Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

DINAMICA DI STRINGHE LIBERE NON QUANTISTICHE

Relatore:
Prof. Fiorenzo Bastianelli

Presentata da:
Federico Casadei

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione

La Fisica, nel corso della storia, ha sempre avuto tra i suoi obiettivi principali quello di inglobare fenomeni di natura apparentemente diversa all'interno di un'unica teoria, che li comprendesse tutti in modo consistente. Questo processo ha portato alla scoperta di teorie valide in contesti sempre più ampi e capaci di comprendere al loro interno altre teorie apparentemente diverse. Se due teorie dimostrano validità nello stesso ambito, è naturale e talvolta necessario cercare di metterle insieme un un unico modello. Questo processo prende il nome di *unificazione*. Quello che è avvenuto nel diciannovesimo secolo tra la teoria dell'elettricità e quella del magnetismo e che ha portato alle leggi di Maxwell del 1865 è il primo grande esempio di unificazione. La teoria risultante, cioè l'elettromagnetismo, ha subìto anch'essa un nuovo processo di unificazione, circa un secolo dopo, con la teoria dell'interazione debole.

Allo stato attuale della conoscenza, la teoria che spiega in modo più completo la Fisica fondamentale è il Modello Standard. Questo descrive piuttosto bene i fenomeni all'interno del suo ambito di competenza, cioè la Fisica delle particelle e delle interazioni fondamentali. Presenta, però, ancora diversi problemi. Innanzitutto è una teoria che necessita di diversi parametri da inserire 'a mano', senza una vera e propria spiegazione, come ad esempio i valori delle masse delle particelle fondamentali. Inoltre non è in grado di spiegare tutti i fenomeni fisici: la gravitazione, una delle quattro interazioni fondamentali, è completamente esclusa dal Modello Standard.

La Teoria delle Stringhe è invece un candidato ideale per costituire una 'Teoria del Tutto', cioè una teoria unificata che comprenda in qualche modo tutte le altre. Dovendo avere validità universale, essa deve spiegare tutte le interazioni fondamentali e, ovviamente, essere consistente con la Meccanica Quantistica. In particolare, quindi, deve rispondere al grande problema di conciliare la teoria quantistica con la gravitazione. Inoltre, le particelle fondamentali e le loro interazioni devono emergere da essa ed essere descritte in modo consistente con il Modello Standard.

Per fare questo, la Teoria delle Stringhe fa uso di uno spazio a dieci dimensioni anziché delle sole tre 'classiche'. La teoria si costruisce a partire dall'esistenza delle *stringhe*, entità fondamentali che possono vibrare e, con modi vibrazionali diversi, dare origine a particelle fondamentali diverse. Le stringhe possono essere aperte (se hanno due estremi) o chiuse (se sono richiuse su sé stesse). Questa teoria pone le sue origini negli anni '60 ed è tuttora in fase di sviluppo; la sua potenza sta nel fatto che, se verificata, sarebbe in grado di spiegare tutti i fenomeni fisici a partire da un solo parametro: la lunghezza delle stringhe.

Essendo le stringhe oggetti di dimensioni estremamente piccole, risulta ovviamente complicato progettare un esperimento che possa confermare o confutare la teoria: le energie in gioco dovrebbero essere molto più alte di quelle disponibili oggi. Tuttavia, si spera che la Teoria delle Stringhe porti alla predizione di fenomeni 'secondari', verificabili con le tecnologie attuali.

Questa tesi rappresenta una concisa introduzione alla teoria, introducendone i principi base e lavorando in ambito non quantistico e senza dimensioni extra, considerando quindi solo quattro dimensioni spazio-temporali.

Il Capitolo 1 introduce le tecniche matematiche utili allo sviluppo della teoria, cioè la meccanica lagrangiana e il principio di Hamilton, applicandole prima ad una particella classica libera e poi alle stringhe classiche.

Il Capitolo 2 parla invece della Teoria della Relatività Ristretta, evidenziandone gli effetti cinematici e dinamici e ragionando nello spazio di Minkowski e con il formalismo tensoriale. Vengono poi rianalizzati gli esempi del capitolo precedente in ambito relativistico.

Nel Capitolo 3 vengono discusse le trasformazioni di simmetria, gli integrali del moto e le loro relazioni. Vengono mostrate le principali simmetrie delle stringhe relativistiche e i relativi integrali del moto.

Il Capitolo 4, infine, descrive una parametrizzazione che permette di arrivare a una soluzione esplicita delle equazioni del moto nel caso delle stringhe aperte. Viene inoltre mostrato un esempio di moto di una stringa aperta.

Capitolo 1

Stringhe classiche

1.1 Meccanica lagrangiana

Il più semplice sistema meccanico che si può prendere in considerzione è il *punto materiale*. Esso non è altro che un'approssimazione consistente nel trascurare la struttura interna di un corpo e considerandone solo il moto traslazionale. Più in generale, un sistema può essere costituito da un numero arbitrario di punti materiali; in questo caso, esso si può descrivere utilizzando delle *coordinate generalizzate*, che consistono in N arbitrarie variabili indipendenti (funzioni del tempo) che determinano univocamente la configurazione spaziale del sistema. Il numero N è chiamato numero di *gradi di libertà* del sistema e può dipendere sia dal numero di punti materiali presenti sia da eventuli vincoli. Le coordinate generalizzate si indicano con $(q_1(t), \ldots, q_N(t))$ o, per brevità, semplicemente $q(t)$. Le loro derivate temporali $\dot{q}(t)$ sono chiamate velocità generalizzate.

Per descrivere un sistema bisogna determinare gli andamenti temporali delle funzioni $q(t)$, risolvendo le equazioni del moto. Le equazioni del moto si possono trovare partendo da una particolare funzione che caratterizza il sistema: la *Lagrangiana*. Essa, in generale, dipende dalle coordinate, dalle velocità e dal tempo e si indica con $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$. Nei sistemi conservativi, tuttavia, scompare la dipendenza esplicita dal tempo. La Lagrangiana si può calcolare come:

$$\mathcal{L} = T - V \tag{1.1}$$

dove T è l'energia cinetica del sistema e V è l'energia potenziale. $\mathcal{L}$ ha quindi le dimensioni di un'energia. Partendo dalla Lagrangiana si definisce anche l'*azione* S di un sistema:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)dt \tag{1.2}$$

dove t_1 e t_2 sono due istanti di tempo dati. L'azione permette di determinare le equazioni del moto tramite il *principio di Hamilton*:

dati due istanti di tempo t_1 e t_2 e fissati $q(t_1)$ e $q(t_2)$, il sistema evolve in modo tale da rendere l'azione tra t_1 e t_2 massima o minima.

Calcolando quindi l'azione per una traiettoria $q(t)$ qualsiasi, le equazioni del moto sono ricavabili imponendo

$$\delta S = 0. \tag{1.3}$$

È importante sottolineare che l'azione è un *funzionale*, che agisce su una 'traiettoria' $q(t)$ e restituisce un valore reale, cioè il risultato dell'integrazione. Per questo, la variazione effettuata nell'equazione (1.3) è da realizzare sulla traiettoria, senza modificarne però i valori agli estremi $q(t_1)$ e $q(t_2)$. In Figura 1.1 è rappresentato un esempio unidimensionale di questa variazione.

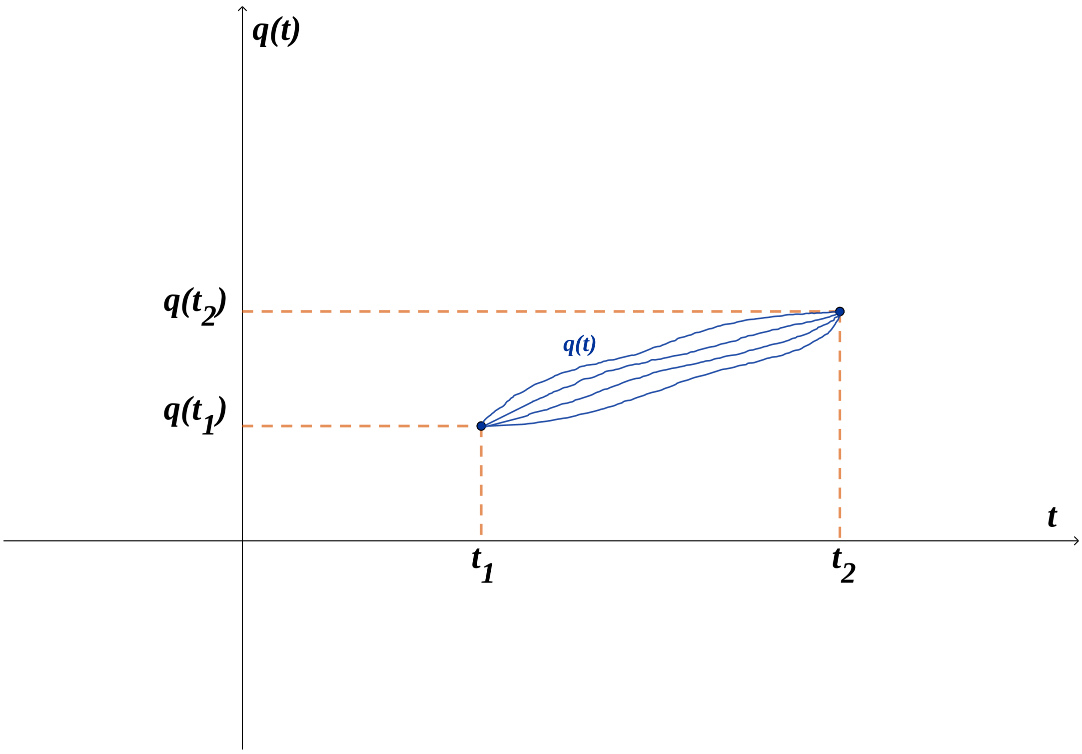

Figura 1.1: Variazione della traiettoria $q(t)$ tra due istanti di tempo, tenendone fissi gli estremi.

