

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Superfici complesse di tipo generale e
applicazioni pluricanoniche

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Giovanni Mongardi

Presentata da:
Alessandro Passantino

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione	3
1 Preliminari	6
1.1 Coomologia di fasci	6
1.2 Divisori	8
1.3 Fasci e fibrati associati ad un divisore	10
2 Superfici di Riemann	12
2.1 Nozioni per le superfici di Riemann	12
2.1.1 Alcune proprietà dei divisori	12
2.1.2 Applicazioni associate a divisori	14
2.2 La classificazione delle superfici di Riemann	16
3 Superfici complesse	21
3.1 Nozioni per le superfici complesse	21
3.1.1 Classi di Chern di un fibrato	21
3.1.2 La forma di intersezione per fibrati di rette e divisori	23
3.1.3 Il blow-up di un punto su una superficie complessa	24
3.1.4 Alcuni risultati utili	25
3.2 Superfici minime	27
3.3 La classificazione di Enriques-Kodaira	31
4 Superfici di tipo generale	33
4.1 Condizioni sui numeri di Chern	33
4.2 Geografia dei numeri di Chern	35
4.3 L'applicazione pluricanonica	37
4.4 L'applicazione canonica	41
Bibliografia	48

Introduzione

La classificazione delle varietà complesse è uno dei problemi più naturali, nonché interessanti, della geometria complessa. Lo studio degli aspetti geometrici delle funzioni a variabili complesse si sviluppa a partire dall'Ottocento, parallelamente a quello degli aspetti analitici. Come si evince dal nome, Riemann ha avuto un ruolo fondamentale nell'inizio di questa branca, in particolare per quelle che ora sono chiamate superfici di Riemann, cioè varietà complesse di dimensione 1. L'interesse verso questo nuovo punto di vista è stato tale da portare in breve tempo a una ricca letteratura in merito allo studio delle superfici di Riemann e alla loro classificazione. Dopo la tanta attenzione posta sulle varietà complesse in dimensione 1, il passo successivo più naturale da fare è stato passare alle dimensioni superiori, e in particolare al caso delle superfici complesse. Proprio su questo si sviluppa la grande fama della scuola italiana di geometria algebrica, a partire dalla fine dell'Ottocento: non a caso tanti teoremi o famiglie di superfici in questo ambito prendono il nome da matematici italiani (Segre, Castelnuovo, Severi, Enriques e molti altri). Ed è studiando le superfici che nasce il concetto di divisore, come generalizzazione di curve su una superficie, che è attualmente uno dei concetti cardine dello studio delle varietà complesse.

Il principale interesse, all'inizio del Novecento, è quello di descrivere e classificare le superfici algebriche complesse. I numerosi contributi della scuola italiana, ma non solo, portano alla cosiddetta classificazione di Enriques delle superfici algebriche complesse, dove le superfici algebriche sono raccolte in otto classi (di cui alcune sono comuni anche a superfici non algebriche). Sebbene questa classificazione sia esaustiva per le superfici algebriche, non considera le superfici non algebriche. Per avere un risultato completo bisogna aspettare i lavori di Kodaira degli anni Cinquanta e Sessanta per ottenere quella che è ora chiamata classificazione di Enriques-Kodaira, in cui vengono introdotte due nuove famiglie di superfici: le superfici di classe VII e le superfici di Kodaira, che non sono mai algebriche. Allo stesso tempo, lo sviluppo di nuovi strumenti e tecniche quali omologia e coomologia, fasci e schemi ha portato ad una trasformazione nello studio delle varietà tale da permettere uno studio più approfondito delle varie classi e delle loro proprietà, oltre che una più facile

generalizzazione a dimensioni superiori.

In questa tesi, l'obiettivo è porre attenzione sulle nozioni fondamentali del moderno studio delle varietà complesse, per poi ripercorrere i risultati principali per le superfici di Riemann e le superfici complesse, concludendo concentrandosi sul caso delle superfici complesse di tipo generale, di cui si presentano alcuni risultati più recenti rispetto alla classificazione delle superfici.

Il Capitolo 1 è volto a introdurre alcuni concetti generali per lo studio delle varietà complesse di tutte le dimensioni (coomologia di fasci, divisori e legame con fasci e fibrati), che sono alla base dell'approccio moderno alla geometria complessa.

Nel Capitolo 2, dopo una breve introduzione ad alcuni concetti utili per il caso di dimensione 1 (ma non solo), si pongono le basi per la classificazione delle superfici di Riemann. Più nel dettaglio, tutte le superfici di Riemann sono proiettive e questo permette un approccio al loro studio prettamente algebrico. Uno dei principali risultati è il teorema di Riemann-Roch, che lega la caratteristica del fascio associato ad un divisore al grado del divisore stesso e al genere della varietà, e che può essere usato per mostrare che tutte le superfici di Riemann sono proiettive; oltre a questo, dà in modo quasi diretto una classificazione per i generi più bassi. La classificazione delle superfici di Riemann è, in un certo senso, semplice: i casi fino a $g = 2$ si affrontano in modo unico, mentre per $g > 2$ ci sono solo due possibilità: o la superficie è iperellittica, oppure l'applicazione canonica dà una descrizione della superficie come curva proiettiva.

I Capitoli 3 e 4 sono il fulcro della tesi. Dopo avere visto alcuni accenni dello studio delle varietà complesse nel capitolo precedente, nel terzo si introducono alcuni strumenti più avanzati di grande importanza dalla dimensione 2 in poi. Il caso di dimensione 2 è comunque molto particolare rispetto alle dimensioni superiori, in quanto sotto vari aspetti il problema della classificazione si semplifica molto. Per esempio, nel Capitolo 3 si enunciano alcuni risultati che mostrano come una mappa razionale tra superfici si possa estendere ad un morfismo, eliminando il luogo di indeterminazione della mappa tramite blow-up dei punti di indeterminazione, oppure il fatto che una mappa o morfismo birazionale si riduca ad una semplice composizione di blow-up di punti. Oltre a questo, a differenza del capitolo precedente, ci sono alcune ipersuperfici (curve) di particolare importanza che danno numerose informazioni sulla superficie stessa, come le (-1) -curve. Nello stesso capitolo si vede appunto che, in un certo senso, queste sono alla base della classificazione di Enriques-Kodaira: per le superfici complesse, il problema della classificazione è quello di determinare la superficie minima a cui una superficie data è birazionale. Le superfici minime sono caratterizzate dal fatto di non avere (-1) -curve, e questo si traduce a sua volta su una proprietà interessante del divisore canonico (e cioè essere nef) eccetto nei casi di dimensione di Kodaira $\kappa = -\infty$.

Dopo avere presentato la classificazione di Enriques-Kodaira, nel Capitolo 4 si pone l'attenzione sulla classe delle superfici di tipo generale. Come dice il nome, questa classe include la "maggior parte" delle superfici complesse, e quindi è molto più complesso dare una descrizione esaustiva di tutte le superfici in questa famiglia. Parte dell'interesse è determinare che valori possano avere certi invarianti. Per questo motivo una prima parte è volta a dare i più generali vincoli su K_X^2 ed $e(X)$, per poi presentare brevemente alcuni risultati più avanzati legati a questo problema. Si pone invece una maggiore attenzione sull'applicazione pluricanonica: per definizione, qualche applicazione pluricanonica di una superficie deve dare una sua immersione in uno spazio proiettivo, per cui è naturale cercare di determinare quando questo accada. Il principale risultato è dovuto a Bombieri, che mostra che questo succede sempre per l'applicazione pluricanonica, associata a nK , per $n \geq 5$, mentre per valori di n minori si presentano solo un numero finito di eccezioni. Il caso $n = 1$ è invece stato studiato da Beauville, e si mostrano alcune proprietà dell'applicazione canonica sia nel caso in cui l'immagine sia una curva che nel caso in cui l'immagine è una superficie.

I risultati presentati non sono comunque esaustivi di tutta la letteratura nota: sull'argomento c'è molto più di quanto raccolto nello spazio di questa tesi. Inoltre, c'è ancora una certa attenzione sullo studio delle superfici, soprattutto delle superfici di tipo generale. Per esempio, c'è ancora molto da fare per dare una descrizione completa di quali siano tutti i possibili valori dei numeri di Chern delle superfici di questa classe, oppure, riguardo l'applicazione canonica e pluricanonica, per descrivere precisamente i casi in cui tali applicazioni siano birazionali o isomorfismi, o viceversa dare una caratterizzazione esatta dei casi in cui ciò non succede. Oltre a questo, sia per le curve che per le superfici c'è ancora un certo interesse nel cercare di classificare tali famiglie di varietà tramite spazi di moduli. Volendo andare oltre gli argomenti trattati in questa tesi, in tempi più recenti il lavoro di Shigefumi Mori degli anni Ottanta ha permesso di estendere il problema della classificazione tramite modelli minimi anche a dimensioni superiori, dando vita al programma dei modelli minimi. In questo modo, mantenendo le stesse idee di fondo studiate in questa tesi per il caso delle superfici, parte della ricerca in geometria complessa si concentra nel raggiungere una classificazione delle varietà di dimensione superiore che sia dettagliata quanto quella già nota per le superfici.

1 | Preliminari

Introduciamo in questo capitolo alcune definizioni e risultati generali per le varietà complesse. Nei capitoli successivi completeremo quanto esposto qui aggiungendo altri aspetti utili per i casi di dimensione 1 o 2, che sono quelli di nostro interesse. Supporremo sempre che tutte le varietà in questione siano compatte.

1.1 Coomologia di fasci

Definizione 1.1.1. Sia \mathcal{C} una categoria abeliana. Un oggetto Q di \mathcal{C} è detto *iniettivo* se per ogni monomorfismo $\varphi: A \hookrightarrow B$ e ogni morfismo $\eta: A \rightarrow Q$ esiste un morfismo $\tilde{\eta}: B \rightarrow Q$ in modo che il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{\varphi} & B \\ \eta \downarrow & & \swarrow \tilde{\eta} \\ Q & & \end{array}$$

Definizione 1.1.2. Sia A oggetto di una categoria abeliana \mathcal{C} . Una *risoluzione iniettiva* di A è il dato di una successione

$$\mathcal{I}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{I}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

di oggetti iniettivi e di una mappa $A \rightarrow \mathcal{I}^0$ tale che la successione

$$A \longrightarrow \mathcal{I}^0 \xrightarrow{\varphi^0} \mathcal{I}^1 \xrightarrow{\varphi^1} \mathcal{I}^2 \xrightarrow{\varphi^2} \dots$$

sia esatta.

Definizione 1.1.3. Una categoria abeliana \mathcal{C} ha *abbastanza iniettivi* se per ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$ esistono un oggetto iniettivo \mathcal{I} e un monomorfismo $A \hookrightarrow \mathcal{I}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \Gamma(A) & \longrightarrow & \Gamma(B) & \longrightarrow & \Gamma(C) \longrightarrow \\
& & & & & & \\
& & \longrightarrow & H^1(A) & \longrightarrow & H^1(B) & \longrightarrow & H^1(C) \longrightarrow \dots
\end{array}$$

- Se X è uno spazio topologico paracompatto e G è un gruppo abeliano, c'è un isomorfismo

$$H^i(X, G) \cong H^i(X, \underline{G})$$

tra la coomologia singolare a coefficienti in G e la coomologia del fascio costante \underline{G} . In particolare, $H^i(X) = H^i(X, \underline{\mathbb{Z}})$.

1.2 Divisori

Definizione 1.2.1. Un *divisore* D su una varietà complessa X è una combinazione lineare

$$D = \sum c_i C_i$$

dove C_i sono ipersuperfici irriducibili su X e $r_i \in \mathbb{Z}$.

L'insieme dei divisori di X è indicato $\text{Div}(X)$.

Osservazione 1.2.2. Se X ha dimensione 1 le ipersuperfici sono punti, mentre in dimensione 2 sono curve.

I divisori compaiono naturalmente quando si studiano funzioni e forme differenziali su una varietà complessa X di dimensione n . In effetti, possiamo definire due classi particolari di divisori ad esse collegati: sia f una funzione meromorfa non identicamente nulla. Il luogo degli zeri è una unione di ipersuperfici C_1, \dots, C_k di X (dove la molteplicità è costante lungo ciascuna ipersuperficie), e analogamente per il luogo dei poli di f , formato dalle ipersuperfici C_{k+1}, \dots, C_m . Il divisore associato a f è dato da

$$\text{div} f = \sum_{i=1}^k r_i C_i - \sum_{j=k+1}^m r_j C_j$$

dove i coefficienti sono le molteplicità degli zeri o l'ordine dei poli su ciascuna ipersuperficie. Un divisore ottenuto in questo modo è detto *principale*. Analogamente, per una n -forma meromorfa ω non identicamente nulla si può ottenere il divisore $\text{div} \omega$ procedendo nello stesso modo. Un divisore associato ad una n -forma meromorfa è detto *canonico*.

Lemma 1.2.3. *Sia X una varietà complessa di dimensione n e siano ω_1, ω_2 due n -forme meromorfe, con ω_2 non identicamente nulla. Allora esiste una funzione meromorfa f tale che $\omega_2 = f\omega_1$.*

Dunque tutti i divisori canonici di X differiscono tra loro per un divisore principale. Questo aspetto è di grande importanza: numerose proprietà che valgono per un divisore continuano a valere se si aggiunge un divisore principale. Di conseguenza, una tale proprietà che vale per un divisore canonico vale per tutti i divisori canonici. Questo porta naturalmente alla seguente definizione:

Definizione 1.2.4. Siano D_1, D_2 due divisori su una varietà complessa X . Diciamo che D_1 e D_2 sono *linearmente equivalenti*, e indichiamo questa relazione con $D_1 \sim D_2$, se esiste una funzione meromorfa f tale che $D_1 = D_2 + \text{div}(f)$, cioè D_1 e D_2 differiscono per un divisore principale.

L'equivalenza lineare permette, in molti casi, di sostituire lo studio di uno specifico divisore con uno ad esso equivalente che sia più comodo. Per quanto visto prima, tutti i divisori canonici sono linearmente equivalenti. Per questo motivo parleremo in generale di *il divisore canonico* della varietà X .

Si può anche dare un ordine parziale sui divisori, nel seguente modo.

Definizione 1.2.5. Un divisore D è detto *effettivo* se ha coefficienti non negativi, e indichiamo tale proprietà con $D \geq 0$. Un ordine parziale sui divisori è dato da $D_1 \geq D_2 \iff D_1 - D_2 \geq 0$.

Arriviamo ora alla definizione di un importante insieme di divisori associato ad un divisore dato.

