ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

**SCUOLA DI SCIENZE**
**Corso di Laurea in Matematica**

# Funzioni a Variazione limitata e insiemi di Perimetro minimo

**Relatore:**
**Chiar.mo Prof.**
**BRUNO FRANCHI**

**Presentata da:**
**GIACOMO GAVELLI**

**Sessione 3**
**Anno Accademico 2019/2020**

# Indice

# Introduzione

Nell'ambito del Calcolo delle variazioni il primo problema è quello di provare l'esistenza di minimi per dati funzionali. Un approccio classico per la ricerca dei minimi è quello dato dai cosiddetti "metodi diretti del calcolo delle variazioni" per lo studio di funzionali integrali $F$, che risale a Riemann e Hilbert. L'idea centrale è quella di scegliere un opportuno spazio funzionale dove studiare il problema, spazio che dovrà essere sufficientemente "grande" per garantire l'esistenza di un minimo, utilizzando tecniche ispirate al teorema di Weierstrass.

Un esempio tipico di questo approccio è dato dallo studio di funzionali "tipo energia" della forma

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega f u\, dx,$$

dove $\Omega$ è un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, $1 < p < \infty$ e $f \in L^{p'}(\Omega)$ con $1/p + 1/p' = 1$. Un ambiente naturale per lo studio di questi funzionali sono gli gli Spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. La prova dell'esistenza del minimo è ottenuta attraverso 3 passi:

i) si prova che $F$ è coercivo, cioè $F(u) \to +\infty$ quando $||u|| \to \infty$ in $W^{1,p}(\Omega)$;

ii) si prova che $F$ è debolmente inferiormente semicontinuo, cioè che, se $u_n \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, allora

$$F(u) \le \liminf_{n\to\infty} F(u_n);$$

iii) si prova che da una successione limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ si può estrarre una sottosuccessione debolmente convergente.

Il punto iii), che sostuisce il teorema di Bolzano-Weierstass in spazi di dimensione infinita, non vale però in ogni spazio di Banach, ma solamente in spazi di Banach riflessivi (Teorema di Banach-Alaoglu). Per questa ragione la tecnica precedente non copre il caso $p = 1$.

Infatti, per $p = 1$, $W^{1,1}(\Omega)$ non è riflessivo. D'altra parte, funzionali con crescita $p = 1$ si prestano a studiare problemi inerenti a funzionali dell'area. Vengono dunque introdotti nuovi spazi di funzioni proprio per affrontare tali problemi, gli Spazi $BV(\Omega)$, o Spazi di funzioni a variazione limitata, dove Le derivate nel senso distribuzionale di funzioni in $L^1(\Omega)$ non sono in generale di tipo funzione ma di tipo misura.

Questa Tesi si propone di trattare parte della teoria di tali Spazi $BV(\Omega)$, seguendo principalmente la presentazione di Evans e Gariepy in [1], per poi arrivare nell'ultimo capitolo a sfruttare la teoria sviluppata per dimostrare un importante Teorema di esistenza di insiemi di perimetro minimo, date determinate condizioni al contorno. Per quest'ultimo risultato si fa riferimento a Giusti ([2]).

Nel primo capitolo si introducono gli Spazi $BV(\Omega)$ e $BV_{loc}(\Omega)$ e viene data una definizione di insiemi di perimetro finito. Si dimostra il Teorema di Struttura che garantisce che le derivate in senso distribuzionale delle funzioni $f \in BV(\Omega)$ sono misure di Radon definite sullo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, per poi dare a $BV(\Omega)$ una struttura di Spazio normato. Il capitolo si conclude con un confronto tra gli Spazi $BV(\Omega)$ e gli Spazi di Sobolev. Risulta in effetti che se una funzione

$$f : \Omega \to \mathbb{R}$$

è tale che $f \in W^{1,1}(\Omega)$, allora $f \in BV(\Omega)$. Il viceversa però non è vero e viene sottolineata la differenza tra i due spazi.

Il capitolo 2 inizia con la dimostrazione della semicontinuità inferiore della misura variazione, risultato che sarà fondamentale alla fine del capitolo per dimostrare un Teorema di compattezza per funzioni $BV$. All'interno di questo capitolo si dimostra anche il Teorema di Anzellotti-Giaquinta, una generalizzazione del Teorema di Meyers-Serryn nello Spazio delle funzioni $BV$ che permette di approssimare ogni funzione a variazione limitata tramite funzioni lisce. Un accento è posto sul fatto che questo non sia un risultato di densità in norma $BV$.

Il terzo capitolo è interamente dedicato allo studio del funzionale di "Traccia", utile per controllare il "comportamento al bordo" per funzioni con una certa regolarità fino alla frontiera dell'insieme $\Omega$.

Nel quarto capitolo vengono generalizzate le disuguaglianze di Sobolev e Poincaré (per funzioni di Sobolev) alle funzioni BV. Fatto ciò, vengono dimostrate la disuguaglianza isoperimetrica e una sua versione locale. Queste permettono di dare una stima sulla misura di Lebesgue di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ conoscendo il perimetro di quest'ultimo:

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq C_1||\partial E||(\mathbb{R}^n).$$

Questo caso è interessante quando l'insieme preso in questione ha perimetro finito, altrimenti la stima è banale. È interessante osservare la reciproca dipendenza della disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg-Sobolev e della disuguaglianza isoperimetrica (Osservazione 4.1).

Nel quinto ed ultimo capitolo infine si vuole dare un esempio di problema che è stato risolto grazie all'introduzione degli Spazi BV. Il problema, come precedentemente anticipato, è quello di mostrare l'esistenza e l'unicità di un insieme di perimetro minimo tra un insieme di insiemi che rispettino una stessa condizione al contorno. Per fare ciò si sfrutta un metodo diretto del calcolo delle variazioni che si avvale principalmente dei risultati di semicontinuità inferiore e di Compattezza mostrati nel capitolo 2.

# Capitolo 1

# Funzioni BV

## 1.1 Preliminari

Per tutta la trattazione $\Omega$ sarà un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^n$.

**Def 1.1.** *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Fissato $i \in \{1, ...n\}$ diciamo che $h_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ è la **derivata parziale debole** di $f$ rispetto ad $x_i$ in $\Omega$ se*

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_\Omega h_i \varphi dx$$

*per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega)$.*

**Def 1.2.** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Diciamo che una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartiene allo **spazio di Sobolev** $W^{1,p}(\Omega)$ Se:*
*i) $f \in L^p(\Omega)$.*
*ii) Per ogni $i \in \{1, ...n\}$ le derivate parziali deboli $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ esistono e $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega)$.*

*In maniera analoga diciamo che $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ se $f \in W^{1,p}(V)$ per ogni $V \subset\subset \Omega$ aperto.*

**NOTAZIONI**

- Sia $f \in W^{1,p}(\Omega)$, la norma di $f$ è data da

$$||f||_{W^{1,p}(\Omega)} := (||f||^p_{L^p(\Omega)} + \int_\Omega |Df|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

- Diciamo dunque che, data una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di funzioni in $W^{1,p}(\Omega)$,

$$f_k \to f \quad in\ W^{1,p}(\Omega) \quad se \quad ||f_k - f||_{W^{1,p}(\Omega)} \to 0.$$

- In maniera analoga,

$$f_k \to f \quad in\ W^{1,p}_{loc}(\Omega) \quad se \quad ||f_k - f||_{W^{1,p}(V)} \to 0$$

per ogni insieme aperto V compattamente contenuto in $\Omega$.

**COSTRUZIONE DEL MOLLIFICATORE**
Sia $\varepsilon > 0$, denotiamo con $\Omega_\varepsilon$ l'insieme

$$\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \epsilon\}.$$

Definiamo la funzione $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ come

$$\eta(x) := \begin{cases} Ce^{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right)} & se\ |x| < 1 \\ 0 & se\ |x| \geq 1. \end{cases}$$

Con $C > 0$ in modo che $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)dx = 1$, cioè $C := \left(\int_{B(0,1)} e^{\left(\frac{1}{|x^2|-1}\right)} dx\right)^{-1}$.
Sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

$\eta_\varepsilon$ è detto *mollificatore standard.* Se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ definiamo

$$f_\varepsilon := \eta_\varepsilon * f.$$

Cioè

$$f_\varepsilon(x) := \int_\Omega \eta_\varepsilon(x-y)f(y)dy \quad con\ x \in \Omega_\varepsilon.$$

Enunciamo di seguito alcuni risultati che ci serviranno per le dimostrazioni del Teorema di struttura (1.3) per funzioni BV e per il Teorema di Anzellotti-Giaquinta (2.3).

**Teorema 1.1.** *(Proprietà dei mollificatori)*
*Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, allora valgono le seguenti affermazioni:*
*i) Per ogni $\varepsilon > 0$, $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$. Ha quindi senso riferirsi ad $f_\varepsilon$ come la regolarizzata per convoluzione di $f$.*
*ii) Se $K := supp(f)$ è compatto, allora $supp(f_\varepsilon)$ è compatto e vale*

$$supp(f_\varepsilon) \subseteq \{x \in \Omega \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}.$$

*iii) Se $f \in C(\Omega)$, allora*

$$f_\varepsilon \to f$$

*uniformemente sui compatti di* $\Omega$.
*iv) Se* $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ *per qualche* $1 \le p < \infty$, *allora*

$$f_\varepsilon \to f \ in \ L^p_{loc}(\Omega).$$

*v) Se* $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *per un certo* $1 \le p < \infty$, *allora*

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial x_j} = \eta_\varepsilon * \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

*su* $\Omega_\varepsilon$, *per ogni j=1,...n. Cioè la derivata della regolarizzata è la regolarizzata della derivata. In particolare*

$$f_\varepsilon \to f \ in \ W^{1,p}_{loc}(\Omega).$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 146. □

**Def 1.3.** *(Misura)*
*Sia* $\mathfrak{F}$ *una* $\sigma -$ *algebra definita su un insieme* $X$. *Si definisce* ***misura*** *su* $X$ *una funzione* $\mu : \mathfrak{F} \to [0, +\infty]$ *tale che* $\mu$ *sia* $\sigma -$ *additiva, cioè tale che se* $A_1, A_2, ... \in \mathfrak{F}$ *è una successione di insiemi mutuamente disgiunti, allora:*

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k).$$

*Gli elementi di* $\mathfrak{F}$ *sono detti insiemi* $\mu -$ *misurabili e* $(X, \mathfrak{F}, \mu)$ *viene detto* ***spazio di misura***.

**Def 1.4.** *(misura di Radon)*
*Sia* $\mu$ *una misura definita sulla* $\sigma -$ *algebra di Borel di uno spazio topologico* $X$ *di Hausdorff. La misura si dice:*
*i)* ***Regolare all'interno*** *se per ogni aperto* $U$

$$\mu(U) = \sup_{K\subseteq U \ compatto} \mu(K).$$

*ii)* ***Regolare esternamente*** *se per ogni Boreliano* $B$

$$\mu(B) = \inf_{B\subseteq U \ aperto} \mu(U).$$

*iii)* ***Localmente finita*** *se per ogni punto* $x \in X$ *esiste u intorno* $U$ *di* $x$ *tale che* $\mu(U) < \infty$.

$\mu$ *è infine detta* ***misura di Radon*** *se è regolare all'interno, esternamente ed è localmente finita.*

**Teorema 1.2.** *(Rappresentazione di Riesz)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e sia*

$$L : C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$$

*un funzionale lineare che soddisfi la seguente condizione:*

$$sup\left\{L(\varphi) \mid \varphi \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m),\ |\varphi| \leq 1,\ supp(\varphi) \subseteq K\right\} < \infty \quad (*)$$

*per ogni $K \subseteq \Omega$ compatto. Allora esiste una misura $\mu$ di Radon su $\Omega$ e una funzione $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^m$ che sia $\mu-misurabile$ tale che:*
*i) $|\sigma| = 1,\ \mu - q.d.$*
*ii) Per ogni $\varphi \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vale:*

$$L(\varphi) = \int_{\Omega} < \varphi, \sigma > d\mu.$$

**Def 1.5.** *$\mu$ è detta la* ***misura variazione*** *associata ad L. Questa è definita per ogni aperto $V \subset\subset \Omega$ da*

$$\mu(V) := sup\left\{L(\varphi) \mid \varphi \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m), |\varphi| \leq 1,\ supp(\varphi) \subset V\right\}.$$

La dimostrazione dettagliata del Teorema è molto lunga e richiederebbe una trattazione a parte. Viene inserita di seguito una traccia per riportare i passaggi salienti. Per i dettagli consultare [1] pag. 60.

*Dimostrazione. (traccia)*
**1)** Si definisce $\mu$ su aperti come nella Def. 1.5, mentre su insiemi $A \subseteq \Omega$ arbitrari si pone

$$\mu(A) := \inf\{\mu(V)\ ;\ A \subseteq V,\ V\ aperto\}.$$

**2)** Si mostra che $\mu$ così definita è una misura. Lo si fa prima considerando un aperto $V$ e un suo ricoprimento numerabile, poi per un insieme $A$ arbitrario considerando un ricoprimento numerabile di insiemi qualsiasi.

