $\Gamma - e$, quindi, $q_\Gamma(A) = (|A| - 1)q_{\Gamma-e}(A)$.

Se e non è né un cappio né un ponte di Γ , siano $u, v \in V$ i vertici di partenza e di arrivo di e e sia $f : E \rightarrow A$ un A -flusso mai nullo su Γ/e ; allora f può essere considerata una funzione f' sugli archi di $\Gamma - e$ perché $E(\Gamma/e)$ è in corrispondenza biunivoca con $E(\Gamma - e)$. A questo punto, la funzione f' può essere un A -flusso mai nullo su $\Gamma - e$ oppure non rispettare la proprietà di flusso solamente nei vertici u e v . Nel secondo caso, esiste un'unica estensione f'' di f' che è un A -flusso mai nullo su Γ . Inoltre, ogni A -flusso mai nullo f' su $\Gamma - e$ è ottenibile in questo modo e, analogamente, per ogni A -flusso mai nullo su Γ , dunque, $q_{\Gamma/e}(A) = q_\Gamma(A) + q_{\Gamma-e}(A)$. □

Osservazione 2.21. *Attraverso i risultati visti finora sul numero di A -flussi mai nulli su un grafo Γ , è possibile dare una formula ricorsiva che definisca $q_\Gamma(A)$ e dalla quale ricaviamo la sua identificazione come valutazione del polinomio di Tutte adeguatamente normalizzata.*

Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $(A, +)$ un gruppo abeliano, allora $q_\Gamma(A)$ è definito ricorsivamente dalla seguente formula.

$$q_\Gamma(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \Gamma \text{ è un grafo vuoto} \\ 0 & \text{se } e \text{ è un ponte} \\ (|A| - 1)q_{\Gamma-e}(A) & \text{se } e \text{ è un cappio} \\ q_{\Gamma/e}(A) - q_{\Gamma-e}(A) & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (2.15)$$

Il seguente teorema mostra che il numero di A -flussi mai nulli su un grafo Γ è un polinomio in una indeterminata di cui il polinomio di Tutte risulta essere una generalizzazione.

Teorema 2.22. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato e $(A, +)$ un gruppo abeliano di ordine $|A| = k$, con $k \in \mathbb{N}$; allora per il numero di A -flussi mai nulli su Γ vale la seguente identità.*

$$q_\Gamma(A) = (-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k). \quad (2.16)$$

Dimostrazione. Utilizzando la definizione ricorsiva di $q_\Gamma(A)$ dell'Osservazione 2.21, ci basta verificare che $(-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k)$ soddisfi la stessa formula ricorsiva per verificare la tesi. In ognuna delle quattro verifiche utilizziamo la definizione ricorsiva in (2.11) del polinomio di Tutte.

- Se Γ è un grafo vuoto si ha $n(\langle E \rangle) = 0$ e $T(\Gamma; x, y) = 1$, dunque

$$(-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k) = 1.$$

- Se $e \in E$ è un ponte allora $T(\Gamma; x, y) = xT(\Gamma - e; x, y)$ e, quindi,

$$(-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k) = 0.$$

- Se $e \in E$ è un cappio, per il polinomio di Tutte vale $T(\Gamma; x, y) = yT(\Gamma - e; x, y)$ e, notando $n(\langle E \rangle) = n(\langle E(\Gamma - e) \rangle) + 1$, risulta

$$\begin{aligned} (-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k) &= (-1)^{n(\langle E(\Gamma - e) \rangle) + 1} (1 - k) T(\Gamma - e; 0, 1 - k) = \\ &= (k - 1) (-1)^{n(\langle E(\Gamma - e) \rangle)} T(\Gamma - e; 0, 1 - k). \end{aligned}$$

- Infine, se $e \in E$ non è né un ponte né un cappio, basta notare che $n(\langle E \rangle) = n(\langle E(\Gamma/e) \rangle)$, in quanto Γ/e ha sia un arco che un vertice in meno di Γ e dalla proprietà del polinomio di Tutte si ottiene

$$\begin{aligned} (-1)^{n(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 0, 1 - k) &= (-1)^{n(\langle E \rangle)} (T(\Gamma/e; 0, 1 - k) + T(\Gamma - e; 0, 1 - k)) = \\ &= (-1)^{n(\langle E(\Gamma/e) \rangle)} T(\Gamma/e; 0, 1 - k) + (-1)^{n(\langle E(\Gamma - e) \rangle) + 1} T(\Gamma - e; 0, 1 - k) = \\ &= (-1)^{n(\langle E(\Gamma/e) \rangle)} T(\Gamma/e; 0, 1 - k) - (-1)^{n(\langle E(\Gamma - e) \rangle)} T(\Gamma - e; 0, 1 - k). \end{aligned}$$

L'identità (2.16) è quindi verificata in quanto i due membri dell'equazione possono essere definiti attraverso la stessa formula ricorsiva. \square

Il Teorema 2.22 ci dice che $q_\Gamma(A)$ è un polinomio la cui indeterminata è l'ordine del gruppo A e, quindi, che il numero di A -flussi mai nulli su Γ dipende solo dall'ordine del gruppo abeliano $(A, +)$.

2.3 Costruzione originale

In questo paragrafo costruiamo il polinomio di Tutte come nell'articolo [8] del 1954 in cui William Thomas Tutte lo definisce per la prima volta dandogli il nome di *dicromato* (dichromate) di un grafo e mostriamo, inoltre, delle proprietà del polinomio più evidenti da questa definizione.

Nel seguito consideriamo un grafo $\Gamma = (V, E)$ connesso con almeno un arco e fissiamo un'enumerazione dei suoi archi e_1, \dots, e_m . Ricordiamo che, come visto nella Proposizione 1.13, un grafo connesso ammette sempre un albero ricoprente.

Definizione 2.23 (Arco attivo internamente). *Sia $T \subseteq \Gamma$ un albero ricoprente di Γ e un arco $e_j \in E(T)$; indichiamo con T_1 e T_2 le due componenti connesse di $T - e_j$ e notiamo che e_j ha un vertice in T_1 e uno in T_2 . Diciamo che e_j è un arco **attivo internamente** in T se per ogni arco $e_k \in E, e_k \neq e_j$ che ha un vertice in T_1 e uno in T_2 risulti $k < j$.*

Osservazione 2.24. *Siano $T \subseteq \Gamma$ un albero ricoprente di Γ e un arco $e_j \in E \setminus E(T)$ con vertici $u, v \in V$, che coincidono nel caso in cui e_j sia un cappio; allora esiste un solo cammino $P \subseteq T$ da u a v . Infatti, se supponiamo che ci siano due cammini diversi $P_1, P_2 \subseteq T$ da u a v ; allora esiste un arco $e_k \in E(T)$ che sia in P_1 e non in P_2 . Se $u', v' \in V(P_1)$ sono i vertici di e_k , allora in $T - e_k$ ci sono un cammino da v' a v , uno da u a v e uno da u a u' ; in questo modo risulta che u' e v' sono vertici della stessa componente connessa di $T - e_k$, ma ciò è assurdo perché e_k è necessariamente ponte di T .*

Dopo questa osservazione ha senso dare la seguente definizione.

Definizione 2.25 (Arco attivo esternamente). *Sia $T \subseteq \Gamma$ un albero ricoprente di Γ e un arco $e_j \in E \setminus E(T)$ con vertici $u, v \in V$. Diciamo che e_j è un arco **attivo esternamente** in T se per ogni arco $e_k \in E(P)$ del cammino $P \subseteq T$ da u a v si ha $k < j$.*

Notazione 2.26. *Dato un albero ricoprente $T \subseteq \Gamma$; chiamiamo **attività interna** di T il numero di archi di Γ che sono attivi internamente in T e **attività esterna** di T il numero di archi di Γ che sono attivi esternamente in T , inoltre, le indichiamo rispettivamente con $i(T)$ e con $s(T)$.*

A questo punto possiamo definire il dicromato di un grafo connesso.

Definizione 2.27 (Dicromato). *Sia Γ un grafo connesso; allora definiamo il **dicromato** di Γ come un polinomio in due indeterminate indicato con $\chi(\Gamma; x, y)$ come segue.*

Se Γ è tale che $|E(\Gamma)| = 0$, allora poniamo $\chi(\Gamma; x, y) = 1$.

Altrimenti,

$$\chi(\Gamma; x, y) = \sum_T x^{i(T)} y^{s(T)}, \quad (2.17)$$

dove la somma è sugli alberi ricoprenti $T \subseteq \Gamma$.

Nel suo articolo Tutte mostra anche che la costruzione appena fatta non dipende dall'enumerazione degli archi scelta, ma essendo laboriosa, la omettiamo in questa trattazione. Seguiamo ancora il procedimento di Tutte per estendere la definizione di dicromato anche a un grafo non connesso.