Definizione 1.2.6. Sia D un divisore su X . Il *sistema completo lineare* di D , $|D|$, è definito come

$$|D| = \{E \in \text{Div}(X) \mid D \geq 0, D \sim E\}.$$

Dunque $|D|$ è formato da tutti i divisori effettivi linearmente equivalenti a D . Esiste un collegamento molto stretto tra $|D|$ e $H^0(D)$, dove

$$H^0(D) := \{f \in \mathcal{M}_X \mid \text{div } f \geq -D\}$$

($H^0(D)$ è parte della coomologia del fascio associato al divisore D , di cui parleremo più precisamente nella prossima sezione).

Lemma 1.2.7. *L'applicazione*

$$\begin{aligned} S: \mathbb{P}(H^0(D)) &\rightarrow |D| \\ [f] &\mapsto \text{div}(f) + D \end{aligned}$$

è ben definita e biiettiva.

Dimostrazione. Il fatto che sia ben definita segue dal fatto che per ogni funzione meromorfa, se $\lambda \neq 0$ $\text{div}(\lambda f) = \text{div}(f)$. Per la seconda affermazione, notiamo che se $E \in |D|$, per definizione $E = \text{div}(f) + D$, e che $\text{div}(f) = E - D \geq -D$ perché E è effettivo, e quindi $f \in H^0(D)$, cioè S è suriettiva. Per l'iniettività, siano $f, g \in H^0(D)$. Se $S(f) = S(g)$, questo vuol dire che $S(f) = \text{div}(f) + D = \text{div}(g) + D = S(g)$, perciò $\text{div}(f) - \text{div}(g) = S(f) - S(g) = 0$; allora f/g è una funzione senza zeri né poli su X compatta, e quindi deve essere una funzione costante. Segue da questo che S è iniettiva. \square

Questa corrispondenza permette di considerare dei sottospazi di $|D|$, detti *sistemi lineari generali*; questi sono definiti come $S(W)$ dove W è un sottospazio lineare di $\mathbb{P}(H^0(D))$, la cui dimensione è per definizione la dimensione di W . Se tale dimensione è pari a 1, $S(W)$ è anche detto *fascio*.

1.3 Fasci e fibrati associati ad un divisore

Come anticipato nella sezione precedente, quando X è una varietà liscia, ad un divisore D è possibile associare un fascio invertibile, ovvero un fascio che localmente è isomorfo al fascio \mathcal{O}_X delle funzioni olomorfe sulla superficie, ed un fibrato in rette. Come vediamo ora, tutti e tre gli oggetti hanno una caratterizzazione locale che permette di intuire, e dedurre, un collegamento stretto tra essi.

Il fascio associato a D , che indicheremo con $\mathcal{O}_X(D)$, è definito su un aperto U nel modo seguente:

$$\mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in \mathcal{M}_X(U) \mid \text{div } f \geq -D|_U\},$$

dove $D|_U$ è la restrizione del divisore D ad U . Un fascio invertibile \mathcal{F} può anche essere definito a partire dalle sue *banalizzazioni locali*, cioè gli isomorfismi locali

$$\phi_\alpha: \mathcal{F}|_{U_\alpha} \rightarrow \mathcal{O}|_{U_\alpha},$$

dove $\{U_\alpha\}$ è un ricoprimento aperto di X . Per definizione, dunque, le funzioni $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ definiscono degli automorfismi locali di $\mathcal{O}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

Per il fibrato associato a D va prima di tutto notato che, quando X è liscia, i suoi divisori sono localmente principali; più precisamente, un divisore D è descritto da un insieme di coppie $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$, dove gli U_α formano un ricoprimento di X , f_α è una funzione meromorfa su U_α tale che $(f_\alpha) = D|_{U_\alpha}$, e $f_\alpha = f_\beta$ su $U_\alpha \cap U_\beta$ quando i due aperti non sono disgiunti. Come per i fasci invertibili, le funzioni $f_{\alpha,\beta} := f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ sono degli automorfismi locali di $U_\alpha \cap U_\beta$. Allora possiamo costruire esplicitamente un fibrato in rette su X : poniamo

$$\mathcal{L} := \bigcup (\mathbb{C} \times U_\alpha) / \sim,$$

dove $(a, x) \sim (b, x) \iff x \in U_\alpha \cap U_\beta$ e $b = f_{\alpha, \beta}(x)a$.

A meno di equivalenza lineare tra divisori, e a meno di isomorfismi, le applicazioni appena descritte che associano a un divisore un fascio invertibile e un fibrato in rette sono degli isomorfismi di gruppi (dove l'operazione per i fasci e i fibrati è il prodotto tensoriale, e per i divisori la somma). In effetti, ad un fibrato in rette si può associare la classe di equivalenza dei divisori delle sezioni globali del fibrato (in quanto i corrispondenti divisori sono linearmente equivalenti), e ad ogni fibrato in rette si può associare il fascio delle sue sezioni che corrisponde proprio al fascio associato alla classe dei divisori appena detta.

Per quanto appena detto, utilizzeremo in modo intercambiabile le notazioni per fasci e fibrati di rette in base al contesto.

Osservazione 1.3.1. Quanto detto vale solo nel caso in cui X sia liscia. Altrimenti, la definizione di divisore che abbiamo dato non è sufficiente a garantire l'aspetto locale dei divisori. Nonostante ciò, continua a valere l'isomorfismo tra fasci invertibili e fibrati di rette, e il divisore associato al fascio o al fibrato è ancora ben definito, ma non produce un isomorfismo tra i tre oggetti.

Definizione 1.3.2. Il *gruppo di Picard* di una varietà complessa X , indicato $Pic(X)$, è il gruppo dei fibrati di rette su X a meno di isomorfismo. Equivalentemente, per quanto detto, è il gruppo dei fasci invertibili a meno di isomorfismo, o per varietà lisce il gruppo dei divisori a meno di equivalenza lineare.

Il seguente risultato fondamentale che permette di dare una descrizione diversa di $Pic(X)$ sarà di grande utilità nel Capitolo 3.

Lemma 1.3.3. $H^1(\mathcal{O}_X^*) \cong Pic(X)$.

Un'ultima nota riguardo le notazioni: data la corrispondenza tra divisori, fasci e fibrati, solitamente se non c'è alcuna ambiguità indicheremo con $H^i(D)$ la coomologia del fascio associato a D , invece di usare la notazione $H^i(\mathcal{O}_X(D))$.

2 | Superfici di Riemann

2.1 Nozioni per le superfici di Riemann

Introduciamo qui alcuni ulteriori risultati e definizioni per le superfici di Riemann che completano quelli generali del capitolo precedente. Alcuni di questi valgono anche in dimensioni maggiori; in tal caso daremo per scontato che ragionamenti analoghi a quelli usati in dimensione 1 permettano una generalizzazione alle altre dimensioni. In questo capitolo, dunque, supporremo sempre che X sia una superficie di Riemann.

2.1.1 Alcune proprietà dei divisori

Per le superfici di Riemann possiamo definire in modo naturale il grado di un divisore.

Definizione 2.1.1. Sia $D = \sum r_i p_i$ un divisore su una superficie di Riemann. Il *grado* di D è $\sum r_i$.

Osservazione 2.1.2. L'applicazione $\text{deg}: \text{Div}(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ è un omomorfismo di gruppi rispetto alla somma.

Iniziamo presentando alcune proprietà dei divisori principali su una superficie di Riemann.

Lemma 2.1.3. *Siano f, g due funzioni meromorfe su X , ω una 1-forma meromorfa. Allora:*

- (a) $\text{deg}(\text{div}(f)) = 0$;
- (b) $\text{div}(fg) = \text{div}(f) + \text{div}(g)$;
- (c) $\text{div}(f/g) = \text{div}(f) - \text{div}(g)$;
- (d) $\text{div}(1/f) = -\text{div}(f)$;

$$(e) \operatorname{div}(f\omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega).$$

Abbiamo detto nel primo capitolo che tutti i divisori canonici differiscono per un divisore principale, e quindi, dal lemma, hanno anche stesso grado. Quest'ultimo può essere facilmente calcolato per le superfici di Riemann:

Lemma 2.1.4. *Sia ω una 1-forma meromorfa su X che non sia identicamente nulla, e sia g il genere di X . Allora $\deg(\omega) = 2g - 2$.*

Dimostrazione. Utilizzando il lemma precedente, è sufficiente calcolare il grado per una specifica 1-forma su X . Sia f una funzione meromorfa $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, che possiamo vedere come una funzione olomorfa $F: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$. Su \mathbb{C}_∞ consideriamo la 1-forma dz di grado -2 (in quanto ha solo un polo doppio in ∞). Il suo pullback $F^*\omega$ è quindi una 1-forma su X . Utilizzando la formula di Hurwitz e considerando il fatto che $\operatorname{ord}_p(F^*\omega) = (1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega))\operatorname{mult}_p(F) - 1$ (con la convenzione che l'ordine dei poli sia negativo), otteniamo che

$$\begin{aligned} \deg(\operatorname{div}(F^*\omega)) &= \sum_p \operatorname{ord}_p(F^*\omega) = \sum_p ((1 + \operatorname{ord}_{F(p)}(\omega))\operatorname{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{p|F(p) \neq \infty} (\operatorname{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p|F(p) = \infty} (-\operatorname{mult}_p(F) - 1) \\ &= \sum_{p \in X} (\operatorname{mult}_p(F) - 1) + \sum_{p|F(p) = \infty} 2\operatorname{mult}_p(F) \\ &= 2g - 2 + 2 \deg(F) - 2 \deg(F) \\ &= 2g - 2. \end{aligned}$$

□

Introduciamo un altro modo di ottenere divisori su X , questa volta con un significato più geometrico; infatti, utilizzeremo la proprietà delle superfici di Riemann compatte di essere sempre curve proiettive lisce. Questo tornerà utile anche nel caso di superfici complesse algebriche.

Sia X una curva proiettiva liscia in \mathbb{P}^n , e siano $[x_0 : \dots : x_n]$ le coordinate omogenee. Sia $G(x_0, \dots, x_n)$ un polinomio omogeneo. Quello che ci interessa fare è definire un divisore che descriva i punti in cui G si annulla su X , ovvero i punti di intersezione tra l'ipersuperficie di equazione $G = 0$ e X (contati con molteplicità). Per fare ciò, sia $H(x_0, \dots, x_n)$ un altro polinomio omogeneo dello stesso grado di G , e sia $p \in X$ un punto tale che $G(p) = 0, H(p) \neq 0$. Dato che hanno stesso grado, G/H è una funzione meromorfa ben definita in un intorno di p , ed è tale che $G/H(p) = 0$. Definiamo allora il divisore $\operatorname{div}(G)$ come $\operatorname{div}(G)(p) := \operatorname{ord}_p(G/H)$ al variare di $p \in X$ tra i punti su cui G si annulla. Non è complesso dimostrare che questa definizione è ben posta perché non dipende dalla scelta di H . Tale divisore

è detto *divisore di intersezione* di G su X . Nel caso particolare in cui G abbia grado 1, allora il divisore è detto *divisore iperpiano*.

Osservazione 2.1.5. Dati due polinomi omogenei G_1 e G_2 di pari grado, i loro divisori di intersezione sono linearmente equivalenti: infatti il rapporto di due polinomi omogenei è una funzione meromorfa il cui divisore è la differenza dei divisori di intersezione. In particolare, tutti i divisori iperpiani sono tra loro linearmente equivalenti.

Osservazione 2.1.6. Per come abbiamo costruito i divisori di intersezione, essi sono sempre effettivi.

Un altro risultato che tornerà utile più avanti è il seguente:

Lemma 2.1.7. *Sia D un divisore qualsiasi, K un divisore canonico, $K = \text{div}(\omega)$. Allora c'è un isomorfismo $H^0(D + K) \rightarrow H^1(D)$ dato dalla moltiplicazione per ω .*

Nonostante questo, non è sempre fattibile determinare $h^0(D)$ (cioè la dimensione di $H^0(D)$), per cui può essere utile cercare di stimare tale valore.

Lemma 2.1.8. *Sia D un divisore, $D = P - N$ con P e N entrambi effettivi e con supporti disgiunti. Allora $h^0(D) \leq 1 + \text{deg}(P)$; se D è effettivo, $h^0(D) \leq 1 + \text{deg}(D)$.*

In altre parole, una stima di $h^0(D)$ è data solo dalla parte positiva del divisore D . Segue anche che $H^0(D)$ e $H^1(D)$ sono entrambi spazi di dimensione finita.

2.1.2 Applicazioni associate a divisori

Dato che tutte le superfici di Riemann sono curve proiettive, è interessante studiare in che modo è possibile ottenere tale identificazione; questo permetterà di utilizzare strumenti legati alla geometria algebrica proiettiva, oltre a dare uno spazio ambiente ben preciso per lo studio di tali varietà.

Definizione 2.1.9. Una *funzione olomorfa* $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ in un punto p è un'applicazione tale che in un intorno di p ϕ sia data da $\phi(x) = [g_0(x), \dots, g_n(x)]$ con g_i funzioni olomorfe definite nello stesso intorno e che non siano tutte nulle in p .

Dato che se X è compatta non ci sono funzioni olomorfe globali non costanti, non ci si può aspettare di usare le stesse funzioni per ogni punto di X . Questo problema, oltre all'ipotesi che le funzioni non siano tutte contemporaneamente nulle, può essere risolto utilizzando le funzioni meromorfe: date f_0, \dots, f_n funzioni meromorfe su X , nonostante la presenza di zeri comuni e poli, è possibile utilizzare

il fatto che l'applicazione sia verso \mathbb{P}^n per ricondursi alla definizione precedente. In un intorno di un punto p , possiamo supporre che gli zeri comuni o i poli siano al più in p . Posto $n = \min_i \text{ord}_p(f_i)$ (dove utilizziamo, come prima, la convenzione che i poli hanno ordine negativo), e data una coordinata locale z centrata in p , si ha che per ogni z le funzioni $z^{-n}f_i(z)$ sono funzioni olomorfe, e che per $z = 0$ non sono tutte nulle. Di conseguenza, la funzione che in coordinate omogenee è $[f_0(z), \dots, f_n(z)]$ localmente può essere espressa come $[z^{-n}f_0(z), \dots, z^{-n}f_n(z)]$, e dunque è una funzione olomorfa.

Il collegamento tra funzioni olomorfe e divisori sta nel fatto che certi sistemi lineari definiscono funzioni olomorfe: tali sistemi lineari sono caratterizzati dalla proprietà di essere privi di punti base.

