

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Fibrazioni ellittiche: la teoria generale
e alcuni esempi su varietà di Calabi-Yau
classiche e in senso generalizzato con
singolarità klt

Tesi di laurea in Geometria Algebrica

Relatrice:

Chiar.ma Prof.

ANTONELLA GRASSI

Correlatore:

Chiar.mo Prof.

LUCA MIGLIORINI

Presentata da:

SIMONE PESATORI

Sessione Unica

Anno Accademico 2019/20

Introduzione

In questo elaborato si studiano certe varietà algebriche complesse, dette fibrazioni ellittiche.

Una varietà algebrica su \mathbb{C} può essere in primis pensata come il luogo degli zeri di un insieme di polinomi a coefficienti complessi. Una curva ellittica è una curva (varietà algebrica di dimensione complessa 1) liscia di genere 1; come superficie reale è un toro. Una varietà ellittica è una varietà di dimensione n con un morfismo ad una varietà di dimensione $n - 1$ tale che la fibra generica sia una curva ellittica. Tale morfismo si dice fibrazione ellittica.

Nella prima parte della Tesi viene presentata la teoria delle varietà ellittiche (come varietà algebriche su \mathbb{C}), in particolare curve, superfici e 3-folds ellittiche. Nella seconda vengono analizzati nel dettaglio due rilevanti esempi di varietà di Calabi-Yau, una in senso classico, l'altra in senso generalizzato (con singolarità klt), fibrate ellitticamente.

Le fibrazioni ellittiche sono state studiate classicamente in matematica: in particolare esiste soltanto un modello relativamente minimo liscio birazionalmente equivalente ad una superficie ellittica; Kodaira mostrò che esiste una lista di possibili fibre singolari per una superficie ellittica relativamente minima ([K]). In seguito, Grassi ([Gr]) dimostrò che esiste un solo modello relativamente minimo per una 3-fold ellittica.

Le varietà di Calabi-Yau sono un tassello fondamentale nella classificazione delle varietà algebriche e rivestono un ruolo centrale anche nella fisica teorica, in particolare nella teoria delle stringhe. I teorici delle stringhe sostengono che lo spazio-tempo abbia struttura $M \times X$, dove M è il consueto

spazio-tempo di Mincowski e X è una varietà di Calabi-Yau (di dimensione complessa 3 o 4). La simmetria speculare (mirror symmetry), lega coppie di varietà di Calabi-Yau. Molte varietà di Calabi-Yau sono varietà ellittiche. Il tipo di fibrazione e le relative proprietà matematiche, ad esempio il tipo di fibre singolari che occorrono oppure il gruppo delle sezioni, sono essenziali anche per le implicazioni fisiche, in particolare per la F-theory, un ramo della teoria delle stringhe.

Nel pionieristico articolo di Witten [CHSW], dove è stato stabilito il legame tra teoria delle stringhe e varietà di Calabi-Yau, erano noti pochi esempi di Calabi-Yau. Tra questi la varietà $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$, dove E_ω è una specifica curva ellittica e $\langle \omega \rangle$ indica che la varietà è quotientata rispetto all'azione di uno specifico gruppo finito di automorfismi, analizzata nell'elaborato.

Nel primo capitolo sono presentati i concetti preliminari per la comprensione del prosieguo della trattazione. Il secondo e il terzo capitolo trattano rispettivamente la teoria delle superfici e delle 3-folds ellittiche. Vengono spiegati i concetti di modello relativamente minimo per una varietà ellittica e si sviluppa la teoria di Weierstrass per le curve ellittiche nel caso di varietà ellittiche di dimensione 2 e 3 e si danno parecchi esempi. Nel quarto e nel quinto capitolo si analizzano nel dettaglio due esempi di varietà di Calabi-Yau (una delle quali è una Calabi-Yau in un senso generalizzato che viene spiegato) fibrate ellitticamente. Entrambe le varietà sono singolari e nella Tesi sono state calcolate le equazioni delle relative singolarità attraverso la geometria torica e la teoria dell'eliminazione, mediante l'utilizzo del software Singular. La prima delle due è quella citata nel lavoro di Witten, cioè $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ ed in letteratura compare spesso: in diverse sedi, tra cui [FG], [O], [OS] e [OT] ne sono state studiate diverse proprietà classiche, come il diamante di Hodge, la forma trilineare sul gruppo di Picard ecc. La struttura ellittica, quindi il luogo discriminante e il tipo di fibre singolari, è stata studiata in [S] oltre che nei citati articoli di Oguiso; Shuang ha proposto un modello minimale non equidimensionale, quindi non una Calabi-Yau. Nella tesi è proposta la costruzione di un modello relativamente minimo per la varietà, reso un mo-

dello minimo equidimensionale su base liscia, non presente nella letteratura. Nel quinto capitolo si analizza la seconda varietà, $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$, introdotta in [OT]: viene mostrato lo studio di tale oggetto svolto durante i mesi della stesura della tesi. Anche qui i risultati non sono presenti in letteratura.

Indice

Introduzione	i
1 Preliminari	1
1.1 Generalità sulle varietà algebriche	1
1.1.1 Varietà algebriche affini	1
1.1.2 Varietà algebriche proiettive	3
1.1.3 Morfismi	5
1.2 Fasci, divisori e Riemann-Roch	10
1.2.1 Prefasci e Fasci	10
1.2.2 Fibrati Vettoriali	11
1.2.3 Divisori su una curva	13
1.2.4 Divisori su una varietà algebrica	19
1.3 Curve Ellittiche	21
2 Superfici Ellittiche	25
2.1 Lista delle possibili fibre singolari	26
2.1.1 Esempio base: il fascio di cubiche	28
2.2 Esistenza ed unicità di un modello relativamente minimo	30
2.3 Fibrazioni di Weierstrass	32
2.4 Singolarità delle superfici e delle 3-folds	33
2.5 La superficie ellittica $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$	35
2.5.1 Le singolarità della superficie	36
2.5.2 Una risoluzione liscia di $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$	37
2.5.3 Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$	39

2.5.4	Le fibre singolari	40
2.5.5	Il modello relativamente minimo S di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$	44
2.6	La superficie ellittica $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$	45
2.6.1	Le singolarità della superficie	47
2.6.2	Una risoluzione liscia di $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$	48
2.6.3	Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$	49
2.6.4	Le fibre singolari	51
2.6.5	Il modello relativamente minimo S' di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$	64
3	3-folds Ellittiche	67
3.1	Un modello liscio di $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$	67
3.2	Forma di Weierstrass per una 3-fold ellittica	68
3.2.1	Cambio birazionale di base	71
3.2.2	Standardizzazione dell'equazione di Weierstrass	72
3.2.3	Un esempio	74
4	$E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$	77
4.1	Le singolarità della 3-fold	78
4.2	Una risoluzione liscia di $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$	79
4.3	Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle$	80
4.4	Le fibre singolari	81
4.5	Un modello relativamente minimo di $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$	84
5	$E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$	87
5.1	Le singolarità della 3-fold	89
5.2	Una risoluzione liscia di $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$	90
5.3	Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$	92
5.4	Le fibre singolari	93
5.5	Varietà di Calabi-Yau	100
	Bibliografia	103

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Generalità sulle varietà algebriche

In questa prima sezione si definiscono le varietà algebriche affini e proiettive, si descrivono alcune loro proprietà e si definiscono i morfismi e le mappe tra varietà algebriche. Per le dimostrazioni dei teoremi si fa riferimento a [Ha]

1.1.1 Varietà algebriche affini

Definizione 1.1.1. Sia K un campo algebricamente chiuso. Si definisce lo spazio affine n -dimensionale su K , e si denota con A_K^n , o semplicemente A^n , l'insieme delle n -ple di elementi di K . Un elemento P di A_K^n è chiamato punto e se $P = (a_1, \dots, a_n)$, a_i è detta i -esima coordinata di P .

Sia $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle variabili x_1, \dots, x_n a coefficienti nel campo K . Per ogni polinomio $f \in A$, si denota con $Z(f) = \{P \in A^n \mid f(P) = 0\}$ il luogo degli zeri di f . Più generalmente, dato $T \subset A$, si indica con

$$Z(T) = \{P \in A^n \mid f(P) = 0 \text{ per ogni } f \in T\}$$

l'insieme degli zeri comuni dei polinomi di T .

Definizione 1.1.2. Un sottoinsieme X di A^n è detto insieme algebrico se esiste un sottoinsieme $T \subset A$, tale che $X = Z(T)$.

Proposizione 1.1.1. *L'unione di due insiemi algebrici è un insieme algebrico. L'intersezione di una qualunque famiglia di insiemi algebrici è un insieme algebrico. L'insieme vuoto e l'intero spazio A^n sono insiemi algebrici.*

Dimostrazione. [Ha] □

Si può dare allo spazio A^n struttura di spazio topologico munendolo della topologia di Zariski, in cui i chiusi sono gli insiemi algebrici.

Definizione 1.1.3. Si definisce la topologia di Zariski su A^n prendendo come aperti i sottoinsiemi che sono complementari degli insiemi algebrici. La proposizione 1.1.1 assicura che questa è una topologia.

Definizione 1.1.4. Un sottoinsieme non vuoto Y di uno spazio topologico X si dice irriducibile se non può essere scritto come unione $Y = Y_1 \cup Y_2$ di due sottoinsiemi propri, tale che nessuno dei due contenga l'altro.

Siamo pronti a dare la definizione di varietà algebrica affine.

Definizione 1.1.5. Una varietà algebrica affine è un sottoinsieme chiuso e irriducibile di A^n (dotato della topologia indotta). Un sottoinsieme aperto di una varietà affine si dice varietà quasi-affine.

Definizione 1.1.6. Sia X un sottoinsieme di A^n . Si definisce l'ideale di definizione di X in A , e si denota $I(X)$, l'ideale di A generato da $\{f \in A \mid f(P) = 0 \text{ per ogni } P \in X\}$.

Se X è un insieme algebrico, si definisce l'anello delle coordinate affini di X l'insieme

$$A(X) = A/I(X).$$

Esempio 1.1.1. L'intero spazio A^n è una varietà algebrica affine di dimensione n e il suo ideale di definizione è l'ideale nullo.

Esempio 1.1.2. Se $n = 2$, l'asse x è una curva affine definita dall'ideale $I = (y) \subset \mathbb{K}[x, y]$.

Esempio 1.1.3. L'origine $(0, \dots, 0)$ è una varietà affine di dimensione 0, quindi un punto, ed è definito dall'ideale $J = (x_1, \dots, x_n) \subset A$.

In generale ogni punto (a_1, \dots, a_n) è una varietà affine, ed è definita dall'ideale $Z = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$.

Definiamo adesso la dimensione di una varietà algebrica.

Definizione 1.1.7. Si definisce la dimensione di uno spazio topologico X come il massimo intero d tale che esiste una catena di sottoinsiemi chiusi e irriducibili di X $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n$, dove le inclusioni sono strette. La dimensione di una varietà affine o quasi-affine è la sua dimensione come spazio topologico.

Una varietà affine di dimensione 1 si dice curva, una varietà affine di dimensione 2 si dice superficie e una varietà affine di dimensione 3 si dice 3-fold.

1.1.2 Varietà algebriche proiettive

Definizione 1.1.8. Sia \mathbb{K} un campo. Si definisce lo spazio proiettivo n -dimensionale su \mathbb{K} , e si denota con $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^n$, o semplicemente con \mathbb{P}^n , l'insieme delle classi di equivalenza di $(n+1)$ -ple (a_0, \dots, a_n) di elementi di \mathbb{K} modulo la relazione di equivalenza di proporzionalità, cioè $(a_0, \dots, a_n) \sim (b_0, \dots, b_n)$ se e solo se esiste un $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $a_i = \lambda b_i$ per $i = 0, \dots, n$. Un elemento P di \mathbb{P}^n è detto punto. Se (a_0, \dots, a_n) è una $(n+1)$ -pla nella classe di equivalenza di P , si dice che a_0, \dots, a_n è un insieme di coordinate omogenee per P .

Definizione 1.1.9. Sia $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle variabili x_0, \dots, x_n a coefficienti nel campo \mathbb{K} . Si considera S con la naturale struttura di anello graduato.

Se f è un polinomio omogeneo di grado m , e dunque $f(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_0, \dots, x_n)$, ha senso parlare di luogo degli zeri di f , intesa come funzione dello spazio proiettivo. Il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo f si indica con $Z(f) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0\}$. Più in generale, dato un sottoinsieme $T \subset \mathbb{P}^n$ composto da polinomi omogenei, si indica con

$$Z(T) = \{P \in \mathbb{P}^n \mid f(P) = 0\} \text{ per ogni } f \in T$$

l'insieme degli zeri comuni dei polinomi di T .

Definizione 1.1.10. Un sottoinsieme X di \mathbb{P}^n si dice insieme algebrico se esiste un insieme T di polinomi omogenei di S tale che $X = Z(T)$.

Definizione 1.1.11. Definiamo la topologia di Zariski su \mathbb{P}^n prendendo come aperti i complementari degli insiemi algebrici.

Definiamo adesso le varietà algebriche proiettive.

Definizione 1.1.12. Una varietà algebrica proiettiva è un insieme algebrico irriducibile di \mathbb{P}^n , dotato della topologia indotta. Un aperto di una varietà proiettiva si dice varietà quasi-proiettiva. La dimensione di una varietà è la sua dimensione come spazio topologico.

Una varietà proiettiva di dimensione 1 si dice curva, una varietà proiettiva di dimensione 2 si dice superficie e una varietà proiettiva di dimensione 3 si dice 3-fold.

Definizione 1.1.13. Sia X un sottoinsieme di \mathbb{P}^n . Si definisce l'ideale omogeneo di X in S , e si denota $I(X)$, l'ideale di S generato da $\{f \in S \mid f \text{ è omogeneo e } f(P) = 0 \text{ per ogni } P \in X\}$.

Se X è un insieme algebrico, si definisce l'anello delle coordinate omogenee di X l'insieme

$$S(X) = S/I(X).$$

Esempio 1.1.4. L'intero spazio proiettivo \mathbb{P}^n è una varietà algebrica proiettiva ed è definita dall'ideale nullo (o dal cosiddetto ideale irrilevante $(x_0, \dots, x_n) \subset S$). $I(\mathbb{P}^n) = (0)$.

Esempio 1.1.5. Se $n = 2$, la retta all'infinito $x_0 = 0$ è definita dall'ideale omogeneo $J = (x_0) \subset \mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. $I(\{x_0 = 0\}) = (x_0)$.

Concludiamo la sezione dando la nozione di varietà algebrica non singolare.

Definizione 1.1.14. Sia X una varietà algebrica affine e sia $I = (f_1, \dots, f_s) \subset A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ l'ideale di definizione di X . Sia J_X la matrice Jacobiana $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{(i,j)}$. X è non singolare se per ogni $P \in X$, si ha che il rango di $J_X(P) = n - s$.

Si dà una definizione analoga nel caso di una varietà proiettiva.

1.1.3 Morfismi

Sia X una varietà quasi-affine in A^n

Definizione 1.1.15. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare in un punto $P \in X$ se esistono un aperto U con $P \in U \subset X$ e polinomi $g, h \in A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, tali che h non si annulli mai in U e $f = g/h$ in U . f si dice regolare su X se è regolare in ogni punto di X .

Diamo la definizione di funzione regolare per una varietà quasi-proiettiva X e di morfismo di varietà.

Definizione 1.1.16. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare in un punto $P \in X$ se esistono un aperto U con $P \in U \subset X$ e polinomi omogenei $f, g \in S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ dello stesso grado, tali che h non si annulli mai in U e $f = g/h$ in U . f si dice regolare su X se è regolare in ogni punto di X .

Definizione 1.1.17. Siano X e Y varietà algebriche. Un morfismo $\phi : X \rightarrow Y$ è una funzione continua tale che per ogni aperto $V \subset Y$, e per ogni funzione regolare $f : V \rightarrow \mathbb{K}$, si ha che la funzione $f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{K}$ è regolare. ϕ è un isomorfismo se ammette un morfismo inverso $\psi : Y \rightarrow X$ con $\psi \circ \phi = id_X$ e $\phi \circ \psi = id_Y$.

Il seguente risultato caratterizza alcuni morfismi di varietà.

Proposizione 1.1.2. Sia X una varietà e sia $Y \subset A^n$ una varietà affine. Una mappa $\phi : X \rightarrow Y$ è un morfismo se e solo se $\phi \circ x_i$ è una funzione regolare per $i = 1, \dots, n$, dove le x_i sono le funzioni coordinate su A^n

Dimostrazione. [Ha] □

Introduciamo alcuni anelli di funzioni associati alle varietà.

Definizione 1.1.18. Sia X una varietà algebrica. Denotiamo con $\mathcal{O}(X)$ l'insieme di tutte le funzioni regolari su X . Se $P \in X$, definiamo l'anello \mathcal{O}_P come l'anello dei germi di funzioni regolari su X vicino P . Ogni elemento di \mathcal{O}_P è una coppia (U, f) dove U è un aperto contenente P e f è una funzione regolare su U . Due coppie $(U, f), (V, g)$ sono identificate se $f = g$ in $U \cap V$.

Si noti che l'anello \mathcal{O}_P è un anello locale: il suo unico ideale massimale è l'ideale dei germi di funzioni che si annullano in P .

Definizione 1.1.19. Sia X una varietà. Definiamo il campo delle funzioni di X $\mathbb{K}(X)$ come segue: ogni elemento di $\mathbb{K}[X]$ è una classe di equivalenza di coppie (U, f) , dove U è un aperto di X e f una funzione regolare su U , dove due coppie $(U, f), (V, g)$ vengono identificate se $f = g$ sull'intersezione $U \cap V$. Ogni elemento di $K(X)$ si dice funzione razionale su X .

Diamo adesso un risultato che lega gli anelli di funzioni su una varietà affine X appena definiti al suo anello delle coordinate affini $A(X)$.

Teorema 1.1.3. *Sia $X \in A^n$ una varietà affine. Allora:*

- (i) $\mathcal{O}(X) = A(X)$;
- (ii) per ogni $P \in X$, $\mathcal{O}_P \cong A(X)_{m_P}$, dove m_P è l'ideale massimale in $A(X)$ composto dalle funzioni che si annullano in P ;
- (iii) $K(X)$ è isomorfo al campo dei quozienti di $A(X)$.

Dimostrazione. [Ha] □

Diamo un risultato simile per le varietà proiettive.

Teorema 1.1.4. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una varietà proiettiva con anello delle coordinate omogenee $S(X)$. Allora*

(i) $\mathcal{O}(X) = \mathbb{K}$;

(ii) per ogni punto $P \in X$, $\mathcal{O}_P \cong S(Y)_{(m_P)}$, dove m_P è l'ideale massimale di $S(X)$ composto dalle classi dei polinomi omogenei che si annullano in P ;

(iii) $K(X)$ è isomorfo a $S(X)_{((0))}$.

Dimostrazione. [Ha] □

Il seguente risultato segue dai precedenti e lega la nozione di morfismo di varietà a quella di omomorfismo di algebre.

Proposizione 1.1.5. *Sia X una varietà e sia Y una varietà affine. Allora c'è una corrispondenza biunivoca naturale*

$$\alpha : \text{Hom}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}(A(Y), \mathcal{O}(X)),$$

dove a sinistra Hom è l'insieme dei morfismi di varietà e a destra Hom è l'insieme degli omomorfismi di \mathbb{K} -algebre.

Dimostrazione. [Ha] □

Corollario 1.1.6. *Siano X, Y varietà affini. Allora X e Y sono isomorfe se e solo se $A(X)$ e $A(Y)$ sono isomorfe come \mathbb{K} -algebre.*

Diamo ora la definizione di mappa razionale e di mappa birazionale tra due varietà:

Definizione 1.1.20. Siano X e Y varietà algebriche. Una mappa razionale $\phi : X \rightarrow Y$ è una classe di equivalenza di coppie (U, ϕ_U) , dove U è un aperto non vuoto di X e $\phi_U : U \rightarrow Y$ è un morfismo. Due coppie $(U, \phi_U), (V, \phi_V)$ sono equivalenti se $\phi_U = \phi_V$ in $U \cap V$.

Una mappa razionale ϕ si dice dominante se per qualche coppia (U, ϕ_U) , l'immagine di $\phi : U$ è densa in Y .

Definizione 1.1.21. Una mappa birazionale $\phi : X \rightarrow Y$ è una mappa razionale che ammetta un'inversa $\psi : Y \rightarrow X$, tale che $\psi \circ \phi = id_X$ e $\phi \circ \psi = id_Y$ come mappe razionali. Se una tale mappa esiste, X e Y si dicono *birazionalmente equivalenti*.

L'equivalenza birazionale è l'equivalente dell'isomorfismo nella categoria delle mappe razionali dominanti.

Il seguente risultato caratterizza la nozione di varietà birazionalmente equivalenti.

Proposizione 1.1.7. *Siano X e Y varietà algebriche. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

- (i) X e Y sono *birazionalmente equivalenti*;
- (ii) *esistono U, V aperti rispettivamente di X e Y che sono isomorfi*;
- (iii) $K(X) \cong K(Y)$ *come \mathbb{K} -algebre*.

Esempio 1.1.6 (Scoppiamento). Un esempio di mappa birazionale, che verrà utilizzata molto spesso nella trattazione, è lo scoppiamento (blow-up) di una varietà lungo una sua sottovarietà.

Il blow-up di una varietà algebrica X lungo una sua sottovarietà Y è una mappa birazionale $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ associata ad Y , che è un isomorfismo fuori da Y , ed ha fibre non banali su Y .

Il caso più semplice da considerare è lo scoppiamento nell'origine dello spazio affine A^n .

Consideriamo il prodotto $A^n \times \mathbb{P}^{n-1}$, che è una varietà quasi-proiettiva, e denotiamo con (x_1, \dots, x_n) le coordinate affini su A^n e con $[y_1, \dots, y_n]$ le coordinate omogenee su \mathbb{P}^{n-1} .

Definizione 1.1.22. Lo scoppiamento di A^n nell'origine si definisce come il sottoinsieme chiuso \tilde{X} di $A^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definito dalle equazioni $\{(x_i y_j = x_j y_i; i, j = 1, \dots, n)\}$.

Proposizione 1.1.8. *La proiezione $\pi : \tilde{X} \rightarrow A^n$ è un isomorfismo fuori dall'origine, mentre la fibra in $(0, \dots, 0)$ è una copia di P^{n-1} .*

Dimostrazione. Sia P un punto di A^n diverso dall'origine, allora la fibra $\pi^{-1}(P)$ è composta soltanto da un punto. Questo perchè se $P = (a_1, \dots, a_n)$, con qualche $a_i \neq 0$, e $(a_1, \dots, a_n) \times [y_1, \dots, y_n] \in \pi^{-1}(P)$, allora per ogni $j = 1, \dots, n$, si deve avere $y_j = (a_j/a_i)y_i$, dunque (y_1, \dots, y_n) è univocamente determinato come punto di \mathbb{P}^{n-1} , ed è il punto $[a_1, \dots, a_n]$. Inoltre, la mappa $\psi(P) = (a_1, \dots, a_n) \times [a_1, \dots, a_n]$ è un morfismo inverso alla proiezione π , dunque $A^n \setminus \{0\}$ e $\tilde{X} \setminus \pi^{-1}(0)$ sono isomorfi. \square

La fibra $\pi^{-1}(0)$ è isomorfa a \mathbb{P}^{n-1} in quanto si compone di tutti i punti $0 \times Q$, con $Q \in \mathbb{P}^{n-1}$.

Definizione 1.1.23. La fibra $\pi^{-1}(0)$ si chiama divisore eccezionale.

