

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Classe L-9

Tesi finale di laurea in
Termofluidodinamica applicata

OTTIMIZZAZIONE DELLE PRESTAZIONI
TERMO-IDRAULICHE DI MICROCANALI A SEZIONE
RETTANGOLARE ATTRAVERSATI DA UN
FLUSSO GASSOSO

Relatore:
Prof. Marco Lorenzini
Correlatore:
Nicola Suzzi

Presentata da:
Filippo Melini

Sessione II
Anno Accademico 2019-2020

Indice

Introduzione	1
1 I microcanali	2
1.1 Generalità sui microcanali	2
1.2 Materiali e tecniche di fabbricazione dei microcanali	4
2 Convezione forzata di un flusso monofase liquido in un canale	6
2.1 Equazione del moto	6
2.2 Equazione dell'energia	8
2.2.1 Condizioni al contorno termico	10
2.2.2 Adimensionalizzazione equazione dell'energia	12
2.3 Numero di Poiseuille	14
2.4 Numero di Nusselt	15
3 Convezione forzata di un gas in un microcanale	16
3.1 Rarefazione ed effetti a parete nei microflussi	16
3.1.1 Ipotesi di continuità ed equilibrio termodinamico	17
3.1.2 Numero di Knudsen e rarefazione	19
3.1.3 Effetti a parete	20
3.2 Regimi dei flussi gassosi nei microcanali	20
3.2.1 Regime di flusso continuo	21
3.2.2 Condizioni al contorno e regime di flusso di scorrimento	22
3.2.3 Equazioni NS, QGD e QHD per flusso continuo	23
3.2.4 Condizioni di scorrimento al contorno di primo ordine	24
3.2.5 Condizioni di scorrimento al contorno di ordine superiore	28
3.3 Flusso di transizione e flusso molecolare libero	28
4 Performance Evaluation Criteria	29
4.1 Geometria rettangolare	30
4.2 Realzioni operative per le funzioni obiettivo	32

5	Ottimizzazione della geometria di un microcanale a sezione rettangolare attraversato da un flusso gassoso	35
5.1	Intervallo esaminato di Kn	36
5.2	Andamenti dei numeri di Nu e fRe	38
5.2.1	Caso $\beta = 1$	38
5.2.2	Caso $\beta = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$	39
5.3	Relazioni operative e condizioni di riferimento	40
5.4	Campi di temperatura e velocità	42
5.5	Criteri PEC esaminati	45
5.5.1	Criterio FG1a	45
5.5.2	Criterio FG1b	49
5.5.3	Criterio FG2a	52
5.5.4	Criterio FG2b	52
5.5.5	Criterio FN1	52
5.5.6	Criterio FN2	53
5.5.7	Criterio FN3	53
5.5.8	Criterio VG2a	59
5.5.9	Criterio VG2b	64
5.6	Conclusioni e sviluppi futuri	65
	Appendice	66
	Bibliografia	81

Elenco delle figure

2.1	Canale cilindrico	7
2.2	Tratto di canale con conduzione a parete	10
3.1	Microcanale e dimensioni caratteristiche	17
3.2	Dimensioni del volume campione	18
3.3	Modelli risolutivi e intervalli di applicabilità per flussi gassosi .	20
3.4	(A) Riflessione speculare della molecola; (B) Riflessione diffusa	25
4.1	Geometria sezione rettangolare	30
5.1	Andamento di $Nu _{R_c=0, \beta=1}(Kn)$ e $fRe _{R_c=0, \beta=1}(Kn)$	37
5.2	Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 1$	39
5.3	Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.5$	39
5.4	Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.25$	40
5.5	Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.1$	40
5.6	Geometria del canale e campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 1$ e $Kn = 0.1$	42
5.7	Campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 1$ e $Kn = 0.45$	43
5.8	Geometria del canale e campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 0.25$ e $Kn = 0.1$	44
5.9	Campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 0.25$ e $Kn = 0.45$	44
5.10	Funzione obiettivo criterio FG1a, $\beta = 1$	46
5.11	Funzione obiettivo criterio FG1a, $\beta = 0.5$	47
5.12	Funzione obiettivo, criterio FG1a per $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$	48
5.13	Funzione obiettivo criterio FG1b, $\beta = 1$	49
5.14	Funzione obiettivo criterio FG1b, $\beta = 0.5$	50
5.15	Funzione obiettivo, criterio FG1b per $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$	51
5.16	Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 1$ e vari valori di Knudsen	54

5.17	Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.5$ e vari valori di Knudsen	56
5.18	Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.25$ e vari valori di Knudsen	57
5.19	Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.1$ e vari valori di Knudsen	58
5.20	Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 1$ e vari valori di Knudsen	60
5.21	Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.5$ e vari valori di Knudsen	61
5.22	Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.25$ e vari valori di Knudsen	62
5.23	Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.1$ e vari valori di Knudsen	63

Elenco delle tabelle

2.1	Condizioni al contorno termiche	11
4.1	Restrizioni geometriche applicabili	32
4.2	Performance Evaluation Criteria	34

Introduzione

Nel seguente elaborato, viene affrontato uno studio rivolto all'ottimizzazione geometrica dei microcanali che costituiscono un micro dissipatore di calore. Per giungere a tale scopo si forniranno delle relazioni operative e dei grafici, direttamente utilizzabili per la progettazione dei suddetti microcanali.

Dopo una prima parte di carattere più generale e descrittiva dei microcanali e micro dissipatori, ne seguirà una dedicata all'analisi matematica e fisica del problema (con particolare attenzione posta alla rarefazione del flusso gassoso) e poi un'ultima dedicata all'analisi propria del caso esaminato, legata ai Performance Evaluation Criteria (PEC).

Infine, è sembrato opportuno concludere con un'appendice piuttosto ricca e ben fornita, in modo tale da dare una buona conoscenza e tutt'altro che generale sui codici Matlab utilizzati nell'elaborato. Scelta molto cara allo scrivente poiché, per niente pratico con il suddetto software, spera di poter lasciare una traccia (seppur minima) ai futuri avventurieri che si incespicheranno con problemi simili o comunque collegati ai microcanali.

Si procede ora con l'elaborato vero e proprio.

Capitolo 1

I microcanali

1.1 Generalità sui microcanali

Dopo lo sviluppo della microelettronica a partire dagli anni cinquanta del Novecento e della microfluidica, ovvero quel campo di ricerca proprio della fluidodinamica che si preoccupa di trattare volumi di fluido estremamente piccoli (nell'ordine dei picolitri), l'evoluzione dei *microcanali* è stata la naturale conseguenza. Essi infatti sono gli elementi costituenti dei dissipatori di calore a microcanali (appartenenti alla categoria dei cosiddetti MFC: Micro-Flow Devices), che al giorno d'oggi rappresentano un mezzo molto importante per rispondere alle esigenze sempre maggiori di dissipazione del calore nei dispositivi a scala micrometrica: infatti in soli vent'anni si è passati dai $15W$ agli anche $80W$ di potenza elettrica dei chip, con conseguente produzione di potenza termica per effetto Joule e quindi da smaltire con dissipatori a microcanali per mantenere le temperature di esercizio accettabili.

In generale, nei microdissipatori per componenti elettronici, può scorrere sia un *flusso monofase* (liquido o gassoso) che uno *bifase*. La convezione di un fluido bifase nei microcanali permette, infatti, un aumento considerevole del coefficiente di scambio termico, soprattutto se paragonato al caso di convezione di un flusso d'aria. Un'applicazione molto importante è il raffreddamento dei laser a diodi ad alta densità di potenza, in cui viene richiesto lo smaltimento di un flusso termico di circa $500W/cm^2$. Tematica non banale è la movimentazione del fluido all'interno dei microcanali, dovuta principalmente all'utilizzo di pompe di dimensioni adatte (dunque anch'esse *micro*) e alla possibilità di applicare o meno le considerazioni fisiche classiche dei canali macroscopici.

Tra gli aspetti indagati ci sono gli effetti di rarefazione, considerati con il

numero di Knudsen (Kn):

$$Kn = \lambda/D_h$$

Dove λ è il *cammino medio delle molecole* e D_h il *diametro idraulico del microcanale*.

In particolare, si è visto che le *equazioni del continuo* valgono per $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$ (valori che sono propri dei flussi gassosi in microcanali), a patto di modificare le condizioni al contorno facendo cadere l'ipotesi di aderenza a parete. Mentre per $Kn > 0.1$ le equazioni classiche non valgono più e devono essere analizzate le *interazioni molecolari*, non essendo λ più trascurabile rispetto al flusso macroscopico del fluido. Oltre a tutto ciò sono anche da considerare effetti che, alle scale micrometriche, potrebbero avere effetti non trascurabili, come: variabilità della *rugosità delle superfici*, *dissipazione viscosa*, *conduzione assiale* (numero di *Peclet* basso) e *proprietà termofisiche* dipendenti dalla temperatura.

Sebbene Palm nel 2000 diede la definizione di microcanale come «*quell'elemento di scambio termico dove la teoria classica (equazioni del continuo) non permette di prevedere correttamente il fattore di attrito ed il coefficiente di scambio termico*», in letteratura si utilizzano classificazioni legate alle dimensioni dei canali. In particolare, ci si riferisce di sovente alle definizioni di Kandlikar e Grande (del 2003):

- Canali convenzionali: $D_h > 3mm$
- Microcanali: $200\mu m < D_h < 3mm$
- Minicanali: $10\mu m < D_h < 200\mu m$

O a quelle di Mehendale (del 2000):

- Passaggi convenzionali: $D_h > 6mm$
- Passaggi compatti: $1mm < D_h < 6mm$
- Mesocanali: $100\mu m < D_h < 1mm$
- Microcanali: $1\mu m < D_h < 100\mu m$

Con D_h il *diametro idraulico* o la *dimensione caratteristica più piccola*.