**3)** Si mostra che $\mu$ è una misura di Radon. Considerando due insiemi disgiunti e il criterio di Caratheodory si vede che $\mu$ è una misura di Borel, inoltre dalla definizione di $\mu$ discende che è Borel regolare. Questo si mostra "approssimando" (nel senso della misura $\mu$) ogni insieme A con aperti $V_k \supseteq A$ e poi sfruttando l'ipotesi di limitatezza $(*)$ si conclude che la misura sia finita sui compatti $K \subset \Omega$.

**4)** Si definiscono $C^+_{comp}(\Omega) := \{f \in C_{comp}(\Omega)\ ;\ f \geq 0\}$ e un funzionale

$$\lambda : C^+_{comp}(\Omega) \to \mathbb{R}; \quad \lambda(f) := \sup\left\{|L(g)|\ ;\ g \in\ C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m),\ |g| \leq f\right\}.$$

Si osserva che, se $f_1, f_2 \in C^+_{comp}(\Omega),\ f_1 \leq f_2$, allora $\lambda(f_1) \leq \lambda(f_2)$.

**5)** Tale $\lambda$ è lineare, infatti
i) $\lambda(cf) = c\lambda(f) \quad \forall c \geq 0$ e $\forall f \in C^+_{comp}(\Omega)$.
ii) $\lambda(f_1 + f_2) = \lambda(f_1) + \lambda(f_2) \quad \forall f_1, f_2 \in C^+_{comp}(\Omega)$.

**6)** A questo punto si afferma che

$$\lambda(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \forall f \in C^+_{comp}(\Omega).$$

La parte più sostanziosa della dimostrazione sta per provare questa affermazione. Per vedere come fare, si consulti la referenza ([1] pag. 61).

**7)** Ora si mostra che esiste una funzione $\mu - misurabile$ $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^m$ che soddisfi la condizione ii) dell'enunciato. Si fissa $e \in \mathbb{R}^m$, $|e| = 1$, e si pone

$$\lambda_e(f) := L(fe) \quad \forall f \in C_{comp}(\Omega).$$

Tale $\lambda_e$ è lineare e

$$|\lambda_e(f)| \leq \int_\Omega |f| \, d\mu.$$

Allora è possibile estenderlo ad un funzionale lineare limitato su $L^1(\Omega;\mu)$. Allora esiste $\sigma_e \in L^\infty(\Omega, \mu)$ tale che

$$\lambda_e(f) = \int_\Omega f\sigma_e \, d\mu$$

per $f \in C_{comp}(\Omega)$. Sia $e_1, \ldots, e_m$ la base canonica di $\mathbb{R}^m$ e sia $\sigma := \sum_{j=1}^m \sigma_{e_j} e_j$. Allora, se $f \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, si ha

$$L(f) = \sum_{j=1}^m L\left((f \cdot e_j) e_j\right) = \sum_{j=1}^m \int (f \cdot e_j) \, \sigma_{e,} \, d\mu = \int f \cdot \sigma \, d\mu.$$

**8)** Infine rimane da mostrare che $|\sigma| = 1$ $\mu - quasi\ dappertutto$. Per questo si prende $U \subset \Omega$ aperto e tale che $\mu(U) < \infty$. Si riesce a verificare che

$$\int_U |\sigma| \, d\mu = \mu(U).$$

Questo vale per ogni $U \subset \Omega$ aperto, $\mu(U) < \infty$. Allora $|\sigma| = 1$ $\mu - quasi\ dappertutto$.

$\square$

## 1.2 Definizione di Funzioni BV e loro prime proprietà

Per tutta la trattazione considereremo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto.

**Def 1.6.** *i) Sia $f \in L^1(\Omega)$. Diciamo che $f$ ha* ***variazione limitata in*** *$\Omega$ se*

$$sup\left\{\int_\Omega f div(\varphi)dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \le 1\right\} < \infty.$$

*Denotiamo lo spazio delle funzioni a variazione limitata in $\Omega$ con $BV(\Omega)$.*
*ii) un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ $\mathcal{L}^n-$misurabile si dice di* ***perimetro finito in*** *$\Omega$ se*

$$\mathcal{X}_E \in BV(\Omega).$$

Nella pratica è conveniente utilizzare delle versioni locali di tali definizioni:

**Def 1.7.** *i) Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Diciamo che $f$ ha* ***variazione localmente limitata in*** *$\Omega$ se, per ogni $V \subset\subset \Omega$ aperto,*

$$sup\left\{\int_V f div(\varphi)dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \le 1\right\} < \infty.$$

*In tal caso scriviamo $f \in BV_{loc}(\Omega)$.*
*ii) un sottoinsieme $E \subseteq \Omega$ $\mathcal{L}^n-$misurabile si dice di* ***perimetro localmente finito in*** *$\Omega$ se*

$$\mathcal{X}_E \in BV_{loc}(\Omega).$$

**Teorema 1.3.** *(Teorema di Struttura per funzioni $BV_{loc}$)*
*Sia $f \in BV_{loc}(\Omega)$. Allora esiste una misura $\mu$, di Radon su $\Omega$, e una funzione $\mu-$misurabile*

$$\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

*tale che:*
*i) $|\sigma(x)| = 1 \quad \mu-q.d.$*
*ii) per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\int_\Omega f div(\varphi)dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d\mu.$$

*Dimostrazione.* 1) Definiamo il funzionale

$$L : C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}; \qquad \varphi \mapsto -\int_\Omega f div(\varphi)dx.$$

Questo è lineare poiché

$$div : C^1(\Omega;\mathbb{R}^n) \to C(\Omega;\mathbb{R})$$
$$\varphi \mapsto div(\varphi)$$

è lineare e l'integrale è lineare:

$$L(\varphi+\psi) = -\int_\Omega f div(\varphi+\psi)dx = -\int_\Omega (f div(\varphi) + f div(\psi))dx =$$

$$= -\int_\Omega f div(\varphi) dx - \int_\Omega f div(\psi) dx = L(\varphi) + L(\psi)$$

e analogamente per $L(\lambda\varphi),\ \lambda \in \mathbb{R}$. L'obiettivo è quello di estendere L in modo unico ad un funzionale

$$\bar{L} : C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$$

che rispetti le condizioni del Teorema di rappresentazione di Riesz (1.2). In tal caso questo risultato ci garantisce che $\exists\ \mu$ misura di Radon su $\Omega$ e una funzione $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}^n$ che sia $\mu - misurabile$ tale che:
i) $|\sigma(x)| = 1,\ \mu - q.d.$
ii) Per ogni $\varphi \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ vale:

$$\bar{L}(\varphi) = \int_\Omega < \varphi, \sigma > d\mu.$$

2) Per ottenere tale prolungamento osserviamo che, essendo per ipotesi $f \in BV_{loc}(\Omega)$, dalla definizione segue che, per ogni $V \subset\subset \Omega$ aperto

$$C(V) := \sup\left\{L(\varphi) \mid \varphi \in C^1_{comp}(V; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\} < \infty.$$

Di conseguenza, per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(V; \mathbb{R}^n)$ con $V \subset\subset \Omega$ vale

$$|L(\varphi)| = |L(\varphi\frac{||\varphi||}{||\varphi||})| = ||\varphi|||L(\frac{\varphi}{||\varphi||})| \leq ||\varphi|||C(V)| \qquad (\star),$$

dove $||\varphi|| = ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$.

3) Sia ora $H \subset \Omega$ un qualsiasi compatto e sia $V_H$ aperto tale che $H \subset V_H \subset\subset \Omega$. Per ogni $\varphi \in C_{comp}(V_H; \mathbb{R}^n)$ tale che $supp(\varphi) \subseteq H$ sia $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni tale che $\varphi_k \in C^1_{comp}(V_H; \mathbb{R}^n)$ $k \in \mathbb{N}$ e $\varphi_k \to \varphi$ uniformemente su $V_H$.

**Osservazione 1.1.** *L'esistenza di una tale successione ci è garantita dalle proprietà dei mollificatori. Possiamo infatti considerare una successione di $\varphi_{\varepsilon_k}$ con $\varepsilon_k$ abbastanza piccolo in modo tale che il supporto sia contenuto in $V_H$. Essendo $\varphi$ continua è garantita la convergenza uniforme sui compatti di $V_H$, in particolare su $H$. Prolungando con 0 fuori da $H$ si ha convergenza uniforme su tutto $V_H$. Ovviamente le $\varphi_{\varepsilon_k}$ sono $C^1_{comp}(V_H)$ essendo per costruzione $C^\infty_{comp}(V_H)$.*

Definiamo a questo punto

$$\bar{L}(\varphi) := \lim_{k\to\infty} L(\varphi_k).$$

La convergenza uniforme ci garantisce l'esistenza del limite e il fatto che questo sia indipendente dalla scelta della successione $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a $\varphi$.

$$\bar{L}(\varphi) = \lim_{k\to\infty} -\int_\Omega f div(\varphi_k) dx = -\int_\Omega \lim_{k\to\infty} f div(\varphi_k) dx = -\int_\Omega f div(\varphi) dx.$$

La disuguaglianza ($\star$) ci permette di dare un controllo uniforme sul modulo:

$$|\bar{L}(\varphi)| \leq \lim_{k\to\infty} C(V_H)||\varphi_k|| = C(V_H) \liminf_{k\to\infty} ||\varphi_k|| \leq C(V_H)||\varphi|| < \infty.$$

Quindi L si estende in modo unico al funzionale lineare

$$\bar{L} : C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}; \qquad \varphi \to \lim_{k\to\infty} L(\varphi_k)$$

e vale che

$$sup\left\{\bar{L}(\varphi) \mid \varphi \in C_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1, supp(\varphi) \subseteq H\right\} < \infty.$$

Per ogni compatto $H \subset \Omega$. Come spiegato al punto 1), applicando il Teorema di rappresentazione di Riesz (1.2) a $\bar{L}$ che rispetta le condizioni desiderate siamo in grado di concludere. $\square$

## 1.3 Notazioni ed esempi

i) Se $f \in BV_{loc}(\Omega)$ denotiamo con

$$||Df||$$

la misura $\mu$, e diciamo che $||Df||$ è la **misura variazione** di f. Poniamo

$$[Df] := ||Df|| \llcorner \sigma$$

per indicare la misura $||Df||$ concentrata sulla funzione vettoriale $\sigma$. Questo significa che, posto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Boreliano,

$$||Df|| \llcorner \sigma(A) := \int_A \sigma d||Df||.$$

Da questo vediamo che la condizione ii) del Teorema di struttura (1.3) si può leggere come

$$\int_\Omega f div(\varphi)dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d||Df|| = -\int_\Omega < \varphi, d[Df] >$$

Per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

ii) in maniera analoga, se $E$ è un insieme di perimetro localmente finito in $\Omega$, consideriamo $f := \mathcal{X}_E$ e scriviamo

$$||\partial E||$$

per la misura $\mu$ relativa alla funzione caratteristica. Diciamo che $||\partial E||$ è la **misura perimetro** di E e che $||\partial E||(\Omega)$ è il perimetro di $E$ in $\Omega$.
Poniamo $\nu_E := -\sigma$. Ora possiamo scrivere

$$\int_E div(\varphi)dx = \int_\Omega < \varphi, \nu_E > d||\partial E||$$

per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n)$.
Dalla Def 1.5. si ha che, per ogni $V \subset\subset \Omega$

$$||Df||(V) = sup\left\{\int_V f div(\varphi)dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\},$$

$$||\partial E||(V) = sup\left\{\int_E div(\varphi)dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\}.$$

**Osservazione 1.2.** *Nei casi con sufficiente regolarità si riesce a dimostrare che $||\partial E||$ è la misura di Hausdorff del bordo e $\nu_E$ è la normale esterna al bordo, quindi quello che si ottiene non è altro che il Teorema della divergenza.*

*Infatti, sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme $\mathcal{L}^n-$misurabile regolare tale che $\partial E$ sia $C^2$. posta $||\partial E||$ la sua misura perimetro si ha*

$$||\partial E||(\Omega) = sup\left\{\int_E div(\varphi)dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\}.$$

*Il Teorema della divergenza, che sotto queste ipotesi è applicabile, ci permette di affermare che*

$$\int_E div(\varphi)dx = \int_{\partial E\cap\Omega} <\varphi,\nu_E> d\mathcal{H}^{n-1} \underbrace{\leq}_{C-S}$$

$$\int_{\partial E\cap\Omega} \underbrace{|\varphi|}_{\leq 1}\underbrace{|\nu_E|}_{=1} d\mathcal{H}^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E\cap\Omega).$$

*Da cui $||\partial E||(\Omega) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E\cap\Omega)$. Vediamo che vale anche il contrario. Essendo $\partial E \in C^2$, l'applicazione $x \mapsto \nu_E(x)$ è $C^1$. Fissato $\Omega' \subset\subset \Omega$ scelgo $\psi \in D(\mathbb{R}^n)$ tale che $\psi_{|\Omega'} \equiv 1$ e $supp(\psi) \subseteq \Omega$, $|\psi| \leq 1$.*
*Sia $\varphi := \psi\nu_E$. Vale che $|\varphi| \leq 1$, $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\int_E div(\varphi)dx \leq ||\partial E||(\Omega).$$

*Inoltre*

$$\int_E div(\varphi)dx = \int_{\partial E} \psi \underbrace{<\nu_E,\nu_E>}_{=1} d\mathcal{H}^{n-1}.$$