Definizione 1.1.24. Sia Y una sottovarietà chiusa di A^n passante per l'origine O . Si definisce lo scoppimento di Y nell'origine la varietà \tilde{Y} , che è la chiusura dell'insieme $(\pi^{-1}(Y \setminus \{0\}))$. Denoteremo con $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ anche la restrizione della proiezione π a \tilde{Y} .

È chiaro che $\tilde{Y} \setminus \pi^{-1}(0)$ e $Y \setminus \{0\}$ sono isomorfe, dunque \tilde{Y} e Y sono birazionalmente equivalenti.

Nel corso dell'elaborato, oltre allo scoppimento, sarà fondamentale il concetto di contrazione. Il seguente teorema mostra

Teorema 1.1.9 (di Castelnuovo). *Sia S una superficie liscia razionale (birazionalmente equivalente a \mathbb{P}^2). Per ogni curva $C \subset S$ con $C^2 = -1$, esiste un morfismo birazionale*

$$\begin{aligned} \phi : S &\rightarrow S_1 \\ C &\mapsto P \end{aligned}$$

che contrae C ad un punto P . S_1 è una superficie liscia.

1.2 Fasci, divisori e Riemann-Roch

In questa sezione vengono definiti e brevemente descritti fasci e prefasci, i fibrati vettoriali, i divisori su una varietà algebrica e viene dimostrato il teorema di Riemann-Roch nel caso delle curve. I testi di riferimento per le definizioni e le dimostrazioni sono [U1] e [U2].

1.2.1 Prefasci e Fasci

Definizione 1.2.1. Un prefascio di gruppi abeliani F su uno spazio topologico X consiste nell'assegnare

- $\forall U$ aperto di X , un gruppo abeliano $F(U)$
- $\forall U, V$ aperti di X , con $U \subseteq V$ un omomorfismo di gruppi $\rho_U^V : F(V) \rightarrow F(U)$, detto mappa di restrizione.

in modo che

- $\forall U$ aperto di X , si abbia $\rho_U^U = Id_U$
- $\forall U, V, W$ aperti di X , con $U \subseteq V \subseteq W$, si abbia $\rho_V^W \circ \rho_U^V = \rho_U^W$

Quando è chiaro che un elemento $f \in F(V)$, si scriverà $f|_U$ in luogo di $\rho_U^V(f)$. Gli elementi di $F(U)$ si dicono sezioni di U e gli elementi di $F(X)$ sezioni globali del fascio.

Definizione 1.2.2. Un prefascio F è un fascio se $\forall U$ aperto di X , comunque scelto un suo ricoprimento aperto $\{U_i\}$, siano verificate le seguenti due condizioni:

- se $f, g \in F(U)$ sono tali che $f|_{U_i} = g|_{U_i} \forall i$, allora $f = g$
- se $\forall i$ è data $f_i \in F(U_i)$ tale che $\forall i, j$ in cui $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ si ha $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$, allora $\exists f \in F(U)$ tale che $f|_{U_i} = f_i \forall i$.

Esempio 1.2.1. Data una varietà algebrica X munita della topologia di Zariski, si definisce O_X , il fascio strutturale di X , nel seguente modo: dato U aperto di X , $O_X(U)$ è l'anello delle funzioni regolari su U . Le restrizioni sono le usuali restrizioni di funzione. Poichè $O_X(U)$ è un anello $\forall U$, il fascio O_X è un fascio di anelli.

Una classe fondamentale di fasci per la nostra trattazione è quella dei fasci localmente liberi.

Definizione 1.2.3. Sia A un fascio di anelli su uno spazio topologico X . Un fascio di A -moduli è un fascio M su X tale che per ogni insieme aperto U di X , $M(U)$ sia un $A(U)$ -modulo e tale che anche la moltiplicazione venga ristretta, nel senso che per ogni $V \subseteq U$, $(a \cdot m)|_V = a|_V \cdot m|_V$, dunque ci si restringe ad un $A(V)$ -modulo.

Prima di definire i fasci localmente liberi, occorre definire la nozione di restrizione di un fascio.

Definizione 1.2.4. Sia F un fascio su X , e sia U un sottoinsieme qualunque di X . Si definisce il fascio restrizione di F a U nel seguente modo: $F|_U(W) := F(W)$ se W è un aperto di U e le mappe di restrizione sono le medesime del fascio F

Definizione 1.2.5. Dato un anello R , un R -modulo è finito di rango n se è isomorfo ad R^n come R -modulo.

Sia A un fascio di anelli su uno spazio topologico X . Un fascio F di A -moduli si dice fascio localmente libero di rango n se esiste un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X tale che $\forall i, F|_{U_i} \simeq A^n|_{U_i}$.

Un fascio localmente libero di rango 1 si dice fascio invertibile.

1.2.2 Fibrati Vettoriali

Definizione 1.2.6. Sia X uno spazio topologico. Un fibrato vettoriale di rango r ξ su X (su un campo \mathbb{K}) consiste in:

- uno spazio topologico E detto spazio totale.
- una mappa $\pi : E \rightarrow X$, detta proiezione, tale che $\forall x \in X$, la fibra $\pi^{-1}(x)$ abbia struttura di spazio vettoriale r -dimensionale su \mathbb{K} .

Inoltre, deve essere soddisfatta la seguente proprietà, detta di banalizzazione: $\forall x \in X \exists$ un intorno U di x in cui il fibrato è banale, cioè esiste un omeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times K^r$, che è un isomorfismo se ristretto alle fibre. Un fibrato vettoriale di rango 1 si dice fibrato in rette

Poichè ogni fibrato localmente è un prodotto, sostanzialmente si tratta di un incollamento di prodotti banali.

Proposizione 1.2.1. *Esiste una corrispondenza biunivoca tra fibrati vettoriali su X e famiglie di matrici associate agli aperti del fibrato tali che per ogni $U \in X$, $C_{UU} = 1$ e su un'intersezione tripla $U \cap V \cap W$, $C_{UW} = C_{VW}C_{UV}$.*

Dimostrazione. Dato un fibrato vettoriale di rango r $\pi : E \rightarrow X$, si considerino due aperti di X U e V con intersezione non vuota. Per definizione di fibrato, esistono due omeomorfismi $h_1 : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times K^r$ e $h_2 : \pi^{-1}(V) \rightarrow V \times K^r$. Nell'intersezione $U \cap V$ si hanno due banalizzazioni e $h_1 \circ h_2^{-1} : U \cap V \times K^r \rightarrow U \cap V \times K^r$ è un automorfismo. Scelta una base per K^r , tale automorfismo può essere scritto come una matrice C_{UV} che ha per coefficienti funzioni regolari su $U \cap V$. Per come sono state costruite, queste matrici sono tali che $C_{UU} = 1$ e su un'intersezione tripla $U \cap V \cap W$, $C_{UW} = C_{VW}C_{UV}$.

Viceversa, un insieme di matrici di questo tipo che soddisfano queste proprietà definisce un fibrato vettoriale. \square

Definizione 1.2.7. Le matrici associate ad un fibrato vettoriale si dicono matrici di transizione del fibrato.

Scopo della sottosezione è collegare i concetti di fibrati vettoriali e fasci localmente liberi, in particolare fibrati in rette e fasci invertibili.

Definizione 1.2.8. Dato un fibrato vettoriale $\pi : E \rightarrow X$, si chiama sezione una mappa $S : X \rightarrow E$, tale che $\pi \circ S = Id_X$

Definizione 1.2.9. Date due sezioni s_1 e s_2 di un fibrato vettoriale su una varietà algebrica X , l'operazione di somma è ben definita puntualmente:

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x) \quad \forall x \in X$$

Inoltre, è ben definita anche l'operazione di moltiplicazione per una funzione regolare su X :

$$(f \cdot s)(x) = f(x) \cdot s(x) \quad \forall x \in X, \forall f \in O_X(X),$$

dove O_X è il fascio strutturale di X .

Proposizione 1.2.2. *L'insieme delle sezioni costituisce un $O_X(X)$ -modulo.*

Dimostrazione. La dimostrazione segue direttamente dalla precedente definizione. \square

Si può costruire un fascio di O_X -moduli associando ad ogni aperto di X le sezioni del fibrato ristretto all'aperto. Poichè il fibrato è localmente banale, risulta che tale fascio è localmente libero. In particolare, se si parte da un fibrato in rette, si ottiene un fascio invertibile.

Viceversa, da ogni fascio localmente libero su una varietà algebrica è possibile ottenere un fibrato vettoriale, dunque vale il seguente teorema.

Teorema 1.2.3. *Sia X una varietà algebrica. C'è corrispondenza biunivoca tra i fibrati vettoriali su X e i fasci localmente liberi di rango finito su X .*

1.2.3 Divisori su una curva

Fasci invertibili e fibrati in rette sono connessi anche ad un'altra categoria di oggetti: i divisori.

Per prima cosa viene data la nozione di divisore su una curva algebrica, poi si enuncerà il teorema di Riemann-Roch ed infine si generalizzerà il concetto di divisore a varietà di dimensione più alta.

Definizione 1.2.10. Sia X una curva algebrica. Un divisore su X è un elemento del gruppo abeliano libero $Div(X)$ generato dai punti di X . Cioè un divisore D si scrive come somma formale della forma

$$\sum_x a_x x,$$

dove $a_x \in \mathbb{Z}$ e $a_x \neq 0$ soltanto in un numero finito di punti x di X .

Definizione 1.2.11. Sia D un divisore definito da

$$D = \sum_x a_x x,$$

si definisce il grado di D come

$$deg(D) := \sum a_x$$

Se $a_x \geq 0 \forall x$, D si dice divisore effettivo.

Si osserva che deg induce un omomorfismo suriettivo

$$deg : Div(X) \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Definizione 1.2.12. Data una funzione $f \in K(X)$, ad essa si associa il divisore

$$(f) = \sum_x ord_x(f)x,$$

dove

$$ord_x(f) = \max\{d \in \mathbb{Z} / f \in m_x^d\},$$

dove m_x è l'ideale massimale di O_{X_x} .

Definizione 1.2.13. I divisori che possono essere scritti nella forma (f) per qualche $f \in K(X)$ vengono detti divisori principali.

Localmente ogni funzione f di $K(X)$ si scrive come quoziente g/h , sicchè

$$ord_x(g/h) = ord_x(g) - ord_x(h).$$

Si dimostra che l'ordine di una funzione in un punto non dipende dall'aperto scelto.

Definizione 1.2.14. Ad ogni divisore D su una curva X si associa il fascio $O_X(D)$:

$$\forall U \text{ aperto di } X, O_X(D)(U) = \{f \in K(U) / (f) + D|_U \geq 0\},$$

dove se

$$D = \sum_x a_x x \text{ e } D' = \sum_x a'_x x,$$

allora

$$D \geq D' \text{ se e solo se } \forall x \in X \ a_x \geq a'_x.$$

Si è visto che ad ogni funzione razionale su X si può associare un divisore; in realtà si può fare di più: si consideri l'applicazione

$$\begin{aligned} \phi : K(X)^* &\rightarrow \text{Div}(X) \\ f &\mapsto (f). \end{aligned}$$

ϕ è un omomorfismo di gruppi abeliani e $\text{Im}(\phi) \subset \text{Div}(X)$ è il sottogruppo di $\text{Div}(X)$ dei divisori principali.

Definizione 1.2.15. Si definisce $\text{Pic}(X) := \text{Div}(X)/P(X)$ il gruppo di Picard della curva X .

Due divisori appartengono alla stessa classe in $\text{Pic}(X)$ se e solo se differiscono per un divisore principale.

Si dà ora qualche altra definizione importante relativa ai divisori sulle curve.

Definizione 1.2.16. Dato un divisore D su una curva X , si definisce il sistema lineare associato a D come

$$L(D) := \{f \in K(X) / (f) + D \geq 0\}$$

$L(D)$ risulta essere uno spazio vettoriale su C , dunque ha senso parlare della sua dimensione $l(D) := \dim L(D)$.

Osservazione 1.2.1. Si noti che $L(D) = O_X(D)(X)$.

In $P(X)$ esiste una classe di equivalenza di divisori fondamentale in geometria algebrica: la classe canonica. La classe canonica è associata alle forme razionali su una curva X . Localmente, ogni forma razionale ω è del tipo $\omega = f \cdot dz$, dove z è una coordinata locale per la curva.

Definizione 1.2.17. Il divisore associato ad ω si definisce come

$$(\omega) = \sum_x \text{ord}_x(\omega)x,$$

dove $\text{ord}_x(\omega) = \text{ord}_x(g)$.

Si dimostra che l'ordine di ω in un punto non dipende dall'aperto scelto.

Proposizione 1.2.4. *La classe canonica è ben definita.*

Dimostrazione. I divisori associati a due forme razionali differiscono soltanto per un divisore principale. \square

Prima di enunciare il teorema di Riemann-Roch, diamo la definizione di genere di una curva algebrica.

Definizione 1.2.18. Il genere di una curva proiettiva liscia X definita su un campo \mathbb{K} è la dimensione su \mathbb{K} dello spazio vettoriale $\Omega^1(X)$ delle forme differenziali globali regolari su X . Si denota il genere di X con $g(X)$ o più semplicemente con g .

Teorema 1.2.5 (Riemann-Roch). *Sia X una curva algebrica di genere g e sia D un suo divisore. Allora*

$$l(D) - l(D - K) = \text{deg}(D) - 1 + g$$

Dimostrazione. [Ha] □

Un altro fascio particolarmente importante associato ad un divisore D di una curva X è il fascio delle forme differenziali razionali.

Definizione 1.2.19. Posto M l'insieme delle forme razionali su X , si definisce

$$\forall U \text{ aperto di } X, \Omega_X(D)(U) = \{\omega \in M/(\omega) + D|_U \geq 0\}.$$

Si noti che

$$\Omega_X(D) \simeq O_X(D + K)$$

è un isomorfismo di fasci.

Adesso si definiscono i divisori di Weyl per varietà algebriche di dimensione qualsiasi.

Definizione 1.2.20. Un divisore di Weyl su una varietà algebrica X è una somma formale di sottovarietà algebriche di X di codimensione 1 a coefficienti in \mathbb{Z} , dunque un oggetto della forma

$$D = \sum_V a_V V,$$

con V sottovarietà di X di codimensione 1, $a_V \in \mathbb{Z}$ e $a_V \neq 0$ soltanto per un numero finito di sottovarietà.

Un divisore D si dice effettivo se $\forall V, a_V \geq 0$.

Localmente ogni sottovarietà di codimensione 1 irriducibile V si può definire attraverso un'unica equazione di definizione locale f in un intorno di un punto P .

Definizione 1.2.21. Per ogni funzione regolare g definita in un intorno di P in V , si definisce l'ordine $ord_{V,P}(g)$ come il massimo intero m per cui nell'anello locale $O_{X,P}$ valga $g = f^m \cdot h$, per qualche h .

L'ordine è indipendente dal punto scelto, dunque risulta dunque ben definito $ord_V(g)$. Se f è una funzione razionale, localmente si scrive come quoziente di due funzioni regolari g/h .

Definizione 1.2.22. Si definisce $ord_V(f) = ord_V(g) - ord_V(h)$.

Definizione 1.2.23. Data una funzione razionale f su X , si definisce il divisore di Weyl associato ad f come

$$(f) = \sum_V ord_V(f)V$$

I divisori associati a funzioni razionali si dicono principali.

Per definire i divisori di Cartier su una varietà algebrica, indichiamo con M_X il fascio delle funzioni razionali su X , che ad ogni aperto U di X associa $M_X(U)$, l'insieme delle funzioni razionali su U .

Definizione 1.2.24. Un divisore di Cartier, o localmente principale, su X è una sezione globale del fascio M_X^*/O_X^* .

Equivalentemente, un divisore di Cartier è una collezione $\{U_i, f_i\}$, dove $\{U_i\}$ è un ricoprimento aperto di X e le f_i sono funzioni razionali sugli U_i , in modo che $f_i = f_j$ su $U_i \cap U_j$ modulo la moltiplicazione per funzioni regolari, cioè $f_i/f_j \in O_X^*(U_i \cap U_j)$.

Un divisore di Cartier è dunque della forma

$$D = \sum_V ord_V(f_i)V,$$

dove per ogni V si sceglie f_i in modo che $V \cap U_i \neq \emptyset$. La definizione è ben posta in quanto si ha che $ord_v(f_i) = ord_v(f_j)$ per tutte le sottovarietà V e per ogni i e j .

Proposizione 1.2.6. *Ad ogni divisore di Cartier corrisponde un fibrato in rette*

Dimostrazione. sia D un divisore localmente principale su X con funzioni di definizione locale $f_i \in M_X^*(U_i)$ per un ricoprimento aperto $\{U_i\}$ di X . Chiamiamo

$$g_{ij} = f_i/f_j;$$

le g_{ij} sono regolari e non nulle sull'intersezione $U_i \cap U_j$. Sulla tripla intersezione $U_i \cap U_j \cap U_k$, si ha

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = \frac{f_i}{f_j} \frac{f_j}{f_k} \frac{f_k}{f_i} = 1,$$

dunque a D si può associare il fibrato in rette che ha le g_{ij} come funzioni di transizione. \square

Segue dalla precedente proposizione che ad ogni divisore D si può associare anche un fascio invertibile, quello associato al fibrato in rette corrispondente.

Proposizione 1.2.7. *Viceversa, è possibile associare ad ogni fibrato in rette che abbia una sezione meromorfa globale un divisore localmente principale.*

Dimostrazione. [Ha] \square

1.2.4 Divisori su una varietà algebrica

Definizione 1.2.25. Sia X una varietà algebrica irriducibile di dimensione n , si consideri un insieme $I \subset \mathbb{N}$ finito. Un divisore (di Weil) D su X è definito come

$$D := \sum_{i \in I} a_i C_i,$$

dove le C_i sono sottovarietà irriducibili di codimensione 1 e gli $a_i \in \mathbb{Z}$.

Dotato delle usuali operazioni di somma e di prodotto per interi, l'insieme dei divisori $Div(X)$ risulta essere uno \mathbb{Z} -modulo.

Definizione 1.2.26. Un divisore D è detto primo se $D = 1C$

Si definisce invece effettivo un divisore $D = \sum_{i \in I} a_i C_i$ tale che $a_i \geq 0$ per ogni i , e lo si indica con $D \geq 0$.

Vediamo come si può associare ad un divisore una funzione razionale.

Sia $f \in K(X)$ e sia C una sottovarietà irriducibile di codimensione 1 su X , si supponga inoltre X tale che la codimensione dei punti singolari di X sia almeno pari a 2. Sia $U \subset X$ un aperto affine tale che $U \cap C \neq \emptyset$. Su di U è possibile definire C attraverso un'unica equazione: $C = V(\pi)$, dove con $V(\pi)$ si intende il luogo degli zeri di π .

Si può osservare che ogni funzione $f \in K[X]$ non nulla è tale che $f \in (\pi^k)$ e $f \notin (\pi^{k+1})$ per un certo k .

Definizione 1.2.27. Su U la funzione razionale fissata $f \in K(X)$ si scrive come $f = g/h$, con $g = \pi^{m_1}g_1$ e $h = \pi^{m_2}h_1$. Si definisce la molteplicità di annullamento di f in C come

$$v_C(f) = v_C(g) - v_C(h) = m_1 - m_2.$$

Osservazione 1.2.2. Ci sono solamente un numero finito di sottovarietà irriducibili C di codimensione 1 in cui $v_C(f) \neq 0$.

In generale preso un ricoprimento affine finito $\{U_i\}$ di X , si ha che ogni sottovarietà C interseca almeno uno di essi.

Definizione 1.2.28. Si definisce il divisore associato ad f come

$$\text{div}(f) = \sum v_C(f)C.$$

Si può dare la seguente

Definizione 1.2.29. Un divisore $D \in \text{Div}(X)$ è detto principale se esiste una funzione $f \in K(X)$ tale che $D = \text{div}(f)$.

Definizione 1.2.30 (Equivalenza lineare). Due divisori D_1, D_2 si dicono linearmente equivalenti se differiscono per un divisore principale:

$$D_1 \sim D_2 \text{ se e solo se esiste } f \in K(X) : D_1 - D_2 = \text{div}(f).$$

Concludiamo la sezione con la definizione di divisore canonico per una varietà algebrica.

Definizione 1.2.31. Sia X una varietà algebrica non singolare di dimensione n e sia ω una forma razionale di grado massimo; la classe canonica K_X di X è la classe di divisori determinata dalla differenza tra zeri e poli di ω .

Osservazione 1.2.3. Poichè lo spazio delle n -forme su una varietà n -dimensionale ha dimensione 1, prese due n -forme ω_1, ω_2 , esse sono in relazione mediante $\omega_1 = h\omega_2$ per qualche $h \in K(X)$ non nulla. Dunque ω_1 e ω_2 sono linearmente equivalenti e quindi K_X è l'unica classe associata a tutte le forme di grado massimo.

Esempio 1.2.2. Calcoliamo il divisore canonico di \mathbb{P}^1 , con coordinate omogenee $[x, y]$. Sia U_1 la carta $y \neq 0$, cioè l'insieme dei punti $(z_1, 1)$, con $z_1 = x/y$ e sia U_2 la carta $x \neq 0$, cioè l'insieme dei punti $(1, z_2)$, con $z_2 = y/x$. Si ha la relazione

$$z_1 = z_2^{-1}.$$

Una 1-forma locale regolare sulla carta U_1 è dz_1 , a meno di moltiplicazioni per funzioni regolari su U_1 . Tale forma, nella carta U_2 , si scrive come $\frac{1}{z_2^2} dz_2$. Dunque il numero dei poli è in generale 2. Si scrive che il divisore canonico di \mathbb{P}^1 è $\mathcal{O}(-2)$.

Esempio 1.2.3. Sia \mathbb{C} il campo dei numeri complessi e sia Λ un reticolo tale che $\dim_{\mathbb{Z}} = 2$. Calcoliamo il divisore canonico dell'oggetto $E = \mathbb{C}/\Lambda$ (nella prossima sezione si vedrà che è una curva ellittica).

Su \mathbb{C} consideriamo la 1-forma dz . Questa evidentemente passa al quoziente per Λ , dunque il divisore canonico è banale.

Esempio 1.2.4. Sia $E^n = E \times \dots \times E$ (n volte).

Su \mathbb{C}^n si ha la n -forma $dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n$. Anche questa forma passa al quoziente, dunque il divisore canonico di E^n è banale.

1.3 Curve Ellittiche

Definizione 1.3.1. Una curva ellittica è una curva proiettiva liscia di genere 1 definita su un campo K , sulla quale viene specificato un punto O .

Il seguente teorema mostra che ogni curva ellittica è isomorfa ad una curva cubica piana nel piano proiettivo complesso.

Teorema 1.3.1 (Immersione di Weierstrass). *Sia (E, O) una curva ellittica su un campo K . Allora*

- *esistono due funzioni $x, y \in K(E)$ e un morfismo*

$$\begin{aligned}\phi : E &\rightarrow \mathbb{P}_K^2 \\ P &\mapsto [x(P), y(P), 1],\end{aligned}$$

tale che ϕ sia un isomorfismo di E in una curva piana in \mathbb{P}^2 definita dall'equazione di Weierstrass

$$Y^2 = X^3 + AX + B$$

nella carta affine $[X, Y, 1]$ con coefficienti $A, B \in K$. Inoltre, $\phi(O) = [0, 1, 0]$

- *Ogni due equazioni di Weierstrass per una stessa curva ellittica sono connesse da un cambio lineare di coordinate*

$$X = \lambda^2 X', \quad Y = \lambda^3 Y',$$

per qualche $\lambda \in K$

- *Viceversa, ogni cubica piana definita da un'equazione di Weierstrass è una curva ellittica su K con origine $O = [0, 1, 0]$.*

Posti $\Delta = 4A^3 + 27B^2$ e $j = 4A^3/\Delta$, l'equazione di Weierstrass per una curva ellittica E ha le seguenti proprietà:

- E è non singolare se e solo se $\Delta \neq 0$
- E ha un nodo se e solo se $\Delta = 0$ e $A \neq 0$
- E ha una cuspidale se e solo se $\Delta = A = 0$

- se K è algebricamente chiuso, due curve ellittiche sono isomorfe se e solo se hanno lo stesso valore per l'invariante j .

