Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

TEOREMA DI RETTIFICABILITA' DI DE GIORGI

Tesi di Laurea in Calcolo delle Variazioni

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Bruno Franchi

Correlatrice:
Chiar.ma Prof.
Annalisa Baldi

Presentata da:
Stefano Luneia

Sessione autunnale
Anno Accademico 2019-2020

Indice

Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è quello di presentare il Teorema di Rettificabilità di De Giorgi per poi dare una condizione necessaria e sufficiente affinché sussista una formula di Gauss-Green per insiemi di Borel E.
Tali risultati sono stati provati da Ennio De giorgi in due suoi celebri lavori "*Su una teoria generale della misura* $(r-1)$*-dimensionale in uno spazio a r dimensioni*" [2] e "*Nuovi teoremi relativi alle misure* $(r-1)$*-dimensionali in uno spazio a r dimensioni*" [3], pubblicati nel 1954 e nel 1955. La nostra trattazione seguirà da vicino le impostazioni di Lawrence C. Evans e Ronald F. Gariepy in "*Measure Theory and Fine Properties of Function*" e di Enrico Giusti in "*Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*". Seguendo dunque questi autori introduciamo il concetto di funzioni BV (dall'inglese Bounded Variation), funzioni le cui derivate prime deboli sono misure di Radon, ovvero misure di Borel regolari finite sui compatti. Da ciò discende la nozione di insieme di perimetro finito E, ovvero un insieme la cui funzione indicatrice χ_E è una funzione BV.

Nello specifico, nel primo capitolo vengono date le definizioni di funzioni BV e insiemi di perimetro finito, nelle loro versioni globali e locali. Successivamente vengono enunciati risultati di densità e di compattezza per lo spazio delle funzioni BV e un teorema di semicontinuità inferiore della misura variazione. Infine, verrà enunciata una formula di Coarea per le funzioni BV e le disuguaglianze isoperimetriche per gli insiemi di perimetro finito.

Nel secondo capitolo definiremo la frontiera ridotta di un insieme di perimetro localmente finito. Come conseguenza immediata di tale definizione otterremo che la misura perimetro rispetto ad E, $\|\partial E\|$, è concentrata sulla frontiera ridotta. Dopo aver discusso alcune proprietà fondamentali della frontiera ridotta, studieremo il blow-up di tale insieme. Infine vedremo come il concetto di frontiera ridotta permetterà di caratterizzare completamente la misura perimetro di E: dimostreremo infatti che "la frontiera ridotta è rettificabile", ovvero, a meno di un insieme trascurabile per la misura perimetro $\|\partial E\|$, possiamo scrivere la frontiera ridotta come un'unione numerabile di compatti contenuti in ipersuperfici di classe C^1; e non meno importante che la misura perimetro è la misura di Hausdorff $(n-1)$-dimensionale concentrata sulla frontiera ridotta. Concluderemo l'elaborato con la dimostrazione di una formulazione generalizzata del Teorema di Guass-Green valido per gli insiemi di perimetro localmente finito.

Capitolo 1

Funzioni BV e Insiemi di Perimetro Finito

1.1 Definizioni e Teorema di Struttura

Per tutto questo capitolo U denoterà un insieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

Definizione 1.1. Una funzione $f \in L^1(U)$ ha *variazione limitata in* U se

$$\sup\left\{\int_U f \mathrm{div}\varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \in C^1_{\mathrm{comp}}(U, \mathbb{R}^n), \;\; |\varphi| \leq 1\right\} < +\infty$$

e indichiamo con $BV(U)$ lo spazio delle funzioni che hanno variazione limitata.

Definizione 1.2. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile. Diciamo che E ha *perimetro finito* in U se $\chi_E \in BV(U)$.

Diamo ora le versioni locali delle precedenti definizioni:

Definizione 1.3. Una funzione $f \in L^1(U)$ ha *variazione localmente finita in* U se per ogni $V \subset\subset U$ (ovvero $V \subset \overline{V} \subset U$ e $\overline{V}$ compatto)

$$\sup\left\{\int_U f \mathrm{div}\varphi \, dx \;\middle|\; \varphi \in C^1_{\mathrm{comp}}(V, \mathbb{R}^n), \;\; |\varphi| \leq 1\right\} < +\infty$$

e analogamente denotiamo questo spazio di funzioni con $BV_{\mathrm{loc}}(U)$

Definizione 1.4. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{L}^n$-misurabile. Diciamo che E ha *perimetro localmente finito* in U se $\chi_E \in BV_{\mathrm{loc}}(U)$.

Enunciamo ora un risultato che caratterizza questi spazi di funzioni:

Teorema 1.5 (Teorema di Struttura per funzioni BV_{loc})**.** Sia $f \in BV_{\text{loc}}$. Allora esiste una misura di radon μ su U e una funzione μ-misurabile $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ tale che:

i) $|\sigma(x)| = 1 \quad \mu$-quasi ovunque

ii) $\int_U f \text{div}\varphi \, dx = -\int_U \varphi \cdot \sigma \, d\mu \quad \forall \varphi \in C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n)$

Osservazione 1.6. Se prendiamo $\varphi = (\varphi, 0, ..., 0)$ con $\varphi \in \mathscr{D}(U)$ spazio delle funzioni test su U, otteniamo che

$$\int_U f \frac{\delta\varphi}{\delta x_1} \, dx = -\int_U \varphi\sigma_1 \, d\mu$$

dove il termine di sinistra è la derivata della distribuzione f rispetto a x_1 applicata a φ (portando il segno meno a sinistra), mentre il termine a destra è la distribuzione $\sigma_1\mu$ applicata a φ. Siccome però $|\sigma(x)| = 1$ e σ è μ-misurabile, $\sigma_1\mu$ è ancora una misura di Radon. In definitiva leggendo il teorema di struttura in termini di distribuzioni otteniamo: "le derivate parziali deboli di una funzione BV sono misure di Radon".

Dimostrazione. Definiamo il funzionale lineare

$$L : C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

con:

$$L(\varphi) = -\int_U f \text{div}\varphi \, dx$$

per $\varphi \in C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n)$. Siccome $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, per definizione abbiamo che

$$\sup\{L(\varphi) | \varphi \in C^1_{\text{comp}}(V, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\} =: C(V) < +\infty$$

per ogni $V \subset\subset U$. Inoltre

$$\left| \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{L^\infty}} \right| \leq 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{\|\varphi\|_{L^\infty}} \in C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n)$$

$$\Rightarrow L\left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|_{L^\infty}}\right) \leq C(V) \Rightarrow L(\varphi) \leq C(V)\|\varphi\|_{L^\infty}$$

con $\|\varphi\|_{L^\infty} \leq +\infty$. Pertanto il funzionale è continuo. Rimane ora da dimostrare, che fissato un compatto K e un aperto V, con $V \subset\subset U$, possiamo scegliere una successione $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $\varphi \in C^0_{\text{comp}}(U, K)$ con $supp\varphi \subset K$ tale che $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ uniformemente in V. Possiamo prendere una successione del genere perchè possiamo sempre mollificare la $\varphi \in C^0_{\text{comp}} \subset L^1_{\text{loc}}$, quindi

$\varphi_\varepsilon * \varphi \in C^\infty_{\text{comp}}$ ed essendo φ a supporto compatto abbiamo che $\varphi_\varepsilon \longrightarrow \varphi$ uniformemente in K.
Definiamo dunque

$$\widetilde{L}(\varphi) := \lim_{k \longrightarrow +\infty} L(\varphi_k)$$

questo limite esiste e non dipende dalla successione: sia infatti $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\psi_k \longrightarrow \varphi$ uniformemente in V. Allora:

$$\left|\int_U (f\text{div}\varphi_k - f\text{div}\psi_k)\ dx\right| \leq \left|\int_U f|\text{div}\varphi_k - \text{div}\psi_k|\ dx\right| =$$

$$= \left|\int_U f|\text{div}(\varphi_k - \psi_k)|\ dx\right| \leq C(V)\|\varphi_k - \psi_k\|_{L^\infty} \leq$$

$$\leq C(V)(\|\varphi_k - \varphi\|) + (\|\varphi - \psi_k\|) \overset{\text{unif. in } K}{\longrightarrow} 0$$

Abbiamo quindi che L si estende in modo unico al funzionale lineare

$$\widetilde{L}(\varphi) : C^0_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

e vale che:

$$\sup\left\{\widetilde{L}(\varphi)\middle|\varphi \in C^0_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \text{ e } \text{sup}\varphi \subset K\right\} < \infty$$

Sotto queste ipotesi vale perciò il teorema di rappresentazione di Riesz che conclude la prova. □

Introduciamo ora alcune notazioni che derivano dal teorema di struttura.

1. Se $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, scriviamo $\|Df\|$ al posto di μ e conseguentemente $[Df] := \|Df\|\llcorner\sigma$, dove σ è la densità rispetto alla misura μ. Pertanto, riscrivendo il teorema di struttura abbiamo che per ogni $\varphi \in C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n)$,

$$\int_U f\text{div}\varphi\ dx = -\int_U \varphi \cdot \sigma\ d\|Df\| = -\int_U \varphi \cdot d[Df]$$

2. Se $f = \chi_E$, scriviamo $\|\partial E\|$ per μ e $\nu_E := -\sigma$, quindi il teorema può essere riscritto nel seguente modo:

$$\forall\varphi \in C^1_{\text{comp}}(U, \mathbb{R}^n), \int_E \text{div}\varphi\ dx = \int_U \varphi \cdot \nu_E\ d\|\partial E\|$$

   Questa scrittura ricorda il teorema della divergenza e in effetti si riconduce a questo nel caso in cui l'insieme E sia regolare, ovvero E con frontiera C^∞ e $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K) < \infty$ per ogni $K \subset U$ compatto. Si dimostra infatti che $\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$ e pertanto, per $U = \mathbb{R}^n$, si ha che $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$.

3. Se $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, essendo σ una funzione vettoriale $(\sigma_1, ..., \sigma_n)$, scriviamo
$$\mu^i = \|Df\| \llcorner \sigma^i$$
Applicando ora il teorema di decomposizione di Lebesgue, si ha che per ogni $i \in 1, ..., n$,
$$\mu^i = \mu^i_{ac} + \mu^i_s$$
con $\mu^i_{ac} << \mathcal{L}^n$ e $\mu^i_s \perp \mathcal{L}^n$. Inoltre, per il teorema di Radon-Nykodym, $\mu^i_{ac} = \mathcal{L}^n \llcorner f_i$, con $f_i \in L^1_{\text{loc}}$ e scriviamo:
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := f_i$$
$$Df := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$
$$[Df]_{ac} := (\mu^1_{ac}, ..., \mu^n_{ac}) = \mathcal{L}^n \llcorner Df$$
$$[Df]_s := (\mu^1_s, ..., \mu^n_s)$$
da cui $[Df] = \mathcal{L}^n \llcorner Df + [Df]_s$.

4. Se $f \in W^{1,1}_{\text{loc}}(U)$ e per ogni $V \subset\subset U, \varphi \in C^1_{\text{comp}}(V, \mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \leq 1$, abbiamo che:
$$\int_U f \text{div} \varphi \, dx = -\int_U Df \cdot \varphi \, dx \leq \int_V |Df| \, dx < +\infty$$
dove si è sfruttata la definizione di derivata debole e infine che tale derivata sia in $L^1_{\text{loc}}(U)$.

Otteniamo dunque che $W^{1,1}_{\text{loc}}(U) \subset BV_{\text{loc}}(U)$ e in questo caso $\|Df\| = \mathcal{L}^n \text{ L}|Df|$. In generale vale che $W^{1,P}_{\text{loc}}(U) \subset BV_{\text{loc}}(U)$ e inoltre che se $f \in BV_{\text{loc}}(U)$, allora $f \in W^{1,P}_{\text{loc}}(U) \Leftrightarrow f \in L^P_{\text{loc}}(U)$, $[Df]_s = 0$ e $Df \in L^P_{\text{loc}}(U)$, quindi la differenza tra le funizoni di Sobolev e le funzioni BV sta solo nella parte singolare di $[Df]$.