1.2 Materiali e tecniche di fabbricazione dei microcanali

Sebbene l'ambito di dissipazione del calore in elettronica sia sicuramente quello più sviluppato, i microcanali sono usati anche in campi come la biomedica, la chimica e applicazioni meccaniche in generale: perciò è fondamentale garantire una diversa gamma di materiali per ogni esigenza. Tali materiali sono divisibili in *tre* categorie principali:

- *Substrati polimerici e di vetro*: il polimetilmetacrilato (PMMA) e il polidimetilsilossano (PDMS) sono senza dubbio i materiali polimerici più utilizzati. Il PMMA è trasparente e garantisce un'ottima biocompatibilità e, possedendo un'elevata densità, è molto facile da lavorare con processi laser. Il PDMS ha un ottimo vantaggio in termini economici e presenta una buona affinità biologica. Tutti i materiali polimerici presentano un'elevata resistenza chimica e ottime proprietà ottiche, oltre che una bassa rugosità superficiale. Il vetro, invece, ha costi di produzione molto elevati e processi non convenzionali, ma diviene indispensabile in tutte le applicazioni che richiedono un materiale inerte e resistente alle alte temperature;
- *Substrati metallici*: usati prevalentemente per il raffreddamento di dispositivi elettronici e meccanici, presentano un'eccellente resistenza alle temperature elevate (l'alluminio di nichel *NiAl* consente di operare anche a temperature nell'ordine dei 650 °C, facilmente raggiungibili in dispositivi atti al recupero di calore). Per temperature più comuni (150 °C), è solito l'uso di metalli più tradizionali, come acciaio e alluminio, che presentano una bassa resistenza termica ed elevate capacità dissipative (anche 1000W/cm² per il fosforo di indio e l'alluminio) e una facile lavorabilità e reperibilità;
- *Semiconduttori, ceramici e compositi*: Il silicio è stato tra i primi materiali usati per la produzione dei microcanali integrati nei circuiti elettrici e attualmente viene impiegato per il raffreddamento delle celle a combustibile. Anche il quarzo viene spesso sfruttato per la sua economicità, trasparenza e inerzia chimica. Nei sopracitati diodi laser vengono usati microdissipatori con microcanali di nitruro di gallio *GaN*. Materiali ceramici e compositi sono tutt'oggi estremamente studiati per la loro semplicità di essere usati nei dispositivi microfluidici 3D, sebbene abbiano costi di scarso interesse industriale.

Così come i materiali, anche il modo di fabbricazione è molto diversificato per venire incontro alle esigenze dimensionali e produttive. I metodi di fabbricazione standard dei microcanali sono suddivisibili in *due* gruppi:

- *Tecnologie convenzionali:*
 - micro-deformazione;
 - micro-segatura;
 - micro-fresatura.

- *Tecnologie moderne:*
 - MEMS (Micro-Electro Mechanical System);
 - microlavorazione laser;
 - elettroerosione;
 - micro-stampaggio.

Le tecnologie tradizionali permettono la creazione di canali a sezione rettangolare con diametro compreso tra $0.1mm$ e $1mm$. In particolare la *micro-segatura* è un processo molto usato, vista l'elevata produttività ed i bassi costi.

Per quanto riguarda i metodi produttivi moderni, la *microlavorazione laser* consente un'ottima precisione dimensionale e libertà di forma (con diametri nell'ordine dei nm), però con costi elevati e bassa produttività. La DRIE (Deep Reactive Ion Etching), ovvero l'*incisione fotochimica*, è di gran lunga la più usata e permette la generazione di canali rettangolari, circolari, trapezoidali o triangolari con dimensioni che variano dai millimetri ai nanometri. È inoltre applicabile a materiali metallici, silicio e vetro.

Capitolo 2

Convezione forzata di un flusso monofase liquido in un canale

Com'è noto, la *convezione forzata*, sia per scale micro che macro, comporta un aumento del coefficiente di scambio termico, proporzionale indicativamente all'inverso del diametro idraulico D_h . Questa, però, causa anche un inevitabile aumento del *fattore d'attrito*, con conseguenti inefficienze legate principalmente alla potenza di pompaggio del fluido all'interno del micro-canale. Inoltre, anche il *numero di Reynolds* (Re) risulterà molto piccolo a causa del ridotto D_h e della conseguente facilità con cui si instaura un regime di *moto laminare*.

In questo capitolo verranno introdotti i principi e le formulazioni base che definiscono la convezione di un flusso monofase in un canale, ovvero le fondamenta di carattere matematico su cui si basano le altre affermazioni presenti all'interno dell'elaborato.

2.1 Equazione del moto

Si parte considerando l'equazione di Navier-Stokes nella sua forma più generale:

$$\rho \frac{D\bar{v}}{Dt} = -\nabla p - \nabla \cdot \bar{\tau} + \rho \bar{g} \quad (2.1)$$

Ora sono da introdursi delle *ipotesi semplificative*:

- regime di moto laminare;
- condotto cilindrico (figura 2.1) con pareti rigide e non porose, da cui si ricava che l'unica componente di velocità del fluido è quella assiale: $\bar{v} = (u, 0, 0)$;

- flusso idrodinamicamente sviluppato, da cui si ricava che il profilo di velocità non dipende dalla coordinata assiale:
 $u = u(y, z)$;
- fenomeni di trasporto bidimensionali e stazionari, da cui si ricava:
 $\partial/\partial t = 0$;
- azioni di volume trascurabili: $\rho \bar{g} = 0$ (in pratica, si trascura la convezione naturale);
- fluido incomprimibile: $\rho(x, y, z, t) = cost$;
- fluido Newtoniano, che abbinato all'ipotesi di fluido incomprimibile, permette di esprimere il tensore degli sforzi come: $\bar{\tau} = -\mu \nabla \bar{v}$;
- proprietà termofisiche del fluido costanti e indipendenti dalla temperatura, da cui $\mu = cost$;

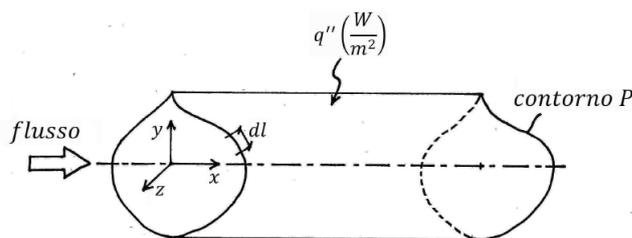


Figura 2.1: Canale cilindrico

Applicando inoltre l'equazione di continuità:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\rho \bar{p}) = 0 \quad (2.2)$$

l'equazione di Navier-Stokes, ovvero la 2.1, si riduce all'equazione scalare:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = cost \quad (2.3)$$

Il termine $\partial p/\partial x$, costante poiché il flusso è *idrodinamicamente sviluppato*, rappresenta la caduta di pressione per unità di lunghezza del canale ed è direttamente legato agli sforzi di taglio esercitati dalle pareti del canale sul fluido se non ci sono forze esterne.

L'equazione 2.3 appena ottenuta è esprimibile anche con coordinate cartesiane (x, y, z) , assumendo la forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = cost \quad (2.4)$$

L'equazione di Navier-Stokes semplificata 2.3 viene spesso utilizzata nella sua forma adimensionalizzata; in particolare, se ci riferiamo alla sua forma cartesiana 2.4, dobbiamo introdurre le seguenti grandezze adimensionali:

$$u^* = \frac{u}{u_m}, \text{ dove } u_m = \frac{1}{A_c} \int_{A_c} u \cdot dA_c$$

$$\xi = \frac{x}{D_h}, \quad \eta = \frac{y}{D_h}, \quad \zeta = \frac{z}{D_h} \Rightarrow \nabla = \frac{\nabla^*}{D_h}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{D_h} \frac{\partial}{\partial \xi}$$

$$p^* = \frac{D_h^2}{\mu u_m} \frac{\partial p}{\partial x}$$

L'equazione 2.3 allora può essere riespressa in termini adimensionali come:

$$\nabla^{*2} u^* = \frac{D_h^2}{\mu u_m} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.5)$$

ovvero:

$$\nabla^{*2} u^* = p^* \quad (2.6)$$

Per risolvere l'equazione differenziale del moto è necessario inoltre definire le *condizioni al contorno*, che nel caso di regime di flusso continuo (cioè con numero di Knudsen molto basso), sono le classiche condizioni che esprimono la continuità della velocità tra la parete ed il flusso, ovvero aderenza del fluido a parete, quindi:

$$u|_{wall=0} = 0 \Rightarrow u^*|_{wall=0} = 0.$$

Il caso in cui il regime di flusso non sia continuo, quindi non sia più possibile trascurare l'effetto dello strato di Knudsen, verrà esaminato nel dettaglio in un capitolo a parte.

2.2 Equazione dell'energia

Nella sua forma più generale è possibile esprimere l'equazione dell'energia come:

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = -\nabla \cdot \bar{q} - \bar{\tau} : \nabla \bar{v} - G + \frac{Dp}{Dt} \quad (2.7)$$

Dove i termini G e \bar{q} indicano l'eventuale presenza di *sorgenti termiche* e il *flusso di calore*, rispettivamente.

Aggiungendo le seguenti ipotesi a quelle già fatte per l'equazione del moto è possibile semplificare l'equazione dell'energia 2.7:

- flusso termicamente sviluppato, ovvero il profilo di temperatura adimensionalizzato rispetto a $T_m - T_w$ diventa assialmente uniforme: $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{T - T_w}{T_m - T_w} \right] = 0$;
- fluido monofase;
- assenza di diffusione di massa;
- assenza di reazioni chimiche del fluido;
- assenza di effetti elettromagnetici;
- assenza di sorgenti di energia termica interne al flusso;
- proprietà termofisiche costanti, da cui $\mu, c_p, k = \text{cost.}$

Sotto le ipotesi di *fluido Newtoniano* e *proprietà termofisiche costanti*, già introdotte per scrivere l'equazione del moto, il termine $\bar{\tau} : \nabla \bar{v}$ è riscrivibile come:

$$\bar{\tau} = -\mu \nabla \bar{v} \Rightarrow \bar{\tau} : \nabla \bar{v} = -\mu \nabla \bar{v} : \nabla \bar{v}$$

Il flusso di calore \bar{q} (W/m^2) è esprimibile tramite la *legge di Fourier*:

$$\bar{q} = -k \nabla T$$

L'equazione 2.7, per il problema di convezione appena definito, diviene:

$$\nabla^2 T = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mu}{k} [\nabla u \cdot \nabla u] \quad (2.8)$$

Il termine $\frac{\mu}{k} [\nabla u \cdot \nabla u]$ si riferisce agli *effetti di dissipazione viscosa*, ovvero all'aumento locale della temperatura del fluido a causa dell'attrito. Sotto l'ulteriore ipotesi di poter trascurare gli effetti di dissipazione viscosa, l'equazione dell'energia si semplifica ulteriormente: la 2.8 prende allora la forma:

$$\nabla^2 T = \frac{u}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.9)$$

Ponendosi in coordinate cartesiane (x, y, z) , l'equazione dell'energia nella forma 2.9 diventa:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{u(y, z)}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.10)$$

Si noti che, valendo l'ipotesi di flusso idrodinamicamente sviluppato, il profilo di velocità u è esprimibile come $u(y, z)$.