Definizione 2.1.10. Dato un sistema lineare Q su X , diciamo che p è un *punto base* per Q se per ogni divisore $D \in Q$ vale che $D \geq p$. Q è *privo di punti base* se per ogni $p \in X$ esiste un divisore $D \in Q$ tale che $D \not\geq p$. Se $Q = |D|$ diremo anche rispettivamente che p è punto base di D o che D è privo di punti base.

Una condizione che caratterizza i punti base per i sistemi lineari completi è la seguente:

Proposizione 2.1.11. Sia D un divisore su X , $p \in X$. Allora p è un punto base di D se e solo se $H^0(D - P) = H^0(D)$. Di conseguenza D è privo di punti base se e solo se $h^0(D - p) = h^0(D) - 1 \forall p \in X$.

Sotto l'ipotesi di essere privo di punti base, un divisore D definisce una funzione olomorfa data da

$$\begin{aligned} \phi_D: X &\rightarrow \mathbb{P}^{h^0(D)-1} \\ x &\mapsto [s_0(x), \dots, s_n(x)] \end{aligned}$$

dove gli s_i sono una base di $H^0(D)$. Un caso di particolare importanza si ha quando D è un divisore canonico. In tale situazione si dimostra che non ha punti base e quindi definisce una applicazione, detta *applicazione canonica*.

In generale l'applicazione così ottenuta non è un'immersione, né è iniettiva. Per queste proprietà sono necessarie condizioni aggiuntive:

Proposizione 2.1.12. Sia D un divisore privo di punti base su X .

(a) Siano $p, q \in X$ due punti distinti. Allora $\phi_D(p) = \phi_D(q) \iff H^0(D - p - q) = H^0(D - p) = H^0(D - q)$. In altre parole, ϕ_D è iniettiva $\iff h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2$ per ogni coppia di punti p, q distinti.

(b) Sia $p \in X$. Allora ϕ_D è un'immersione in un intorno di $p \iff H^0(D - 2p) \neq H^0(D - p)$.

Corollario 2.1.13. *Sia D un divisore privo di punti base su X . Allora ϕ_D è un'immersione \iff per ogni coppia di punti p, q non necessariamente distinti, $h^0(D - p - q) = h^0(D) - 2$.*

Un divisore che soddisfi una tale proprietà è detto *molto ampio*.

Osservazione 2.1.14. Una costruzione analoga può essere fatta per varietà di dimensione maggiore. In tal caso bisogna distinguere tra punti e componenti comuni nel sistema: possono esserci componenti comuni a tutti i divisori del sistema, oppure non esserci componenti comuni ma esserci punti comuni. In generale chiameremo *parte fissa* F di D (o del sistema $|D|$) il massimo divisore effettivo comune tra tutti i divisori del sistema, e *parte mobile* il divisore $D - F$ (rispettivamente, il sistema $|D| - F$). Se inoltre tutti i divisori del sistema hanno punti in comune, essi vengono detti *punti base*. Per varietà di dimensione maggiore l'applicazione associata a un divisore è l'applicazione associata alla sua parte mobile, che (per varietà algebriche) può non essere un morfismo: quando il sistema ha punti base, l'applicazione è solo razionale ed è definita al di fuori dei punti base.

2.2 La classificazione delle superfici di Riemann

Introduciamo ora uno dei teoremi principali per la classificazione delle superfici di Riemann di genere basso. Enunciamo le varie versioni del teorema per *curve algebriche*; esso vale comunque anche per le superfici di Riemann, e permette (come vedremo dopo) di mostrare che le superfici di Riemann sono curve algebriche.

Definizione 2.2.1. Una superficie di Riemann è una *curva algebrica* se separa punti e tangenti, ovvero se per ogni $p, q \in X$ esiste una funzione meromorfa f tale che $f(p) \neq f(q)$, e se per ogni $p \in X$ esiste g meromorfa che abbia molteplicità uno in p .

Teorema 2.2.2 (Teorema di Riemann-Roch, versione 1). *Sia D un divisore su una curva algebrica X . Allora*

$$h^0(D) - h^1(D) = \deg(D) + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

Per scrivere il teorema in modo diverso, ci interessa rimpiazzare i termini in h^1 ; ci torna utile la dualità di Serre per il caso delle curve algebriche:

Teorema 2.2.3 (Dualità di Serre). *Sia D un divisore su una curva algebrica X , allora vi è un isomorfismo $H^1(D)^* \cong H^1(-D)$. Ricordando che $H^1(-D) = H^0(K - D)$, allora $h^1(D) = h^0(K - D)$.*

Resta da determinare $h^1(\mathcal{O}_X)$. Applicando il teorema di Riemann-Roch al caso $D = K$ e la dualità di Serre, si ottiene che

$$h^0(K) - h^0(\mathcal{O}_X) = \deg(K) + 1 - h^1(\mathcal{O}_X).$$

Ancora per la dualità di Serre si ha che $h^0(K) = h^1(\mathcal{O}_X)$; inoltre $h^0(\mathcal{O}_X) = 1$ e $\deg(K) = 2g - 2$ per il Lemma 2.1.4. Sostituendo otteniamo che

$$2h^1(\mathcal{O}_X) = 2g - 2 + 2 = 2g,$$

da cui

$$h^1(\mathcal{O}_X) = h^0(K) = g.$$

Possiamo ora dare una formulazione alternativa del teorema di Riemann-Roch:

Teorema 2.2.4 (Teorema di Riemann-Roch, versione 2). *Sia D un divisore su una curva algebrica X di genere g , allora*

$$\chi(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Equivalentemente, usando le identità precedenti:

$$h^0(D) - h^0(K - D) = \deg(D) + 1 - g.$$

In termini di sistemi lineari completi, ricordando che $\dim |D| = h^0(D) - 1$ per il Lemma 1.2.7, il teorema può essere riformulato come

$$\dim |D| - \dim |K - D| = \deg(D) + 1 - g.$$

Osservazione 2.2.5. Se il grado di un divisore è negativo il suo sistema lineare completo è vuoto. Si ottiene quindi il seguente corollario:

Corollario 2.2.6. *Se D è un divisore di grado almeno $2g - 1$, allora $h^1(D) = h^0(K - D) = 0$ e quindi*

$$h^0(D) = \deg(D) + 1 - g.$$

Il teorema di Riemann-Roch permette di dimostrare che tutte le superfici di Riemann compatte sono algebriche. Questo caratterizza il caso di varietà di dimensione 1, perché già in dimensione 2 esistono varietà che non sono algebriche.

Teorema 2.2.7. *Se X è una superficie di Riemann compatta, allora X è una curva algebrica.*

Dimostrazione. La dimostrazione si basa sul fatto che, grazie al teorema di Riemann-Roch, le superfici di Riemann hanno abbastanza funzioni meromorfe. Nel dettaglio, posto $D = (g + 1)p$, dal teorema di Riemann-Roch segue che $h^0(D) \geq 2$ e quindi esiste una funzione meromorfa f non costante su X , perciò f deve avere un polo, che per costruzione deve essere in p mentre non possono esserci poli in altri punti. Questo dimostra che X separa i punti. Per mostrare che separa le tangenti, con un ragionamento analogo e usando il corollario precedente si ha che per n sufficientemente grande, se definiamo $D_n = np$, si deve avere che $h^0(D_n) = n + 1 - g$. Questo implica che $h^0(D_{n+1}) = h^0(D_n) + 1$, perciò per n grande $H^0(D_{n+1})$ ha una funzione meromorfa f_{n+1} non contenuta in $H^0(D_n)$: a questo punto basta prendere f_n/f_{n+1} come funzione meromorfa che ha molteplicità uno in p . \square

Questo dimostra che tutte le superfici di Riemann compatte sono curve proiettive, in quanto le curve algebriche sono proiettive. Quest'ultima affermazione segue dal fatto che un divisore di grado almeno $2g + 1$ è molto ampio, che quindi produce un'immersione in uno spazio proiettivo tramite la sua applicazione associata.

A questo punto, possiamo utilizzare i risultati precedenti per dare una classificazione delle superfici di Riemann di genere basso. Il primo caso è $g = 0$: tramite il lemma seguente, mostriamo che la sfera di Riemann è l'unica possibilità.

Lemma 2.2.8. *Se per qualche $p \in X$, $h^0(p)$ ha funzioni non costanti, allora X è isomorfa alla sfera di Riemann.*

Proposizione 2.2.9. *Una superficie di Riemann X di genere 0 è isomorfa alla sfera di Riemann \mathbb{C}_∞ .*

Dimostrazione. Per $g = 0$ il divisore canonico X ha grado -2 , perciò il grado di $(K - p)$ è -3 da cui segue che $H^0(K - p)$ è banale. Applicando il teorema di Riemann-Roch al divisore p si ottiene quindi che

$$h^0(p) = \deg(p) + 1 - g = 2,$$

e quindi X è isomorfa alla sfera di Riemann per il lemma precedente. \square

Con un ragionamento analogo si possono classificare anche le superfici di Riemann di genere 1: infatti un divisore di grado almeno 3 è molto ampio per quanto detto prima. Di conseguenza preso D divisore di grado esattamente 3, per Riemann-Roch $h^0(D) = 3$ e dunque l'applicazione associata a D definisce un'immersione in \mathbb{P}^2 . Questo dimostra la seguente affermazione:

Proposizione 2.2.10. *Una superficie di Riemann X di genere 1 è isomorfa ad una cubica piana proiettiva liscia.*

Equivalentemente, si può affermare che X è isomorfa ad un 1-toro complesso.

Per il caso $g = 2$, siccome $h^0(K) = g = 2$, esiste una funzione meromorfa non costante f in $H^0(K)$, e tale f può essere scelta in modo che abbia due poli in p e q . Allora la funzione olomorfa associata $F: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ha grado 2, dunque X è rivestimento doppio di \mathbb{C}_∞ e quindi X è iperellittica:

Proposizione 2.2.11. *Una superficie di Riemann X di genere 2 è isomorfa ad una curva iperellittica.*

I casi $g > 2$ sono più difficili da classificare in maniera così precisa. Questo non è una sorpresa se si pensa al fatto che esistono curve iperellittiche di qualsiasi genere $g \geq 2$, ma che non tutte le superfici di Riemann sono iperellittiche. Nonostante questo, è possibile dare delle condizioni che descrivano precisamente il caso in cui X è una curva iperellittica.

Proposizione 2.2.12. *Se X è una curva algebrica di genere $g \geq 3$, allora l'applicazione canonica è un'immersione se e solo se X non è iperellittica.*

Dimostrazione. L'applicazione associata ad un divisore D non è un'immersione se e solo se $h^0(D - p - q) \neq h^0(D) - 2$; siccome, se K è il divisore canonico di X , $|K|$ non ha punti base, l'affermazione precedente nel caso del divisore canonico si verifica se e solo se $h^0(K - p - q) = h^0(K) - 1 = g - 1$. Dal teorema di Riemann-Roch si ha che

$$h^0(K - p - q) = \deg(K - p - q) + 1 - g + h^0(p + q) = g - 3 + h^0(p + q).$$

Allora si deve avere che $h^0(p + q) = 2$: se questo succede, esiste una funzione meromorfa f non costante con poli in p e q , quindi la corrispondente applicazione $F: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ ha grado 2 e dunque descrive X come rivestimento doppio di \mathbb{C}_∞ , cioè X è iperellittica.

Viceversa, se X è iperellittica e $p: X \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ è il rivestimento doppio, il pullback del divisore ∞ dà il divisore $p + q$ di grado 2 con $h^0(p + q) = 2$ da cui segue, per quanto detto prima, che φ_K non è un'immersione. \square

In altre parole, il caso delle curve iperellittiche è caratterizzato dal fatto che l'applicazione canonica non è un'immersione: effettivamente, essa definisce un rivestimento doppio di \mathbb{C}_∞ , immersa in \mathbb{P}^{g-1} tramite la g -esima applicazione di Veronese. Viceversa, il fatto che l'applicazione canonica sia un'immersione per curve non iperellittiche ci permette di studiare esplicitamente le proprietà di X come curva proiettiva.

Prima di fare un esempio di quest'ultima affermazione, introduciamo alcune notazioni che ci serviranno a breve. Se D è un divisore molto ampio su X , possiamo identificare X con la sua immagine tramite l'applicazione associata a D . Poniamo $P(n, k)$ lo spazio dei polinomi omogenei di grado k in $n + 1$ variabili; preso F_0 un polinomio omogeneo di grado k tale che F_0 non si annulli ovunque su X , possiamo considerare il suo divisore di intersezione $\text{div}(F_0) \sim kD$. Inoltre possiamo definire un'applicazione

$$R_k: P(n, k) \rightarrow h^0(kD)$$

data associando a $F \in P(n, k)$ la funzione $f = F/F_0$. Per costruzione, $F \in \ker(R_k)$ se e solo se F è identicamente nulla su X : questo vuol dire che $\ker(R_k)$ è formato dalle equazioni di ipersuperfici di grado k di \mathbb{P}^n contenenti X . Ci tornerà utile una stima sulla dimensione di $\ker(R_k)$:

Lemma 2.2.13. *Se D è un divisore molto ampio su X di grado almeno g , allora per ogni $k \geq 2$*

$$\dim \ker(R_k) \geq \binom{n+k}{k} - \deg(D)k - 1 + g.$$

Esempio 2.2.14 (Il caso di genere 3). Sia X una curva non iperellittica di genere 3. L'applicazione canonica ha immagine in \mathbb{P}^2 , dunque $n = 2$. Dal lemma precedente, per $k = 4$, abbiamo che

$$\dim \ker(R_4) \geq \binom{6}{4} - 4 \deg(K) - 1 + 3 = 1,$$

per cui esiste almeno un polinomio omogeneo di grado 4 che si annulla su X . In realtà in questo caso si deve avere l'uguaglianza: infatti in \mathbb{P}^2 gli zeri comuni di due polinomi indipendenti formano un insieme finito. Chiamiamo F il generatore di R_4 .