*Sia ora $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di aperti che "invada" $\Omega$, cioè tale che $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$ e $\Omega \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\Omega_k$. Per ogni $\Omega_k$ prendo una corrispettiva $\psi_k$ che abbia le proprietà richieste precedentemente. Abbiamo così una successione tale che $\psi_k \nearrow \mathcal{X}_\Omega$. Vale dunque per il Teorema della convergenza monotona*

$$||\partial E||(\Omega) \geq \int_{\partial E} \psi_k d\mathcal{H}^{n-1} \to \int_{\partial E\cap\Omega} d\mathcal{H}^{n-1} = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E\cap\Omega).$$

*Possiamo dunque concludere che, sotto le ipotesi di regolarità richiesta*

$$||\partial E||(\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E\cap\Omega).$$

## 1.4 Decomposizione della misura variazione

**Def 1.8.** *Siano $\mu$ e $\nu$ misure di Borel su $\mathbb{R}^n$.*
*(i) La misura $\nu$ si dice **assolutamente continua** rispetto a $\mu$, e si scrive*

$$\nu << \mu$$

*se $\mu(A) = 0$ implica $\nu(A) = 0$ $\forall A \subseteq \mathbb{R}^n$*

*(ii) Le misure $\nu$ e $\mu$ si dicono **mutuamente singolari**, e si scrive*

$$\nu \perp \mu$$

*se esiste un insieme di Borel $B \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che*

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus B) = \nu(B) = 0.$$

**Teorema 1.4.** *(di decomposizione di Lebesgue)*
*Siano $\nu$ e $\mu$ due misure di Radon su $\mathbb{R}^n$, allora*

$$\nu = \nu_{ac} + \nu_s,$$

*dove $\nu_{ac}$ e $\nu_s$ sono misure di Radon su $\mathbb{R}^n$ con*

$$\nu_{ac} << \mu, \ \ \nu_s \perp \mu.$$

*Diciamo che $\nu_{ac}$ è la **parte assolutamente continua** e che $\nu_s$ è la **parte sigolare** di $\nu$ rispetto a $\mu$.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 52. □

**Teorema 1.5.** *(Radon-Nicodym)*
*Siano $\mu$ e $\nu_{ac}$ misure di Radon su $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$\nu_{ac} << \mu.$$

*Allora esiste un'unica funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mu)$ tale che*

$$\nu_{ac}(E) = \int_E f d\mu$$

*per ogni insieme $E$ che sia $\nu_{ac} - misurabile$.*

*Dimostrazione.* [4] pag. 121. □

**NOTAZIONI**:
Posto $\sigma = (\sigma^1, ...\sigma^n)$, poniamo

$$\mu^i := ||Df|| \llcorner \sigma^i, \; i \in \{1, ...n\}.$$

Dal Teorema di decomposizione di Lebesgue (Teorema 1.4) possiamo scrivere

$$\mu^i = \mu^i_{ac} + \mu^i_s,$$

con

$$\mu^i_{ac} << \mathcal{L}^n, \quad \mu^i_s \perp \mathcal{L}^n,$$

dove $\mathcal{L}^n$ indica la misura di Lebesgue $n-dimensionale$, che è di Radon, come $\mu^i$. Quindi, in accordo con la notazione posta fino ad ora

$$\mu^i_{ac} = \mathcal{L}^n \llcorner f_i$$

per certe funzioni $f_i \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, con $i = 1, \ldots, n$. L'esistenza di tali funzioni è garantita dal Teorema di Radon-Nicodym (Teorema 1.5). Scriviamo

$$\begin{aligned} f_{x_i} &:= f_i \; (i = 1, \ldots, n), \\ Df &:= (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n}), \\ [Df]_{ac} &:= \left(\mu^1_{ac}, \ldots, \mu^n_{ac}\right) = \mathcal{L}^n \llcorner Df, \\ [Df]_s &:= \left(\mu^1_s, \ldots, \mu^n_s\right). \end{aligned}$$

Quindi

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s = \mathcal{L}^n \llcorner Df + [Df]_s,$$

così che $Df \in L^1_{\text{loc}}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ è la densità della parte assolutamente continua di $[Df]$.

**Osservazione 1.3.** *$f \in BV_{loc}(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ e $||Df||(\Omega) < \infty \iff f \in BV(\Omega)$. Infatti:*
*($\Rightarrow$) Per ogni $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega)$ vale*

$$\int_\Omega f div(\varphi) dx = -\int_\Omega < \varphi, \sigma > d||Df|| \underbrace{\leq}_{C-S} \int_\Omega ||\varphi|| \underbrace{||\sigma||}_{=1} d||Df|| \leq$$

$$||\varphi|| \int_\Omega d||Df|| = ||\varphi|| ||Df||(\Omega) < \infty.$$

*Da cui*

$$sup \left\{ \int_\Omega f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n), \; |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

*Poiché per tali $\varphi$ vale una maggiorazione uniforme della norma con 1. Quindi, dal momento che per ipotesi $f \in L^1(\Omega)$, $f \in BV(\Omega)$.*

($\Leftarrow$) *Per definizione di* $BV(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$. *Inoltre, per ogni* $V \subset\subset \Omega$ *e per ogni* $\varphi \in C^1_{comp}(V)$ *vale*

$$\int_V f div(\varphi) dx \leq \int_\Omega f div(\varphi) dx.$$

*Ora, prolungando identicamente* $\varphi$ *con 0 fuori da* $V$ *la divergenza rimane invariata e si ha che*

$$sup \left\{ \int_V f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(V; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\} <$$
$$sup \left\{ \int_\Omega f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

*Quindi* $f \in BV_{loc}(\Omega)$.

*Per mostrare che* $||Df||(\Omega) < \infty$ *è necessario innanzitutto capire chi sia* $||Df||(\Omega)$ *a partire dalla conoscenza della misura sugli aperti compattamente contenuti in* $\Omega$. *Si costruisce dunque una successione di insiemi* $\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *che invadano* $\Omega$ *come nell'Osservazione 1.2. Si osserva ora che*

$$||Df||(\Omega) = \lim_{k\to\infty} ||Df||(\Omega_k) = sup \left\{ \int_\Omega f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\},$$

*dove l'ultimo termine è* $< \infty$ *per definizione di funzione in* $BV(\Omega)$.

**Def 1.9.** *Sia* $f \in BV(\Omega)$. *Definiamo la* ***norma*** *di* $f$ *in questo spazio come*

$$||f||_{BV(\Omega)} := ||f||_{L^1(\Omega)} + ||Df||(\Omega),$$

*dove, come mostrato nell'Osservazione precedente,*

$$||Df||(\Omega) = sup \left\{ \int_\Omega f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

**Osservazione 1.4.** *Questa è effettivamente una norma poiché, per ogni* $f \in BV(\Omega)$

*i)* $||f||_{L^1(\Omega)} \geq 0$ *e* $||Df||(\Omega) \geq 0$, *quindi*

$$||f||_{BV(\Omega)} := ||f||_{L^1(\Omega)} + ||Df||(\Omega) \geq 0.$$

*Inoltre* $||f||_{L^1(\Omega)} = 0$ *e* $||Df||(\Omega) = 0 \iff f \equiv 0$, *da cui* $||f||_{BV(\Omega)} = 0 \iff f \equiv 0$.

*ii) posto* $\lambda \in \mathbb{R}$

$$||\lambda f||_{BV(\Omega)} = ||\lambda f||_{L^1(\Omega)} + ||D(\lambda f)||(\Omega) =$$
$$|\lambda| ||f||_{L^1(\Omega)} + |\lambda| ||Df||(\Omega) = |\lambda| ||f||_{BV(\Omega)}.$$

*iii)Presa qualsiasi* $g \in BV(\Omega)$

$$||f + g||_{BV(\Omega)} = ||f + g||_{L^1(\Omega)} + ||D(f + g)||(\Omega) \leq$$
$$||f||_{L^1(\Omega)} + ||g||_{L^1(\Omega)} + ||Df||(\Omega) + ||Dg||(\Omega) = ||f||_{BV(\Omega)} + ||g||_{BV(\Omega)}.$$

## 1.5 Funzioni BV e Spazi di Sobolev

**Proposizione 1.1.**

$$W^{1,1}_{loc}(\Omega) \subseteq BV_{loc}(\Omega)$$

*e vale che, posti* $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *e* $V \subset\subset \Omega$,

$$||Df||(V) = sup\left\{\int_V f div(\varphi) \mid \varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\} = \int_V |Df|dx.$$

*Dimostrazione.* Sia $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, sia $V \subset\subset \Omega$ e sia $\varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n)$ con $|\varphi| \leq 1$. Allora, applicando la defizione di derivata debole,

$$\int_V f div(\varphi)dx = \int_V f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}dx + \cdots + \int_V f\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}dx =$$

$$= -\int_V \frac{\partial f}{\partial x_1}\varphi_1 dx - \cdots - -\int_V \frac{\partial f}{\partial x_n}\varphi_n dx = -\int_V < Df, \varphi > dx$$

Questo ci dice che

$$\int_V f div(\varphi)dx = -\int_V < Df,\varphi > dx \underbrace{\leq}_{C-S} \int_V |Df| \underbrace{|\varphi|}_{\leq 1} dx \leq \int_V |Df|dx \underbrace{<}_{f\in W^{1,1}_{loc}(\Omega)} \infty.$$

Dunque

$$||Df||(V) = sup\left\{\int_V f div(\varphi) \mid \varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1\right\} < \infty.$$

Per dimostrare la seconda parte dell'enunciato dobbiamo verificare che

$$\int_V |Df|dx \leq ||Df||(V).$$

Sia $\varphi := \frac{Df}{|Df|}$. In questo modo vale che $< Df, \varphi >= |Df|$ e $|\varphi| \leq 1$. Non è però detto che $\varphi \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n)$, quindi consideriamo una successione $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $\varphi_k \to \varphi,\ |\varphi_k| \leq 1$ e $\varphi_k \in C^1_{comp}(V;\mathbb{R}^n)$; una tale successione può essere scelta per esempio mollificando opportunamente la funzione $\varphi$ di partenza. Per le funzioni della successione vale

$$\int_V < Df, \varphi_k > dx \leq ||Df||(V) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Questo in particolare vale anche per il limite per $k \to \infty$ e il Teorema della convergenza dominata mi permette di portare il limite sotto il segno di integrale ottenendo

$$||Df||(V) \geq \lim_{k\to\infty} \int_V < Df, \varphi_k > dx =$$

$$\int_V \lim_{k\to\infty} < Df, \varphi_k > dx = \int_V < Df, \varphi > dx = \int_V |Df|dx.$$

□

**Osservazione 1.5.** *Il risultato appena mostrato permette di affermare che per ogni* $f \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$

$$||Df|| = \mathcal{L}^n \llcorner |Df|$$

*e* $\mathcal{L}^n - q.d.$

$$\sigma = \begin{cases} \frac{Df}{|Df|} & se\ Df \neq 0 \\ 0 & se\ Df = 0. \end{cases}$$

*In maniera analoga a come è stato fatto per* $BV_{loc}(\Omega)$ *si dimostra che vale*

$$W^{1,1}(\Omega) \subseteq BV(\Omega).$$

*In particolare, grazie alla proprietà di inclusione tra spazi* $L^p$*, vale in generale che*

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subseteq BV_{loc}(\Omega)\ per\ 1 \leq p < \infty.$$

*Cioè ogni funzione di Sobolev ha variazione localmente limitata.*

**Osservazione 1.6.** *NON vale però l'uguaglianza insiemistica, cioè* $W^{1,1}_{loc}(\Omega) \nsubseteq BV_{loc}(\Omega)$. *Infatti, preso* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *insieme di perimetro localmente finito, si ha per definizione che* $\mathcal{X}_E \in BV_{loc}(\Omega)$, *ma a priori non è detto che* $\mathcal{X}_E \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$.
*Un controesempio su* $\mathbb{R}$ *è dato dalla funzione*

$$H(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0. \end{cases}$$

*In effetti, abbiamo visto che se* $f \in BV_{loc}(\Omega)$ *si può scrivere*

$$[Df] = [Df]_{ac} + [Df]_s = \mathcal{L}^n \llcorner Df + [Df]_s.$$

*Di conseguenza,* $f \in BV_{loc}(\Omega)$ *sarà tale che* $f \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \iff$

$$f \in L^p(\Omega),\ Df \in (L^p(\Omega))^n,\ [Df]_s = 0.$$

*Da qui ci accorgiamo che la differenza tra le funzioni a variazione limitata e le funzioni di Sobolev sta proprio nella presenza o meno della parte singolare* $[Df]_s$ *della misura vettoriale* $[Df]$.