2.2.1 Condizioni al contorno termico

Nella tabella 2.1 si specificano le possibili condizioni al contorno applicabili ad un flusso che sia *completamente sviluppato*. Tali condizioni valgono per l'interfaccia fluido-parete, dunque si considera implicitamente che la parete abbia spessore uniforme e , esclusa la condizione H3, vengono trascurati gli effetti di conduzione assiale e perimetrale.

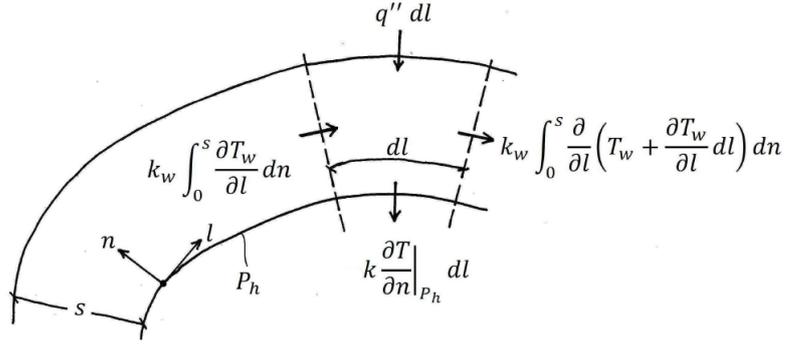


Figura 2.2: Tratto di canale con conduzione a parete

Poiché nella seguente trattazione verranno analizzate le condizioni di tipo H , si può effettuare un bilancio di energia da applicare ad un tratto infinitesimo di parete del canale le cui pareti siano soggette a conduzione (fig. 2.2).

Si ottiene la formulazione analitica della conduzione al contorno:

$$q_w'' dl = k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{P_h} dl - k_w \int_0^s \frac{\partial T_w}{\partial l} dn + k_w \int_0^s \frac{\partial}{\partial l} \left(T_w - \frac{\partial T_w}{\partial l} dl \right) dn$$

dove k è la *conducibilità termica del fluido*, k_w è la *conducibilità termica della parete* e P_h indica il *perimetro scaldato* che bagna il fluido nel canale. Svolgendo i calcoli:

$$q_w'' = k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{P_h} - k_w \int_0^s \frac{\partial^2 T_w}{\partial l^2} dn = k \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{P_h} - k_w \frac{\partial^2}{\partial l^2} \int_0^s T_w dn$$

Si può riesprimere il termine $\int_0^s T_w dn$, che è una sorta di flusso di temperatura, attraverso lo spessore della parete:

$$\int_0^s T_w dn \simeq T \Big|_{P_h} \cdot s$$

T	Temperatura di parete costante e uniforme in tutto il canale	$T _w(x, y, z) = cost$
H1	Flusso di calore lineico costante in direzione assiale x del canale e temperatura costante sul perimetro scaldato	$q'_w = \dot{m}c_p \frac{dT_m}{dx} = cost$ $T _w(y, z) = cost$
H2	Flusso di calore costante in tutto il canale	$q'_w = \dot{m}c_p \frac{dT_m}{dx} = cost$ $q''_w = k \frac{\partial T}{\partial n} _{w=0} = cost$
H3	Flusso di calore lineico costante in direzione assiale x del canale e conduzione attraverso la parete del canale	$q'_w = \dot{m}c_p \frac{dT_m}{dx} = cost$ $\frac{q''_w D_h}{k} - \frac{\partial T}{\partial n^*} _{w=0} + K_p \frac{\partial^2 T}{\partial l^{*2}} _{w=0} = 0$
H4	Flusso di calore lineico in direzione assiale x di tipo esponenziale e temperatura costante sul perimetro scaldato	$q'_w(x) = qe^{\lambda x/D_h}$ $T _w(y, z) = cost$
R1	Resistenza termica a parete finita	$q''_w = k \frac{\partial T}{\partial n} _{w=0} = U_w(T_{amb} - T_w)$ $T _w(y, z) = cost$
R2	Condizione al contorno di irraggiamento	$q''_w = k \frac{\partial T}{\partial n} _{w=0} = \epsilon_w \sigma T_w^4$ $T _w(y, z) = cost$

Tabella 2.1: Condizioni al contorno termiche

Sostituendo all'equazione di bilancio e introducendo le grandezze adimensionali n^* , l^* e K_p , si riesce ad esprimere la condizione al contorno H3 come in tabella 2.1:

$$\frac{q_w'' D_h}{k} - \frac{\partial T}{\partial n^*} \Big|_w + K_p \frac{\partial^2 T}{\partial l^{*2}} \Big|_w = 0$$

dove:

$$n^* = \frac{n}{D_h}, \quad l^* = \frac{l}{D_h}, \quad K_p = \frac{k_w s}{k D_h}$$

Il coefficiente adimensionale K_p è il *parametro di conduzione periferica a parete*.

Tale condizione è applicabile quando si ha riscaldamento con resistenze elettriche oppure a scambiatori in controcorrente bilanciati. Si noti che le condizioni H1 e H2 possono essere viste come casi particolare della H3, con rispettivamente $K_p = \infty$ e $K_p = 0$.

2.2.2 Adimensionalizzazione equazione dell'energia

Come già fatto per l'equazione del moto, si andrà ad adimensionalizzare anche l'equazione dell'energia. Dato che, come già detto, le condizioni di tipo H saranno prese come riferimento, si proseguirà l'adimensionalizzazione secondo queste ultime.

Flusso di calore lineico a parete uniforme. Si consideri un flusso di

calore lineico a parete costante in direzione assiale, quindi $q_w'(x) = \text{cost}$. Ciò significa porsi nel caso in cui siano imposte condizioni al contorno di tipo H1, H2 oppure H3.

Il termine $\partial T / \partial x$, presente nell'equazione 2.9 da adimensionalizzare, è esprimibile a partire da un semplice bilancio di energia, applicato ad un tratto elementare di canale δx ; trascurando gli effetti di dissipazione viscosa, si ha che:

$$q_w' \delta x = \dot{m} c_p \frac{\partial T_m}{\partial x} \delta x = \rho u_m A_c c_p \frac{\partial T_m}{\partial x} \delta x$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{q_w'}{\rho u_m A_c c_p} \quad (2.11)$$

dove la temperatura di mescolamento T_m è definita come:

$$T_m(x) = \frac{1}{u_m A_c} \int_{A_c} T(x, y, z) u(y, z) \cdot dA_c$$

Poiché il flusso è termicamente sviluppato, vale che:

$$\frac{\partial T_m}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

Quindi, sostituendo la 2.11 all'equazione dell'energia in assenza di dissipazione viscosa (2.9), si ottiene:

$$\nabla^2 T = \frac{u}{\alpha} \frac{q'_w}{\rho u_m A_c c_p} \quad (2.12)$$

Inoltre, sotto l'ipotesi di $q'(x) = cost$, ha senso definire la temperatura adimensionale in questo modo:

$$\Theta = \frac{T - T_{in}}{(q'_w/k)} \Rightarrow dT = \frac{q'_w}{k} d\Theta$$

Riprendendo anche le definizioni di u^* e ∇^* e facendo comparire tutte queste grandezze adimensionali nell'equazione dell'energia 2.12, si ricava la sua forma adimensionalizzata:

$$\nabla^{*2} \Theta = \frac{u^*}{A_c/D_h^2} \quad (2.13)$$

Quando si applica l'equazione dell'energia adimensionale 2.13, devono essere adimensionalizzate anche le condizioni al contorno. Per le condizioni H1 ed H2 si ha:

- Condizione al contorno H1.

$$q'_w = \dot{m} c_p \frac{dT_m}{dx} = cost \Rightarrow \frac{\dot{m} c_p}{k D_h} \frac{d\Theta_m}{d\xi} = 1 \Rightarrow Re Pr \frac{A_c}{D_h^2} \frac{d\Theta_m}{d\xi} = 1$$

$$T|_w = cost \Rightarrow \Theta|_w = 1$$

- Condizione al contorno H2.

$$q'_w = \dot{m} c_p \frac{dT_m}{dx} = cost \Rightarrow Re Pr \frac{A_c}{D_h^2} \frac{d\Theta_m}{d\xi} = 1$$

$$q''_w = k \frac{\partial T}{\partial n} |_{w=cost} \Rightarrow \frac{\partial \Theta}{\partial n^*} |_{w=} = \frac{D_h}{P_h}$$

2.3 Numero di Poiseuille

Determiniamo ora il numero di Poiseuille che, con il numero di Nusselt, sarà indispensabile per ricavare le relazioni operative per la fase di ottimizzazione. Tale numero viene ricavato dal campo di moto. Si richiama la definizione del fattore di attrito f_z :

$$f_z = \frac{\tau_z}{\rho u_m^2/2}$$

Con u_m la velocità media sulla sezione del canale e τ_z lo sforzo di taglio medio sul perimetro bagnato del canale P . Per calcolarlo si deve conoscere lo sforzo tangenziale locale del fluido in direzione normale alla parete del canale, definito come:

$$\tau_n = -\mu \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}$$

Con \hat{n} il versore normale alla parete del canale. Ora, mediando tale sforzo sull'intero perimetro bagnato P , si ottiene τ_z :

$$\tau_z = -\frac{1}{P} \int_P \mu \frac{du}{d\hat{n}} dP$$

Per moto completamente sviluppato τ_z risulta uniforme e pari al coefficiente di attrito medio sulla lunghezza del canale τ_m . A questo punto si calcola il fattore di attrito:

$$f_z = -\frac{2\mu}{\rho u_m^2 P} \int_P \frac{du}{d\hat{n}} dP \quad (2.14)$$

Si normalizzano le grandezze della 2.14 definendo le seguenti grandezze:

$$u^* = \frac{u}{u_m}; \quad P^* = \frac{P}{D_h}; \quad \hat{n}^* = \frac{\hat{n}}{D_h}$$

La 2.14 diviene:

$$f_z = -\frac{2\mu}{\rho u_m^2 P^*} \int_P \frac{du^*}{d\hat{n}^*} dP^* = -\frac{2}{Re P^*} \int_P \frac{du^*}{d\hat{n}^*} dP^* \quad (2.15)$$

Dove Re è il numero di Reynolds definito come: $Re = \frac{\rho u_m D_h}{\mu}$. Ora non resta che il calcolo del numero di Poiseuille, che è il prodotto del fattore di attrito per il numero di Reynolds:

$$Po = f_z Re = -\frac{2}{P^*} \int_P \frac{du^*}{d\hat{n}^*} dP^* \quad (2.16)$$

2.4 Numero di Nusselt

La soluzione dell'equazione dell'energia, con le condizioni termiche imposte, costituisce il problema di temperatura e permette di ricavare il profilo di temperatura $T(x, y, z)$ del fluido in tutto il condotto, sebbene il vero obiettivo sia valutare lo scambio termico.