Nei sistemi conservativi, effettuando la variazione e imponendo $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0\,. \tag{1.4}$$

In certi casi, quando si ha a che fare con sistemi estesi nello spazio, è conveniente definire la densità di Lagrangiana $\widetilde{\mathcal{L}}$, tale che

$$\mathcal{L} = \int_D \widetilde{\mathcal{L}}(x)dx \tag{1.5}$$

dove D è un insieme spaziale e dx un suo elemento infinitesimo. In questo caso l'azione si ottiene calcolando l'integrale multiplo

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_D \widetilde{\mathcal{L}}(x, q(t), \dot{q}(t), t)dx\, dt\,. \tag{1.6}$$

1.2 La particella libera classica

Come semplice esempio di applicazione del principio di Hamilton si può considerare una particella (trattata come punto materiale) di massa m che si muove lungo l'asse x di un certo sistema di riferimento inerziale, non soggetta a forze. Se v è la velocità della particella, la sua energia cinetica sarà semplicemente

$$T = \frac{mv^2}{2} \tag{1.7}$$

mentre la sua energia potenziale sarà

$$V = 0 \tag{1.8}$$

dato che abbiamo assunto l'assenza di forze. Si noti che, in questo caso, l'unica coordinata generalizzata è la posizione x sull'asse e $v = \dot{x}$ rappresenta la velocità generalizzata. Dall'equazione (1.1) si ricava quindi la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{mv^2}{2} \tag{1.9}$$

e l'azione risulta essere

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2}dt. \tag{1.10}$$

Utilizzando l'equazione (1.3) o la (1.4) si ottiene l'equazione del moto:

$$\frac{d}{dt}(mv) = 0. \tag{1.11}$$

È stata quindi ritrovata la conservazione della quantità di moto e si è arrivati al risultato che, come noto, la particella si muoverà di moto rettilineo uniforme.
Si noti che se la particella fosse stata soggetta ad un potenziale $V(x)$, si sarebbe ottenuta l'equazione di Newton:

$$\frac{d}{dt}(mv) = -\frac{\partial V}{\partial x}. \tag{1.12}$$

1.3 Le stringhe classiche

Si consideri una stringa aperta che si estende lungo l'asse x di un certo sistema di riferimento inerziale, tra le posizioni $x = 0$ ed $x = a$. Una stringa classica può essere pensata come una corda elastica tesa, che compie piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio. La stringa che verrà analizzata ha le seguenti caratteristiche:

- la tensione T_0 della stringa è costante lungo essa;
- la stringa ha una densità lineare di massa $\mu_0 = dm/dx$, costante lungo essa;
- ogni punto della stringa può compiere solo piccoli movimenti in direzione perpendicolare all'asse x.

Per semplicità, si sceglie il sistema di riferimento in modo tale che i punti si muovano lungo la direzione dell'asse y. Data l'estensione spaziale del sistema, è comodo calcolarne la densità lineare di Lagrangiana.

Preso un tratto infinitesimo di stringa tra il punto x e il punto $x + dx$, la sua energia cinetica sarà data da

$$T = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx. \tag{1.13}$$

La sua energia potenziale è invece dovuta all'allungamento del tratto di corda. La sua lunghezza a riposo è infatti dx, mentre quella in un generico istante è

$$l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \tag{1.14}$$

L'allungamento è quindi dato da

$$\Delta l = l - dx = \sqrt{(dx)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}dx\right)^2} - dx = dx\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} - 1\right). \tag{1.15}$$

Applicando alla radice lo sviluppo al primo ordine $\sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$ per $x \to 0$ si ottiene

$$\Delta l \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \tag{1.16}$$

e moltiplicando l'allungamento per la tensione si ottiene l'energia potenziale del tratto infinitesimo:

$$V = \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{1.17}$$

Mettendo insieme la (1.13) e la (1.17) si ottiene quindi la densità di Lagrangiana della stringa:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(x,t) = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{T_0}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2. \tag{1.18}$$

La Lagrangiana si può ottenere integrandone la densità da $x = 0$ a $x = a$, e l'azione risulta quindi essere:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^a \left(\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) dx \right] dt. \tag{1.19}$$

La 'traiettoria' compiuta da una stringa è determinata dagli spostamenti $y(x)$ in ogni istante di tempo; per questo, effettuare una variazione sull'azione consiste nel passare da $y(x,t)$ a $y(x,t) + \delta y(x,t)$. In questo modo si ottiene

$$\begin{aligned} S[y(x,t) + \delta y(x,t)] &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^a \left(\frac{\mu_0}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t}(y + \delta y) \right)^2 - \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(y + \delta y) \right)^2 \right) dx \right] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^a \left(\frac{\mu_0}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} \right) - \right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{T_0}{2} \left(\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right) \right) dx \right] dt \end{aligned} \tag{1.20}$$

dalla quale si possono trascurare i termini $O((\delta y)^2)$ ottenendo:

$$S[y(x,t) + \delta y(x,t)] = S[y(x,t)] + \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^a \left(\mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial(\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial(\delta y)}{\partial x} \right) dx \right] dt. \tag{1.21}$$

Il termine integrale nell'equazione (1.21) è proprio la variazione dell'azione che, secondo l'equazione (1.3), si deve annullare. Effettuando l'integrazione per parti dei due termini dentro l'integrale (il primo rispetto a t e il secondo rispetto ad x) si ottiene

$$\begin{aligned} \delta S = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \bigg|_{t=t_1}^{t=t_2} dx \; - \int_{t_1}^{t_2} T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \bigg|_{x=0}^{x=a} dt \, - \\ - \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_0^a \left(\left(\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y \right) dx \right] dt. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Il primo termine si annulla perché, per ipotesi, la variazione è stata eseguita mantenendo costanti $y(x,t_1)$ e $y(x,t_2)$ e quindi $\delta y(x,t_1) = \delta y(x,t_2) = 0$. Il secondo termine invece dipende dalle condizioni al contorno, cioè dalle restrizioni imposte ad $x = 0$ ed $x = a$. Ci sono due condizioni che si possono imporre per farlo annullare:

1. la *condizione di Neumann*, cioè

$$\frac{\partial y}{\partial x}(a,t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0,t) = 0; \tag{1.23}$$

2. la *condizione di Dirichlet*, cioè

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0,t) = \frac{\partial y}{\partial t}(a,t) = 0. \tag{1.24}$$

La condizione di Neumann corrisponde, fisicamente, agli estremi della stringa liberi di muoversi lungo la direzione parallela all'asse y senza attrito, mentre quella di Dirichlet corrisponde agli estremi vincolati nelle posizioni $(0,0)$ e $(a,0)$: con quest'ultima condizione la variazione verrà quindi fatta mantenendo $\delta y(0,t) = 0 = \delta y(a,t)$.

Stabilita una di queste condizioni al contorno, imponendo che anche il terzo termine della (1.22) sia uguale a zero in ogni punto della corda e ad ogni istante di tempo si ottiene

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T_0}{\mu_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \tag{1.25}$$

L'equazione del moto ottenuta è un'*equazione d'onda*, la cui soluzione più generale è una sovrapposizione di un'onda progressiva e di una regressiva che si propagano con velocità $v_0 = \sqrt{T_0/\mu_0}$. La soluzione si scrive quindi nella forma

$$y(x,t) = h_+(x - v_0 t) + h_-(x + v_0 t) \tag{1.26}$$

dove h_+ ed h_- sono funzioni arbitrarie e per determinarle esplicitamente, oltre alle condizioni al contorno, è necessario fissare anche le condizioni iniziali $y(x,0)$ e $\partial y/\partial t(x,0)$.

Si può trovare una soluzione esplicita effettuando l'ansatz

$$y(x,t) = A(x)\sin(\omega t + \phi_0) \tag{1.27}$$

ed inserendolo nell'equazione d'onda; in questo modo si ottiene un'equazione per l'ampiezza $A(x)$:

$$\frac{d^2}{dx^2}A(x) + \omega^2\frac{\mu_0}{T_0}A(x) = 0. \tag{1.28}$$

La soluzione di questa equazione dipende dalle condizioni al contorno.

Con la condizione di Neumann ci sono un insieme discreto di soluzioni, etichettabili con un numero intero n:

$$A_n(x) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad n = 0,1,2,\dots \tag{1.29}$$

dove le α_n e ϕ_0 sono costanti arbitrarie. Questa soluzione implica una anche restrizione sulla pulsazione ω dell'equazione (1.27):

$$\omega_n = \frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \qquad n = 0,1,2,\dots; \tag{1.30}$$

questa equazione indica le *pulsazioni permesse* di una stringa. In definitiva, con queste condizioni al contorno, la soluzione ottenuta è

$$y_n(x,t) = \alpha_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}t + \phi_0\right) \tag{1.31}$$

dove per $n = 0$ si ha la soluzione $y(x,t) = \alpha_0$, per $n = 1$ si ha l'*armonica fondamentale* di oscillazione e per $n > 1$ si hanno le armoniche secondarie. Le costanti α_n e ϕ_0 sono determinate dalle condizioni iniziali. È inoltre presente, con queste condizioni al contorno, una soluzione aggiuntiva, non compresa nell'ansatz: si può facilmente dimostrare infatti che

$$y(x,t) = At + B, \tag{1.32}$$

con A e B costanti arbitrarie, è soluzione dell'equazione (1.25). Questa soluzione corrisponde ad un stringa tesa lungo l'asse x che trasla a velocità costante lungo l'asse y.

Con la condizione di Dirichlet, in modo analogo, si ottengono le soluzioni per $A(x)$:

$$A_n(x) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \dots \tag{1.33}$$

e si ricava che ω deve soddisfare la stessa restrizione dell'equazione (1.30). La soluzione in questo caso diventa quindi

$$y_n(x,t) = \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}t + \phi_0\right); \tag{1.34}$$

anche in questo caso le costanti arbitrarie si deducono dalle condizioni iniziali e per $n > 0$ si hanno le diverse armoniche. Per $n = 0$ la soluzione è banale: la stringa resta a riposo, tesa lungo l'asse x. La soluzione (1.32) non è invece permessa dalle condizioni di Dirichlet.

Data la linearità dell'equazione d'onda (1.25), sia con la condizione di Neumann che con quella di Dirichlet, ogni combinazione lineare delle soluzioni trovate resta ancora soluzione dell'equazione.

Capitolo 2

Stringhe relativistiche

2.1 Relatività Ristretta

La Teoria della Relatività Ristretta fu formulata da Albert Einstein in un articolo pubblicato nel 1905 e rappresentò la sintesi di una serie di scoperte effettuate nei decenni precedenti, ponendo le sue radici addirittura sulle idee di Galileo espresse nel '600. La teoria formulata da Einstein si basa su due postulati:

1. le leggi della fisica sono identiche in tutti i sistemi di riferimento inerziali;
2. la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Da questi principi seguono una grande quantità di conseguenze che portano a rivisitare molti aspetti della fisica classica. Uno di questi riguarda le trasformazioni di coordinate tra sistemi di riferimento inerziali. Le trasformazioni di Galileo che prevedevano, fra le altre cose, un *tempo assoluto*, invariante per cambi di sistemi di riferimento, sono infatti in contrasto con la teoria di Einstein.