# Capitolo 2

# Approssimazione e compattezza

## 2.1 Semicontinuità inferiore

**Teorema 2.1.** *(Semicontinuità inferiore della misura variazione)*
*Sia* $f \in L^1(\Omega)$ *e supponiamo che esista una successione* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *con* $f_k \in BV(\Omega)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *tale che* $f_k \to f$ *in* $L^1(\Omega)$*. Allora*

$$||Df||(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} ||Df_k||(\Omega).$$

*Cioè la misura variazione è un funzionale inferiormente semincontinuo rispetto alla convergenza in norma* $L^1$*.*
*Se* $f \notin BV(\Omega)$ *la misura variazione è definita ugualmente, in questo caso* $||Df||(\Omega) = \infty$*.*

*Dimostrazione.* Sia $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$. Allora

$$\int_\Omega f div(\varphi) dx = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k div(\varphi) dx,$$

e questo è vero poiché

$$|\int_\Omega f div(\varphi) dx - \int_\Omega f_k div(\varphi) dx| \leq \int_\Omega |f - f_k||div(\varphi)| dx \leq$$

$$C_\varphi ||f - f_k||_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ per } k \to \infty.$$

Ora,

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k div(\varphi) dx = - \lim_{k\to\infty} \int_\Omega < \varphi, \sigma > d||Df_k|| \leq \liminf_{k\to\infty} ||Df_k||(\Omega).$$

Questo vale dunque anche per il sup al variare di $\varphi$, e quindi otteniamo il risultato:

$$||Df||(\Omega) = sup \left\{ \int_\Omega f div(\varphi) dx \mid \varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n),\ |\varphi| \leq 1 \right\} \leq \liminf_{k\to\infty} ||Df_k||(\Omega).$$

□

**Corollario 2.1.** *Se $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$ ed $\exists\ C \in \mathbb{R}^+$ t.c. $||Df_k||(\Omega) < C\ \forall k \in \mathbb{N}$, allora $||Df||(\Omega) < \infty$, quindi $f \in BV(\Omega)$.*
*Cioè, limite in $L^1$ di funzioni $BV$ ed equilimitate è $BV$. Per quanto riguarda insiemi misurabili questo si traduce dicendo che limite di una successione di insiemi di perimetro equilimitato è un insieme di perimetro finito (nel senso del limite in $L^1$ della successione delle funzioni caratteristiche) .*

## 2.2 Approssimazione tramite funzioni lisce

**Def 2.1.** *Sia $\{V_k\}_{k\in I}$ ricoprimento aperto di $\Omega$. Una **partizione dell'unità** su $\Omega$ subordinata a tale ricoprimento e indicizzata su $I$ è una famiglia di funzioni continue $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ tale che:*
*i) supp($\varphi_k$) $\subset V_k$, per ogni $k \in I$.*
*ii) $\{$supp($\varphi_k$) ; $k \in I\}$ sia localmente finito.*
*iii) $\sum_{k\in I} \varphi_k \equiv 1$ su $\Omega$.*

La condizione ii) significa che ogni punto $x \in \Omega$ ha un intorno in cui $\varphi_k$ è nulla tranne per un numero al più finito di indici. Questo ci permette di dare un senso alla sommatoria nel punto iii) intendendola come sommatoria dei termini $\varphi_k(x)$ non nulli nei punti $x \in \Omega$.

**Teorema 2.2.** *(Esistenza di una partizione dell'unità)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, e sia $\{V_k\}_{k\in I}$ un suo ricoprimento aperto. Allora esiste una partizione dell'unità $\{\varphi_k\}_{k\in I}$ subordinata a $\{V_k\}_{k\in I}$.*

*Dimostrazione.* [3] pag. 259 □

L'enunciato di quest'ultimo teorema, così come la definizione di partizione dell'unità può essere dato più in generale per spazi topologici di Hausdorff e paracompatti.

**Teorema 2.3.** *(Anzellotti-Giaquinta)*
*Sia $f \in BV(\Omega)$, allora esiste una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $f_k \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tale che:*
*(i) $f_k \to f$ in $L^1(\Omega)$;*
*(ii) $||Df_k||(\Omega) \to ||Df||(\Omega)$ per $k \to \infty$.*

*Dimostrazione.* **1)** Sia $\varepsilon > 0$, sia $\Omega_0 := \emptyset$ e sia $m \in \mathbb{Z}^+$.
Definiamo, per $k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_k := \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k+m}\} \cap B(0, k+m).$$

Scegliamo ora m abbastanza grande in modo che

$$||Df||(\Omega \setminus \Omega_1) < \varepsilon \quad (\star).$$

$\{\Omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $\Omega$ costituito da aperti inscatolati, cioè $\Omega_k \subseteq \Omega_{k+1}$.
Poniamo

$$V_k := U_{k+1} \setminus \overline{U_{k-1}} \ ; \ k \in \mathbb{N}.$$

$\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto e numerabile di $\Omega$ tale che ogni aperto intersechi solo un numero finito di altri aperti; infatti, per ogni $\bar{k} \in \mathbb{N}$

$$V_{\bar{k}} \cap \left( \bigcup_{k\in\mathbb{N}} V_k \right) = V_{\bar{k}-1} \cap V_{\bar{k}} \cap V_{\bar{k}+1}.$$

Grazie al Teorema che ci garantisce l'esistenza di una partizione dell'unità subordinata a questo ricoprimento (Teorema 2.2), sia $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una tale partizione. Per avere differenziabilità consideriamo, per ogni indice k e per $\varepsilon_k$ abbastanza piccolo, la regolarizzata per convoluzione $(\psi_k)_{\epsilon_k} \in C^\infty_{comp}(V_k)$.
Sia ora

$$\zeta_k := \frac{(\psi_k)_{\varepsilon_k}}{\sum_{i=1}^\infty (\psi_i)_{\varepsilon_i}}.$$

In definitiva abbiamo ricavato $\{\zeta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni $C^\infty(\Omega)$ tali che:

$$\begin{cases} \zeta_k \in C^\infty_{comp}(V_k) \\ 0 \leq \zeta_k(x) \leq 1 \ \ \forall \ x \in \Omega, \forall \ k \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=1}^\infty \zeta_k \equiv 1 \ su \ \Omega. \end{cases}$$

Ora, per ogni k=1,2,... si ha che $f\zeta_k \in L^1(\Omega)$, con $supp(f\zeta_k) \subseteq V_k$.

Allora, per le proprietà dei mollificatori riportate nel Teorema 1, per ogni k=1,2,... esiste un $\varepsilon_k > 0$ abbastanza piccolo tale che

$$\begin{cases} supp((f\zeta_k)_{\varepsilon_k}) \subseteq V_k \\ \left\| (f\zeta_k)_{\varepsilon_k} - f\zeta_k \right\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^k} & (\diamond) \\ \left\| \ (fD\zeta_k)_{\varepsilon_k} - fD\zeta_k \right\|_{L^1(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2^k} & (D\diamond). \end{cases}$$

**2)** Definiamo a questo punto

$$f_\varepsilon := \sum_{k=1}^\infty (f\zeta_k)_{\varepsilon_k}.$$

Per ogni punto $x \in \Omega$, esiste un $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che $x \in V_{\bar{k}}$. Questo intorno di x interseca i supporti di al più 3 funzioni della partizione, nello specifico $\zeta_{\bar{k}-1}$, $\zeta_{\bar{k}}$, $\zeta_{\bar{k}+1}$. Quindi, in $V_{\bar{k}}$,

$$f_\varepsilon(x) = \sum_{k=\bar{k}-1}^{\bar{k}+1} (f\zeta_k)_\varepsilon$$

è somma finita di funzioni $C^\infty(V_{\bar{k}})$, perciò è $C^\infty(V_{\bar{k}})$. Per questo motivo è infinitamente differenziabile in ogni punto di $\Omega$,

$$f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$$

Osserviamo che

$$f = f\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k = \sum_{k=1}^{\infty} f\zeta_k,$$

per cui

$$\left\|f_\varepsilon - f\right\|_{L^1(\Omega)} = \left\|\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(f\zeta_k)_{\varepsilon_k} - f\zeta_k\right\|_{L^1(\Omega)} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left\|(f\zeta_k)_{\varepsilon_k} - f\zeta_k\right\|_{L^1(\Omega)} \underbrace{\leq}_{(\diamond)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \epsilon$$

Possiamo dunque concludere che $f_\varepsilon \to f$ in $L^1(\Omega)$ *per* $\varepsilon \to 0$ e abbiamo provato (i).
**3)** Per provare (ii) ricordiamo che il Teorema 2.1 ci garantisce che

$$||Df||(\Omega) \leq \liminf_{k\to\infty} ||Df_k||(\Omega) \qquad (\star\star\star).$$

Sia ora $\varphi \in C^1_{comp}(\Omega; \mathbb{R}^n)$, $|\varphi| \leq 1$. Ricordiamo che valgono le seguenti:
• $div(\zeta_k\varphi) = \zeta div(\varphi) + D\zeta_k \cdot \varphi$.
•• $fD\zeta_k \cdot (\varphi)_{\varepsilon_k} = (fD\zeta_k)_{\varepsilon_k} \cdot \varphi$.
••• $\sum_{k=1}^{\infty} D\zeta_k \equiv 0$ *su* $\Omega$ (deriva da $\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \equiv 1$ e dalla linearità del gradiente, che ha senso applicare perché localmente la sommatoria è finita).
Allora

$$\int_\Omega f_\varepsilon div(\varphi)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega (f\zeta_k)_{\varepsilon_k} div(\varphi)dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f\zeta_k div(\varphi_{\varepsilon_k})dx \underbrace{=}_{\bullet}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f div(\zeta_k\varphi_{\varepsilon_k})dx - \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega fD\zeta_k \cdot \varphi_{\varepsilon_k} dx \underbrace{=}_{\bullet\bullet\ e\ \bullet\bullet\bullet}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega f div(\zeta_k\varphi_{\epsilon_k})dx - \sum_{k=1}^{\infty}\int_\Omega \varphi \cdot ((fD\zeta_k)_{\varepsilon_k} - fD\zeta_k)dx =: I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.$$

**4)** Notiamo ora che

$$|\zeta_k \varphi_{\varepsilon_k}| \leq 1 \ \forall k \in \mathbb{N}$$

e ricordiamo che ogni punto di $\Omega$ appartiene al più a tre degli insiemi $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Quindi

$$|I_1^\varepsilon| = |\int_\Omega f div(\zeta_1 \varphi_{\varepsilon_1})dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_\Omega f div(\zeta_K \varphi_{\varepsilon_k})dx| \leq$$

$$\leq ||Df||(\Omega) + \sum_{k=2}^{\infty} ||Df||(V_k) \leq$$

$$\leq ||Df||(\Omega) + 3||Df||(\Omega \setminus \Omega_1) \underbrace{\leq}_{(\star)} ||Df||(\Omega) + 3\varepsilon.$$

D'altra parte, $(D\diamond)$ implica che

$$|I_2^\varepsilon| \leq \varepsilon.$$

Quindi

$$\int_\Omega f_\varepsilon div(\varphi)dx \leq ||Df||(\Omega) + 4\varepsilon.$$

Vale dunque il risultato per il sup:

$$||Df_\varepsilon||(\Omega) \leq ||Df||(\Omega) + 4\varepsilon.$$

Questa stima e $(\star\star\star)$ completano la dimostrazione. $\square$

Per consultare un articolo degli stessi Anzellotti e Giaquinta in merito, si veda [5].

**Osservazione 2.1.** *Questo NON è un risultato di densità. Non è vero che $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ è denso in $BV(\Omega)$ con la topologia indotta dalla norma di $BV(\Omega)$.*

*Infatti, sia $f \in BV(\Omega)$. Per assurdo esista $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $f_k \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$, $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{BV(\Omega)} f$. Consideriamo ora un certo $\Omega' \subset \Omega$ tale che $f_k \in W^{1,1}(\Omega') \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Basta considerare $\Omega'$ a chiusura compatta, infatti $f_k \in BV(\Omega') \Rightarrow L^1(\Omega')$. Inoltre*

$$\int_{\Omega'} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \, dx \leq \max_{\overline{\Omega'}} \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \mu(\Omega') < \infty \quad \forall j = 1, \ldots n.$$

*Allora*

$$||f_k - f_h||_{W^{1,1}(\Omega')} = ||D(f_k - f_h)||(\Omega') \underbrace{\leq}_{monotonia}$$

$$\leq ||D(f_k - f_h)||(\Omega) \leq ||f_k - f_h||_{BV(\Omega)} \xrightarrow[k,h\to\infty]{} 0.$$

*Dunque* $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *è di Cauchy in* $W^{1,1}(\Omega')$*. Allora esiste* $g \in W^{1,1}(\Omega')$ *tale che* $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} f$ *in* $W^{1,1}(\Omega')$*. Perciò a meno di sottosuccessioni* $f_k \to g$ *q.d. in* $\Omega'$*. Per unicità del limite* $f = g$ *q.d. in* $\Omega'$*. In definitiva* $f \in W^{1,1}(\Omega') \Rightarrow BV(\Omega) \subseteq W^{1,1}(\Omega')$*. Ma questo è falso e un controesempio è fornito, come nell'Osservazione 1.6, è fornito dalla funzione di Heaviside*

$$H(x) := \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0 \\ 0 & se\ x < 0. \end{cases}$$

## 2.3 Approssimazione debole di derivate

Introduciamo ora una nozione di convergenza debole per misure.