Il flusso termico q'' (W/m^2) per un fluido che scorre in un condotto è dato dalla legge di Fourier:

$$q'' = -k(\nabla T)_{w,m}$$

Questa equazione può essere espressa in termini di scambio termico convettivo:

$$q'' = h(T_{w,m} - T_m)$$

dove:

h ($\frac{W}{m^2K}$) coefficiente di scambio termico convettivo;

$T_m = \frac{1}{A_c u_m} \int_{A_c} uT dA_c$ temperatura di mescolamento;

$T_{w,m} = \frac{1}{P} \int_P T_w dl$ temperatura media di parete.

Tale relazione per la temperatura di mescolamento vale solo per proprietà termofisiche costanti del fluido. La temperatura di parete T_w va mediata, poiché potrebbe non essere uniforme in tutto il perimetro P .

Il coefficiente h definisce lo scambio termico convettivo del fluido ed è incognito. Viene determinato solo dopo avere risolto il problema di temperatura.

Invece che concentrarsi su h , è più pratico riferirsi ad una grandezza adimensionale, cioè il numero di Nusselt, così definito:

$$Nu = \frac{hD_h}{k} \quad (2.17)$$

Con D_h il diametro idraulico e k la conducibilità termica del fluido.

Solitamente sia h che Nu hanno carattere locale, però, in assenza di effetti di conduzione a parete e assiale, Nu per un flusso laminare completamente sviluppato in un canale cilindrico, risulta uniforme in direzione assiale e indipendente dai numeri di Reynolds e Prandtl. Analogamente anche h sarà costante lungo il canale.

Capitolo 3

Convezione forzata di un gas in un microcanale

Le conoscenze teoriche dei flussi gassosi nei microcanali sono piuttosto avanzate e sicuramente più di quanto non lo siano per i liquidi; difatti, per i gas, il principale microeffetto è quello legato alla rarefazione. Questo permette di sfruttare l'analogia tra i flussi a bassa pressione e i microflussi: in ambiente aerospaziale i fenomeni legati alla bassa pressione sono stati ampiamente studiati.

3.1 Rarefazione ed effetti a parete nei microflussi

Innanzitutto, con riferimento alla figura 3.1, si introducono alcune *lunghezze caratteristiche*:

- *diametro molecolare* d ;
- *spazio medio tra le molecole* δ ;
- *cammino libero medio* λ (ovvero la distanza media percorsa dalla molecola tra due urti successivi).

Per un gas semplice, cioè composto da una sola specie chimica, λ dipende solamente da d e dalla densità ρ . In relazione alla condizione d/δ si possono distinguere: *gas diluiti*, se tale rapporto è di molto inferiore all'unità, e *gas densi*, se non vale la precedente asserzione; in particolare, per i gas diluiti, le interazioni sono principalmente degli urti binari.

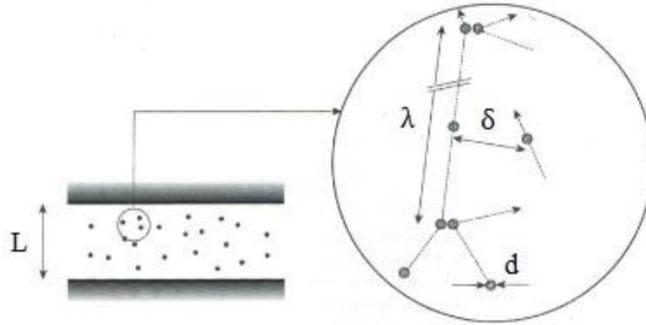


Figura 3.1: Microcanale e dimensioni caratteristiche

In riferimento ad un gas diluito, il cammino libero medio tra le molecole λ può essere espresso come:

$$\lambda = \frac{\bar{c}}{\nu} = \frac{\sqrt{\frac{8RT}{\pi}}}{\nu} \quad (3.1)$$

con:

- \bar{c} la *velocità termica media di una molecola*, che dipende dalla temperatura T e dalla costante del gas R ;
- ν la *velocità di collisione*.

La stima di ν e dunque di λ è funzione del modello scelto per descrivere l'urto binario tra due molecole. Tra i modelli più utilizzati vi sono quelli che sfruttano l'IPL (Inverse Power Law) e sono: HS (Hard Sphere), VHS (Variable Hard Sphere), VSS (Variable Soft Sphere) e l'MM (Maxwell Model).

3.1.1 Ipotesi di continuità ed equilibrio termodinamico

L'ipotesi di continuità, quando possibile, è di fondamentale utilità, perché permette di eliminare le discontinuità molecolari, in quanto media le quantità microscopiche sul volume campione. Se le quantità macroscopiche utili per la meccanica dei fluidi classica, come temperatura, pressione e densità, vengono fatte variare puntualmente, allora è possibile utilizzare le equazioni del continuo, come le già dette equazioni di Navier-Stokes. In caso diverso, è necessario introdurre nuove equazioni di governo che descrivano le dinamiche molecolari.

La dimensione del *volume rappresentativo* campione dovrà essere sufficientemente piccola per evitare fluttuazioni macroscopiche ma abbastanza grande per evitare variazioni microscopiche. In particolare, riferendosi alla figura 3.2, è possibile evidenziare la zona grigia che rende possibile applicare l'ipotesi di continuità; inoltre, tale volumetto dovrà essere anche in condizioni di *equilibrio termodinamico*, per rendere pienamente utilizzabile tale ipotesi.

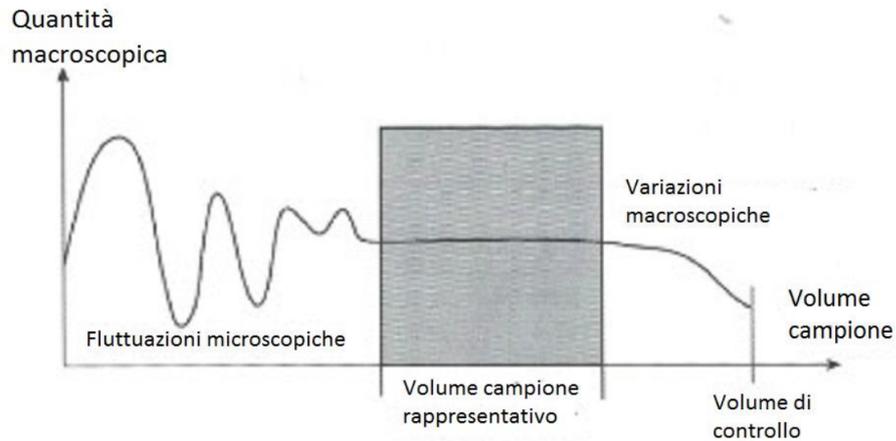


Figura 3.2: Dimensioni del volume campione

Per avere equilibrio termodinamico, la frequenza degli urti molecolari all'interno del volume campione deve essere sufficientemente elevata. Ovvero si deve avere che il cammino medio λ sia piccolo rispetto alla lunghezza caratteristica del volume campione l_{sv} , che a sua volta dovrà essere piccola rispetto alla lunghezza caratteristica del volume di controllo L_{cv} :

$$\frac{\lambda}{L_{cv}} \ll 1$$

Ma tale rapporto λ/L_{cv} è il sopracitato *numero di Knudsen*, una grandezza adimensionale di fondamentale importanza per lo studio dei microflussi gassosi.

Se utilizziamo il modello IPL per ricavare λ , esso vale:

$$\lambda = \frac{k_2 \mu}{\rho \sqrt{RT}} \quad (3.2)$$

con k_2 un *coefficiente di proporzionalità*.

Il numero di Knudsen può essere correlato con il *numero di Reynolds* $Re = \frac{\rho u L}{\mu}$ e di *Mach* $Ma = \frac{u}{a}$:

$$Kn = k_2 \sqrt{\gamma} \frac{Ma}{Re} \quad (3.3)$$

con $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ e a la velocità del suono locale (che per un gas ideale vale $a = \sqrt{\gamma RT}$). Quest'ultima relazione (3.3), mostra la correlazione tra la rarefazione e la comprimibilità, caratterizzate rispettivamente da Kn e Ma . Infine, se si considera un gas ideale, in numero di Knudsen può essere scritto come:

$$Kn = \frac{k_2 \mu}{\rho \sqrt{RT} L_{cv}} = \frac{k_2 \mu \sqrt{RT}}{p L_{cv}} \quad (3.4)$$

3.1.2 Numero di Knudsen e rarefazione

Sebbene il solo numero di Knudsen non sia sufficiente per avere un'analogia completa tra flussi a bassa pressione e microflussi, esso è un buon parametro per differenziare i diversi regimi di flusso. Come si era precedentemente accennato, vediamo ora una diffusa *classificazione* dei regimi di flusso ampiamente utilizzata in letteratura:

- $Kn < 10^{-3}$: *flusso continuo*, descritto in maniera definita dalle equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili;
- $10^{-3} < Kn < 10^{-1}$: *flusso di scorrimento*, ancora descrivibile con Navier-Stokes ma a condizione di concentrarsi alle prossimità delle pareti, dove gli effetti della rarefazione sono ancora apprezzabili;
- $10^{-1} < Kn < 10$: *flusso di transizione*, non si possono applicare più le equazioni di Navier-Stokes ma gli urti intramolecolari non sono ancora trascurabili;
- $Kn > 10$: *flusso molecolare libero*, anche gli urti intramolecolari sono trascurabili e servono modelli appositi per la sua completa descrizione.

Tali valori del numero di Knudsen sono indicativi, anche perché la scelta della lunghezza caratteristica L_{cv} non è univoca. Solitamente tale lunghezza è pari al diametro idraulico o alla profondità nei canali, invece per geometrie più complesse si utilizzano delle formulazioni ad hoc.