Dimostrazione. La dimostrazione del Teorema, che si può trovare in [Ha], è un'applicazione del teorema di Riemann-Roch. \square

Esempio 1.3.1. Fissato un numero complesso τ , si consideri il reticolo $\Lambda(\tau) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$. Allora $E = \mathbb{C}/\Lambda(\tau)$ è una curva ellittica su \mathbb{C} , e il punto scelto sarà la classe di zero.

Dimostrazione. Una dimostrazione del seguente fatto è data in [Hurwitz-Courant], ripresa anche da [Ha]. \square

Questo esempio mostra che su \mathbb{C} le curve ellittiche sono isomorfe a tori complessi.

Una curva ellittica fondamentale nel corso della trattazione sarà la seguente:

Definizione 1.3.2. sia ω una radice terza primitiva dell'unità e si consideri il reticolo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$. Definiamo

$$E_\omega := \mathbb{X}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega)$$

Esempio 1.3.2. Sia K un campo qualsiasi e sia $E \subset \mathbb{P}_K^n$ una cubica liscia con un dato punto di flesso P . Allora (E, P) è una curva ellittica su K per il teorema di immersione di Weierstrass.

Capitolo 2

Superfici Ellittiche

In questo capitolo si utilizzerà soltanto il campo \mathbb{C} dei numeri complessi. Per le dimostrazioni riferiamo a [M].

Definizione 2.0.1. Una superficie ellittica è una superficie X con un morfismo $\pi : X \rightarrow C$ ad una curva C tale che la fibra generica sia una curva liscia di genere uno. π si dice fibrazione ellittica di X .

Il luogo dei punti in cui le fibre degenerano si dice luogo discriminante della fibrazione ed è un insieme finito di punti di C .

Definizione 2.0.2. Una sezione per una superficie ellittica $\pi : X \rightarrow C$ è un'applicazione biunivoca $s : C \rightarrow X$, tale che $\pi \circ s = Id_C$.

Ci si aspetterebbe che la fibra generica sia una curva ellittica, ma una richiesta del genere presupporrebbe la scelta di un punto speciale per ogni fibra, dunque sarebbe data una sezione per π . Le fibrazioni ellittiche con sezione data saranno una classe molto importante di fibrazioni nella trattazione.

Definizione 2.0.3. Una superficie ellittica $\pi : X \rightarrow C$ si dice liscia se X è liscia come superficie.

Definizione 2.0.4. Una curva su X si dice verticale se giace su una fibra di π , altrimenti si dice orizzontale. Una superficie ellittica X si dice relativamente minima se non esistono (-1) -curve verticali.

Definizione 2.0.5. Una fibrazione $\pi : X \rightarrow C$, con X liscia, è relativamente minima nel caso in cui, per ogni \bar{X} liscia tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & \bar{X} \\ \downarrow \pi & \swarrow \pi_0 & \\ S & & \end{array}$$

, con α birazionale, allora $\bar{X} \cong X$

Proposizione 2.0.1. *Una fibrazione ellittica $\pi : X \rightarrow C$ liscia è relativamente minima se non esistono curve verticali nelle fibre di π*

Dimostrazione. [M] □

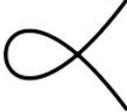
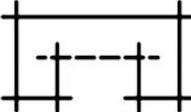
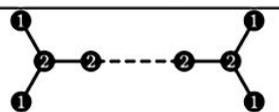
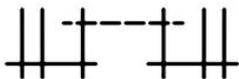
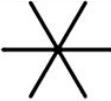
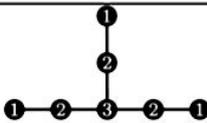
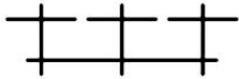
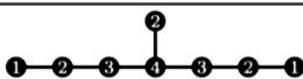
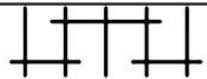
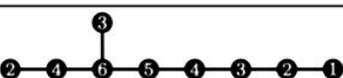
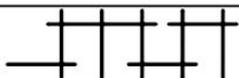
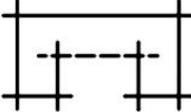
2.1 Lista delle possibili fibre singolari

In questa sezione si presenta la lista, stilata da Kodaira, delle possibili fibre singolari che possono occorrere in una superficie ellittica liscia relativamente minima. Si fanno poi alcuni esempi in cui compaiono diversi tipi di queste fibre.

Teorema 2.1.1 (Kodaira). *Le uniche fibre singolari che possono occorrere in una superficie ellittica relativamente minima con sezione sono quelle che compaiono nella seguente tabella.*

Dimostrazione. [M] □

TABLE I Kodaira's Classification of Singular Fibers of A Minimal Elliptic Surface

Kodair	Dynkin Diagram	Fiber	Components
I_0			smooth elliptic curve
I_1			nodal rational curve
I_2			two smooth rational curves
$I_N, N \geq 3$			N smooth rational curves
$I_N^*, N \geq 3$			N+5 smooth rational curves
II			a cuspidal rational curve
III			two smooth rational curves
IV			three smooth rational curves
IV^*			7 smooth rational curves
III^*			8 smooth rational curves
II^*			9 smooth rational curves
$I_{N,M}$			each component has multiplicity M.

Nella tabella, le fibre irriducibili hanno autointersezione 0, mentre le componenti irriducibili delle fibre riducibili -2 .

Una fibra su una superficie ellittica $\pi : X \rightarrow C$ è un divisore su X , di conseguenza ogni sua componente possiede una molteplicità per le fibre di tipo I_0, I_1, I_2, II, III e IV la molteplicità di ogni componente è 1; per il tipo $I_{N,M}$ ogni componente ha molteplicità M ; la fibra I_N è composta da N curve razionali che si incontrano in modo da formare un ciclo.

2.1.1 Esempio base: il fascio di cubiche

Si illustrano adesso una serie di esempi per mostrare l'esistenza di fibrazioni in cui compaiono le fibre singolari della lista di Kodaira.

Sia C_1 una cubica liscia in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e sia C_2 una qualunque altra cubica. Il fascio generato da C_1 e C_2 ha 9 punti base (contati con molteplicità). Il fascio induce una mappa razionale

$$\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

in cui la fibra di un punto $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$ è $\phi^{-1}([\alpha, \beta]) = \{\alpha C_1 + \beta C_2 = 0\}$.

Lo scoppimento dei 9 punti base del fascio induce il morfismo

$$\pi : X \rightarrow \mathbb{P}^1,$$

il quale esibisce la superficie razionale X come ellittica su \mathbb{P}^1 .

X è relativamente minima, in quanto se ci fossero (-1) -curve verticali significherebbe aver scoppiato un numero di punti superiori a $9 = C_1 \cdot C_2$.

Variando C_2 , si ottengono parte delle fibre singolari della lista di Kodaira.

Esempio 2.1.1 (C_2 ridotta). Supponiamo C_2 ridotta e tale che incontri C_1 trasversalmente in 9 punti distinti: allora la fibra di π relativa a C_2 , cioè $\pi^{-1}([0, 1])$ sarà la trasformata propria di C_2 . Sicchè se C_2 è una nodale avremo una fibra di tipo I_1 , se è una cuspidale si avrà una fibra di tipo II , se è composta da una conica e una retta avremo una fibra I_2 se la retta non

è tangente e di tipo *III* se invece lo è, se C_2 si compone di 3 rette, avremo una fibra I_3 se non si intersecano in un punto e *IV* se invece lo fanno.

Ci si chiede a questo punto quante fibre singolari possieda un fascio come quello nell'esempio precedente. Per rispondere a questa domanda si parte da un criterio per stabilire se una cubica nel piano proiettivo è singolare.

Definizione 2.1.1. Siano $[x_1, x_2, x_3]$ le coordinate omogenee di \mathbb{P}^2 e sia $F(x_1, x_2, x_3)$ un polinomio omogeneo di grado 3. Si definiscono H_F il determinante della matrice Hessiana $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$, $G_{ij} = x_i \frac{\partial F}{\partial x_j}$ e D_F il determinante della matrice 10×10 con coefficienti i coefficienti delle 10 cubiche (sia H_F che G_{ij} sono cubiche).

Poichè H_F è cubica nei coefficienti della F e le G_{ij} sono lineari in tali coefficienti, si ha che D_F è omogeneo di grado 12 nei coefficienti di F .

Lemma 2.1.2. *La curva cubica definita da $F = 0$ è singolare se e solo se $D_F = 0$.*

Questo criterio mostra che il luogo discriminante per la fibrazione sul fascio di cubiche ha grado 12. Dunque ci si aspetta che in un fascio di cubiche lisce, si abbiano 12 membri singolari (in generale 12 nodali, in quanto le nodali sono le cubiche singolari più generali) che nella superficie ellittica associata daranno luogo a 12 fibre singolari di tipo I_1 . In un fascio di cubiche in cui C_2 non è liscia, ci si aspettano sempre 12 fibre singolari, contate con molteplicità.

Esempio 2.1.2 (C_2 non ridotta). Si mostrano alcuni esempi in cui la curva C_2 possiede componenti con molteplicità maggiori di 1.

- $C_2 = 2L + M$, con L e M rette distinte in \mathbb{P}^2 , tale che C_1 incontri trasversalmente entrambe le rette in 3 punti. Una volta risolti i punti base del fascio generato da C_1 e C_2 , si vede che la fibra relativa a C_2 è di tipo I_0^* . La fibra è composta dalla trasformata di L , che ha molteplicità

2, dalla trasformata di M e dalle tre rette eccezionali costruite in luogo dei 3 punti di intersezione di C_1 e L .

- $C_2 = 3N$, con N retta di \mathbb{P}^2 . Se C_1 la interseca trasversalmente in 3 punti. La trasformata di C_2 nel fascio è una fibra di tipo IV^* ; se C_1 la interseca trasversalmente in un punto ed è tangente in un altro, la trasformata di C_2 sarà di tipo III^* , mentre se N è una tangente di flesso per C_1 , la fibra relativa a C_2 sarà di tipo II^* .
- $C_2 = \{xyz = 0\}$. Se C_1 passa per un vertice del triangolo ed è tangente ad una delle tre rette, allora la rette eccezionale sopra quel vertice sarà una componente della fibra relativa a C_2 . Se, inoltre, C_1 è tangente ad una delle rette nel vertice, allora saranno due rette eccezionali sopra il vertice a contribuire alla fibra relativa a C_2 . In ogni caso, il triangolo $xyz = 0$ verrà trasformato in una fibra di tipo I_N per qualche $N \geq 3$.

Variando ulteriormente C_2 , si possono trovare tutti i tipi di fibra della lista di Kodaira.

2.2 Esistenza ed unicità di un modello relativamente minimo

Se una superficie ellittica $\pi : X \rightarrow C$ non è minima, allora deve esistere qualche (-1) -curva giacente sulle fibre di π . Un modello relativamente minimo di X può essere ottenuto contraendo ognuna delle (-1) -curve verticali. Faremo vedere che un modello liscio così costruito è unico a meno di isomorfismi.

Definizione 2.2.1. Siano $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$ e $\pi_2 : X_2 \rightarrow C$ due superfici ellittiche sulla curva C . Diremo che X_1 e X_2 sono birazionalmente equivalenti come superfici ellittiche su C se esiste una mappa birazionale

$$f : X_1 \rightarrow X_2$$

che preservi la struttura ellittica, cioè tale che

$$\pi_1 = \pi_2 \circ f.$$

Proposizione 2.2.1. *Siano $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$ e $\pi_2 : X_2 \rightarrow C$ due superfici ellittiche lisce relativamente minime sulla curva C .*

Sia poi $f : X_1 \rightarrow X_2$ una mappa birazionale.

Allora f è un isomorfismo

Dimostrazione. f preserva la struttura ellittica, dunque può essere risolta soltanto scoppiando punti e contraendo curve nelle fibre di π_1 e π_2 . Sia X una superficie che domini sia X_1 sia X_2 , tale che il numero di scoppiamenti necessari per passare da X_1 a X sia minimo. Si ha il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \alpha \swarrow & & \searrow \beta \\ X_1 & & X_2 \\ \pi_1 \searrow & & \swarrow \pi_2 \\ & C & \end{array}$$

α e β indicano gli scoppiamenti di X_1 e X_2 . Vogliamo mostrare che β è un isomorfismo. Se non lo fosse, β si può fattorizzare in una sequenza di scoppiamenti: sia E il primo divisore eccezionale. Ora, se E fosse eccezionale anche per α , contraendolo si otterrebbe X' , una superficie più vicina ad X , che dominerebbe ancora sia X_1 che X_2 , violando la minimalità di X supposta precedentemente. Dunque E non è eccezionale per X_1 , il che significa che E deve essere una trasformata propria di una componente di una fibra di π_1 .

Vista la tabella delle possibili fibre per una superficie ellittica relativamente minima, l'immagine \bar{E} di E in X_1 può essere soltanto di tre tipi: una curva liscia razionale di autointersezione (-2) , una cuspidale o nodale di autointersezione 0 oppure una curva ellittica liscia. E è liscia e razionale, dunque l'ultimo caso non può sussistere; inoltre, $E^2 = -1$ in X , quindi nemmeno il primo tipo è possibile in quanto l'autointersezione può soltanto scendere in caso di scoppiamenti.

Dunque E deve essere una curva razionale con un punto doppio ordinario

e autointersezione 0. Per ottenere come trasformata propria E che è liscia, in qualche passo della sequenza di scoppamenti di α , il punto doppio di \bar{E} deve essere stato contratto. Non appena questo si fosse verificato, l'autointersezione avrebbe scalato di 4, rendendo impossibile la situazione $E^2 = -1$. Dunque E non può esistere, perciò β è un isomorfismo. Per simmetria α è un isomorfismo e dunque anche f è un isomorfismo. \square

Corollario 2.2.2. *Data una superficie ellittica $\pi : X \rightarrow C$, esiste un'unica superficie ellittica relativamente minima $\pi_1 : X_1 \rightarrow C$ birazionalmente equivalente ad X come superfici ellittiche su C .*

2.3 Fibrizioni di Weierstrass

In questa sezione si generalizzano i concetti relativi all'immersione delle curve ellittiche nel piano alle superfici ellittiche. L'obiettivo è di sviluppare la teoria di Weierstrass per una famiglia di curve ellittiche, cioè una fibrazione ellittica. Purtroppo una superficie ellittica liscia non comprende soltanto curve ellittiche lisce, nodali e cuspidali. Inoltre, su ogni curva ellittica va scelto un punto, di conseguenza bisognerebbe richiedere che sia data una sezione per la fibrazione ellittica.

Definizione 2.3.1. Siano X una superficie e C una curva. Una fibrazione di Weierstrass è un morfismo piatto e proprio $f : X \rightarrow C$ tale che ogni fibra geometrica sia una delle seguenti:

- una curva liscia di genere uno
- una curva razionale con un nodo
- una curva razionale con una cuspidale

e la fibra geometrica sia liscia. Inoltre, è data una sezione S che non passa per i nodi e le cuspidi delle fibre.

Sia $f : X \rightarrow C$ una superficie ellittica relativamente minima con sezione S . È possibile contrarre l'unione delle componenti delle fibre singolari che non intersecano S .

Proposizione 2.3.1. *Una tale contrazione dà luogo ad una superficie singolare X' che ammette una fibrazione di Weierstrass su C . Le singolarità di X' sono alla peggio punti doppi razionali. Dall'altro lato, $X \rightarrow X'$ è la risoluzione minimale di tali singolarità*

Sia $f' : X' \rightarrow C$ la fibrazione di Weierstrass ottenuta dalla superficie ellittica relativamente minima $f : X \rightarrow C$: denotiamo ancora con S la relativa sezione in X' .

Definizione 2.3.2. Denotiamo il fibrato normale di $S \subset X'$ con $N_{S/X'}$ e il suo fibrato duale

$$(f'_* N_{S/X'})^{-1} = \mathbb{L}$$

\mathbb{L} si dice fibrato in rette fondamentale della fibrazione di Weierstrass $f' : X' \rightarrow C$.

X' ha una forma globale di Weierstrass

$$y^2 = x^3 + Ax + B,$$

dove x è sezione globale di \mathbb{L}^2 , y sezione globale di \mathbb{L}^3 , A di \mathbb{L}^4 e B di \mathbb{L}^6 .

Definizione 2.3.3. Chiameremo la tripletta (\mathbb{L}, A, B) dati di Weierstrass di X' .

Il discriminante della fibrazione è la sezione $\Delta = 4A^3 + 27B^2$ di \mathbb{L}^{12} .

2.4 Singolarità delle superfici e delle 3-folds

Nella seguente sezione si analizzano le singolarità delle superfici e 3-folds quoziente che incontreremo nel corso della tesi. Per le definizioni e risultati generali sulle singolarità di tipo quoziente riferiamo a [G] e [Re]

Definizione 2.4.1. Sia X una varietà singolare e sia $f : Y \rightarrow X$ una sua risoluzione.

Si ha che

$$K_Y = f^*(K_X) + \sum_i a_i E_i$$

, dove gli a_i sono numeri razionali e gli E_i sono i divisori eccezionali. Si dice che X ha singolarità

- terminali se $a_i > 0$ per ogni i
- canoniche se $a_i \geq 0$ per ogni i
- klt se $a_i > -1$ per ogni i

Per quanto riguarda le singolarità quoziente di superficie, si ha il seguente utile risultato

Proposizione 2.4.1. *Una singolarità quoziente di superficie è canonica se in un suo intorno è equivalente a \mathbb{C}^2/A , dove $A \in SL(2, \mathbb{C})$; è klt se in un suo intorno è equivalente a \mathbb{C}^2/B , con $B \in GL(2, \mathbb{C})$*

Dimostrazione. Si veda [Re] □

Proposizione 2.4.2. *Una singolarità quoziente di 3-fold di tipo $\frac{1}{k}(a, b, c)$ risulta essere*

- terminale se $a + b + c > k$,
- canonica se $a + b + c = k$,
- klt se $a + b + c < k$.

Dimostrazione. [Re] □

Concludiamo il capitolo con due esempi di superfici ellittiche che saranno fondamentali anche nel prosieguo della trattazione, per quanto riguarderà le varietà ellittiche di dimensione 3. La prima delle due è stata studiata in [S], la seconda non era ancora stata analizzata.

2.5 La superficie ellittica $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$

Definizione 2.5.1. Sia $\omega = e^{\frac{2}{3}i\pi}$ una radice terza primitiva dell'unità e sia E_ω la curva ellittica

$$E_\omega = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega).$$

Si consideri la mappa

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \omega z. \end{aligned}$$

g preserva il reticolo $\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ e dunque induce un automorfismo su E_ω , che genera un gruppo di automorfismi sulla curva ellittica di ordine 3, la cui azione si indicherà ancora con ω .

Definizione 2.5.2. Siano P_0, P_1 e P_2 le classi laterali del reticolo di $0, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{2}}$.

Dunque P_0, P_1 e P_2 sono gli unici 3 punti di E_ω fissati dall'azione di ω . La proiezione naturale

$$q_1 : E_\omega \rightarrow E_\omega / \langle \omega \rangle$$

è un rivestimento triplo che si ramifica nei punti P_0, P_1 e P_2 , con indice di ramificazione 3.

Proposizione 2.5.1. *Il genere della curva quoziente $E_\omega / \langle \omega \rangle$ è zero*

Dimostrazione. Si veda [S] □

Dalla proposizione precedente segue che

$$E_\omega / \langle \omega \rangle \cong \mathbb{P}^1.$$

Definizione 2.5.3. Denotiamo l'immagine dei 3 punti fissati da q_1 con

$$\begin{aligned} q_1(P_0) &= [P_0], \\ q_1(P_1) &= [P_1], \\ q_1(P_2) &= [P_2]. \end{aligned}$$

Definizione 2.5.4. $E_\omega^2 := E_\omega \times E_\omega$

La moltiplicazione per ω induce l'automorfismo diagonale (ω, ω) sulla varietà E_ω^2 , definita da:

$$(P, Q) \mapsto (\omega P, \omega Q), \text{ con } P, Q \in E_\omega,$$

il quale induce un gruppo di automorfismi su E_ω^2 , che chiameremo azione diagonale di ω .

Proposizione 2.5.2. *L'azione diagonale di ω fissa 9 punti in E_ω^2 , cioè*

$$P_{ij} = (P_i, P_j), \text{ con } i, j = 0, 1, 2.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è una semplice verifica. \square

Definizione 2.5.5. Denotiamo con q_2 il quoziente naturale

$$q_2 : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

Corollario 2.5.3. *La superficie quoziente $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ ha 9 punti singolari, che sono singolarità cicliche quoziente di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$.*

Dimostrazione. $q_2 : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ è un rivestimento triplo che si ramifica nei 9 punti fissati dall'azione diagonale di ω . \square

2.5.1 Le singolarità della superficie

Come visto, la superficie quoziente $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ ha alcune singolarità quoziente di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$. Attraverso la geometria torica e la teoria dell'eliminazione polinomiale, si possono trovare dei modelli locali per queste singolarità.

Proposizione 2.5.4. *Le singolarità della superficie quoziente sono equivalenti a quella riportata nella tabella 2.1*

Dimostrazione. Il ventaglio associato ad una singolarità di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$ è il ventaglio $\sigma = \{(0, 1), (3, -1)\}$. Il ventaglio duale è $\sigma^V = \{(1, 0), (1, 3)\}$. Le coordinate che descrivono la varietà associata adl ventaglio σ sono dunque $x_1 = x$, $x_2 = xy$, $x_3 = xy^2$ e $x_4 = xy^3$. Sfruttando il teorema di implicitizzazione polinomiale, si ottiene che le equazioni che descrivono la varietà associata a σ sono

$$\begin{aligned} x_1x_3 - x_2^2 &= 0, \\ x_2x_4 - x_3^2, \\ x_1x_4 - x_2x_3. \end{aligned}$$

La varietà quoziente $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ è isomorfa alla varietà descritta da tale equazione in un intorno delle singolarità di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$. \square

L'algoritmo utilizzato su Singular per trovare le equazioni per il modello della singolarità di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$ è il seguente:

```
> ring R = 0, (x, y, x1, x2, x3, x4), lp;
> ideal I = x1 - x, x2 - x * y, x3 - x * y^2, x4 - x * y^3;
> ideal G = redGroebner(I);
> ideal J = eliminate(I, xy);
> J;
J[1] = x1 * x3 - x2^2
J[2] = x2x4 - x3^2
J[3] = x1x4 - x2x3
```

Tipo di singolarità	Equazione della singolarità	Variabili
$\frac{1}{3}(1, 1)$	$x_2x_4 - x_3^2 = 0, x_1x_4 - x_2x_3 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0$	x_1, x_2, x_3, x_4

Tabella 2.1:

2.5.2 Una risoluzione liscia di $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$

Per risolvere la varietà quoziente $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$, consideriamo uno dei punti singolari $P_{ij} = (P_i, P_j) \in E_\omega^2$, e prendiamo una carta locale (U, ϕ) , dove U

è un intorno di P_{ij} e $\phi : U \rightarrow D$ è un biolomorfismo dall'aperto U al disco unitario complesso $D \subset \mathbb{C}^2$. Si possono prendere coordinate (x, y) su D in modo che $\phi(x, y) = 0$ e in modo che ω agisca sul disco attraverso ϕ nel seguente modo:

$$\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}(x, y) = (\omega x, \omega y), \text{ con } (x, y) \in D.$$

Le rette passanti per l'origine del disco vengono dunque preservate dall'azione del gruppo generato dall'azione di ω .