**Proposizione-Definizione 2.1.** *Siano* $\mu, \mu_k,\ k \in \mathbb{N}$ *misure di Radon su* $\mathbb{R}^n$*. Sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

1. $lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu$ *per ogni* $f \in C_{comp}(\mathbb{R}^n)$*.*

2. $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)\ \forall K \subset \mathbb{R}^n$ *compatto e* $\liminf_{k\to\infty} \mu_k(U) \geq \mu(U)\ \forall U \subset \mathbb{R}^n$ *aperto.*

3. $\lim_{k\to\infty} \mu_k(B) = \mu(B)\ \forall B \subset \mathbb{R}^n$ *boreliano limitato con* $\mu(\partial B) = 0$*.*

*Se valgono queste tre proprietà equivalenti diciamo che la successione delle* $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ***converge debolmente*** *alla misura* $\mu$*, e scriviamo*

$$\mu_k \rightharpoonup \mu.$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 65. □

**Teorema 2.4.** *Per* $f_k$ *come nell'enunciato del Teorema 2.3, definiamo la misura (vettoriale) di Radon come*

$$\mu_k(B) := \int_{B\cap\Omega} Df_k dx$$

*per ogni Boreliano* $B \subseteq \mathbb{R}^n$*. Poniamo inoltre*

$$\mu(B) := \int_{B\cap\Omega} d[Df].$$

*Allora*

$$\mu_k \rightharpoonup \mu$$

*debolmente nel senso delle misure (vettoriali) di Radon su* $\mathbb{R}^n$*.*

*Dimostrazione.* **1)** Sia $\varphi \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e sia $\varepsilon > 0$. Sia $\Omega_1$ come nella dimostrazione del Teorema di Anzellotti-Giaquinta (Teorema 2.3):

$$\Omega_1 := \left\{x \in \Omega; d(x:\partial\Omega) > \tfrac{1}{1+m}\right\} \cap B(0,1+m)$$

con $m \in \mathbb{Z}$ abbastanza grande in modo che

$$||Df||(\Omega \setminus \Omega_1) < \varepsilon \qquad (\spadesuit).$$

Sia ora $\zeta$ una funzione cutoff tale che

$$\zeta \equiv 1 \ su\ \Omega_1, \quad supp(\zeta) \subset \Omega, \quad 0 \le \zeta(x) \le 1 \ \forall x \in supp(\zeta).$$

Allora

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu_k = \int_\Omega \varphi \cdot Df_k dx =$$

$$\int_\Omega \zeta\varphi \cdot Df_k dx + \int_\Omega (1-\zeta)\varphi \cdot Df_k dx =: I_1 + I_2.$$

**2)** Ricordiamo ora che se F è un campo vettoriale e $\psi$ è a valori scalari vale

$$div(F\psi) = D\psi \cdot F + \psi div(F).$$

Allora

$$div((\zeta\varphi)f_k) = Df_k \cdot \zeta\varphi + f_k div(\zeta\varphi).$$

Da cui

$$I_1 = \underbrace{\int_\Omega div((\zeta\varphi)f_k)dx}_{(\star)} - \int_\Omega f_k div(\zeta\varphi)dx.$$

Ma $(\star) = 0$ poiché l'integrale della divergenza in senso debole di un'applicazione nulla vicino al bordo (e $\zeta\varphi f_k$ lo è essendolo $\zeta$) è nullo. Questo si vede applicando la definizione di derivata debole.
Siccome $f_k \to f \in L^1(\Omega)$,

$$|\int_\Omega div(\zeta\varphi)(f_k - f)dx| \le \int_\Omega |div(\zeta\varphi)||f_k - f|dx \le$$

$$\le ||div(\zeta\varphi)||_{L^\infty(\Omega)}||f_k - f||_{L^1(\Omega)} \to 0 \ per\ k \to \infty.$$

Per cui $I_1$ converge a

$$-\int_\Omega div(\zeta\varphi) f dx = \int_\Omega \zeta\varphi \cdot d[Df] =$$

$$= \int_\Omega \varphi \cdot d[Df] + \int_\Omega (\zeta - 1)\varphi \cdot d[Df].$$

Dove la prima uguaglianza è data dal fatto che $\zeta\varphi \in C^1_{comp}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $|\zeta\varphi| \leq 1$, allora posso applicare il Teorema di Struttura (Teorema 1.3) che mi garantisce che valga il risultato, con la notazione $[Df] = ||Df|| \llcorner \sigma$.
Osserviamo che il termine $\int_\Omega (\zeta - 1)\varphi \cdot d[Df]$ si controlla con una costante dipendente da $\varphi$ per $\varepsilon$. Infatti, essendo $\zeta \equiv 1$ su $\Omega_1$, l'integrale si riduce ad essere

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_1} (\zeta - 1)\varphi \cdot \sigma d||Df|| \leq ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega\setminus\Omega_1} |\zeta - 1| \cdot \sigma d||Df|| \leq$$

$$\leq C_\varphi ||Df||(\Omega \setminus \Omega_1) \underbrace{<}_{(\spadesuit)} C_\varphi \varepsilon.$$

**3)** Studiamo ora $I_2$. Per ragioni analoghe alle precedenti

$$I_2 = \int_\Omega (1 - \zeta)\varphi \cdot Df_k dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_1} (1 - \zeta)\varphi \cdot Df_k dx \leq$$

$$\leq ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega\setminus\Omega_1} |Df_k| dx = C_\varphi \int_{\Omega\setminus\Omega_1} d[Df_k]_{ac} \leq C_\varphi ||Df_k||(\Omega \setminus \Omega_1).$$

Per il Teorema di Anzellotti-Giacquinta (Teorema 2.3),

$$||Df_k||(\Omega) \to ||Df||(\Omega) \textit{ per } k \to \infty.$$

Essendo $\Omega_1$ aperto di $\Omega$, analogamente vale che

$$||Df_k||(\Omega_1) \to ||Df||(\Omega_1) \textit{ per } k \to \infty.$$

Per additività della misura inoltre

$$||Df_k||(\Omega \setminus \Omega_1) = ||Df_k||(\Omega) - ||Df_k||(\Omega_1) \to ||Df||(\Omega) - ||Df||(\Omega_1) = ||Df||(\Omega \setminus \Omega_1).$$

Allora, per k abbastanza grande,

$$||Df_k||(\Omega \setminus \Omega_1) - \underbrace{||Df||(\Omega \setminus \Omega_1)}_{<\varepsilon} < \varepsilon \quad (\clubsuit).$$

Questo ci permette di concludere, raccogliendo il 2 derivante dall'ultima disuguaglianza nella costante $C_\varphi$, che

$$I_2 < C_\varphi \varepsilon.$$

**4)** Siamo ora in grado di verificare che vale la condizione *1* della Proposizione-Definizione 2.1 affinché $\mu_k \rightharpoonup \mu$. Per ogni k abbastanza grande in modo che valga la stima ($\clubsuit$)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu_k - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu\right| = \left|I_1 + I_2 - \int_\Omega \varphi \cdot d[Df]\right| \leq$$

$$\left|\int_\Omega \varphi \cdot d[Df] + C_\varphi\varepsilon + C_\varphi\varepsilon - \int_\Omega \varphi \cdot d[Df]\right| \leq 2C_\varphi\varepsilon.$$

□

## 2.4 Compattezza

**Def 2.2.** *(Funzioni lipschitziane)*
*Siano $(X, d_X)$, $(Y, d_Y)$ due spazi metrici, dove $d_X$ indica la metrica su $X$ e $d_Y$ quella su $Y$. Una funzione*

$$f : X \to Y$$

*è detta **lipschitziana** (o **lipschitz-continua**) se esiste una costante reale $K$ tale che*

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2).$$

*Tale $K$ è detta essere una **costante di Lipschitz** per f.*

**Def 2.3.** *(Frontiera Lipschitziana)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ diciamo che $\partial\Omega$ è **Lipschitz** se $\forall x \in \partial\Omega$ $\exists$ $r > 0$ e una mappa lipschitziana $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che (a meno di rotazioni e/o di rinominare le coordinate) si ha*

$$\Omega \cap Q(x, r) = \{y \mid \gamma (y_1, \ldots, y_{n-1}) < y_n\} \cap Q(x, r)$$

*dove*

$$Q(x, r) := \{y \mid |y_i - x_i| < r, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

*In altri temini possiamo dire che $\partial\Omega$ è localmente (a meno di rotazioni e/o di rinominare le coordinate) il grafico di una funzione lipschitziana.*

Inseriamo ora un risultato di compattezza per funzioni in uno spazio di Sobolev che ci sarà utile per un risultato analogo per funzioni BV.

**Teorema 2.5.** *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con frontiera Lipschitziana, e sia $1 < p < n$. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ che soddisfi la condizione*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||f_k||_{W^{1,p}(\Omega)} < \infty.$$

*Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in W^{1,p}(\Omega)$ tali che*

$$f_{k_j} \to f \ in \ L^q(\Omega)$$

*per ogni $1 \leq q < p^*$, con $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 168. □

**Osservazione 2.2.** *Per p=1 si dimostra che esistono $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e $f \in L^{1^*}(\Omega)$ tali che*

$$f_{k_j} \to f \ in \ L^q(\Omega)$$

*per ogni $1 \leq q < 1^*$.*

**Teorema 2.6.** *(Compattezza per funzioni BV)*
*Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, con frontiera $\partial\Omega$ che sia Lipschitz. Sia $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $BV(\Omega)$ che soddisfi la condizione*

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||f_k||_{BV(\Omega)} < \infty \quad (\star).$$

*Allora esistono una sottosuccessione $\{f_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in BV(\Omega)$ tali che*

$$f_{k_j} \to f \textit{ in } L^1(\Omega)$$

*per $j \to \infty$.*

*Dimostrazione.* **1)** Per ogni $k \in \mathbb{N}$ scegliamo $g_k \in C^\infty(\Omega)$ tale che:

$$i)\ \ ||f_k - g_k||_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{k}; \qquad ii)\ \ \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Dg_k|dx < \infty.$$

L'esistenza di tali funzioni è garantita dal Teorema di Anzellotti-Giaquinta (Teorema 2.3). Infatti questo ci garantisce che per ogni $f_k$ esiste una successione $\{g_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ in $BV(\Omega)\cap C^\infty(\Omega)$ tale che

$$g_i \to f_k \textit{ in } L^1(\Omega); \quad ||Dg_i||(\Omega) \to ||Df_k||(\Omega) \textit{ per } i \to \infty.$$

Per cui per ogni k posso scegliere tra le $g_i$ una $g_k$ in modo che $||f_k - g_k||_{L^1(\Omega)} < \frac{1}{k}$ e che $||Dg_k||(\Omega) \leq ||Df_k||(\Omega) + 1$.
Questo garantisce che

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Dg_k|dx \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} ||Df_k||(\Omega) + 1 \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} ||f_k||_{BV(\Omega)} + 1 < \infty.$$

Osserviamo a questo punto che le $g_k \in W^{1,1}(\Omega)$, infatti

$$||g_k||_{W^{1,1}(\Omega)} = \underbrace{||g_k||_{L^1(\Omega)}}_{g_k \in\ L^1(\Omega)} + \underbrace{\int_\Omega |Dg_k|dx}_{\leq \sup_k \cdots} < \infty.$$

In particolare

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} ||g_k||_{W^{1,1}(\Omega)} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}(||f_k||_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{k}) + \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_\Omega |Dg_k|dx < \infty.$$

**2)** Grazie all'Osservazione 2.2 (che possiamo applicare alle $g_k$ grazie alle ultime osservazioni) sappiamo che esiste una certa $f \in L^{1^*}(\Omega)$ tale che

$$g_{k_j} \to f \textit{ in } L^1(\Omega)$$

Per la proprietà di inclusione tra spazi $L^p$, che è applicabile dal momento che $\Omega$ è limitato per ipotesi, $L^{1^*}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega)$, allora

$$f \in L^1(\Omega).$$

Quindi $f_{k_j} \to f \ in \ L^1(\Omega)$, infatti

$$||f_{k_j} - f||_{L^1(\Omega)} \leq \underbrace{||f_{k_j} - g_{k_j}||_{L^1(\Omega)}}_{<\frac{1}{k_j} \ per \ i)} + ||g_{k_j} - f||_{L^1(\Omega)} \to 0 \ per \ j \to \infty.$$

Ora possiamo concludere sfruttando la semicontinuità inferiore della misura variazione (Teorema 2.1):

$$||Df||(\Omega) \leq \liminf_{j\to\infty} ||Df_{k_j}||(\Omega) \underbrace{<}_{(\star)} \infty.$$

In definitiva $f \in BV(\Omega)$. $\square$

# Capitolo 3

# Traccia per funzioni BV

## 3.1 Teorema di traccia per funzioni BV

In questo capitolo consideriamo sempre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato con frontiera Lipschitz. Osserviamo che, essendo $\partial\Omega$ localmente il grafico di una funzione Lipschitz-continua $\gamma$, la normale esterna $\nu$ esiste $\mathcal{H}^{n-1} - q.d.\ su\ \partial\Omega$. Questo in accordo con il seguente

**Teorema 3.1.** *(Rademacher)*
*Sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-continua. Allora $f$ è differenziabile q.d. in $\Omega$.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 103. □

La normale esterna è infatti il gradiente normalizzato, che esiste q.d.
Ci accingiamo ora a dare una nozione di "traccia" per funzioni BV, che ci fornisca una sorta di "valore al bordo" di f su $\partial\Omega$.

Introduciamo un risultato che ci sarà utile per la per la prossima dimostrazione.