3.1.3 Effetti a parete

Solitamente nei microsistemi con flussi gassosi si hanno flussi di scorrimento o di transizione e le interazioni a parete sono quelle che causano la maggior deviazione con il sistema continuo: questo perché con la diminuzione della dimensione si ha un forte aumento del rapporto *superficie-volume*, che causa squilibri i velocità e temperatura. Per questo stesso motivo anche la *rugosità superficiale* del canale e le affinità chimiche e fisiche del gas con la parete influenzano largamente il flusso e di conseguenza le sue grandezze tipiche, come temperatura e velocità.

3.2 Regimi dei flussi gassosi nei microcanali

Il regime di flusso per un gas in un macrocanale dipende dai numeri di Re e Ma , quindi dagli effetti dovuti alla *viscosità* e alla *comprimibilità*. Inoltre, se $Ma < 0.3$, ovvero flusso pienamente subsonico, è possibile trascurare gli effetti legati alla comprimibilità. Nei microcanali è invece la rarefazione che regola il regime di flusso, quantificata con Kn .

Esplicitando Re dalla 3.3, $Re = k_2 \sqrt{\gamma} \frac{Ma}{Kn}$, è facile verificare che il flusso è laminare (Re nell'ordine di 10^3) per microflusso subsonico, poiché $Kn > 10^{-3}$, $Ma < 1$ e $k_2 \sqrt{\gamma} \approx 1$.

Nella figura 3.3 si mostrano i modelli più utilizzati per descrivere i flussi gassosi nei microcanali in funzione del numero di Knudsen. Nei paragrafi successivi si descriveranno i modelli principali.

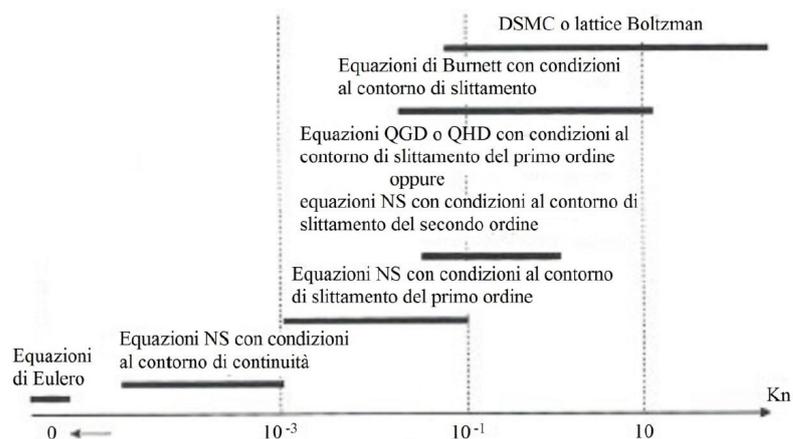


Figura 3.3: Modelli risolutivi e intervalli di applicabilità per flussi gassosi

3.2.1 Regime di flusso continuo

Come già accennato poc'anzi, il regime di flusso continuo è descritto pienamente dalle equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili, dall'equazione di stato dei gas perfetti e con le velocità parete-fluido.

Equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili

Le equazioni di Navier-Stokes per fluidi comprimibili sono quelle di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia.

Per un fluido newtoniano il *tensore degli sforzi* è:

$$\sigma' = -pl + \sigma \quad (3.5)$$

e il tensore degli sforzi *viscosi* ha la forma:

$$\sigma = \mu \left[\nabla \otimes \bar{v} + (\nabla \otimes \bar{v})^T \right] + \zeta (\nabla \cdot \bar{v}) I \quad (3.6)$$

dove I è il *tensore identità*, \bar{v} il *vettore velocità*, μ la *viscosità dinamica* e ζ il *coefficiente di Lamè*.

Introducendo l'ipotesi di Stokes, che considera i cambiamenti di volume indipendenti dalla viscosità

$$2\mu + 3\zeta = 0$$

il tensore degli sforzi diviene:

$$\sigma = \mu \left[\nabla \otimes \bar{v} + (\nabla \otimes \bar{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{v}) I \right] \quad (3.7)$$

Infine, assumendo valida la legge di Fourier $\bar{q} = -k\nabla T$, con k la *conducibilità termica* e T la *temperatura* (solitamente $k = k(T)$), per il fluido è possibile riscrivere come segue le equazioni di Navier-Stokes:

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (3.8)$$

EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \left(\rho \bar{v} \otimes \bar{v} - \mu \left[\nabla \otimes \bar{v} + (\nabla \otimes \bar{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{v}) I \right] \right) + \nabla p = -\rho f \quad (3.9)$$

EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left((E+p)\bar{v} - \mu \left[\nabla \otimes \bar{v} + (\nabla \otimes \bar{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{v}) I \right] \cdot \bar{v} - k \nabla T \right) = f \cdot \bar{v} \quad (3.10)$$

dove con f si sono denotate le *forze di volume* e con E l'*energia totale per unità di volume*.

Per E si ritiene valida la seguente formulazione:

$$E = \rho \left(\frac{1}{2} \bar{v} \cdot \bar{v} + e \right) \quad (3.11)$$

e con e si è definita l'*energia interna specifica*, pari (per un gas ideale) a:

$$e = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$$

Solitamente, per i flussi gassosi macroscopici, le forze di volume sono trascurabili; a maggior ragione lo saranno anche per i microflussi, in quanto in questi ultimi, essendo elevato il rapporto tra superficie e volume, le forze di superficie sono nettamente prevalenti.

3.2.2 Condizioni al contorno e regime di flusso di scorrimento

Per flusso continuo, le condizioni al contorno esprimono la continuità, tra fluido e parete, di temperatura e velocità:

$$T|_w = T_{wall} \quad \bar{v}|_w = \bar{v}_{wall}$$

dove con w si sono indicate le condizioni relative alle condizioni del fluido a parete e con $wall$ quelle della parete.

In realtà, per un qualsiasi valore di Kn , in prossimità della parete è presente una regione nella quale il gas non è in equilibrio termodinamico. Tale zona è detta *Strato di Knudsen* ed ha uno spessore simile al valore di λ . Comunque, se il numero di Knudsen è inferiore a 10^{-3} , l'effetto del suddetto strato è trascurabile. Nella realtà, il flusso che si instaura in questo strato, non è descrivibile dai modelli che si basano sul flusso continuo. Se però si hanno valori di Kn inferiori a 10^{-1} , previa la modifica delle condizioni al contorno, è possibile trascurare la sua influenza introducendo un salto di velocità e temperatura tra parete e fluido.

3.2.3 Equazioni NS, QGD e QHD per flusso continuo

In forma generica è possibile scrivere le *equazioni di conservazione* come segue:

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J_{EQ} = 0 \quad (3.12)$$

EQUAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO

$$\frac{\partial(\rho\bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (J_{EQ} \otimes \bar{v} - \sigma_{EQ}) + \nabla p = 0 \quad (3.13)$$

EQUAZIONE DELL'ENERGIA

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{(E+p)}{\rho} J_{EQ} - \sigma_{EQ} \cdot \bar{v} + q_{EQ} \right) = 0 \quad (3.14)$$

Con J_{EQ} il *vettore del flusso di massa*, σ_{EQ} il *tensore degli sforzi viscosi* e q_{EQ} il *vettore del flusso di calore*.

Nel caso delle equazioni di Navier-Stokes, indicando a pedice NS anziché EQ, si avranno:

$$J_{NS} = \rho\bar{v}$$

$$\sigma_{NS} = \mu [\nabla \otimes \bar{v}] + \zeta (\nabla \cdot \bar{v}) = \mu \left[\nabla \otimes \bar{v} + (\nabla \otimes \bar{v})^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \bar{v}) I \right]$$

$$q_{NS} = -k\nabla T$$

Le equazioni QGD e QHD sono ottenute da considerazioni spazio-temporali e basate sulle equazioni 3.12, 3.13 e 3.14 con diversi valori di J_{EQ} , σ_{EQ} e q_{EQ} . Vengono anche aggiunti dei termini dissipativi che richiedono la conoscenza del *tempo caratteristico* τ , così definito:

$$\tau = \frac{\gamma\mu}{Sc\rho a^2}$$

Dove $Sc = \frac{\mu}{\rho D}$ è il *numero di Schmidt* e D il *coefficiente di diffusione*.

Per un gas ideale vale $a^2 = \gamma RT$, quindi τ è definito come:

$$\tau = \frac{\mu}{Sc\rho}$$

Per le equazioni QGD, indicando a pedice QGD anziché EQ, si avranno:

$$J_{QGD} = J_{NS} - \tau \left[\nabla \cdot (\rho \bar{v} \otimes \bar{v}) + \nabla p \right]$$

$$\sigma_{QGD} = \sigma_{NS} + \tau \left[\bar{v} \otimes \left(\rho \bar{v} \cdot (\nabla \otimes \bar{v}) + \nabla p \right) + I(\bar{v} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \bar{v}) \right]$$

$$q_{QGD} = q_{NS} - \tau \rho \bar{v} \left[\bar{v} \cdot \nabla e + p \bar{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{p} \right) \right]$$

Per il modello IPL la relazione di τ può essere scritta come:

$$\tau = \frac{Kn}{Sc} \frac{1}{k_2} \frac{L_{cv}}{\sqrt{RT}}$$

Per $Kn \rightarrow 0$ allora anche $\tau \rightarrow 0$. Ciò sta a significare che quando è possibile trascurare la rarefazione, le equazioni QGD degenerano nelle equazioni NS.

Infine, per le equazioni QHD, indicando a pedice QHD anziché EQ, si avranno le seguenti relazioni:

$$J_{QHD} = J_{NS} - \tau \left[\rho \bar{v} \cdot (\nabla \otimes \bar{v}) + \nabla p \right]$$

$$\sigma_{QHD} = \sigma_{NS} + \tau \bar{v} \otimes \left[\rho \bar{v} \cdot (\nabla \otimes \bar{v}) + \nabla p \right]$$

$$q_{QHD} = q_{NS}$$

Anche le equazioni QHD hanno termini proporzionali a τ ; inoltre, queste ultime, sono appropriate per i gas densi, a differenza delle QGD, che descrivono meglio i gas rarefatti.