Le giuste trasformazioni di coordinate sono le *trasformazioni di Lorentz*. Siano $S(t, x, y, z)$ ed $S'(t', x', y', z')$ due sistemi di riferimento inerziali, il secondo in moto con velocità V lungo l'asse x rispetto al primo, tali che a $t = t' = 0$ S ed S' coincidano. Se c è la velocità della luce nel vuoto, definendo

$$\beta := V/c \tag{2.1}$$

e

$$\gamma := \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}\,, \tag{2.2}$$

le trasformazioni di Lorentz da S ad S' si scrivono come:

$$\begin{cases} t' = \gamma \left(t - \frac{\beta}{c} x \right) \\ x' = \gamma \left(x - \beta c t \right) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases} . \tag{2.3}$$

Queste trasformazioni mettono già in luce alcuni aspetti fondamentali della teoria: la velocità V deve essere sempre minore di c perchè le formule abbiano senso; il tempo non è assoluto, ma subisce una trasformazione passando da un sistema di riferimento ad un altro; inoltre, spazio e tempo non sono più entità separate, ma nelle trasformazioni di Lorentz si mescolano fra loro. Per questo è utile ragionare in uno spazio 4-dimensionale, detto *spazio-tempo di Minkowski*, nel quale la prima coordinata è occupata dal tempo moltiplicato per c e le altre tre sono date dalle usuali coordinate spaziali. In tale spazio un *evento* è rappresentato da un vettore 4-dimensionale, detto *4-vettore*:

$$x^\mu = (ct, x, y, z) \tag{2.4}$$

dove μ è un indice che va da 0 a 3. In questo modo le trasformazioni di Lorentz si possono scrivere in modo più compatto come

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.5}$$

dove Λ è una matrice che rappresenta la trasformazione di Lorentz. In questa equazione è stata usata la convenzione di Einstein sugli indici ripetuti; essa verrà utilizzata anche nel seguito della trattazione. Nel caso delle trasformazioni (2.3) si ha

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.6}$$

Dalle trasformazioni di Lorentz si può dimostrare che l'intervallo spazio-temporale

$$s^2 = -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 = -(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \tag{2.7}$$

è *invariante* per trasformazioni di Lorentz, cioè

$$s'^2 = s^2; \tag{2.8}$$

si dice anche che s^2 è uno *scalare*. Si noti come s^2 possa assumere anche valori negativi; infatti si distinguono i casi:

$$\begin{cases} s^2 > 0 & \text{intervallo space-like} \\ s^2 = 0 & \text{intervallo light-like} \\ s^2 < 0 & \text{intervallo time-like} \ . \end{cases} \tag{2.9}$$

L'intervallo s^2 è utile per definire la *metrica di Minkowski* e il corrispondente *prodotto scalare di Minkowski*: dato un vettore x^μ, s^2 può essere scritto come

$$s^2 = x^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

dove $\eta_{\mu\nu}$ è il tensore metrico dello spazio di Minkowski, scrivibile sottoforma di matrice come

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{2.11}$$

L'equazione (2.10) può essere vista anche come il prodotto scalare tra un vettore x^μ e un *covettore* x_μ, dato da:

$$x_\mu := \eta_{\mu\nu} x^\nu = (-ct, x, y, z) \ . \tag{2.12}$$

Dalle trasformazioni di Lorentz segue, come già anticipato, che il tempo misurato in diversi sistemi di riferimento inerziali non coincide. In particolare, se nel sistema di riferimento S un osservatore in quiete misura un intervallo di tempo $d\tau$, un altro osservatore in moto con velocità βc otterrà come misura dell'intervallo $dt = \gamma d\tau$. Dalla (2.2) segue che $\gamma > 1$ e quindi che il tempo calcolato nel sistema di riferimento in quiete (cioè dove i due eventi avvengono nello stesso punto spaziale), chiamato *tempo proprio*, è il tempo minimo che può essere misurato tra quei due eventi. Questo fenomeno è chiamato *dilatazione dei tempi*. Si noti che il tempo proprio, essendo non un fenomeno fisico ma l'esito di una misura, non può essere altro che una quantità scalare.

La Relatività Ristretta porta inoltre, inevitabilmente, ad una rivisitazione della dinamica classica. Se una particella relativistica di massa m si muove con velocità $\vec{v}$ in un certo sistema di riferimento, posto $\beta = v/c$, la sua energia sarà

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma c^2 \tag{2.13}$$

e la sua quantità di moto

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = m\gamma\vec{v}. \tag{2.14}$$

Per comprendere queste nuove definizioni di energia e quantità di moto all'interno dello spazio-tempo di Minkowski si definisce il *4-vettore energia-impulso*: data una particella di massa m esso si scrive come

$$p^\mu := m\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.15}$$

dove τ è il tempo proprio della particella, cioè calcolato nel sistema di riferimento dove essa è in quiete. Calcolandone esplicitamente le componenti, ricordando che $d\tau = dt/\gamma$, si ottiene:

$$p^\mu = \left(m\gamma\frac{d}{dt}(ct), m\gamma\frac{d}{dt}\vec{x}\right) = (m\gamma c, m\gamma\vec{v}) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{2.16}$$

Da questa relazione si vede come p^μ comprenda al suo interno sia l'energia di una particella che la sua quantità di moto. Dalla sua definizione emerge inoltre che esso è un 4-vettore, e che quindi si trasforma per trasformazioni di Lorentz esattamente come x^μ:

$$p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu p^\nu. \tag{2.17}$$

Risulta chiara la definizione del corrispondente covettore:

$$p_\mu = \eta_{\mu\nu}p^\nu = \left(-\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{2.18}$$

2.2 La particella libera relativistica

Ci si potrebbe chiedere se la Lagrangiana della particella libera classica (1.9) sia consistente con la Teoria della Relatività. La soluzione (1.11) indica che i moti permessi per la particella libera sono quelli a velocità costante; all'interno della Teoria della Relatività bisogna però assicurare che tale velocità non superi quella della luce nel vuoto, perchè ciò non è consentito.

Per costruire l'azione di una particella relativistica bisogna partire dal presupposto che se il suo moto fisico ha una certa forma in un sistema di riferimento, avrà la stessa forma anche in ogni altro sistema di riferimento inerziale, anche se le misure numeriche saranno diverse. Per esempio, se una particella si muove di moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale, ogni altro sistema di riferimento inerziale la vedrà muoversi con lo stesso tipo di moto, anche se misurerà una velocità, in generale, diversa. Il modo più facile per imporre questa condizione è quello di rendere l'azione uno scalare.

Una particella relativistica in movimento traccerà una traiettoria nello spazio-tempo di Minkowski, chiamata *linea di Universo*. Il modo più semplice per descriverne il moto è quello di parametrizzare la traiettoria mediante il tempo proprio τ della particella. In Figura 2.1 è rappresentato un esempio di questo moto. Dato che la velocità della particella, se la sua massa è positiva, è sempre minore di c, la pendenza della traiettoria

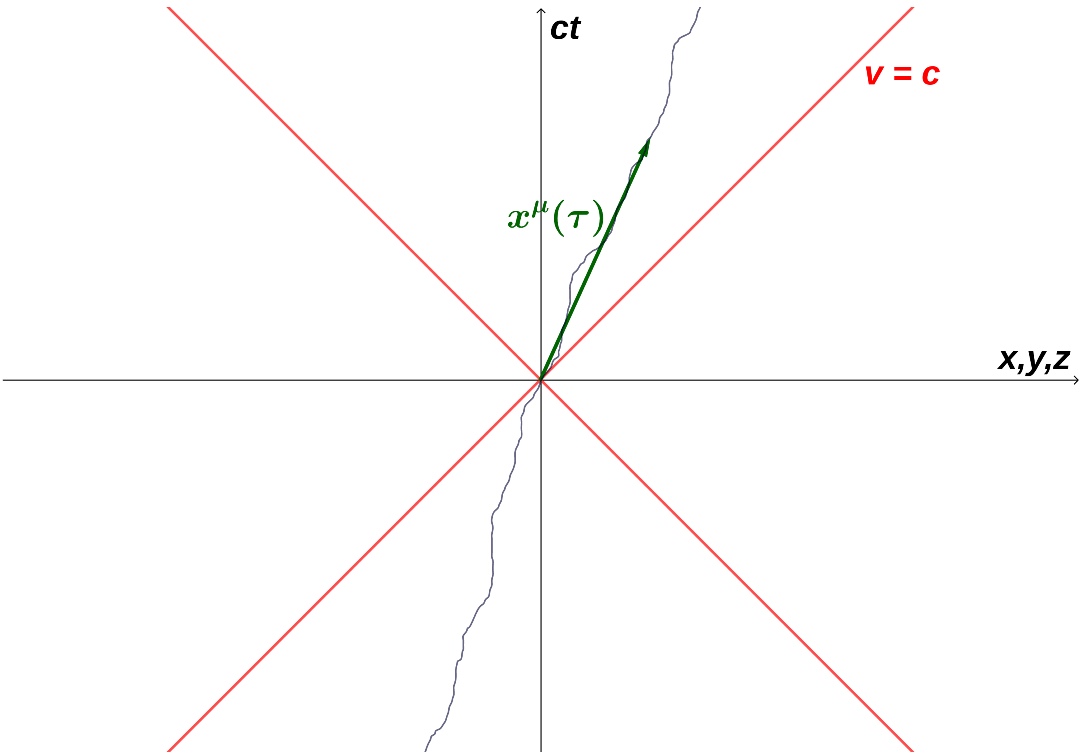

Figura 2.1: Moto di una particella relativistica nello spazio-tempo di Minkowski; per semplicità le tre direzioni spaziali sono riportate tutte sullo stesso asse. La traiettoria è parametrizzata tramite il tempo proprio della particella.

deve rimanere sempre maggiore di 1. Questo non solo porta la particella a restare sempre dentro al '*cono di luce*', cioè all'interno delle bisettrici tracciate in rosso nella Figura 2.1, ma anche al fatto che, per ogni spostamento infinitesimo, l'intervallo ds deve essere < 0 (cioè time-like).