Siccome F è nullo su X , lo stesso vale per GF con G polinomio di grado $k - 4$: questo dà, per ogni $k \geq 5$, un sottospazio di $\ker(R_k)$ di dimensione $\dim P(2, k - 4) = (k - 2)(k - 3)/2$, che coincide con il valore minimo dato dalla disuguaglianza del lemma precedente. Anche in questo caso si deve avere l'uguaglianza con un ragionamento analogo al precedente. Di conseguenza ogni polinomio che si annulla su X deve essere un multiplo di F . Il risultato complessivo per il caso di genere 3 è il seguente:

Proposizione 2.2.15. *Se X è una curva algebrica di genere 3, allora o X è iperellittica (con equazione della forma $y^2 = h(x)$ dove h ha grado 7 o 8), oppure l'applicazione canonica immerge X in \mathbb{P}^2 come curva quartica liscia.*

3 | Superfici complesse

3.1 Nozioni per le superfici complesse

Come fatto nel capitolo precedente, iniziamo introducendo nuovi risultati e definizioni che saranno utili per lo studio delle superfici complesse. Sotto vari aspetti l'approccio è completamente diverso rispetto a quanto visto per le superfici di Riemann, e questo sarà evidente da quanto si vedrà in questa prima sezione. Ricordiamo inoltre che, per il caso delle superfici complesse, avremo che un divisore è una combinazione lineare di curve irriducibili di X . Prima di introdurre concetti più elaborati, diamo una definizione sarà il punto fondamentale della classificazione delle superfici complesse, la quale sarà l'argomento della Sezione 3.3.

Definizione 3.1.1. Sia X una varietà complessa, K il suo divisore canonico. Definiamo la *dimensione di Kodaira* κ di X come:

$$\kappa(X) = \begin{cases} \max \dim \varphi_{nK}(X) & \text{se } h^0(nK) \neq 0 \text{ per qualche } n > 0 \\ -\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

In altre parole, la dimensione Kodaira è, quando ha senso, la massima dimensione dell'immagine delle applicazioni pluricanoniche, e $-\infty$ altrimenti.

Equivalentemente, la dimensione di Kodaira può essere definita nel seguente modo: siano P_1, \dots, P_m, \dots i *plurigeneri* di X , cioè $P_m = h^0(mK_X)$. Poniamo $\kappa = -\infty$ se $P_i = 0 \forall i$, $\kappa = 0$ se $P_i = 0$ o $1 \forall i$ ma non tutti 0, altrimenti $\kappa(X) = k \iff P_m = \Theta(m^k)$, cioè $\kappa = k$ se l'andamento asintotico di P_m al crescere di m è lo stesso di m^k .

3.1.1 Classi di Chern di un fibrato

Sia X una varietà complessa. Per prima cosa, consideriamo il caso di fibrati di rette. La successione esatta esponenziale

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

induce la successione in coomologia

$$\cdots \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow \cdots$$

Per il Lemma 1.3.3, c_1 è una applicazione $c_1: \text{Pic}(X) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z})$: l'immagine di un fibrato in rette \mathcal{L} (o più precisamente, della sua classe di equivalenza) tramite c_1 è detta la *prima classe di Chern* di \mathcal{L} , indicata $c_1(\mathcal{L})$. Per il caso di fibrati di rango maggiore, ad un fibrato $E \rightarrow M$ di rango n possiamo innanzitutto associare due ulteriori fibrati: il *pullback* $\pi^{-1}E$ e il *sottofibrato universale* S . $\pi^{-1}E$ è il fibrato su $\mathbb{P}(E)$ dato da

$$\pi^{-1}E = \{(l_p, E_p) \mid l_p \in \mathbb{P}(E), E_p \text{ fibra su } p \text{ di } E\},$$

mentre S è anch'esso un fibrato su $\mathbb{P}(E)$ definito come

$$S = \{(l_p, v) \in \pi^{-1}E \mid v \in l_p\}.$$

Posto $x = c_1(S^*)$ dove S^* è il duale di S , x definisce una classe di coomologia in $H^2(\mathbb{P}(E))$. Le classi di coomologia $1, x, \dots, x^{n-1}$ (dove il prodotto è il prodotto cup) sono una base di $H^*(\mathbb{P}(E))$ su $H^*(M)$, per cui x^n può essere scritto come combinazione di tali elementi:

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n = 0,$$

dove ciascun c_i è un elemento di $H^{2i}(M)$, detto *i -esima classe di Chern di E* .

Definizione 3.1.2. La *i -esima classe di Chern* di una varietà complessa X è la i -esima classe di Chern $c_i(T_X)$ del suo fibrato tangente T_X .

Osservazione 3.1.3.

- Per costruzione, un fibrato E di rango n ha la m -esima classe di Chern c_m nulla quando $m > n$.
- Se X è una varietà complessa di dimensione n , la sua prima classe di Chern c_1 è la classe fondamentale di $-K_X$, cioè $[-K_X] \in H^2(X)$, mentre la massima classe di Chern, c_n , è la caratteristica di Eulero topologica $e(X)$ di X (ricordiamo che la *classe fondamentale* di un divisore è la classe in coomologia associata alla sua classe in omologia singolare tramite la dualità di Poincaré);
- Se X è una superficie complessa, c_1 e c_2 sono le uniche classi di Chern che possono essere non nulle. Per quanto appena detto, $c_1 = [-K_X]$, $c_2 = e(X)$.

Siccome le classi di Chern sono classi di coomologia, il prodotto cup permette di definire un prodotto tra classi di Chern. Sia X una varietà di dimensione n , $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ naturali tali che $i_1 + \dots + i_k = n$. Allora $c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k} \in H^{2n} \cong \mathbb{Z}$, cioè il prodotto è un intero. Ogni combinazione di questa forma è detta *numero di Chern*. Nel caso in cui X sia una superficie complessa, gli unici numeri di Chern sono c_1^2 e c_2 ; per le osservazioni precedenti, sappiamo determinarne il valore rispetto agli invarianti che abbiamo già introdotto: $c_1^2 = K_X^2$ e $c_2 = e(X)$.

3.1.2 La forma di intersezione per fibrati di rette e divisori

Sia X una superficie complessa. Siccome i divisori sono combinazioni lineari di curve, è interessante cercare di capire la posizione reciproca tra divisori distinti, in modo analogo a ciò che si fa per le curve. Un metodo particolarmente efficace è quello di definire una forma bilineare, detta *forma di intersezione*, che coincida, in un senso che preciseremo dopo, con l'intersezione per il caso di curve sulla superficie, e che abbia alcune proprietà particolarmente utili per ricavare informazioni sui divisori. Per prima cosa ricordiamo che, come abbiamo già visto alla fine della sezione precedente, dato che le varietà complesse sono orientabili, nel caso delle superfici si ha che $H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Di conseguenza il prodotto cup di elementi in $H^2(X, \mathbb{Z})$ è un elemento di $H^4(X, \mathbb{Z})$ e quindi un intero: utilizziamo questo fatto per definire la forma di intersezione a partire dalla coomologia. Definiamo la forma di intersezione per divisori nel modo seguente:

$$D \cdot E = [D] \cdot [E]$$

dove, come prima, $[D], [E] \in H^2(X)$ sono le classi fondamentali di D e E . Elenchiamo alcune proprietà:

Proposizione 3.1.4.

- $D \cdot E = E \cdot D$ (*simmetria*);
- $(mD_1 + nD_2) \cdot E = m(D_1 \cdot E) + n(D_2 \cdot E)$ (*bilinearità*);
- Se $D_1 \sim D_2, E_1 \sim E_2$, allora $D_1 \cdot E_1 = D_2 \cdot E_2$;
- Se D e E sono curve lisce che si intersecano trasversalmente, allora la forma coincide con la cardinalità dell'intersezione insiemistica, cioè $D \cdot E = \#(D \cap E)$.

Osservazione 3.1.5.

- A prima vista, la forma di intersezione assume sempre valori non negativi. In effetti le ultime due proprietà possono essere usate, in vari casi, per dedurre alcune informazioni sulla posizione reciproca tra due divisori. Siccome l'ultima proprietà vale solo nel caso in cui le curve (o le componenti dei divisori) si intersechino trasversalmente, il fatto che la forma sia invariante per equivalenza lineare permette di sostituire le curve che non si intersecano trasversalmente con nuove curve, a loro equivalenti, che invece soddisfino questa condizione. Va però notato che, come vedremo dopo, questo non è sempre possibile: ci sono alcune curve che non hanno altre curve a loro equivalenti. Quando questo succede, e quindi si perde l'analogia con l'intersezione insiemistica, la forma può assumere valori negativi.
- Il procedimento appena descritto permette di dare un senso anche all'autointersezione di un divisore D , cioè $D \cdot D = D^2$. Vedremo che ciò avrà grande importanza, permettendoci di descrivere in modo preciso determinati tipi di curve e divisori.

La forma può essere definita anche per fibrati di rette, analogamente a quanto detto nella sezione precedente in merito ai numeri di Chern. La definizione più naturale, che utilizza l'isomorfismo $\text{Pic}(X) \cong H^1(\mathcal{O}^*)$, permette di usare equivalentemente fibrati e divisori quando c'è una corrispondenza biunivoca tra essi. Siano $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ due fibrati di rette. Poniamo

$$\mathcal{L} \cdot \mathcal{L}' = c_1(\mathcal{L}) \cdot c_1(\mathcal{L}') \in \mathbb{Z}.$$

Per superfici lisce, se $\mathcal{L}(D), \mathcal{L}(D')$ sono i fibrati associati ai divisori D, D' , si ha che $\mathcal{L}(D) \cdot \mathcal{L}(D') = D \cdot D'$.

Si può dimostrare che il prodotto tra fibrati può essere definito anche in modo diverso. Questo ci tornerà utile più avanti:

Proposizione 3.1.6. *Sia X una superficie complessa, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ due fibrati di rette su X . Allora*

$$\mathcal{L}_1 \cdot \mathcal{L}_2 = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}_1^*) - \chi(\mathcal{L}_2^*) + \chi(\mathcal{L}_1^* \otimes \mathcal{L}_2^*).$$

3.1.3 Il blow-up di un punto su una superficie complessa

Vediamo ora una costruzione di grande importanza per lo studio delle superfici complesse. Intuitivamente, quello che facciamo è sostituire un punto con lo spazio proiettivo delle rette tangenti alla varietà passanti per il punto. Per prima cosa vediamo il caso di \mathbb{C}^n : siano z_1, \dots, z_n le coordinate, (ξ_1, \dots, ξ_n) le coordinate omogenee di \mathbb{P}^{n-1} . Per un intorno U di un punto

$a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ consideriamo il sottoinsieme \tilde{U} di $U \times \mathbb{P}^{n-1}$ dato dal luogo degli zeri dei polinomi $(z_i - a_i)\xi_j - (z_j - a_j)\xi_i$, $i, j = 0, \dots, n$. Consideriamo la proiezione naturale associata $\pi: \tilde{U} \rightarrow U$: su $\tilde{U} \setminus \pi^{-1}(a)$, π è un isomorfismo, mentre $\pi^{-1}(a)$ è una sottovarietà $(n-1)$ -dimensionale di \tilde{U} . Questa costruzione può essere usata anche per varietà complesse, utilizzando coordinate locali attorno ad un punto. Dunque se X è una varietà complessa di dimensione n , $p \in X$ un suo punto, \tilde{X} lo spazio ottenuto nel modo precedente per il punto p , e $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ la proiezione, diremo che π , o anche \tilde{X} , è il *blow-up* di X nel punto p . La preimmagine del punto di blow-up, $\pi^{-1}(p)$, è detto il *divisore eccezionale* di \tilde{X} , che indichiamo solitamente con E .

Nel caso di nostro interesse, cioè di dimensione 2, in un intorno del punto di blow-up \tilde{X} è dato dall'unica equazione $z_1\xi_2 = z_2\xi_1$, e il divisore eccezionale è isomorfo alla retta proiettiva \mathbb{P}^1 . Inoltre, se C è una curva passante per $p \in X$, la curva $\pi^{-1}C$ è detta *trasformata totale* di C mentre la chiusura di $\pi^{-1}(C \setminus \{p\})$, indicata \tilde{C} , è detta *trasformata stretta* di C . Le due trasformate sono strettamente legate: se C passa per p con molteplicità m , allora

$$\pi^{-1}C = \tilde{C} + mE.$$

Osservazione 3.1.7. Il blow-up dà un primo esempio di curva con autointersezione negativa. Infatti sia X una superficie complessa liscia, $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ il suo blow-up in p , e $E \in \tilde{X}$ il divisore eccezionale. Sia $C \subset X$ una curva passante per p con molteplicità 1; per quanto detto prima, $\tilde{C} = \pi^{-1}C - E$. D'altra parte, per le proprietà della forma di intersezione possiamo sostituire C con una curva linearmente equivalente C_1 , che scegliamo in modo che non passi per p , per ottenere che $\pi^{-1}C_1 \cdot E = 0$. Mettendo insieme le due identità si ottiene che

$$1 = E \cdot \tilde{C} = E \cdot \tilde{C}_1 = E \cdot (\pi^{-1}C_1 - E) = E \cdot \pi^{-1}C_1 - E^2 = 0 - E^2,$$

da cui $E^2 = -1$. Come accennato prima, il motivo di questo risultato è che E non può essere "mosso" in modo da ottenere un altro divisore ad esso equivalente e con cui non abbia componenti comuni.

3.1.4 Alcuni risultati utili

Prima di approfondire la questione della classificazione, introduciamo alcuni risultati che utilizzeremo svariate volte più avanti. Per prima cosa, vediamo una versione generale della dualità di Serre.

Teorema 3.1.8 (Dualità di Serre). *Sia X una varietà di dimensione n , \mathcal{V} un fibrato vettoriale su X , \mathcal{K}_X il fibrato in rette delle n -forme differenziali su X . Allora*

$$h^i(\mathcal{V}) = h^{n-i}(\mathcal{V}^* \otimes \mathcal{K}_X).$$

Corollario 3.1.9. *Se X è una superficie complessa, allora $h^{i,j} = h^{2-i,2-j}$.*

E come per le superfici di Riemann, anche in dimensione 2 si ha l'equivalente del teorema di Riemann-Roch già visto.