3.2.4 Condizioni di scorrimento al contorno di primo ordine

Per un gas che scorre nella direzione s parallela ad una parete, la *velocità di scorrimento* può essere scritta come:

$$\bar{v}_{slip} = \bar{v}_s - \bar{v}_{wall} = \zeta \left. \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} \right|_w \quad (3.15)$$

Dove \bar{v}_s è la componente del *vettore velocità tangente* alla parete, n il *versore normale* alla superficie e ζ il *coefficiente di scorrimento*.

Con le dovute ipotesi è possibile ricavare ζ dalla teoria cinetica dei gas. La *velocità di scorrimento* è la velocità relativa fittizia richiesta per avere un corretto profilo di velocità del fluido al di fuori dello strato di Knudsen, *non* la velocità relativa tra parete e fluido a parete.

Riferendosi alla teoria cinetica dei gas, è possibile trattare la parete come una superficie intermedia tra una perfettamente assorbente e una perfettamente riflettente; quindi, per ogni unità di area, la frazione σ (*coefficiente di accomodamento della quantità di moto tangenziale*) di molecole viene assorbita (grazie alla rugosità della parete e ai fenomeni di condensazione ed evaporazione) dalla superficie e viene poi rimessa alla velocità corrispondente del gas fermo alla temperatura di parete. La parte $1 - \sigma$ viene riflessa dalla parete perfettamente.

In particolare, se $\sigma = 0$, la quantità di moto delle molecole incidenti e riflesse è la stessa, quindi non viene trasmessa quantità di moto alla parete. Viene detta riflessione SPECULARE.

Se $\sigma = 1$ le molecole trasmettono tutta la loro quantità di moto alla parete e la riflessione è detta DIFFUSA. In figura 3.4 si vedono tali comportamenti:

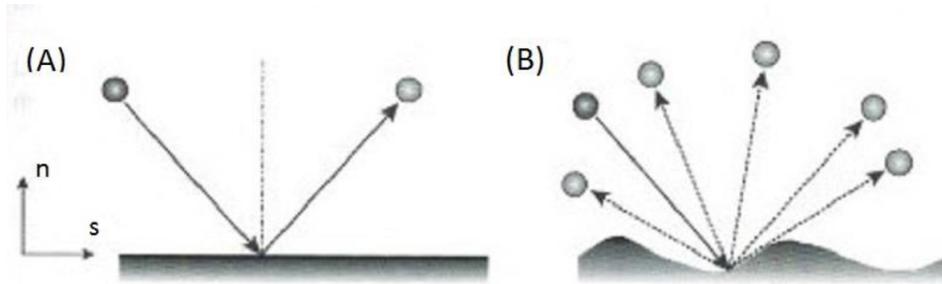


Figura 3.4: (A) Riflessione speculare della molecola; (B) Riflessione diffusa

Fu Maxwell a dimostrare la presenza dello scorrimento a parete, partendo dal bilancio della quantità di moto a parete, scrivendo nel seguente modo la *velocità di scorrimento*:

$$\bar{v}_{slip} = \bar{v}_s - \bar{v}_{wall} = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda_M \left[\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} - \frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial s \partial n} \right]_w + \frac{3}{3} \left[\frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial T}{\partial s} \right]_w \quad (3.16)$$

con:

- $\lambda_M = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\sqrt{\rho p}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\mu}{\rho \sqrt{RT}}$;
- n : *versore normale* alla superficie;

- s : *versore tangente* alla superficie.

Come valori numerici, λ_M è molto simile al cammino medio λ_{HS} (calcolato col metodo HS).

Solitamente nell'equazione 3.16 viene trascurato il termine $\frac{3}{2} \frac{\mu}{\rho T} \frac{\partial^2 T}{\partial s \partial n}$, quindi diventa:

$$\bar{v}_{slip} = \bar{v}_s - \bar{v}_{wall} = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \left. \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_w = \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \left. \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} \right|_w + \frac{3}{4} \frac{\lambda}{k_2} \sqrt{\frac{R}{t}} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_w \quad (3.17)$$

Questa equazione è adimensionalizzabile secondo una *lunghezza caratteristica* L , una *velocità di riferimento* $\bar{\mu}_0$ e una *temperatura di riferimento* T_0 .

Definiamo ora le lunghezze adimensionali:

$$\bar{v}_s^* = \frac{\bar{v}_s}{\bar{\mu}_0} \quad T^* = \frac{T}{T_0} \quad n^* = \frac{n}{L} \quad s^* = \frac{s}{L}$$

Dunque la 3.17 adimensionalizzata sarà:

$$\bar{v}_{slip}^* = \bar{v}_s^* - \bar{v}_{wall}^* = \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \left. \frac{\partial \bar{v}_s^*}{\partial n^*} \right|_w + \frac{3}{\lambda k_2^2} \frac{Kn^2 Re_0}{Ma_0^2} \left. \frac{\partial T^*}{\partial s^*} \right|_w \quad (3.18)$$

$$\text{Con: } Re_0 = \frac{\rho u_0 L}{\mu} \text{ e } Ma_0 = \frac{u_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}$$

Solitamente nei microcanali non si utilizza l'equazione adimensionalizzata ma quella in forma dimensionale: ovvero non la 3.16 ma la 3.17. Questo perché nei microcanali non è semplice adimensionalizzare n ed s per la stessa lunghezza caratteristica, passaggio fondamentale per avere validità dell'equazione 3.17. Sempre da quest'ultima equazione si vede che per valori bassi di Kn diviene trascurabile la velocità di scorrimento.

Poisson dedusse che, in maniera analoga alla velocità di scorrimento, vi fosse anche un *salto di temperatura* tra parete e fluido:

$$T - T_{wall} = \varsigma \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w$$

dove ς è la *distanza di salto di temperatura*.

Successivamente fu Smoluchowsky a confermare sperimentalmente tale ipotesi, che inoltre dimostrò come ς dipendesse anche dal cammino libero medio λ .

Vengono prese le seguenti ipotesi:

- σ_T : frazione delle molecole che hanno un contatto con la parete di tempo sufficiente per scambiare calore con esse. Queste vengono riemesse come fossero un gas che si trova alla temperatura della parete;
- $1 - \sigma_T$: frazione di molecole che, essendo riflesse, conservano la loro energia termica incidente.

σ_T è detto *coefficiente di accomodamento dell'energia*.

Partendo dal bilancio di energia a parete è possibile dimostrare la relazione per il salto di temperatura:

$$T - T_{wall} = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn}{\mu c_p} \lambda \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_w \quad (3.19)$$

Si può adimensionalizzare tale equazione rispetto alla lunghezza caratteristica L e ad una temperatura di riferimento T_0 . Quindi diviene:

$$T^* - T_{wall}^* = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn}{Pr} \lambda \left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_w \quad (3.20)$$

con $Pr = \frac{\nu \rho c_p}{k} = \frac{\mu c_p}{k}$ il *numero di Prandtl*.

Se fosse nullo il gradiente di temperatura in direzione tangenziale alla parete, $\left. \frac{\partial T^*}{\partial s^*} \right|_w = 0$, le condizioni al contorno vengono dette di *primo ordine*. In forma adimensionale esse sono:

$$\bar{v}_{slip}^* = \bar{v}_s^* - \bar{v}_{wall}^* = \frac{2 - \sigma}{\sigma} Kn \left. \frac{\partial \bar{v}_s^*}{\partial n^*} \right|_w \quad (3.21)$$

$$T^* - T_{wall}^* = \frac{2 - \sigma_T}{\sigma_T} \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{Kn}{Pr} \left. \frac{\partial T^*}{\partial n^*} \right|_w \quad (3.22)$$

In questo caso la velocità di scorrimento è proporzionale al gradiente di velocità normale alla parete e al numero di Kn ; identicamente per il salto di temperatura, che sarà però proporzionale al gradiente di temperatura in direzione normale alla parete e al numero di Kn .

In caso di parete curva, l'equazione 3.16 va modificata come segue:

$$\bar{v}_{slip} = \bar{v}_s - \bar{v}_{wall} = \beta_{u1} \frac{2 - \sigma}{\sigma} \lambda \left(\frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} + \frac{\partial \bar{v}_s}{\partial n} \right) \Big|_w + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\rho T} \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_w \quad (3.23)$$

Dove:

- \bar{v}_n è la *componente del vettore velocità normale alla parete*;

- β_{u1} è un *coefficiente correttivo* derivato da simulazioni di carattere numerico, capace di descrivere meglio il comportamento del fluido al di fuori dello strato di Knudsen.

Analogamente è possibile introdurre un coefficiente β_{T1} per migliorare l'accuratezza delle equazioni 3.19 e 3.20.

3.2.5 Condizioni di scorrimento al contorno di ordine superiore

Se $Kn > 0.1$, sia gli studi sperimentali che numerici fatti usando il metodo DSCM, mostrano deviazioni significative dai modelli basati su condizioni al contorno del primo ordine. Di conseguenza sono state proposte numerose condizioni di *secondo ordine*, per estendere la validità del regime di scorrimento del flusso a valori più elevati di Kn .

Sebbene siano di diversissima fattezza, è possibile raggrupparne un buon numero di queste sotto l'equazione comune:

$$\bar{v}_s^* - \bar{v}_{wall}^* = A_1 Kn \frac{\partial \bar{v}_s^*}{\partial n^*} + A_2 Kn^2 \frac{\partial^2 t^*}{\partial s^{*2}} \quad (3.24)$$

Dove A_1 e A_2 sono dei *coefficienti tipici* di ogni modello.

3.3 Flusso di transizione e flusso molecolare libero

Infine, se $Kn > 1$, le equazioni NS, QGD e QHD sul modello del flusso continuo non sono più applicabili. Però, per $Kn \approx 1$, è possibile utilizzare un modello di flusso di scorrimento, sostituendo le equazioni di Navier-Stokes con le equazioni di Burnett.

Per i numeri di Knudsen più elevati, sia in pieno regime di transizione che nel regime di flusso molecolare libero, l'equazione di Boltzmann va trattata solo con degli appropriati metodi numerici, come il DSCM e il LBM (Lattice Boltzmann Methods). Comunque, per qualsiasi valore di Kn , l'equazione di Boltzmann è ricavata direttamente dal bilancio di energia.