Definizione 1.7. Chiameremo $\|Df\|$ la *misura variazione* di f e $\|\partial E\|$ la *misura perimetro* di E.
$$\|Df\|(U) = \sup \left\{ \int_U f div \varphi \, dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n), \ |\varphi| < 1 \right\}$$
$$\|\partial E\|(U) = \sup \left\{ \int_E div \varphi \, dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n), \ |\varphi| < 1 \right\}$$

Inoltre,

$$BV(U) := \left\{u \in L^1(U) \mid \|Df\|(U) < +\infty\right\}$$

e definiamo una norma su questo spazio:

$$\|f\|_{BV(U)} := \|u\|_{L^1(U)} + \|Df\|(U)$$

Osservazione 1.8. $(BV(U), \|f\|_{BV(U)})$ è uno spazio di Banach

Proposizione 1.9. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ limitato. Se ∂E è di classe C^2 allora la misura perimetro coincide con la misura $(n-1)$-dimensionale di Hausdorff concentrata sulla frontiera topologica, ovvero

$$\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$$

Dimostrazione. La prima disuguaglianza vale in generale, anche senza dare ipotesi sulla regolarità della frontiera, infatti, presa $\varphi \in C^1_{comp}(U; \mathbb{R}^n)$

$$\int_E div\varphi \; dx \underbrace{=}_{Teorema\ della\ Divergenza} \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\leq \int_{\partial E} |\varphi| \; |\nu_E| \; d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E \cap U} \underbrace{|\varphi|}_{\leq 1} \; \underbrace{|\nu_E|}_{=1} \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$$

e passando al $\sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(U;\mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \leq 1}}$ otteniamo

$$\|\partial E\|(U) \leq H^{n-1}(\partial E \cap U)$$

Dimostriamo ora l'altra disuguaglianza. Siccome ∂E è di classe C^2, la funzione $x \longmapsto \nu_E(x)$ è di classe C^1 con $|\nu_E(x)| = 1$. Sia ora $\psi \in C^\infty_{comp}(U)$, tale che $\psi \equiv 1$ in U' con $U' \subset U$, allora, prendendo $\varphi := \psi \nu_E$, otteniamo $\varphi \in C^1_{comp}(U; \mathbb{R}^n)$ e anche $|\varphi| \leq 1$. Allora, sfruttando nuovamente il Teorema della Divergenza

$$\int_E div\varphi \; dx = \int_{\partial E} \varphi \cdot \nu_E \; d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \psi \; \nu_E \cdot \nu_E \; d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial E} \psi \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

Scegliamo ora $U' = U_k$ in modo da ottenere una successione di aperti che invade U, ovvero $\bigcup_{k=1}^{+\infty} U_k = U$, e prendiamo $\forall k \psi_k \equiv 1$ su U_k. Per costruzione $\psi_k \xrightarrow[k \to \infty]{} \chi_U$, quindi

$$\|\partial E\|(U) \geq \int_{\partial E} \psi_k \; d\mathcal{H}^{n-1} \xrightarrow[k \to \infty]{} \int_{\partial E} \chi_U \; d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap U)$$

Ciò conclude la prova. □

1.2 Approssimazione con funzioni C^∞

Teorema 1.10 (Semicontinuità Inferiore della Misura Variazione)**.** Sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ in $L^1(U)$
Allora
$$\|Df\|(U) \le \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U)$$

Dimostrazione. Sia $\varphi \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \le 1$ allora

$$\left| \int_U f div\varphi \, dx - \int_U f_k div\varphi \, dx \right| \le \int_U |f - f_k| \, |div\varphi| \, dx$$

$$\le C_\varphi \int_U |f - f_k| \, dx = C_\varphi \|f_k - f\|_{L^1_{loc}(U)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

quindi abbiamo ottenuto

$$\int_U f div\varphi \, dx = \lim_{k\to\infty} \int_U f_k div\varphi \, dx$$

D'altra parte per definizione si ha

$$\int_U f_k div\varphi \, dx \le \|Df_k\|(U)$$

Allora

$$\lim_{k\to\infty} \int_U f_k div\varphi \, dx = \liminf_{k\to\infty} \int_U f_k div\varphi \, dx \le \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U)$$

abbiamo preso il $liminf$ poiché a priori non sappiamo se esiste il limite della misura variazione.
Andiamo ora a fare il sup sulle φ, che compaiono solo a sinistra della disuguaglianza, e otteniamo

$$\|Df\|(U) = \sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(U,\mathbb{R}^n) \\ |\varphi|\le 1}} \int_U f div\varphi \, dx \le \liminf_{k\to\infty} \|Df_k\|(U)$$

□

Diamo ora un importante risultato di densità.

Teorema 1.11 (Anzellotti-Giaquinta)**.** Sia $f \in BV(U)$
allora $\exists (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$ tale che

i. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad in L^1_{loc}(U)$

ii. $\|Df_k\|(U) \xrightarrow[k\to\infty]{} \|Df\|(U)$

Osservazione 1.12. Vediamo ora come questo risultato sia il massimo che possiamo ottenere in termini di densità, è infatti falso che lo spazio $BV(U)\cap C^\infty(U)$ è denso in $BV(U)$.
Sia $f \in BV(U)$, supponiamo per assurdo che $\exists (f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset BV(U)\cap C^\infty(U)$ tale che

$$f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f \quad \text{ in } BV(U)$$

Prendiamo ora $U' \subset\subset U$ tale che $f_k \in W^{1,1}(U)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Un tale insieme esiste poiché se $f_k \in BV(U) \Rightarrow f_k \in L^1(U)$ e inoltre, essendo le derivate di f_k continue su un compatto, tali derivate sono anche limitate

$$\int_{U'} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}\, dx \leq \mathcal{L}^n(U') \max_{U'} \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right| \qquad \forall i = 1,\ \ldots, n$$

dunque

$$\|f_k - f_h\|_{W^{1,1}(U)} \leq \|D(f_k - f_h)\|(U') \underbrace{\leq}_{monotonia} \|D(f_k - f_h)\|(U)$$
$$\leq \|f_k - f_h\|_{BV(U)} \xrightarrow[k,h\to 0]{} 0$$

ovvero $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in $W^{1,1}(U')$, quindi $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{W^{1,1}(U')} g$, allora $\exists (f_{k_j})_{j\to\mathbb{N}}$ sottosuccessione tale che $f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} g$ quasi dappertutto in U', ma d'altra parte $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{BV(U)} f$, e di conseguenza $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{L^(U')} f$, quindi vale anche $f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ quasi dappertutto in U'; allora per unicità del limite

$$f = g \text{ in } U'$$

Possiamo sempre scegliere come U' una successione di insiemi che invade U, allora possiamo concludere

$$f = g \text{ in } U$$

quindi, siccome $g \in W^{1,1}(U')$, vale anche $f \in W^{1,1}(U')$. Ne concludiamo che

$$BV(U) \subseteq W^{1,1}(U') \quad \forall U' \subset\subset U$$

e ciò è assurdo poiché se in $\mathbb{R}$ consideraramo la funzione di Heaviside

$$H(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

otteniamo che $H \notin W^{1,1}(\mathbb{R})$, ma la sua derivata distribuzionale è la delta di Dirac centrata in 0, che è una misura di Radon, allora $H \in BV(\mathbb{R})$.

Diamo ora la dimostrazione del Teorema.

Dimostrazione. Fissato $\varepsilon > 0$ e dato $m \in \mathbb{Z}_+$ definiamo gli insiemi

$$U_k := \{x \in U \mid dist(x, \partial U) > \frac{1}{m+k}\} \cap B(0, k+m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

abbiamo che gli U_k sono limitati, e scegliamo m abbastanza grande affinché

$$\|Df(U \setminus U_1)\| < \varepsilon \tag{1.1}$$

Sia $U_0 := \emptyset$ e definiamo $V_k := U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}}$
Consideriamo ora una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, sia dunque $(\zeta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

- $\zeta_k \in C^\infty_{comp}(V_k)$ e $0 \leq \zeta_k \leq 1$ $\forall k \in \mathbb{N}$
- $\sum_{k=1}^\infty \zeta_k = 1$ su U

Moltiplichiamo ora per f e andiamo a mollificare $f\zeta_k$ in modo da poter sommare tra loro le funzioni ottenute essendo definite su tutto $\mathbb{R}^n$.
In particolare abbiamo che $supp(\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k)) \subset V_k$ e siccome $f\zeta_k, fD\zeta_k \in L^1(U)$ per le proprietà dei mollificatori

$$\begin{cases} \displaystyle\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \displaystyle\int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k) - fD\zeta_k| \, dx < \frac{\varepsilon}{2^k} \end{cases}$$

Definiamo dunque

$$f_\varepsilon := \sum_{k=1}^\infty \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k)$$

Osserviamo che per come abbiamo definito i V_k vale che $\forall x \in U$ $\exists V$ intorno di x tale che $f_\varepsilon(x)$ è somma di un numero finito di termini $(\star)$.
Inoltre $f_\varepsilon \in C^\infty(U)$ essendo somma di un numero finito di funzioni $C^\infty(U)$, tuttavia non possiamo dire nulla sul supporto, poiché il supporto è unione numerabile di compatti che a priori non è compatto. E ancora, poiché $f = \sum_{k=1}^\infty f\zeta_k$, si ha

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(U)} = \int_U \left| \sum_{k=1}^\infty \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f \right| \, dx = \int_U \left| \sum_{k=1}^\infty (\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k) \right| \, dx$$

$$\leq \int_U \sum_{k=1}^{\infty} |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| \ dx < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

possiamo portare la sommatoria fuori dall'integrale poiché possiamo applicare il Teorema di Beppo Levi in quanto la successione delle somme parziali è monotona crescente e abbiamo convergenza puntuale in un intorno del punto x poiché otteniamo una somma finita per $(\star)$

Allora $f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ in $L^1(U)$ e applicando il Teorema 1.10 si ottiene che

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|Df_\varepsilon\|(U) \tag{1.2}$$

Sia ora $\varphi \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n)$ e $|\varphi| \leq 1$, allora

$$\int_U f_\varepsilon div\varphi \ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) div\varphi \ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U (f\zeta_k)(\eta_{\varepsilon_k} * div\varphi) \ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U (f\zeta_k) div(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) \ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f div\varphi(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \ dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f D\zeta_k \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) \ dx$$

dove nella seconda uguaglianza sfruttiamo il seguente fatto $(\star\star)$

$$\int_U (\eta_\varepsilon * f) g \ dx = \int_U \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \ dy \right) \ g(x) \ dx =$$

applicando ora il Teorema di Fubini e utilizzando $\eta_\varepsilon(x-y) = \eta_\varepsilon(y-x)$, si ha

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_U \eta_\varepsilon(y-x) g(x) \ dx \right) \ f(y) \ dy = \int_U \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y-x) g(x) \ dx \right) \ f(y) \ dy$$

nell'ultimo passaggio abbiamo potuto scambiare i domini di integrazione per come sono costituiti i supporti delle funzioni.

Consideriamo ora

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U f < D\zeta_k, (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) > \ dx$$

allora, per analogo motivo di $(\star\star)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_U f < D\zeta_k, (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) > \ dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f < (\eta_{\varepsilon_k} * D\zeta_k), \varphi > \ dx$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U < (\eta_{\varepsilon_k} * fD\zeta_k) - fD\zeta_k, \varphi > \ dx$$

poiché $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = 1 \ \Rightarrow \ D(\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k) = 0$, inoltre possiamo portare il segno di derivata sotto il segno di sommatoria poiché in ogni intorno di un punto x la sommatoria è finita, quindi la derivata della somma è la somma delle derivate
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k = 0$ e anche $\sum_{k=1}^{\infty} \int_U < fD\zeta_k, \varphi > \ dx = 0$
In definitiva otteniamo:

$$\int_U f_\varepsilon div\varphi \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f div\varphi(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \, dx - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U < (\eta_{\varepsilon_k} * fD\zeta_k) - fD\zeta_k, \varphi > \ dx$$

$$= I_1 + I_2$$

andiamo dunque a stimare queste due quantità

$$|I_1| \leq \left| \int_U f div\varphi(\zeta_1(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi)) \ dx \right| + \left| \sum_{k=2}^{\infty} \int_U f div\varphi(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \ dx \right|$$

$$\leq \|Df\|(U) + \sum_{k=2}^{\infty} \|Df\|(V_k)$$

$$\leq \|Df\|(U) + 3\|Df\|(U \setminus U_1)$$

$$\leq \|Df\|(U) + 3\varepsilon$$

otteniamo la prima disuguaglianza da $\zeta_1(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi) \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n)$ e $|\zeta_1(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi)| \leq 1$, la seconda dalla definizione dei V_k e dal fatto che ogni punto di U appartiene al massimo a 3 insiemi V_k e infine la terza dalla (1.1).

$$|I_2| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \int_U < (\eta_{\varepsilon_k} * fD\zeta_k) - fD\zeta_k, \varphi > \ dx \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |(\eta_{\varepsilon_k} * fD\zeta_k) - fD\zeta_k| \ |\varphi| \ dx$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |(\eta_{\varepsilon_k} * fD\zeta_k) - fD\zeta_k| \ dx < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

quindi

$$\int_U f_\varepsilon div\varphi \ dx \leq \|Df\|(U) + 4\varepsilon$$

questa disuguaglianza vale per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(U, \mathbb{R}^n)$, quindi vale anche per il $\sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(U,\mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \leq 1}}$ con $|\varphi| \leq 1$ allora

$$\|Df_\varepsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 4\varepsilon$$

In definitiva, ricordando la (1.2), si ha

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|Df_\varepsilon\|(U) \leq \|Df_\varepsilon\|(U) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \|Df_\varepsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 4\varepsilon$$

mandando $\varepsilon \to 0$ concludiamo la prova. □

1.3 Compattezza

Definizione 1.13 (Frontiera Lipschitziana)**.** Sia $U \subseteq \mathbb{R}^n$, diciamo che ∂U è Lipschitz se $\forall x \in \partial U$ $\exists r > 0$ e una mappa lipschitziana $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che (a meno di rotazioni e traslazioni) si ha

$$U \cap B(x, r) = \{y \mid \gamma(y_1, ..., y_{n-1}) < y_n\} \cap B(x, r)$$

dove

$$B(x, r) \coloneqq \{y \mid |y_i - x_i| < r \; i = 1, ..., n\}$$

in altri temini possiamo dire che ∂U è localmente (a meno di rotazioni e traslazioni) il grafico di una funzione lipschitziana.