Definizione 2.28. *Sia Γ un grafo e siano $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ le sue componenti connesse; allora definiamo il dicromato di Γ attraverso il prodotto dei dicromati delle sue componenti connesse, quindi*

$$\chi(\Gamma; x, y) = \prod_{i=1}^n \chi(\Gamma_i; x, y). \quad (2.18)$$

È possibile mostrare che questa definizione è equivalente a quella che abbiamo utilizzato finora; ad esempio nel Teorema 10 del Capitolo 10 del libro [2] vengono date due diverse dimostrazioni di questa equivalenza. Utilizzando questa definizione possiamo calcolare facilmente il grado del polinomio in entrambe le indeterminate.

Teorema 2.29. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; allora il polinomio di Tutte associato a Γ ha grado $r(\Gamma)$ nella indeterminata x e grado $n(\Gamma)$ nella indeterminata y .*

Dimostrazione. Se Γ non ha archi allora $|V| = c(\Gamma)$, quindi, $r(\Gamma) = n(\Gamma) = 0$ che verifica la proprietà. Supponiamo Γ sia un grafo connesso con almeno un arco; per la Proposizione 1.13 sappiamo che ogni grafo connesso ha almeno un albero ricoprente e, siccome ogni albero è un grafo in cui ogni arco è un ponte, un albero ricoprente $T \subseteq \Gamma$ soddisfa $|E(T)| = |V| - c(\Gamma) = |V| - 1$. Utilizziamo la definizione in (2.17) del polinomio per un grafo connesso. Ogni albero ricoprente T ha al massimo $|E(T)|$ archi attivi internamente e $|E| - |E(T)|$ archi attivi esternamente, quindi contribuisce alla somma con un monomio di grado al massimo $r(\Gamma)$ in x e al massimo $n(\Gamma)$ in y . Preso un albero ricoprente $T \subseteq \Gamma$, basta enumerare gli archi partendo da quelli in $E \setminus E(T)$, in questo modo ogni arco in $E(T)$ ha indice maggiore di tutti quelli in $E \setminus E(T)$, quindi l'albero ricoprente ha attività interna $i(T) = r(\Gamma)$; con un ragionamento analogo, enumerando gli archi a partire da quelli in $E(T)$ l'attività esterna dell'albero ricoprente risulta $s(T) = n(\Gamma)$. A questo punto, la tesi vale per l'indipendenza della definizione (2.17) dall'enumerazione degli archi scelta.

Inoltre, utilizzando la (2.18), si può estendere il risultato a grafi non connessi. \square

Osservazione 2.30. Dalla definizione (2.8) del polinomio si può già mostrare che il grado del polinomio nell'indeterminata x sia proprio il rango del grafo. Il valore massimo dell'esponente $r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)$, infatti, si ha quando $F = \emptyset$ che è sottoinsieme dell'insieme degli archi di qualsiasi grafo.

Concludiamo il paragrafo con un altro risultato notevole ottenibile attraverso la definizione originale, cioè il calcolo del polinomio di Tutte di un ciclo di dimensione $n \in \mathbb{N}$.

Proposizione 2.31. Sia $C_n = (\{1, 2, \dots, n\}, \{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1)\})$ un ciclo di dimensione n ; allora si ha

$$T(C_n; x, y) = y + x + x^2 + \dots + x^{n-1} \quad (2.19)$$

Dimostrazione. Un grafo ciclo C_n è un grafo connesso, dunque, $T(C_n; x, y) = \chi(C_n; x, y)$. Notiamo che ogni albero ricoprente di C_n è dato dalla cancellazione di un solo arco di C_n . Enumeriamo gli archi di $E(C_n)$ nel modo seguente

$$e_j := (j, j+1) \text{ per } j = 1, \dots, n-1 \text{ e } e_n := (n, 1);$$

indichiamo gli n alberi ricoprenti di C_n con $T_j = C_n - e_j$ e calcoliamo i contributi di ognuno nella somma. Per ogni $j = 1, \dots, n-1$ vale $i(T_j) = n-1$ e $s(T_j) = 0$, mentre per $j = n$ si ha $i(T_n) = 0$ e $s(T_n) = 1$ e, quindi otteniamo la tesi. \square

Capitolo 3

Applicazione alla colorazione di grafi

In questo capitolo trattiamo la colorazione dei vertici di un grafo, sottolineandone l'importanza storica e mostrando alcune proprietà che derivano da tali colorazioni. Inoltre, introduciamo il polinomio cromatico e mostriamo come viene generalizzato dal polinomio di Tutte.

Iniziamo definendo il concetto di colorazione di vertici di un grafo e di colorazione propria.

Definizione 3.1 (Colorazione). *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $C = \{c_1, \dots, c_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ un insieme; una **colorazione** di Γ è una funzione $f : V \rightarrow C$. Chiamiamo C un **insieme di colori** e, dunque, ogni suo elemento **colore**. Secondo questa terminologia un colorazione è una funzione che associa a ogni vertice del grafo un colore.*

Osservazione 3.2. *Possiamo utilizzare al posto di c_1, \dots, c_k dei nomi di colori, ad esempio $C = \{\text{rosso, blu, giallo, } \dots\}$, nei particolari casi in cui la cardinalità dell'insieme C lo permette.*

Definizione 3.3 (Colorazione propria). *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ con $k \in \mathbb{N}$ un insieme di colori; chiamiamo **colorazione propria** di Γ una funzione $f : V \rightarrow C$ tale che $f(v) \neq f(u)$ per ogni $v, u \in V$ vertici di uno stesso arco $e \in E$.*

Lo studio delle colorazioni proprie di un grafo si muove principalmente in due direzioni; una è lo studio del numero cromatico di un grafo, cioè il numero minimo di colori per cui esiste una colorazione propria del grafo e l'altra è lo studio del numero di colorazioni proprie di un grafo, fissato il numero di colori. Il secondo è storicamente importante in quanto collegato al famoso *Teorema dei 4 colori*. George David Birkhoff, infatti, definì nel 1912 il polinomio cromatico associato a un grafo allo scopo di dimostrare quella che allora era nota come la *Congettura dei 4 colori* e che si può formulare nel modo seguente.

Teorema 3.4 (Teorema dei 4 colori). *Data una porzione di piano divisa in regioni connesse, sono sufficienti quattro colori per colorare ogni regione in modo che le regioni adiacenti abbiano colore diverso.*

Osservazione 3.5. *In questo enunciato, si noti che due regioni sono considerate **adiacenti** se l'intersezione dei loro bordi contiene almeno una curva di lunghezza non nulla.*

Una naturale riformulazione del teorema attraverso l'uso di grafi si ottiene associando un vertice a ogni regione connessa e collegando con un arco tutti i vertici che rappresentano regioni adiacenti. Da una qualsiasi di queste associazioni si ottiene ciò che si chiama *grafo planare*, cioè un grafo che si può rappresentare su un piano senza che alcun arco intersechi un altro arco. Diamo la riformulazione del teorema qui di seguito.

Teorema 3.6 (Teorema dei 4 colori (grafi)). *Siano Γ un grafo planare e C insieme dei colori tale che $|C| = 4$; allora esiste almeno una colorazione propria $f : V(\Gamma) \rightarrow C$.*

Introduciamo il polinomio cromatico evidenziandone il legame con questo teorema. Consideriamo un grafo Γ , un numero $k \in \mathbb{N}$ e indichiamo con $P_\Gamma(k)$ il numero di colorazioni proprie del grafo che si possono ottenere con k colori. Come mostriamo in seguito, $P_\Gamma(k)$ è un polinomio detto *polinomio cromatico* di Γ . Birkhoff definì questo polinomio con l'intenzione di mostrare che per ogni grafo planare Γ si dovesse avere $P_\Gamma(4) \geq 1$. Purtroppo questa strategia non ebbe successo; la dimostrazione della congettura si ottenne solo nel 1977 grazie a Kenneth Appel e Wolfgang Haken. La loro strategia fu quella di ridurre l'infinità di mappe possibili a un numero finito di configurazioni e di utilizzare un computer per verificare la validità della tesi su ognuna di queste attraverso un algoritmo.

Veniamo allo studio del numero di colorazioni proprie di un grafo Γ con k colori; prima di mostrare che $P_\Gamma(k)$ è un polinomio, notiamo che in alcuni casi è una quantità facilmente calcolabile.

- Se Γ ha un cappio $e \in E(\Gamma)$ allora, banalmente, $P_\Gamma(k) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti, essendo un cappio, e ha i vertici necessariamente dello stesso colore.
- Per un grafo vuoto ogni colorazione è una colorazione propria, in particolare, preso quello di ordine n , E_n , si ha $P_{E_n}(k) = k^n$.
- Il grafo completo di ordine n , K_n , possiede colorazioni proprie se e solo se $|C| \geq n$ e, in tal caso si ha $P_{K_n}(k) = n! \binom{k}{n} = \frac{k!}{(k-n)!}$. Infatti, i vertici $v_1, \dots, v_n \in V(K_n)$ devono essere tutti di colori diversi e, scelti c_1, \dots, c_n colori dai k presenti in C , per ogni permutazione $\sigma \in S_n$ si ottiene una colorazione propria di K_n definita da $f(v_i) = c_{\sigma(i)}$, con $i = 1, \dots, n$.