Capitolo 4

Performance Evaluation Criteria

Spesso i microcanali vengono utilizzati per la realizzazione di micro-scambiatori di calore e, proprio come per i loro compagni macro, anche questi sono soggetti a migliorie ed ottimizzazioni. Difatti dovranno essere progettati per avere le seguenti caratteristiche:

- $A \downarrow$, ovvero minimizzare la superficie di scambio termico;
- $UA \uparrow$, ovvero massimizzare il coefficiente globale di scambio termico. Ciò è ottenibile o massimizzando la potenza termica scambiata \dot{Q} fissati A e ΔT_i o minimizzando il salto di temperatura tra i due flussi in ingresso allo scambiatore ΔT_i con A e \dot{Q} fissi;
- $P \downarrow$, ovvero minimizzando la potenza necessaria alla pompa per mettere in circolo il fluido nei condotti. In altri termini, si devono ridurre il più possibile le perdite di carico nei condotti.

Tali valori vengono selezionati in base al problema ingegneristico specifico, il quale pone dei vincoli di numero inferiore ai gradi di libertà effettivi, rendendo dunque possibile un'ottimizzazione, che è anche *pluriobiettiva*, poiché le grandezze da perfezionare sono diverse e non univoche.

I *Performance Evaluation Criteria (PEC)* non sono nient'altro che l'ottimizzazione che viene attuata, specificando le grandezze mantenute costanti (riferite sempre ad uno scambiatore di riferimento) e le funzioni obiettivo. Di seguito sono elencate le grandezze passibili di ottimizzazione:

- *Variabili geometriche*, come la sezione dei canali A , la lunghezza L e il numero N di questi;

- *Variabili operative*, ovvero la portata massica \dot{m} del flusso nel canale, la sua velocità media u_m e il salto di temperatura all'ingresso dei due flussi ΔT_i ;
- *Variabili dipendenti*, cioè il calore scambiato \dot{Q} e la potenza di pompaggio P .

In questa trattazione ci si occuperà della sola ottimizzazione geometrica di un canale a sezione rettangolare e con N costante, poiché viene considerato il singolo microcanale come sinonimo di micro-scambiatore e dunque all'ottimizzazione del singolo corrisponde l'ottimizzazione del tutto.

Ora, prima di iniziare con l'elenco dei PEC, definiamo la geometria e le relazioni operative che permetteranno il suo studio ed ottimizzazione.

4.1 Geometria rettangolare

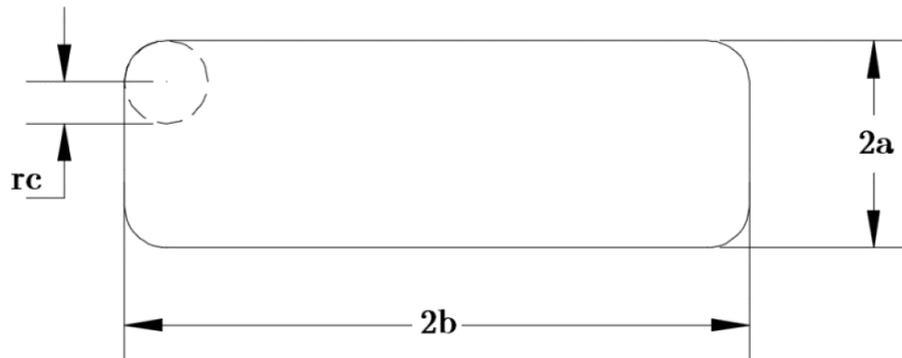


Figura 4.1: Geometria sezione rettangolare

Con riferimento alla figura 4.1, verranno definiti i parametri adimensionali utilizzati come variabili di ottimizzazione e una serie di variabili necessarie per il calcolo dei numeri di *Nusselt* (Nu) e di *Poiseuille* (fRe).

La geometria rettangolare, adimensionalizzata rispetto al *diametro idraulico* D_h , è definibile con due soli parametri:

- un parametro di forma: $\beta = \frac{a}{b}$;
- un raggio di raccordo adimensionale: $R_c = \frac{rc}{a}$.

Si ricavano ora le espressioni relative all'area della sezione (A_c), al perimetro geometrico (P) e al diametro idraulico (D_h):

$$A_c = a^2 \left[\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi) \right] \quad (4.1)$$

$$P_h = 4a \left[1 + \frac{1}{\beta} - 2R_c^2 \left(1 - \frac{4}{\pi} \right) \right] \quad (4.2)$$

$$D_h = \frac{4S}{P} = a \frac{\frac{4}{\beta} - R_c(4 - \pi)}{1 + \frac{1}{\beta} - 2R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (4.3)$$

Sebbene sia possibile adimensionalizzare la sezione ed il perimetro per il diametro idraulico:

$$A_c' = \frac{A_c}{D_h^2} \quad P_h' = \frac{P_h}{D_h}$$

nel problema relativo all'ottimizzazione, è di maggiore convenienza normalizzare tali parametri secondo una geometria di riferimento (pedice *ref*). Nel nostro caso tale geometria è quella con spigoli vivi, ovvero $R_c = 0$. Diventano dunque:

$$A_c' = \frac{A_c}{A_{cref}} = \left(\frac{a}{a_{ref}} \right)^2 \left[1 - \frac{\beta}{4} R_c^2(4 - \pi) \right] \quad (4.4)$$

$$P_h' = \frac{P_h}{P_{href}} = \frac{a}{a_{ref}} \frac{1 + \frac{1}{\beta} - 2R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \frac{1}{\beta}} \quad (4.5)$$

$$D_h' = \frac{D_h}{D_{href}} = \frac{a}{a_{ref}} \frac{\left(\frac{4}{\beta} - R_c^2(4 - \pi) \right) \left(1 + \frac{1}{\beta} \right)}{\left(1 + \frac{1}{\beta} - 2R_c \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \left(\frac{4}{\beta} \right)} \quad (4.6)$$

Dalle relazioni appena ricavate, è semplice notare come le prime (quelle senza apici) dipendano solamente da β e da R_c , mentre quelle con apice (') dipendono anche dal rapporto $\frac{a}{a_{ref}}$. Comunque, quest'ultima considerazione, è ininfluenza ai fini della nostra trattazione, dato che tale rapporto viene trattato come un parametro e non come un'incognita: a noi interessa l'effetto di R_c ed al più di β .

Ora verranno introdotte delle restrizioni geometriche, che permetteranno di esprimere il rapporto $\frac{a}{a_{ref}}$ in funzione di R_c . Di seguito ed in tabella 4.1 sono elencate le quattro restrizioni geometriche, applicabili durante l'ottimizzazione:

Restrizione	Rapporto a/a_{ref}
I: $a = cost$	$\frac{a}{a_{ref}} = 1$
II: $D'_h = cost$	$\frac{a}{a_{ref}} = \frac{4[1 + 1/\beta - 2R_c(1 - \pi/4)]}{(1 + \beta)[4/\beta - R_c^2(4 - \pi)]}$
III: $P'_h = cost$	$\frac{a}{a_{ref}} = \frac{1 + 1/\beta}{1 + 1/\beta - 2R_c(1 - \pi/4)}$
IV: $A'_c = cost$	$\frac{a}{a_{ref}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta/4R_c^2(4 - \pi)}}$

Tabella 4.1: Restrizioni geometriche applicabili

- I: stessa dimensione fisica, $a/a_{ref} = 1$;
- II: stesso diametro idraulico, $D'_h = 1$;
- III: stessa lunghezza di scambio termico, $P'_h = 1$;
- IV: stessa area della sezione di passaggio, $A'_c = 1$.

4.2 Realzioni operative per le funzioni obiettivo

Di seguito vengono definite le funzioni obiettivo:

- \dot{Q} : rateo di calore scambiato, cioè la *potenza termica*;
- P : *potenza di pompaggio*;

- L : lunghezza del microcanale;
- $\Delta T = T_p - T_b$: differenza tra le temperature di parete (p) e di mescolamento (b);
- \dot{m} : portata di fluido.

Come già accennato, ragioniamo a *numero fisso* N di microcanali; perciò \dot{Q} e P sono riferiti al singolo microcanale.

Ora vengono elencate le *ipotesi* sotto le quali sono valide le relazioni operative:

- pareti rigide e prive di porosità del condotto;
- moto laminare;
- fenomeni di trasporto stazionari e bidimensionali;
- flusso completamente sviluppato;
- fluido Newtoniano;
- fluido incomprimibile e proprietà termofisiche costanti;
- convezione forzata;
- radiazione termica e conduzione assiale trascurabili;
- condizioni al contorno termico di tipo T.

L'ing. Suzzi ha già ricavato le espressioni delle funzioni obiettivo, che verranno qui di seguito riportate:

$$\dot{Q} = \frac{kNuP_hL\Delta T}{D_h} \quad (4.7)$$

$$P = \frac{2\mu\dot{m}^2fReL}{\rho^2A_cD_h^2} \quad (4.8)$$

Le equazioni riportate sono state ricavate da un bilancio su un elementino infinitesimo di fluido cilindrico, avendo come base la sezione del canale e come altezza dz . Ora si normalizzano tali funzioni rispetto alla configurazione di riferimento, ovvero quella a *spigoli vivi*:

$$\dot{Q}' = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{ref}} = \frac{Nu'P_h'L'\Delta T'}{D_h'} \quad (4.9)$$

$$P' = \frac{P}{P_{ref}} = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{A_c' D_h'^2} \quad (4.10)$$

Tutte e *cinque* le funzioni obiettivo compaiono nelle 4.9 e 4.10; dunque si hanno *due* equazioni con *sei* incognite, che sono: L' , $\Delta T'$, P' , \dot{Q}' , \dot{m}' e *geom.* Con *geom.* si intendono quei parametri, come A_c' , P_h' e D_h' , che si riferiscono alla *geometria* della sezione. Dunque sono presenti *quattro* gradi di libertà e fissando di volta in volta *tre* delle funzioni obiettivo si definiscono i vari PEC, che dunque rappresentato dei problemi ad *un* grado di libertà. Nella tabella che segue vengono elencati i diversi PEC:

CASO	L'	\dot{m}'	P'	\dot{Q}'	$\Delta T'$	OBIETTIVO
<i>FG1a</i>	1	1			1	$\dot{Q}' \uparrow$
<i>FG1b</i>	1	1		1		$\Delta T' \downarrow$
<i>FG2a</i>	1		1		1	$\dot{Q}' \uparrow$
<i>FG2b</i>	1		1	1		$\Delta T' \downarrow$
<i>FN1</i>			1	1	1	$L' \downarrow$
<i>FN2</i>		1		1	1	$L' \downarrow$
<i>FN3</i>		1		1	1	$P' \downarrow$
<i>VG2a</i>		1	1		1	$L' \downarrow$
<i>VG2b</i>		1	1	1		$\Delta T'^{*'} \downarrow$

Tabella 4.2: Performance Evaluation Criteria

Sempre riferendosi alla tabella 4.2, si ha che le funzioni obiettivo normalizzate poste ad *uno* sono quelle che vengono mantenute costanti. Inoltre, con la freccia rivolta verso l'alto (\uparrow) si indica che per ottimizzare tale funzione essa va massimizzata; con la freccia verso il basso (\downarrow) viceversa, ovvero che per essere ottimizzata la funzione andrà minimizzata.