Teorema 3.1.10 (Teorema di Riemann-Roch). *Sia X una superficie complessa, \mathcal{L} un fibrato in rette su X , \mathcal{K}_X il fibrato in rette delle 2-forme differenziali su X . Allora*

$$\chi(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^2 - \mathcal{L} \cdot \mathcal{K}_X).$$

Quando X è liscia, se \mathcal{L} è il fascio associato al divisore D , l'uguaglianza può essere riformulata in termini di divisori come

$$\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(D^2 - D \cdot K).$$

Dimostrazione. Calcoliamo $\mathcal{L}^* \cdot (\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X^*)$: per definizione

$$\mathcal{L}^* \cdot (\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X^*) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L}) - \chi(\mathcal{K}_X \otimes \mathcal{L}^*) + \chi(\mathcal{K}_X);$$

dalla dualità di Serre si ha che $\chi(\mathcal{K}_X) = \chi(\mathcal{O}_X)$ e $\chi(\mathcal{K}_X \otimes \mathcal{L}^*) = \chi(\mathcal{L})$, quindi l'uguaglianza diventa

$$\mathcal{L}^* \cdot (\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X^*) = 2(\chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{L})).$$

Per bilinearità si ha che

$$\mathcal{L}^* \cdot (\mathcal{L} \otimes \mathcal{K}_X^*) = -\mathcal{L} \cdot \mathcal{L} + \mathcal{L} \cdot \mathcal{K}_X = -\mathcal{L}^2 + \mathcal{L} \cdot \mathcal{K}_X.$$

Sostituendo questo risultato nell'identità precedente e riordinando i termini si ottiene l'enunciato del teorema. \square

Corollario 3.1.11 (Formula del genere). *Sia C una curva liscia irriducibile su una superficie complessa liscia X . Allora il genere di C è*

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K).$$

Dimostrazione. Ricordando che il genere di una curva C è anche dato da $g(C) = h^1(\mathcal{O}_C)$, dalla successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

segue la successione esatta in coomologia corrispondente da cui si deduce che

$$\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X(-C));$$

siccome $\chi(\mathcal{O}_C) = 1 - g(C)$, usando il teorema di Riemann-Roch si deduce che

$$1 - g(C) = \chi(\mathcal{O}_X) - \chi(\mathcal{O}_X) - \frac{1}{2}(C^2 + C \cdot K)$$

da cui segue l'enunciato. □

Osservazione 3.1.12. Si può dimostrare che, se C è una curva irriducibile non singolare, vale che per ogni fibrato in rette \mathcal{L} ,

$$\mathcal{O}_X(C) \cdot \mathcal{L} = \deg(\mathcal{L}|_C).$$

Di conseguenza, se C è una curva non singolare, il precedente risultato può essere espresso anche come

$$2g - 2 = \deg(K + C)|_C.$$

Questa non è altro che una riformulazione della *formula di aggiunzione*:

Proposizione 3.1.13 (Formula di aggiunzione). *Sia X una superficie complessa liscia, C una curva liscia su X . Allora*

$$K_C = (K_X + C)|_C.$$

Concludiamo con un risultato che useremo spesso, che lega caratteristica olomorfa, topologica e K_X^2 :

Teorema 3.1.14 (Formula di Noether). *Sia X una superficie complessa, allora*

$$\chi = \frac{c_1^2 + c_2}{12} = \frac{K_X^2 + e}{12}.$$

3.2 Superfici minime

Introduciamo ora le basi per il problema della classificazione delle superfici complesse. Nel seguito descriviamo i risultati per le superfici proiettive, ma valgono enunciati analoghi anche per le superfici non proiettive. Il primo punto da definire è secondo quale criterio due superfici siano “equivalenti”. I risultati che vedremo tra poco mostrano come il problema diventi più semplice sotto vari aspetti andando a utilizzare, come criterio, l’equivalenza birazionale (o i bimeromorfismi per superfici non algebriche).

Per prima cosa, come già detto nell'Osservazione 2.1.14, un sistema lineare su una superficie complessa può non avere componenti fisse ma avere punti base. Di conseguenza, l'applicazione associata può non essere un morfismo ma solo razionale, definita al di fuori dei punti base. In realtà, per le superfici proiettive le applicazioni razionali possono essere estese, in un senso che vediamo ora, a morfismi definiti ovunque.

Teorema 3.2.1 (Eliminazione dell'indeterminazione). *Sia $\phi: X \dashrightarrow S$ una mappa razionale da una superficie complessa in una varietà proiettiva. Allora esiste una superficie \tilde{X} , un morfismo $\eta: \tilde{X} \rightarrow X$ e un morfismo $\tilde{\phi}: \tilde{X} \rightarrow S$ in modo che il seguente diagramma commuti:*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \eta \swarrow & & \searrow \tilde{\phi} \\ X & \dashrightarrow \phi & S \end{array}$$

In particolare, η è dato dalla composizione di un numero finito di blow-up.

Dimostrazione. Possiamo supporre $S = \mathbb{P}^n$, che $\phi(S)$ non sia contenuto in un iperpiano di \mathbb{P}^n e che ϕ non sia un morfismo. Dunque ϕ corrisponde ad un sistema lineare $P \subset |D|$ su X di dimensione n con punti base. Sia p un punto base di P , e sia $\epsilon_1: X_1 \rightarrow X$ il corrispondente blow-up. Dato che p è un punto base, la curva eccezionale E deve comparire in tutti i divisori del sistema $\epsilon_1^{-1}P \subset |\epsilon_1^{-1}D|$ con qualche molteplicità k , e quindi essere nella parte fissa del sistema. D'altra parte, dato che P non ha componenti fisse, kE deve anche essere l'intera parte fissa del sistema: di conseguenza il sistema $P_1 \subset |\epsilon_1^{-1}D - kE|$, ottenuto togliendo kE da tutti i divisori di P , non ha componenti fisse, e quindi definisce una nuova mappa razionale $\phi_1: X_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ che coincide con $\phi \circ \epsilon_1$. Se ϕ_1 è un morfismo il procedimento termina, altrimenti si può iterare il procedimento ottenendo una successione di blow-up $\epsilon_n: X_n \rightarrow X_{n-1}$ e una successione di sistemi lineari $P_n \subset |D_n|$ su S_n senza componenti fisse, dove $D_n = \epsilon_n^{-1}D_{n-1} - k_n E_n$. Si ha quindi che

$$\begin{aligned} D_n^2 &= (\epsilon_n^{-1}D_{n-1} - k_n E_n)^2 \\ &= (\epsilon_n^{-1}D_{n-1})^2 - 2k_n(\epsilon_n^{-1}D_{n-1} \cdot E_n) + k_n^2 E_n^2 \\ &= D_{n-1}^2 - k_n^2 < D_{n-1}^2, \end{aligned}$$

usando il fatto che $E^2 = -1$ e $(\epsilon_n^{-1}D_{n-1} \cdot E_n) = 0$ (Osservazione 3.1.7) e che $(\epsilon_n^{-1}D_{n-1})^2 = D_{n-1}^2$. Dunque la successione dei D_n^2 è decrescente; siccome il sistema di D_n non ha mai componenti fisse, per costruzione, questo vuol dire che D_n^2 deve necessariamente essere non negativo, per cui l'algoritmo deve terminare in un numero finito di passi. Inoltre, per come sono ottenuti i ϕ_n , il risultato finale è un morfismo $\tilde{\phi}: X_n \rightarrow \mathbb{P}^n$ come descritto dall'enunciato del teorema. \square

Corollario 3.2.2. *Un sistema lineare completo $|D|$ senza parte fissa ha al più D^2 punti base.*

Questo permette, almeno in parte, di ridurre lo studio delle superfici al caso di superfici lisce. Il blow-up però ha anche un altro ruolo fondamentale nel principale teorema della classificazione, che afferma che tutte le mappe (o morfismi) birazionali si riducono, in qualche modo, al caso di blow-up:

Teorema 3.2.3. *Sia $f: X \rightarrow X'$ un morfismo birazionale tra superfici complesse. Allora, a meno di isomorfismo, f è dato dalla composizione di un numero finito di blow-up su X' . Se invece f è una mappa birazionale, esiste una superficie \tilde{X} che renda commutativo il diagramma:*

$$\begin{array}{ccc} & \tilde{X} & \\ \phi \swarrow & & \searrow \psi \\ X & \text{---} & X' \\ & \underset{f}{\dashrightarrow} & \end{array}$$

dove ϕ e ψ sono morfismi dati, a meno di isomorfismo, dalla composizione di un numero finito di blow-up.

Oltre ai risultati precedenti, che descrivono le applicazioni tra superfici, è anche interessante cercare di determinare superfici con proprietà particolarmente utili.

Definizione 3.2.4. Una curva C su una superficie X è detta (-1) -curva se è isomorfa a \mathbb{P}^1 e $C^2 = -1$.

Definizione 3.2.5. Una superficie liscia X è detta *minima* se non contiene (-1) -curve.

Per capire il motivo di questa definizione, è utile il seguente risultato.

Proposizione 3.2.6. *Sia X una superficie complessa liscia, C una curva razionale (cioè birazionale a \mathbb{P}^1) con $C^2 = -1$. Allora esiste un morfismo birazionale $f: X \rightarrow Y$ con Y liscia tale che f sia un isomorfismo su $Y \setminus C$ e $f(C) = p$.*

In altri termini, la proposizione afferma che su una superficie liscia una curva razionale con autointersezione -1 deve essere il risultato di un blow-up; abbiamo già visto che vale il contrario, dunque una superficie minima è “minimale rispetto alle equivalenze birazionali”. Una superficie minima X è anche caratterizzata dalla proprietà che ogni morfismo birazionale $X \rightarrow X'$ con X' liscia deve essere un isomorfismo; anche questo evidenzia la “minimalità” della superficie.

Per definizione, per dire se una superficie è minima bisogna sapere se ha (-1) -curve. Per determinare se una curva è una (-1) -curva torna utile il seguente risultato:

Proposizione 3.2.7. *Una curva irriducibile C su una superficie X è una (-1) -curva se e solo se $C^2 < 0$ e $K_X \cdot C < 0$.*

Dimostrazione. Se C è una (-1) -curva, per definizione $C^2 < 0$. Dalla formula per il genere (Corollario 3.1.11) si ha che $1 + \frac{1}{2}(C^2 - C \cdot K_X) = 0$, per cui $C \cdot K_X = -1 < 0$. Per l'implicazione opposta, ancora per la formula per il genere, siccome $g \geq 0$, $C^2 < 0$ e $K_X \cdot C < 0$ si deve avere che $g = 0$, $C^2 = -1$, $C \cdot K_X = -1$, da cui C è una (-1) -curva. \square

Una proprietà particolarmente utile è la seguente:

Proposizione 3.2.8. *Sia X una superficie complessa liscia con $\kappa(X) \geq 0$, e D un divisore effettivo su X tale che $K_X \cdot D < 0$. Allora D contiene una (-1) -curva.*

Dimostrazione. Ci riduciamo al caso in cui D sia una curva. Per definizione di $\kappa(X)$, per qualche $n \geq 1$ il sistema $|nK_X|$ non è vuoto, dunque si può prendere K effettivo, $K \sim nK_X$, con $K = \sum c_i C_i$, $c_i \geq 0$. Se $K \cdot D < 0$, per quanto detto in Osservazione 3.1.5 l'unica possibilità è che K abbia una componente comune con D , e cioè che $D = C_i$ per qualche i . Supponendo $D = C_0$, si ha che $D \cdot (K - c_0 D) \geq 0$ (perché i due divisori non hanno più componenti comuni), e quindi $D^2 < 0$ per bilinearità. Per la proposizione precedente, D deve essere una (-1) -curva. \square

Il teorema può essere riformulato dicendo che se X è una superficie minima con $\kappa(X) \geq 0$, allora $K_X \cdot C \geq 0$ per ogni curva C su X . Questo porta alla seguente definizione:

Definizione 3.2.9. Un divisore D su una superficie X è detto *nef* se $D \cdot C \geq 0$ per ogni curva C su X .

Corollario 3.2.10. *Se X è una superficie minima con $\kappa(X) \geq 0$, allora il divisore canonico K_X è nef.*

La condizione $\kappa(X) \geq 0$ non può essere eliminata: le superfici rigate (descritte più avanti) hanno $\kappa(X) = -\infty$ e divisore canonico non nef. In effetti si dimostra che tale condizione è anche necessaria affinché il divisore canonico sia nef:

Proposizione 3.2.11. *X è una superficie minima con divisore canonico nef se e solo se $\kappa(X) \geq 0$.*

Abbiamo introdotto le superfici minime, ma non abbiamo ancora descritto che rapporto c'è rispetto alla totalità delle superfici complesse. I due risultati seguenti mostrano perché, in effetti, ci si possa ridurre (almeno per certi aspetti) allo studio delle superfici minime.

Proposizione 3.2.12. *Ogni superficie liscia X è birazionale ad una superficie minima.*

Dimostrazione. Supponiamo che X contenga una (-1) -curva, e sia X_1 la superficie ottenuta contraendo tale curva. Se X_1 contiene a sua volta una (-1) -curva, la si può contrarre e ottenere una nuova superficie X_2 . Si può ripetere tale procedimento, che deve terminare perché ogni contrazione riduce di 1 il secondo numero di Betti b_2 di X . \square

Proposizione 3.2.13. *Sia X è una superficie liscia con $\kappa(X) \geq 0$, allora se X è birazionale a due superfici minime X_1, X_2 , X_1 e X_2 sono isomorfe. In altre parole, a meno di isomorfismo X è birazionale ad un'unica superficie minima.*

Definizione 3.2.14. Se Y è una superficie minima birazionale a X , Y è detta *modello minimo* di X .

Osservazione 3.2.15. Se $\kappa(X) \geq 0$, il modello minimo è unico a meno di isomorfismo. Questo non vale se $\kappa = -\infty$: $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ e \mathbb{P}^2 sono due superfici non isomorfe, ma il blow-up in un punto di $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ è birazionale a \mathbb{P}^2 contraendo le due curve corrispondenti alle rette passanti per il punto di blow-up.

3.3 La classificazione di Enriques-Kodaira

Possiamo ora dare una descrizione della classificazione delle superfici, più comunemente chiamata classificazione di Enriques-Kodaira. Brevemente, in questa classificazione le superfici sono distinte prima di tutto in base alla dimensione di Kodaira (in quanto invariante birazionale), e successivamente in base al modello minimo della superficie, o più precisamente in base alla famiglia di superfici a cui appartiene il modello minimo. Kodaira, completando la precedente classificazione di Enriques delle superfici proiettive, ha dimostrato che le superfici complesse possono essere raggruppate in 10 classi che descriviamo brevemente ora.