La seguente proposizione evidenzia il comportamento di $P_\Gamma(k)$ rispetto alla cancellazione e alla contrazione di un arco del grafo Γ a cui è associato.

Proposizione 3.7. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo ed $e \in E$ un suo arco; allora vale*

$$P_\Gamma(k) = P_{\Gamma-e}(k) - P_{\Gamma/e}(k), \text{ per ogni } k \in \mathbb{N}. \quad (3.1)$$

Dimostrazione. Supponiamo che i vertici di e siano $u, v \in V$ e fissiamo un insieme di colori C tale che $|C| = k$; chiamiamo X l'insieme delle colorazioni proprie $f : V \rightarrow C$ di $\Gamma - e$. Partizioniamo X in due sottoinsiemi, $X_1 := \{f \in X \mid f(u) = f(v)\}$ e $X_2 := \{f \in X \mid f(u) \neq f(v)\}$. Ora basta notare che ogni $f \in X_1$ identifica una colorazione propria di Γ/e e ogni $f \in X_2$ identifica una colorazione propria di Γ ; dunque si ha

$$P_{\Gamma-e}(k) = P_{\Gamma/e}(k) + P_{\Gamma}(k).$$

□

Osservazione 3.8. *Analogamente al polinomio di Tutte, anche il polinomio cromatico può essere calcolato sfruttando la formula ricorsiva data dalla cancellazione e contrazione di archi. Anche in questo caso, al crescere della dimensione del grafo, il costo computazionale di questo calcolo diventa eccessivo e risulta quindi un metodo poco efficiente.*

Diamo, adesso, due dimostrazioni del fatto che $P_{\Gamma}(k)$ sia un polinomio associato al grafo Γ nell'indeterminata k , che ricordiamo essere la cardinalità di un insieme di colori. La prima dimostrazione caratterizza anche i coefficienti del polinomio, mentre la seconda ci sarà utile per verificare la relazione con il polinomio di Tutte.

Teorema 3.9. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo senza cappi tale che $|V| = n \geq 1$, $|E| = m$ e $c(\Gamma) = h$, con $n, m, h \in \mathbb{N}$; allora*

$$P_{\Gamma}(k) = \sum_{i=0}^{n-h} (-1)^i a_i k^{n-i}, \quad (3.2)$$

dove $a_0 = 1$, $a_1 = m$ e $a_i \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ per ogni $i = 2, \dots, n-h$.

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $n+m$. Se $n+m = 1$ la (3.2) è banalmente vera, perché il grafo consiste di un solo vertice, quindi, $P_{\Gamma}(k) = k$. Per il passo induttivo notiamo che, se $m = 0$, abbiamo già visto che $P_{\Gamma}(k) = k^n$ che verifica la (3.2). Supponiamo, allora, che $m > 0$ e prendiamo un arco $e \in E$ con $u, v \in V$ vertici di e che risultano distinti per ipotesi; si ha $|E(\Gamma - e)| = m - 1$ e $|V(\Gamma/e)| + |E(\Gamma/e)| \leq n + m - 1$ e, dunque, per ipotesi induttiva vale la (3.2) per $P_{\Gamma-e}(k)$ e $P_{\Gamma/e}(k)$. Notiamo che Γ/e ha esattamente h componenti connesse e che $\Gamma - e$ ne ha almeno h , quindi possiamo scrivere

$$P_{\Gamma-e}(k) = k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-h} (-1)^i b_i k^{n-i},$$

dove $b_i \in \mathbb{Z}$, $b_{n-h} \geq 0$, $b_i > 0$ per ogni $i = 2, \dots, n-h-1$ e

$$P_{\Gamma/e}(k) = k^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1-h} (-1)^j c_j k^{n-1-j} = k^{n-1} - \sum_{i=2}^{n-h} (-1)^i c_{i-1} k^{n-i},$$

dove $c_i \in \mathbb{Z}$, $c_1 \geq 0$, $c_i > 0$ per ogni $i = 2, \dots, n - h - 1$.

A questo punto, utilizzando la (3.1) si ottiene

$$\begin{aligned} P_\Gamma(k) &= k^n - (m-1)k^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-h} (-1)^i b_i k^{n-i} - (k^{n-1} - \sum_{i=2}^{n-h} (-1)^i c_{i-1} k^{n-i}) = \\ &= k^n - mk^{n-1} + \sum_{i=2}^{n-h} (-1)^i (b_i + c_{i-1}) k^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-h} (-1)^i a_i k^{n-i}, \end{aligned}$$

dove si è posto $a_i := b_i + c_{i-1}$ per ogni $i = 2, \dots, n - h$, $a_0 := 1$ e $a_1 := m$, verificando quindi la tesi. \square

Il precedente teorema ha come conseguenza il fatto che il numero di colorazioni proprie di un grafo Γ è un polinomio a coefficienti interi nell'indeterminata k , cioè il numero di colori che si possono usare per la colorazione. Questo ci permette di chiamare $P_\Gamma(k)$ il **polinomio cromatico** associato a Γ . Nel seguente teorema mostriamo, invece, una espressione del polinomio cromatico basata sui sottografi ricoprenti di Γ .

Teorema 3.10. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo senza cappi tale che $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$; allora $P_\Gamma(k)$ è un polinomio monico di grado n e, in particolare, si ha*

$$P_\Gamma(k) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(\langle F \rangle)}. \quad (3.3)$$

Dimostrazione. Fissiamo un insieme di colori $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ e consideriamo l'insieme $X = \{f : V \rightarrow C\}$ di tutte le colorazioni del grafo Γ . Presi una colorazione $f \in X$ e un arco $e \in E$, chiamiamo e arco "cattivo" se f associa ai suoi vertici lo stesso colore e calcoliamo il numero di colorazioni in cui un determinato insieme di archi $F \subseteq E$ consista solo di archi cattivi. Fissato, quindi, il sottografo ricoprente $\langle F \rangle$, ogni colorazione $f \in X$ in cui F contiene solo archi cattivi, deve associare a tutti i vertici della stessa componente connessa di $\langle F \rangle$ lo stesso colore; dunque, il numero di tali colorazioni risulta $k^{c(\langle F \rangle)}$. Adesso possiamo usare il Principio di inclusione-esclusione, che lasciamo in Appendice A, per ottenere il numero di colorazioni in cui nessun arco in E è un arco cattivo e dunque il numero di colorazioni proprie di Γ , perciò

$$P_\Gamma(k) = \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(\langle F \rangle)}.$$

Notiamo, infine, che il numero massimo di componenti connesse di un sottografo ricoprente $\langle F \rangle$ si ottiene quando $F = \emptyset$; quindi, il contributo alla somma (3.3) del sottografo ricoprente vuoto costituisce il termine direttore del polinomio che, in particolare, risulta k^n , dunque verifica la tesi. \square

L'espressione (3.3) del polinomio cromatico associato a un grafo richiama evidentemente la (2.8) che abbiamo usato per definire il polinomio di Tutte; infatti, entrambe le espressioni sono delle sommatorie sui sottoinsiemi dell'insieme degli archi del grafo a cui i polinomi sono associati. Vediamo, adesso, come il polinomio cromatico può essere espresso attraverso una valutazione particolare del polinomio di Tutte opportunamente normalizzata.

Teorema 3.11. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo senza cappi e $k \in \mathbb{N}$; allora vale*

$$P_{\Gamma}(k) = (-1)^{r(\langle E \rangle)} k^{c(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 1 - k, 0). \quad (3.4)$$

Dimostrazione. La dimostrazione di questo teorema consiste in dei semplici passaggi algebrici. Infatti, basta valutare il polinomio di Tutte associato a Γ in $x = 1 - k$ e $y = 0$.

$$\begin{aligned} T(\Gamma; 1 - k, 0) &= \sum_{F \subseteq E} (-k)^{r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} (-1)^{n(\langle F \rangle)} = \\ &= \sum_{F \subseteq E} k^{|V| - c(\langle E \rangle) - |V| + c(\langle F \rangle)} (-1)^{|F| - r(\langle F \rangle) + r(\langle E \rangle) - r(\langle F \rangle)} = \\ &= (-1)^{r(\langle E \rangle)} \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|F|} k^{c(\langle F \rangle) - c(\langle E \rangle)}. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordando la (3.3), si ottiene

$$(-1)^{r(\langle E \rangle)} k^{c(\langle E \rangle)} T(\Gamma; 1 - k, 0) = P_{\Gamma}(k).$$

□

Il risultato appena mostrato permette di tradurre per il polinomio di Tutte ogni proprietà valida per il polinomio cromatico. Un esempio notevole è l'interpretazione che Richard Stanley ha dato del polinomio cromatico valutato in $k = -1$. Ovviamente, non ha senso parlare di colorazioni con un numero di colori negativo; Stanley, infatti, ha interpretato il valore $P_{\Gamma}(-1)$ attraverso le orientazioni acicliche di un grafo, che definiamo di seguito.