È utile notare che esiste una relazione tra l'intervallo ds e il tempo proprio $d\tau$. Infatti

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \vec{dx}^{\,2} = -c^2 dt^2 \left(1 - v^2/c^2\right) = -c^2 \frac{dt^2}{\gamma^2} \tag{2.19}$$

e, ricordando che $dt/\gamma = d\tau$,

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 \tag{2.20}$$

da cui

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-ds^2}\,. \tag{2.21}$$

Questo risultato conferma che il tempo proprio è uno scalare.

Nel caso della particella libera, essa si muoverà di moto rettilineo uniforme come nel caso classico, e nello spazio-tempo di Minkowski traccerà una traiettoria rettilinea. Come è stato detto nella Sezione 2.1, il tempo proprio è il minimo tempo fra quelli misurati in ogni possibile sistema di riferimento inerziale. Per questo può essere utilizzato per costruire l'azione della particella libera nel seguente modo:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \,. \tag{2.22}$$

In questa equazione compare un fattore $-mc^2$, che serve per dare la giusta dimensione all'azione (cioè un'energia moltiplicata per un tempo). Ciò è possibile per il fatto che sia m che c sono scalari. Per un generico osservatore inerziale, quindi, l'azione di una particella relativistica non soggetta a potenziali si scrive come

$$S = -mc^2 \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - v^2/c^2} dt \tag{2.23}$$

mentre la sua Lagrangiana è

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \,. \tag{2.24}$$

Si noti che ora le espressioni della Lagrangiana e dell'azione hanno senso solo per velocità minori di c. L'azione si può esprimere anche in un altro modo: utilizzando la (2.21) si ricava infatti

$$S = -mc \int \sqrt{-ds^2} \,. \tag{2.25}$$

Il significato di questa formula si comprende dopo aver parametrizzato la linea di Universo con un parametro λ, scrivendo cioè $x^\mu(\lambda)$; in questo modo essa diventa:

$$S = -mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda \,. \tag{2.26}$$

Se si effettua il cambio di parametrizzazione regolare $\lambda \to \lambda'$, si ottiene

$$S = -mc \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'} \frac{d\lambda'}{d\lambda}} d\lambda = -mc \int_{\lambda'_1}^{\lambda'_2} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda'} \frac{dx^\nu}{d\lambda'}} d\lambda' \,. \tag{2.27}$$

Questa relazione esprime una proprietà importante: l'*invarianza per cambio di parametrizzazione* dell'azione. La (2.23) è quindi solo un caso particolare nel quale si utilizza il tempo proprio τ come parametro.

Per ottenere le equazioni del moto si può utilizzare l'equazione (1.4). In questo caso però, se si utilizza il tempo proprio come parametro, $x^\mu(\tau)$ svolge il ruolo di $q(t)$ e $dx^\mu(\tau)/d\tau$ quello di $\dot{q}(t)$. Infatti in Relatività il tempo non è più un semplice parametro e riveste invece il ruolo di una variabile, alla pari delle coordinate spaziali. In questo modo, definendo

$$\dot{x}^\mu(\tau) := \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \,, \tag{2.28}$$

l'equazione (1.4) assume la forma

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0\,. \tag{2.29}$$

Questa equazione corrisponde a quattro equazioni scalari, una per ogni valore di μ che va da 0 a 3. Utilizzando

$$\mathcal{L} = -mc\sqrt{-\dot{x}^\mu \dot{x}_\mu} \tag{2.30}$$

che viene dalla (2.26) si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{mc\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^\nu \dot{x}_\nu}} = \frac{mc\,\dot{x}_\mu}{\left(\sqrt{-ds^2/d\tau}\right)} = \frac{mcd\tau}{cd\tau}\dot{x}_\mu = m\frac{dx_\mu}{d\tau} = p_\mu \tag{2.31}$$

dove nella terza uguaglianza si è utilizzata l'equazione (2.21) e nell'ultima la definizione di p_μ. Inserendo ora il risultato ottenuto nella (2.29), e notando che $\partial\mathcal{L}/\partial x^\mu = 0$, si ottiene:

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = 0\,. \tag{2.32}$$

Il risultato ottenuto è la conservazione del 4 -vettore energia-impulso, cioè dell'energia e della quantità di moto relativistici della particella. Il moto risultante è quindi rettilineo uniforme come nel caso classico, ma la trattazione è consistente con la teoria di Einstein.

2.3 Le stringhe relativistiche

Per costruire l'azione di una stringa relativistica, si deve ragionare sulla falsariga della particella libera. In quel caso l'azione è stata costruita in modo tale da risultare proporzionale all'intervallo invariante tracciato dalla traiettoria della particella nello spazio-tempo, cioè dalla linea di Universo. Se si considera una stringa, ad ogni istante di tempo fissato, essa sarà descritta da una linea nello spazio-tempo. Perciò, considerandone l'evoluzione temporale, la stringa traccerà una superficie nello spazio quadridimensionale, chiamata *foglio di Universo*. Le stringhe aperte tracceranno una superficie simile ad un *nastro*, mentre quelle chiuse tracceranno un *tubo*.

Per trovare quindi l'azione della stringa è necessario calcolarne l'area in modo relativisticamente invariante. Per una superficie immersa nello spazio tridimensionale l'area si può calcolare, dopo aver trovato una parametrizzazione regolare $\vec{x} = \vec{x}(\xi_1, \xi_2)$, tramite

$$\begin{aligned} A = \int_\Sigma \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right| \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right| |\sin\theta| d\xi_1 d\xi_2 = \int_\Sigma \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right| \left|\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right| \sqrt{1-\cos^2\theta}\, d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \int_\Sigma \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right)^2 \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right)^2 - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\cdot\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right)^2} d\xi_1 d\xi_2 \end{aligned} \tag{2.33}$$

dove θ è l'angolo formato dai vettori $\partial\vec{x}/\partial\xi_1$ e $\partial\vec{x}/\partial\xi_2$ e Σ è l'insieme a cui appartengono i parametri ξ_1 e ξ_2. Passando alle superfici nello spazio-tempo, si deve comunque trovare una parametrizzaione che le descriva. È utile scegliere un parametro τ che abbia un significato temporale e un parametro σ che ne abbia uno spaziale. Si trova così una 'mappa' che descrive il foglio di Universo, e che per convenzione si indica come $X^\mu(\tau, \sigma)$. Per trovare l'area e garantire che sia uno scalare basta quindi utilizzare la formula (2.33) sostituendo al prodotto scalare euclideo quello di Minkowski. Data la segnatura della metrica, però, è inoltre necessario cambiare segno all'argomento della radice, in modo tale che esso risulti positivo. Si arriva quindi a:

$$A = \int_\Sigma \sqrt{\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\right)^2 - \left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X^\nu}{\partial\tau}\right)^2\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}\frac{\partial X^\nu}{\partial\sigma}\right)^2}\, d\tau d\sigma\,. \tag{2.34}$$

Utilizzando le definizioni:

$$\dot{X}^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} \tag{2.35}$$

$$X'^\mu := \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma} \tag{2.36}$$

e la notazione ' $\cdot$ ' per il prodotto scalare di Minkowski, l'area si può scrivere in modo più semplice:

$$A = \int_\Sigma \sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}\, d\tau d\sigma\,. \tag{2.37}$$

Come insieme Σ conviene scegliere un quadrato, con τ cha appartiene quindi all'intervallo $[\tau_1; \tau_2]$ e σ all'intervallo $[0; \sigma_1]$. Per trovare l'azione occorre moltiplicare l'area per delle grandezze scalari in modo da darle le giuste dimensioni fisiche. Facendo ciò si arriva a

$$S = -\frac{T_0}{c}\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_0^{\sigma_1}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}\, d\sigma\right] d\tau \tag{2.38}$$

che è chiamata *azione di Nambu-Goto*.

Una caratteristica importante di questa azione è che, come quella della particella libera, possiede un'invarianza per cambio di parametrizzazione. Questo fatto si può dimostrare in modo formale, ma per capirlo in modo più intuitivo è utile definire la matrice

$$\gamma = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X}\cdot X' \\ X'\cdot\dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

e scrivere l'azione di Nambu-Goto come

$$S = -\frac{T_0}{c}\iint \sqrt{-det(\gamma)}\, d\tau d\sigma\,. \tag{2.40}$$

Con questa scrittura risulta chiaro che essa è invariante per cambio di parametrizzazione.

Per trovare le equazioni del moto si ricorre come al solito al principio di Hamilton. Dall'azione di Nambu-Goto emerge la densità di Lagrangiana della stringa:

$$\widetilde{\mathcal{L}}(\dot{X}^\mu, X'^\mu) = -\frac{T_0}{c}\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}\,. \tag{2.41}$$

Effettuando la variazione si ottiene

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_0^{\sigma_1}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{X}^\mu}\delta(\dot{X}^\mu) + \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial X'^\mu}\delta(X'^\mu)\right)d\sigma\right]d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_0^{\sigma_1}\left(\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{X}^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial X'^\mu}\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}\right)d\sigma\right]d\tau\,; \end{aligned} \tag{2.42}$$

risulta comodo definire

$$P^\tau_\mu := \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial\dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')X'_\mu - (X')^2\dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \tag{2.43}$$

e

$$P^\sigma_\mu := \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial X'^\mu} = -\frac{T_0}{c}\frac{(\dot{X}\cdot X')\dot{X}_\mu - (\dot{X})^2X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \tag{2.44}$$

per poter scrivere

$$\delta S = \int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_0^{\sigma_1}\left(P^\tau_\mu\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\tau} + P^\sigma_\mu\frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial\sigma}\right)d\sigma\right]d\tau\,. \tag{2.45}$$

A questo punto, integrando per parti il primo termine rispetto a τ ed il secondo rispetto a σ si ottiene:

$$\begin{aligned} \delta S = \int_0^{\sigma_1} P^\tau_\mu\delta X^\mu\Big|_{\tau_1}^{\tau_2}d\sigma + \int_{\tau_1}^{\tau_2} P^\sigma_\mu\delta X^\mu\Big|_0^{\sigma_1}d\tau\, - \\ -\int_{\tau_1}^{\tau_2}\left[\int_0^{\sigma_1}\left(\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial\tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial\sigma}\right)\delta X^\mu d\sigma\right]d\tau\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

La variazione ottenuta si deve annullare per il principio di Hamilton. Il primo termine si annulla perchè, come al solito, la variazione deve essere effettuata mantenendo $\delta X^\mu(\tau_1,\sigma) = \delta X^\mu(\tau_2,\sigma) = 0$. Il secondo termine dipende invece dalle condizioni al contorno; come nel caso delle stringhe classiche, ci sono due condizioni che si possono imporre:

- la *condizione di estremi liberi*, che è l'analogo della condizione di Neumann per le stringhe classiche, cioè

$$P^\sigma_\mu(\tau,0) = P^\sigma_\mu(\tau,\sigma_1) = 0\,; \tag{2.47}$$

- la *condizione di Dirichlet*, cioè

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, 0) = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(\tau, \sigma_1) = 0 \quad \text{per} \ \ \mu \neq 0\,. \tag{2.48}$$

La condizione di estremi liberi è chiamata così perchè la variazione della traiettoria non ha alcun vincolo a $\sigma = 0$ e $\sigma = \sigma_1$; essa fa chiaramente annullare il secondo termine della variazione nell'equazione (2.46) perchè P^σ_μ si annulla agli estremi.