- $\kappa(X) = -\infty$:
 - *Superfici razionali*: sono le superfici birazionali a \mathbb{P}^2 . Per costruzione sono tutte varietà algebriche;
 - *Superfici rigate*: sono superfici che hanno una fibrazione localmente banale (cioè una mappa su una curva che localmente abbia fibre isomorfe) dove le fibre sono isomorfe a \mathbb{P}^1 . Sono tutte varietà algebriche;

- *Superfici di classe VII*: sono le superfici con $\kappa(X) = -\infty$ e $b_1 = 1$. Non sono mai algebriche; nonostante $\kappa(X) = -\infty$, il modello minimo è unico per questa famiglia di superfici;
- $\kappa(X) = 0$:
 - *Superfici di Enriques*: sono superfici con divisore canonico non banale ma divisore bicanonico banale, cioè $K_X \approx 0, 2K_X \sim 0$. Sono sempre algebriche;
 - *Superfici biellittiche*: sono superfici della forma $(E \times F)/G$ dove E, F sono curve ellittiche e G è un gruppo finito di traslazioni di E che agisce su F in modo che $F/G \cong \mathbb{P}^1$. Sono sempre algebriche;
 - *Superfici K3*: sono superfici con $K_X \sim 0$ e $q = 0$. Non sono necessariamente algebriche;
 - *Superfici di Kodaira*: sono solitamente distinte in due ulteriori classi: le *superfici di Kodaira primarie* cioè superfici con $b_1 = 3$ che hanno una fibrazione olomorfa localmente banale su una curva ellittica con fibre generiche che a loro volta sono curve ellittiche, e le *superfici di Kodaira secondarie* che sono rivestimenti non ramificati di superfici di Kodaira primarie. Non sono mai algebriche;
 - *Tori complessi*: sono il quoziente di \mathbb{C}^2 per un reticolo di dimensione reale 4. Non sono sempre algebrici;
- $\kappa(X) = 1$: l'unico caso è quello delle *superfici ellittiche*, cioè superfici con una applicazione suriettiva su una curva che abbia come fibra generale una curva ellittica (ma non tutte le superfici ellittiche hanno $\kappa(X) = 1$, ad esempio una superficie rigata con curva base ellittica è una superficie ellittica). Non sono sempre algebriche;
- $\kappa(X) = 2$: *superfici di tipo generale*. Come dice il nome, rappresentano la classe più vasta di superfici complesse. Di queste parleremo più nel dettaglio nel prossimo capitolo.

4 | Superfici di tipo generale

Questo capitolo è volto a dare una descrizione di vari aspetti delle superfici di tipo generale. Come anticipato alla fine del capitolo precedente, questa classe di tipo generale è vasta e include molti tipi di superfici diverse. Per tale motivo, è difficile dare una descrizione precisa quanto quella che è nota per le altre classi; di conseguenza, il problema della classificazione delle superfici di tipo generale può essere affrontato da diversi punti di vista. Dato che ci stiamo restringendo ad una particolare classe di superfici, è normale aspettarsi che ci siano dei vincoli su numeri e invarianti delle superfici, oppure che possano valere proprietà più precise. Ad esempio, nel capitolo precedente abbiamo visto che una condizione sulla dimensione di Kodaira si traduce in una condizione sull'intersezione tra il divisore canonico e le curve sulla superficie. In questo capitolo vediamo appunto gli aspetti che caratterizzano il caso delle superfici di tipo generale.

4.1 Condizioni sui numeri di Chern

Per prima cosa, ricordiamo che alcuni numeri che descrivono le superfici sono i seguenti:

- I numeri di Betti $b_i = \text{rk}(H^i(X, \mathbb{Z}))$;
- La caratteristica di Eulero topologica $e(X) = \sum_i (-1)^i b_i$;
- I numeri $h^{i,j} = \dim H^j(\Omega^i)$;
- L'irregolarità $q = h^{0,1}$;
- Il genere geometrico $p_g = h^{0,2}$;
- I plurigeneri $P_m = h^0(mK_X)$;
- La caratteristica di Eulero olomorfa (del fascio delle funzioni olomorfe): $\chi = \sum_i h^{0,i}$;

- I numeri di Chern $c_1^2 = K_X^2$ e $c_2 = e(X)$;

Tra questi, ci concentriamo sui numeri di Chern: in un certo senso che non approfondiamo, c'è una descrizione delle superfici di tipo generale con numeri di Chern fissati, per cui si può cercare di determinare quali coppie di interi possano essere i numeri di Chern di qualche superficie minima. In questa sezione, e brevemente nella prossima, ci concentriamo su questo problema.

Per l'Osservazione 3.1.3, studiare i numeri di Chern di una superficie complessa equivale a studiare K_X^2 ed $e(X)$, o usando il teorema di Noether (Teorema 3.1.14), a studiare K_X^2 e χ . Nel seguito utilizzeremo il primo approccio. I principali vincoli generali sui numeri di Chern sono i seguenti:

Teorema 4.1.1. *Sia X una superficie di tipo generale, allora:*

- (a) $K_X^2 + e(X) \equiv 0 \pmod{12}$;
- (b) $K_X^2 > 0$ ed $e(X) > 0$;
- (c) $K_X^2 \leq 3e(X)$;
- (d) $5K_X^2 - e(X) + 36 \geq 0$ (se K_X^2 è pari);
- (e) $5K_X^2 - e(X) + 30 \geq 0$ (se K_X^2 è dispari);

Di questi vediamo solo alcune dimostrazioni. Il punto (a) è una conseguenza della formula di Noether. Vediamo parte del punto (b):

Dimostrazione di (b) ($K_X^2 > 0$). Sia H una sezione iperpiana di X . Consideriamo la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(nK_X - H) \longrightarrow \mathcal{O}_X(nK_X) \longrightarrow \mathcal{O}_H(nK_X) \longrightarrow 0$$

Dalla definizione di $\kappa(X)$, $h^0(\mathcal{O}_X(nK_X)) = P_n$ ha lo stesso andamento asintotico di n^2 , mentre, per lo stesso motivo, $h^0(\mathcal{O}_X(nK_X))$ cresce al massimo linearmente con n . Dato che la corrispondente successione esatta in coomologia è ancora esatta, abbiamo che nel pezzo

$$0 \longrightarrow h^0(\mathcal{O}_X(nK_X - H)) \longrightarrow h^0(\mathcal{O}_X(nK_X)) \longrightarrow h^0(\mathcal{O}_H(nK_X)) \longrightarrow \dots$$

per n sufficientemente grande la seconda applicazione, per motivi di dimensione, non può essere iniettiva, dunque per qualche n_0 l'immagine della prima è non banale. Segue che $h^0(\mathcal{O}_X(n_0K_X - H))$ non è banale, ovvero esiste un divisore effettivo R tale che $R \sim n_0K_X - H$. Siccome X è minima $K_X \cdot R \geq 0$ (Proposizione 3.2.8), per cui si ha che:

$$n_0^2 K_X^2 = (n_0K_X) \cdot (H + R) \geq (n_0K_X) \cdot H = H^2 + H \cdot R \geq H^2 > 0.$$

□

Per i punti (d) e (e), è utile riformulare le disuguaglianze utilizzando la formula di Noether. In questo modo diventano:

$$\chi \leq \frac{1}{2}K_X^2 + 3 \text{ se } K_X^2 \text{ è pari;}$$

$$\chi \leq \frac{1}{2}K_X^2 + \frac{5}{2} \text{ se } K_X^2 \text{ è dispari.}$$

Sotto questa forma, entrambi i punti seguono direttamente dalla disuguaglianza di Noether:

Proposizione 4.1.2 (Disuguaglianza di Noether). *Sia X una superficie minima di tipo generale. Allora*

$$p_g \leq \frac{1}{2}K_X^2 + 2.$$

Dimostrazione di (d) e (e). Siccome $\chi = 1 - q + p_g$, si ha che

$$\chi \leq 1 + p_g \leq 1 + \frac{1}{2}K_X^2 + 2 = \frac{1}{2}K_X^2 + 3.$$

Nel caso in cui K_X^2 sia dispari, siccome χ è un numero intero, si può rendere più precisa la disuguaglianza arrotondando il secondo membro all'intero inferiore più vicino, e cioè $\frac{1}{2}K_X^2 + \frac{5}{2}$. □

Osservazione 4.1.3. Si può dimostrare che il blow-up in un punto aumenta $e(X)$ di 1 mentre diminuisce K_X^2 di 1. Per questo motivo la condizione $K_X^2 > 0$ vale unicamente per le superfici minime, mentre $e(X) > 0$ vale per tutte le superfici di tipo generale. Con lo stesso ragionamento anche i punti (d) e (e) valgono solo per superfici minime, mentre (c) vale per tutte le superfici.

4.2 Geografia dei numeri di Chern

In questa sezione accenniamo brevemente, senza andare nel dettaglio, alcuni aspetti aggiuntivi del problema dei numeri di Chern introdotto all'inizio della sezione precedente. Come già detto, per le superfici di tipo generale si può cercare di determinare quali coppie ammissibili, cioè che soddisfino i vincoli del teorema Teorema 4.1.1, sono i numeri di Chern di qualche superficie minima. Possiamo rappresentare i vincoli graficamente come in Figura 4.1 (sottintendendo la condizione data dal teorema di Noether). La retta $K_X^2 = 2e(X)$ divide l'insieme delle coppie ammissibili, che indichiamo con D , in due parti D_1 e D_2 :

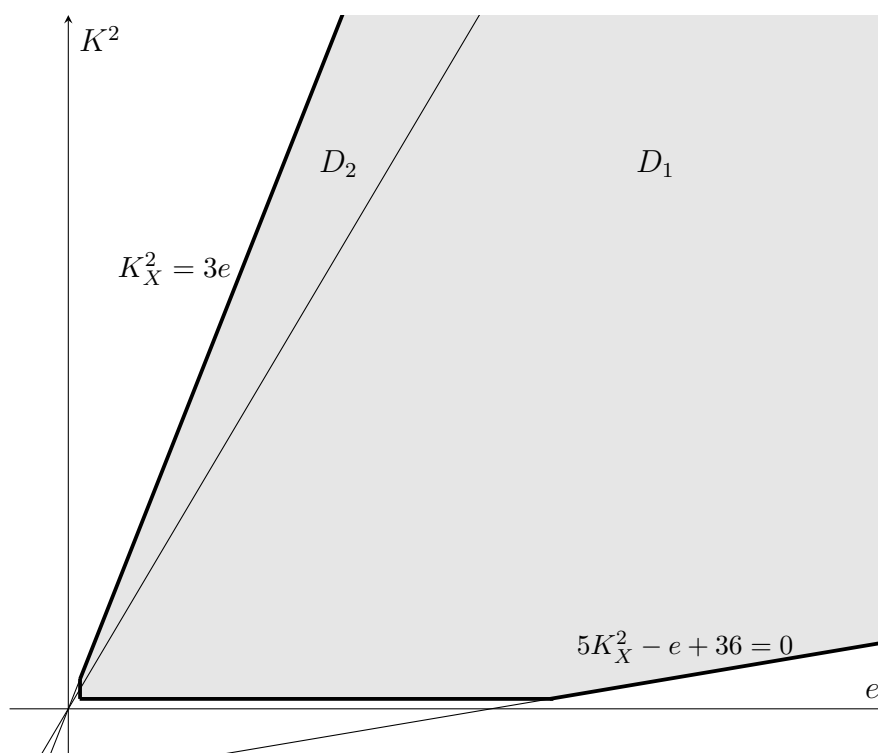


Figura 4.1: Rappresentazione grafica dei vincoli sui numeri di Chern per superfici minime di tipo generale. L'area evidenziata rappresenta le coppie di interi ammissibili. La retta interna, definita da $K_X^2 = 2e(X)$, separa le coppie ammissibili in due sottoinsiemi di particolare interesse.

come vedremo brevemente, per la prima sono noti più risultati o più precisi riguardo i numeri di Chern. Oltre a questo, ci si può anche porre lo stesso problema aggiungendo condizioni sul tipo di superficie corrispondente ai numeri di Chern.

Invece di considerare il problema di determinare tutte le coppie di numeri di Chern, si può studiare il problema più semplice di determinare quali rette contengono tali coppie. In questa direzione, un risultato importante è il seguente:

Teorema 4.2.1. *Sia $(m, n) \in D$. Allora esiste una superficie minima di tipo generale tale che $K_X^2 = n, e(X) = m$, eccetto al massimo per i punti sulle rette di equazione $K_X^2 - 3e(X) + 4k = 0$ con $0 \leq k \leq 347$.*

Si può rendere più preciso il risultato: le rette descritte nel teorema sono tutte parallele alla retta $K_X^2 = 3e(X)$, che definisce il bordo superiore di D ; di conseguenza tutte queste rette intersecano la retta $K_X^2 = 2e(X)$ in qualche punto. Per questo motivo solo un segmento di tali rette è contenuto in D_1 , e cioè

solo un numero limitato di coppie: questo vuol dire che quasi tutte le coppie ammissibili in D_1 sono i numeri di Chern di qualche superficie minima. Al contrario, D_2 potrebbe contenere un numero infinito di eccezioni, ma queste sono limitate alle rette indicate dal teorema.

Legato al rapporto $K_X^2/e(X)$ (che è la pendenza della retta passante per il corrispondente punto) si ha invece:

Teorema 4.2.2. *Sia $q \in [\frac{1}{5}, 3]$ un punto razionale. Allora esiste una superficie di tipo generale che abbia $K_X^2 = n, e(X) = m$ e $n/m = q$. In altre parole, ogni retta passante per l'origine con pendenza razionale $q \in [\frac{1}{5}, 3]$ contiene almeno una coppia ammissibile che dà i numeri di Chern di qualche superficie minima di tipo generale.*

Gli stessi risultati non valgono sempre se si impongono condizioni ulteriori sulle superfici. Se per esempio si richiede che la superficie sia anche semplicemente connessa, si ha un risultato più debole che vale unicamente per D_1 : al di fuori di una parte di D_1 le coppie ammissibili sono numeri di Chern di qualche superficie minima di tipo generale semplicemente connessa:

Teorema 4.2.3. *Esiste una costante $C > 0$ tale che, posto*

$$S = \{(m, n) \in D_1 \mid n \geq 8m - Cm^{2/3}\},$$

per ogni coppia ammissibile $(m, n) \in D_1 \setminus S$, esiste una superficie minima di tipo generale semplicemente connessa tale che $K_X^2 = n, e = m$.

4.3 L'applicazione pluricanonica

Un altro modo di affrontare lo studio delle superfici di tipo generale è tramite le applicazioni pluricanoniche. Per definizione, per qualche n l'applicazione associata a nK ha come immagine una superficie; è quindi naturale cercare di determinare per quali n valga ciò, o addirittura quando sia un isomorfismo, oppure studiare le proprietà dell'applicazione nel caso in cui l'immagine sia una curva.

Prima di arrivare al risultato principale, facciamo alcune osservazioni: per prima cosa, per definizione le superfici minime non hanno (-1) -curve, ma possono avere (-2) -curve, cioè curve con autointersezione -2 e birazionali a \mathbb{P}^1 . Anche queste ultime curve meritano un'analisi specifica: infatti contrarre le (-2) -curve produce una nuova superficie minima, detta *modello canonico* della superficie, che contiene alcune singolarità in corrispondenza delle curve contratte, ma che sono abbastanza trattabili. Questo permette di fattorizzare le applicazioni pluricanoniche della superficie minima X tramite il modello canonico appena descritto. Per questo motivo, introduciamo prima alcuni risultati sulle (-2) -curve. Iniziamo da un risultato dall'enunciato semplice ma di grande utilità:

Teorema 4.3.1 (Teorema dell'indice di Hodge). *Siano D, E due divisori a coefficienti razionali su una superficie algebrica X . Se $D^2 > 0$ e $D \cdot E = 0$, allora $E^2 \leq 0$ e $E^2 = 0$ se e solo se E è omologo a 0 (in omologia a coefficienti razionali).*

Dato che le superfici di tipo generale sono algebriche, possiamo usare questo risultato per il nostro studio.