Teorema 1.14. Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato con ∂U Lipshitz. Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione in $BV(U)$ tale che

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \|f_k\|_{BV(U)} < \infty$$

allora esiste una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ e una funzione $f \in BV(U)$ tale che

$$f_{k_j} \underset{j \to \infty}{\longrightarrow} f \quad in \ L^1(U) \tag{1.3}$$

Osservazione 1.15. Possiamo considerare questo Teorema come un risultato di compattezza, in quanto una successione limitata in $BV(U)$ ammette una sottosuccessione convergente in $L^1(U)$.

Dimostrazione. $\forall k$ scegliamo $g_k \in C^\infty(U)$ tale che

$$(*) \begin{cases} \displaystyle\int_U |f_k - g_k| \, dx < \frac{1}{k} \\ \displaystyle\sup \int_U |Dg_k| \, dx < \infty \end{cases}$$

Abbiamo che tali funzioni esistono per il Teorema di Anzellotti-Giaquinta, e quello che facciamo è dunque approssimare ciascun f_k con una successione $(g_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$ tale che

$$g_l \xrightarrow[l\to\infty]{L^1(U)} f_k$$

e

$$\|Dg_l\|(U) \xrightarrow[l\to\infty]{} \|Df\|(U)$$

quindi le condizioni $(*)$ derivano
dalla definizione di limie per $\varepsilon = \frac{1}{k}$

$$\int_U |f_k - g_k| \ dx = \|f_k - g_k\|_{L^1(U)} < \frac{1}{k}$$

e, sapendo che $\|Dg_l\|(U) \xrightarrow[l\ to\infty]{} \|Df_k\|(U)$ e $\int_U |Dg_l| \ dx \leq \|Dg_l\|(U)$, dal fatto che

$$\int_U |Dg_l| \ dx \leq \|Df_k\|(U) \leq \|f_k\|_{BV(U)} \leq \sup_k \|f_k\|_{BV(U)} < \infty$$

che è finito per ipotesi $\Rightarrow \sup_k \int_U |Dg_k| \ dx < \infty$
Ricapitolando abbiamo $(g_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset L^1(U)$ e $\sup_k \int_U |Dg_k| \ dx < \infty$
$\Rightarrow (g_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset W^{1,1}(U)$ ed essedo U limitato con frontiera ∂U Lipschitz possiamo applicare un'Osservazione successiva al Teorema di compattezza negli spazi $W^{1,p}(U)$ (Osservazione A.11), allora $\exists (g_{l_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $f \in L^{1^*}(U)$ tale che

$$g_{l_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f \ \text{ in } L^q(U) \text{ con } 1 \leq q \leq 1^*$$

per definizione si ha che $1^* = \frac{n}{n-1} > 1 \Rightarrow$ siccome $f \in L^{1^*}(U)$ e U è limitato si ha anche che $f \in L^1(U)$ quindi per $q = 1$

$$g_{l_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f \in L^1(U) \ \text{ in } L^1(U)$$

allora

$$\int_U |f_{k_j} - f| \ dx \leq \int_U |f_{k_j} - g_{l_j}| \ dx + \int_U |g_{l_j} - f| \ dx$$
$$< \frac{1}{l_j} + \int_U |g_{l_j} - f| \ dx = \frac{1}{l_j} + \|g_{l_j} - f\|_{L^1(U)} \quad \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

poiché vale $(*)$ ed essendo $(l_j)_{j\in\mathbb{N}}$, per definizione di sottosuccessione, una successione monotona. Allora abbiamo trovato una sottosuccessione $(f_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ di $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f \ \text{ in } L^1(U)$$

ma alllora abbiamo convergenza anche in $L^1_{loc}(U)$, allora per il Teorema di semicontinuità inferiore si ha

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j}\|(U)$$

quindi $f \in BV(U)$, ciò conclude la prova. $\square$

1.4 Disuguaglianze Isoperimetriche

Diamo ora un risultato che lega la misura variazione di f con la misura perimetro dei suoi insiemi di livello. Siano $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, con $t \in \mathbb{R}$ definiamo

$$E_t := \{x \in U \mid f(x) > t\ \}$$

inoltre è facile verificare che per $f \in BV(U)$ la mappa $t \longmapsto \|\partial E_t\|(U)$ è $\mathcal{L}^1$-misurabile.

Teorema 1.16 (Formula di Coarea per funzioni BV)**.** Sia $f \in BV(U)$ allora

i. E_t ha perimetro finito per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $t \in \mathbb{R}$

ii. $\|Df\|(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial E_t\|(U)\ dt$

Viceversa se $f \in L^1(U)$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} \|\partial E_t\|(U)\ dt < \infty$
allora $f \in BV(U)$

Vogliamo ora enunciare alcune fondamentali disuguaglianze che legano la misura n-dimensionale di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ alla misura perimetro, queste disuguaglianze vengono chiamate Disuguaglianze Perimetriche e discendono dai seguenti risultati.

Teorema 1.17 (Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev per funzioni BV)**.** Esiste una costante C_1 tale che

$$\forall f \in BV(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \|Df\|(\mathbb{R}^n)$$

Teorema 1.18 (Disuguaglianza di Poincaré per funzioni BV)**.** Esiste una costante C_2 tale che
$\forall B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\forall f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\|f - (f)_{x,r}\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\overline{B(x,r)})} \leq C_2 \|Df\|(B(x,r))$$

con $(f)_{x,r} = \fint_{B(x,r)} f\ dy$ media di f sulla palla $B(x,r)$

Teorema 1.19. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme limitato e di perimetro finito allora

i. $\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq C_1 \|\partial E\|(\mathbb{R}^n)$

ii. $\forall$ palla $B(x,r) \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\min\{\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)} \cap E), \mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)} \setminus E\}^{1-\frac{1}{n}} \leq 2C_2 \|\partial E\|(B(x,r))$$

Osservazione 1.20. Le costanti C_1 e C_2 che compaiono in questo Teorema derivano dai Teoremi 5 e 6 che a loro volta derivano dai Teoremi di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev e Poincaré per funzioni $W^{1,p}$.
Inoltre, nel caso (i), si dimostra anche il viceversa ovvero che la Disuguaglianza Isoperimetrica implica la Disuguaglianza di Gagliardo-Nirenberg-Sobolev nel caso $p = 1$.

Capitolo 2

Teorema di Rettificabilità di De Giorgi

2.1 Frontira Ridotta

Definizione 2.1. (Supporto di una misura) Sia (X, μ) uno spazio misurabile, definiamo il *supporto di* μ come

$$supp\ \mu := \{x \in X \mid \forall U\ intorno\ di\ x\ \mu(U) > 0\}$$

Notazione 2.2. Definiamo inoltre la differenza simmetrica tra due insiemi A e B

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$$

Proposizione 2.3. Il supporto della misura di Radon $\|\partial E\|$ è un sottoinsieme della frontiera topologica di E, ovvero

$$supp\|\partial E\| = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) < \omega_n r^n\ \forall r > 0\} \subseteq \partial E$$

dove $\omega_n = \mathcal{L}^n(B(0,1))$.
Inoltre esiste F insieme di Borel tale che

$$\mathcal{L}^n(E \Delta F) = 0 \quad e \quad supp\|\partial F\| = \partial F$$

Ricordiamo che se E è un insieme di perimetro finito e $\mathcal{L}^n(E \Delta F) = 0$, allora anche F è di perimetro finito.

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\forall r > 0\ \ \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) = 0$, allora

$$0 = \int_{E \cap B(x,r)} div\varphi\ dx\ = \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \nu_E\ d\|\partial E\|$$

Siccome φ è arbitraria ciò vale anche per il $\sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(B(x,r),\mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \le 1}}$, allora

$$\|\partial E\|(B(x,r)) = 0$$

Analogamente sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $\forall r > 0 \quad \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) = \omega_n r^n = \mathcal{L}^n(B(x,r)) \Rightarrow B(x,r) \subset E$,
dunque

$$\int_{E \cap B(x,r)} div\varphi \, dx \; = \; \int_{B(x,r)} div\varphi \, dx =$$

$$\underbrace{=}_{\text{Teorema della Divergenza}} \int_{\partial B(x,r)} \varphi \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{n-1} = 0$$

essendo φ a supporto compatto in $B(x,r)$.
Passando nuovamente al $\sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(B(x,r),\mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \le 1}}$ otteniamo

$$\|\partial E\|(B(x,r)) = 0$$

D'altra parte se $x \notin supp\|\partial E\| \Rightarrow \|\partial E\|(B(x,r)) = 0$ per qualche $r > 0$, allora

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \; d\|\partial E\| \; = \; \int_E div\varphi \; dx \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} \chi_E \; div\varphi \; dx$$

$\forall \varphi \in C^1_{comp}(B(x,r);\mathbb{R}^n)$
Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $\chi_E = c$ quasi ovunque su $B(x,r)$, ne segue che necessariamente $c \in \{0,1\} \;\Rightarrow \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) \in \{0, \omega_n r^n\}$.
Dimostriamo ora la seconda parte dell'enunciato:
a meno di modifiche di misura nulla possiamo considerare E un insieme di Borel. Andiamo ora a costruire l'insieme di Borel F tale che
$\mathcal{L}^n(E \Delta F) = 0$

$$\partial F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) < \omega_n r^n \; \forall r > 0\}$$

Definiamo dunque due aperti disgiunti:

$$A_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0 \text{ tale che } \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) = 0\}$$

$$A_1 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists r > 0 \text{ tale che } \mathcal{L}^n(E \cap B(x,r)) = \omega_n r^n\}$$

possiamo dunque considerare la successione $\{x_k\}_{h \in \mathbb{N}} \subset A_0$ tale che $A_0 \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k, r_k)$ con $r_h > 0$ e $\mathcal{L}^n(E \cap B(x_k, r_k)) = 0$, dunque per subadditività si ha che $\mathcal{L}^n(E \cap A_0) = 0$. Procedendo analogamente anche per A_1 si ottiene

che $\mathcal{L}^n(A_1 \setminus E) = 0$.
Poniamo dunque

$$F := (A_1 \cup E) \setminus A_0$$

per costruzione F è un insieme di Borel e vale che
$\mathcal{L}^n(F \setminus E) \leq \mathcal{L}^n(A_1 \setminus E) = 0, \quad \mathcal{L}^n(E \setminus F) \leq \mathcal{L}^n(E \cap A_0)$
Dunque $\mathcal{L}^n(E \Delta F) = 0$.
Abbiamo inoltre che

$$\mathbb{R}^n \setminus (A_0 \cup A_1) = supp\partial E = supp\partial F \subset \partial F$$

e allo stesso tempo

$$\partial F \subset \mathbb{R}^n \setminus (A_0 \cup A_1)$$

dunque per costruzione

$$A_1 \subset int(F) \quad \text{ e } \quad \overline{F} \subset \mathbb{R}^n \setminus A_0$$

□

Da qui in poi, quando non diversemente specificato, prendiamo E inisieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$.

Definizione 2.4. (Frontiera Ridotta) La *frontiera ridotta di E*, che indichiamo con $\partial^* E$, è il più piccolo insieme di $x \in \mathbb{R}^n$ che soddisfano le seguenti proprietà:

1. $\|\partial E\|(B(x,r)) > 0 \quad \forall r > 0$
2. $\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)} \nu_E \ d\|\partial E\| = \nu_E(x)$
3. $|\nu_E(x)| = 1$
   Da ciò risulta definita anche ν_E, che possiamo pensare anche come una funzione di Borel $\nu_E : \partial^* E \longrightarrow S^{n-1}$.
   Chiamiamo ν_E *normale unitaria esterna ad E nel senso della teoria della misura.*

Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti osservazioni:

Osservazione 2.5. Per il Teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch abbiamo che il limite in (2) esiste $\|\partial E\|$ − quasi ovunque ed essendo $|\nu_E| = 1$ $\|\partial E\|$ − quasi ovunque si ottiene che

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$$

ovvero la misura perimetro $\|\partial E\|$ è concentrata sulla frontiera ridotta $\partial^* E$.
Possiamo dunque riscrivere il Teorema di Struttura nel seguente modo:

$$\int_E div\varphi \ dx = \int_{\partial^* E} \varphi \cdot \nu_E \ \|\partial E\| \quad \forall \varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

Osservazione 2.6. Ricordando che se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto con frontiera di classe C^1 allora $\|\partial E\|(U) = \mathcal{H}^{n-1}(U \cap \partial E)$ e sfruttando l'osservazione precedente, otteniamo:
se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un aperto con frontiera $C^1 \Rightarrow \partial^* E = \partial E$
e in questo caso ν_E coincide con l'usuale normale esterna ad E.