Lemma 2.5.5. *Lo scoppimento del disco D , quozientato per l'azione di ω , è non singolare*

Dimostrazione. Se si considera il blow-up del disco nell'origine $\tilde{D} \rightarrow D$, l'azione si estende a \tilde{D} , nel seguente modo: le coordinate su \tilde{D} sono

$$\tilde{D} = \{(x, y, (u : v)) \mid xv = yu\}$$

e l'azione di gruppo su \tilde{D} è

$$(x, y, (u : v)) \mapsto (\omega x, \omega y, (u : v)).$$

È evidente che ω agisce banalmente sulla retta eccezionale, che è definita da $x = y = 0$, ed infatti ogni punto della retta eccezionale corrisponde ad una retta per l'origine nel disco D , e come detto tali rette vengono preservate dall'azione di ω .

Consideriamo il quoziente naturale $\tilde{D} \rightarrow \tilde{D} / \langle \omega \rangle$: è un rivestimento totalmente ramificato sulla retta eccezionale e dunque $\tilde{D} / \langle \omega \rangle$ è non singolare. \square

Definizione 2.5.6. Chiamiamo

$$b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2.$$

lo scoppimento dei 9 punti singolari.

Corollario 2.5.6. *La varietà quoziente*

$$\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

è non singolare.

Dimostrazione. Come mostrato nella discussione locale, le nove rette eccezionali sono fissate puntualmente dall'azione di ω , dunque il quoziente naturale è totalmente ramificato sulle 9 rette eccezionali \square

2.5.3 Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$

Definizione 2.5.7. Definiamo $\pi : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega$ la proiezione sul primo fattore di E_ω^2 , $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$ lo scoppimento nei nove punti singolari, $q_1 : E_\omega \rightarrow E_\omega / \langle \omega \rangle$, $q_2 : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ e $\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ le mappe quoziente rispetto a ω .

Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_\omega^2 & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & \tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \\ \downarrow b & & \downarrow f_1 \\ E_\omega^2 & \xrightarrow{q_2} & E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \\ \downarrow \pi & & \downarrow f_2 \\ E_\omega & \xrightarrow{q_1} & E_\omega / \langle \omega \rangle \end{array}$$

I morfismi f_1 e f_2 sono così definiti:

Definizione 2.5.8. Il morfismo

$$f_1 : \tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

è la risoluzione liscia della superficie quoziente descritta nella sezione 2.4.1 e il morfismo

$$f_2 : E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega / \langle \omega \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

è il morfismo indotto dal quoziente.

Proposizione 2.5.7. $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ è una superficie ellittica liscia che ammette una fibrazione ellittica su \mathbb{P}^1 , la cui fibra generica è isomorfa alla curva ellittica E_ω , con una data sezione s_0 .

Dimostrazione. f_2 ha come fibra generica una curva ellittica isomorfa a E_ω . Anche la composizione

$$f = f_2 \circ f_1 : E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega / \langle \omega \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

ha fibra generica isomorfa a E_ω . Si consideri ora la sezione della fibrazione $\pi : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega$

$$\begin{aligned} s_0 : E_\omega &\rightarrow E_\omega^2 \\ x &\mapsto (x, P_0). \end{aligned}$$

è chiaro che s_0 è equivariante rispetto all'azione di ω , dunque l'immagine di s_0 via la mappa quoziente \tilde{q}_2 è una sezione della fibrazione $f : E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$, che verrà denotata ancora con s_0 . \square

Inoltre, f ha 3 fibre singolari, ed il luogo discriminante è

$$\Delta(f) = \{[P_0], [P_1], [P_2]\}.$$

2.5.4 Le fibre singolari

Consideriamo un punto $[P_i] \in \Delta(f)$, il luogo discriminante della fibrazione $f : E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$. La controimmagine di $[P_i]$ rispetto al quoziente q_1 è

$$q_1^{-1}([P_i]) = P_i.$$

Definizione 2.5.9. Chiamiamo C_i la retroimmagine rispetto alla proiezione π di P_i

$$C_i := \pi^{-1}(P_i) = \{(P_i, x), x \in E_\omega\}$$

la retroimmagine di $q_1^{-1}([P_i])$ rispetto alla proiezione π .

C_i dunque è isomorfa a E_ω . Si noti che 3 dei 9 punti singolari della superficie quoziente giacciono su C_i , cioè P_{i0}, P_{i1} e P_{i2} .

Definizione 2.5.10. Consideriamo ora lo scoppio $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$ nei P_{ij} . Denotiamo con E_{ij} la retta eccezionale sopra P_{ij} e con \hat{C}_i la trasformata stretta di C_i .

Il pullback del divisore C_i sotto il morfismo

$$b^* : Div(E_\omega^2) \rightarrow Div(\tilde{E}_\omega^2)$$

è

$$b^*(C_i) = \hat{C}_i + E_{i0} + E_{i1} + E_{i2}.$$

Come già osservato, l'azione di ω è banale sulle rette eccezionali, mentre su C_i ω agisce nello stesso modo che su E_ω . Per quanto osservato fino ad ora, $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ ha 4 componenti.

Definizione 2.5.11. Denotiamo le 4 componenti di $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ con

$$\begin{aligned} D_i &:= \tilde{q}_2(\hat{C}_i) \\ D_{ij} &:= \tilde{q}_2(E_{ij}). \end{aligned}$$

Dunque D_i e D_{ij} sono le 4 componenti della fibra $f^{-1}([P_i])$. Studiamone la molteplicità delle componenti.

Proposizione 2.5.8. $f^{-1}([P_i]) = 3D_i + D_{i0} + D_{i1} + D_{i2}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_i$ un punto diverso da P_{ij} , $j = 0, 1, 2$, e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^2 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap \omega(U_P) \cap \omega^2(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto delle rette eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_2|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_2(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_2(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_2(P)$ in $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y')$ centrate in $\tilde{q}_2(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = P_i \in E_\omega$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s)$ centrate in P_i e coordinate locali (V, s') centrate in $[P_i]$ in $E_\omega / \langle \omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y) & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & (\tilde{q}_2(U_P), x', y') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ P_i \in (\pi(U_P), s) & \xrightarrow{q_1} & P_i \in (V, s') \end{array}$$

$\tilde{q}_2|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned}\tilde{q}_2^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_2^*(y') &= y.\end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s)$ e (V, s') in modo che

$$\pi^*(s) = x$$

e

$$q_1^*(s') = s^3.$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[s'] & \xrightarrow{q_1^*} & \mathbb{C}[s] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y'] & \xrightarrow{\tilde{q}_2^*} & \mathbb{C}[x, y]\end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$f^*(s') = (x')^3.$$

$[P_i]$ è localmente definito da $s' = 0$ in $V \subset E_\omega / \langle \omega \rangle$ e D_i è localmente definito da $x' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_i come componente della fibra $f^{-1}([P_i])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ lungo D_i : dunque la molteplicità di D_i è 3. Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $D_{ij} = 1$. \square

Questo tipo di fibra non compare nella lista stilata da Kodaira: mostriamo che c'è una (-1) -curva tra le componenti della fibra. Questo significa che la superficie ellittica $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$ non è relativamente minima. Allo scopo di costruirne un modello relativamente minimo, calcoliamo le autointersezioni di ogni componente delle fibre singolari.

Proposizione 2.5.9. $D_i^2 = -1$, $D_i \cdot D_{ij} = 1$ e $D_{ij}^2 = -3$.

Dimostrazione. Su E_ω^2 si ha $C_i^2 = 0$ in quanto C_i è una curva ellittica liscia: dopo lo scoppimento dei nove punti singolari, di cui 3 giacciono su C_i , si ha, per la trasformata, $\hat{C}_i^2 = -3$ su \tilde{E}_ω^2 . I divisori eccezionali E_{ij} hanno autointersezione (-1) .

Consideriamo ora la mappa quoziente $\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{e}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$: per il Teorema della formula di proiezione, si ha

$$\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot \hat{C}_i) = D_i \cdot \tilde{q}_{2*}\hat{C}_i$$

Poichè $\tilde{q}_2|_{\hat{C}_i} : \hat{C}_i \rightarrow D_i$ è un rivestimento di ordine 3, si ha che

$$\tilde{q}_{2*}\hat{C}_i = 3D_i$$

e che

$$\tilde{q}_2^*(D_i) = \hat{C}_i.$$

Inserendo queste due equazioni nella formula di proiezione si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot \hat{C}_i) &= D_i \cdot 3D_i, \\ -3 &= 3D_i^2, \\ -1 &= D_i^2. \end{aligned}$$

Poichè ω agisce banalmente sulle rette eccezionali E_{ij} , si ha che $\tilde{q}_2|_{E_{ij}} : E_{ij} \rightarrow D_{ij}$ è un isomorfismo e

$$\tilde{q}_{2*}E_{ij} = D_{ij}.$$

Applicando la formula di proiezione a E_{ij} e D_i , si ha

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot \tilde{q}_{2*}E_{ij}, \\ \tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot D_{ij}, \\ 1 &= D_i \cdot D_{ij}. \end{aligned}$$

La fibra singolare $F_i := f^{-1}([P_i]) = 3D_i + D_{i1} + D_{i2} + D_{i3}$ ha autointersezione zero, e dunque si ha

$$\begin{aligned} 0 &= f_i^2, \\ 0 &= (3D_i + \sum_{j=0}^2 D_{ij})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= 9D_i^2 + 6 \sum_j D_i \cdot D_{ij} + \sum_j D_{ij}^2, \\
0 &= -9 + 18 + \sum_j D_{ij}^2, \\
-3 &= D_{ij}^2.
\end{aligned}$$

□

Dai calcoli svolti in precedenza, si evince dunque che ogni fibra singolare F_i ha una (-1) -componente, che è D_{ij} , quindi il modello precedentemente descritto non è relativamente minimo.

2.5.5 Il modello relativamente minimo S di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$

Come appena trovato, ogni fibra singolare F_i della superficie ellittica $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$ possiede la (-1) -componente D_i . Per ottenere un modello relativamente minimo, tale (-1) -curva deve essere contratta. Questa e le seguenti contrazioni che verranno effettuate sono possibili per il Teorema di Castelnuovo.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle & \xrightarrow{c} & S \\
& \searrow & \downarrow f' \\
& & \mathbb{P}^1
\end{array}$$

Definizione 2.5.12. Denotiamo con S la superficie ottenuta contraendo D_i , con c tale contrazione e con D'_{ij} l'immagine di D_{ij} dopo la contrazione c .

Proposizione 2.5.10. *Il morfismo $f' : S \rightarrow \mathbb{P}^1$ è una fibrazione ellittica con 3 fibre singolari $F'_i := f'^{-1}([P_i])$ di tipo di Kodaira IV (tabella 1)*

Dimostrazione. Dopo la contrazione c , l'autointersezione delle D'_{ij} è -2 in quanto trasformate delle D_{ij} , le quali avevano autointersezione -3 . □

Proposizione 2.5.11. *f' ha una sezione.*

Dimostrazione. Le curve D_i contratte da $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ sono componenti delle fibre che hanno molteplicità 3, perciò nessuna sezione di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$

interseca le D_i . Ne consegue che l'immagine della sezione data s_0 per la fibrazione $\tilde{E}_\omega^2 / \langle \omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$ rispetto alle contrazioni, è una sezione per $f' : S \rightarrow \mathbb{P}^1$, che denotiamo ancora con s_0 . \square

In definitiva, $f' : s \rightarrow \mathbb{P}^1$ è una superficie ellittica relativamente minima con una sezione data s_0 .

2.6 La superficie ellittica $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$

Lo scopo di questa sezione è studiare la superficie ellittica $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ e costruire un modello liscio relativamente minimo.

Sia E_ω la nostra curva ellittica

$$E_\omega = \mathbb{C} / (\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega).$$

Si consideri la mappa

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto -\omega z. \end{aligned}$$

g preserva il reticolo $\mathbb{C} / \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega$ e dunque induce un automorfismo su E_ω , che genera un gruppo di automorfismi sulla curva ellittica di ordine 6, la cui azione si indicherà ancora con $-\omega$.

Proposizione 2.6.1. *La proiezione naturale*

$$q_1 : E_\omega \rightarrow E_\omega / \langle -\omega \rangle$$

è un rivestimento sestuplo che si ramifica in 3 punti A, B e C , con indice di ramificazione rispettivamente 2, 3 e 6.

Dimostrazione. Il punto C di indice 6 è il punto fisso per l'azione di $-\omega$. Gli altri punti si trovano analogamente a quelli della varietà della precedente sezione \square

In altre parole, l'azione di $-\omega$ identifica 3 punti A_1, A_2 e A_3 , 2 punti B_1 e B_2 e ha un punto fisso C .

Proposizione 2.6.2. *Il genere di $E_\omega / \langle -\omega \rangle$ è zero, dunque*

$$E_\omega / \langle -\omega \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

Dimostrazione. La prova è una semplice applicazione della formula di Riemann-Hurwitz □

Definizione 2.6.1. Denotiamo l'immagine dei punti in cui q_1 si ramifica con

$$\begin{aligned} q_1(A_1) &= q_1(A_2) = q_1(A_3) = [A], \\ q_1(B_1) &= q_1(B_2) = [B], \\ q_1(C) &= [C]. \end{aligned}$$

La moltiplicazione per $-\omega$ induce sulla superficie E_ω^2 l'automorfismo diagonale $(-\omega, -\omega)$, definito da:

$$(P, Q) \mapsto (-\omega, -\omega), \text{ con } P, Q \in E_\omega,$$

il quale induce un gruppo di automorfismi su E_ω^2 , che chiameremo azione diagonale di $-\omega$. La varietà E_ω^2 quotientata per l'azione di tale gruppo si denoterà con $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$.

Definizione 2.6.2. Denotiamo le seguenti coppie di punti con:

$$\begin{aligned} (A_i, A_j) &= A_{ij}, \\ (B_i, B_j) &= B_{ij}. \end{aligned}$$

Proposizione 2.6.3. *La varietà quotiente $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ ha 10 singolarità cicliche quotiente, di cui*

- 5 di tipo $\frac{1}{2}(1, 1)$
- 4 di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$
- 1 di tipo $\frac{1}{6}(1, 1)$

Dimostrazione. E_ω^2 è liscia, dunque i punti singolari del quotiente sono tutti e soli i punti di ramificazione del rivestimento

$$q_2 : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle.$$

L'azione di $-\omega$ identifica le seguenti famiglie di punti, le cui immagini mediante q_2 denoteremo con:

$$\begin{aligned} q_2(A_{11}) &= q_2(A_{22}) = q_2(A_{33}) = [A_{11}], \\ q_2(A_{12}) &= q_2(A_{23}) = q_2(A_{31}) = [A_{12}], \\ q_2(A_{13}) &= q_2(A_{21}) = q_2(A_{32}) = [A_{13}], \\ q_2(A_1, C) &= q_2(A_2, C) = q_2(A_3, C) = [(A_1, C)], \\ q_2(C, A_1) &= q_2(C, A_2) = q_2(C, A_3) = [(C, A_1)], \\ q_2(B_{11}) &= q_2(B_{22}) = [B_{11}], \\ q_2(B_{12}) &= q_2(B_{21}) = [B_{12}], \\ q_2(B_1, C) &= q_2(B_2, C) = [(B_1, C)], \\ q_2(C, B_1) &= q_2(C, B_2) = [(C, B_1)], \\ q_2(C, C) &= [(C, C)]. \end{aligned}$$

- il punto di tipo $\frac{1}{6}(1, 1)$ è il punto fisso dell'azione di $-\omega$, cioè il punto $[(C, C)]$.
- i 5 punti singolari di tipo $\frac{1}{2}(1, 1)$ sono $[A_{11}], [A_{12}], [A_{13}], [(A_1, C)]$ e $[(C, A_1)]$
- le 4 singolarità di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$ sono $[B_{11}], [B_{12}], [(B_1, C)]$ e $[(C, B_1)]$.

□

2.6.1 Le singolarità della superficie

Come visto, la superficie quoziente $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ ha alcune singolarità quoziente di tipo $\frac{1}{2}(1, 1)$, altre di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$ ed una di tipo $\frac{1}{6}(1, 1)$. Attraverso la geometria torica e la teoria dell'eliminazione polinomiale, si possono trovare dei modelli locali per queste singolarità.

Proposizione 2.6.4. *Le singolarità della superficie quoziente sono equivalenti a quelle riportate nella tabella 2.2*

Dimostrazione. Le dimostrazioni per i casi $\frac{1}{2}(1, 1)$ e $\frac{1}{6}(1, 1)$ e i relativi algoritmi sono analoghi a quelli del caso dimostrato nella sezione precedente □

Tipo di singolarità	Equazione della singolarità	Variabili
$\frac{1}{2}(1, 1)$	$x_1x_3 - x_2^2 = 0$	x_1, x_2, x_3
$\frac{1}{3}(1, 1)$	$x_2x_4 - x_3^2 = 0, x_1x_4 - x_2x_3 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0$	x_1, x_2, x_3, x_4
$\frac{1}{6}(1, 1)$	$x_5x_7 - x_6^2 = 0, x_4x_6 - x_5^2 = 0, x_3x_7 - x_5^2 = 0,$ $x_3x_6 - x_4x_5 = 0, x_3x_5 - x_4^2 = 0, x_2x_7 - x_4x_5 = 0,$ $x_2x_6 - x_4^2 = 0, x_2x_5 - x_3x_4 = 0, x_2x_4 - x_3^2 = 0,$ $x_1x_7 - x_4^2 = 0, x_1x_6 - x_3x_4 = 0, x_1x_5 - x_3^2 = 0,$ $x_1x_4 - x_2x_3 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0, x_4x_7 - x_5x_6 = 0$	$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

Tabella 2.2:

2.6.2 Una risoluzione liscia di $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$

La risoluzione della varietà $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ è simile a quella della varietà $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$, cioè consiste nello scoppio dei 10 punti singolari.

Ad esempio, consideriamo il punto $A_{11} = (A_1, A_1)$ di E_ω^2 e prendiamo una carta locale (U, ϕ) , dove U è un intorno di A_{11} e $\phi : U \rightarrow D$ è un biolomorfismo da U al disco unitario complesso $D \subset \mathbb{C}^2$. Prendiamo coordinate (x, y) su D in modo che $\phi(x, y) = 0$ e in modo che $-\omega$ agisca sul disco attraverso ϕ nel seguente modo:

$$\phi \circ (-\omega) \circ \phi^{-1}(x, y) = (-\omega x, -\omega y), \text{ con } (x, y) \in D.$$

Le rette passanti per l'origine del disco vengono dunque preservate dall'azione del gruppo generato dall'azione di $-\omega$.

Lemma 2.6.5. *Lo scoppio del disco D , quozientato per l'azione di $-\omega$, è non singolare*

Dimostrazione. Se si considera il blow-up del disco nell'origine $\tilde{D} \rightarrow D$, l'azione si estende a \tilde{D} , nel seguente modo: le coordinate su \tilde{D} sono

$$\tilde{D} = \{(x, y, (u : v)) | xv = yu\}$$

e l'azione di gruppo su \tilde{D} è

$$(x, y, (u : v)) \mapsto (-\omega x, -\omega y, (u : v)).$$

È evidente che $-\omega$ agisce banalmente sulla retta eccezionale, che è definita da $x = y = 0$, ed infatti ogni punto della retta eccezionale corrisponde ad una retta per l'origine nel disco D , e come detto tali rette vengono preservate dall'azione di $-\omega$.

L'azione di $-\omega$ identifica i punti A_{11}, A_{22} e A_{33} , dunque anche le rette eccezionali dopo gli scoppiamenti di tali punti.

La proiezione dall'intorno di $[A_{11}]$ sul quoziente è totalmente ramificata sulla retta eccezionale, dunque il quoziente è non singolare. \square

Definizione 2.6.3. Denotiamo la totalità degli scoppiamenti per tutte le classi di equivalenza di punti (cioè per le famiglie di punti che vengono identificati da $-\omega$ e tali che la loro identificazione dia luogo ad un punto singolare) con

$$b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2.$$

Proposizione 2.6.6. *La varietà $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ è una superficie algebrica liscia.*

Dimostrazione. La mappa quoziente indotta

$$\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$$

è totalmente ramificata lungo le 10 rette eccezionali. \square

2.6.3 Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$

Definizione 2.6.4. Definiamo $\pi : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega$ la proiezione sul primo fattore di E_ω^2 , $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$ lo scoppiamento nei dieci punti singolari, $q_1 : E_\omega \rightarrow E_\omega / \langle -\omega \rangle$, $q_2 : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ e $\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ le mappe quoziente rispetto a ω .

Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{E}_\omega^2 & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \\
\downarrow b & & \downarrow f_1 \\
E_\omega^2 & \xrightarrow{q_2} & E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \\
\downarrow \pi & & \downarrow f_2 \\
E_\omega & \xrightarrow{q_1} & E_\omega / \langle -\omega \rangle
\end{array}$$

I morfismi f_1 e f_2 sono così definiti:

$$\textbf{Definizione 2.6.5. } f_1 : \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$$

è la risoluzione liscia della superficie quoziente descritta nella sezione 2.5.1 e il morfismo

$$f_2 : E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega / \langle -\omega \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

è il morfismo indotto dal quoziente.

Proposizione 2.6.7. $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ è una superficie ellittica liscia che ammette una fibrazione ellittica su \mathbb{P}^1 , la cui fibra generica è isomorfa alla curva ellittica E_ω , con una data sezione s_0 .

Dimostrazione. f_2 ha come fibra generica una curva isomorfa a E_ω .

Anche la composizione

$$f = f_2 \circ f_1 : E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega / \langle -\omega \rangle \cong \mathbb{P}^1$$

ha fibra generica isomorfa a E_ω . Si consideri ora la sezione della fibrazione $\pi : E_\omega^2 \rightarrow E_\omega$

$$\begin{aligned}
s_0 : E_\omega &\rightarrow E_\omega^2 \\
x &\mapsto (x, P_0).
\end{aligned}$$

è chiaro che s_0 è equivariante rispetto all'azione di $-\omega$, dunque l'immagine di s_0 via la mappa quoziente \tilde{q}_2 è una sezione della fibrazione $f : E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle \rightarrow \mathbb{P}^1$, che verrà denotata ancora con s_0 . \square

Inoltre, f ha 3 fibre singolari, ed il luogo discriminante è

$$\Delta(f) = \{[A], [B], [C]\}.$$

2.6.4 Le fibre singolari

Su ognuno dei punti di $\Delta(f)$ la fibra singolare è diversa; analizziamole caso per caso.

Definizione 2.6.6. Denotiamo

$$\begin{aligned} F_A &:= f^{-1}([A]), \\ F_B &:= f^{-1}([B]) \text{ e} \\ F_C &:= f^{-1}([C]) \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il punto $[A]$, la controimmagine di $[A]$ rispetto a q_1 è

$$q_1^{-1}([A]) = \{A_1, A_2, A_3\},$$

. La retroimmagine di tale insieme rispetto a π è

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(A_1) \cup \pi^{-1}(A_2) \cup \pi^{-1}(A_3) = \\ \{(A_1, x) | x \in E_\omega\} \cup \{(A_2, x) | x \in E_\omega\} \cup \{(A_3, x) | x \in E_\omega\}, \end{aligned}$$

dunque $\pi^{-1}(q_1^{-1}([A]))$ è composta dall'unione di 3 curve isomorfe a E_ω .