Inoltre, dal Teorema 4.1.1 (b) si deduce il seguente risultato:

Proposizione 4.3.2. *Sia X una superficie minima di tipo generale, C una curva irriducibile su X . Allora $K_X \cdot C = 0$ se e solo se C è una (-2) -curva.*

Dimostrazione. Dalla formula per il genere (Corollario 3.1.11), se C è una (-2) -curva, si ottiene che $0 = 1 + \frac{1}{2}(K_X \cdot C - 2)$, da cui $K_X \cdot C = 0$. Viceversa, siccome X è una superficie minima abbiamo che $K_X \cdot C \geq 0$, dunque se $K_X \cdot C = 0$ possiamo applicare il teorema precedente per dedurre che $C^2 \leq 0$, e più precisamente $C^2 < 0$ perché una curva su una superficie algebrica non è omologa a 0. Di conseguenza, ancora dalla formula per il genere, si ottiene che $g(C) < 1 + \frac{1}{2}K_X \cdot C = 1$, per cui l'unica possibilità è che $g(C) = 0$ e $C^2 = -2$. \square

A questo punto possiamo vedere che una superficie minima può contenere solo un numero finito di (-2) -curve:

Proposizione 4.3.3. *Sia X una superficie minima di tipo generale. Allora:*

- (a) *Il numero di (-2) -curve su X è finito;*
- (b) *Sul sottospazio di $H^2(X, \mathbb{Q})$ generato dalle (-2) -curve, la forma di intersezione è definita negativa.*

Dimostrazione. Per il primo punto, siano C_1, \dots, C_m le (-2) -curve su X (che identifichiamo con le corrispondenti classi in omologia). Mostriamo che se, in omologia, vale che

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i C_i = \sum_{j=k+1}^m \lambda_j C_j$$

per qualche k , allora tutti i λ_i sono nulli. L'autointersezione del primo membro è anche data da

$$\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i C_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i C_i \right) \cdot \left(\sum_{j=k+1}^m \lambda_j C_j \right) \geq 0$$

in quanto le curve C_i sono distinte e quindi non hanno componenti comuni. Ma allora, siccome per la proposizione precedente

$$K_X \cdot \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i C_i \right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i K_X \cdot C_i = 0,$$

dal teorema dell'indice di Hodge e dal calcolo precedente segue che necessariamente

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i C_i = 0$$

in omologia razionale, ovvero tutti i λ_i sono nulli. Per il secondo punto, sia $C = \sum_{i=1}^k \lambda_i C_i$ un elemento non banale dell'omologia razionale generato dalle (-2) -curve. Siccome $K_X^2 > 0$ e $K_X \cdot C = 0$, per il teorema dell'indice di Hodge $C^2 < 0$ in quanto C non è banale, dunque la forma è definita negativa. \square

Sotto certe condizioni, il secondo punto garantisce che l'unione delle (-2) -curve è eccezionale:

Lemma 4.3.4 (Criterio di Grauert). *Una curva ridotta, compatta e connessa con componenti irriducibili C_i è eccezionale se e solo se la matrice di intersezione data dai $(C_i \cdot C_j)$ è definita negativa.*

Come detto all'inizio di questa sezione, possiamo contrarre le (-2) -curve di una superficie minima X (utilizzando il fatto che siano un numero finito): per il criterio di Grauert, le componenti connesse dell'unione delle (-2) -curve sono eccezionali e quindi il risultato di un blow-up, più precisamente il blow-up di certe singolarità. Indichiamo con X_{can} il modello canonico di X , e siano $\pi: X \rightarrow X_{can}$ la mappa data dalla contrazione delle (-2) -curve, φ_{nK} le applicazioni pluricanoniche. Queste ultime si possono fattorizzare come $\varphi_{nK} = \psi_n \circ \pi$, dove $\psi_n: X_{can} \rightarrow \mathbb{P}^{P_n-1}$.

Possiamo ora enunciare il risultato fondamentale per le applicazioni pluricanoniche:

Teorema 4.3.5 (Teorema di Bombieri). *Sia X una superficie minima di tipo generale. Con le notazioni precedenti:*

- (i) se $n \geq 5$, ψ_n è un isomorfismo;
- (ii) ψ_4 è un isomorfismo quando $K_X^2 \geq 2$;
- (iii) ψ_3 è un isomorfismo quando $K_X^2 \geq 3$, ed un morfismo quando $K_X^2 \geq 2$;
- (iv) ψ_2 è un morfismo quando $K_X^2 \geq 5$, mentre per $K_X^2 \geq 10$ è birazionale eccetto nel caso in cui X ha un fascio di curve di genere 2.

Alcune precisazioni da fare: i casi $n = 3$ e $n = 4$ sono stretti, in quanto è possibile trovare dei controesempi ad entrambi indebolendo le ipotesi. In ogni caso è possibile dare una caratterizzazione più precisa dei casi del teorema, che vedremo più avanti. Oltre a questo, si nota nel Teorema la mancanza del caso $n = 1$; su questo caso i risultati principali sono dovuti a Beauville, e ne parleremo successivamente.

Iniziamo vedendo che per $n = 3$ e $n = 4$ le condizioni sono strette:

Proposizione 4.3.6. *Sia X una superficie minima di tipo generale con $K_X^2 = 1, p_g = 2$. Allora φ_{3K} e φ_{4K} non sono birazionali.*

Dimostrazione. Iniziamo da φ_{3K} . Si può dimostrare che in questo caso si può scrivere $|K_X| = |C| + V$ dove V è la parte fissa del sistema, e $\dim |C| = p_g - 1 = 1$. Per ipotesi

$$K_X^2 = K_X \cdot (C + V) = 1$$

e siccome K_X è nef, $K_X \cdot C \geq 0, K_X \cdot V \geq 0$, dove l'uguaglianza vale solo se C o V è composto da (-2) -curve. L'unica possibilità quindi è che $K_X \cdot C = 1, K_X \cdot V = 0$, e la curva generale di $|C|$ deve essere irriducibile. Siccome $K_X^2 = 1 = K_X \cdot C$, abbiamo che $K_X \cdot (K_X - C) = 0$, che per il teorema dell'indice di Hodge implica che $(K_X - C)^2 \leq 0$, e quindi $C^2 \leq 1$. Ma $C^2 \geq 0$ perché è mobile, e $K_X \cdot C \equiv C^2 \pmod{2}$ per la formula del genere, per cui si deve avere per forza che $C^2 = 1$. Ma allora da $K_X^2 = (C + V)^2 = 1$ si deduce che $2C \cdot V + V^2 = 0$ e siccome $C \cdot V \geq 0, V^2 = 0$. Siccome V è composto da (-2) -curve, per il Lemma 4.3.4 la forma di intersezione è definita negativa, e quindi $V^2 = 0$ soltanto quando $V = 0$. Dunque $|K_X|$ è un sistema senza parte fissa e con un punto base (perché $K_X \cdot C = 1$ e $\dim |C| = 1$). La curva generale di $|K_X|$ è liscia irriducibile, e per la formula del genere si ottiene

$$g(C) = 1 + \frac{1}{2}(C^2 + K_X \cdot C) = 2$$

e quindi per la Proposizione 2.2.11 è una curva iperellittica. In tale caso, né l'applicazione canonica né quella bicanonica sono birazionali, ma danno un rivestimento doppio sull'immagine. La restrizione di $4K_X$ a C dà il divisore $2K_C$, che per quanto appena detto non è birazionale, e quindi φ_{4K} non è birazionale. Per il caso $n = 3$, il sistema $|3K_X|$ non ha componenti fisse per quanto appena visto, e $p_g(X) \neq 0$ quindi esistono 2-forme non nulle. Se consideriamo le sezioni di $4K_X$ della forma $\omega \otimes \gamma$ dove ω è una sezione di $3K_X$ e γ è una 2-forma fissata, l'applicazione associata ha come immagine la proiezione dell'immagine di φ_{4K} ; siccome quest'ultima è un rivestimento doppio, φ_{3K} non può essere birazionale. \square

Questo mostra un controesempio per $n = 3$ e $n = 4$ quando $K_X^2 = 1$.

Anche il caso $K_X^2 = 2, p_g = 3$ è interessante: nonostante il seguente risultato, l'applicazione φ_{3K} non è birazionale.

Proposizione 4.3.7. *Sia X una superficie minima di tipo generale con $K_X^2 = 2, p_g = 3$. Allora φ_{nK} è un morfismo per ogni $n \geq 1$, e φ_{3K} è un morfismo di grado 2.*

Gli esempi presentati sono gli unici casi in cui φ_{nK} non è birazionale per $n \geq 3$:

Proposizione 4.3.8. *Sia X una superficie minima di tipo generale, $n \geq 3$. Allora φ_{nK} è birazionale eccetto nei seguenti casi:*

- (i) $n = 4, K_X^2 = 1, p_g = 2$;
- (ii) $n = 3, K_X^2 = 1, p_g = 2$ oppure $K_X^2 = 2, p_g = 3$.

Ci sono ulteriori risultati più precisi anche per il caso $n = 2$. Insieme ai precedenti danno il seguente:

Teorema 4.3.9. *Sia X una superficie minima di tipo generale. Nelle notazioni del Teorema 4.3.5 si ha:*

- (i) se $n \geq 5$, ψ_n è sempre un isomorfismo;
- (ii) ψ_4 è sempre un morfismo, un isomorfismo quando $K_X^2 \geq 2$, e sempre birazionale eccetto nel caso $K_X^2 = 1, p_g = 2$;
- (iii) ψ_3 è un morfismo quando $K_X^2 \geq 2$, un isomorfismo quando $K_X^2 \geq 3$, e sempre birazionale eccetto nei casi $K_X^2 = 1, p_g = 2$ e $K_X^2 = 2, p_g = 3$;
- (iv) ψ_2 è un morfismo quando $K_X^2 \geq 5$, oppure se $p_g \geq 1$ eccetto al massimo nel caso in cui $p_g = q = 1$ e $K_X^2 = 3, 4$; è un isomorfismo se $p_g \geq 6, K_X^2 \geq 10$ eccetto il caso in cui ci sono curve C con $C^2 = 0, C \cdot K = 2$, oppure con $C^2 = -1$ e $K \cdot C = 1$; è birazionale per $K_X^2 \geq 10$ eccetto nel caso in cui X ha un fascio di curve di genere 2.

Osservazione 4.3.10. Il punto più importante del teorema è che per quasi tutte le superfici di tipo generale, le applicazioni pluricanoniche sono isomorfismi (o anche, più debolmente, morfismi o birazionali): in effetti si può dimostrare che l'insieme delle superfici minime di tipo generale con K_X^2 (o equivalentemente p_g o χ) limitato da qualche intero N è finito. Di conseguenza, le superfici per cui non valgono le condizioni dei vari punti del teorema sono un numero finito. Vedremo che, per lo stesso motivo, i risultati sull'applicazione canonica valgono quasi sempre.

4.4 L'applicazione canonica

Il teorema di Bombieri non dà informazioni riguardo l'applicazione canonica. In questa direzione i principali risultati sono invece dovuti a Beauville, e di questi ci occupiamo in questa sezione.

Va prima di tutto notato che l'immagine dell'applicazione canonica per le superfici di tipo generale può essere una curva o una superficie. Di conseguenza si possono studiare le proprietà delle superfici separatamente nei due casi.

Iniziamo dal caso in cui l'immagine sia una curva: diciamo allora che il sistema canonico $|K_X|$ è *composto con un fascio*. In questo caso l'applicazione canonica $\varphi_K: X \rightarrow C$ si fattorizza come $\varphi_K = \epsilon \circ p$, con $p: X \rightarrow B$, $\epsilon: B \rightarrow C$ dove B è una curva liscia, e le fibre generiche di p sono irriducibili. Il primo risultato è il seguente:

Proposizione 4.4.1. *Sia X una superficie di tipo generale il cui sistema canonico è composto con un fascio di curve di genere g . Se $\chi \geq 21$, allora $2 \leq g \leq 5$ e il fascio non ha punti base.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia minima. Si può dimostrare che $K_X \sim_{\text{hom}} Z + aF$ (ovvero hanno stessa classe di coomologia) dove Z è la parte fissa del sistema canonico, F è una curva liscia irriducibile con $F^2 \geq 0$, e $h^0(K_X) = p_g \leq a + 1$. Utilizzando il Teorema 4.1.1 (c) insieme al teorema di Noether si ha che $K_X^2 \leq 9\chi$, da cui, usando il fatto che X è minima:

$$9\chi \geq K_X^2 = K_X \cdot (Z + aF) \geq aK \cdot F \geq (p_g - 1)K \cdot F \geq (\chi - 2)K \cdot F$$

da cui

$$K \cdot F \leq \frac{9\chi}{(\chi - 2)} < 10$$

quando $\chi \geq 21$. Allora si ha anche che

$$aF^2 \leq (Z + aF) \cdot F < 10.$$

Ma abbiamo visto che $a \geq \chi - 2 \geq 19$, e siccome $F^2 \geq 0$ necessariamente si ha che $F^2 = 0$. La formula del genere (Corollario 3.1.11) dà

$$g(F) = 1 + \frac{1}{2}(F^2 + K_X \cdot F) = 1 + \frac{1}{2}K \cdot F \leq \frac{11}{2}$$

e quindi $g(F) \leq 5$. Il risultato $g(F) \geq 2$ invece segue dal fatto che, su una superficie algebrica, se $\kappa(X) = 2$ non esistono fasci di divisori effettivi il cui elemento generale è razionale o ellittico. \square

Osservazione 4.4.2. Dalla dimostrazione si vede che l'ipotesi $\chi \geq 21$ è scelta apposta affinché, tramite puri calcoli algebrici, si abbia che $K_X \cdot F < 10$. Di conseguenza è possibile indebolire la condizione su χ per ottenere una stima più grossolana su $K_X \cdot F$ e quindi su g . Infatti gli stessi calcoli mostrano che, ad esempio, quando $\chi \geq 12$ si ha che $g \leq 6$, e così via. In ogni caso non è importante quale sia la stima su g , quanto il fatto che valga per quasi tutte le superfici di tipo generale (Osservazione 4.3.10).