**Teorema 3.2.** *(Formula dell'Area)*
*Sia $f : \mathbb{R}^n :\to \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitz-continua, con $n \leq m$. Allora, per ogni insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ che sia $\mathcal{L}^n - misurabile$,*

$$\int_A J_f dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}\{y\}) d\mathcal{H}^n(y).$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 119. □

**Osservazione 3.1.** *La formula dell'area ci dice che la misura $\mathcal{H}^n$ dell'immagine $f(A) \subset \mathbb{R}^n$, considerando la molteplicità della preimmagine di ogni punto, può essere calcolata integrando lo Jacobiano $J_f$ su $A$.*

Siamo ora pronti per dimostrare il Teorema di traccia per funzioni BV.

**Teorema 3.3.** *Sia $\Omega$ aperto limitato, con $\partial\Omega$ Lipschitz. Allora esiste un'applicazione lineare limitata*

$$T : BV(\Omega) \to L^1(\partial\Omega; \mathcal{H}^{n-1})$$

*tale che*

$$\int_\Omega f div\varphi = -\int_\Omega \varphi \cdot d[Df] + \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \nu) T f d\mathcal{H}^{n-1}$$

*per ogni $f \in BV(\Omega)$ e $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.*

**Def 3.1.** *La funzione $Tf$, che è definita univocamente a meno di insiemi di misura nulla per $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega$, è chiamata la* ***traccia*** *di $f$ su $\partial\Omega$.*

Come già detto precedentemente, interpretiamo $Tf$ come il "valore al bordo" di f su $\partial\Omega$

*Dimostrazione.* Introduciamo preliminarmente alcune notazioni. Sia

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

allora poniamo $x = (x', x_n)$ con $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$e $x_n \in \mathbb{R}$.

Siano $x \in \mathbb{R}^n$ e $h, r > 0$. Definiamo il cilindro aperto

$$C(x, h, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \ ; \ |y' - x'| < r, |y_n - x_n \ |< h\}.$$

Siccome $\partial\Omega$ è lipshitz, allora è localmente il grafico di una funzione lipschitz

$$\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Sia $x \in \partial U$. Allora $\gamma(x') = x_n$, quindi esistono necessariamente $h, r > 0$ tali che

$$\max_{|x'-y'|<r} |\gamma(y') - x_n| \leq \frac{h}{4}.$$

Possiamo dunque considerare un cilindro aperto che contiene un intorno di $x \in \partial U$ tale che

$$\Omega \cap C(x, h, r) = \{y \ ; \ |x' - y'| < r, \ \gamma(y') < y_n < x_n + h\}.$$

Per semplicità di notazione poniamo $C := C(x, r, h)$.

La dimostrazione si sviluppa nei seguenti passi:

1. Si dimostra il risultato per $f \in BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ localmente su $\partial\Omega \cap C$,.

2. Sfruttando una partizione dell'unità dell'unità si estende il risultato a tutto $\partial\Omega$ .

3. Si sfrutta il teorema di Anzellotti-Giaquinta (Teorema 2.3) per estendere il risultato a $f \in BV(\Omega)$.

**1)** Siano $f \in BV(\Omega) \cap C^{\infty}(\Omega)$ e $r, h, \gamma$ come sopra. Sia $0 < \varepsilon < \frac{h}{2}$ e $y \in \partial\Omega \cap C$. Definiamo

$$f_{\varepsilon}(y) := f\left(y', \gamma\left(y'\right) + \varepsilon\right)$$

e poniamo

$$C_{\delta,\varepsilon} := \left\{ y \in C \ ; \ \gamma\left(y'\right) + \delta < y_n < \gamma\left(y'\right) + \varepsilon \right\}$$

con $0 \leq \delta < \varepsilon < \frac{h}{2}$. Definiamo inoltre $C_{\varepsilon} := C_{0,\varepsilon}$ e $C^{\varepsilon} := (C \cap \Omega) \setminus C_{\varepsilon}$ Allora

$$|f_{\delta}(y) - f_{\varepsilon}(y)| \leq \int_{\delta}^{\varepsilon} \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}\left(y', \gamma\left(y'\right) + t\right) \right| dt \leq \int_{\delta}^{\varepsilon} \left| Df\left(y', \gamma\left(y'\right) + t\right) \right| dt.$$

Integrando ora da entrambe le parti su $\partial\Omega \cap C$ rispetto alla misura $\mathcal{H}^{n-1}$ e sfruttando il fatto che $\gamma$ è Lipschitz e la formula dell'Area (Teorema 3.2) otteniamo

$$\int_{\partial\Omega\cap C} |f_{\delta}(y) - f_{\varepsilon}(y)| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \int_{C_{\delta,\varepsilon}} |Df| dy = C \|Df\| \left(C_{\delta,\varepsilon}\right).$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\|f_{\delta} - f_{\varepsilon}\|_{L^1(\partial\Omega\cap C, \mathcal{H}^{n-1})} \leq C \|Df\| \left(C_{\delta,\varepsilon}\right) \quad (\diamondsuit).$$

Siccome $C_{\delta,\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon,\delta\to 0]{} \partial\Omega \cap C$, allora $\|Df\|\left(C_{\delta,\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon,\delta\to 0]{} 0$. Quindi $\left(f_{\varepsilon}\right)_{\varepsilon>0}$ è una successione di Cauchy in $L^1\left(\partial\Omega \cap C, \mathcal{H}^{n-1}\right)$ che è uno spazio di Banach, quindi si ha che

$$\exists \lim_{\varepsilon\to 0} f_{\varepsilon} =: T_f.$$

Inoltre mandando $\delta \to 0$ in $(\diamondsuit)$ otteniamo che la disuguaglianza continua a valere:

$$\int_{\partial\Omega\cap C} |T_f - f_{\varepsilon}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq C \|Df\| \left(C_{\varepsilon}\right) \quad (\spadesuit).$$

Sia ora $\varphi \in C^1_{\text{comp}}\left(C, \mathbb{R}^n\right)$. Osserviamo che ciò non vuol dire che $\varphi \in C^1_{\text{comp}}\left(\Omega, \mathbb{R}^n\right)$ poiché il supporto di $\varphi$ è un compatto di C e non un compatto di $\Omega$. Allora possiamo dire che

$$\int_{C^{\varepsilon}} f div(\varphi) dy = -\int_{C^{\varepsilon}} \varphi \cdot Df dy + \int_{C^{\varepsilon}} div(f\varphi) dy.$$

Inoltre

$$\int_{C^{\varepsilon}} div(f\varphi) dy = \int_{\partial C^{\varepsilon}} f\varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega\cap C} f_{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon} \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Quindi abbiamo ottenuto

$$\int_{C^{\varepsilon}} f div(\varphi) dy = -\int_{C^{\varepsilon}} \varphi \cdot Df dy + \int_{\partial\Omega\cap C} f_{\varepsilon}\varphi_{\varepsilon} \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$$

e mandando $\varepsilon \to 0$, siccome $f_\varepsilon \to T_f$ e $\varphi_\varepsilon \to \varphi$, si ha

$$\int_{\Omega\cap C} f div(\varphi) dy = -\int_{\Omega\cap C} \varphi \cdot Df dy + \int_{\partial\Omega\cap C} T_f \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Quindi secondo le notazioni derivanti dal Teorema di struttura (Teorema 1.3)

$$\int_{\Omega\cap C} f div(\varphi) dy = -\int_{\Omega\cap C} \varphi \cdot \sigma d\|Df\| + \int_{\partial\Omega\cap C} T_f \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} \quad (\clubsuit).$$

**2)** Consideriamo ora un ricoprimento di $\partial\Omega$ fatto di cilindri aperti $\{C(x, r_x, h_x) \mid x \in \partial\Omega\}$, ma essendo $\partial\Omega$ compatto si ha che $\exists\ C_1, \ldots, C_N$ cilindri aperti che ricoprono $\partial\Omega$. Prendiamo dunque una partizione dell'unità associata al sottoricoprimento finito $\{C_i\}_{i=1,\ldots,n}$. Siano $\omega_1, \ldots, \omega_N \in C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^n)$ con supp $\omega_i \subseteq C_i$ e $\sum_{i=1}^N \omega_i \equiv 1$.

Abbiamo allora che $f = \sum_{i=1}^N f\omega_i$ e inoltre $\forall\ C_i$ valgono ($\spadesuit$) e ($\clubsuit$), quindi

$$\int_\Omega f div(\varphi) dy = \int_\Omega \sum_{i=1}^N f\omega_i div(\varphi) dy = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega\cap C_i} f\omega_i div(\varphi) dy =$$

$$= \sum_{i=1}^N (-\int_{\Omega\cap C_i} \varphi \cdot \sigma d||Df|| + \int_{\partial\Omega\cap C_i} T_{fw_i} \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1})$$

$$= -\int_\Omega \varphi \cdot \sigma d\|Df\| + \int_{\partial\Omega\cap C} T_f \varphi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}.$$

**3)** Passiamo ora al caso generale. Sia $f \in BV(\Omega)$. Allora per il teorema di Anzellotti-Giaquinta (Teorema 2.3) $\exists\ \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successione in $BV(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ tale che

$$f_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} f \quad \text{in } L^1(\Omega)$$

$$\|Df_k\|(\Omega) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \|Df\|(\Omega).$$

Proviamo che $\{T_{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy. In maniera analoga a quanto fatto precedentemente, prendiamo un cilindro aperto C e fissiamo $\varepsilon > 0$ e $y \in \partial\Omega \cap C$. Definiamo

$$f_k^\epsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f_k(y', \gamma(y') + t)\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon (f_k)_t\, dt.$$

Allora

$$\int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_k} - f_k^e|\, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial U\cap C} \left| T_{f_k} - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^e (f_k)_t\, dt \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= \int_{\partial\Omega\cap C} \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon T_{f_k} - (f_k)_t\, dt \right| d\mathcal{H}^{n-1} \le \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega\cap C} \int_0^\varepsilon |T_{f_k} - (f_k)_t|\, dt\ d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon \int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_k} - (f_k)_t| \, d\mathcal{H}^{n-1} dt \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon dtC \, \|Df_k\| \, (C_\varepsilon)$$

Andiamo adesso a stimare la norma $L^1$:

$$\|T_{f_k} - T_{f_t}\|_{L^1(\partial\Omega\cap C, \mathcal{H}^{n-1})} = \int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_k} - T_{f_t}| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\leq \int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_k} - f_k^e| \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\Omega\cap C} |f_k^\varepsilon - f_l^e| \, d\mathcal{H}^{n-1} + \int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_t} - f_l^e| \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\leq C \left(\|Df_k\| + \|Df_t\|\right)(C_\varepsilon) + \int_{\partial\Omega\cap C} |f_k^e - f_l^\epsilon| \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Con

$$\int_{\partial\Omega\cap C} |f_k^e - f_l^e| \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial\Omega\cap C} \frac{1}{\varepsilon} \left| \int_0^\varepsilon (f_k)_t \, (y) - (f_l)_t \, (y) dt \right| d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega\cap C} \left( \int_0^\varepsilon |(f_k)_t \, (y) - (f_t)_t \, (y)| \, dt \right) d\mathcal{H}^{n-1} \leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{C_\varepsilon} |f_k - f_l| \, dy.$$

Quindi in definitiva otteniamo che

$$\|T_{f_k} - T_{f_t}\|_{L^1(\partial\Omega\cap C, \mathcal{H}^{n-1})} \leq C \left(\|Df_k\| + \|Df_l\|\right)(C_\varepsilon) + \frac{C}{\varepsilon} \int_{C_\mathrm{F}} |f_k - f_l| \, dy.$$

Passando ora al limite si ottiene la seguente stima:

$$\limsup_{k,l\to\infty} \int_{\partial\Omega\cap C} |T_{f_k} - T_{f_l}| \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq 2C\|Df\| \, (C_\varepsilon) \, .$$

Mandando $\varepsilon \to 0$ otteniamo che $\|Df\| \, (C_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, quindi $\{T_{f_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy in uno spazio di Banach. Ciò ci permette di concludere che

$$\exists \lim_{k\to+\infty} T_{f_k} =: T_f.$$

Procedendo come nel caso precedente sfruttando una partizione dell'unità, si dimostra che ciò vale su tutto $\partial\Omega$. Abbiamo dunque ottenuto che

$$\int_\Omega f_k div(\varphi) dy = -\int_\Omega \varphi \cdot \sigma d \, \|Df_k\| + \int_{\partial U} (\varphi \cdot \nu) T_{f_k} d\mathcal{H}^{n-1}$$

$$\int_\Omega f_k div(\varphi) dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f div(\varphi) dy$$

$$\int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \nu) T_{f_k} d\mathcal{H}^{n-1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\partial\Omega} (\varphi \cdot \nu) T_f d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Inoltre sotto le ipotesi di questo Teorema vale anche che $\mu_k \to \mu$ debolmente (nel senso delle misure), dove

$$\mu_k(B) := \int_{B\cap\Omega} Df_k dx \quad e \quad \mu(B) := \int_{B\cap\Omega} d[Df].$$

Quindi, per definizione di convergenza debole (nel senso delle misure), vale che

$$\int_\Omega \varphi \cdot \sigma d||Df_k|| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega \varphi \cdot \sigma d||Df||$$

e questo conclude la dimostrazione. □

Enunciamo ora un risultato che ci permette di avere una visione più chiara dell'effettivo comportamento di tale traccia.