Definizione 3.12 (Orientazione aciclica). *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo; un'orientazione di Γ è una funzione che associa ad ogni arco in E un verso di percorrenza. In questo modo possiamo dire che la coppia (Γ, f) , dove f è un'orientazione, rappresenta un grafo orientato e, inoltre, che ogni grafo orientato è rappresentabile da una coppia di questo tipo. A questo punto definiamo **orientazione aciclica** un'orientazione che non contenga cicli diretti.*

Concludiamo il capitolo dimostrando il risultato di Stanley espresso come valutazione del polinomio di Tutte.

Teorema 3.13. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo tale che $|V| = n$, con $n \in \mathbb{N}$; allora il numero di orientazioni acicliche di Γ è*

$$(-k)^{c\langle E \rangle} T(2, 0). \quad (3.5)$$

Dimostrazione. Notiamo che, utilizzando la (3.4), mostrare la (3.5) si riduce a mostrare che il numero di orientazioni acicliche di Γ è $(-1)^n P_\Gamma(-1)$; infatti,

$$\begin{aligned} (-1)^n P_\Gamma(-1) &= (-1)^n (-1)^{r\langle E \rangle} k^{c\langle E \rangle} T(\Gamma; 2, 0) = \\ &= (-1)^{2n - c\langle E \rangle} k^{c\langle E \rangle} T(\Gamma; 2, 0) = (-k)^{c\langle E \rangle} T(\Gamma; 2, 0). \end{aligned}$$

Consideriamo un arco $e \in E$, chiamiamo S l'insieme di orientazioni acicliche di $\Gamma - e$ e notiamo che ogni elemento di S può essere esteso a un'orientazione aciclica di Γ . Per assurdo, supponiamo che esista un'orientazione aciclica $f \in S$ tale che entrambi i versi di e la estendano a un'orientazione di Γ che contiene un ciclo diretto. Detti $u, v \in V$ i vertici di e , consideriamo $\{(u, v), e_1, \dots, e_t\}$ l'insieme degli archi del ciclo diretto di Γ formato dal verso (u, v) di e e $\{(v, u), e_{t+1}, \dots, e_{t+h}\}$ l'insieme degli archi del ciclo diretto di Γ formato dal verso (v, u) di e . Allora necessariamente l'insieme $\{e_1, \dots, e_t, e_{t+1}, \dots, e_{t+h}\}$ è l'insieme degli archi di un ciclo diretto in $\Gamma - e$, ma questo contraddice il fatto che f sia un'orientazione aciclica di $\Gamma - e$. Possiamo, quindi, dividere S nei sottoinsiemi

- $S_1 = \{f \in S \mid \text{un unico verso di } e \text{ estende } f \text{ a un'orientazione aciclica di } \Gamma\}$,
- $S_2 = \{f \in S \mid \text{qualsunque verso di } e \text{ estende } f \text{ a un'orientazione aciclica di } \Gamma\}$.

In queste notazioni possiamo dire che il numero di orientazioni acicliche di Γ è $|S_1| + 2|S_2|$. Notiamo, adesso, che ogni $f \in S_2$ è identificabile con un'orientazione aciclica di Γ/e e che $|S| = |S_1| + |S_2|$ è il numero di orientazioni acicliche di $\Gamma - e$. Procediamo, quindi, per induzione sul numero di archi di Γ per mostrare la tesi. Se $|E| = 0$ allora come abbiamo visto, si ha $P_\Gamma(k) = k^n$ e dunque $(-1)^n P_\Gamma(-1) = 1$, che è proprio il numero di orientazioni acicliche che ha un grafo vuoto. Prendiamo ora Γ tale che $|E(\Gamma)| = m$; per ipotesi induttiva la tesi vale per i grafi $\Gamma - e$ e Γ/e perché hanno un arco in meno, dunque, $(-1)^{n-1} P_{\Gamma/e}(-1)$ e $(-1)^n P_{\Gamma-e}(-1)$ sono il numero di orientazioni acicliche di Γ/e e $\Gamma - e$ rispettivamente. A questo punto, utilizzando la (3.1), otteniamo che

$$\begin{aligned} |S_1| + 2|S_2| &= (|S_1| + |S_2|) + |S_2| = (-1)^n P_{\Gamma-e}(-1) + (-1)^{n-1} P_{\Gamma/e}(-1) = \\ &= (-1)^n (P_{\Gamma-e}(-1) - P_{\Gamma/e}(-1)) = (-1)^n P_\Gamma(-1) \end{aligned}$$

è il numero di orientazioni acicliche di Γ e, dunque, la tesi. \square

Capitolo 4

Polinomio di Tutte orbitale

In questo capitolo conclusivo trattiamo una versione relativamente recente del polinomio di Tutte specializzata nel conteggio delle orbite generate da un'azione di gruppo sul grafo a cui è associato il polinomio.

Premettiamo un paragrafo introduttivo sulle azioni di gruppo in cui fissiamo le notazioni e mostriamo anche dei risultati fondamentali per il conteggio delle orbite. Il paragrafo successivo è, invece, dedicato al polinomio di Tutte orbitale.

4.1 Nozioni utili sulle azioni di gruppo

Definizione 4.1 (Azione di gruppo). *Siano X un insieme e (G, \cdot) un gruppo; chiamiamo **azione** di G su X un omomorfismo di gruppi $\eta : G \rightarrow \text{Aut}(X)$ che ad ogni $g \in G$ associa un automorfismo $\eta_g : X \rightarrow X$. Essendo X un insieme, non ha una struttura algebrica, quindi, ogni η_g è semplicemente una biiezione di X in sé stesso.*

Usiamo la notazione dell'azione sinistra, quindi indichiamo l'immagine di un elemento $x \in X$ attraverso η_g con $gx := \eta_g(x)$.

Nel seguito consideriamo solo azioni del tipo definito sopra, perciò omettiamo di chiamarle azioni sinistre e ci limitiamo a chiamarle azioni.

Osservazione 4.2. *Se X è un insieme finito, cioè $|X| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, allora il gruppo degli automorfismi di X si può identificare con il gruppo simmetrico S_n , in quanto ogni $f \in \text{Aut}(X)$ è una permutazione degli elementi di X .*

Il seguente risultato è molto importante in quanto esprime il fatto che un gruppo definisca una relazione di equivalenza sull'insieme su cui agisce.

Proposizione 4.3. *Siano X un insieme e (G, \cdot) un gruppo che agisce su X ; allora la relazione*

$$x \sim y \text{ se e solo se esiste } g \in G \text{ tale che } y = gx$$

è una relazione di equivalenza sull'insieme X .

Dimostrazione. Verifichiamo per la relazione \sim le tre proprietà per essere relazione di equivalenza.

- **riflessiva:** $x \sim x$ per ogni $x \in X$, in quanto $x = u_G x$, dove $u_G \in G$ è l'elemento neutro del gruppo;
- **simmetrica:** se $x \sim y$, allora esiste $g \in G$ tale che $y = gx$, ma allora $g^{-1}y = x$, dunque $y \sim x$, perché $g^{-1} \in G$;
- **transitiva:** se $x \sim y$ e $y \sim z$, allora esistono $g, h \in G$ tali che $y = gx$ e $z = hy$, ma allora $z = hgx$, che implica $x \sim z$, in quanto $gh \in G$.

□

A questo punto possiamo introdurre i concetti di *orbita* e di *stabilizzatore* che svolgono un ruolo centrale nel capitolo.

Definizione 4.4 (Orbita). *Siano X un insieme e (G, \cdot) un gruppo che agisce su X ; preso un elemento $x \in X$, chiamiamo **orbita** la classe di equivalenza di x secondo la relazione di equivalenza definita sopra. Denotiamo l'orbita di x con $Gx = \{gx \mid g \in G\} = \{y \in X \mid \text{esiste } g \in G \text{ tale che } y = gx\}$.*

Definizione 4.5 (Stabilizzatore). *Siano X un insieme e (G, \cdot) un gruppo che agisce su X ; preso un elemento $x \in X$, chiamiamo **stabilizzatore** di x l'insieme*

$$\text{stab}_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}.$$

Facilmente si dimostra che lo stabilizzatore $\text{stab}_G(x)$ è un sottogruppo di G , quindi si scrive

$$\text{stab}_G(x) \leq G.$$

Fissiamo ulteriori notazioni che utilizziamo nella trattazione seguente.