Osservazione 2.7. Per definizione di frontiera ridotta si ha $\partial^* E \subset supp\|\partial E\|$, allora per la Proposizione precedente vale anche $\partial^* E \subset \partial E$. Inoltre $\|\partial E\|$ è concentrata su $\partial^* E$ quindi anche su $\overline{\partial^* E}$.
Per definizione di supporto si ha $supp\|\partial E\| \subset \overline{\partial^* E}$, quindi unendo le due inclusioni $\overline{\partial^* E} = supp\|\partial E\|$.
Inoltre, modificando E con un insieme di misura nulla, si ha $supp\|\partial E\| = \partial E$.
Allora unendo tutti questi risultati otteniamo:

$$\overline{\partial^* E} = \partial E$$

a meno di modifiche di insiemi di misura nulla.

Esempio 2.8. Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un quadrato nel piano con i lati paralleli agli assi cartesiani.
Abbiamo che il limite $\nu_E(x)$ esiste $\forall x \in \partial E$, ma

$$|\nu_E(x)| = 1 \iff x \text{ non è un vertice del quadrato}$$

infatti se x è un vertice si ha $|\nu_E(x)| = |\frac{e_1+e_2}{2}| < 1$.
Allora si ottiene

$$\partial^* E = \partial E \setminus \{\text{vertici del quadrato}\}$$

Lemma 2.9. Sia $\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Allora $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\int_{E \cap B(x,r)} div\varphi \; dy \; = \int_{B(x,r)} \varphi \cdot \nu_E \; d\|\partial E\| \; + \int_{E \cap \partial B(x,r)} \varphi \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

per $\mathcal{L}^1 -$ quasi ogni $r > 0$
dove ν indica la normale esterna a $\partial B(x,r)$ in senso classico.

Prima di dare la dimostrazione osserviamo il seguente fatto.

Osservazione 2.10. In questa formulazione il teorema è molto simile al Teorema della Divergenza (enunciato nel caso di un aperto Ω con frontiera Lipschitz), con una differenza: intuitivamente la frontiera dell'insieme $E \cap B(x,r)$ è vista come l'unione di $\partial B(x,r) \cap E$ e di $\partial E \cap B(x,r)$ in cui definite le rispettive normali ν e ν_E.

Dimostrazione. Sia $h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e consideriamo $\int_E div(h\varphi)\, dy$, possiamo applicare la regola di Leibniz all'integrando, essendo $h\varphi$ ancora una funzione $C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, e ottenere

$$\int_E div(h\varphi)\ dy \ = \ \int_E h\ div\varphi\ dy \ + \ \int_E \nabla h \cdot \varphi\ dy$$

Inoltre sfruttando il Teorema di struttura possiamo sostituire il primo termine

$$\int_E h\varphi \cdot \nu_E\ d\|\partial E\| \ = \ \int_E h\ div\varphi\ dy \ + \ \int_E \nabla h \cdot \varphi\ dy \tag{2.1}$$

Definiamo ora la funzione

$$g_\varepsilon(s) := \begin{cases} 1 \ \text{ se } 0 \le s \le r \\ \dfrac{r-s+\varepsilon}{\varepsilon} \ \text{ se } r \le s \le r+\varepsilon \\ 0 \ \text{ se } s \ge r+\varepsilon \end{cases}$$

e consideriamo

$$h_\varepsilon := g_\varepsilon(|y-x|)$$

osserviamo innanzitutto che

$$g'_\varepsilon(s) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } 0 \le s \le r \ \text{ o } s > r+\varepsilon \\ -\dfrac{1}{\varepsilon} \ \text{ se } r < s < r+\varepsilon \end{cases}$$

quindi

$$\nabla h_\varepsilon = \begin{cases} 0 \ \text{ se } |y-x| < r \ \text{ o } |y-x| > r+\varepsilon \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{y-x}{|y-x|} \ \text{ se } r < |y-x| < r+\varepsilon \end{cases}$$

Possiamo prendere $h = h_\varepsilon$ in (2.1) poiché h_ε è una funzione Lipschitz e la formula di Leibniz vale anche per tali funzioni, quindi si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h_\varepsilon\varphi \cdot \nu_E\ d\|\partial E\| \ &= \ \int_E h_\varepsilon\ div\varphi\ dy \ + \ \int_E \nabla h_\varepsilon \cdot \varphi\ dy \\ &= \int_E h_\varepsilon\ div\varphi\ dy \ - \ \frac{1}{\varepsilon}\int_E \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\ dy \\ &= \int_E h_\varepsilon\ div\varphi\ dy \ - \ \frac{1}{\varepsilon}\int_{E\cap\{y\in\mathbb{R}^n | r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\ dy \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sfruttando la formula di Coarea per le palle, si ha

$$\int_{E\cap\{y\in\mathbb{R}^n | r<|y-x|<r+\varepsilon\}} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|} \ = \ \int_{E\cap(B(x,r+\varepsilon)\setminus B(x,r))} \varphi \cdot \frac{y-x}{|y-x|}\ dy$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_r^{r+\varepsilon}\left(\int_{E\cap\partial B(x,s)} \varphi\cdot\nu \; d\mathcal{H}^{n-1}\right)\, ds \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \int_{E\cap\partial B(x,r)} \varphi\cdot\nu \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

Inoltre sapendo che

$$h_\varepsilon(y) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \begin{cases} 1 & \text{se } 0\leq |y-x|<r \\ 0 & \text{se } |y-x|>r \end{cases}$$

ovvero

$$h_\varepsilon(y) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} \chi_{B(x,r)}$$

dunque, mandando $\varepsilon\to 0$ in (2.1), si ha che il limite passa sotto il segno di integrale:

$$\int_E \chi_{B(x,r)}\varphi\cdot\nu_E \; d\|\partial E\| \;=\; \int_E \chi_{B(x,r)} \; div\varphi \; dy \;+\; \int_{E\cap\partial B(x,r)} \varphi\cdot\nu \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

per $\mathcal{L}^1-$quasi ogni $r>0$.
Ciò conclude la prova. □

Lemma 2.11. Esistono delle costanti positive $A_1, \ldots, A_5$ dipendenti solo da n (con n dimensione dello spazio ambiente) tali che
$\forall x\in\partial^* E$

i. $$\liminf_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n} > A_1 > 0$$

ii. $$\liminf_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)}{r^n} > A_2 > 0$$

iii. $$\liminf_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > A_3 > 0$$

iv. $$\limsup_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} \leq A_4$$

v. $$\limsup_{r\to 0}\frac{\|\partial(E\cap B(x,r))\|(\mathbb{R}^n)}{r^{n-1}} \leq A_5$$

Osservazione 2.12. Prendendo ad esempio la (i) e la (ii), il Lemma ci dice che le misure dei punti di E che stanno all'interno della palla e dei punti di E che stanno fuori dalla palla sono tutte dell'ordine di r^n, che è l'ordine di grandezza di $\mathcal{L}^n(B(x,r)) = \omega_n r^n$. Vediamo esplicitamente, attraverso un esempio, come ciò possa accadere solo se consideriamo i punti della frontiera ridotta.

Esempio 2.13. Sia $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq |x|^\alpha\}$, con $0 < \alpha < 1$. Si ha dunque $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|^\alpha\}$ e $\partial^* E = \partial E \setminus \{(0,0)\}$.
Consideriamo per $r > 0$ sufficentemente piccolo la palla centrata nell'origine $B((0,0),r)$ e il quadrato circoscritto Q di lato $2r$, allora

$$\mathcal{L}^n(B((0,0),r) \cap E) \leq \mathcal{L}^n(B((0,0),r) \cap Q) = \frac{2}{1-\alpha} r^{1-\alpha}$$

quindi $\mathcal{L}^n(B((0,0),r) \cap E)$ ha un ordine di grandezza minore rispetto a r^2.

Diamo ora la dimostrazione del Lemma.

Dimostrazione. 1. Consideriamo il risultato del Lemma precedente, passando al $\sup_{\substack{\varphi \in C^1_{comp}(U,\mathbb{R}^n) \\ |\varphi| \leq 1}}$ e sfruttando $\varphi \cdot \nu \leq |\varphi||\nu| \leq 1$ otteniamo:

$$\|\partial(E \cap B(x,r))\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E\|(B(x,r)) \; + \; \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)) \quad (2.3)$$

Prendiamo inoltre $\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\varphi \equiv \nu_E(x) \text{ su } B(x,r)$$

cioè φ assume il valore $\nu_E(x)$ in modo costante sulla palla. Possiamo costruire tale φ approssimando ν_E (che a priori è solo L^∞) in modo che sia L^1_{loc}, ed estendendo con 0 tale funzione fuori da un opportuno aperto di $B(x,r)$. In questo modo abbiamo una funzione $C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ che è costante sulla palla $\Rightarrow div(\nu_E) = 0$ su $E \cap B(x,r)$
Sostituendo dunque nel Lemma precedente si ha:

$$\int_{B(x,r)} \nu_E \cdot \nu_E \; d\|\partial E\| \; = \; -\int_{E \cap \partial B(x,r)} \nu_E \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{n-1}$$

Sia ora $x \in \partial^* E$, allora per definizione

$$\lim_{r \to 0} \nu_E \cdot \frac{1}{\|\partial E\|(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \nu_E \; d\|\partial E\| \; = \; |\nu_E(x)|^2 \; = \; 1$$

Facciamo ora comparire i moduli

$$\left| \int_{B(x,r)} \nu_E \cdot \nu_E \; d\|\partial E\| \right| \; = \; \left| \int_{E \cap \partial B(x,r)} \nu_E \cdot \nu \; d\mathcal{H}^{n-1} \right|$$

e sfruttiamo le disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $\frac{1}{2}|\nu_E|^2 \leq \nu_E \cdot \nu_E \leq |\nu_E|^2$

$$\frac{1}{2} \int_{B(x,r)} d\|\partial E\| \leq \left| \int_{B(x,r)} \nu_E \cdot \nu_E \; d\|\partial E\| \right|$$

$$\leq \int_{E\cap\partial B(x,r)} \underbrace{|\nu_E|}_{=1} \underbrace{|\nu|}_{=1} \; d\mathcal{H}^{n-1} \; = \; \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r))$$

Allora per $\mathcal{L}^1-$quasi ogni $r > 0$ sufficientemente piccolo, cioè $0 < r < r_0 = r_0(x)$ abbiamo

$$\frac{1}{2}\|\partial E\|(B(x,r)) \leq \mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)) \tag{2.4}$$

e sostituendo in (2.3) si ha

$$\|\partial(E \cap B(x,r))\|(\mathbb{R}^n) \leq 3\mathcal{H}^{n-1}(E \cap \partial B(x,r)) \tag{2.5}$$

per quasi ogni $r \in (0, r_0)$. Definiamo ora

$$g(r) := \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)$$

e applicando nuovamente la formula di Coarea per le palle si ha

$$g(r) = \int_0^r \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r) \cap E) \; ds$$

inoltre, essendo g assolutamente continua $g'(r) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r) \cap E)$ per quasio ogni $r > 0$. Sfruttiamo ora la Disuguaglianza Isoperimetrica e la (2.5)

$$\begin{aligned} g(r)^{1-\frac{1}{n}} \; &= \; \mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)^{1-\frac{1}{n}} \; \leq \; C\|\partial(B(x,r) \cap E)\|(\mathbb{R}^n) \\ &\leq C3\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r) \cap E) \; = \; C_1 g'(r) \end{aligned}$$

per quasi ogni $r \in (0, r_0)$, dove le costanti sono state tutte assorbite in C_1.

Dunque

$$\frac{1}{C_1} \; \leq \; g(r)^{\frac{1}{n}-1} \; g'(r) \; = \; n\Big(g(r)^{\frac{1}{n}}\Big)'$$

Allora integrando da entrambe le parti la disuguaglianza diventa:

$$g(r)^{\frac{1}{n}} \; \geq \; \frac{r}{C_1 n}$$

quindi

$$g(r) \; \geq \; \frac{r^n}{(C_1 n)^n}$$

ovvero

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{r^n} \; \geq \; \frac{1}{(C_1 n)^n}$$

e ciò prova la (i).