**Teorema 3.4.** *(Proprietà locali della traccia)*
*Sia $\Omega$ aperto, limitato, con $\partial\Omega$ lipschitz. Sia inoltre $f \in BV(\Omega)$. Allora per $\mathcal{H}^{n-1}$ – q.o. $x \in \partial\Omega$ vale che*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} |f(y) - T_f(x)| dy = 0$$

*e quindi*

$$T_f(x) = \lim_{r\to 0} \fint_{B(x,r)\cap\Omega} f(y) dy.$$

**Osservazione 3.2.** *In particolare, se $f \in BV(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, allora*

$$T_f = f_{|\partial\Omega} \ \mathcal{H}^{n-1} - q.d.$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 208. □

# Capitolo 4

# Disuguaglianze isoperimetriche

## 4.1 Disuguaglianze di Sobolev e Poincaré

**Def 4.1.** *Per $1 \leq p < n$, definiamo*

$$p^* := \frac{np}{n-p};$$

*$p^*$ è detto il **coniugato** (secondo Sobolev) di $p$. Si osservi che questa definizione equivale ad imporre che*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Diamo ora un risultato che ci garantisce che, se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ per un certo $1 \leq p < n$, allora $f \in L^{p^*}$.

**Teorema 4.1.** *(Gagliardo-Niremberg-Sobolev)*
*Sia*

$$1 \leq p < n.$$

*Allora esiste una costante $C_1$, dipendente solo da $n$ e da $p$, tale che*

$$||f||_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 (\int_{\mathbb{R}^n} |Df|^p dx)^{\frac{1}{p}}$$

*per ogni $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 162. $\square$

Introduciamo inoltre un ulteriore risultato che ci permette di dare una versione locale della disuguaglianza precedente.

**Teorema 4.2.** *(Disuguaglianza di Poincaré)*
*Sia*

$$1 \leq p < n.$$

*Allora esiste una costante $C_2$, dipendente solo da $n$ e da $p$, tale che*

$$\left( \fint_{B(x,r)} |f(y) - (f)_{x,r}|^{p^*} dy \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C_2 r ( \fint_{B(x,r)} |Df(y)|^p dy)^{\frac{1}{p}}$$

*per ogni $\overline{B(x,r)} \subseteq \mathbb{R}^n$), $f \in W^{1,p}(B(x,r))$, dove*

$$(f)_{x,r} := \fint_{B(x,r)} f(y) dy.$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 166. □

Il prossimo obbiettivo è vedere come questi risultati possono essere estesi a funzioni BV, ma prima è necessario enunciare due risultati utili nella dimostrazione:

**Lemma 4.1.** *(Fatou)*
*Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura, e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una famiglia di funzioni tale che $f_k : X \to [0, +\infty]$ sia $\mu -$ misurabile $\forall k \in \mathbb{N}$, allora*

$$\int_X \liminf_{k \to \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \to \infty} \int_X f_k d\mu.$$

*Dimostrazione.* [1] pag. 26. □

**Proposizione 4.1.** *(Disuguaglianza di Hölder)*
*Sia $1 < p < \infty$ e sia $q$ il suo esponente coniugato (cioè tale che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Sia $(X, \mathcal{F}, \mu)$ uno spazio di misura e siano $f$ e $g$ due funzioni misurabili su $X$ a valori in $[0, +\infty]$. Allora*

$$\int_X fg \; d\mu \leq \left( \int_X f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_X g^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Dimostrazione.* [4] pag. 63. □

**Teorema 4.3.** *(Disuguaglianze per funzioni BV)*
*(i) Esiste una costante $C_1$ tale che*

$$||f||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 ||Df||(\mathbb{R}^n)$$

*per ogni $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto.*

*(ii) Esiste una costante $C_2$ tale che*

$$||f-(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_2||Df||(B(x,r))$$

*per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*

*(iii) Per ogni $0 < \alpha \leq 1$ esiste una costante $C_3(\alpha)$ tale che*

$$||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_3(\alpha)||Df||(B(x,r))$$

*per ogni $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ che soddisfi la condizione*

$$\frac{\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)} \cap \{f=0\})}{\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)})} \geq \alpha.$$

*Dimostrazione.* **(i)** Sia $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ a supporto compatto. Consideriamo una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $f_k \in C^\infty_{comp}(\mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e

$$f_k \to f \ in \ L^1(\mathbb{R}^n), \quad f_k \to f \ \mathcal{L}^n - q.d., \quad ||Df_k||(\mathbb{R}^n) \to ||Df||(\mathbb{R}^n) \quad per \ k \to \infty.$$

Questa successione esiste in accordo col Teorema di Anzellotti-Giaquinta (Teorema 2.3). Ricordiamo che se $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{L^1(\Omega)} f$, allora esiste una sottosuccessione convergente puntualmente quasi dappertutto. Scegliamo eventualmente questa sottosuccessione senza perdere le proprietà richieste ($\Omega$ è un generico aperto di $\mathbb{R}^n$).

Il lemma di Fatou (Lemma 4.1) ci permette di affermare che

$$||f||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k\to\infty} ||f_k||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Osserviamo che $f_k \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, infatti $f_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\forall i = 1, ...n$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right| dx = \int_{supp(f_k)} \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right| dx \leq \underbrace{\max_{supp(f_k)} \left|\frac{\partial f_k}{\partial x_i}\right|}_{<\infty} \underbrace{\mathcal{L}^n(supp(f_k))}_{<\infty} < \infty.$$

Possiamo dunque applicare la disuguaglianza di Sobolev (Teorema 4.1) per completare la dimostrazione della prima parte del Teorema, infatti questa garantisce che

$$||f_k||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df|dx,$$

che implica

$$||f||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1 \liminf_{k\to\infty} ||Df_k||(\mathbb{R}^n) = C_1||Df||(\mathbb{R}^n).$$

**(ii)** La seconda disuguaglianza si mostra seguendo un procedimento analogo al precedente, dove si sfrutta la disuguaglianza di Poincaré (Teorema 4.2) invece che quella di Sobolev.

Sia $f \in BV_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e sia $B(x,r) \subset \mathbb{R}^n$. Consideriamo una successione $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ come sopra. Sempre per il lemma di Fatou

$$||f-(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq \liminf_{k\to\infty} ||f_k-(f_k)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \quad (\diamond).$$

Dal momento che $f_k \in W^{1,1}(B(x,r))$ possiamo applicare la disuguaglianza di Poincaré (Teorema 4.2), che garantisce che

$$\left(\fint_{\overline{B(x,r)}} |f_k-(f_k)_{x,r}|^{1^*}dy\right)^{\frac{1}{1^*}} = \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(\overline{B(x,r)}\right)^{\frac{1}{1^*}}}||f_k-(f_k)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_2 r \fint_{\overline{B(x,r)}}|Df_k|dy$$

Da cui si ottiene

$$||f_k-(f_k)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_2 r \left(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)})\right)^{\frac{1}{1^*}-1}\int_{\overline{B(x,r)}}|Df_k|dy.$$

Ora, osservando che $\frac{1}{1^*}-1=-\frac{1}{n}$ e ricordando che $\mathcal{L}^n(B(x,r))=r^n\omega_n$,

$$||f_k-(f_k)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq \frac{C_2 r}{(\mathcal{L}^n(B(x,r)))^{\frac{1}{n}}}\int_{\overline{B(x,r)}}|Df_k|dy =$$
$$= \frac{C_2 r}{r\sqrt[n]{\omega_n}}\int_{\overline{B(x,r)}}|Df_k|dy = \frac{C_2}{\sqrt[n]{\omega_n}}||Df_k||(B(x,r)).$$

Nell'ultima uguaglianza si sfrutta il fatto che, essendo $f_k \in W^{1,1}(B(x,r))$, la misura variazione associata ha solo la componente assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue, che "non vede" il bordo della palla.

Possiamo ora concludere raccogliendo la radice dentro alla costante $C_2$ e sostituendo quando ottenuto in $(\diamond)$:

$$||f-(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_2 \liminf_{k\to\infty}||Df_k||(B(x,r)) = C_2||Df||(B(x,r)).$$

**(iii)** Supponiamo ora che valga la condizione

$$\frac{\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}\cap\{f=0\})}{\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)})} \geq \alpha > 0 \quad (\star).$$

Vale che

$$||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \underbrace{\leq}_{disug.triang.} ||f-(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} + ||(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq$$

$$\leq C_2||Df||(\overline{B(x,r)}) + |(f)_{x,r}|(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}} \quad (\star\star).$$

Nell'ultima disuguaglianza abbiamo sfruttato il punto (ii) del Teorema e il fatto che

$$||(f)_{x,r}||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} = \left(\int_{\overline{B(x,r)}} |(f)_{x,r}|^{1^*} dy\right)^{1-\frac{1}{n}} =$$

$$\left(|(f)_{x,r}|^{1^*} \int_{\overline{B(x,r)}} dy\right)^{1-\frac{1}{n}} = |(f)_{x,r}|(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}}.$$

Studiamo ora l'ultimo termine di $(\star\star)$:

$$|(f)_{x,r}|(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}} = (\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}} \left| \fint_{(\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}} f dy \right| \leq$$

$$(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))} \int_{\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}} |f| dy = \frac{1}{(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{\frac{1}{n}}} \int_{\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}} |f| dy.$$

Applichiamo ora la disuguaglianza di Hölder (Proposizione 4.1), dove l'esponente coniungato di $1^*$ è $\frac{1}{n}$, e otteniamo

$$|(f)_{x,r}|(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{(\mathcal{L}^n(\overline{B(x,r)}))^{\frac{1}{n}}} \left(\int_{\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}} |f|^{1^*} dy\right)^{\frac{1}{1^*}} \left(\int_{\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}} 1 dy\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \left(\frac{\mathcal{L}^n\left(\overline{B(x,r)}\cap\{f\neq 0\}\right)}{\mathcal{L}^n\left(\overline{B(x,r)}\right)}\right)^{\frac{1}{n}} ||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \underbrace{\leq}_{(\star)} (1-\alpha)^{\frac{1}{n}} ||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)}.$$

Possiamo ora inserire questa stima in $(\star\star)$:

$$||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq C_2||Df||(B(x,r)) + ||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)}(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}$$

e questo è vero se e solo se

$$||f||_{L^{1^*}\left(\overline{B(x,r)}\right)} \leq \frac{C_2}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}} ||Df||(B(x,r)).$$

Ponendo $C_3(\alpha) := \frac{C_2}{1-(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}}$ si ottiene (iii). $\square$

## 4.2 Disuguaglianze isoperimetriche

L'obiettivo ora è di sviluppare alcune disuguaglianze in grado di stabilire una relazione tra la misura di Lebesgue di un insieme e il suo perimetro. Per farlo sarà necessario avvalersi dei risultati mostrati nel paragrafo precedente.

**Teorema 4.4.** *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme limitato di perimetro finito. Allora*

$$\textit{(1)} \quad \mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq C_1||\partial E||(\mathbb{R}^n)$$

*e per ogni palla $\overline{B(x,r)} \subset \mathbb{R}^n$*

$$\textit{(2)} \quad \min\left\{\mathcal{L}^n\left(\overline{B(x,r)} \cap E\right),\ \mathcal{L}^n\left(\overline{B(x,r)} \setminus E\right)\right\}^{1-\frac{1}{n}} \leq 2C_2||\partial E||(B(x,r)).$$

*L'esistenza delle costanti $C_1$ e $C_2$ è garantita dalle disuguaglianze di Sobolev (Teorema 4.1) e di Poincaré (Teorema 4.2).*

***(1)*** *e* ***(2)*** *sono dette rispettivamente* ***disuguaglianza isoperimetrica*** *e* ***disuguaglianza isoperimetrica relativa****.*

*Dimostrazione.* **(1)** Il fatto che $E$ sia di perimetro finito in $\mathbb{R}^n$ significa che $\mathcal{X}_E \in BV(\mathbb{R}^n)$, il fatto che sia limitato significa che $supp(\mathcal{X}_E)$ è compatto. Applichiamo dunque il primo punto del Teorema 4.3 a $\mathcal{X}_E$:

$$||\mathcal{X}_E||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C_1||\partial E||(\mathbb{R}^n),$$

con

$$||\mathcal{X}_E||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{X}_E(x)|^{1^*} dx\right)^{\frac{1}{1^*}} = \left(\int_E 1^{1^*} dx\right)^{\frac{1}{1^*}} = \mathcal{L}^n(E)^{\frac{1}{1^*}} = \mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}}.$$

**(2)** Poniamo per semplificare la notazione $\bar{B} := \overline{B(x,r)}$. Sia $f := \mathcal{X}_{\bar{B}\cap E}$. Osserviamo che

$$(f)_{x,r} = \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B} \cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})},$$

infatti

$$(f)_{x,r} = \fint_{\bar{B}} f(y)dy = \frac{1}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \int_{\bar{B}} \mathcal{X}_{\bar{B}\cap E}(y)dy = \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B} \cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})}.$$