Notazione 4.6. *Denotiamo con X/G l'insieme delle orbite degli elementi di X generate dall'azione di G su X .*

Dato un elemento $g \in G$ indichiamo l'insieme degli elementi $x \in X$ che vengono fissati da g attraverso la notazione $\text{fix}(g) = \{x \in X \mid gx = x\}$.

Introduciamo, adesso, un risultato noto come *Teorema orbita-stabilizzatore* la cui importanza sta nel ruolo centrale che ricopre nel raggiungimento dello scopo di questo paragrafo, cioè contare le orbite generate da un'azione di gruppo.

Teorema 4.7 (orbita-stabilizzatore). *Siano X un insieme e (G, \cdot) un gruppo che agisce su X ; fissato $x \in X$ esiste un'applicazione biettiva $\varphi : G/\text{stab}_G(x) \rightarrow Gx$, dove $G/\text{stab}_G(x)$ è l'insieme delle classi laterali su cui φ è definita da $\varphi(g\text{stab}_G(x)) = gx$. Inoltre, φ è compatibile con l'azione di G su X , cioè per ogni classe laterale $C \in G/\text{stab}_G(x)$ si ha $\varphi(hC) = h\varphi(C)$ per ogni $h \in G$.*

Dimostrazione. Verifichiamo la buona definizione della φ ; supponiamo due elementi $a, b \in G$ siano tali che $a\text{stab}_G(x) = b\text{stab}_G(x)$, cioè che esista $h \in \text{stab}_G(x)$ tale che $b = ah$, allora $bx = ahx = ax$ e, quindi $\varphi(a\text{stab}_G(x)) = \varphi(b\text{stab}_G(x))$. Ora, sapendo che $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ e che $\varphi(g\text{stab}_G(x)) = gx$, si ha che $\varphi(G/\text{stab}_G(x)) = Gx$, cioè la suriettività di φ . Mostriamo, infine, l'iniettività; se $a\text{stab}_G(x), b\text{stab}_G(x) \in G/\text{stab}_G(x)$ sono tali che $\varphi(a\text{stab}_G(x)) = \varphi(b\text{stab}_G(x))$, allora $ax = bx$, cioè $x = a^{-1}bx$, ma questo implica che $a^{-1}b \in \text{stab}_G(x)$, cioè che $b = ah \in a\text{stab}_G(x)$ per un certo $h \in \text{stab}_G(x)$, quindi $b\text{stab}_G(x) = a\text{stab}_G(x)$. L'applicazione φ è, dunque, ben definita, biettiva e verifica la condizione di compatibilità con l'azione di G su X per come è definita. \square

Osservazione 4.8. *Il risultato appena mostrato afferma che, fissato un elemento $x \in X$, esiste una biiezione naturale tra l'insieme delle classi laterali $G/\text{stab}_G(x)$ e l'orbita di x . Utilizzando il famoso Teorema di Lagrange sull'ordine dei gruppi si ha*

$$|Gx| = |G/\text{stab}_G(x)| = |G|/|\text{stab}_G(x)|. \quad (4.1)$$

L'ultimo risultato di questo paragrafo è quello che usiamo in seguito per costruire il polinomio di Tutte orbitale. In letteratura questo teorema è noto anche come *Lemma di Burnside*, ma è altrettanto noto il fatto che non sia stato Burnside il primo matematico a conoscenza del suddetto teorema; per questo motivo ci riferiamo al teorema chiamandolo *Lemma di conteggio delle orbite*.

Teorema 4.9 (Lemma di conteggio delle orbite). *Siano X un insieme finito e (G, \cdot) un gruppo che agisce su X ; allora il numero di orbite generate dall'azione di G su X è dato dalla formula*

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|. \quad (4.2)$$

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul contare in due modi il numero di coppie $(x, g) \in X \times G$ tali che $gx = x$. Chiaramente, dalla definizione di $\text{fix}(g)$ e di stabilizzatore, abbiamo

$$|\{(x, g) \in X \times G \mid gx = x\}| = \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| \quad (4.3)$$

e

$$|\{(x, g) \in X \times G \mid gx = x\}| = \sum_{x \in X} |\text{stab}_G(x)|. \quad (4.4)$$

Ora, utilizzando la (4.1) dell'osservazione precedente, possiamo riscrivere

$$\sum_{x \in X} |\text{stab}_G(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}. \quad (4.5)$$

Adesso basta notare che l'insieme X è unione disgiunta delle orbite generate dall'azione di gruppo, per farlo basta ricordare che le orbite sono classi di equivalenza, dunque,

ogni elemento di X sta in una e una sola orbita. Per questo motivo possiamo riscrivere l'ultima sommatoria come somma sulle orbite invece che sugli elementi di X .

$$\sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = \sum_{A \in X/G} \sum_{x \in A} \frac{1}{|A|} = \sum_{A \in X/G} 1 = |X/G| \quad (4.6)$$

Dalla (4.5) otteniamo, quindi,

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |\text{stab}_G(x)| \quad (4.7)$$

e dall'uguaglianza

$$\sum_{g \in G} |\text{fix}(g)| = \sum_{x \in X} |\text{stab}_G(x)| \quad (4.8)$$

la tesi. □

4.2 Costruzione e proprietà

Applichiamo ai grafi la teoria introdotta nel paragrafo precedente, considerando le orbite generate da un'azione di gruppo su un grafo. In particolare, utilizziamo il Lemma di conteggio delle orbite ottenendo dei risultati sulle orbite di flussi mai nulli e di colorazioni proprie del grafo.

Consideriamo un grafo $\Gamma = (V, E)$, con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $n \in \mathbb{N}$; un'azione di un gruppo (G, \cdot) su Γ è un omomorfismo $\eta : G \rightarrow \text{Aut}(\Gamma)$. Ricordiamo che, in generale, non tutte le permutazioni dei vertici di Γ identificano automorfismi di Γ , ma che sicuramente ogni automorfismo di Γ è identificato da una permutazione dei suoi vertici. Presi $g \in G$ e $v \in V$, nel seguito usiamo la notazione di azione sinistra gv introdotta nel paragrafo precedente, per indicare l'immagine del vertice v attraverso la permutazione dei vertici di Γ che identifica l'automorfismo $\eta_g : \Gamma \rightarrow \Gamma$. Notiamo che, per quanto detto prima, per ogni $g \in G$ esiste $\sigma \in S_n$ tale che $gv_i = v_{\sigma(i)}$, per ogni $v_i \in V$; inoltre, essendo $\text{Aut}(\Gamma)$ un gruppo, possiamo sempre identificarlo, tramite isomorfismo, con un sottogruppo di S_n .

Notazione 4.10. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ ; consideriamo due archi $e, e' \in E$ e un elemento $g \in G$ il cui automorfismo associato dall'azione manda e in e' . Siano $v, u, v', u' \in V$ tali che $e = (v, u)$ ed $e' = (v', u')$, essendo e ed e' due archi orientati, la permutazione di vertici che identifica l'automorfismo associato a g può invertire la loro orientazione. Denotiamo con $ge = e'$ il fatto che e venga mandato in e' da η_g e diciamo che le orientazioni **concordano** se $gv = v'$ e $gu = u'$ e che **non concordano** se $gv = u'$ e $gu = v'$.*

Osservazione 4.11. Dovendo parlare sia di grafi che di gruppo simmetrico S_n facciamo chiarezza nella terminologia utilizzando la parola **ciclo**, come abbiamo fatto finora, per indicare un grafo che è un ciclo, invece, parliamo di S_n -**ciclo** quando ci riferiamo a un elemento del gruppo simmetrico della forma $(i \ j \ \dots \ k) \in S_n$, con $i, j, \dots, k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Per definire il polinomio di Tutte orbitale abbiamo bisogno di lavorare con matrici a coefficienti in \mathbb{Z} che è un dominio euclideo; queste matrici presentano particolari differenze con quelle a coefficienti in un campo a cui ogni matematico è abituato. Evidenziamo, qui di seguito, alcune proprietà delle suddette matrici.

Sia R un dominio euclideo, il fatto che gli elementi di R possano non essere invertibili determina la principale differenza con le matrici a coefficienti in un campo, infatti, una matrice in $M_{n,n}(R)$ è invertibile se e solo se il suo determinante è un elemento invertibile di R . Qui di seguito elenchiamo le operazioni elementari che si possono fare su una matrice di $A \in M_{m,n}(R)$, cioè operazioni che si ottengono moltiplicando A a destra con una matrice invertibile di $M_{n,n}(R)$ o a sinistra con una matrice invertibile di $M_{m,m}(R)$.

- Scambio della i -esima riga o colonna rispettivamente con la j -esima riga o colonna, che denotiamo con $R_i \leftrightarrow R_j$ nel caso delle righe e con $C_i \leftrightarrow C_j$ nel caso delle colonne.
- Moltiplicazione della i -esima riga o colonna per un elemento invertibile $u \in R$, che denotiamo rispettivamente con $R_i \mapsto uR_i$ e $C_i \mapsto uC_i$.
- Sommare alla i -esima riga o colonna rispettivamente la j -esima riga o colonna moltiplicata per un elemento $a \in R$. Indichiamo questa operazione con $R_i \mapsto R_i + aR_j$ nel caso delle righe e con $C_i \mapsto C_i + aC_j$ nel caso delle colonne.