2. $\forall\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\int_E div\varphi\ dx\ +\ \int_{\mathbb{R}^n\setminus E} div\varphi\ dx\ =\ \int_{\mathbb{R}^n} div\varphi\ dx = 0$$

allora

$$\int_E div\varphi\ dx\ =\ -\int_{\mathbb{R}^n\setminus E} div\varphi\ dx$$

prendendo ora il $\sup_{\substack{\varphi\in C^1_{comp}(U,\mathbb{R}^n)\\ |\varphi|\leq 1}}$ si ottiene

$$\|\partial E\|\ =\ \|\partial(\mathbb{R}^n\setminus E)\|$$

inoltre, dal teorema di struttura,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\cdot\nu_E\ d\|\partial E\|\ =\ \int_E div\varphi\ dx$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^n\setminus E} div\varphi\ dx\ =\ -\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\cdot\nu_{\mathbb{R}^n\setminus E}\ d\|\partial(\mathbb{R}^n\setminus E)\|$$

quindi $\nu_E = -\nu_{\mathbb{R}^n\setminus E}$.
Sostituendo $-\nu_{\mathbb{R}^n\setminus E}$ a ν_E e $\mathbb{R}^n\setminus E$ in luogo di E nel punto precedente si ottiene (ii).

3. Consideriamo la Disuguaglianza Isoperimetrica Relativa e dividiamo entrambi i menbri per r^{n-1}

$$\frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} \geq C\ \min\left\{\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n}, \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\setminus E)}{r^n}\right\}^{1-\frac{1}{n}}$$

utilizzando i risultati (i) e (ii) otteniamo direttamente (iii).

4. Dalla (2.4) si ha

$$\|\partial E\|(B(x,r)) \leq 2\mathcal{H}^{n-1}(E\cap\partial B(x,r)) \leq 2\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(x,r))$$
$$2\ n\omega_n r^{n-1}\ =\ Cr^{n-1}$$

da cui si ottiene la (iv).

5. Analogamente dalla (2.3) si ha

$$\|\partial(E\cap B(x,r))\|(\mathbb{R}^n) \leq \|\partial E\|(B(x,r))\ +\ \mathcal{H}^{n-1}(E\cap\partial B(x,r))$$
$$\leq Cr^{n-1}\ +\ C_1 r^{n-1}\ =\ C_2 r^{n-1}$$

da cui si ottiene la (v).

□

2.2 Blow-up

Definiamo ora alcuni spazi.

Definizione 2.14. Sia $x \in \partial^* E$ fissato. Sia l'iperpiano

$$H(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu_E(x) \cdot (y - x) = 0\}$$

possiamo pensare ad $H(x)$ come una sorta di piano tangente ad E in x e, in effetti, se la frontietra di E è abbastanza regolare (ad esempio di classe C^1) queste due nozioni coincidono.
Siano inoltre i semispazi

$$H^+(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu_E(x) \cdot (y - x) \geq 0\}$$

$$H^-(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \nu_E(x) \cdot (y - x) \leq 0\}$$

Il nostro obiettivo sarà ora quello di studiare le proprietà locali della frontiera ridotta e lo faremo andando ad analizzare il *Blow-up*

$$E_r := \{y \in \mathbb{R}^n \mid r(y - x) + x \in E\}$$

con $x \in \partial^* E$ e $r > 0$ fissati. Sia ora

$$g_r(y) := \frac{y - x}{r} + x$$

Osserviamo che vale

$$y \in E \cap B(x, r) \iff g_r(y) \in E_r \cap B(x, 1)$$

infatti se $y \in E \cap B(x, r) \;\Rightarrow\; \|y - x\| \leq r \;\Rightarrow\; \|\frac{y-x}{r} + x - x\| \leq 1$
$\Rightarrow g_r(y) = \frac{y-x}{r} + x \in B(x, 1)$
Inoltre $r(g_r(y) - x) + x = r(\frac{y-x}{r} + x - x) + x = y \in E$
$\Rightarrow g_r(y) \in E_r$
e analogamente si dimostra l'altra implicazione.
Il seguente Teorema afferma che il blow-up di un punto x della frontiera ridotta converge localmente al semipiano negativo individuato da $\nu_E(x)$, ovvero per $r > 0$ sufficientemente piccolo $E \cap B(x, r)$ approssima la mezza palla $H^-(x) \cap B(x, r)$.

Teorema 2.15. (Blow-up) Sia $x \in \partial^* E$, allora

$$\chi_{E_r} \xrightarrow{r \to 0} \chi_{H^-(x)} \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

Osservazione 2.16. Questo Teorema non vale per i punti che appartengono alla frontiera topologica ma non alla frontiera ridotta, ovvero il limite potrebbe esistere ma non c'è convergenza al semispazio negativo.
Se escludiamo i punti appartenenti a $E^{(1)}, E^{(0)}, \partial^* E$, con $E^{(1)}, E^{(0)}$ i punti con densità 1 e 0 rispettivamente, ovvero tali che $\mathcal{L}^n(E \Delta E^{(1)}) = 0$ e $\mathcal{L}^n((\mathbb{R}^n \setminus E)\Delta E^{(0)}) = 0$, il comportamento del blow-up E_r può essere arbitrariamente complesso. Ad esempio è possibile costruire un insieme di perimetro finito E tale che $\forall F$ insieme di perimetro finito esiste una successione $r_h \xrightarrow{h\to\infty} 0^+$, tale che $\chi_{E_{r_h}} \xrightarrow{h\to\infty} \chi_F \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

Dimostrazione. Senza perdità di generalità possiamo suppore che $x = 0$ e $\nu_E(0) = e_n = (0, \ . \ . \ . \ , 0, 1)$ e di conseguenza

$$H(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n = 0\}$$

$$H^+(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \geq 0\}$$

$$H^-(0) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_n \leq 0\}$$

Lo schema della prova sarà quello di dimostrare dapprima che E_r tende ad un semispazio e poi mostrare che tale semispazio è proprio $H^-(0)$
Dunque presa una successione $r_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ci basterà mostrare che esiste una sottosuccessione $(s_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$\chi_{E_{s_j}} \xrightarrow{r\to 0} \chi_{H^-(x)} \quad \text{in } L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

Sia ora fissato $L > 0$ e definiamo

$$D_r := E_r \cap B(0, L)$$

$$g_r(y) := \frac{y}{r}$$

Facendo un cambio di variabile, $\forall \varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \leq 1$ si ha

$$\int_{D_r} div\varphi \; dz \;\; = \;\; \frac{1}{r^{n-1}} \int_{E\cap B(0,rL)} div(\varphi \circ g_r) \; dy$$

$$= \;\; \frac{1}{r^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \circ g_r)\nu_{E\cap B(0,rL)} \; d\|\partial(E \cap B(0, rL))\|$$

$$\leq \frac{\|\partial(E \cap B(0, rL))\|(\mathbb{R}^n)}{r^{n-1}} \leq C < \infty \qquad \forall r \in (0, 1]$$

dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo sfruttato il punto (v) del Lemma precedente.
Passando ora al $\sup_{\substack{\varphi\in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\\ |\varphi|\leq 1}}$ la disuguaglianza continua a valere

$$\|\partial D_r\|(\mathbb{R}^n) \leq C < \infty$$

inoltre si ha anche

$$\begin{aligned}\|\chi_{D_r}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} &= \mathcal{L}^n(D_r) = \mathcal{L}^n(E_r \cap B(0,L))\\ &\leq \mathcal{L}^n(B(0,L)) < \infty\end{aligned}$$

e unendo questo due fatti:

$$\|\chi_{D_r}\|_{BV(\mathbb{R}^n)} \leq C < \infty$$

Allora possiamo applicare il Teorema di compattezza: esistono una successione $(s_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset (r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tali che, scrivendo per semplicità di notazione $E_j := E_{s_j}$,

$$\chi_{E_j} \xrightarrow{j\to\infty} f \quad \text{in } L^1_{loc}$$

Inoltre possiamo dire che χ_{E_j} converge puntualmente ad f per $\mathcal{L}^n$-quasi ogni x, quindi necessariamente $f(x) \in \{0,1\}$ per $\mathcal{L}^n$ -quasi ogni x e di conseguenza

$$f = \chi_F \quad \mathcal{L}^n - \text{quasi ovunque}$$

Per il Teorema di semicontinuità inferiore $F \subset \mathbb{R}^n$ ha perimetro localmente finito.
Dunque $\forall\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\int_F div\varphi \; dy \; = \; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_F \; d\|\partial F\| \tag{2.6}$$

dove ν_F è una funzione $\|\partial F\|$-misurabile con $|\nu_F| = 1$ $\|\partial F\|$-quasi ovunque.
Dobbiamo ora provare che $F = H^-(0)$
Iniziamo col dimostrare che $\nu_F = e_n$ $\|\partial F\|$-quasi ovunque. Per semplicità scriviamo $\nu_j := \nu_{E_j}$, quindi $\forall\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \; = \; \int_{E_j} div\varphi \; dy$$

e siccome $\chi_{E_j} \xrightarrow[j\to\infty]{L^1_{loc}} \chi_F$

$$\int_{E_j} div\varphi \; dy \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_F div\varphi \; dy$$

allora per la (2.6) otteniamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_F \; d\|\partial F\|$$

che è appunto la definizione di convergenza debole delle misure di Radon, ovvero

$$\nu_j\|\partial E_j\| \rightharpoonup \nu_F\|\partial F\|$$

Essendoci dunque convegrenza debole per tali misure, possiamo dire che per ogni $L > 0$ tale che $\|\partial F\|(\partial B(0, L)) = 0$ (quindi per una famiglia numerabile di tali $L > 0$)

$$\int_{B(0,L)} \nu_j \; d\|\partial E_j\| \xrightarrow[j\to\infty]{} \int_{B(0,L)} \nu_F \; d\|\partial F\|$$

d'altra parte, facendo un cambio di variabile come sopra

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; \frac{1}{s_j^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi \circ g_{s_j}) \cdot \nu_E \; d\|\partial E\|$$

e passando poi al $\sup_{\substack{\varphi\in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\\ |\varphi|\leq 1}}$

$$\|\partial E_j\|(B(0, L)) = \frac{1}{s_j^{n-1}}\|\partial E\|(B(0, s_j L))$$

Inoltre, sfruttando ancora il cambio di variabile,

$$\int_{B(0,L)} \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; \frac{1}{s_j^{n-1}} \int_{B(0,s_jL)} \nu_E \; d\|\partial E\|$$

possiamo dire

$$⨍_{B(0,L)} \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; \frac{1}{nL^{n-1}\omega_n} \int B(0, L)\nu_j \; d\|\partial E_j\|$$

$$= \frac{1}{nL^{n-1}s_j^{n-1}\omega_n} \int_{B(0,s_jL)} \nu_E \; d\|\partial E\| \;=\; ⨍_{B(0,s_jL)} \nu_E \; d\|\partial E\|$$

Allora per definizione di frontiera ridotta

$$\lim_{j\to\infty} ⨍_{B(0,L)} \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; \lim_{j\to\infty} ⨍_{B(0,s_jL)} \nu_E \; d\|\partial E\| \;=\; \nu_E(0) \;=\; e_n \qquad (2.7)$$

Moltiplichiamo scalarmente per e_n l'equazione (2.7), allora, essendo continuo, il prodotto scalare passa sotto il segno di integrale, dunque si ottiene

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{\|\partial E_j\|(B(0,L))} \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; e_n \cdot e_n \;=\; |e_n| \;=\; 1$$

ovvero

$$\lim_{j\to\infty} \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \;=\; \lim_{j\to\infty} \|\partial E_j\|(B(0,L))$$

Sfruttando infine il Teorema di semicontinuità inferiore si ha

$$\begin{aligned} \|\partial F\|(B(0,L)) &\leq \liminf_{j\to\infty} \|\partial E_j\|(B(0,L)) \\ &= \lim_{j\to\infty} \int_{B(0.L)} e_n \cdot \nu_j \; d\|\partial E_j\| \\ &= \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_F \; d\|\partial F\| \end{aligned} \tag{2.8}$$

quindi in conclusione

$$\|\partial F\|(B(0,L)) \leq \int_{B(0,L)} e_n \cdot \nu_F \; d\|\partial F\| \;\leq \|\partial F\|(B(0,L))$$

Allora

$$e_n \cdot \nu_F = 1 \; \|\partial F\| - \text{q.o} \quad \Rightarrow \quad \nu_F = e_n \|\partial F\| - \text{q. o.}$$