Osservazione 4.4.3. Beauville costruisce diverse famiglie illimitate di superfici in cui il sistema canonico è composto con un fascio di curve di genere 2 o 3. Questo vuol dire che il risultato che $g \geq 2$ non può essere reso più forte senza permettere un numero infinito di superfici che non soddisfino le ipotesi della proposizione (e cioè, senza indebolire tali ipotesi).

Consideriamo ora il caso in cui l'immagine dell'applicazione canonica sia una superficie Σ (non necessariamente liscia). Σ ammette una desingularizzazione S , cioè una superficie liscia S con una applicazione birazionale $\eta: S \rightarrow \Sigma$. Per questo motivo esiste un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \xrightarrow{\epsilon} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \varphi_{K_X} \\ S & \xrightarrow{\eta} & \Sigma \end{array}$$

In generale, se X è una superficie di tipo generale, non è detto che anche Σ lo sia. Questo è il punto del teorema seguente:

Teorema 4.4.4. *Sia X una superficie di tipo generale la cui immagine Σ tramite l'applicazione canonica è una superficie. Allora o $p_g = 0$, oppure Σ è una superficie di tipo generale con $p_g(\Sigma) = p_g(X)$, immersa in \mathbb{P}^{p_g-1} dall'applicazione $\varphi_{K_\Sigma} \circ \eta^{-1}$.*

Prima di vedere la dimostrazione, introduciamo un lemma che ci servirà:

Lemma 4.4.5. *Sia $\pi: X \rightarrow S$ un morfismo suriettivo di superfici lisce. Tra le curve irriducibili di X contenute nell'insieme dei punti di ramificazione di π , indichiamo con E_i ($i = 1, \dots, p$) le curve contratte da π , e con C_j ($j = 1, \dots, q$) quelle la cui immagine è ancora una curva Γ_j , e poniamo e_j il coefficiente di C_j nel divisore $\pi^*\Gamma_j$. Sia ω una 2-forma olomorfa non nulla su S , allora:*

$$\operatorname{div}(\pi^*\omega) = \pi^*(\operatorname{div} \omega) + \sum_{j=1}^q (e_j - 1)C_j + \sum_{i=1}^p r_i E_i$$

dove r_i sono numeri naturali.

Dimostrazione del Teorema. Poniamo $p = p_g(X)$. Supponiamo che esista una 2-forma olomorfa non nulla ω su S , e cioè che $h^0(K_S) = p_g(S) \neq 0$. Dal lemma precedente si ha che

$$\operatorname{div}(\epsilon^*(\omega_X)) = \epsilon^*(K_X) + \sum r_i E_i$$

per qualche 2-forma ω_X su X . Se H_Σ è una sezione iperpiana di Σ , allora $K_X = \varphi_K^*(H_\Sigma) + F$ dove F è la parte fissa di K_X , perciò $\epsilon^*(K_X) = \epsilon^*\varphi_K^*(H_\Sigma) + \epsilon^*(F)$. Dalla commutatività del diagramma precedente si ha che

$$\epsilon^*\varphi_K^*(H_\Sigma) = \pi^*\eta^*(H_\Sigma)$$

e che

$$\epsilon^*(\omega_X) = \epsilon^*\varphi_K^*(\omega_\Sigma) = \pi^*\eta^*(\omega_\Sigma)$$

per un'opportuna 2-forma ω_Σ su Σ . Posto $H = \eta^*(H_\Sigma)$ e $\omega = \eta^*(\omega_\Sigma)$, mettendo insieme questi risultati si ottiene che

$$\operatorname{div}(\pi^*(\omega_X)) = \pi^*(H) + Z$$

dove Z è la parte fissa del sistema $|K_{\hat{X}}|$.

Sia $K_0 = \operatorname{div} \omega$, Γ una curva irriducibile su S , C una curva irriducibile di X tale che $\pi(C) = \Gamma$ (identificando C con la sua preimmagine tramite ϵ), e sia e il suo coefficiente nel divisore $\pi^*\Gamma$. Siano poi h il coefficiente di Γ nel divisore H , k il coefficiente di Γ nel divisore K_0 . Andando a confrontare i coefficienti di C nell'identità del lemma, si ottiene che

$$he \leq ke + e - 1$$

da cui si deduce che $h \leq k$. Di conseguenza le curve di H compaiono in K_0 con coefficiente almeno uguale, e quindi possiamo scrivere $K_0 = H + E$ dove E è un divisore effettivo. Abbiamo quindi che

$$p = h^0(H) \leq h^0(K_0) = p_g(S);$$

oltre a questo, vale che

$$p_g(S) \leq p$$

perché $\operatorname{div}(\pi^*(\omega_X)) = \pi^*(H) + Z$ dove Z è la parte fissa del sistema canonico.

Dunque $p_g(X) = p_g(\Sigma)$ e siamo nel secondo caso dell'enunciato. □

Osservazione 4.4.6. Il caso $p_g(X) = 0$ non è limitato a superfici di tipo generale: ci sono superfici di tipo generale con questa proprietà (per esempio quelle con $p_g = q = 0$, che sono un caso estremo del Teorema 4.1.1 e quindi sono state studiate approfonditamente), ma anche superfici appartenenti ad altre classi come le superfici rigate. Nonostante questo, il caso $p_g = 0$ è molto limitato, soprattutto per le altre classi di superfici. Questo vuol dire che "solitamente" si è nel caso in cui $p_g(\Sigma) = p_g(X)$ e la superficie è di tipo generale.

Del caso in cui l'immagine sia una superficie possiamo anche studiare il grado dell'applicazione canonica.

Proposizione 4.4.7. *Sia X una superficie di tipo generale tale che $\varphi_K(X)$ sia una superficie Σ . Nei due casi della proposizione precedente valgono i due seguenti risultati:*

- (a) $p_g(\Sigma) = 0$: se $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 31$, allora $\deg \varphi_K \leq 9$; nel caso in cui Σ non sia rigata, si ha più precisamente che $\deg \varphi_K \leq 4$;
- (b) $p_g(\Sigma) = p_g(X)$: se $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 14$, si ha $\deg \varphi_K \leq 3$.

La dimostrazione usa due lemmi:

Lemma 4.4.8. *Sia X una superficie minima di tipo generale, sia M la parte mobile del sistema canonico. In generale vale che $K_X^2 \geq M^2$; se inoltre l'immagine dell'applicazione canonica è una superficie si ha anche che*

$$K_X^2 \geq M^2 \geq (\deg \varphi_K)(\deg \Sigma).$$

Lemma 4.4.9. *Sia $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ una superficie irriducibile non contenuta in un iperpiano. Allora $\deg \Sigma \geq n - 1$, e $\deg \Sigma \geq 2n - 2$ se Σ non è rigata.*

Dimostrazione della Proposizione. Sia d il grado di φ_K . Dai lemmi precedenti e il Teorema 4.1.1 si ha che

$$9\chi(\mathcal{O}_X) \geq K_X^2 \geq d \deg(\Sigma) \geq d(p_g(X) - 2) \geq d(\chi(\mathcal{O}_X) - 3)$$

da cui si deduce che

$$d \leq \frac{9\chi(\mathcal{O}_X)}{\chi(\mathcal{O}_X) - 3} < 10$$

quando $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 31$.

Nel caso in cui Σ sia rigata, per il lemma si ha che $\deg(\Sigma) \geq 2(p_g(X) - 2) \geq 2(\chi(\mathcal{O}_X) - 3)$ da cui

$$d \leq \frac{9\chi(\mathcal{O}_X)}{2(\chi(\mathcal{O}_X) - 3)} < 5$$

quando $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 31$.

Nel secondo caso, si può dimostrare (come vedremo dopo) che $\deg \Sigma \geq 3p_g(\Sigma) - 7$, da cui si deduce procedendo come prima

$$d \leq \frac{9\chi(\mathcal{O}_X)}{3\chi(\mathcal{O}_X) - 10} < 4$$

quando $\chi(\mathcal{O}_X) \geq 14$. □

Osservazione 4.4.10. Analogamente a quanto detto nell'Osservazione 4.4.3, si possono indebolire le ipotesi (indebolendo la condizione su χ) per considerare un numero maggiore di superfici, ma l'importante è che il numero di superfici per cui non valgono le ipotesi rimanga finito. Al contrario si possono rafforzare le ipotesi per avere risultati più precisi: ad esempio nel caso in cui $q(X) \geq 4$ si ha che $p_g(X) \geq \chi + 3$, quindi con lo stesso procedimento si ottiene

$$d \leq \frac{9\chi(\mathcal{O}_X)}{\chi(\mathcal{O}_X) + 1} < 9$$

nel primo caso, e

$$d \leq \frac{9\chi(\mathcal{O}_X)}{3\chi(\mathcal{O}_X) + 2} < 3$$

nel secondo.

Vediamo ora che l'applicazione canonica, sotto certe ipotesi, dà una caratterizzazione molto precisa delle superfici minime di tipo generale.

Teorema 4.4.11. *Sia X una superficie minima di tipo generale che soddisfi $K_X^2 < 3p_g - 7$. Allora l'applicazione canonica di X è un'applicazione razionale di grado 2 su una superficie rigata.*

Utilizzeremo i due seguenti lemmi:

Lemma 4.4.12. *Sia C una curva liscia. Allora tutti i divisori D su C tali che $0 \leq \deg D \leq g(C) - 1$ soddisfano una delle proprietà seguenti:*

(i) $h^0(D) \leq \frac{1}{3}(\deg D + 4);$

(ii) *esiste una curva liscia Γ , un rivestimento doppio ramificato $\pi: C \rightarrow \Gamma$ e un divisore Δ su Γ tale che $|D| = D_f + \pi^*|\Delta|$, dove D_f è la parte fissa di $|D|$. In questo caso si ha $\deg \Delta > 2g(\Gamma) - 2$ e $h^0(D) \leq \frac{1}{2} \deg D + 1 - g(\Gamma)$.*

Lemma 4.4.13. *Sia X una superficie minima di tipo generale il cui sistema canonico è composto con un fascio. Allora si ha $K_X^2 \geq 3p_g - 6$.*

Dimostrazione del Teorema. Poniamo $p = p_g(X)$. Dato che per ipotesi $K_X^2 < 3p - 7$, il sistema canonico non è composto con un fascio e quindi l'immagine dell'applicazione canonica è necessariamente una superficie $\Sigma \subset \mathbb{P}^{p-1}$. Posto $d = \deg \varphi_K$, dai Lemma 4.4.8 e Lemma 4.4.9 si ha che

$$3p - 7 > K_X^2 \geq d \deg \Sigma \geq d(p - 2);$$

siccome $K_X^2 > 0$ anche $3p - 7 > 0$, quindi $p \geq 3$ e la disuguaglianza precedente dà $d \leq 2$. Se fosse $d = 2$ e Σ non fosse rigata, si avrebbe (ancora dal Lemma 4.4.9)

che $3p - 7 > 4(p - 2)$, che è impossibile. Dunque rimangono due casi: o $d = 2$ e Σ è rigata, oppure $d = 1$ e quindi φ_K è birazionale. Vediamo che il secondo caso non si può verificare: supponiamo per assurdo che lo sia. Sia $\epsilon: \hat{X} \rightarrow X$ l'applicazione tale che $\varphi_K \circ \epsilon$ sia un morfismo (come nel Teorema 3.2.1), e sia $|\hat{M}|$ il sistema lineare su \hat{X} associato a tale morfismo. Allora si ha $K_{\hat{X}} \sim Z + \hat{M}$ dove Z è la parte fissa del sistema $|K_{\hat{X}}|$, e la curva generica C del sistema $|\hat{M}|$ è liscia. Sia D la restrizione di \hat{M} alla curva C . La formula di aggiunta (Proposizione 3.1.13) dà

$$K_C \sim (Z + 2\hat{M})|_C.$$

Passando ai gradi, si ottiene

$$2g(C) - 2 = C \cdot (Z + 2\hat{M}) = C \cdot Z + 2 \deg D \geq 2 \deg D,$$

da cui $\deg D \leq g(C) - 1$, e φ_D è birazionale. Di conseguenza siamo nel primo caso del lemma Lemma 4.4.12 e quindi vale che

$$h^0(D) \leq \frac{1}{3}(\hat{M}^2 + 4).$$

D'altra parte si ha la successione esatta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\hat{X}}(\hat{M}) \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow 0$$

da cui si deduce che

$$h^0(\hat{M}) = h^0(\mathcal{O}_{\hat{X}}) + h^0(D) \leq 1 + h^0(D)$$

e quindi

$$p = h^0(\hat{M}) \leq \frac{1}{3}(\hat{M}^2 + 7) = \frac{1}{3}(\deg \varphi_K + 7) \leq \frac{1}{3}(K_X^2 + 7)$$

da cui si ottiene un assurdo con le ipotesi del teorema. Dunque $d = 2$ e Σ è una superficie rigata. \square

Corollario 4.4.14. *Se φ_K è birazionale, allora $\deg \varphi_K(X) \geq 3p_g - 7$.*

Osservazione 4.4.15. Nel caso in cui K_X abbia punti base, l'applicazione canonica è solo razionale. Però, usando il Teorema 3.2.1, l'applicazione canonica si estende ad un morfismo $\hat{X} \rightarrow \mathbb{P}^{p_g-1}$. In altre parole, questa estensione dà una descrizione di \hat{X} come rivestimento doppio ramificato di una superficie rigata.

Bibliografia

- [1] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, 2004.
- [2] I.C. Bauer, F. Catanese, R. Pignatelli, Complex surfaces of general type: some recent progress, in F. Catanese, H. Esnault, A. Huckleberry, K. Hulek, T. Peternell (Eds.), *Global Aspects of Complex Geometry*, pp. 1-58, Springer-Verlag, 2006.
- [3] A. Beauville, L'application canonique pour les surfaces de type général, *Invent Math* 55, 121-140, 1979.
- [4] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press, 1996.
- [5] R. Bott, L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, 1982.
- [6] F. Catanese, Canonical rings and "special" surfaces of general type, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 46.1, pp. 175-194, 1985.
- [7] V.I. Danilov, I. Shafarevich, V.V. Shokurov, *Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, 1994.
- [8] V.I. Danilov, V.A. Iskovskikh, I. Shafarevich, *Algebraic Geometry II*, Springer-Verlag, 1996.
- [9] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc., 1994.
- [10] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [11] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces*, American Mathematical Society, 1995.
- [12] I. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry I*, Springer-Verlag, 1994.