Allora

$$\int_{\bar{B}} |f(y) - (f)_{x,r}|^{1^*} dy = \int_{\bar{B}} \left|\mathcal{X}_{\bar{B}\cap E}(y) - \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B} \cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})}\right|^{1^*} dy =$$

$$
= \int_{\bar{B}\cap E} \left| \mathcal{X}_{\bar{B}\cap E}(y) - \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right|^{1^*} dy + \int_{\bar{B}\setminus E} \left| \mathcal{X}_{\bar{B}\cap E}(y) - \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right|^{1^*} dy =
$$

$$
= \int_{\bar{B}\cap E} \left| 1 - \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right|^{1^*} dy + \int_{\bar{B}\setminus E} \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})}^{1^*} dy =
$$

$$
= \mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \left( \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}) - \mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right)^{1^*} + \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E) \left( \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right)^{1^*} =
$$

$$
= \mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \left( \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right)^{1^*} + \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E) \left( \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \right)^{1^*} .
$$

Ora, se $\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \geq \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E)$, allora

$$
\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \geq \frac{1}{2}
$$

e quindi

$$
\left( \int_{\bar{B}} |f(y) - (f)_{x,r}|^{1^*} dy \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \left( \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E) \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E) \right)^{1-\frac{1}{n}} .
$$

Se invece $\mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \leq \mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E)$, allora

$$
\frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \geq \frac{1}{2}
$$

e quindi

$$
\left( \int_{\bar{B}} |f(y) - (f)_{x,r}|^{1^*} dy \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{\mathcal{L}^n(\bar{B}\setminus E)}{\mathcal{L}^n(\bar{B})} \left( \mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^n(\bar{B}\cap E) \right)^{1-\frac{1}{n}} .
$$

Allora globalmente

$$
\left( \int_{\bar{B}} |f(y) - (f)_{x,r}|^{1^*} dy \right)^{1-\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2} \min \left\{ \mathcal{L}^n \left( \overline{B(x,r)} \cap E \right),\ \mathcal{L}^n \left( \overline{B(x,r)} \setminus E \right) \right\}^{1-\frac{1}{n}} \quad (\clubsuit).
$$

Ora ci ricordiamo che sotto queste ipotesi possiamo applicare il Teorema 4.3, punto (ii), e ottenere

$$
\left( \int_{\bar{B}} |f(y) - (f)_{x,r}|^{1^*} dy \right)^{1-\frac{1}{n}} = ||f-(f)_{x,r}||_{L^{1^*}(\bar{B})} \leq C_2 ||Df||(B(x,r)) = C_2 ||\partial E4||(B(x,r)) \quad (\heartsuit).
$$

In definitiva da ($\clubsuit$) e ($\heartsuit$) discende il risultato richiesto:

$$
\min \left\{ \mathcal{L}^n \left( \overline{B(x,r)} \cap E \right),\ \mathcal{L}^n \left( \overline{B(x,r)} \setminus E \right) \right\}^{1-\frac{1}{n}} \leq 2C_2 ||\partial E||(B(x,r)).
$$

$\square$

**Osservazione 4.1.** *La disuguaglianza isoperimetrica e la disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg-Sobolev sono intimamente collegate. Abbiamo mostrato che la prima implica la seconda, ma è in effetti vero anche il viceversa, cioè che assumendo la disuguaglianza isoperimetrica si può dimostrare la disuguaglianza di Gagliardo-Niremberg-Sobolev. Per farlo è necessario introdurre un po' di notazione e due ulteriori risultati.*

**NOTAZIONE**: Per $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ e $t \in \mathbb{R}$, definiamo

$$E_t := \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}.$$

**Lemma 4.2.** *Se $f \in BV(\Omega)$, la mappa*

$$t \mapsto \|\partial E_t\|(\Omega) \quad (t \in \mathbb{R})$$

*è $\mathcal{L}^1$ -misurabile.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 212. □

**Teorema 4.5.** *(Formula di coarea per funzioni BV)*
*(i)* Se *$f \in BV(\Omega)$, allora $E_t$ ha perimetro finito per quasi ogni $t \in \mathbb{R}$ e*

$$\|Df\|(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(\Omega) dt.$$

*(ii) Viceversa, se $f \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(\Omega) dt < \infty,$$

*allora $f \in BV(\Omega)$.*

*Dimostrazione.* [1] pag. 213. □

**Teorema 4.6.** *(Della convergenza monotona o di Beppo Levi)*
*Se $(X, \mathcal{F}, \mu)$ è uno spazio di misura e $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ è una successione di funzioni $\mu-$misurabili tale che*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le \infty \quad \forall x \in X$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$$

*allora $f$ è $\mu-$misurabile e*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

*Il valore di ogni integrale può essere infinito.*

*Dimostrazione.* [4] pag. 21. $\square$

Siamo ora pronti a dimostrare quanto affermato sulla relazione tra le disuguaglianze isoperimetrica e di Gagliardo-Niremberg-Sobolev nell'Osservazione 4.1.

*Dimostrazione.* (Osservazione 4.1.) Sia $f \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n)$ $f \geq 0$. Osserviamo che $f \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n) \subset W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset BV(\mathbb{R}^n)$. Inoltre $E_t$ ha perimetro finito per q.o. $t \in \mathbb{R}$ (in accordo col Teorema 4.5) ed è limitato essendo, per ogni t, $E_t \subset supp(f)$, che è limitato poiché compatto.

Allora la disuguaglianza isoperimetrica implica che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|\ dx = ||Df||(\mathbb{R}^n) \underbrace{=}_{Th.20} \int_{-\infty}^{+\infty} ||\partial E_t||(\mathbb{R}^n)\ dt \geq \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} dt \quad (\spadesuit).$$

Ora poniamo, per $t \in (0, +\infty)$,

$$f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_t(x) := \min\{t, f(x)\},$$

$$\mathcal{X}(t) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} f_t(x)^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} = ||f_t||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

Osserviamo che, se $0 < t_1 \leq t_2$, allora $0 \leq f_{t_1} \leq f_{t_2}$ e quindi $\mathcal{X}(t_1) \leq \mathcal{X}(t_2)$. Dunque $\mathcal{X}$ è NON decrescente su $(0, +\infty)$. Dal Teorema della convergenza monotona (4.6) discende che

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{X}(t) = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}} \quad (\heartsuit).$$

Inoltre, per $h > 0$ vale che

$$0 \leq \mathcal{X}(t+h) - \mathcal{X}(t) \leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_{t+h}(x) - f_t(x)|^{1^*} dx \right)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Infatti $||f_{t+h} - f_t||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} \geq ||f_{t+h}||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)} - ||f_t||_{L^{1^*}(\mathbb{R}^n)}$. Studiamo il termine integrando $|f_{t+h}(x) - f_t(x)|$:

$$1)\ f(x) \leq t \Rightarrow |f_{t+h}(x) - f_t(x)| = |f(x) - f(x)| = 0.$$

$$2)\ f(x) > t\ (x \in E_t) \Rightarrow |f_{t+h}(x) - f_t(x)| = \begin{cases} f(x) - t & se\ f(x) \leq t+h \\ t+h-t & se\ f(x) > t+h. \end{cases}$$

In ogni caso $0 \neq |f_{t+h}(x) - f_t(x)| \leq h$ su $E_t$, allora

$$0 \leq \mathcal{X}(t+h) - \mathcal{X}(t) \leq h\mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}}.$$

Quindi $\mathcal{X}$ è localmente lipschitziana. Per il Teorema di Rademacher (3.1) $\mathcal{X}'$ esiste $\mathcal{L}^1 - q.d.$ e inoltre

$$\mathcal{X}'(t) \leq \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} \quad (\diamondsuit).$$

Sfruttiamo ora il fatto che, essendo $\mathcal{X}$ lipschitziana, è assolutamente continua. Allora

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{1^*} dx\right)^{1-\frac{1}{n}} = \int_0^{+\infty} \mathcal{X}'(t)dt \underbrace{\leq}_{(\diamondsuit)}$$

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{L}^n(E_t)^{1-\frac{1}{n}} dt \underbrace{\leq}_{\spadesuit} C_1 \int_{\mathbb{R}^n} |Df(x)|dx.$$

Nella prima uguaglianza sfruttiamo le relazioni $\mathcal{X}(0) = 0$ e $(\heartsuit)$.

Abbiamo dunque mostrato che vale la disuguaglianza di Gagliardo-Nirember-Sobolev con p=1 e per ogni $f \in C^1_{comp}(\mathbb{R}^n),\ f \geq 0$. Possiamo estendere per densità il risultato ad ogni $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

# Capitolo 5

# Insiemi di perimetro minimo

## 5.1 Esistenza di insiemi di perimetro minimo

La semicontinuità inferiore della misura variazione (Teorema 2.1) e il Teorema di Compattezza (Teorema 2.6) permettono di dare il seguente risultato sfruttando un metodo diretto del calcolo delle variazioni.

**Teorema 5.1.** *(Esistenza di insiemi di perimetro minimo)*
*Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato e sia $L \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme di perimetro finito ($||\partial L||(\mathbb{R}^n) < \infty$). Allora $\exists\ E \subseteq (\mathbb{R}^n)$ tale che:*
***i)*** *$E \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c$.*
***ii)*** *$||\partial E||(\mathbb{R}^n) \leq ||\partial F||(\mathbb{R}^n) \quad \forall\ F \subseteq \mathbb{R}^n$ t.c. $F \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c$.*
*La prima richiesta è che $E$ coincida con $L$ fuori da $\Omega$, la seconda è che $E$ minimizzi il perimetro tra gli insiemi che godono di questa proprietà.*

*Dimostrazione.* $\Omega$ è limitato, cioè $\exists\ R > 0$ tale che $\Omega \subset B_R$, con $B_R := B(0, R)$. Se $F \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c$,

$$||\partial F||(\mathbb{R}^n) = ||\partial F||(B_R) + ||\partial F||(B_R^c) = ||\partial F||(B_R) + ||\partial L||(B_R^c).$$

Allora minimizzare il perimetro in $\mathbb{R}^n$ o in $B_R$ è equivalente. Dunque il problema si riduce a mostrare che $\exists\ E \subseteq B_R$ tale che
**i)** $E \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c$.
**ii)** $||\partial E||(B_R) \leq ||\partial F||(B_R) \quad \forall\ F \subseteq\ B_R$ *t.c.* $F \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c$.

Poniamo $p := \inf\{||\partial F||(B_R)\ ;\ F \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c\}$ e consideriamo una successione minimizzante, cioè una successione $\{F_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che

$$F_k \subseteq \mathbb{R}^n, \quad F_k \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c, \quad ||\partial F_k||(B_R) \xrightarrow[k\to\infty]{} p.$$

Dal momento che $\{||\partial F_k||(B_R)\}_{k\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora è limitata. Per esempio, fissato $\varepsilon > 0$, da un certo $\bar{k}$ in poi $||\partial F_k||(B_R) < \varepsilon$, quindi una stima dall'alto è data da $\max\{||\partial F_1||(B_R), ...||\partial F_{\bar{k}}||(B_R), p+\varepsilon\}$.

Inoltre

$$||\mathcal{X}_{F_k}||_{L^1(B_R)} = \int_{B_R} \mathcal{X}_{F_k}(x)\ dx \leq \mathcal{L}^n(B_R) < \infty,$$

allora $\left\{||\mathcal{X}_{F_k}||_{L^1(B_R)}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equilimitata.

Raccogliendo tutte queste osservazioni possiamo concludere che $\{\mathcal{X}_{F_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ è equilimitata in $BV(B_R)$ ($\sup_{k\in\mathbb{N}} ||\mathcal{X}_{F_k}||_{BV(B_R)} < \infty$). Per il Teorema di compattezza (2.6) esistono una sottosuccessione $\left\{\mathcal{X}_{F_{k_j}}\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ e una funzione $f \in BV(B_R)$ tali che

$$\mathcal{X}_{F_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} f \ in \ L^1(B_R).$$

A meno di sottosuccessioni $\mathcal{X}_{F_{k_j}} \xrightarrow[j\to\infty]{} f$ q.d.; $f$ è quindi limite di una successione di funzioni che assumono solo valori 0 e 1, allora $f$ stessa assume solo valori 0 o 1. Possiamo dunque pensare $f = \mathcal{X}_E$ per $E := \{x \in B_R\ ;\ f(x) = 1\}$.

Osserviamo che $E$ appartiene all'insieme degli insiemi su cui abbiamo cercato l'inf. Infatti

$$F_{k_j} \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

allora $\mathcal{X}_{F_{k_j}} \equiv \mathcal{X}_L$ fuori da $\Omega$, e dunque

$$E \cap \Omega^c = L \cap \Omega^c.$$

Da ciò deriva che, per definizione di $inf$,

$$p \leq ||\partial E||(B_R) \quad (\heartsuit).$$

Per semicontinuità inferiore della misura variazione (Teorema 2.1) vale inoltre che

$$||\partial E||(B_R) \leq \liminf_{j\to\infty} ||\partial F_{k_j}||(B_R) = p \quad (\diamondsuit).$$

Da $(\heartsuit)$ e $(\diamondsuit)$ discende infine che

$$||\partial E||(B_R) = p.$$

$\square$

# Bibliografia

[1] Evans, Laurence; Gariepy, Ronald. *measure theory and fine properties of functions*, revised edition, CRC Press, 2015.

[2] Giusti, Enrico. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser Boston, Inc., 1984.

[3] Munkres, James R. *Elements of Algebraic Topology*, Addison-Wesley publishing company.

[4] Rudin, Walter. *Real and Complex Analysis*, Third edition, McGraw-Hill, Inc., 1987.

[5] Anzellotti, G.; Giaquinta, M. *Funzioni BV e tracce*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1978