La condizione di Dirichlet annulla il termine solo per $\mu \neq 0$, poichè $\mu = 0$ rappresenta la componente temporale, che non può arrestarsi. Di conseguenza, mentre per $\mu \neq 0$ si ha che $\delta X^\mu(\tau, 0) = \delta X^\mu(\tau, \sigma_1) = 0$, usando questa condizione al contorno bisogna aggiungere anche $P^\sigma_0 = 0$ perché il secondo termine della (2.46) sia uguale a zero.

Per quanto riguarda le stringhe chiuse, esse non hanno condizioni al contorno; infatti si ha che $X^\mu(\tau, 0) = X^\mu(\tau, \sigma_1)$, perciò il secondo termine si annulla sempre.

Definite le condizioni al contorno, quindi, resta da far annullare il terzo termine. Dato che ciò deve accadere per ogni variazione e per ogni (τ, σ), la condizione che si ottiene è

$$\frac{\partial P^\tau_\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial P^\sigma_\mu}{\partial \sigma} = 0 \tag{2.49}$$

che rappresenta l'equazione del moto delle stringhe relativistiche. La forma esplicita di questa equazione dipende dalla parametrizzazione del foglio di Universo scelta. L'invarianza per cambio di parametrizzazione dell'azione di Nambu-Goto (2.38) assume quindi una grande importanza, perchè scegliendo i parametri in modo vantaggioso si possono ottenere delle equazioni del moto particolarmente semplici.

Capitolo 3

Simmetrie

3.1 Trasformazioni di simmetria

Nell'ambito della meccanica lagrangiana possono esistere quantità che si conservano nel tempo, durante il moto di un sistema fisico. Queste quantità, chiamate *integrali del moto*, sono molto importanti perchè permettono di diminuire i gradi di libertà del sistema e in molti casi comprenderne caratteristiche fisiche rilevanti. Gli integrali del moto sono in stretta relazione con le *trasformazioni di simmetria*, cioè trasformazioni che agiscono sul sistema lasciandone invariata la Lagrangiana. Infatti, il teorema della Nöther garantisce che per ogni trasformazione di simmetria esiste un integrale del moto. Alcuni esempi di queste trasformazioni possono essere traslazioni o rotazioni del sistema di riferimento, nonché l'inversione temporale.

Un semplice esempio può essere rappresentato da un sistema unidimensionale, caratterizzato da una Lagrangiana $\mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t)$, con la coordinta $q(t)$ che subisce una trasformazione infinitesima $\delta q(t)$. Tale trasformazione può essere scritta come

$$\delta q(t) = \epsilon\, h(q(t), t) \tag{3.1}$$

dove ϵ è un parametro infinitesimo e la funzione h è chiamata *generatore* della trasformazione. Si può dimostrare che, se essa è una simmetria per il sistema, la grandezza

$$Q = \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q(t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} h(q(t), t) \tag{3.2}$$

è un integrale del moto, cioè che

$$\frac{d}{dt} Q = 0\,. \tag{3.3}$$

Infatti, dato che la Lagrangiana non varia sotto la trasformazione (3.1), si ha che

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q(t) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q(t))}{dt} = 0 \tag{3.4}$$

e perciò

$$\epsilon\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\delta q(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{d(\delta q(t))}{dt} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t}\delta q(t) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\frac{d(\delta q(t))}{dt} = 0\,, \tag{3.5}$$

dove nella prima uguaglianza si è utilizzata la definizione di Q, nella seconda l'equazione di Eulero-Lagrange (1.4) e nella terza l'equazione (3.4). È quindi provata la (3.3).

Quando un sistema è esteso nello spazio e viene quindi descritto tramite una densità di Lagrangiana, ad ogni trasformazione di simmetria corrisponde una *corrente* conservata. Una corrente conservata, nello spazio-tempo di Minkowski, è un 4 -vettore j^α tale che

$$\partial_\alpha j^\alpha = 0\,, \tag{3.6}$$

dove si è utilizzata la notazione $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Se il sistema fisico considerato è una sottovarietà Σ dello spazio di Minkowski, come per esempio il foglio di Universo di una stringa, la sua azione sarà data da

$$S = \int_\Sigma \widetilde{\mathcal{L}}(X^\mu, \partial_\alpha X^\mu) d\xi^0 d\xi^1 \dots d\xi^k \tag{3.7}$$

dove le variabili ξ sono i parametri che descrivono la varietà (uno di tipo temporale e k di tipo spaziale) e l'indice α va da 0 a k ($\partial_\alpha X^\mu$ indica quindi la derivazione di X^μ rispetto ai parametri ξ). Si supponga che il sistema subisca quindi una trasformazione del tipo

$$X^\mu(\xi) \mapsto X^\mu(\xi) + \delta X^\mu(\xi) \tag{3.8}$$

con

$$\delta X^\mu(\xi) = \epsilon^i\, h_i^\mu(X^\mu)\,, \tag{3.9}$$

dove $i = 1, 2, \dots, n$ etichetta i generatori h^μ della trasformazione e gli ϵ^i sono parametri infinitesimi. Allora, se $\widetilde{\mathcal{L}}$ resta invariata sotto questa trasformazione, esisteranno n correnti conservate j_i^α, etichettate da i, date da:

$$\epsilon^i\, j_i^\alpha = \frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\delta X^\mu\,, \tag{3.10}$$

cioè tali che

$$\partial_\alpha j_i^\alpha = 0\,. \tag{3.11}$$

Per ogni corrente conservata esiste un integrale del moto; esso si trova integrando la componente 0 (cioè quella temporale) sui parametri spaziali della sottovarietà. Per ogni corrente conservata j_i^α, quindi, esiste un integrale del moto Q_i dato da:

$$Q_i = \int j_i^0\, d\xi^1 \dots d\xi^k\,. \tag{3.12}$$

Il risultato è quindi che se una trasformazione dipendente da n parametri rappresenta una simmetria per un certo sistema, allora esisteranno n correnti conservate ed n corrispondenti integrali del moto. Le stringhe relativistiche, la cui azione è stata ricavata nella Sezione 2.3, presentano diverse simmetrie nello spazio-tempo di Minkowski.

3.2 Traslazioni spazio-temporali

Per prima cosa si possono prendere in considerazione trasformazioni del tipo

$$\delta X^\mu = \epsilon^i \delta_i^\mu = \epsilon^\mu \tag{3.13}$$

dove δ_i^μ è la delta di Kronecker. La trasformazione (3.13) rappresenta una *traslazione spazio-temporale* e, come si può vedere dalla sua definizione, dipende da quattro parametri. Questa rappresenta una simmetria per la stringa perchè la sua densità di Lagrangiana (2.41) dipende solo dalle derivate di X^μ, che non variano dato che gli ϵ^μ sono costanti. Le corrispondenti correnti conservate si ricavano dalla (3.10), dove in questo caso l'indice i può essere sostituito con μ e α assume due valori: uno per il parametro τ e l'altro per σ. Perciò si ottiene:

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu \,. \tag{3.14}$$

Semplificando gli ϵ^μ, si ottengono le correnti

$$j_\mu^\alpha = \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)} \tag{3.15}$$

che sono quattro vettori a due componenti etichettati dall'indice μ:

$$\left(j_\mu^0, j_\mu^1\right) = \left(\frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \widetilde{\mathcal{L}}}{\partial X'^\mu} \right) \,. \tag{3.16}$$

Si ha quindi una corrente conservata per ogni tipo di traslazione: per $\mu = 0$ si ha una traslazione temporale e la corrispondente corrente conservata, per $\mu = 1, 2, 3$ si hanno traslazioni lungo gli assi x, y, z e tre corrispondenti correnti. Si può notare che, date le definizioni (2.43) e (2.44), si ha che

$$j_\mu^\alpha = P_\mu^\alpha \tag{3.17}$$

(indicando τ con $\alpha = 0$ e σ con $\alpha = 1$) e che quindi la condizione $\partial_\alpha j_\mu^\alpha$ si traduce nell'equazione del moto (2.49). Gli integrali del moto corrispondenti a queste correnti sono il risultato dell'integrazione delle j_μ^0 sulla componente spaziale, cioè σ. Si ha perciò

$$p_\mu = \int_0^{\sigma_1} P_\mu^\tau \, d\sigma \,. \tag{3.18}$$

Gli integrali del moto sono stati chiamati p_μ perchè non sono altro che le componenti del 4-vettore energia-impulso; è esso infatti che si ottiene dalle simmetrie per traslazioni spazio-temporali. Come conseguenza si ha che P^{τ}_{μ} è la densità in σ di momento (4-dimensionale) della stringa. La condizione di conservazione di p_μ si scrive quindi come

$$\frac{d}{d\tau}p_\mu = 0\,, \tag{3.19}$$

Su quest'ultima equazione è necessario precisare che, in realtà, essa non vale nel caso di stringhe aperte con condizioni al contorno di Dirichlet. Infatti, calcolando esplicitamente, si ha:

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial P^{\tau}_{\mu}}{\partial \tau} d\sigma = \int_0^{\sigma_1} -\frac{\partial P^{\sigma}_{\mu}}{\partial \sigma} d\sigma = -P^{\sigma}_{\mu}\Big|_0^{\sigma_1} \tag{3.20}$$

dove nella seconda uguaglianza è stata utilizzata l'equazione (2.49). Si vede quindi che per stringhe chiuse o aperte con condizioni di estremi liberi (dove quindi P^{σ}_{μ} si annulla agli estremi) p_μ si conserva, mentre ciò non accade nel caso delle condizioni di Dirichlet. Secondo la Teoria delle Stringhe, infatti, in questo caso le stringhe sono in contatto agli estremi con oggetti chiamati 'D-branes', sui quali possono imprimere forze. In questo caso, al contrario delle stringhe con estremi liberi, esse non sono quindi oggetti isolati.