Dalla disuguaglianza precedente segue anche

$$\|\partial F\|(B(0,L)) = \|\partial E_j\|(B(0,L))$$

Dimostriamo ora che F è un semispazio. Dal punto precedente abbiamo ottenuto

$$\int_F div\varphi \; dz \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot e_n \; d\|\partial F\| \qquad \forall \varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$$

Fissato $\varepsilon > 0$ consideriamo il mollificatore η_ε e la funzione regolarizzata $f^\varepsilon := \eta_\varepsilon * \chi_F$, osserviamo che essendo $\chi_F \in L^1_{loc} \Rightarrow f^\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.
Dunque

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon \; div\varphi \; dz \;&=\; \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon * \chi_F \; div\varphi \; dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(z-y) \; \chi_F(y) \; dy \right) \; div\varphi \; dz \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y-z)\ div\varphi\ dz \right)\ \chi_F(y)\ dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_F(\eta_\varepsilon * div\varphi)\ dy\ =\ \int_F \eta_\varepsilon * div\varphi\ dy$$

dove abbiamo sfruttato il Teorema di Fubini e il fatto che $\eta_\varepsilon(z-y) = \eta_\varepsilon(y-z)$, inoltre per le proprietà dei mollificatori

$$\int_F \eta_\varepsilon * div\varphi\ dz\ =\ \int_F div(\eta_\varepsilon * \varphi)\ dz$$

In definitiva

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon div\varphi\ dz\ =\ \int_F div(\eta_\varepsilon * \varphi)\ dz\ =\ \int_{\mathbb{R}^n} (\eta_\varepsilon * \varphi) \cdot e_n\ \|\partial F\|$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon * (\varphi \cdot e_n)\ d\|\partial F\|\ =\ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon * \varphi_n\ d\|\partial F\|$$

dove φ_n è l'n-esima componente di φ. D'altra parte, essendo $f^\varepsilon \varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n)$, vale che

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^\varepsilon div\varphi\ dz\ =\ \int_{\mathbb{R}^n} div(f^\varepsilon \varphi)\ dz\ -\ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla f^\varepsilon \cdot \varphi\ dz\ =\ -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla f^\varepsilon \cdot \varphi\ dz$$

Di conseguanza otteniamo che

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial z_i} = 0 \quad \forall i = 1,\ \ldots, n-1 \\ \dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial z_n} \geq 0 \end{cases}$$

Inoltre $f^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \chi_F$ per $\mathcal{L}^n$- quasi ogni x, quindi possiamo concludere che $\exists \gamma \in \mathbb{R}$ tale che

$$F = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y \geq \gamma\}$$

a meno di insiemi di misura nulla.
Rimane dunque da mostrare che $F = H^-(0)$ ovvero che $\gamma = 0$.
Supponiamo per assurdo che $\gamma > 0$, siccome $\chi_{E_j} \xrightarrow[j \to \infty]{} \chi_F$ in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e $B(0,\gamma) \subset F$

$$\omega_n \gamma^n = \mathcal{L}^n(B(0,\gamma)) = \mathcal{L}^n(B(0,\gamma) \cap F)$$

$$= \lim_{j \to \infty} \mathcal{L}^n(B(0,\gamma) \cap E_j) = \lim_{j \to \infty} \frac{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j) \cap E)}{s_j^n}$$

allora

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j)\cap E)}{\omega_n\gamma^n s_j^n} = \frac{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j)\cap E)}{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j))} \xrightarrow[j\to\infty]{} 1$$

quindi

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j)\smallsetminus E)}{\mathcal{L}^n(B(0,\gamma s_j))} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$$

ma ciò è in contraddizione con il punto (ii) del Lemma precedente.
Analogamente si procede supponendo che $\gamma < 0$ per poi giungere a contraddire il punto (i) del suddetto Lemma. □

Concludiamo il discorso sul blow-up di E enunciando il seguente risultato.

Corollario 2.17. Sia $x \in \partial^* E$, allora

i.
$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n((B(x,r)\cap E)\cap H^+(0))}{r^n} = 0$$
$$\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}^n((B(x,r)\smallsetminus E)\cap H^-(0))}{r^n} = 0$$

ii.
$$\lim_{r\to 0}\frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{\omega_{n-1}r^{n-1}} = 1$$

Osservazione 2.18. Ricordando che $\mathcal{L}^n(B(x,r)) = \omega_n r^n$, il punto (i) del Corollario ci dice che il rapporto tra la misura di Lebesgue di $(B(x,r)\cap E)\cap H^-(0)$ e quella della palla $B(x,r)$ tende a 0 per $r \to 0$. Quindi possiamo dire che, per r sufficientemente piccolo, la maggior parte di $\mathbb{R}^n \smallsetminus E$ è contenuta in $H^+(0)$ e, ragionando in modo analogo per l'altra espressione, per r sufficientemente piccolo la maggior parte di E è contenuta in $H^-(0)$. Se consideriamo dunque una palla $B(x,r)$ abbastanza piccola, l'iperpiano $H(0)$ divide la palla in due parti che approssimano bene E e $\mathbb{R}^n \smallsetminus E$.
Il secondo punto ci dice, invece, che la misura perimetro di E di una palla $B(x,r)$ centrata in $x \in \partial^* E$ tende, per $r \to 0$, alla misura $(n-1)$-dimensionale della palla.

2.3 Regolarità della Frontiera Ridotta

Il nostro obiettivo sarà ora quello di dimostrare il Teorema di Rettificabilità di De Giorgi (o Teorema di Struttura per Insiemi di Perimetro Finito), prima di enunciarlo diamo però alcuni importanti risultati che verranno utilizzati nel corso della dimostrazione.

Teorema 2.19. (Teorema del Ricoprimento di Vitali) Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di palle chiuse (non degeneri) in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\sup\{diam B \mid B \in \mathcal{F}\}$$

Allora esiste una famiglia numerabile $\mathcal{G}$ di palle disgiunte in $\mathcal{F}$ tale che

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \ \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} \hat{B}$$

dove $\hat{B}$ è la palla con lo stesso centro di B e il raggio 5 volte superiore.

Osservazione 2.20. Ricordiamo che preso $A \in \mathbb{R}$ il suo diametro è

$$diam A := \sup_{x,y \in A} d(x,y)$$

Lemma 2.21. Esiste una costante C, che dipende solo da n, tale che

$$\mathcal{H}^{n-1}(B) \ \leq \ C\|\partial E\|(B) \qquad \forall B \subset \partial^* E$$

Dimostrazione. Siano $\varepsilon, \delta > 0$ e $B \subset \partial^* E$, siccome $\|\partial E\|$ è una misura di Radon, si ha che

$$\|\partial E\|(B) = \inf\{\|\partial E\|(U) \mid B \subset U,\ U \text{ aperto }\}$$

Allora sicuramente esiste U aperto con $B \subset U$ tale che

$$\|\partial E\|(U) \leq \|\partial E\|(B) + \varepsilon$$

Per il punto (iii) del Lemma (2.11) si ha

$$\liminf_{r \to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > A_3 > 0$$

Definiamo ora la seguente famiglia

$$\mathcal{F} := \{B(x,r) \ \Big| \ x \in B \ ,\ B(x,r) \subset U \ ,\ r < \frac{\delta}{10} \ ,\ \|\partial E\|(B(x,r)) > A_3 r^{n-1}\}$$

Possiamo dunque applicare ad $\mathcal{F}$ il Teorema del Ricoprimento di Vitali, allora esiste una famiglia numerabile di palle disgiunte $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ tale che

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} B(x_i, 5r_i)$$

Essendo $diam B(x_i, 5r_i) \leq \delta$ e sfruttando la definizione di misura di Hausdorff

$$\mathcal{H}^{n-1}_\delta(B) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \omega_{n-1}(5r_i)^{n-1} \leq C \ \sum_{i=1}^{+\infty} \|\partial E\|(B(x_i, r_i))$$

$$C \ \|\partial E\|(U) \leq C \ \|\partial E\|(B) + \varepsilon$$

mandando dapprima $\varepsilon \to 0$ otteniamo

$$\mathcal{H}^{n-1}_\delta(B) \leq C \ \|\partial E\|(B)$$

e, infine, mandando $\delta \to 0$ otteniamo la tesi. □

Teorema 2.22. (Teorema di Lusin) Siano μ una misura di Borel regolare su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funzione μ-misurabile. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-misurabile e con $\mu(A) < +\infty$. Sia fissato $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ esiste un compatto $K \subset A$ tale che

i. $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$

ii. $f|_K$ è continua

Dimostrazione. Per ogni intero positivo i sia $\{B_{i,j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^m$ la famiglia di insiemi di Borel disgiunti tale che

$$\mathbb{R}^m = \bigcup_{j=1}^{+\infty} B_{i,j} \quad \text{e} \quad diam B_{i,j} < \frac{1}{i}$$

Definiamo inoltre $A_{i,j} := A \cap f^{-1}(B_{i,j})$
Essendo intersezioni finita di insiemi μ-misurabili, $A_{i,j}$ è μ-misurabile e vale che

$$A = \bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{i,j}$$

Prendiamo ora $\nu := \mu \llcorner A$ la restrizione della misura μ ad A, in modo da ottenere una misura di Radon.
Essendo dunque μ di Radon e A ν-misurabile si ha che

$$\nu(A) = sup\{\nu(K) \mid K \subset A \ , \ K \text{ compatto } \}$$

da cui segue

$$\forall A_{i,j} \ \exists K_{i,j} \subset A \text{ tale che } \nu(A_{i,j} \setminus K_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^{i+j}}$$

Allora

$$\mu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{i,j}) = \nu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{i,j})$$

$$\nu(\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_{i,j} \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{i,j}) = \nu(\bigcup_{j=1}^{+\infty}(A_{i,j} \setminus K_{i,j}))$$

$$< \frac{\varepsilon}{2^i} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Inoltre

$$\lim_{N\to\infty} \mu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N} K_{i,j}) = \mu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} K_{i,j})$$

dunque per definizione di limite $\exists N(i) > 0$ tale che

$$\mu(A \setminus \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{i,j}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$$

Allora poniamo $D_i := \bigcup_{j=1}^{N(i)} K_{i,j}$, D_i è compatto poiché è un'unione finita di compatti.
$\forall i$ $\forall j$ fissiamo $b_{i,j} \in B_{i,j}$ e consideriamo la funzione $g_i : D_i \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definita da $g_i(x) = b_{i,j}$ con $x \in K_{i,j}$ con $j = 1, \ . \ . \ . \ , N(i)$
Siccome $K_{i,1}, \ . \ . \ . \ , K_{i,N(i)}$ sono compatti disgiunti g_i è continua.
Inoltre, essendo $diam B_{i,j} < \frac{1}{i}$,

$$|f(x) - g_i(x)| < \frac{1}{i} \qquad \forall x \in D_i$$

Sia ora $K := \bigcap_{i=1}^{+\infty}$, K è intersezione di compatti, quindi è compatto, allora possiamo concludere

$$\mu(A \setminus K) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \setminus D_i) < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Infine, siccome $|f(x) - g_i(x)| < \frac{1}{i}$ $\forall x \in D_i$, quindi anche $\forall x \in K$, otteniamo che $g_i \xrightarrow[i\to\infty]{} f$ uniformemente in K, ne segue necessariamente che $f|_K$ è continua. $\square$

Teorema 2.23. (Teorema di Egoroff) Sia μ una misura su $\mathbb{R}^n$ e sia $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni μ-misurabili $f_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Supponiamo inoltre che esista $A \subset \mathbb{R}^n$ μ-misurabile con $\mu(A) < +\infty$ e $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ puntualmente per μ-quasi ogni $x \in A$. Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B \subset A$ insieme $\mu-$misurabile tale che

i. $\mu(A \setminus B) < \varepsilon$

ii. $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} g$ uniformemente in B

Osservazione 2.24. Il risultato di Egoroff ci dice dunque che, presa una successione di funzioni misurabili convergente puntualmente in A, riusciamo a trovare un insieme (o meglio una famiglia di insiemi) che tendono dal basso ad A e su ognuno di essi guadagnamo la convergenza uniforme della successione di funzioni.