Sulla curva $\{(A_1, x) | x \in E_\omega\} \cong E_\omega$ giacciono i punti A_{11}, A_{12}, A_{13} e (A_1, C) ;

sulla curva $\{(A_2, x) | x \in E_\omega\} \cong E_\omega$ giacciono i punti A_{21}, A_{22}, A_{23} e (A_2, C) ;

sulla curva $\{(A_3, x) | x \in E_\omega\} \cong E_\omega$ giacciono i punti A_{31}, A_{32}, A_{33} e (A_3, C) .

Definizione 2.6.7. Denotiamo con $C_i = \pi^{-1}(A_i)$, con $i = 1, 2, 3$.

Definizione 2.6.8. Consideriamo lo scoppimento $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$. Denotiamo con E_{1j} le nove rette eccezionali relative ai punti A_{ij} , con E_{iC} le 3 rette eccezionali relative ai punti (A_i, C) e con \hat{C}_i la trasformata stretta di C_i .

Il pull-back dei divisori C_i mediante

$$b^* : Div(E_\omega^2) \rightarrow \tilde{E}_\omega^2$$

è

$$b^*(C_i) = \hat{C}_i + E_{i1} + E_{i2} + E_{i3} + E_{iC}.$$

Abbiamo osservato che $-\omega$ agisce banalmente sulle rette eccezionali ed agisce su \hat{C}_i allo stesso modo che su E_ω . Ne consegue che $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ ha 5 componenti.

Definizione 2.6.9. Denotiamo le 5 componenti di $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ con

$$\begin{aligned} D_i &= \tilde{q}_2(\hat{C}_i), \\ D_{ij} &= \tilde{q}_2(E_{ij}), \\ D_{iC} &= \tilde{q}_2(E_{iC}). \end{aligned}$$

Proposizione 2.6.8. *La fibra f_A è composta da 5 componenti*

Dimostrazione. L'azione di $-\omega$ su E_ω identifica i punti A_1, A_2 e A_3 , dunque le componenti D_1, D_2 e D_3 vengono identificate in $\tilde{E}_\omega / \langle -\omega \rangle$. L'azione di $-\omega$ su E_ω^2 identifica i punti A_{11}, A_{22} e A_{33} , dunque vengono identificate su $\tilde{E}_\omega / \langle -\omega \rangle$ anche le relative rette eccezionali e dunque le componenti D_{11}, D_{22} e D_{33} . Ovviamente lo stesso discorso vale per le componenti D_{12}, D_{23} e D_{31} , per le componenti D_{13}, D_{21} e D_{32} e per le componenti D_{1C}, D_{2C} e D_{3C} . \square

Definizione 2.6.10. Chiamiamo l'immagine delle componenti D_{11}, D_{22} e D_{33} rispetto al quoziente per l'azione di $-\omega$ \bar{D}_{11} . L'immagine delle componenti D_1, D_2 e D_3 verrà denotata con \bar{D}_1 , l'immagine di D_{12}, D_{23} e D_{31} con \bar{D}_{12} , l'immagine di D_{13}, D_{21} e D_{32} con \bar{D}_{13} e l'immagine di D_{1C}, D_{2C} e D_{3C} con \bar{D}_{1C} .

Resta da calcolare la molteplicità delle componenti.

Proposizione 2.6.9. $F_A = 2\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{13} + \bar{D}_{1C}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_i$ un punto diverso da A_{ij} e da A_{iC} , e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^2 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap (-\omega)(U_P) \cap \omega^2(U_P) \cap -\omega(U_P) \cap \omega(U_P) \cap (-\omega^2)(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto delle rette eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_2|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_2(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_2(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_2(P)$ in $\tilde{E}_\omega / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y')$ centrate

in $\tilde{q}_2(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = A_i \in E_\omega$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s)$ centrate in A_i e coordinate locali (V, s') centrate in $[A_i]$ in $E_\omega / \langle -\omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y) & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & (\tilde{q}_2(U_P), x', y') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ A_i \in (\pi(U_P), s) & \xrightarrow{q_1} & A_i \in (V, s') \end{array}$$

$\tilde{q}_2|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_2^*(y') &= y. \end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s)$ e (V, s') in modo che

$$\pi^*(s) = x$$

e

$$q_1^*(s') = s^2.$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[s'] & \xrightarrow{q_1^*} & \mathbb{C}[s] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y'] & \xrightarrow{\tilde{q}_2^*} & \mathbb{C}[x, y] \end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$f^*(s') = (x')^2.$$

$[A_i]$ è localmente definito da $s' = 0$ in $V \subset E_\omega / \langle -\omega \rangle$ e D_i è localmente definito da $x' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_i come componente della fibra $f^{-1}([A_i])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ lungo D_i : dunque la molteplicità di D_i è 2, dunque anche la molteplicità di \overline{D}_1 è 2.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $\overline{D}_{1j} = \overline{D}_{1C} = 1$. \square

La controimmagine di $[B]$ rispetto a q_1 è

$$q_1^{-1}([B]) = \{B_1, B_2\}.$$

La retroimmagine di tale insieme rispetto a π è

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(B_1) \cup \pi^{-1}(B_2) = \\ \{(B_1, x) | x \in E_\omega\} \cup \{(B_2, x) | x \in E_\omega\}, \end{aligned}$$

dunque $\pi^{-1}(q_1^{-1}([B]))$ è composta dall'unione di 2 curve isomorfe a E_ω .

Sulla curva $\{(B_1, x) | x \in E_\omega\} \cong E_\omega$ giacciono i punti B_{11}, B_{12} , e (B_1, C) ;

sulla curva $\{(B_2, x) | x \in E_\omega\} \cong E_\omega$ giacciono i punti B_{21}, B_{22} , e (B_2, C) .

Definizione 2.6.11. Denotiamo con $C_i = \pi^{-1}(B_i)$, con $i = 1, 2$.

Definizione 2.6.12. Consideriamo lo scoppimento $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$. Denotiamo con E_{ij} le 3 rette eccezionali relative ai punti B_{ij} , con E_{iC} le 2 rette eccezionali relative ai punti (B_i, C) e con \hat{C}_i la trasformata stretta di C_i .

Il pull-back dei divisori C_i mediante

$$b^* : Div(E^2\omega) \rightarrow \tilde{E}_\omega^2$$

è

$$b^*(C_i) = \hat{C}_i + E_{i1} + E_{i2} + E_{iC},$$

Abbiamo osservato che $-\omega$ agisce banalmente sulle rette eccezionali ed agisce su \hat{C}_i allo stesso modo che su E_ω . Ne consegue che $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ ha 4 componenti.

Definizione 2.6.13. Denotiamo le 4 componenti di $\tilde{q}_2(b^*(C_i))$ con

$$\begin{aligned} D_i &= \tilde{q}_2(\hat{C}_i), \\ D_{ij} &= \tilde{q}_2(E_{ij}), \\ D_{iC} &= \tilde{q}_2(E_{iC}). \end{aligned}$$

Proposizione 2.6.10. *La fibra F_B è composta da 4 componenti*

Dimostrazione. L'azione di $-\omega$ su E_ω identifica i punti B_1 e B_2 , dunque le componenti D_1 e D_2 vengono identificate in $\tilde{E}_\omega / \langle -\omega \rangle$.

L'azione di $-\omega$ su E_ω^2 identifica i punti B_{11} e B_{22} , dunque vengono identificate su $\tilde{E}_\omega / \langle -\omega \rangle$ anche le relative rette eccezionali e dunque le componenti D_{11} e D_{22} . Ovviamente lo stesso discorso vale per le componenti D_{12} e D_{21} e per le componenti D_{1C} e D_{2C} . \square

Definizione 2.6.14. Chiamiamo l'immagine delle componenti D_{11} e D_{22} rispetto al quoziente per l'azione di $-\omega$ \bar{D}_{11} . L'immagine delle componenti D_1 e D_2 verrà denotata con \bar{D}_1 , l'immagine di D_{12} e D_{21} con \bar{D}_{12} e l'immagine di D_{1C} e D_{2C} con \bar{D}_{1C} .

A questo punto possiamo affermare che la fibra $f^{-1}([B])$ è formata da 4 componenti, cioè \bar{D}_1 , \bar{D}_{11} , \bar{D}_{12} e \bar{D}_{1C} . Resta da calcolare la molteplicità delle componenti.

Proposizione 2.6.11. $F_B = 3\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{1C}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_i$ un punto diverso da B_{ij} e da B_{iC} , e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^2 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap (-\omega)(U_P) \cap \omega^2(U_P) \cap -\omega(U_P) \cap \omega(U_P) \cap (-\omega^2)(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto delle rette eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_2|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_2(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_2(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_2(P)$ in $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y')$ centrate in $\tilde{q}_2(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = A_i \in E_\omega$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s)$ centrate in A_i e coordinate locali (V, s') centrate in $[A_i]$ in $E_\omega / \langle -\omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y) & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & (\tilde{q}_2(U_P), x', y') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ B_i \in (\pi(U_P), s) & \xrightarrow{q_1} & B_i \in (V, s') \end{array}$$

$\tilde{q}_2|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned}\tilde{q}_2^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_2^*(y') &= y.\end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s)$ e (V, s') in modo che

$$\pi^*(s) = x$$

e

$$q_1^*(s') = s^3.$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[s'] & \xrightarrow{q_1^*} & \mathbb{C}[s] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y'] & \xrightarrow{\tilde{q}_2^*} & \mathbb{C}[x, y]\end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$f^*(s') = (x')^3.$$

$[B_i]$ è localmente definito da $s' = 0$ in $V \subset E_\omega / \langle -\omega \rangle$ e D_i è localmente definito da $x' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_i come componente della fibra $f^{-1}([B_i])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ lungo D_i : dunque la molteplicità di D_i è 3, dunque anche la molteplicità di \overline{D}_1 è 3.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $\overline{D}_{1j} = \overline{D}_{1C} = 1$. \square

La controimmagine di $[C]$ rispetto a q_1 è

$$q_1^{-1}([C]) = \{C\},$$

.

Definizione 2.6.15. Chiamiamo la retroimmagine di C rispetto a π

$$R := \pi^{-1}(C) = \{(C, x) | x \in E_\omega\},$$

. R è dunque isomorfa a E_ω .

Su tale curva giacciono i punti $(C, A_1), (C, A_2), (C, A_3), (C, B_1), (C, B_2)$ e (C, C) .

Definizione 2.6.16. Consideriamo lo scoppimento $b : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow E_\omega^2$. Denotiamo con E_{CA_i} le 3 rette eccezionali relative ai punti (C, A_i) , con E_{CB_i} le 2 rette eccezionali relative ai punti (C, B_i) , con E_C la retta eccezionale relativa al punto fisso (C, C) e con \hat{R} la trasformata stretta di R .

Il pull-back del divisore R mediante

$$b^* : Div(E^2)\omega \rightarrow \tilde{E}_\omega^2$$

è

$$b^*(R) = \hat{R} + E_{CA_1} + E_{CA_2} + E_{CA_3} + E_{CB_1} + E_{CB_2} + E_C,$$

Abbiamo osservato che $-\omega$ agisce banalmente sulle rette eccezionali ed agisce su \hat{R} allo stesso modo che su E_ω . Ne consegue che $\tilde{q}_2(b^*(R))$ ha sette componenti.

Definizione 2.6.17. Denotiamo le sette componenti di $\tilde{q}_2(b^*(R))$ con

$$\begin{aligned} D_R &= \tilde{q}_2(\hat{R}), \\ D_{CA_i} &= \tilde{q}_2(E_{CA_i}), \\ D_{CB_i} &= \tilde{q}_2(E_{CB_i}), \\ D_C &= \tilde{q}_2(E_C). \end{aligned}$$

Proposizione 2.6.12. *La fibra f_C è composta da 4 componenti*

Dimostrazione. L'azione di $-\omega$ su E_ω^2 identifica i punti $(C, A_1), (C, A_2)$ e (C, A_3) , dunque vengono identificate su $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ anche le relative rette eccezionali e dunque le componenti D_{CA_1}, D_{CA_2} e D_{CA_3} . Ovviamente lo stesso discorso vale per le componenti D_{CB_1} e D_{CB_2} (\overline{D}_{CB}). \square

Definizione 2.6.18. Chiamiamo l'immagine delle componenti D_{CA_1}, D_{CA_2} e D_{CA_3} rispetto al quoziente per l'azione di $-\omega$ \overline{D}_{CA} . L'immagine delle componenti D_{CB_1} e D_{CB_2} verrà denotata con \overline{D}_{CB} , l'immagine di D_C con \overline{D}_C e l'immagine di D_R e con \overline{D}_R .

Resta da calcolarne la molteplicità delle componenti.

Proposizione 2.6.13. $F_C = 6\bar{D}_R + 2\bar{D}_{CA} + 3\bar{D}_{CB} + \bar{D}_C$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{R}$ un punto diverso da (C, C) , da (C, A_i) e da (C, B_i) , e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^2 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap (-\omega)(U_P) \cap \omega^2(U_P) \cap -(U_P) \cap \omega(U_P) \cap (-\omega^2)(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto delle rette eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_2|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_2(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_2(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_2(P)$ in $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y')$ centrate in $\tilde{q}_2(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = C \in E_\omega$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s)$ centrate in C e coordinate locali (V, s') centrate in $[C]$ in $E_\omega / \langle -\omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y) & \xrightarrow{\tilde{q}_2} & (\tilde{q}_2(U_P), x', y') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ C \in (\pi(U_P), s) & \xrightarrow{q_1} & C \in (V, s') \end{array}$$

$\tilde{q}_2|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned} \tilde{q}_2^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_2^*(y') &= y. \end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s)$ e (V, s') in modo che

$$\pi^*(s) = x$$

e

$$q_1^*(s') = s^6.$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[s'] & \xrightarrow{q_1^*} & \mathbb{C}[s] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y'] & \xrightarrow{\tilde{q}_2^*} & \mathbb{C}[x, y] \end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$f^*(s') = (x')^6.$$

$[C]$ è localmente definito da $s' = 0$ in $V \subset E_\omega / \langle -\omega \rangle$ e D_R è localmente definito da $x' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_R come componente della fibra $f^{-1}([C])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ lungo D_R : dunque la molteplicità di D_R è 6, dunque anche la molteplicità di \bar{D}_R è 6.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $\bar{D}_{CA} = 2$, la molteplicità di $\bar{D}_{CB} = 3$ e quella di $\bar{D}_C = 1$. \square

Autointersezioni

Allo scopo di verificare se queste fibre appartengono alla lista stilata da Kodaira e di trovare quindi un modello relativamente minimo, calcoliamo l'autointersezione delle componenti di ogni fibra.

Per quanto riguarda la fibra

$$F_A = 2\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{13} + \bar{D}_{1C},$$

si ha la seguente proposizione.

Proposizione 2.6.14. $\bar{D}_1^2 = -2$, $\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} = 1$, $\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} = 1$, $\bar{D}_{1j}^2 = -2$ e $\bar{D}_{1C}^2 = -2$.

Dimostrazione. Su E_ω^2 si ha $C_i^2 = 0$ in quanto C_i è una curva ellittica liscia: dopo lo scoppio dei punti singolari, di cui 4 giacciono su C_i , si ha, per la trasformata, $\hat{C}_i^2 = -4$ su \tilde{E}_ω^2 . I divisori eccezionali E_{ij} e E_{iC} hanno autointersezione (-1) .

Consideriamo ora la mappa quoziente $\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{e}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$: per il Teorema della formula di proiezione, si ha

$$\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot \hat{C}_i) = D_i \cdot \tilde{q}_{2*}\hat{C}_i$$

Poichè $\tilde{q}_2|_{\hat{C}_i} : \hat{C}_i \rightarrow D_i$ è un rivestimento di ordine 2, si ha che

$$\tilde{q}_{2*}\hat{C}_i = 2D_i$$

e che

$$\tilde{q}_2^*(D_i) = \hat{C}_i.$$

Inserendo queste due equazioni nella formula di proiezione si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot \hat{C}_i) &= D_i \cdot 2D_i, \\ -4 &= 2D_i^2, \\ -2 &= D_i^2.\end{aligned}$$

Poichè ω agisce banalmente sulle rette eccezionali E_{ij} , si ha che $\tilde{q}_2|_{E_{ij}} : E_{ij} \rightarrow D_{ij}$ è un isomorfismo e

$$\tilde{q}_{2*}E_{ij} = D_{ij}.$$

Applicando la formula di proiezione a E_{ij} e D_i , si ha

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot \tilde{q}_{2*}E_{ij}, \\ \tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot D_{ij}, \\ 1 &= D_i \cdot D_{ij}.\end{aligned}$$

Stesso discorso vale per E_{iC} , per cui

$$1 = D_i \cdot D_{iC}.$$

Una volta applicata l'azione di $-\omega$, si ha che le relazioni valgono ancora per le immagini delle componenti, dunque

$$\begin{aligned}\bar{D}_1^2 &= -2, \\ \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} &= 1, \\ \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} &= 1.\end{aligned}$$

La fibra singolare $F_A = 2\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{13} + \bar{D}_{1C}$ ha autointersezione zero, e dunque si ha

$$\begin{aligned}
0 &= F_A^2, \\
0 &= (2\bar{D}_1 + \sum_{j=1}^3 \bar{D}_{1j} + \bar{D}_{1C})^2, \\
0 &= 4D_i^2 + 4 \sum_j \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} + 4\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} + \sum_j \bar{D}_{1j}^2 + \bar{D}_{1C}^2, \\
0 &= -4 + 8 + \sum_j \bar{D}_{1j}^2 + \bar{D}_{1C}^2, \\
-2 &= \bar{D}_{1j}^2 \text{ e } -2 = \bar{D}_{1C}^2.
\end{aligned}$$

□

La fibra sul punto $[A]$ appartiene alla lista di Kodaira, ed è di tipo I_0^* . Per quanto riguarda la fibra

$$F_B = 3\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{1C},$$

si ha la seguente proposizione.

Proposizione 2.6.15. $\bar{D}_1^2 = -1$, $\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} = 1$, $\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} = 1$, $\bar{D}_{1j}^2 = -3$ e $\bar{D}_{1C}^2 = -3$.

Dimostrazione. Su E_ω^2 si ha $C_i^2 = 0$ in quanto C_i è una curva ellittica liscia: dopo lo scoppimento dei punti singolari, di cui 3 giacciono su C_i , si ha, per la trasformata, $\hat{C}_i^2 = -3$ su \tilde{E}_ω^2 . I divisori eccezionali E_{ij} e E_{iC} hanno autointersezione (-1) .

Consideriamo ora la mappa quoziente $\tilde{q}_2 : \tilde{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{e}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$: per il Teorema della formula di proiezione, si ha

$$\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot \hat{C}_i) = D_i \cdot \tilde{q}_{2*} \hat{C}_i$$

Poichè $\tilde{q}_2|_{\hat{C}_i} : \hat{C}_i \rightarrow D_i$ è un rivestimento di ordine 3, si ha che

$$\tilde{q}_{2*} \hat{C}_i = 3D_i$$

e che

$$\tilde{q}_2^*(D_i) = \hat{C}_i.$$

Inserendo queste due equazioni nella formula di proiezione si ottiene

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot \hat{C}_i) &= D_i \cdot 3D_i, \\ -3 &= 3D_i^2, \\ -1 &= D_i^2.\end{aligned}$$

Poichè ω agisce banalmente sulle rette eccezionali E_{ij} , si ha che $\tilde{q}_2|_{E_{ij}} : E_{ij} \rightarrow D_{ij}$ è un isomorfismo e

$$\tilde{q}_{2*}E_{ij} = D_{ij}.$$

Applicando la formula di proiezione a E_{ij} e D_i , si ha

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_i) \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot \tilde{q}_{2*}E_{ij}, \\ \tilde{q}_{2*}(\hat{C}_i \cdot E_{ij}) &= D_i \cdot D_{ij}, \\ 1 &= D_i \cdot D_{ij}.\end{aligned}$$

Stesso discorso vale per E_{iC} , per cui

$$1 = D_i \cdot D_{iC}.$$

Una volta applicata l'azione di $-\omega$, si ha che le relazioni valgono ancora per le immagini delle componenti, dunque

$$\begin{aligned}\bar{D}_1^2 &= -1, \\ \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} &= 1, \\ \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} &= 1.\end{aligned}$$

La fibra singolare $F_B = 3\bar{D}_1 + \bar{D}_{11} + \bar{D}_{12} + \bar{D}_{1C}$ ha autointersezione zero, e dunque si ha

$$\begin{aligned}0 &= F_B^2, \\ 0 &= (3\bar{D}_1 + \sum_{j=1}^2 \bar{D}_{1j} + \bar{D}_{1C})^2, \\ 0 &= 9D_i^2 + 6 \sum_j \bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1j} + 6\bar{D}_1 \cdot \bar{D}_{1C} + \sum_j \bar{D}_{1j}^2 + \bar{D}_{1C}^2, \\ 0 &= -9 + 18 + \sum_j \bar{D}_{1j}^2 + \bar{D}_{1C}^2, \\ -3 &= \bar{D}_{1j}^2 \text{ e } -3 = \bar{D}_{1C}^2.\end{aligned}$$

□

Questo tipo di fibra non appartiene alla lista di Kodaira, infatti vi è la presenza della (-1) -curva \overline{D}_1 . Riguardo la fibra

$$F_C = 6\overline{D}_R + 2\overline{D}_{CA} + 3\overline{D}_{CB} + \overline{D}_C,$$

si ha invece la seguente proposizione.

Proposizione 2.6.16. $\overline{D}_R^2 = -1$, $\overline{D}_R \cdot \overline{D}_{CA} = 1$, $\overline{D}_R \cdot \overline{D}_{CB} = 1$, $\overline{D}_R \cdot \overline{D}_C = 1$, $\overline{D}_{CA}^2 = -2$, $\overline{D}_{CB}^2 = -3$ e $\overline{D}_C^2 = -6$.

Dimostrazione. Su E_ω^2 si ha $R^2 = 0$ in quanto R è una curva ellittica liscia: dopo lo scoppimento dei punti singolari, di cui 6 giacciono su R , si ha, per la trasformata, $\hat{R}^2 = -6$ su \hat{E}_ω^2 . I divisori eccezionali E_{CA_i} , E_{CB_i} e E_C hanno autointersezione (-1) .