3.3 Trasformazioni di Lorentz

Anche le trasformazioni di Lorentz costituiscono una simmetria per le stringhe relativistiche. Esse si possono scrivere, nel modo più generale, come

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu\,. \tag{3.21}$$

In questo caso ϵ è un tensore di rango 2 che contiene le costanti infinitesime della trasformazione. Dato che si sta lavorando in uno spazio a quattro dimensioni, esistono quindi 16 costanti infinitesime che la determinano. Si può vedere però che questi parametri non sono tutti indipendenti fra loro. Infatti, la condizione perchè la trasformazione (3.21) sia effettivamente una trasformazione di Lorentz, è che essa lasci invariato l'intervallo s^2. La condizione da imporre è perciò:

$$\delta\left(s^2\right) = \delta\left(\eta_{\mu\nu} X^\mu X^\nu\right) = 0\,; \tag{3.22}$$

effettuando la variazione e sostituendo δX^μ si ottiene quindi

$$2\eta_{\mu\nu}\left(\delta X^\mu\right) X^\nu = 2\eta_{\mu\nu}\left(\epsilon^{\mu\rho} X_\rho\right) X^\nu = 2\epsilon^{\mu\rho} X_\rho X_\mu = 0\,. \tag{3.23}$$

Dall'ultima uguaglianza ottenuta, con una semplice manipolazione di indici, si può scrivere che

$$\epsilon^{\mu\rho} X_\rho X_\mu + \epsilon^{\rho\mu} X_\mu X_\rho = 0 \tag{3.24}$$

e che quindi

$$\left(\epsilon^{\mu\rho}+\epsilon^{\rho\mu}\right)X_\rho X_\mu=0\,, \tag{3.25}$$

concludendo che il tensore ϵ che contiene i parametri della trasformazione è *antisimmetrico*, cioè

$$\epsilon^{\rho\mu}=-\epsilon^{\mu\rho}\,. \tag{3.26}$$

Un tensore reale di rango 2 e antisimmetrico, in uno spazio a 4-dimensionale, dipenderà da 6 parametri indipendenti; se la trasformazione (3.21) costituisce una simmetria per il sistema, esisteranno quindi altrettante correnti e integrali del moto. I 6 parametri indipendenti rappresentano ognuno un tipo di trasformazione di Lorentz: 3 di essi rappresentano i 'boost' lungo i tre assi spaziali, ovvero il cambio di sistema di riferimento verso uno che si muove con velocità V lungo un certo asse rispetto al primo, mentre gli altri 3 rappresentano le rotazioni del sistema di riferimento attorno ai tre assi spaziali. Per esempio, la trasformazione di Lorentz (2.3) non è altro che un boost lungo l'asse x.

Bisogna quindi dimostrare che queste trasformazioni lasciano invariata la densità di Lagrangiana (2.41). Questa dipende solo da prodotti scalari fra derivate di X^μ rispetto ai parametri: ovvero, utilizzando ξ^α e ξ^β per indicare τ o σ, solo da termini del tipo

$$\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\beta}\,. \tag{3.27}$$

La variazione di questo termine è data da

$$\begin{aligned}\delta\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\beta}\right)&=\eta_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\left(\delta X^\mu\right)}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^\beta}+\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial\left(\delta X^\nu\right)}{\partial\xi^\beta}\right)=\\&=\eta_{\mu\nu}\left(\epsilon^{\mu\rho}\frac{\partial X_\rho}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^\beta}+\epsilon^{\nu\rho}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X_\rho}{\partial\xi^\beta}\right)\,,\end{aligned} \tag{3.28}$$

dove nella seconda uguaglianza è stata utilizzata la trasformazione (3.21); osservando poi che

$$\eta_{\mu\nu}\,\epsilon^{\mu\rho}X_\rho=\eta_{\mu\nu}\,\epsilon^{\mu\rho}\,\eta_{\lambda\rho}X^\lambda=\epsilon_{\nu\lambda}X^\lambda \tag{3.29}$$

ed effettuando manipolazioni sugli indici, si arriva a concludere che

$$\delta\left(\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\beta}\right)=\left(\epsilon_{\nu\mu}+\epsilon_{\mu\nu}\right)\frac{\partial X^\mu}{\partial\xi^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial\xi^\beta}\,. \tag{3.30}$$

L'ultimo termine ottenuto si annulla per l'antisimmetria del tensore ϵ, e risulta quindi verificato che la densità di Lagrangiana è invariante per trasformazioni di Lorentz.

Per trovare le correnti conservate si utilizza l'equazione (3.10), dove per etichettare le correnti sono necessari due indici; si ottiene:

$$\epsilon^{\mu\nu}j^\alpha_{\mu\nu}=\frac{\partial\widetilde{\mathcal{L}}}{\partial(\partial_\alpha X^\mu)}\epsilon^{\mu\nu}X_\nu=P^\alpha_\mu\epsilon^{\mu\nu}X_\nu\,. \tag{3.31}$$

Sfruttando l'antisimmetria di ϵ si possono scrivere le correnti $j^{\alpha}_{\mu\nu}$ in un altro modo; infatti:

$$\epsilon^{\mu\nu} j^{\alpha}_{\mu\nu} = P^{\alpha}_{\mu} \epsilon^{\mu\nu} X_{\nu} = \frac{1}{2} \left(\epsilon^{\mu\nu} P^{\alpha}_{\mu} X_{\nu} - \epsilon^{\mu\nu} P^{\alpha}_{\nu} X_{\mu} \right) = -\frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu} \left(X_{\mu} P^{\alpha}_{\nu} - X_{\nu} P^{\alpha}_{\mu} \right) . \tag{3.32}$$

Dato che nella conservazione delle correnti le costanti moltiplicative non giocano alcun ruolo, si può tralasciare la costante $-\frac{1}{2}$ e indicare le correnti conservate con $\widetilde{M}$:

$$\widetilde{M}^{\alpha}_{\mu\nu} = X_{\mu} P^{\alpha}_{\nu} - X_{\nu} P^{\alpha}_{\mu} . \tag{3.33}$$

Da questa espressione si vede chiaramente che $\widetilde{M}^{\alpha}_{\mu\nu} = -\widetilde{M}^{\alpha}_{\nu\mu}$, perciò anche le correnti sono rappresentate da un tensore antisimmetrico di rango 2. Questo significa che esisteranno solamente 6 correnti conservate. L'equazione (3.6) si scrive quindi come

$$\frac{\partial \widetilde{M}^{\tau}_{\mu\nu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{M}^{\sigma}_{\mu\nu}}{\partial \sigma} = 0 . \tag{3.34}$$

Queste sono quindi 16 equazioni (una per ogni valore assunto da μ e ν) di cui solo 6 sono indipendenti. I rispettivi integrali del moto si ottengono, come al solito, integrando la prima componente delle correnti nello spazio:

$$M_{\mu\nu} = \int_0^{\sigma_1} \widetilde{M}^{\tau}_{\mu\nu} d\sigma ; \tag{3.35}$$

la loro conservazione si scrive come

$$\frac{d}{d\tau} M_{\mu\nu} = 0 . \tag{3.36}$$

Naturalmente l'antisimmetria di $\widetilde{M}$ permane anche in M; si hanno quindi 6 integrali del moto. Le componenti M_{01}, M_{02} ed M_{03} derivano dalla simmetria per boost spaziali, mentre le componenti M_{23}, M_{31} ed M_{12} derivano dalla simmetria per rotazione degli assi e si identificano, rispettivamente, nelle componenti x, y e z del momento angolare della stringa.

Capitolo 4

Parametrizzazioni

4.1 Parametrizzazione del foglio di Universo

È stato sottolineato, nella Sezione 2.3, che l'azione di Nambu-Goto delle stringhe relativistiche è invariante per cambio di parametrizzazione. Qualunque parametrizzazione del foglio di Universo, purché regolare, può essere quindi utilizzata per descrivere il sistema e ricavarne le equazioni del moto. Una parametrizzazione che si potrebbe scegliere per il parametro τ è il cosiddetto 'gauge statico', che consiste nel definire $\tau = t$; con relative scelte di σ, si ottengono soluzioni in forma implicita delle equazioni del moto. Sfruttando le simmetrie del foglio di Universo descritte nelle Sezioni 3.2 e 3.3, però, si possono ricavare parametrizzazioni più vantaggiose.

Una di queste consiste nel scegliere il parametro τ come una combinazione lineare delle coordinate del foglio di Universo:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\, \tau \tag{4.1}$$

dove n^μ e λ sono, rispettivamente, un 4-vettore e una costante fissati. L'equazione (4.1) ha un'interpretazione geometrica nello spazio-tempo; presi infatti due punti X_1^μ e X_2^μ sul foglio di Universo caratterizzati dallo stesso τ, il 4-vettore $\Delta X^\mu := X_2^\mu - X_1^\mu$, che li congiunge, sarà perpendicolare a n^μ:

$$n_\mu\, \Delta X^\mu = 0\,. \tag{4.2}$$

Se definiamo una stringa come i punti sul foglio di Universo caratterizzati dallo stesso valore del parametro τ, che ha senso essendo questo il parametro temporale, essa sarà l'intersezione tra l'iperpiano perpendicolare ad n^μ ed il foglio di Univero stesso. ΔX^μ risulta essere a questo punto la congiungente tra due punti della stringa; dato che le stringhe sono oggetti estesi spazialmente ma non temporalmente, è necessario garantire che ΔX^μ sia un 4-vettore space-like. Si può dimostrare che ciò è verificato ogni volta che n^μ è time-like o light-like: un'ulteriore condizione da aggiungere è quindi

$$n_\mu n^\mu \leq 0 \,. \tag{4.3}$$

Nella Sezione 3.2 è stato dimostrato che, per stringhe chiuse o aperte con estremi liberi, il quadrivettore p^μ è un integrale del moto; si può sfruttare ora questo fatto per definire la costante λ come

$$\lambda := \widetilde{\lambda} \cdot (n_\mu \, p^\mu) \,. \tag{4.4}$$

Nel caso di stringhe aperte con condizioni al contorno di Dirichlet, dove non tutte le componenti di p^μ si conservano, si sceglie n^μ tale da rendere comunque conservato il prodotto scalare $n_\mu \, p^\mu$; così facendo λ risulterà sempre costante.