Attraverso queste operazioni possiamo dimostrare un risultato fondamentale per le matrici a coefficienti in un dominio euclideo che chiamiamo *Teorema di diagonalizzazione*.

Teorema 4.12 (diagonalizzazione delle matrici a coefficienti in un dominio euclideo). Siano R un dominio euclideo e $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(R)$ una matrice a coefficienti in R di rango $r \in \mathbb{N}$; allora esistono due matrici invertibili $P \in M_{m,m}(R)$ e $Q \in M_{n,n}(R)$ tali che

$$P^{-1}AQ = \begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} =: D \quad (4.9)$$

dove $d_1, \dots, d_r \in R$ sono gli unici coefficienti non nulli della matrice D e sono tali che $d_i \mid d_{i+1}$ per ogni $i = 1, \dots, r - 1$.

Inoltre, gli elementi d_1, \dots, d_r sono unici a meno di associati e la matrice D prende il nome di **forma normale di Smith** della matrice A .

Dimostrazione. Mostriamo che si può passare dalla matrice A a quella D attraverso operazioni elementari, quindi moltiplicando a destra o a sinistra la matrice A con matrici invertibili. Per farlo dimostriamo che è possibile portare A attraverso operazioni elementari in una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbf{B} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

dove $d_1 \mid b_{ij}$ per ogni b_{ij} coefficiente della matrice $B \in M_{m-1, n-1}(R)$.

Possiamo supporre che $a_{11} \neq 0$ in quanto, se non lo fosse, potremmo portare un coefficiente non nullo di A nel posto $(1, 1)$ mediante scambio di righe e colonne.

Sia $\rho : R \rightarrow \mathbb{Z}$ la funzione che rende R un dominio euclideo; procediamo come segue.

- **Passo 1:** Se esiste un coefficiente a_{1j} della prima riga che non è divisibile per a_{11} allora esistono $q, r \in R$ tali che

$$a_{1j} = a_{11}q + r \text{ con } \rho(r) < \rho(a_{11}). \quad (4.11)$$

In questo caso procediamo con l'operazione elementare $C_j \mapsto C_j - qC_1$ e, successivamente, scambiamo le due colonne $C_j \leftrightarrow C_1$; a questo punto ripetiamo il Passo 1 con $a_{11} = r$.

- **Passo 2:** Se esiste un coefficiente a_{i1} della prima colonna che non è divisibile per a_{11} procediamo allo stesso modo del Passo 1 operando sulle righe al posto delle colonne e ricominciando dal Passo 1 ogni volta che si effettuano scambi nel Passo 2.
- **Passo 3:** A questo punto a_{11} divide tutti i coefficienti della prima colonna e della prima riga, quindi, sottraendo opportuni multipli della prima riga alle altre e opportuni multipli della prima colonna alle altre si ottiene una matrice della forma

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & \mathbf{C} & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dove si è posto $d_1 := a_{11}$ e $C \in M_{m-1, n-1}(R)$.

- **Passo 4:** Se d_1 divide ogni coefficiente c_{ij} della matrice C allora siamo già nel caso della matrice (4.10) con $B = C$. Altrimenti esiste un coefficiente c_{ij} della riga i -esima che non è divisibile per d_1 ; in questo caso procediamo con l'operazione elementare $R_1 \mapsto R_1 + R_i$, cioè sommando la riga i -esima alla prima e ricominciamo dal Passo 1.

Notiamo che ogni scambio in questo procedimento fa in modo che il valore di ρ sul coefficiente nel posto $(1, 1)$ diminuisca; essendo ρ una funzione a valori interi e limitata inferiormente, l'algoritmo termina dopo un numero finito di passi portando la matrice A in una matrice della forma (4.10). A questo punto sarà sufficiente usare lo stesso procedimento sulla matrice B e così via fino ad ottenere una forma della matrice A in cui $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Notiamo che le operazioni elementari sulla matrice B non alterano la prima riga e la prima colonna e trasformano la matrice in una con coefficienti che sono combinazioni lineari di quelli di B , dunque, sono ancora tutti divisibili per d_1 . Per questo motivo alla fine dell'algoritmo avremo una matrice della forma richiesta dalla tesi. \square

Grazie alla forma normale di Smith è possibile rappresentare una matrice attraverso un monomio, chiamato *monomio indicatore* della matrice; questo avrà ruolo centrale nella definizione del polinomio di Tutte orbitale.

Definizione 4.13 (Monomio indicatore). *Siano R un dominio euclideo e $A \in M_{m,n}(R)$; prendiamo $I \subseteq \mathbb{N}$ un insieme di indici in cui ogni indice rappresenta una classe di elementi associati di R e consideriamo una famiglia di indeterminate $(x_i)_{i \in I}$ indicizzate da I . Se gli elementi d_1, \dots, d_r della forma normale di Smith della matrice A appartengono rispettivamente alle classi di elementi associati indicizzate da i_1, \dots, i_r , allora il **monomio indicatore** della matrice A è*

$$x(A) = x_{i_1} \dots x_{i_r} x_0^{n-r} \quad (4.13)$$

dove 0 indicizza la classe dell'elemento $0 \in R$.

Osservazione 4.14. *Nella definizione del polinomio di Tutte orbitale usiamo anche il monomio indicatore $y(A)$ che è definito allo stesso modo di $x(A)$, ma nelle indeterminate $(y_i)_{i \in I}$.*

Procediamo alla costruzione del polinomio. Nel seguito consideriamo un grafo orientato $\Gamma = (V, E)$ e per ogni ciclo $C \subseteq \Gamma$ fissiamo, indipendentemente dall'orientazione del grafo Γ , un'orientazione che lo renda un ciclo diretto. Fissare queste orientazioni è necessario per definire il polinomio, ma il risultato è indipendente dalle scelte fatte.

Introduciamo delle matrici relative al grafo orientato Γ appena fissato.

Definizione 4.15 (Matrice vertice-arco). *La **matrice di incidenza vertice-arco con segno** associata al grafo orientato Γ è una matrice M con righe indicizzate dai vertici*

di Γ e colonne indicizzate dagli archi di Γ , quindi una matrice $|V| \times |E|$ a coefficienti interi m_{ve} definiti da

$$m_{ve} = \begin{cases} 1 & \text{se } e \text{ entra in } v \\ -1 & \text{se } e \text{ esce da } v \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (4.14)$$

Definizione 4.16 (Matrice ciclo-arco). Ricordando che su ogni ciclo $C \subseteq \Gamma$ è fissata un'orientazione che lo rende ciclo diretto, chiamiamo **matrice di incidenza ciclo-arco con segno** associata al grafo orientato Γ una matrice M^* con righe indicizzate dai cicli di Γ e colonne indicizzate dagli archi di Γ i cui coefficienti m_{Ce}^* sono interi e definiti da

$$m_{Ce}^* = \begin{cases} 1 & \text{se } e \in E(C) \text{ e le orientazioni concordano} \\ -1 & \text{se } e \in E(C) \text{ e le orientazioni non concordano} \\ 0 & \text{se } e \notin E(C) \end{cases} \quad (4.15)$$

Definizione 4.17 (Matrice arco-permutazione). Sia (G, \cdot) un gruppo che agisce sul grafo orientato Γ ; per ogni $g \in G$ chiamiamo **matrice arco-permutazione con segno** una matrice a coefficienti interi P_g con righe e colonne indicizzate dagli archi di Γ , i cui coefficienti $p_{e_i e_j}$ sono definiti da

$$p_{e_i e_j} = \begin{cases} 1 & \text{se } ge_i = e_j \text{ e le orientazioni concordano} \\ -1 & \text{se } ge_i = e_j \text{ e le orientazioni non concordano} \\ 0 & \text{se } ge_i \neq e_j \end{cases} \quad (4.16)$$

Per definire il polinomio di Tutte orbitale fissiamo un'ultima utile notazione.

Notazione 4.18. Consideriamo una matrice M le cui colonne sono indicizzate dagli elementi di un insieme E ; preso $F \subseteq E$ indichiamo con $M(F)$ la matrice ottenuta da M selezionando solo le colonne indicizzate dagli elementi di F .