Consideriamo ora la mappa quoziente $\tilde{q}_2 : \hat{E}_\omega^2 \rightarrow \tilde{e}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$: per il Teorema della formula di proiezione, si ha

$$\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_R) \cdot \hat{R}) = D_R \cdot \tilde{q}_{2*} \hat{R}$$

Poichè $\tilde{q}_2|_{\hat{R}} : \hat{R} \rightarrow D_R$ è un rivestimento di ordine 6, si ha che

$$\tilde{q}_{2*} \hat{R} = 6D_R$$

e che

$$\tilde{q}_2^*(D_R) = \hat{R}.$$

Inserendo queste due equazioni nella formula di proiezione si ottiene

$$\begin{aligned} \tilde{q}_{2*}(\hat{R} \cdot \hat{R}) &= D_R \cdot 6D_R, \\ -6 &= 3D_R^2, \\ -1 &= D_R^2. \end{aligned}$$

Poichè $-\omega$ agisce banalmente sulle rette eccezionali E_{CA_i} si ha che $\tilde{q}_2|_{E_{CA_i}} : E_{CA_i} \rightarrow D_{CA_i}$ è un isomorfismo e

$$\tilde{q}_{2*} E_{CA_i} = D_{CA_i}.$$

Applicando la formula di proiezione a E_{CA_i} e D_R , si ha

$$\begin{aligned}\tilde{q}_{2*}(\tilde{q}_2^*(D_R) \cdot E_{CA_i}) &= D_i \cdot \tilde{q}_{2*}E_{CA_i}, \\ \tilde{q}_{2*}(\hat{R} \cdot E_{CA_i}) &= D_R \cdot D_{CA_i}, \\ 1 &= D_R \cdot D_{CA_i}.\end{aligned}$$

Stesso discorso vale per E_{CB_i} e per E_C , per cui

$$\begin{aligned}1 &= D_R \cdot D_{CB_i}, \\ 1 &= D_R \cdot D_C\end{aligned}$$

Una volta applicata l'azione di $-\omega$, si ha che le relazioni valgono ancora per le immagini delle componenti, dunque

$$\begin{aligned}\overline{D}_R^2 &= -1, \\ \overline{D}_R \cdot \overline{D}_{CA} &= 1, \\ \overline{D}_R \cdot \overline{D}_{CB} &= 1, \\ \overline{D}_R \cdot \overline{D}_C &= 1.\end{aligned}$$

Si ottiene che

$$\begin{aligned}\overline{D}_{CA}^2 &= -2, \\ \overline{D}_{CB}^2 &= -3, \\ \overline{D}_C^2 &= -6.\end{aligned}$$

□

2.6.5 Il modello relativamente minimo S' di $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$

Nella sezione precedente si è dimostrato che le fibre F_B e F_C hanno tra le componenti una (-1) -curva, dunque $\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ non è una superficie ellittica relativamente minima. Per ottenere un modello relativamente minimo, occorre contrarre le (-1) -curve \overline{D}_1 per F_A e \overline{D}_R per F_C .

$$\begin{array}{ccc}\tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle & \xrightarrow{c} & S' \\ & \searrow & \downarrow f' \\ & & \mathbb{P}^1\end{array}$$

Definizione 2.6.19. Denotiamo con S' la superficie ottenuta contraendo \overline{D}_1 e \overline{D}_R , con c tale contrazione e le immagini delle componenti delle fibre F_A e F_C dopo la contrazione c con

$$\begin{aligned}\overline{D}_{1i} &\mapsto D'_{1i}, \\ \overline{D}_{1C} &\mapsto D'_{1C}, \\ \overline{D}_{CA} &\mapsto D'_{CA}, \\ \overline{D}_{CB} &\mapsto D'_{CB}, \\ \overline{D}_C &\mapsto D'_C.\end{aligned}$$

Definizione 2.6.20. Chiamiamo le 3 fibre singolari del morfismo $f' : S' \rightarrow \mathbb{P}^1$

$$\begin{aligned}F'_A &= f'^{-1}([A]), \\ F'_B &= f'^{-1}([B]), \\ F'_C &= f'^{-1}([C]).\end{aligned}$$

Proposizione 2.6.17. *La fibra F'_A è isomorfa a F_A , dunque è una fibra di Kodaira di tipo I_0^* . La fibra F'_B consiste di 3 (-2) -curve che si intersecano in un punto, ed è quindi una fibra di Kodaira di tipo IV. La fibra F'_C consiste delle 3 curve razionali D'_{CA} , D'_{CB} e D'_C che si intersecano in un punto: hanno autointersezione rispettivamente -1 , -2 e -5 .*

Dimostrazione. La contrazione c lascia invariata la fibra F'_A , la prova per le fibre F'_B e F'_C è un semplice conteggio delle autointersezioni delle relative componenti. \square

Evidentemente nemmeno S è una superficie ellittica relativamente minima, in quanto possiede la (-1) -curva D'_{CA} .

A questo punto si deve considerare la contrazione della (-1) -componente della fibra F'_C .

Definizione 2.6.21. Chiamiamo S'' la superficie ottenuta contraendo D'_{CA} e chiamiamo tale contrazione c' .

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle & \xrightarrow{c'} & S' & \xrightarrow{c} & S'' \\
 & \searrow & \downarrow f' & \swarrow f'' & \\
 & & \mathbb{P}^1 & &
 \end{array}$$

Il morfismo $f'' : S'' \rightarrow \mathbb{P}^1$ ha come luogo discriminante i punti $[A]$, $[B]$ e $[C]$. Le fibre sopra i punti $[A]$ e $[B]$ sono isomorfe a F'_A e F'_B .

Definizione 2.6.22. Denotiamo le trasformate delle componenti della fibra F'_C dopo la contrazione c' con

$$\begin{aligned}
 D'_{CB} &\mapsto D''_{CB}, \\
 D'_C &\mapsto D''_C.
 \end{aligned}$$

Proposizione 2.6.18. La fibra $F''_C = f''^{-1}([C])$ consiste delle 2 curve razionali D''_{CB} e D''_C che si intersecano in un punto con molteplicità 2, di cui la curva D''_{CB} ha autointersezione (-1) .

La superficie ellittica S'' non è relativamente minima.

Definizione 2.6.23. Chiamiamo S''' la superficie ottenuta contraendo D''_{CB} e tale contrazione c'' .

$$\begin{array}{ccccccc}
 \tilde{E}_\omega^2 / \langle -\omega \rangle & \xrightarrow{c} & S' & \xrightarrow{c'} & S'' & \xrightarrow{c''} & S''' \\
 & \searrow & \downarrow f' & \swarrow f'' & \swarrow f''' & & \\
 & & \mathbb{P}^1 & & & &
 \end{array}$$

Il morfismo $f''' : S''' \rightarrow \mathbb{P}^1$ ha per luogo discriminante i 3 punti $[A]$, $[B]$ e $[C]$. Le fibre sopra i punti A e B sono isomorfe a F'_A e F'_B .

Definizione 2.6.24. Indichiamo la trasformata dell'unica componente rimasta di F''_C dopo la contrazione c''

$$D''_C \mapsto D'''_C.$$

Proposizione 2.6.19. La fibra $F'''_C = f'''^{-1}([C])$ è composta unicamente dalla curva D'''_C , che è una curva cuspidale con autointersezione zero.

La fibra F'''_C appartiene alla lista di Kodaira ed è una fibra di tipo *II*.

Capitolo 3

3-folds Ellittiche

La teoria delle 3-varietà ellittiche è stata sviluppata in [Mi]. In questo capitolo si definiscono le 3-folds ellittiche, attraverso la generalizzazione della teoria di Weirstrass si cerca un buon modello minimo liscio per una generica 3-fold ellittica e ne si studiano in dettaglio diversi aspetti.

Definizione 3.0.1. Una 3-fold ellittica è una 3-fold X_0 dotata di un morfismo

$$f_0 : X_0 \rightarrow S_0,$$

detto fibrazione ellittica, da X_0 a una superficie S_0 , tale che la fibra generica sia una curva ellittica. Assumeremo che sia data una sezione

$$s_0 : S_0 \rightarrow X_0.$$

3.1 Un modello liscio di $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$

L'obiettivo del capitolo è di descrivere la costruzione di un modello

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X_0 \\ \downarrow f & & \downarrow f_0 \\ S & \longrightarrow & S_0 \end{array}$$

per la fibrazione $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$, dove $X \rightarrow X_0$ e $S \rightarrow S_0$ sono mappe birazionali e il diagramma è commutativo. Si richiede che il modello abbia le seguenti proprietà:

- X e S sono entrambe non singolari.
- La fibrazione f è equidimensionale, cioè le fibre di f hanno tutte la stessa dimensione.
- La fibrazione f è minima, nel senso che se esiste \overline{X} (non isomorfa a X), tale che il seguente diagramma commuti

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \overline{X} \\ \downarrow f & \swarrow f_0 & \\ S & & \end{array}$$

allora \overline{X} è singolare.

- Il luogo discriminante $\Delta \subset S$, ove le fibre di f sono singolari, è una curva con punti doppi ordinari come singolarità.
- Su un punto liscio $P \in \Delta$, $f^{-1}(P)$ è una curva ellittica singolare appartenente alla lista stilata da Kodaira delle fibre singolari per una superficie ellittica. Inoltre, il tipo di fibra è costante vicino P , cioè è costante sulla componente irriducibile di $\Delta - \Delta_{sing}$ su cui giace P .
- Su un punto singolare $P \in \Delta$, la fibra singolare $f^{-1}(P)$ è determinata dai tipi di fibre dei due rami di Δ in P .

3.2 Forma di Weierstrass per una 3-fold ellittica

Sia $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$ una 3-fold ellittica, sia $S_1 \subset S_0$ l'aperto composto dai punti lisci di S_0 su cui anche le fibre di f sono lisce, e sia $X_1 = f^{-1}(S_1)$. Assumiamo che sia data una sezione per la fibrazione $f_1 := f|_{X_1} : X_1 \rightarrow S_1$.

Proposizione 3.2.1. *Tale fibrazione può essere scritta in forma di Weierstrass affine*

$$y^2 = x^3 + Ax + B.$$

Dimostrazione. Per la prova si veda [Mi]. □

Osservazione 3.2.1. Dopo aver risolto S_1 , in modo che anche la sezione si estenda, si può estendere la forma di Weierstrass ad una superficie proiettiva S . Queste operazioni danno luogo ad una 3-fold ellittica

$$\pi : W \rightarrow S,$$

che estende $f_1 : X_1 \rightarrow S_1$.

W non è necessariamente liscia ed ha le seguenti proprietà:

- $\pi : W \rightarrow S$ estende il luogo liscio della fibrazione ellittica di partenza $f_0 : X_0 \rightarrow S_0$.
- Ogni fibra di π è una curva ellittica liscia, una curva razionale cuspidale oppure una curva razionale nodale.
- é data una sezione per π , che non passa per nodi nè cuspidi delle fibre.
- Sia U un intorno di P . Su U la fibrazione può essere scritta in forma di Weierstrass affine $y^2 = x^3 + Ax + B$, dove x e y sono funzioni regolari su S vicino P .

La seguente proposizione caratterizza la varietà risultante W .

Proposizione 3.2.2. *Sia U un intorno di un punto P di S , e sia $y^2 = x^3 + ax + b$ la forma di Weierstrass locale su U . Siano A , B e D le sottovarietà di S definite da $a = 0$, $b = 0$ e $d = 0$, dove d è il discriminante $d = 4a^2 + 27b^2$. Allora:*

- (i) W è liscia in $x = \infty$.
- (ii) Se W è singolare in un punto (x, y, P) , allora $y = 0$.
- (iii) W è singolare in $(0, 0, P)$ se e solo se sia A che B contengono P e B è singolare in P .

(iv) W è singolare in $(x, 0, P)$, con $x \neq 0$ se e solo se A e B contengono P , mentre D contiene P ed è singolare in P . Inoltre, in tal caso $x = 3b/2a$.

Dimostrazione. La verifica di (i) è un semplice calcolo.

(ii): Siano (s_1, S_2) parametri locali in P di S ; si considerino a e b come funzioni dei parametri e sia

$$F(x, y, s_1, s_2) = y^2 - x^3 - a(s_1, s_2)x - b(s_1, s_2).$$

Si ha

$$\begin{aligned} F_x &= -3x^2 - a, \\ F_y &= 2y, \\ F_{s_i} &= -a_{s_i}x - b_{s_i}. \end{aligned}$$

Se W è singolare, allora $y = 0$, e questo prova (ii).

(iii): Si consideri il punto $(0, 0, P)$, definito da $x = y = 0$. Le equazioni precedenti si riducono a

$$\begin{aligned} F &= -b, \\ F_x &= -a, \\ F_y &= 0, \\ F_{s_i} &= -b_{s_i}. \end{aligned}$$

Dunque W è singolare in $(0, 0, P)$ se e solo se $a = b = b_{s_i} = 0$, il che prova (iii).

(iv): Sia ora W singolare in $(x, 0, P)$, con $x \neq 0$. Poichè $F_x = 0$, si ha $a \neq 0$. Ora, si deve avere $x^3 + ax + b = 3x^2 + a = a_{s_i}x + b_{s_i} = 0$, o, equivalentemente, $2ax + 3b = 3x^2 + a = a_{s_i}x + b_{s_i} = 0$. Il che implica $x = -3b/2a$.

Abbiamo quindi che $3x^2 + a = d/4a^2$, dunque $F_x = 0$ se e solo se $d = 0$, il che significa che D contiene P .

Poichè $a \neq 0$, il fatto che $d = 0$ implica che anche $b \neq 0$; inoltre, $a_{s_i}x + b_{s_i} = a_{s_i}(-3b/2a) + b_{s_i}$, dunque

$$\begin{aligned} F_{s_i} = 0 &\iff -3ba_{s_i} + 2ab_{s_i} = 0 \\ &\iff 27b(-3ba_{s_i} + 2ab_{s_i}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff 3(-27b^2)a_{s_i} + 54abb_{s_i} = 0 \\
&\iff 4(4a^3)a_{s_i} + 54abb_{s_i} = 0 \\
&\iff 12a^2a_{s_i} + 54bb_{s_i} = 0 \\
&\iff d_{s_i} = 0.
\end{aligned}$$

Dunque D è singolare in P .

L'implicazione inversa è un semplice controllo. \square

3.2.1 Cambio birazionale di base

Definizione 3.2.1. Sia $D_0 = D_{red}$ il luogo discriminante ridotto della fibrazione π

Proposizione 3.2.3. D_0 è una curva ridotta di S e si può scoppiare S in modo da ottenere che $D_1 = D_0 \cup \{\text{luogo eccezionale}\}$ abbia punti doppi razionali come singolarità.

Sia $\pi : W \rightarrow S$ una 3-fold ellittica in forma di Weierstrass. Se $S' \rightarrow S$ è un qualunque morfismo, si può considerare il pull-back dell'equazione di Weierstrass a S' e ottenere una 3-fold ellittica $\pi' : W' \rightarrow S'$ in forma di Weierstrass. Nella trattazione $S' \rightarrow S$ sarà sempre una sequenza di scoppiamenti. Si ha quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
W' & \longrightarrow & W \\
\downarrow & & \downarrow \\
S' & \longrightarrow & S
\end{array}$$

dove le mappe $W' \rightarrow W$ e $S' \rightarrow S$ sono birazionali. Dunque sostituendo la fibrazione originale con un tale cambio di base birazionale, si può assumere che

(3.1) il luogo discriminante ridotto D_0 ha soltanto nodi come singolarità.

Si consideri ora la funzione modulo $J = 4a^3/d$ sulla superficie S . Denotiamo con E la sezione data (pensata come un divisore di W : sia $4a^3$ che $27b^2$

sono sezioni di $[\pi_*\mathcal{O}_W(E)]^{\otimes 12}$, dunque generano un fascio lineare su S . Scoppiando S nei punti base di tale fascio, otteniamo una superficie in cui la funzione J non ha punti di indeterminazione.

Possiamo dunque assumere anche che

(3.2) la funzione modulo $J = 4a^3/d$ è definita su ogni punto di S .

Infine, assumiamo che l'equazione di Weierstrass sia minima, cioè che, localmente,

(3.3) se $e^4|a$ e $e^6|b$, allora e è un'unità locale.

Questo può essere ottenuto rimpiazzando x con e^2x e y con e^3y e, se necessario, ripetendo la procedura.

3.2.2 Standardizzazione dell'equazione di Weierstrass

Le assunzioni (3.1)-(3.4) ci permettono di standardizzare localmente l'equazione di Weierstrass. Sia P un punto di D e siano s_1 e s_2 parametri locali vicino P in modo che

$$d = s_1^{N_1} s_2^{N_2} \bar{d}$$

per qualche unità locale \bar{d} .

Teorema 3.2.4. *Valgono le seguenti:*

(i) *Esistono unità locali \bar{a} e \bar{b} in P tali che $a = s_1^{L_1} s_2^{L_2} \bar{a}$ e $b = s_1^{K_1} s_2^{K_2} \bar{b}$. Inoltre, $L_i \leq 3$ oppure $K_i \leq 5$ per $i = 1, 2$.*

(ii) *Vale una e una sola delle seguenti:*

(a) $3L_1 < 2K_1$ e $3L_2 < 2K_2$

(b) $3L_1 > 2K_1$ e $3L_2 > 2K_2$

(c) $3L_1 = 2K_1$ e $3L_2 < 2K_2$

(d) $3L_1 = 2K_1$ e $3L_2 > 2K_2$

$$(e) \quad 3L_1 < 2K_1 \text{ e } 3L_2 = 2K_2$$

$$(f) \quad 3L_1 > 2K_1 \text{ e } 3L_2 = 2K_2$$

$$(g) \quad 3L_1 = 2K_1 \text{ e } 3L_2 = 2K_2$$

(iii) Siano $I_1 = \min(3L_1, 2K_1)$ e $I_2 = \min(3L_2, 2K_2)$. Allora $I_1 \leq N_1$ e $I_2 \leq N_2$. Nei casi (a)-(f) di (ii) si ha che $I_1 = N_1$ e $I_2 = N_2$. Inoltre, nei casi (b), (d) e (f) si ha $J(P) = 0$, mentre nei casi (a), (c) ed (e) si ha $J(P) = 1$.

(iv) Nel caso (g) di (ii) si ha che $(L_i, K_i) = (0, 0)$ oppure $(L_i, K_i) = (2, 3)$ per ogni i (per (3.4)).

Se $I_1 = N_1$ e $I_2 = N_2$, allora $\bar{d} = 4\bar{a}^3 + 27\bar{b}^2$ non è uno zero in P . Assumiamo che $I_1 < N_1$ oppure $I_2 < N_2$ e siano $M_1 = N_1 - I_1$ e $M_2 = N_2 - I_2$: allora esistono unità locali c e u in P tali che $\bar{a} = -3c^2$ e $\bar{b} = 2c^3 + s_1^{M_1} s_2^{M_2} u$.

Dimostrazione. Poichè $J = 0$ se $a = 0$ e $b \neq 0$ e $J = 1$ quando $a \neq 0$ e $b = 0$, l'assunzione (3.2) implica che, nel caso in cui A e B si incontrassero, avrebbero tutta una componente in comune. Poichè d è nullo ove si annullano a e b , (3.3) e la scrittura locale di d implicano il primo asserto di (i). Il secondo è conseguenza diretta dell'assunzione (3.4).

Il punto (ii) è logicamente equivalente alla negazione dell'affermazione

$$(ii^{-1}) \quad 3L_1 > 2K_1 \text{ e } 3L_2 < 2K_2 \text{ oppure } 3L_1 < 2K_1 \text{ e } 3L_2 > 2K_2.$$

Supponiamo per assurdo che $3L_1 < 2K_1$ e $3L_2 > 2K_2$. Allora

$$J = 4s_2^{3L_2-2K_2}\bar{a}^3 + 27s_1^{2K_1-3L_1}\bar{b}^2,$$

che non è definito in P . Il che contraddice (3.2) (un ragionamento analogo vale per il caso $3L_1 > 2K_1$ e $3L_2 < 2K_2$), dunque è assurdo. Questo prova il punto (ii).

Assumiamo ora $I_1 < N_1$ oppure $I_2 < N_2$. Si ha che $s_1^{N_1-I_1} s_2^{N_2-I_2} \bar{d} = 4s_1^{3L_1-I_1} s_2^{3L_2-I_2} \bar{a}^3 + 27s_1^{2K_1-I_1} s_2^{2K_2-I_2} \bar{b}^2$ è zero in P . Tuttavia, nei casi (a)-(f) uno dei due membri è nullo, l'altro no. Il che prova il primo asserto di

(iii). Il secondo segue dall'analisi diretta dell'ordine di annullamento dei due termini nei diversi casi.

Infine, assumiamo (g) e che $I_1 < N_1$ oppure $I_2 < N_2$. Definiti M_1 e M_2 come sopra, si ha $s_1^{M_1} s_2^{M_2} \bar{d} = 4\bar{a}^3 + 27\bar{b}^2$. Poichè $\bar{a} \neq 0$ in P , possiamo prendere c in modo che $c^2 = -\bar{a}/3$. Scrivendo $4\bar{a}^3 + 27\bar{b}^2 = 108((\bar{b}/2)^2 - c^6) = 108((\bar{b}/2) - c^3)((\bar{b}/2) + c^3)$. Dunque $s_1^{M_1} s_2^{M_2} |((\bar{b}/2) - c^3)((\bar{b}/2) + c^3)$. Nè c^3 nè $\bar{b}/2$ si annullano in P , dunque almeno uno dei fattori deve essere un'unità in P . Cambiando se necessario il segno di c , assumiamo che $(\bar{b}/2) + c^3 \neq 0$ in P , dunque $s_1^{M_1} s_2^{M_2}$ e $(\bar{b}/2) - c^3$ differiscono moltiplicativamente per un'unità, e questo prova (iv). \square

3.2.3 Un esempio

Nella seguente sottosezione si riporta e commenta un esempio presente in [Mi]. Lo scopo del seguente esempio è mostrare come si può ottenere una varietà con una fibrazione equidimensionale a partire da una che ha qualche fibra di dimensione 2.

Esempio 3.2.1.

Definizione 3.2.2. Sia $\pi : W \rightarrow S = \text{spec } \mathbb{C}[[s_1, s_2]]$ definita dall'equazione

$$y^2 = x^3 + s_1 s_2 x + s_1 s_2.$$

Il luogo discriminante ridotto è

$$\{s_1 s_2 = 0\}.$$

W ha singolarità in Q , definito da $x = s_1 = s_2 = 0$, analiticamente equivalente a $y^2 = u^2 + v^2 + w^3$, ed è liscia in tutti gli altri punti ([Mi]).

La fibrazione π ha fibre lisce ovunque eccetto in D_0 , e sopra $D_0 = \{(0, 0)\}$, π ha fibra singolare di tipo II ([Mi]), dunque una cuspidale.

Quello che vorremmo è risolvere la 3-fold W , mantenendo tutte le fibre della fibrazione ellittica risultante uno-dimensionali.

- Prima risoluzione:

Si considera la risoluzione canonica

$$\begin{aligned} Bl_Q(W) : W' &\rightarrow W \\ E &\mapsto Q, \end{aligned}$$

dove E è il divisore eccezionale dello scoppimento.

Si ha che E è un cono quadrico ([Mi]). La fibrazione π estende a W' e [Mi] dimostra che la fibrazione ellittica risultante

$$\pi' : W' \rightarrow S$$

ha come fibra centrale

$$\pi'^{-1}\{(0,0)\} = E \cup C,$$

dove $C \cong \mathbb{P}^1$.

Chiaramente tale fibrazione non è equidimensionale, in quanto la fibra descritta ha dimensione 2.

- Seconda risoluzione:

Si considera lo scoppimento della base S nel punto $(0,0)$ e il pull back della fibrazione π' .

Denotiamo questo scoppimento $S_1 \rightarrow S$ e il relativo luogo eccezionale E' . Si ha il seguente diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccc} W'' & \xrightarrow{\phi_2} & W' & \xrightarrow{\phi_1} & W \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi \\ & & S_1 & \xrightarrow{\psi} & S \end{array}$$

Per una descrizione accurata di quanto segue, si consulti [Mi].

Il pull back appena descritto comporta lo scoppimento della componente \mathbb{P}^1 della fibra singolare di W' , che dà luogo a un divisore eccezionale isomorfo a \mathbb{F}_0 , il quale incontra la trasformata propria del cono

R lungo una fibra della fibrazione rigata di \mathbb{F}_0 ([Mi]). La superficie R è una superficie non normale, doppia lungo $\mathbb{F}_0 \cap R$, con esattamente 2 pinch point che giacciono sopra i punti $P_1 = E \cap \{s_1 = 0\}$ e $P_2 = E \cap \{s_2 = 0\}$ ([Mi]).