Nella definizione di λ compare una nuova costante $\widetilde{\lambda}$; prima di definirla a sua volta, è utile passare alle cosiddette *unità di misura naturali*:

$$\hbar = c = 1 \,, \tag{4.5}$$

dove $\hbar$ è la costante di Plank ridotta. È utile inoltre imporre che i parametri τ e σ siano entrambi adimensionali. Facendo ciò, e considerando che

$$n_\mu X^\mu = \widetilde{\lambda} \, (n_\mu \, p^\mu) \, \tau \,, \tag{4.6}$$

si deduce che $\widetilde{\lambda}$, con queste nuove unità di misura, ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato. In Teoria delle Stringhe si definisce inoltre un'altra grandezza, chiamata *parametro di slope*:

$$\alpha' := \frac{1}{2\pi T_0 \hbar c} \,. \tag{4.7}$$

Con questa definizione e nelle nuove unità di misura, l'azione di Nambu-Goto diventa:

$$S = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\int_0^{\sigma_1} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \, d\sigma \right] d\tau \,. \tag{4.8}$$

Si può notare che le dimensioni di $\widetilde{\lambda}$ sono le stesse di α'; per questo è utile scegliere la prima proporzionale alla seconda: per le stringhe aperte si definisce quindi $\widetilde{\lambda} = 2\alpha'$, mentre per quelle chiuse $\widetilde{\lambda} = \alpha'$. Le definizioni del parametro τ risultano quindi essere:

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = 2\alpha' (n_\mu \, p^\mu) \, \tau \qquad \text{per stringhe aperte} \tag{4.9}$$

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \alpha' (n_\mu \, p^\mu) \, \tau \qquad \text{per stringhe chiuse} \,. \tag{4.10}$$

Definito il parametro τ, resta da determinare σ nel modo più conveniente possibile. Ciò si può realizzare imponendo che il prodotto $n_\mu P^{\tau\mu}$ sia costante lungo la stringa, cioè lungo le curve a τ costante. Si definisce quindi, per le stringhe aperte con estremi liberi:

$$(n_\mu \, p^\mu) \sigma = \pi \int_0^\sigma n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \widetilde{\sigma}) d\widetilde{\sigma} \,. \tag{4.11}$$

Da questa definizione segue che

$$(n_\mu\, p^\mu) d\sigma = \pi\, d\sigma\, n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \sigma) \tag{4.12}$$

e perciò che

$$n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \sigma) = \frac{n_\mu\, p^\mu}{\pi}\,. \tag{4.13}$$

Risulta chiaro, quindi, che $n_\mu\, P^{\tau\mu}$ non dipende da σ ed essendo, come già noto, $n_\mu\, p^\mu$ indipendente da τ, il risultato è che $n_\mu\, P^{\tau\mu}$ è costante sul foglio di Universo. Inoltre, calcolando l'equazione (4.11) in $\sigma = \sigma_1$ ed utilizzando la definizione (3.18) di p^μ, si ottiene

$$(n_\mu\, p^\mu)\sigma_1 = \pi(n_\mu\, p^\mu) \tag{4.14}$$

da cui segue che, per le stringhe aperte, σ appartiene all'intervallo $[0; \pi]$.

Per le stringhe chiuse si definisce invece

$$(n_\mu\, p^\mu)\sigma = 2\pi \int_0^\sigma n_\mu P^{\tau\mu}(\tau, \widetilde{\sigma}) d\widetilde{\sigma}\,; \tag{4.15}$$

ragionando in modo equivalente si trova che, anche in questo caso, $n_\mu\, P^{\tau\mu}$ è costante sul foglio di Universo e che il parametro σ appartiene invece all'intervallo $[0; 2\pi]$.

È importante fare un'ulteriore considerazione riguardo a questa definizione di σ. Prendendo in esame l'equazione del moto (2.49) e moltiplicandola scalarmente per n^μ, si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\,(n_\mu P^{\tau\mu}) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\,(n_\mu P^{\sigma\mu}) = 0\,. \tag{4.16}$$

Il primo dei due termini si annulla, essendo $n_\mu P^{\tau\mu}$ costante; la condizione risultante è quindi

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\,(n_\mu P^{\sigma\mu}) = 0\,, \tag{4.17}$$

Risulta quindi chiaro che, se per ogni valore di τ esiste un punto sulla stringa in cui $n_\mu P^{\sigma\mu}$ si annulla, allora esso si annullerà in tutto il foglio di Universo. Per quanto riguarda le stringhe aperte con condizioni di estremi liberi esso è sempre verificato, dato che $P^{\sigma\mu}$ si annulla agli estremi. Nelle stringhe chiuse invece non c'è alcun punto in cui si ha la certezza che $n_\mu P^{\sigma\mu}$ si annulli. Tuttavia si può mostrare che anche in quel caso vale $n_\mu P^{\sigma\mu} = 0$, ragionando nel modo seguente. Presa una stringa caratterizzata da un certo τ, si sceglie un punto arbitrario e lo si pone a $\sigma = 0$. Nel piano tangente al foglio di Universo in quel punto ci sarà il vettore X'^μ, tangente alla stringa; preso un vettore appartenente al piano tangente ma perpendicolare ad X'^μ, la sua intersezione con la stringa a $\tau + d\tau$ sarà posta a $\sigma = 0$. Andando avanti così, risulta definita la linea a $\sigma = 0$. Questa linea è in ogni punto perpendicolare a X'^μ per costruzione, e parallela a $\dot{X}^\mu$, come emerge dalla definizione (2.35). Il risultato è che

$$\dot{X} \cdot X' = 0\,. \tag{4.18}$$

Scrivendo ora

$$n_\mu P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{(\dot{X}\cdot X')\partial_\tau(n_\mu X^\mu) - (\dot{X})^2\partial_\sigma(n_\mu X^\mu)}{\sqrt{(\dot{X}\cdot X')^2 - (\dot{X})^2(X')^2}} \tag{4.19}$$

si può verificare che il primo termine a numeratore si annulla grazie alla (4.18) e che anche il secondo termine vale 0 dato che

$$\partial_\sigma(n_\mu X^\mu) = \partial_\sigma(\alpha'\, n_\mu\, p^\mu\, \tau) = 0\,. \tag{4.20}$$

Perciò, anche per le stringhe chiuse, $n_\mu P^{\sigma\mu}$ si annulla in tutto il foglio di Universo.

La parametrizzazione ottenuta si può riassumere quindi, in modo generale, tramite le seguenti definizioni dei due parametri:

$$n_\mu X^\mu(\tau,\sigma) = \beta\alpha'(n_\mu\, p^\mu)\tau \tag{4.21}$$

$$(n_\mu\, p^\mu)\sigma = \frac{2\pi}{\beta}\int_0^\sigma n_\mu P^{\tau\mu}(\tau,\widetilde{\sigma})d\widetilde{\sigma} \tag{4.22}$$

con β che assume il valore 2 per stringhe aperte ed il valore 1 per stringhe chiuse. È utile notare, inoltre, che vale la relazione

$$n_\mu\, p^\mu = \frac{2\pi}{\beta} n_\mu P^{\tau\mu}\,. \tag{4.23}$$

4.2 Equazioni del moto

La parametrizzazione del foglio di Universo descritta nella Sezione precedente, e riassunta nelle equazioni (4.21) e (4.22), porta immediatamente a dei vincoli sulle grandezze $\dot{X}^\mu$ e X'^μ.

L'equazione (4.18) che è stata, di fatto, imposta per le stringhe chiuse, mantiene la sua validità anche nel caso di stringhe aperte. Infatti, considerando l'equazione (4.19) e osservando che $\partial_\sigma(n_\mu X^\mu) = 0$ e che $\partial_\tau(n_\mu X^\mu) \neq 0$, il fatto che il prodotto $n_\mu P^{\sigma\mu}$ sia sempre nullo implica proprio quella condizione.

Un'altra relazione si ottiene prendendo invece in esame la definizione (2.43) e imponendo l'equazione (4.18) appena dimostrata, da cui si ottiene:

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\frac{X'\dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}X'}}\,. \tag{4.24}$$

Combinando quest'ultima con l'equazione (4.23) e con la relazione

$$n_\mu \dot{X}^\mu = \beta\alpha'(n_\mu\, p^\mu) \tag{4.25}$$

che segue direttamente dalla (4.21), si ottiene infine

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0\,. \tag{4.26}$$

I risultati ottenuti, frutto della parametrizzazione scelta, portano ad una notevole semplificazione delle grandezze $P^{\tau\mu}$ e $P^{\sigma\mu}$ e, conseguentemente, delle equazioni del moto. Imponendo i vincoli (4.18) e (4.26) si ottengono infatti:

$$P^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'}\dot{X}^\mu \tag{4.27}$$

e

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X'^\mu\,. \tag{4.28}$$

Le equazioni del moto (2.49) si semplificano quindi nell'equazione

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0 \tag{4.29}$$

dove il doppio punto e il doppio apice rappresentano la doppia derivazione rispetto a τ e σ. L'equazione (4.29), che come al solito corrisponde a quattro equazioni scalari, una per ogni valore assunto dall'indice μ, è un'equazione d'onda. Essa vale per qualunque valore di β e perciò non cambia tra stringhe chiuse e stringhe aperte; tuttavia, in quest'ultimo caso, bisogna aggiungere la condizione di estremi liberi (2.47), necessaria per ottenere l'equazione d'onda.