Definizione 4.19 (Polinomio di Tutte orbitale). Siano Γ un grafo orientato in cui su ogni ciclo $C \subseteq \Gamma$ è definita un'orientazione aggiuntiva che lo rende ciclo diretto e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ . Per ogni $g \in G$ denotiamo con M_g e M_g^* le matrici

$$M_g = \begin{pmatrix} M \\ P_g - I \end{pmatrix}, \quad M_g^* = \begin{pmatrix} M^* \\ P_g - I \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Adesso, consideriamo due famiglie di indeterminate indicizzate dagli interi non negativi (x_i) e (y_i) con $i \in \{0, 1, \dots\}$ e, attraverso i monomi indicatori delle matrici definite sopra, definiamo il polinomio di Tutte orbitale associato a Γ come

$$OT(\Gamma, G; x_i, y_i) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{F \subseteq E} x(M_g(F)) y(M_g^*(E \setminus F)). \quad (4.18)$$

Ricordando la definizione di A -flusso che abbiamo dato nel secondo capitolo, trattiamo nel dettaglio il conteggio delle orbite di A -flussi mai nulli su un grafo Γ generate da un'azione di gruppo sul grafo. In seguito, accenniamo anche al conteggio delle orbite di colorazioni proprie introducendo il polinomio cromatico orbitale associato a un grafo. Iniziamo fissando la terminologia e alcune notazioni.

Notazione 4.20. Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato su cui agisce un gruppo (G, \cdot) e $(A, +)$ un gruppo abeliano finito; consideriamo una funzione $f : E \rightarrow A$ e un elemento $g \in G$. Preso un arco orientato $e \in E$, g agisce su f nel modo seguente

$$(gf)(e) = f(g^{-1}e).$$

Dunque, se $e' \in E$ è un arco tale che $ge = e'$, la sua immagine attraverso la funzione gf è proprio $(gf)(e') = f(g^{-1}ge) = f(e)$.

In queste notazioni, diciamo che f è **fissata** da g se $(g^{-1}f)(e) = f(e)$ per ogni $e \in E$, cioè se $f(ge) = f(e)$ per ogni $e \in E$.

In questo paragrafo, quando consideriamo un gruppo abeliano $(A, +)$, indichiamo il suo elemento neutro con 0 .

Notazione 4.21. Siano $(A, +)$ un gruppo abeliano finito e $m \in \mathbb{Z}$ un intero; denotiamo con $\alpha_m(A)$ il numero di soluzioni x dell'equazione $mx = 0$ nel gruppo A . Notiamo che per $m \in \{0, 1\}$ si ha, ovviamente, $\alpha_0(A) = |A|$ e $\alpha_1(A) = 1$.

Utilizzando le notazioni appena introdotte, osserviamo un legame tra il numero di soluzioni di un sistema lineare omogeneo di equazioni e il monomio indicatore della matrice associata al sistema.

Osservazione 4.22. Consideriamo una matrice di interi $B \in M_{n,m}(\mathbb{Z})$, un gruppo abeliano $(A, +)$ e un "vettore" colonna generico $f = (f_1, \dots, f_m)$ tale che $f_i \in A$ per ogni i . Calcoliamo quante soluzioni f esistono del sistema di equazioni $Bf = 0$, dove 0 indica un "vettore" di elementi neutri $0 \in A$ lungo n . Notiamo che le operazioni elementari su matrici a coefficienti in un dominio euclideo, che abbiamo definito sopra, non cambiano il numero delle soluzioni del sistema; possiamo, quindi, supporre che la matrice B sia in forma normale di Smith, con elementi non nulli d_1, \dots, d_r . In questo caso, le equazioni del sistema diventano $d_1f_1 = 0, \dots, d_rf_r = 0$, dunque f_{r+1}, \dots, f_m sono arbitrari e il numero di soluzioni del sistema risulta

$$\alpha_{d_1}(A) \dots \alpha_{d_r}(A) \alpha_0(A)^{m-r}.$$

Infine, notiamo che questo numero è proprio il monomio indicatore della matrice associata al sistema $x(B)$ in cui si effettuano le valutazioni $x_i = \alpha_i(A)$ per ogni indice i .

Adesso, siamo pronti per dimostrare il risultato più importante di questo paragrafo, cioè la valutazione del polinomio di Tutte orbitale che restituisce il numero di orbite di A -flussi mai nulli generate da un'azione di gruppo sul grafo a cui è associato il polinomio.

Teorema 4.23. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo orientato, (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ e $(A, +)$ un gruppo abeliano tale che $|A| = k$, con $k \in \mathbb{N}$; allora il numero di orbite di A -flussi mai nulli su Γ generate dall'azione di G è ottenuto da $OT(\Gamma, G; x_i, y_i)$ effettuando le valutazioni $x_i = \alpha_i(A)$ e $y_i = -1$ per ogni indice i di una indeterminata in $OT(\Gamma, G; x_i, y_i)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $E = \{e_1, \dots, e_m\}$ con $m \in \mathbb{N}$, allora possiamo identificare una funzione $f : E \rightarrow A$ con un vettore $f = (f_1, \dots, f_m)$ dove $f_i = f(e_i)$. In questa notazione, la condizione $Mf = 0$, dove M è la matrice d'incidenza vertice-arco con segno associata a Γ , ci dice che f è un A -flusso su Γ , infatti, il sistema omogeneo $Mf = 0$ esprime proprio la condizione

$$\sum_{e \in E^+(v)} f(e) - \sum_{e \in E^-(v)} f(e) = 0 \text{ per ogni } v \in V.$$

Inoltre, preso $g \in G$, la condizione $(P_g - I)f = 0$, dove P_g è la matrice arco-permutazione con segno associata a Γ e g , ci dice che f è fissata da g , infatti il sistema di equazioni $P_g f = f$ esprime proprio la condizione

$$f(ge) = f(e) \text{ per ogni } e \in E.$$

Utilizzando la matrice M_g definita in (4.17), possiamo esprimere entrambe le condizioni con $M_g f = 0$; dunque, per l'Osservazione 4.22, il numero di flussi fissati da g è il monomio indicatore $x(M_g)$ effettuando le valutazioni $x_i = \alpha_i(A)$ per ogni i .

Notiamo che, preso $F \subseteq E$, ogni A -flusso su Γ che associa l'elemento neutro di A ad ogni arco in $E \setminus F$ corrisponde a un A -flusso sul sottografo ricoprente $\langle F \rangle$. Indicando con F_1, \dots, F_{2^m} i sottoinsiemi di E , utilizziamo il principio di inclusione-esclusione con

$$X := \{f : E \rightarrow A \mid f \text{ è } A\text{-flusso su } \Gamma \text{ fissato da } g\}$$

e

$$A_j := \{f \in X \mid f(e) = 0 \text{ per ogni } e \in E \setminus F_j\} \text{ con } j = 1, \dots, 2^m.$$

Per quanto visto prima, $x(M_g(F))$ con $x_i = \alpha_i(A)$ per ogni indice i è il numero di A -flussi su $\langle F \rangle$ fissati da g ; perciò per il principio di inclusione-esclusione

$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|E \setminus F|} x(M_g(F)) \text{ con } x_i = \alpha_i(A) \text{ per ogni } i$$

è il numero di A -flussi fissati da g che non si annullano su nessuno degli insiemi $E \setminus F_j$, cioè, il numero di A -flussi non nulli su Γ fissati da g . Notiamo che questo numero si ottiene dal polinomio

$$\sum_{F \subseteq E} (-1)^{|E \setminus F|} x(M_g(F)) y(M_g^*(E \setminus F)) \quad (4.19)$$

effettuando le valutazioni $x_i = \alpha_i(A)$ e $y_i = -1$ per ogni indice i . Ora, utilizzando il Lemma di conteggio delle orbite con $X = \{f : E \rightarrow A \mid f \text{ è } A\text{-flusso mai nullo su } \Gamma\}$ e, quindi, per ogni $g \in G$, $\text{fix}(g)$ è l'insieme degli A -flussi mai nulli su Γ fissati da g , si ottiene che il numero di orbite di A -flussi mai nulli su Γ è

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{fix}(g)|,$$

cioè

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{F \subseteq E} (-1)^{|E \setminus F|} x(M_g(F)) y(M_g^*(E \setminus F)) \quad (4.20)$$

con le valutazioni $x_i = \alpha_i(A)$ e $y_i = -1$ per ogni indice i , che è proprio $OT(\Gamma, G; x_i, y_i)$ con le stesse valutazioni. \square

Trattiamo, adesso, il conteggio delle orbite di colorazioni proprie di un grafo generate da un'azione di gruppo sullo stesso. A questo scopo fissiamo altra terminologia utile.

Notazione 4.24. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ un insieme di colori e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ ; consideriamo una colorazione $f : V \rightarrow C$ di Γ e un elemento $g \in G$. Preso un vertice $v \in V$, g agisce sulla colorazione f nel modo seguente*

$$(gf)(v) = f(g^{-1}v).$$

*In queste notazioni, diciamo che f è **fissata** da g se $(g^{-1}f)(v) = f(v)$ per ogni $v \in V$, cioè se $f(gv) = f(v)$ per ogni $v \in V$.*

È noto dalla teoria delle permutazioni che un qualsiasi elemento del gruppo simmetrico $\sigma \in S_n$ si può rappresentare come prodotto di S_n -cicli a due a due disgiunti in modo unico a meno di scambiare gli S_n -cicli di posto; questo ci permette di fissare la seguente notazione.