Se denotiamo con W_1 questo scoppimento di \bar{W} e con π_1 la relativa fibrazione su S_1 , si ha che π_1 è equidimensionale. Inoltre, si può vedere facilmente che la fibra generica sopra la retta eccezionale E è una fibra di Kodaira di tipo *IV*: una componente viene dalla rigatura dell' \mathbb{F}_0 , le altre due sono trasformate proprie in R di 2 rette del cono quadrico. Gli unici punti in cui le fibre non sono di tipo *IV* sono P_1 e P_2 , in cui le 2 rette di R si sovrappongono, sicchè le due fibre sono composte da due \mathbb{P}^1 che si intersecano in un punto, con uno dei \mathbb{P}^1 avente molteplicità 2. Le fibre singolari sopra $\{s_1 = 0\}$ e $\{s_2 = 0\}$ sono ovviamente ancora delle cuspidali di tipo *II*. Sopra P_1 e P_2 , si può immaginare che le fibre di tipo *IV* e *II* collidano, per dare luogo alla fibra limite sopra descritta.

Quello che mostra l'esempio è che alcune "collisioni" delle componenti del luogo discriminante possono dare luogo a 3-folds singolari senza possibili risoluzioni equidimensionali (nel senso della fibrazione). Queste collisioni possono essere evitate attraverso scoppimenti della base e delle singolarità del luogo discriminante e trascinando all'indietro la fibrazione rispetto a tali scoppimenti. Questa operazione può produrre più collisioni, ma le relative varietà ammettono risoluzioni equidimensionali e possiedono le caratteristiche elencate all'inizio del capitolo per un buon modello liscio per 3-folds ellittiche. In [Mi] si fa un compendio di tutte le possibili collisioni.

Capitolo 4

$E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$

In questo capitolo si presenta una 3-varietà spesso citata in letteratura. È stata analizzata in diversi suoi aspetti da [FG] e in [O],[OS],[OT], ed [S] viene indagata la sua struttura ellittica: si dimostra che è una varietà ellittica, si cercano le fibre singolari e vengono proposti diversi modelli.

Sia $\omega = e^{\frac{2}{3}i\pi}$ una radice terza primitiva dell'unità e sia E_ω la curva ellittica

$$E_\omega = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega).$$

Definizione 4.0.1. $E_\omega^3 := E_\omega \times E_\omega \times E_\omega$

La moltiplicazione per ω induce l'automorfismo diagonale (ω, ω, ω) sulla varietà E_ω^3 , definita da:

Definizione 4.0.2. $(P, Q, R) \mapsto (\omega P, \omega Q, \omega R)$, con $P, Q, R \in E_\omega$.

Tale automorfismo induce un gruppo di automorfismi su E_ω^3 , che chiameremo azione diagonale di ω .

Proposizione 4.0.1. *L'azione diagonale di ω sulla varietà E_ω^3 fissa 27 punti*

Dimostrazione. I punti fissati dall'azione di ω sono

$$P_{ijk} = (P_i, P_j, P_k), \text{ con } i, j, k = 0, 1, 2.$$

□

Definizione 4.0.3. Chiamiamo $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ la varietà ottenuta quotizzando E_ω^3 per l'azione diagonale di ω

Proposizione 4.0.2. $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ ha 27 singolarità quoziente di tipo $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$.

Dimostrazione. Il quoziente naturale

$$q_3 : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$$

è un rivestimento triplo che si ramifica nei 27 punti fissati dall'azione diagonale di ω . □

4.1 Le singolarità della 3-fold

Come visto, la 3-fold quoziente $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ ha alcune singolarità quoziente di tipo $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$. Attraverso la geometria torica e la teoria dell'eliminazione polinomiale, si possono trovare dei modelli locali per queste singolarità.

Proposizione 4.1.1. *Le singolarità della 3-fold quoziente sono equivalenti a quelle riportate nella tabella 4.1*

Dimostrazione. La dimostrazione e l'algoritmo sono analoghi a quelli del caso della superficie quoziente. □

Tipo di singolarità	Equazione della singolarità	Variabili
$\frac{1}{3}(1, 1, 1)$	$x_5x_7 - x_6^2 = 0, x_4x_6^3 - x_7x_8^3 = 0, x_4x_5x_6 - x_8^3 = 0,$ $x_3x_8 - x_4x_5 = 0, x_3x_6 - x_8^2 = 0, x_3^2x_7 - x_4x_6x_8 = 0,$ $x_2x_8 - x_3x_5 = 0, x_2x_7 - x_6x_8 = 0, x_2x_6 - x_5x_8 = 0,$ $x_2x_4 - x_3^2 = 0, x_1x_8 - x_2x_5 = 0, x_1x_7 - x_5x_6 = 0,$ $x_1x_6 - x_5^2 = 0, x_1x_4 - x_2x_3 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0,$	$x_1, x_2, x_3, x_4,$ x_5, x_6, x_7, x_8

Tabella 4.1:

4.2 Una risoluzione liscia di $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$

Per risolvere la varietà quoziente $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$, consideriamo uno dei punti singolari $P_{ijk} = (P_i, P_j, P_k) \in E_\omega^3$, e prendiamo una carta locale (U, ϕ) , dove U è un intorno di P_{ijk} e $\phi : U \rightarrow D$ è un biolomorfismo dall'aperto U al disco unitario complesso $D \subset \mathbb{C}^3$. Si possono prendere coordinate (x, y, z) su D in modo che $\phi(P_{ijk}) = 0$ e in modo che ω agisca sul disco attraverso ϕ nel seguente modo:

$$\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}(x, y, z) = (\omega x, \omega y, \omega z), \text{ con } (x, y, z) \in D.$$

Le rette passanti per l'origine del disco vengono dunque preservate dall'azione del gruppo generato dall'azione di ω .

Lemma 4.2.1. *Lo scoppimento del disco D , quozientato per l'azione di ω , è non singolare*

Dimostrazione. Se si considera il blow-up del disco nell'origine $\tilde{D} \rightarrow D$, l'azione si estende a \tilde{D} , nel seguente modo: le coordinate su \tilde{D} sono

$$\tilde{D} = \{(x, y, z, (u : v : w)) \mid xv = yu, xw = zu, yw = zv\}$$

e l'azione di gruppo su \tilde{D} è

$$(x, y, z, (u : v : w)) \mapsto (\omega x, \omega y, \omega z, (u : v : w)).$$

È evidente che ω agisce banalmente sul piano eccezionale, che è definito da $x = y = z = 0$, ed infatti ogni punto del riano eccezionale corrisponde ad una retta per l'origine nel disco D , e come detto tali rette vengono preservate dall'azione di ω .

Consideriamo il quoziente naturale $\tilde{D} \rightarrow \tilde{D} / \langle \omega \rangle$: è un rivestimento totalmente ramificato sul piano eccezionale (?) e dunque $\tilde{D} / \langle \omega \rangle$ è non singolare. \square

Definizione 4.2.1. Chiamiamo lo scoppimento dei 27 punti singolari

$$b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3.$$

Come mostrato nella discussione locale, i ventisette piani eccezionali sono fissati puntualmente dall'azione di ω .

Corollario 4.2.2. *La varietà quoziente*

$$\tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle$$

è non singolare.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla precedente discussione locale. \square

4.3 Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle$

Proposizione 4.3.1. $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ è una 3-fold ellittica liscia che ammette una fibrazione ellittica su $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$, la cui fibra generica è isomorfa alla curva ellittica E_ω con una data sezione s_0 . Inoltre, f ha 9 fibre singolari, ed il luogo discriminante è

$$\Delta(f) = \{[P_{11}], [P_{12}], [P_{13}], [P_{21}], [P_{22}], [P_{23}], [P_{31}], [P_{32}], [P_{33}]\}.$$

Dimostrazione. Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_\omega^3 & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & \tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle \\ \downarrow b & & \downarrow f_1 \\ E_\omega^3 & \xrightarrow{q_3} & E_\omega^3 / \langle \omega \rangle \\ \downarrow \pi & & \downarrow f_2 \\ E_\omega^2 & \xrightarrow{q_2} & E_\omega^2 / \langle \omega \rangle \end{array}$$

dove $\pi : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^2$ è la proiezione sui primi due fattori di E_ω^2 , $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ è lo scoppimento nei ventisette punti singolari e q_2 , q_3 e \tilde{q}_3 le mappe quoziente rispetto a ω .

I morfismi f_1 e f_2 sono così definiti:

$$f_1 : \tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$$

è la risoluzione liscia della 3-fold quoziente appena descritta e il morfismo

$$f_2 : E_\omega^3 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

ha come fibra generica una curva ellittica isomorfa a E_ω .

Anche la composizione

$$f = f_2 \circ f_1 : \tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

ha fibra generica isomorfa a E_ω . Inoltre, f ha una sezione. Si consideri la sezione della fibrazione $\pi : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^2$

$$\begin{aligned} s_0 : E_\omega^2 &\rightarrow E_\omega^3 \\ (x, y) &\mapsto (x, y, P_0). \end{aligned}$$

È chiaro che s_0 è equivariante rispetto all'azione di ω , dunque l'immagine di s_0 via la mappa quoziente \tilde{q}_3 è una sezione della fibrazione $f : E_\omega^3 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$, che verrà denotata ancora con s_0 . \square

4.4 Le fibre singolari

Consideriamo un punto $[P_{ij}] \in \Delta(f)$, il luogo discriminante della fibrazione $f : E_\omega^3 / \langle \omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$. La controimmagine di $[P_{ij}]$ rispetto al quoziente q_2 è

$$q_2^{-1}([P_{ij}]) = P_{ij}.$$

Definizione 4.4.1. Chiamiamo la sua retroimmagine rispetto alla proiezione π

$$C_{ij} := \pi^{-1}(P_{ij}) = \{(P_i, P_j, x), x \in E_\omega\}.$$

C_{ij} è dunque isomorfa a E_ω . Si noti che 3 dei 27 punti singolari della 3-varietà quoziente giacciono su C_{ij} , cioè P_{ij1}, P_{ij2} e P_{ij3} .

Definizione 4.4.2. Consideriamo lo scoppiamento $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ nei P_{ijk} . Denotiamo con E_{ijk} il piano eccezionale sopra P_{ijk} e con \hat{C}_{ij} la trasformata stretta di C_{ij} .

Il pullback del divisore C_{ij} sotto la mappa

$$b^* : Div(E_\omega^3) \rightarrow Div(\tilde{E}_\omega^3)$$

è

$$b^*(C_{ij}) = \hat{C}_{ij} + E_{ij1} + E_{ij2} + E_{ij3}.$$

Come già osservato, l'azione di ω è banale sui piani eccezionali, mentre su C_{ij} ω agisce nello stesso modo che su E_ω . Per quanto osservato fino ad ora, $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ ha 4 componenti.

Definizione 4.4.3. Denotiamo le 4 componenti di $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ con

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \tilde{q}_3(\hat{C}_{ij}) \\ D_{ijk} &= \tilde{q}_3(E_{ijk}). \end{aligned}$$

Studiamo la molteplicità delle componenti.

Proposizione 4.4.1. $f^{-1}([P_{ij}]) = 3D_{ij} + D_{ij0} + D_{ij1} + D_{ij2}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_{ij}$ un punto diverso da P_{ijk} , $k = 1, 2, 3$, e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^3 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap \omega(U_P) \cap \omega^2(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto dei piani eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_3|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_3(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_3(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_3(P)$ in $\tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y, z) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y', z')$ centrate in $\tilde{q}_3(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = P_{ij} \in E_\omega^2$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s, t)$ centrate in P_{ij} e coordinate locali (V, s', t') centrate in $[P_{ij}]$ in $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y, z) & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & (\tilde{q}_3(U_P), x', y', z') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ P_{ij} \in (\pi(U_P), s, t) & \xrightarrow{q_2} & P_{ij} \in (V, s', t') \end{array}$$

$\tilde{q}_3|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned}\tilde{q}_3^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_3^*(y') &= y, \\ \tilde{q}_2^*(z') &= z\end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s, t)$ e (V, s', t') in modo che

$$\begin{aligned}\pi^*(s) &= x, \\ \pi^*(t) &= y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}q_2^*(s') &= s^3, \\ q_2^*(t') &= t^3\end{aligned}$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}[s', t'] & \xrightarrow{q_2^*} & \mathbb{C}[s, t] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y', z'] & \xrightarrow{q_3^*} & \mathbb{C}[x, y, z]\end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$\begin{aligned}f^*(s') &= (x')^3, \\ f^*(t') &= (y')^3\end{aligned}$$

$[P_{ij}]$ è localmente definito da $s' = t' = 0$ in $V \subset E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$ e D_{ij} è localmente definito da $x' = y' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_{ij} come componente della fibra $f^{-1}([P_{ij}])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ e $f^*(t')$ lungo D_{ij} : dunque la molteplicità di D_{ij} è 3.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $D_{ijk} = 1$. □

4.5 Un modello relativamente minimo di $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$

Lo scopo della sezione è ottenere una fibrazione relativamente minima per la 3-varietà $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$.

Il seguente modello è stato proposto in [O], dove si possono trovare le dimostrazioni e i dettagli delle osservazioni riportate. Fissiamo una delle nove fibre singolari $f^{-1}([P_{ij}])$.

Definizione 4.5.1. Consideriamo lo scoppimento della fibra $f^{-1}([P_{ij}])$ nella componente D_{ij} . Denotiamo la fibra ottenuta con F_{ij} , la trasformata stretta di D_{ij} con \underline{D}_{ij} e le trasformate strette dei piani D_{ijk} con \underline{D}_{ijk}

Osservazione 4.5.1. \underline{D}_{ij} è isomorfa a $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, e le trasformate dei piani \underline{D}_{ijk} sono isomorfe a piani scoppiati in un punto (detti superfici di Hirzebruch di tipo 1).

Inoltre, \underline{D}_{ij} ammette una curva, R_{ij} , che passa per i 3 piani.

Definizione 4.5.2. Chiamiamo M la varietà ottenuta una volta replicata l'operazione per tutte e nove le fibre singolari di $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$

Fissiamo ora una delle nove nuove fibre singolari F_{ij} :

Definizione 4.5.3. Consideriamo la contrazione della curva R_{ij} . Denotiamo la fibra ottenuta con G_{ij} , la trasformata stretta di \underline{D}_{ij} con N_{ij} e le trasformate di \underline{D}_{ijk} con N_{ijk} .

Osservazione 4.5.2. Gli N_{ijk} sono 3 piani e N_{ij} è una retta. Inoltre, i 3 piani si intersecano nella retta, che è la trasformata della retta D_{ij} dopo tutte le trasformazioni.

Definizione 4.5.4. Chiamiamo N la varietà ottenuta una volta replicate le contrazioni per tutte le nove fibre singolari.

Si ha dunque un diagramma

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle & \xleftarrow{\text{scoppiamenti}} & M & \xrightarrow{\text{contrazioni}} & N \\
 & \searrow f & \downarrow & \swarrow & \\
 & & E_\omega^2 / \langle \omega \rangle & &
 \end{array}$$

Dunque si ottiene una fibrazione ellittica

$$N \rightarrow E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$$

le cui fibre singolari sono

$$G_{ij} = 3N_{ij} + N_{ij0} + N_{ij1} + N_{ij2},$$

dove i 3 piani N_{ijk} si incontrano nella retta N_{ij} . Evidentemente il modello proposto da Ogusio non è piatto, in quanto le fibre singolari hanno dimensione 2, mentre le fibre generiche, in quanto curve ellittiche lisce, hanno dimensione 1.

Definizione 4.5.5. L'applicazione birazionale che trasforma $\tilde{E}_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ in N si dice flop

Capitolo 5

$$E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$$

In questo capitolo si presenta una 3-varietà introdotta in [OT]. In tale lavoro Oguiso dimostra che è razionale. Quanto segue, e cioè l'analisi della relativa struttura ellittica, non è stata indagata altrove.

Sia $\omega = e^{\frac{2}{3}i\pi}$ la solita radice terza primitiva dell'unità e sia E_ω la curva ellittica

$$E_\omega = \mathbb{C}/(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega).$$

Definizione 5.0.1. Indichiamo con E_ω^3 l'autoprodotto della curva ellittica E_ω al cubo.

La moltiplicazione per $-\omega$ induce l'automorfismo diagonale $(-\omega, -\omega, -\omega)$ sulla varietà E_ω^3 , definita da:

Definizione 5.0.2. $(P, Q, R) \mapsto (-\omega P, -\omega Q, -\omega R)$, con $P, Q, R \in E_\omega$.

Tale automorfismo induce un gruppo di automorfismi su E_ω^3 di ordine 6, che chiameremo azione diagonale di $-\omega$.

Definizione 5.0.3. Chiamiamo $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ la varietà ottenuta quotizzando E_ω^3 per l'azione diagonale di ω

Definizione 5.0.4. Denotiamo le seguenti coppie di punti con:

$$\begin{aligned}
(A_i, A_j, A_k) &= A_{ijk}, \\
(B_i, B_j, B_k) &= B_{ijk}, \\
(A_i, C, A_j) &= A_{iCj} \text{ ecc.}, \\
(C, B_i, B_j) &= B_{Cij} \text{ ecc.}
\end{aligned}$$

Proposizione 5.0.1. *La varietà quoziente $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ ha 35 singularità cicliche quoziente, di cui 35 di tipo $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, 13 di tipo $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ e uno di tipo $\frac{1}{6}(1, 1, 1)$*

Dimostrazione. E_ω^3 è liscia, dunque i punti singolari del quoziente sono tutti e soli i punti di ramificazione del rivestimento

$$q_3 : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle.$$

L'azione di $-\omega$ identifica le seguenti famiglie di punti, le cui immagini mediante q_2 denoteremo con:

$$\begin{aligned}
q_3(A_{111}) &= q_2(A_{222}) = q_2(A_{333}) = [A_{111}], \\
q_3(A_{112}) &= q_2(A_{223}) = q_2(A_{331}) = [A_{112}], \\
q_3(A_{113}) &= q_2(A_{221}) = q_2(A_{332}) = [A_{113}], \\
q_3(A_{121}) &= q_2(A_{232}) = q_2(A_{313}) = [A_{121}], \\
q_3(A_{122}) &= q_2(A_{233}) = q_2(A_{311}) = [A_{122}], \\
q_3(A_{123}) &= q_2(A_{231}) = q_2(A_{312}) = [A_{123}], \\
q_3(A_{131}) &= q_2(A_{212}) = q_2(A_{323}) = [A_{131}], \\
q_3(A_{132}) &= q_2(A_{213}) = q_2(A_{321}) = [A_{132}], \\
q_3(A_{133}) &= q_2(A_{211}) = q_2(A_{322}) = [A_{133}], \\
q_3(A_{11C}) &= q_2(A_{22C}) = q_2(A_{33C}) = [A_{11C}], \\
q_3(A_{1C1}) &= q_2(A_{2C2}) = q_2(A_{3C3}) = [A_{1C1}], \\
q_3(A_{C11}) &= q_2(A_{C22}) = q_2(A_{C33}) = [A_{C11}], \\
q_3(A_{12C}) &= q_2(A_{23C}) = q_2(A_{31C}) = [A_{12C}], \\
q_3(A_{1C2}) &= q_2(A_{2C3}) = q_2(A_{3C1}) = [A_{1C2}], \\
q_3(A_{C12}) &= q_2(A_{C23}) = q_2(A_{C31}) = [A_{C12}], \\
q_3(A_{13C}) &= q_2(A_{21C}) = q_2(A_{32C}) = [A_{13C}], \\
q_3(A_{1C3}) &= q_2(A_{2C1}) = q_2(A_{3C2}) = [A_{1C3}], \\
q_3(A_{C13}) &= q_2(A_{C21}) = q_2(A_{C32}) = [A_{C13}],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q_3(A_{1CC}) &= q_2(A_{2CC}) = q_2(A_{3CC}) = [A_{1CC}], \\
q_3(A_{C1C}) &= q_2(A_{C2C}) = q_2(A_{C3C}) = [A_{C1C}], \\
q_3(A_{CC1}) &= q_2(A_{CC2}) = q_2(A_{CC3}) = [A_{CC1}], \\
q_3(B_{111}) &= q_2(B_{222}) = [B_{111}], \\
q_3(B_{112}) &= q_2(B_{221}) = [B_{112}], \\
q_3(B_{121}) &= q_2(B_{212}) = [B_{121}], \\
q_3(B_{122}) &= q_2(B_{211}) = [B_{122}], \\
q_3(B_{11C}) &= q_2(B_{22C}) = [B_{11C}], \\
q_3(B_{1C1}) &= q_2(B_{2C2}) = [B_{1C1}], \\
q_3(B_{C11}) &= q_2(B_{C22}) = [B_{C11}], \\
q_3(B_{12C}) &= q_2(B_{21C}) = [B_{12C}], \\
q_3(B_{1C2}) &= q_2(B_{2C1}) = [B_{1C2}], \\
q_3(B_{C12}) &= q_2(B_{C21}) = [B_{C12}], \\
q_3(B_{1CC}) &= q_2(B_{2CC}) = [B_{1CC}], \\
q_3(B_{C1C}) &= q_2(B_{C2C}) = [B_{C1C}], \\
q_3(B_{CC1}) &= q_2(B_{CC2}) = [B_{CC1}], \\
q_3(C, C, C) &= [(C, C, C)],
\end{aligned}$$

Il punto di tipo $\frac{1}{6}(1, 1, 1)$ è il punto fisso dell'azione di $-\omega$, cioè il punto $[(C, C, C)]$.

I ventuno punti singolari di tipo $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ sono $[A_{111}]$, $[A_{112}]$, $[A_{113}]$, $[A_{121}]$, $[A_{122}]$, $[A_{123}]$, $[A_{131}]$, $[A_{132}]$, $[A_{133}]$, $[A_{11C}]$, $[A_{1C1}]$, $[A_{C11}]$, $[A_{12C}]$, $[A_{1C2}]$, $[A_{C12}]$, $[A_{13C}]$, $[A_{1C3}]$, $[A_{C13}]$, $[A_{1CC}]$, $[A_{C1C}]$, $[A_{CC1}]$.

Le tredici singolarità di tipo $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ sono $[B_{111}]$, $[B_{112}]$, $[B_{121}]$, $[B_{122}]$, $[B_{11C}]$, $[B_{1C1}]$, $[B_{C11}]$, $[B_{12C}]$, $[B_{1C2}]$, $[B_{C12}]$, $[B_{1CC}]$, $[B_{C1C}]$, $[B_{CC1}]$.

□

5.1 Le singolarità della 3-fold

Come visto, la 3-fold quoziente $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ ha alcune singolarità quoziente di tipo $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$, altre di tipo $\frac{1}{3}(1, 1, 1)$ ed una di tipo $\frac{1}{6}(1, 1, 1)$. Attra-

verso la geometria torica e la teoria dell'eliminazione polinomiale, si possono trovare dei modelli locali per queste singolarità.