4.3 Soluzioni per stringhe aperte con estremi liberi

Si può trovare in modo diretto, nel caso di stringhe aperte con estremi liberi, una soluzione esplicita dell'equazione del moto. L'equazione (4.29) ha infatti come soluzione generica

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left(f^\mu(\tau+\sigma) + g^\mu(\tau-\sigma)\right) \tag{4.30}$$

dove $f^\mu(u)$ e $g^\mu(u)$ sono funzioni arbitrarie di una sola variabile. Avendo considerato una stringa aperta con condizioni di estremi liberi, bisogna imporre la condizione

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}(\tau,\sigma=0) = \frac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}(\tau,\sigma=\pi) = 0\,. \tag{4.31}$$

Si ottiene, con $\sigma = 0$, l'equazione

$$\frac{1}{2}\left(f'^\mu(\tau) - g'^\mu(\tau)\right) = 0 \tag{4.32}$$

che ci dice che le derivate delle funzioni f e g coincidono; ciò porta al fatto che f e g possono differire solo di una costante c^μ. Ridefinendo la funzione f (che è arbitraria) in una nuova funzione F come

$$F^\mu = f^\mu + \frac{c^\mu}{2} \tag{4.33}$$

la soluzione si semplifica in

$$X^\mu(\tau,\sigma) = \frac{1}{2}\left(F^\mu(\tau+\sigma) + F^\mu(\tau-\sigma)\right) . \tag{4.34}$$

Quando $\sigma = \pi$, invece, la condizione (4.31) diventa

$$\frac{1}{2}\left(F'^\mu(\tau+\pi) - F'^\mu(\tau-\pi)\right) = 0 \tag{4.35}$$

che indica che F'^μ è una funzione periodica di periodo 2π. Il periodo particolarmente conveniente è conseguenza diretta della scelta del range del parametro σ nella parametrizzazione scelta. Questa periodicità può essere sfruttata per espandere la F'^μ in serie di Fourier; si ottiene così:

$$F'^\mu(u) = F_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^\mu \cos(nu) + b_n^\mu \sin(nu)\right) , \tag{4.36}$$

dove F_1^μ, a_n^μ e b_n^μ sono costanti. Per ottenere la F^μ basta trovare una primitiva della (4.36), cioè:

$$F^\mu(u) = F_0^\mu + F_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^\mu \cos(nu) + B_n^\mu \sin(nu)\right) , \tag{4.37}$$

dove F_0^μ, A_n^μ e B_n^μ sono nuove costanti, che hanno assorbito quelle di integrazione. Sostituendo il risultato ottenuto nell'equazione (4.34) e manipolando le funzioni trigonometriche si ricava quindi

$$X^\mu(\tau,\sigma) = F_0^\mu + F_1^\mu \tau + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)\right)\cos(n\sigma)\right] . \tag{4.38}$$

Questo risultato si può scrivere in modo più conveniente. Infatti, passando al campo complesso e utilizzando la formula di Eulero per poter scrivere

$$\begin{aligned} \cos(n\tau) &= \frac{e^{in\tau} + e^{-in\tau}}{2} \\ \sin(n\tau) &= \frac{e^{in\tau} - e^{-in\tau}}{2i} , \end{aligned} \tag{4.39}$$

risulta comodo definire le costanti

$$\begin{aligned} a_n^\mu &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha'}}\frac{1}{2}\left(B_n^\mu - iA_n^\mu\right) \\ a_n^{\mu*} &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\alpha'}}\frac{1}{2}\left(B_n^\mu + iA_n^\mu\right) \end{aligned} \tag{4.40}$$

dove l'asterisco denota la coniugazione complessa. In questo modo si ottiene l'uguaglianza

$$A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = -i\frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}\left(a_n^{\mu*}e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}\right) . \tag{4.41}$$

Si può cercare inoltre l'espressione che assume l'integrale del moto p^μ in questo caso. Esso è dato per definizione da

$$p^\mu = \int_0^\pi P^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'}\int_0^\pi \dot{X}^\mu d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'}F_1^\mu \pi = \frac{F_1^\mu}{2\alpha'} , \tag{4.42}$$

dove sono stati utilizzati la definizione (4.27) di $P^{\tau\mu}$, l'equazione (4.38) e il fatto che i termini con $\cos(n\sigma)$ abbiano integrale nullo tra 0 e π. Si ricava quindi

$$F_1^\mu = 2\alpha' p^\mu . \tag{4.43}$$

Definendo infine $x_0^\mu := F_0^\mu$ e sostituendo le espressioni appena ricavate si giunge all'equazione:

$$X^\mu(\tau,\sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n^{\mu*}e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}\right)\frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}\right] . \tag{4.44}$$

In quest'ultima espressione, il primo termine rappresenta uno 'shift' spazio-temporale della stringa, il secondo rappresenta il momento della stringa mentre la sommatoria contiene i *modi normali di vibrazione*, etichettati dal numero n. Quando in Teoria delle Stringhe si inizia ad entrare nell'ambito della Meccanica Quantistica, le costanti $a_n^{\mu*}$ e a_n^μ diventano gli *operatori di creazione e distruzione.*

A questo punto il moto della stringa è determinato univocamente dalle costanti x_0^μ, p^μ e a_n^μ. Non tutte le loro combinazioni sono però accettabili; esse devono infatti necessariamente soddisfare i vincoli dati dalle equazioni (4.18) e (4.26).

4.4 Stringa rotante in un piano

Una semplice applicazione dei risultati ottenuti è la trattazione di una stringa aperta che ruota rigidamente su sé stessa nel piano xy di un certo sistema di riferimento, attorno all'asse z. Per descrivere matematicamente questo sistema si può imporre:

$$\begin{cases} x_0^\mu = (0,0,0,0) \\ p^\mu = \left(\frac{A}{2\sqrt{\alpha'}},0,0,0\right) \\ a_1^\mu = \left(0,\frac{iA}{2\sqrt{2}},\frac{A}{2\sqrt{2}},0\right) \\ a_n^\mu = (0,0,0,0) \qquad \text{per } n>1\,, \end{cases} \tag{4.45}$$

dove A è una costante reale adimensionale. Così facendo, tramite la (4.44), si ottengono le soluzioni:

$$\begin{cases} X^0(\tau,\sigma) = A\sqrt{\alpha'}\tau \\ X^1(\tau,\sigma) = A\sqrt{\alpha'}\cos(\sigma)\cos(\tau) \\ X^2(\tau,\sigma) = A\sqrt{\alpha'}\cos(\sigma)\sin(\tau) \\ X^3(\tau,\sigma) = 0 \end{cases} \tag{4.46}$$

Risulta chiaro che queste equazioni rappresentano proprio la rotazione della stringa nel piano. Infatti, considerando il moto dei due estremi, si hanno:

$$\begin{cases} X^1(\tau,\sigma=0) = A\sqrt{\alpha'}\cos(\tau) \\ X^2(\tau,\sigma=0) = A\sqrt{\alpha'}\sin(\tau) \end{cases} \tag{4.47}$$

e

$$\begin{cases} X^1(\tau,\sigma=\pi) = -A\sqrt{\alpha'}\cos(\tau) \\ X^2(\tau,\sigma=\pi) = -A\sqrt{\alpha'}\sin(\tau) \end{cases} \tag{4.48}$$

che rappresentano moti circolari uniformi attorno all'origine, rispettivamente in senso antiorario ed orario. In questo esempio la stringa ha lunghezza $l = 2A\sqrt{\alpha'}$.

Si possono calcolare esplicitamente $\dot{X}^\mu$ e X'^μ:

$$\dot{X}^\mu = \left(A\sqrt{\alpha'}, -A\sqrt{\alpha'}\cos(\sigma)\sin(\tau), A\sqrt{\alpha'}\cos(\sigma)\cos(\tau), 0\right)\,, \tag{4.49}$$

$$X'^{\mu} = \Big(0, -A\sqrt{\alpha'}\sin(\sigma)\cos(\tau), -A\sqrt{\alpha'}\sin(\sigma)\sin(\tau), 0\Big) \,. \tag{4.50}$$

Da queste espressioni si può verificare che i valori delle costanti definite nelle equazioni (4.45) sono consistenti con i vincoli (4.18) e (4.26).

Calcolando inoltre $P^{\sigma\mu}$, si può verificare che le condizioni di estremi liberi sono rispettate. Infatti

$$P^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}X'^{\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'}\Big(0, -A\sqrt{\alpha'}\sin(\sigma)\cos(\tau), -A\sqrt{\alpha'}\sin(\sigma)\sin(\tau), 0\Big) \tag{4.51}$$

e perciò

$$P^{\sigma\mu}\Big|_{\sigma=0} = P^{\sigma\mu}\Big|_{\sigma=\pi} = (0,0,0,0)\,. \tag{4.52}$$

Può essere interessante calcolare gli integrali del moto M_{12}, M_{23} ed M_{31}, che rappresentano i momenti angolari della stringa. Utilizzando la formula (3.35) e la (4.27) per il calcolo di $P^{\tau\mu}$ si ottiene

$$\begin{aligned} M_{12} = \int_0^{\pi} \widetilde{M}^{\tau}_{12} d\sigma = \int_0^{\pi} \left(X_1 P^{\tau}_2 - X_2 P^{\tau}_1\right) d\sigma = \\ = \frac{A^2\alpha'}{2\pi\alpha'}\int_0^{\pi} \big[\cos(\sigma)\cos(\tau)\cos(\sigma)\cos(\tau) - \cos(\sigma)\sin(\tau)\cos(\sigma)\sin(\tau)\big] d\sigma = \\ = \frac{A^2\cos(\tau)^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(\sigma)^2 d\sigma + \frac{A^2\sin(\tau)^2}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos(\sigma)^2 d\sigma = \frac{A^2}{4} \end{aligned} \tag{4.53}$$

che rappresenta la componente del momento angolare lungo l'asse z. Le due componenti lungo gli assi x e y, cioè M_{23} e M_{31}, sono invece nulle, grazie al fatto che la componente X_3 è identicamente nulla.

Tutte le grandezze calcolate nella precedente trattazione dipendono, oltre che dal parametro di slope α', dal valore della costante A. È interessante notare che esiste invece una grandezza indipendente da questi parametri. Considerando infatti la velocità angolare della stringa che, dato che il periodo è $A\sqrt{\alpha'}\,2\pi$, risulta essere

$$\omega = \frac{2\pi}{A\sqrt{\alpha'}2\pi} = \frac{1}{A\sqrt{\alpha'}}\,. \tag{4.54}$$

La velocità angolare e la lunghezza della stringa non sono, perciò, indipendenti l'una dall'altra. Grazie a questo fatto, la velocità degli estremi della stringa deve necessariamente essere

$$v_e = \omega\frac{l}{2} = \frac{1}{A\sqrt{\alpha'}}A\sqrt{\alpha'} = 1\,. \tag{4.55}$$

Ricordando che si stanno effettuando i calcoli in unità di misura naturali, si conclude che la velocità degli estremi della stringa è perciò uguale alla velocità della luce nel vuoto, indipendentemente dai valori di α' ed A. Questo risultato, se pur ottenuto in un caso particolare, è di validità generale.

Bibliografia

[1] Zwiebach B. , *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

[2] Landau L. D. , Lifsits E. M. , *Fisica Teorica 1 - Meccanica*, Editori Riuniti, Roma, Italia, 1976.

[3] Goldstein H. , *Meccanica Classica*, Zanichelli, Bologna, Italia, 1950.

[4] Mazzoldi P. , Nigro M. , Voci C. , *Fisica - Volume II - Elettromagnetismo-Onde*, EdiSES, Napoli, Italia, 1991.

[5] Christodoulides C. , *The Special Theory of Relativity*, Springer, 2016.