Dimostrazione. Definiamo

$$C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{+\infty} \{x \;\Big|\; |f_k(x) - g(x)| > \frac{1}{2^i}\}$$

dunque si ha che $C_{i,j+1} \subset C_{i,j}$ $\forall i, j$ quindi anche $(A \cap C_{i,j+1}) \subset (A \cap C_{i,j})$ ed essendo $\mu(A) < +\infty$ tutti questi insiemi hanno misura finita. Allora, poiché A è l'nsieme in cui f_k converge puntualmente a g, vale che

$$\lim_{j\to\infty} \mu(A \cap C_{i,j}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} (A \cap C_{i,j})\right) = \mu\left(A \cap \left(\bigcap_{j=1}^{+\infty} C_{i,j}\right)\right) = 0$$

Per definizione di limite $\exists N(i) \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(A \cap C_{i,N(i)}) < \frac{\varepsilon}{2^i}$ $\quad \forall i\, \forall j > N(i)$
Sia dunque $B := A \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} C_{i,N(i)}$ allora

$$\mu(A \setminus B) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A \cap C_{i,N(i)}) < \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon$$

Allora $\forall i\, \forall x \in B$ e $\forall n \geq N(i)$ per costruzione si ha $|f_n(x) - g(x)| \leq \frac{1}{2^i}$ quindi $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{} g$ uniformemente. $\square$

Enunciamo ora un altro importante risultato, il Teorema di Estensione di Whitney. Il fine di questo Teorema è quello di estendere una funzione definita su un compatto ad una funzione di classe C^1 definita su tutto $\mathbb{R}^n$, la strategia sarà quella di estendere la funzione su un intorno del compatto e poi estenderla ulteriormente con la funzione identicamente nulla fuori da tale intorno.
E' interessante osservare che non vengono date condizioni sulla regolarità del compatto.

Notazione 2.25. Sia $C \subset \mathbb{R}^n$ chiuso e assumiamo che $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ e $d : C \longrightarrow \mathbb{R}^n$ siano funzioni date. Definiamo

$$R(x,y) := \frac{f(x) - f(y) - d(x) \cdot (y-x)}{|x-y|} \quad \text{con } x \neq y$$

$$\rho_k(\delta) := \sup\{ \; |R(x,y)| \; \Big| \; 0 < |y-x| \leq \delta \; , \; x, y \in K\}$$

con $K \subset C$ compatto.

Teorema 2.26. (Teorema di Estensione di Whitney) Siano f, d le funzioni continue date sopra e supponiamo che $\forall K \subset C$ compatto valga

$$\rho_k(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$$

Allora $\exists \overline{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

i. $\overline{f} \in C^1$

ii. $\overline{f} = f$ e $\nabla \overline{f} = d$ su C

Osservazione 2.27. Osserviamo che l'ipotesi $\rho_k(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$ è simile alla definizione di limite del rapporto incrementale di f, ovvero in altre parole potremmo leggere il Teorema come "se esiste una funzione d che, in generale, non è la derivata di f ma ne svolge il compito $\Rightarrow$ esiste una funzione $\overline{f}$ che estende f e tale che d sia effettivamente la derivata di $\overline{f}$ ".

Teorema 2.28. (Teorema di Rettificabilità di De Giorgi) Sia E un insieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$. Allora

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k \cup N$$

dove $\|\partial E\|(N) = 0$ e $\forall k \; K_k$ è un sottoinsieme compatto di S_k ipersuperficie di classe C^1.
Inoltre $\forall k \; \nu_{E_k}|_{S_k}$ è la normale alla superficie S_k e vale che

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$$

Dimostrazione. $\forall x \in \partial^* E$. Dal Corollario 1 abbiamo che

$$(\star) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n((B(x,r) \cap E) \cap H^+(0))}{r^n} = 0 \\ \lim\limits_{r \to 0} \dfrac{\mathcal{L}^n((B(x,r) \setminus E) \cap H^-(0))}{r^n} = 0 \end{cases}$$

Considerando come misura la misura perimetro $\|\partial E\|$ ed essendo $\|\partial E\|(\partial^* E) < \infty$ possiamo applicare il Teorema di Egoroff a $\partial^* E$, dunque $\forall \varepsilon > 0 \; \exists F_i$ $\|\partial E\|$-misurabile tale che

$$\|\partial E\|(\partial^* E \setminus F_i) < \varepsilon$$

quindi

$$\|\partial E\|(\partial^* E \setminus \bigcup_{i=1}^{+\infty} F_i) = 0$$

Inoltre se consideriamo $\frac{\mathcal{L}^n((B(x,r)\cap E)\cap H^+(0))}{r^n}$ e $\frac{\mathcal{L}^n((B(x,r)\setminus E)\cap H^-(0))}{r^n}$ come funzioni della variabile reale x, guadagnamo la convergenza uniforme in $(\star)$ $\forall i \; \forall x \in F_i$.
$\forall i$ applichiamo il Teorema di Lusin a F_i:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists E_i^j$ compatto con $E_i^j \subset F_i$ tale che

$$\|\partial E\|(F_i \setminus E_i^j) < \varepsilon$$

allora

$$\|\partial E\|(F_i \setminus \bigcup_{j=1}^{+\infty} E_i^j)$$

e scegliendo $f_k = \nu_E \; \forall k$ abbiamo che $\nu_E|_{E_i^j}$ è continua.
Siccome $\{E_i^j\}_{i,j=1}^{+\infty}$ rimane una famiglia numerabile di insiemi, possiamo reindicizzarla denotando tale famiglia come $\{K_k\}_{k=1}^{+\infty}$.
Dunque da tutto ciò si deduce che

$$\|\partial E\|(\partial^* E \setminus \bigcup_{i,j=1}^{+\infty} E_i^j) = 0$$

ovvero

$$\|\partial E\|(\partial^* E \setminus \bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k) = 0$$

quindi $\bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k$ coincide alla frontiera ridotta a meno di un insieme $\|\partial E\|$-trascurabile, cioè

$$\partial^* E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k \cup N \qquad \text{con } \|\partial E\|(N) = 0$$

Inoltre, nelle nuove notazioni, diciamo che la convergenza in $(\star)$ è uniforme su K_k (poiché in particolare lo è in F_i e $K_k \subset F_i$) e $\nu_E|_{K_k}$ è continua.
Sia $\delta > 0$ e definiamo

$$\rho_k(\delta) := \sup\left\{ \frac{|\nu_E(x) \cdot (y-x)|}{|y-x|} \;\middle|\; 0 < |x-y| \leq \delta \;,\; x, y \in K_k \right\}$$

Per concludere vogliamo sfruttare il Teorema di Estensione di Whitney, ma per poterlo fare dobbiamo verificare che $\rho_k(\delta) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$.
Possiamo assumere senza perdita di generalità che $k = 1$. Fissato $0 < \varepsilon < 1$ per definizione di limite $\exists\ 0 < \delta < 1$ e, preso $z \in K_1$ e $r < 2\delta$, si ha

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n((B(z,r) \cap E) \cap H^+(z)) < \dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+2}}\ \alpha(n)\ r^n \qquad (*) \\ \mathcal{L}^n((B(z,r) \setminus E) \cap H^-(z)) > \alpha(n) \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+2}}\right) r^n \qquad (**) \end{cases}$$

Siano ora $x, y \in K_1$ tale che $0 < |x-y| \le \delta$ e supponiamo per assurdo che la disuguaglianza $\frac{|\nu_E(x)\cdot(y-x)|}{|y-x|} \le \varepsilon$ sia falsa, allora abbiamo solo due casi possibili

1. $\nu_E(x) \cdot (y-x) > \varepsilon|x-y|$
2. $|\nu_E(x) \cdot (y-x)| \le -\varepsilon|x-y|$

Caso (1)
Se $z \in B(y, \varepsilon|x-y|)$ allora sarà della forma $z = y + w$ con $|w| \le \varepsilon|x-y|$ e

$$\nu_E(x) \cdot (z-x) = \nu_E(x) \cdot (y-x) + \nu_E(x) \cdot w > \varepsilon|x-y| - |w| \ge 0$$

quindi per definizione del semispazio H^+ si ha $z \in H^+(x)$.
Allora possiamo dire che

$$B(y, \varepsilon|x-y|) \subset H^+(x) \cap B(y, 2|x-y|)$$

D'altra parte se prendiamo $z = x$ in $(*)$

$$\mathcal{L}^n(E \cap B(y, 2|x-y|) \cap H^+(x)) < \frac{\varepsilon^n}{2^{n+2}}\ \alpha(n)\ (2|x-y|)^n = \frac{\varepsilon^n}{4}\ \alpha(n)\ |x-y|^n$$

se invece prendiamo $z = y$ in $(**)$

$$\mathcal{L}^n(E \cap B(y, \varepsilon|x-y|)) \ge \mathcal{L}^n(E \cap B(y, \varepsilon|x-y|) \cap H^-(y))$$

$$> \alpha(n) \left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^n}{2^{n+2}}\right) (\varepsilon|x-y|)^n > \frac{\varepsilon^n}{2}\ \alpha(n)\ |x-y|^n$$

Tuttavia

$$B(y, \varepsilon|x-y|) \subset B(x, 2)|x-y|) \cap H^+(x)$$

e applicando la misura $\mathcal{L}^n \llcorner E$ la disuguaglianza continua a valere

$$\frac{\varepsilon^n}{2}\ \alpha(n)\ |x-y|^n < \mathcal{L}^n(E \cap B(y, \varepsilon|x-y|))$$

$$\leq \mathcal{L}^n(E \cap B(y, 2|x-y|) \cap H^+(x)) < \frac{\varepsilon^n}{4}\ \alpha(n)\ |x-y|^n$$

dunque siamo giunti ad una contraddizione.
Caso (2)
Si dimostra che

$$B(y, \varepsilon|x-y|) \subset H^-(x) \cap B(x, 2|x-y|)$$

e, procedendo in modo analogo al caso precedente, si giunge ad una contraddizione.
Possiamo finalmente applicare il teorema di Whitney: prendendo

$$f := 0 \quad \text{e} \quad d := \nu_E \qquad \text{su } K_k$$

ne concludiamo che $\exists \overline{f_k} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \ \ f_k \in C^1(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\begin{cases} \overline{f_k} = 0 & \text{su } K_k \\ \nabla \overline{f_k} = \nu_E & \text{su } K_k \end{cases}$$

Sia ora $\forall k \in \mathbb{N}$

$$S_k := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{f_k} = 0\ ,\ |\nabla \overline{f_k}| > \frac{1}{2}\}$$

S_k è l'insieme degli zeri di una funzione di claase C^1, quindi per il Teorema della funzione implicita di Dini S_k è una $(n-1)$-varietà di $\mathbb{R}^n$ di classe C^1.
Ci resta solo da provare che $\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial^* E$
Sia dunque $B \subset \partial^* E$ un insieme di Borel, allora

$$\mathcal{H}^{n-1}(B \cap N) \underbrace{\leq}_{Lemma\ 2.21} C\|\partial E\|(B \cap N) \leq C\|\partial E\|(N) = 0$$

quindi, per quanto visto sopra, possiamo supporre $B \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} K_k$ e senza perdita di generalità anche $B \subset K_1$.
Consideriamo dunque l'ipersuperficie S_1 che contiene K_1 e definiamo la misura

$$\mu := \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_1$$

Essendo S_1 di classe C^1 e B di Borel

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\alpha(n-1) r^{n-1}} = 1 \quad \text{con } x \in B$$

e dunque per il Corollario 1

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\|\partial E\|(B(x,r))} = 1 \quad \text{con } x \in B \qquad (\star\star)$$

osserviamo inoltre che

$$\|\partial E\|(B) = 0 \;\Rightarrow\; \mu(B) = 0$$

quindi

$$\mu << \|\partial E\|$$

allora per il Teorema di Differenziazione di Misure di Radon

$$\mu(B) = \int_B D_{\|\partial E\|}\mu \; d\|\partial E\|$$

dove

$$D_{\|\partial E\|}\mu(x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\|\partial E\|(B(x,r))} \underbrace{=}_{per\ (\star\star)} \lim_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\|\partial E\|(B(x,r))} = 1$$

allora

$$\mu(B) = \int_B d\|\partial E\| = \|\partial E\|(B)$$

$\square$

2.4 Teorema di Gauss-Green

Siamo ora in grado di dare una versione generale della Formula di Gauss-Green valida per gli insiemi di perimetro finito. Chiameremo dunque frontiera nel senso della teoria della misura l'insieme dei punti per cui vale tale formula, che, come vedremo, contiene la frontiera ridotta ma non coincide con la frontiera topologica.

Definizione 2.29. Sia $x \in \mathbb{R}^n$, diciamo che $x \in \partial_* E$, *frontiera di E nel senso della teoria della misura*, se valgono

i.
$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{r^n} > 0$$

ii.
$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \setminus E)}{r^n} > 0$$

Lemma 2.30. Sia E un insieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$, allora

1. $\partial^* E \subset \partial_* E$

2. $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$

Dimostrazione. 1. Si ha che

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n} \geq \liminf_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n} \underbrace{>}_{Lemma\ (2.11)} 0$$

e analogamente si procede per il secondo punto. Ciò dimostra che $\partial^* E \subset \partial_* E$.