Proposizione 5.1.1. *Le singolarità della 3-fold quozienti sono equivalenti a quelle riportate nella tabella 5.1*

Dimostrazione. L'algoritmo e la dimostrazione sono analoghi a quelli del caso della superficie quoziente \square

Tipo di singolarità	Equazione della singolarità	Variabili
$\frac{1}{2}(1, 1, 1)$	$x_3x_5 - x_6^2 = 0, x_2x_6 - x_3x_4 = 0, x_2x_5 - x_4x_6 = 0,$ $x_1x_6 - x_2x_4 = 0, x_1x_5 - x_4^2 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0,$	x_1, x_2, x_3
$\frac{1}{3}(1, 1, 1)$	$x_5x_7 - x_6^2 = 0, x_4x_6^3 - x_7x_8^3 = 0, x_4x_5x_6 - x_8^3 = 0,$ $x_3x_8 - x_4x_5 = 0, x_3x_6 - x_8^2 = 0, x_3^2x_7 - x_4x_6x_8 = 0,$ $x_2x_8 - x_3x_5 = 0, x_2x_7 - x_6x_8 = 0, x_2x_6 - x_5x_8 = 0,$ $x_2x_4 - x_3^2 = 0, x_1x_8 - x_2x_5 = 0, x_1x_7 - x_5x_6 = 0,$ $x_1x_6 - x_5^2 = 0, x_1x_4 - x_2x_3 = 0, x_1x_3 - x_2^2 = 0,$	$x_1, x_2, x_3, x_4,$ x_5, x_6, x_7, x_8
$\frac{1}{6}(1, 1, 1)$	233 equazioni disponibili se richieste	x_1, \dots, x_{14}

Tabella 5.1:

5.2 Una risoluzione liscia di $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$

Per risolvere la varietà quoziente $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$, consideriamo uno dei punti singolari, ad esempio $A_{ijk} = (P_i, P_j, P_k) \in E_\omega^3$, e prendiamo una carta locale (U, ϕ) , dove U è un intorno di P_{ijk} e $\phi : U \rightarrow D$ è un biolomorfismo dall'aperto U al disco unitario complesso $D \subset \mathbb{C}^3$. Si possono prendere coordinate (x, y, z) su D in modo che $\phi(P_{ijk}) = 0$ e in modo che ω agisca sul disco attraverso ϕ nel seguente modo:

$$\phi \circ \omega \circ \phi^{-1}(x, y, z) = (-\omega x, -\omega y, -\omega z), \text{ con } (x, y, z) \in D.$$

Le rette passanti per l'origine del disco vengono dunque preservate dall'azione del gruppo generato dall'azione di $-\omega$.

Lemma 5.2.1. *Lo scoppimento del disco D , quozientato per l'azione di $-\omega$, è non singolare*

Dimostrazione. Se si considera il blow-up del disco nell'origine $\tilde{D} \rightarrow D$, l'azione si estende a \tilde{D} , nel seguente modo: le coordinate su \tilde{D} sono

$$\tilde{D} = \{(x, y, z, (u : v : w)) \mid xv = yu, xw = zu, yw = zv\}$$

e l'azione di gruppo su \tilde{D} è

$$(x, y, z, (u : v : w)) \mapsto (-\omega x, -\omega y, -\omega z, (u : v : w)).$$

È evidente che $-\omega$ agisce banalmente sul piano eccezionale, che è definito da $x = y = z = 0$, ed infatti ogni punto del riano eccezionale corrisponde ad una retta per l'origine nel disco D , e come detto tali rette vengono preservate dall'azione di $-\omega$.

Consideriamo il quoziente naturale $\tilde{D} \rightarrow \tilde{D} / \langle -\omega \rangle$: è un rivestimento totalmente ramificato sul piano eccezionale (?) e dunque $\tilde{D} / \langle -\omega \rangle$ è non singolare. \square

Definizione 5.2.1. Chiamiamo lo scoppimento dei 35 punti singolari

$$b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3.$$

Come mostrato nella discussione locale, i ventisette piani eccezionali sono fissati puntualmente dall'azione di ω .

Corollario 5.2.2. *La varietà quoziente*

$$\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$$

è non singolare.

Dimostrazione. La dimostrazione segue dalla precedente discussione locale. \square

5.3 Una fibrazione ellittica di $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$

Consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{E}_\omega^3 & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & \tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \\
 \downarrow b & & \downarrow f_1 \\
 E_\omega^3 & \xrightarrow{q_3} & E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \\
 \downarrow \pi & & \downarrow f_2 \\
 E_\omega^2 & \xrightarrow{q_2} & E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle
 \end{array}$$

dove $\pi : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^2$ è la proiezione sui primi due fattori di E_ω^2 , $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ è lo scoppiamento nei ventisette punti singolari e q_2 , q_3 e \tilde{q}_3 le mappe quoziente rispetto a $-\omega$.

I morfismi f_1 e f_2 sono così definiti:

$$f_1 : \tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$$

è la risoluzione liscia della 3-fold quoziente appena descritta e il morfismo

$$f_2 : E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$$

ha come fibra generica una curva ellittica isomorfa a E_ω .

Anche la composizione

$$f = f_2 \circ f_1 : \tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$$

ha fibra generica isomorfa a E_ω . Inoltre, f ha una sezione. Si consideri la sezione della fibrazione $\pi : E_\omega^3 \rightarrow E_\omega^2$

$$\begin{aligned}
 s_0 : E_\omega^2 &\rightarrow E_\omega^3 \\
 (x, y) &\mapsto (x, y, P_0).
 \end{aligned}$$

È chiaro che s_0 è equivariante rispetto all'azione di ω , dunque l'immagine di s_0 via la mappa quoziente \tilde{q}_3 è una sezione della fibrazione $f : \tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle \rightarrow E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$, che verrà denotata ancora con s_0 .

Dunque $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ è una superficie ellittica liscia che ammette una fibrazione ellittica su $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$, la cui fibra generica è isomorfa alla curva

ellittica E_ω con una data sezione s_0 . Inoltre, f ha 9 fibre singolari, ed il luogo discriminante è

$$\Delta(f) = \{[A_{11}], [A_{12}], [A_{13}], [(A_1, C)], [(C, A_1)], [B_{11}], [B_{12}], [(B_1, C)], [(C, B_1)], [(C, C)]\}.$$

5.4 Le fibre singolari

Consideriamo un punto di $\Delta(f)$ che sia una singolarità di tipo $\frac{1}{2}(1, 1)$, ad esempio $[A_{ij}]$, con $i, j = 1, 2$. La controimmagine di $[A_{ij}]$ rispetto al quoziente q_2 è

$$q_2^{-1}([A_{ij}]) = A_{ij}.$$

Definizione 5.4.1. Chiamiamo la sua retroimmagine rispetto alla proiezione π

$$C_{ij} := \pi^{-1}(A_{ij}) = \{(A_i, A_j, x), x \in E_\omega\}.$$

C_{ij} è dunque isomorfa a E_ω . Si noti che 4 dei 35 punti singolari della 3-varietà quoziente giacciono su C_{ij} , cioè $A_{ij1}, A_{ij2}, A_{ij3}$ e A_{ijC} .

Definizione 5.4.2. Consideriamo lo scoppimento $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ negli A_{ijk} , con $K = 1, 2, C$. Denotiamo con E_{ijk} il piano eccezionale sopra A_{ijk} e con \hat{C}_{ij} la trasformata stretta di C_{ij} .

Il pullback del divisore C_{ij} sotto la mappa

$$b^* : Div(E_\omega^3) \rightarrow Div(\tilde{E}_\omega^3)$$

è

$$b^*(C_{ij}) = \hat{C}_{ij} + E_{ij1} + E_{ij2} + E_{ij3} + E_{ijC}.$$

Come già osservato, l'azione di $-\omega$ è banale sui piani eccezionali, mentre su C_{ij} ω agisce nello stesso modo che su E_ω . Per quanto osservato fino ad ora, $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ ha 5 componenti.

Definizione 5.4.3. Denotiamo le 5 componenti di $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ con

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \tilde{q}_3(\hat{C}_{ij}) \\ D_{ijk} &= \tilde{q}_3(E_{ijk}). \end{aligned}$$

Studiamo la molteplicità delle componenti.

Proposizione 5.4.1. $f^{-1}([A_{ij}]) = 2D_{ij} + D_{ij1} + D_{ij2} + D_{ij3} + D_{ijC}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_{ij}$ un punto diverso da A_{ijk} , $k = 1, 2, 3, C$, e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^3 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap \omega(U_P) \cap \omega^2(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto dei piani eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_3|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_3(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_3(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_3(P)$ in $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y, z) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_3(U_P), x', y', z')$ centrate in $\tilde{q}_3(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = A_{ij} \in E_\omega^2$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s, t)$ centrate in A_{ij} e coordinate locali (V, s', t') centrate in $[A_{ij}]$ in $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y, z) & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & (\tilde{q}_3(U_P), x', y', z') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ A_{ij} \in (\pi(U_P), s, t) & \xrightarrow{q_2} & A_{ij} \in (V, s', t') \end{array}$$

$\tilde{q}_3|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_3^*(y') &= y, \\ \tilde{q}_2^*(z') &= z \end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s, t)$ e (V, s', t') in modo che

$$\begin{aligned} \pi^*(s) &= x, \\ \pi^*(t) &= y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_2^*(s') &= s^2, \\ q_2^*(t') &= t^2 \end{aligned}$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[s', t'] & \xrightarrow{q_2^*} & \mathbb{C}[s, t] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y', z'] & \xrightarrow{\tilde{q}_3^*} & \mathbb{C}[x, y, z] \end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$\begin{aligned} f^*(s') &= (x')^2, \\ f^*(t') &= (y')^2 \end{aligned}$$

$[A_{ij}]$ è localmente definito da $s' = t' = 0$ in $V \subset E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ e D_{ij} è localmente definito da $x' = y' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_{ij} come componente della fibra $f^{-1}([A_{ij}])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ e $f^*(t')$ lungo D_{ij} : dunque la molteplicità di D_{ij} è 2.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $D_{ijk} = 1$. □

Le dimostrazioni mostrate valgono per tutte le fibre sui punti di tipo $\frac{1}{2}$, quindi tutti i punti A_{ijk} con $i, j, k = 1, 2, C$, tali che $A_{ijk} \in \Delta(f)$.

Consideriamo ora un punto di $\Delta(f)$ di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$, ad esempio $[B_{ij}]$, con $i, j = 1, 2$. La controimmagine di $[B_{ij}]$ rispetto al quoziente q_2 è

$$q_2^{-1}([B_{ij}]) = B_{ij}.$$

Definizione 5.4.4. Chiamiamo la sua retroimmagine rispetto alla proiezione π

$$C_{ij} := \pi^{-1}(B_{ij}) = \{(B_i, B_j, x), x \in E_\omega\}.$$

C_{ij} è dunque isomorfa a E_ω . Si noti che 3 dei 35 punti singolari della 3-varietà quoziente giacciono su C_{ij} , cioè $B_{ij1}, B_{ij2}, B_{ijC}$.

Definizione 5.4.5. Consideriamo lo scoppiamento $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ negli B_{ijk} , con $K = 1, 2, C$. Denotiamo con E_{ijk} il piano eccezionale sopra B_{ijk} e con \hat{C}_{ij} la trasformata stretta di C_{ij} .

Il pullback del divisore C_{ij} sotto la mappa

$$b^* : Div(E_\omega^3) \rightarrow Div(\tilde{E}_\omega^3)$$

è

$$b^*(C_{ij}) = \hat{C}_{ij} + E_{ij1} + E_{ij2} + E_{ijC}.$$

Come già osservato, l'azione di $-\omega$ è banale sui piani eccezionali, mentre su C_{ij} ω agisce nello stesso modo che su E_ω . Per quanto osservato fino ad ora, $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ ha 4 componenti.

Definizione 5.4.6. Denotiamo le 4 componenti di $\tilde{q}_3(b^*(C_{ij}))$ con

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \tilde{q}_3(\hat{C}_{ij}) \\ D_{ijk} &= \tilde{q}_3(E_{ijk}). \end{aligned}$$

Studiamo la molteplicità delle componenti.

Proposizione 5.4.2. $f^{-1}([B_{ij}]) = 3D_{ij} + D_{ij1} + D_{ij2} + D_{ijC}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{C}_{ij}$ un punto diverso da B_{ijk} , $k = 1, 2, C$, e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^3 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap \omega(U_P) \cap \omega^2(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto dei piani eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_3|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_3(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_3(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_3(P)$ in $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y, z) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y', z')$ centrate in $\tilde{q}_3(P)$.

D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = B_{ij} \in E_\omega^2$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s, t)$ centrate in B_{ij} e coordinate locali (V, s', t') centrate in $[B_{ij}]$ in $E_\omega^2 / \langle \omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
P \in (U_P, x, y, z) & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & (\tilde{q}_3(U_P), x', y', z') \\
\downarrow \pi & & \downarrow f \\
B_{ij} \in (\pi(U_P), s, t) & \xrightarrow{q_2} & B_{ij} \in (V, s', t')
\end{array}$$

$\tilde{q}_3|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_3^*(x') &= x, \\
\tilde{q}_3^*(y') &= y, \\
\tilde{q}_2^*(z') &= z
\end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s, t)$ e (V, s', t') in modo che

$$\begin{aligned}
\pi^*(s) &= x, \\
\pi^*(t) &= y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
q_2^*(s') &= s^3, \\
q_2^*(t') &= t^3
\end{aligned}$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{C}[s', t'] & \xrightarrow{q_2^*} & \mathbb{C}[s, t] \\
\downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\
\mathbb{C}[x', y', z'] & \xrightarrow{\tilde{q}_3^*} & \mathbb{C}[x, y, z]
\end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$\begin{aligned}
f^*(s') &= (x')^3, \\
f^*(t') &= (y')^3
\end{aligned}$$

$[B_{ij}]$ è localmente definito da $s' = t' = 0$ in $V \subset E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ e D_{ij} è localmente definito da $x' = y' = 0$ in U_P . La molteplicità di D_{ij} come componente della fibra $f^{-1}([B_{ij}])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ e $f^*(t')$ lungo D_{ij} : dunque la molteplicità di D_{ij} è 3.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $D_{ijk} = 1$. \square

Le dimostrazioni mostrate vangelo per tutti i punti di tipo $\frac{1}{3}(1, 1)$, quindi per tutti i punti di tipo B_{ijk} , con $i, j, k = 1, 2, C$, tali che $B_{ijk} \in \Delta(f)$.

Consideriamo ora il punto fisso $(C, C, C) \in \Delta(f)$ che è una singolarità di tipo $\frac{1}{6}(1, 1)$. La controimmagine di $[(C, C)]$ rispetto al quoziente q_2 è

$$q_2^{-1}([(C, C)]) = (C, C).$$

Definizione 5.4.7. Chiamiamo la sua retroimmagine rispetto alla proiezione π

$$R := \pi^{-1}((C, C)) = \{(C, C, x), x \in E_\omega\}.$$

C_{ij} è dunque isomorfa a E_ω . Si noti che 4 dei 35 punti singolari della 3-varietà quoziente giacciono su R , cioè $[(C, C, A_1)], [(C, C, B_1)]$ e $[(C, C, C)]$.

Definizione 5.4.8. Consideriamo lo scoppimento $b : \tilde{E}_\omega^3 \rightarrow E_\omega^3$ nei punti singolari giacenti sulla fibra sopra (C, C) . Denotiamo con E_{CCk} il piano eccezionale sopra (C, C, k) , con $k = A, B, C$ e con \hat{C}_{ij} la trasformata stretta di R .

Il pullback del divisore R sotto la mappa

$$b^* : Div(E_\omega^3) \rightarrow Div(\tilde{E}_\omega^3)$$

è

$$b^*(R) = \hat{R} + E_{CCA} + ECCB + ECCC.$$

Come già osservato, l'azione di $-\omega$ è banale sui piani eccezionali, mentre su R ω agisce nello stesso modo che su E_ω . Per quanto osservato fino ad ora, $\tilde{q}_3(b^*(R))$ ha 4 componenti.

Definizione 5.4.9. Denotiamo le 4 componenti di $\tilde{q}_3(b^*(R))$ con

$$D_R = \tilde{q}_3(\hat{R})$$

$$D_{CCk} = \tilde{q}_3(E_{CCk}).$$

Studiamo la molteplicità delle componenti.

Proposizione 5.4.3. $f^{-1}([(C, C)]) = 6D_R + 2D_{CCA} + 3D_{CCB} + D_{CCC}$.

Dimostrazione. Sia $P \in \hat{R}$ un punto diverso da (C, C, Q) , $Q = A_i, B_j, C$, e sia U_P un intorno di P in \tilde{E}_ω^3 , abbastanza piccolo in modo che $U_P \cap \omega(U_P) \cap \omega^2(U_P) = \emptyset$, cioè in modo che U_P non contenga nessun punto dei piani eccezionali. Dunque la restrizione $\tilde{q}_3|_{U_P} : U_P \rightarrow \tilde{q}_3(U_P)$ è un biolomorfismo e $\tilde{q}_3(U_P)$ è un intorno di $\tilde{q}_3(P)$ in $\tilde{E}_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$. Prendiamo coordinate locali (U_P, x, y, z) centrate in P e coordinate $(\tilde{q}_2(U_P), x', y', z')$ centrate in $\tilde{q}_3(P)$. D'altra parte, $\pi(U_P)$ è un intorno di $\pi(P) = (C, C) \in E_\omega^2$. Prendiamo coordinate locali $(\pi(U_P), s, t)$ centrate in (C, C) e coordinate locali (V, s', t') centrate in $[(C, C)]$ in $E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$.

La situazione locale è descritta dal seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} P \in (U_P, x, y, z) & \xrightarrow{\tilde{q}_3} & (\tilde{q}_3(U_P), x', y', z') \\ \downarrow \pi & & \downarrow f \\ (C, C) \in (\pi(U_P), s, t) & \xrightarrow{q_2} & (C, C) \in (V, s', t') \end{array}$$

$\tilde{q}_3|_{U_P}$ è un biolomorfismo, dunque induce un isomorfismo tra anelli di funzioni olomorfe, quindi possiamo scegliere le coordinate locali in modo che

$$\begin{aligned} \tilde{q}_3^*(x') &= x, \\ \tilde{q}_3^*(y') &= y, \\ \tilde{q}_2^*(z') &= z \end{aligned}$$

Analogamente, si possono scegliere coordinate locali in $(\pi(U_P), s, t)$ e (V, s', t') in modo che

$$\begin{aligned} \pi^*(s) &= x, \\ \pi^*(t) &= y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} q_2^*(s') &= s^6, \\ q_2^*(t') &= t^6 \end{aligned}$$

Si ha dunque il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[s', t'] & \xrightarrow{q_2^*} & \mathbb{C}[s, t] \\ \downarrow f^* & & \downarrow \pi^* \\ \mathbb{C}[x', y', z'] & \xrightarrow{\tilde{q}_3^*} & \mathbb{C}[x, y, z] \end{array}$$

Poichè $\tilde{q}_2^* \circ f^* = \pi^* \circ q_1^*$, si ha che

$$\begin{aligned} f^*(s') &= (x')^6, \\ f^*(t') &= (y')^6 \end{aligned}$$

$[(C, C)]$ è localmente definito da $s' = t' = 0$ in $V \subset E_\omega^2 / \langle -\omega \rangle$ e D_R è localmente definito da $x' = y' = 0$ in U_P . La molteplicità di R come componente della fibra $f^{-1}([(C, C)])$ è l'ordine di annullamento di $f^*(s')$ e $f^*(t')$ lungo D_R : dunque la molteplicità di D_R è 6.

Attraverso ragionamenti analoghi si ottiene che la molteplicità di $D_{ijk} = 1$. □

5.5 Varietà di Calabi-Yau

Le 3-folds analizzate nel precedente e corrente capitolo risultano essere delle varietà di Calabi-Yau. Seguiremo per le definizioni [GH]

Definizione 5.5.1. Sia X una varietà non singolare complessa. Definiamo

$$H^0(X, \Omega_X^p)$$

lo spazio vettoriale delle sezioni globali del fascio delle p -forme differenziali olomorfe su X .

Definizione 5.5.2. Una 3-fold non singolare X con divisore canonico K_X è una varietà di Calabi-Yau se valgono le seguenti:

- (i) $K_X \sim \mathcal{O}_X$, cioè $\dim H^0(X, \Omega_X^3) = 1$

$$(ii) \quad H^0(X, \Omega_X^1) = H^0(X, \Omega_X^2) = 0$$

Proposizione 5.5.1. *La varietà $E_\omega^3 / \langle \omega \rangle$ è di Calabi-Yau*

Dimostrazione. La 3-forma regolare $dx \wedge dy \wedge dz$ su \mathbb{C}^3 passa al quoziente per ω perché ω è una radice terza dell'unità:

$$d\omega x \wedge d\omega y \wedge d\omega z = \omega^3(dx \wedge dy \wedge dz) = dx \wedge dy \wedge dz,$$

dunque il fibrato canonico è banale. La moltiplicazione componente per componente per ω non preserva nè le 1-forme ($\omega dx \neq dx$), nè le 2-forme ($\omega^2(dx \wedge dy) \neq dx \wedge dy$), dunque $H^0(E_\omega^3 / \langle \omega \rangle, \Omega_X^1) = H^0(E_\omega^3 / \langle \omega \rangle, \Omega_X^2) = 0$. \square

Per quanto riguarda la varietà $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$, un discorso analogo può essere effettuato rispetto alle 1-forme e alle 2-forme.

La 1-forma $dx \wedge dy \wedge dz$ non passa al quoziente in quanto $(-\omega)^3 = -1$, dunque $d(-\omega)x \wedge d(-\omega)y \wedge d(-\omega)z = -(dx \wedge dy \wedge dz) \neq dx \wedge dy \wedge dz$.

Si noti però che $(dx \wedge dy \wedge dz)^{\otimes 2}$ passa al quoziente. Poiché le singolarità di $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ sono klt, si dice che $E_\omega^3 / \langle -\omega \rangle$ è una varietà di Calabi-Yau in senso generalizzato di tipo klt.

Bibliografia

- [B] A. Beauville, Surfaces Algébrique Complexes, Astérisque, tome 54 (1978).
- [C] H. Clemens, A Scrapbook of Complex Curve Theory, Springer, 1980.
- [CHSW] P. Candelas, G. T. Horowitz, A. Strominger and E. Witten, Vacuum Configurations For Superstrings, Nucl. Phys. B 258 (1985) 46–74.
- [FG] S. Filippini, A. Garbagnati, A rigid Calabi-Yau 3-fold, arXiv:1102.1854v2, (2011).
- [G] A. Grassi, Birational Geometry old and new, BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY, Volume 46, Number 1, January 2009.
- [Gr] A. Grassi, On minimal models of Elliptic Threefolds, Mathematische Annalen volume 290, Springer, 1991.
- [GH] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Hoboken, New Jersey, U.S.A. Wiley-Interscience, 1994.
- [GP] B.R. Greene R. Plesser, Duality in Calabi-Yau moduli space, Nucl. Phys. B 338 (1990)
- [H] J. Harris, Algebraic Geometry - A First Course, Springer, 1982.
- [Ha] R. Hartshorne, Algebraic Geometry, Springer-Verlag, New York, 1986.

- [K] K. Kodaira, On compact analytic surfaces II–III. *Ann. Math.* 77, 563–626 (1963); 78, 1–40, 1963
- [M] R. Miranda, *The basic theory of elliptic surfaces*, 1989.
- [Mi] R. Miranda, *Smooth models for elliptic threefolds*, *The Birational Geometry of Degenerations*, Birkhauser, 1983.
- [O] K. Oguiso, On certain rigid fibered Calabi-Yau threefolds, *Math. Z.* 221 (1996) .
- [OS] K. Oguiso J. Sakurai, Calabi-Yau three-folds of quotient type, *Asian J.Math.* 5 (2001).
- [OT] K. Oguiso, T.T. Truong, Explicit examples of rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy, *arXiv:1306.1590v3*, (2013).
- [R] M. Reid, Minimal models of canonical 3-folds, *Advanced Studies in Pure Mathematics, algebraic varieties and analytic varieties* ,1983 (131-180).
- [R] M. Reid, Young person’s guide to canonical singularities, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, 1987.
- [Re] M. Reid, *Young Person’s Guide to Canonical Singularities*, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Spencer J. Bloch, 1985.
- [S] Y. Shuhang, *Examples of Isotrivial Elliptic Threefolds over \mathbb{P}^2 and Their Discriminants*, 2018.
- [U1] K. Ueno, *Algebraic Geometry 1*, *Math. Mono*, AMS vol.185.
- [U2] K. Ueno, *Algebraic Geometry 2*, *Math. Mono*, AMS vol.197