Notazione 4.25. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ ; preso $g \in G$, dicendo " S_n -ciclo di g " ci riferiamo a uno degli S_n -cicli disgiunti della permutazione $\sigma \in S_n$ tale che $\eta_g(v_i) = gv_i = v_{\sigma(i)}$. Inoltre, diremo che un vertice $v_i \in V$ è presente in un S_n -ciclo di g se lo è il suo indice i . Fissata questa terminologia, indichiamo con Γ/g il grafo ottenuto da Γ identificando in un unico vertice i vertici di Γ che sono presenti nello stesso S_n -ciclo di g ; quindi, possiamo associare a ogni S_n -ciclo di g un vertice in Γ/g in cui sono identificati tutti i vertici presenti nel S_n -ciclo considerato. In particolare, se in Γ esiste un arco che collega due vertici che si trovano nello stesso S_n -ciclo di g , allora in Γ/g quell'arco diventa un cappio.*

Mostrando il seguente risultato, definiamo, di fatto, il *polinomio cromatico orbitale* associato a un grafo Γ ; quest'ultimo conta le orbite di colorazioni proprie di Γ generate da un'azione di un gruppo (G, \cdot) su Γ e viene denotato con $P_{\Gamma, G}(k)$, dove k è il numero di colori utilizzati. Notiamo che, ovviamente, se in Γ sono presenti dei cappi allora, non esistendo colorazioni proprie, anche il numero di orbite delle stesse risulta 0.

Teorema 4.26. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ un insieme di colori e (G, \cdot) un gruppo che agisce sul grafo Γ ; allora il numero di orbite di colorazioni proprie di Γ generate dall'azione di G è*

$$P_{\Gamma, G}(k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} P_{\Gamma/g}(k). \quad (4.21)$$

In particolare, se Γ è senza cappi, $P_{\Gamma, G}(k)$ è proprio un polinomio di grado $|V|$ e coefficiente direttore $\frac{1}{|G|}$.

Dimostrazione. Preso $g \in G$, se denotiamo con $\phi(\Gamma, g, k)$ il numero di colorazioni proprie fissate da g , per il Lemma di conteggio delle orbite si ha

$$P_{\Gamma, G}(k) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(\Gamma, g, k).$$

Resta, quindi, da mostrare che $\phi(\Gamma, g, k)$ sia proprio $P_{\Gamma/g}(k)$. Consideriamo una colorazione propria $f : V \rightarrow C$ e notiamo che f è fissata da g se associa lo stesso colore a ogni vertice che si trova nello stesso S_n -ciclo di g , in altre parole se f associa lo stesso colore ai vertici di Γ che vengono identificati in Γ/g . Notiamo, inoltre, che se un S_n -ciclo di g contiene i vertici di un arco $e \in E$, allora non ci sono colorazioni proprie di Γ fissate da g , in quanto una colorazione propria non può associare ai vertici di un arco lo stesso colore. Tutto questo implica che il numero di colorazioni proprie di Γ fissate da g corrisponde al numero di colorazioni proprie del grafo Γ/g ; notiamo che questo ha senso anche se Γ ha cappi poiché in tal caso li avrebbe sicuramente anche Γ/g e, dunque, risulterebbe $P_{\Gamma/g} = 0$ per ogni $g \in G$. Infine, se Γ non ha cappi, allora nella sommatoria in (4.21) il polinomio con grado maggiore è quello associato all'elemento neutro u_G del gruppo G poiché in tal modo Γ/u_G ha lo stesso numero di vertici di Γ ; dunque, dalle proprietà del polinomio cromatico mostrate nel Teorema 3.9, si ottiene che $P_{\Gamma, G}(k)$ ha grado $|V|$ e coefficiente direttore $\frac{1}{|G|}$. \square

Concludiamo il capitolo e, quindi, la tesi, proponendo degli approfondimenti sul polinomio di Tutte orbitale. Enunciamo dei risultati interessanti che vengono dimostrati, utilizzando la teoria delle matroidi, nell'articolo [4] di Cameron, Jackson e Rudd. Il seguente risultato è un'identità tra il polinomio di tutte orbitale e quello cromatico orbitale.

Teorema 4.27. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo connesso, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$ un insieme di colori e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ ; allora $P_{\Gamma, G}(k)$ è ottenuto da $OT(\Gamma, G; x_i, y_i)$ effettuando le valutazioni $x_i = -1$ per ogni i , $y_i = 1$ per ogni $i \geq 1$ e $y_0 = k$ e moltiplicando il tutto per k .*

Il prossimo risultato determina un'importante condizione per le indeterminate che compaiono nel polinomio di Tutte orbitale.

Teorema 4.28. *Siano $\Gamma = (V, E)$ un grafo e (G, \cdot) un gruppo che agisce su Γ ; fissato l'indice i , se almeno uno tra x_i e y_i compare nel polinomio $OT(\Gamma, G)$ allora $i = 0$ oppure esiste un elemento del gruppo G di ordine i .*

Infine, utilizzando il teorema appena enunciato, è facile dimostrare la seguente identità tra il polinomio di Tutte e il polinomio di Tutte orbitale.

Teorema 4.29. *Sia $\Gamma = (V, E)$ un grafo su cui agisce il gruppo banale Id ; allora in $OT(\Gamma, Id)$ compaiono solo le indeterminate x_0, x_1, y_0, y_1 e il polinomio di Tutte $T(\Gamma; x, y)$ è ottenuto da $OT(\Gamma, Id)$ effettuando le valutazioni $x_1 = y_1 = 1$, $x_0 = y - 1$ e $y_0 = x - 1$.*

Appendice A

Principio di inclusione-esclusione

Teorema A.1. *Siano A_1, A_2, \dots, A_n sottoinsiemi di un insieme finito X ; sia $J \in \{1, 2, \dots, n\}$, chiamiamo $A_J := \bigcap_{j \in J} A_j$ se $J \neq \emptyset$ e, per convenzione, $A_\emptyset = X$. Allora*

$$|X - \bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|J|} |A_J|. \quad (\text{A.1})$$

Questa formula, quindi, calcola il numero di elementi di X che non appartengono a nessuno dei sottoinsiemi A_j .

Dimostrazione. Consideriamo il membro a sinistra di (A.1) e calcoliamo il contributo di ogni elemento di X alla somma. Fissato $x \in X$, sia $K_x = \{j \mid x \in A_j\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$; allora per ogni $J \subseteq K_x$ il contributo di x è $(-1)^{|J|}$. Se $|K_x| = k > 0$ allora ci sono $\binom{k}{j}$ insiemi $J \subseteq K_x$ di cardinalità j nella somma, dunque il loro contributo è $\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j = (1 - 1)^k = 0$. Se, invece, $K_x = \emptyset$, cioè x non appartiene a nessuno degli A_j , allora la somma precedente vale 1 e, quindi, ogni elemento che non appartiene a nessuno dei A_j contribuisce alla somma con 1, mentre gli altri con 0. \square

Bibliografia

- [1] Artin, Michael (2011) *Algebra*, Pearson, London.
- [2] Bollobás, Béla (1998), *Modern Graph Theory*, Springer, New York.
- [3] Cameron, Peter J. (2017), *Notes on Counting: An Introduction to Enumerative Combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [4] Cameron P.J. , Jackson B. , Rudd J.D. (2008), *Orbit-counting polynomials for graphs and codes*, Discrete Mathematics vol.308 pp.920-930.
- [5] Goodall, Andrew J. (2017), *The Tutte polynomial and related polynomials: lecture notes 2010, 2012, 2014*, Charles University, Praga.
- [6] König, Dénes (1990), *Theory of Finite and Infinite Graphs*, Birkhäuser, Boston.
- [7] Rudd, Jason D. (2010), *Tutte polynomials for counting and classifying orbits*, Discrete Mathematics vol.310 pp.206-222.
- [8] Tutte, William T. (1954), *A contribution to the theory of chromatic polynomials*, Canadian Journal of Mathematics vol.6 pp.80-91.
- [9] Zhang, Cun-Quan (1997), *Integer Flows and Cycle Covers of Graphs*, CRC Press, Boca Raton.

Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la professoressa Marta Morigi per aver proposto lo studio di questo argomento per la mia tesi di laurea e, soprattutto, per la sua particolare disponibilità e per i suoi consigli.

Ringrazio in particolare i miei familiari per tutto l'appoggio e la fiducia che mi hanno dato fino a questa tappa importante del mio percorso di studi.

Infine, un ringraziamento speciale a tutti gli amici che hanno sempre creduto in me accrescendo la fiducia che ho in me stesso e, in particolar modo, a Luigia che più di tutti mi è stata accanto supportandomi e sopportandomi nei momenti più stressanti.