2. Siccome la funzione

$$r \longmapsto \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)\cap E)}{r^n}$$

è continua, se $x \in \partial_* E$, esistono sicuramentre una successione $r_j \xrightarrow{0}$ e una costante $0 < \alpha < 1$ tali che

$$\frac{\mathcal{L}^n(B(x,r_j)\cap E)}{\omega_n r^n} = \alpha$$

Allora

$$\min\{\mathcal{L}^n(B(x,r_j)\cap E\ ,\ \mathcal{L}^n(B(x,r_j)\setminus E)\} = \min\{\alpha, 1-\alpha\}\omega_n r_j^n$$

quindi, per la Disuguaglianza Isoperimetrica Relativa si ha

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\|\partial E\|(B(x,r))}{r^{n-1}} > 0$$

Siccome$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$, sfruttando un argomento basato sul Teorema di ricoprimento di Vitali, si ottiene che

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \setminus \partial^* E) = 0$$

□

Teorema 2.31 (Formula di Gauss-Green Generalizzata)**.** Sia E un insieme di perimetro localmente finito in $\mathbb{R}^n$, allora

i. $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E \cap K) < \infty$ per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$.

ii. Per $\mathcal{H}^{n-1}$- quasi ogni $x \in \partial_* E$ esiste un unica normale unitaria esterna nel senso della teoria della misura $\nu_E(x)$ tale che

$$\int_E div\varphi\ dx\ =\ \int_{\partial_* E} \varphi \cdot \nu_E\ d\mathcal{H}^{n-1}$$

$\forall \varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Presa $\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, per definizione di misura perimetro

$$\int_E div\varphi \, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nu_E \; d\|\partial E\| \quad (\star)$$

Ma

$$\|\partial E\|(\mathbb{R}^n \setminus \partial^* E) = 0$$

sfruttando il Teorema di Rettificabilità ed il Lemma precedente si ha che

$$\|\partial E\| = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E$$

dunque $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial_* E$ è una misura di Radon poiché la misura perimetro lo è. Sostituendo quanto appena trovato in $(\star)$, otteniamo la formula cercata. $\square$

Appendice A

Nozioni di Analisi Funzionale e Toeria della Misura

Teorema A.1. (Teorema di Rappresentazione di Riesz) Sia $L : C_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che

$$sup\{L(f) \mid f \in C_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\ ,\ |f| \leq 1\ ,\ supp(f) \subset K\} < \infty$$

per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^n$. Allora eiste una misura di Radon μ su $\mathbb{R}^n$ e una funzione μ-misurabile $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tale che

i. $|\sigma(x)| = 1$ per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

ii. $L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \cdot \sigma\ d\mu \quad \forall f \in C_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$

Siamo μ e ν due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$

Definizione A.2. La misura ν si dice *assolutamente continua* rispetto a μ e si scrive

$$\nu << \mu$$

se vale che $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0\ \ \forall A \subset \mathbb{R}^n$

Definizione A.3. Le misure ν e μ si dicono *mutuamente singolari* e si scrive

$$\nu \perp \mu$$

se esiste un insieme di Borel $B \subset \mathbb{R}^n$ tale che

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0$$

Teorema A.4 (Teorema di Decomposizione di Lebesgue)**.** Siano $\nu,\ \mu$ misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Allora

i. $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, dove ν_{ac}, ν_s sono misure di Radon su $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\nu_{ac} << \mu \quad \text{e} \quad \nu_s \perp \mu$$

ii.

$$D_\mu \nu = D_\mu \nu_{ac} \quad \text{e} \quad D_\mu \nu_s = 0 \ \ \mu - \text{quasi ovunque}$$

e inoltre

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \ d\mu + \nu_s(A)$$

Teorema A.5 (Teorema di Radon-Nikodym)**.** Sia (X, ν) uno spazio di misura e sia μ una misura σ-finita sulla stessa σ-algebra tale che $\mu << \nu$. Allora $\exists f \in L^1_{loc}(X, \nu)$ tale che

$$\mu(A) = \int_A f \ d\nu$$

ovvero $\mu = \nu \llcorner f$.

Definizione A.6. Definiamo la funzione $\eta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ come segue

$$\eta(x) := \begin{cases} c \ e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 \quad \text{se } |x| \geq 1 \end{cases}$$

prendendo c in modo che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) \ dx = 1$, quindi $c := \frac{1}{\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} \ dx}$

Sia ora $\varepsilon > 0$, definiamo il *mollificatore*

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \eta(\frac{x}{\varepsilon})$$

I mollificatori agiscono su funzioni localmente sommabili attraverso la convoluzione: sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$f_\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(x-y) f(y) \ dy \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} \eta_\varepsilon(y) f(x-y) \ dy$$

Teorema A.7 (Proprietà dei Mollificatori)**.** Valgono le seguenti proprietà:

1. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

2. supp $f =: K$ è compatto $\Rightarrow$ supp f_ε è compatto, per supp $f_\epsilon \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$

3. Sia $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Allora $K \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto $\Rightarrow f_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} f$ uniformemente su K.

4. $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ha derivata debole $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_\varepsilon = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_{\mathbb{R}} \eta_\varepsilon(x-y)\frac{\partial f}{\partial x_j}(y)\ dy$$

5. $f \in L^p(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \|f_\varepsilon - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$

6. $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \eta_\varepsilon * f \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} f$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Teorema A.8 (Teorema di Fubini)**.** Sia f una funzione sommabile in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Allora

i. la funzione $x \mapsto f(x,y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$ per quasi y in $\mathbb{R}^m$

ii. la funzione $y \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\ dx$ è sommabile in $\mathbb{R}^m$ e vale che

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m} f(x,y)\ dxdy\ = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\ dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x,y)\ dy\right)dx$$

Teorema A.9 (Beppo Levi)**.** Siano (X,σ,μ) uno spazio di misura ed $E \subseteq X$ un insieme misurabile. Sia inoltre $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili su σ tale che:

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq ... \leq f_k(x) \leq ... \quad \forall x \in E$$

e sia

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\ \forall x \in E$$

(questo limite è ben definito poichè la successione è monotona crescente. Inoltre f è misurabile in σ, dal momento che è limite di funzioni misurabili.) Allora:

$$\lim_{k\to\infty}\int_E f_k\ d\mu = \int_E f\ d\mu$$

Teorema A.10 (Teorema di Compattezza per $W^{1,p}$)**.** Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ limitato e con frontiera ∂U Lipshitz, e sia $1 < p < n$. Supponiamo che $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sia una successione in $W^{1,p}$ tale che

$$sup_k\|f_k\|_{W^{1,p}(U)} < \infty$$

Allora esiste una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in W^{1,p}(U)$, tale che

$$f_{k_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} f \quad \text{ in } L^q(U)$$

per ogni

$$1 < q < p^*$$

denotando $p^* = \frac{pn}{n-p}$

Osservazione A.11. Nel caso $p = 1$, il Teorema afferma che esistono una sottosuccessione $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in L^{1^*}(U)$ tali che

$$\lim_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f\|_{L^q(U)} = 0$$

per ogni

$$1 \le q < 1^*$$

Teorema A.12 (Disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg-Sobolev)**.** Sia $1 \le p < n$. Esiste una costante C_1 che dipende solo da p ed n tale che:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*}\ dx\right)^{1/p^*} \le C_1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p\ dx\right)^{1/p}$$

per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Teorema A.13 (Disuguaglianza di Poincaré)**.** Per ogni $1 \le p < n$ c'è una costante C_2 che dipende solo da p ed n tale che:

$$\left(\fint_{B(x,r)} |f - (f)_{x,r}|^{p^*}\ dy\right)^{1/p^*} \le C_2 r \left(\fint_{B(x,r)} |Df|^p\ dy\right)^{1/p}$$

Per ogni $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n, f \in W^{1,p}(U(x,r))$

Notazione A.14. $(f)_{x,r} = \fint_{B(x,r)} f dy$

Siano μ e ν Radon measures on $\mathbb{R}^n$.

Definizione A.15. Per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$, si definiscono:

$$\overline{D}_\mu\nu(x) := \begin{cases} \limsup\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{se per ogni } r > 0,\ \mu(B(x,r)) > 0 \\ +\infty & \text{se per qualche } r > 0,\ \mu(B(x,r)) = 0 \end{cases}$$

$$\underline{D}_\mu\nu(x) := \begin{cases} \liminf\limits_{r\to 0} \dfrac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))} & \text{se per ogni } r > 0,\ \mu(B(x,r)) > 0 \\ +\infty & \text{se per qualche } r > 0,\ \mu(B(x,r)) = 0 \end{cases}$$

Definizione A.16. Se $\overline{D}_\mu\nu(x) = \underline{D}_\mu\nu(x) < +\infty$, diciamo che ν è differenziabile rispetto μ in x e scriviamo

$$D_\mu\nu(x) := \overline{D}_\mu\nu(x) = \underline{D}_\mu\nu(x)$$

$D_\mu\nu$ è la *derivata di ν rispetto a μ.* Ci riferiamo a $D_\mu\nu$ anche come *la densità di ν rispetto a μ.*

Notazione A.17. Denotiamo la media di f sull'insieme E rispetto alla misura μ con

$$\fint_E f\ d\mu := \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\ d\mu$$

posto che $0 < \mu(E) < \infty$ e che l'integrale a sinistra sia definito.

Teorema A.18 (Teorema di Differenziazione di Lebesgue-Besicovitch)**.** Sia μ una misura di Radon su $\mathbb{R}^n$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n, \mu)$. Allora

$$\lim_{r \to 0} \fint_{B(x,r)} f\ d\mu = f(x)$$

per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$

Teorema A.19 (Formula di Coarea per le Palle)**.** Sia $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^n$-sommabile. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} g\ dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(0,r)} g\ d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr$$

In particolare abbiamo che

$$\frac{d}{dr} \left(\int_{B(0,r)} g\ dx \right) = \int_{\partial B(0,r)} g\ d\mathcal{H}^{n-1}$$

per $\mathcal{L}^1$-quasi ogni $r > 0$.

Teorema A.20 (Teorema della Funzione Implicita di Dini)**.** Sia $F(x, y)$ una funzione definita in un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$ d di classe $C^1(A)$. Sia (x_0, y_0) un punto di A, tale che

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{e} \quad \tfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Esistono allora un intorno U di x_0 e un intorno V di y_0 tali che per ogni $x \in U$ esiste uno e un solo $y = f(x) \in V$ per cui risulta $F(x, y) = 0$.
La funzione $f : U \to V$ così definita è di classe $C^1(U)$, e si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Indicando con Z l'insieme degli zeri di F, il teorema asserisce che se (x_0, y_0) è un punto di Z in cui la derivata $\frac{\partial F}{\partial y}$ è diversa da zero, allora esiste un rettangolo $R = U \times V$ con centro in (x_0, y_0) tale che l'insieme $Z \cap R$ è grafico di una funzione $y = f(x)$ di classe C^1.

Teorema A.21 (Teorema di Differenziazione delle Misure di Radon)**.** Siano μ, ν misure di Radon su $\mathbb{R}^n$, con $\nu << \mu$. Allora

$$\nu(A) = \int_A D_\mu \nu \; d\mu$$

per ogni insieme μ-misurabile $A \subset \mathbb{R}^n$.

Osservazione A.22. Questa è una versione del Teorema di Radon-Nikodym.

Definizione A.23 (Convergenza Debole delle Misure di Radon)**.** Siano $\mu, (\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ misure di Radon su $\mathbb{R}^n$. Diciamo che μ_k *converge debolmente* alla misura μ e scriviamo

$$\mu_k \rightharpoonup \mu$$

se vale una delle seguenti condizioni equivalenti:

i. $\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f \; d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f \; d\mu$ per ogni $f \in C_{comp}(\mathbb{R}^n)$.

ii. $\limsup_{k \to \infty} \mu_k(K) \le \mu(K)$ per ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e $\mu(U) \le \liminf_{k \to \infty} \mu_k(U)$ per ogni aperto $U \subset \mathbb{R}^n$.

iii. $\lim_{k \to \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ per ogni insieme di Borel limitato $B \subset \mathbb{R}^n$ with $\mu(\partial B) = 0$.

Bibliografia

H [1] Haim Brezis - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*- Springer (2010)

DG1 [2] De Giorgi, Ennio - *Su una teoria generale della misura (r - 1)-dimensionale in uno spazio adr dimensioni* - Annali di Matematica Pura ed Applicata, 36, pp. 191-213 (1954)

DG2 [3] De Giorgi, Ennio - *Nuovi teoremi relativi alle misure (r-1)-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni* - Ricerche Matematiche, 4, pp. 95-113 (1955)

EG [4] Evans, L.C. and Gariepy, R.F. - *Measure Theory and Fine Properties of Functions* - Taylor & Francis (1991)

GG [5] Giusti, Enrico and Williams, Graham Hale - *Minimal surfaces and functions of bounded variation*-Springer (1984)

L [6] Leonardi, Gian Paolo - *Blow-up of oriented boundaries*- Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, (2000).

M [7] Maggi, Francesco - *Sets of finite perimeter and geometric variational problems: an introduction to Geometric Measure Theory*- Cambridge University Press, (2012)