Capitolo 5

Ottimizzazione della geometria di un microcanale a sezione rettangolare attraversato da un flusso gassoso

Nel seguente capitolo verranno calcolate le *funzioni obiettivo* per ogni criterio PEC al variare dei parametri geometrici, ovvero R_c e β , e del parametro fisico Kn . In sintesi si vuole vedere come tali parametri influiscano sulle funzioni obiettivo e studiarne una possibile ottimizzazione al variare degli stessi.

Innanzitutto si ricordano le ipotesi, espresse nel capitolo precedente, sotto le quali verranno calcolate le funzioni obiettivo; ne vengono aggiunte anche due ultime caratteristiche del nostro caso, ovvero la sezione del condotto e lo stato fisico del flusso:

- pareti rigide del condotto e prive di porosità;
- moto laminare;
- fenomeni di trasporto stazionari e bidimensionali;
- flusso completamente sviluppato;
- fluido Newtoniano;
- fluido incomprimibile e proprietà termofisiche costanti;
- convezione forzata;
- radiazione termica e conduzione assiale trascurabili;

- condizioni al contorno termico di tipo T;
- sezione rettangolare del condotto;
- canale attraversato da un flusso monofase gassoso ed eventuali effetti di rarefazione.

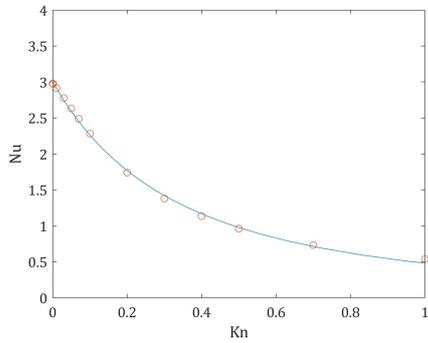
5.1 Intervallo esaminato di Kn

Poiché nella trattazione si studiano dei micocanali e, di conseguenza, dei micro dissipatori di calore atti allo scambio convettivo, si considera il flusso gassoso in regime di flusso *continuo* e di *scorrimento*: ovvero l'intervallo $0 < Kn < 10^{-1}$. Difatti, con valori più elevati di Kn , il numero di Nusselt (Nu) tende a diminuire in maniera considerevole, fino a valori per cui lo scambio convettivo non ha più alcuna valenza pratica.

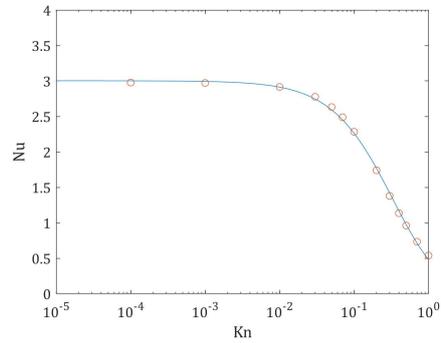
Quanto è stato ora affermato in maniera del tutto indicativa, deve venire confermato anche dai risultati empirici ed analitici: per verificare la validità dell'intervallo di Kn considerato, si è fatto un breve studio sui numeri di Nusselt (Nu) e di Poiseuille (fRe), mantenendo $R_c = 0$ e $\beta = 1$, al variare del numero di Knudsen Kn . Si sono scelti tali valori di R_c e β , che corrispondono a sezione quadrata con spigoli vivi, perché sono del tutto esemplificativi: comunque si facciano variare e combinino tali valori, l'andamento qualitativo dei vari numeri indagati resta invariato.

Per prima cosa, grazie allo script Matlab dell'Ing. Suzzi, si sono risolte le equazioni del moto e dell'energia per $Nu|_{R_c=0,\beta=1}(Kn)$ e $fRe|_{R_c=0,\beta=1}(Kn)$ per diversi valori di Kn nell'intervallo $0 < Kn < 1$. Tramite poi uno script Matlab tali valori sono stati interpolati con il metodo dei minimi quadrati e graficati con un polinomio fratto di secondo grado. Sebbene nell'intervallo $10^{-1} < Kn < 1$, per il calcolo di Kn e fRe sarebbero più appropriate condizioni del secondo ordine, per una valutazione preliminare come questa ci si è limitati a quelle del primo ordine.

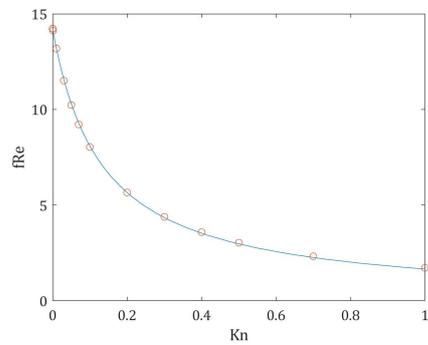
Di seguito vengono rappresentati i grafici di $Nu|_{R_c=0,\beta=1}(Kn)$ e $fRe|_{R_c=0,\beta=1}(Kn)$, sia in scala logaritmica che non (figura 5.1).



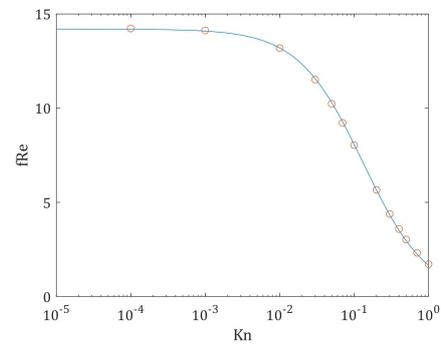
(a) $Nu(Kn)$ per $R_c = 0$ e $\beta = 1$



(b) $Nu(Kn)$ per $R_c = 0$ e $\beta = 1$ in scala logaritmica



(c) $fRe(Kn)$ per $R_c = 0$ e $\beta = 1$



(d) $fRe(Kn)$ per $R_c = 0$ e $\beta = 1$ in scala logaritmica

Figura 5.1: Andamento di $Nu|_{R_c=0, \beta=1}(Kn)$ e $fRe|_{R_c=0, \beta=1}(Kn)$

Osservando, in particolare, i due grafici in scala logaritmica in figura 5.1, nell'intervallo $0 < Kn < 10^{-3}$, Kn e fRe rimangono praticamente costanti, rendendo lecita l'approssimazione $10^{-3} \simeq 0$. Inoltre, osservando le curve, si è scelto di prendere in esame l'intervallo $0 \leq Kn \leq 0.45$: difatti, con $Kn > 0.45$, il valore di Nu sarebbe sceso sotto l'unità, rendendo insensata una qualsivoglia ottimizzazione: ricordiamo che se $Nu < 1$ la conduzione prevale sulla convezione, andando contro i propositi dei micro scambiatori di calore a convezione.

5.2 Andamenti dei numeri di Nu e fRe

Una volta noto l'intervallo di Kn per cui è valida la trattazione, è fondamentale conoscere, per il calcolo delle funzioni obiettivo, i valori di Nu e fRe in funzione di Kn , R_c e β . Tali valori sono stati ricavati sempre dallo script Matlab dell'Ing. Suzzi.

In particolare si sono considerati tali valori discreti di Kn , R_c e β :

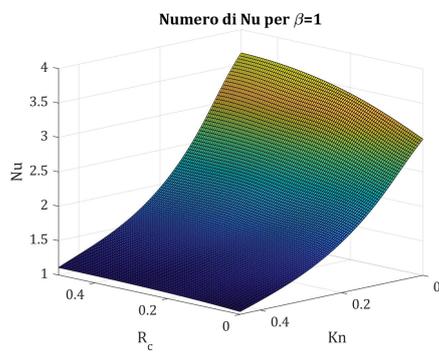
- $Kn=[0, 0.01, 0.10, 0.30, 0.45]$;
- $R_c=[0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5]$;
- $\beta=[0.10, 0.25, 0.50, 1]$.

Per come sono stati definiti i parametri geometrici, si ha che per $R_c = 0$ e $\beta = 1$ la sezione è quadrata con spigoli vivi, mentre con $R_c = 0.5$ e sempre $\beta = 1$ si ha sezione circolare.

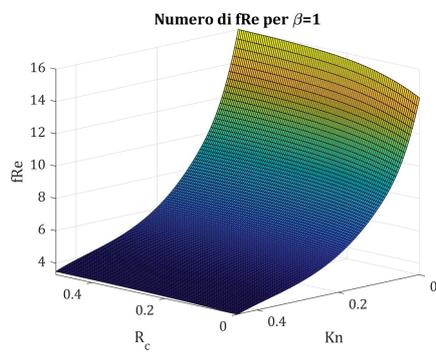
Si rappresentano qui di seguito dei grafici 3D, realizzati con uno script Matlab, degli andamenti di Nu e fRe in funzione di Kn , R_c e β . In particolare, quest'ultimo parametro viene mantenuto costante realizzando dunque quattro casi separati, ma tutti con lo stesso andamento quantitativo.

5.2.1 Caso $\beta = 1$

Come si può notare dai grafici in figura 5.2, sia Nu che fRe hanno un andamento che cresce con il decrescere del numero di Kn e resta praticamente lo stesso per qualsiasi valore di R_c . Comunque, è apprezzabile una lieve inclinazione del grafico in corrispondenza dei valori del raggio di curvatura più bassi: ciò sta a significare che più la smussatura degli spigoli è pronunciata e maggiore è l'efficacia sia dello scambio termico convettivo sia del moto del fluido all'interno del condotto. Questo è ancora più evidente se si osserva l'andamento al solo variare del numero di Kn : com'era infatti prevedibile, se $Kn \uparrow$ allora $Nu \downarrow$ e $fRe \downarrow$. Ciò è dovuto al fatto che la rarefazione aumenta quando Kn si discosta dallo zero rendendo, come già detto in precedenza, la convezione poco efficace o addirittura trascurabile.



(a) $Nu(R_c, Kn)$ per $\beta = 1$

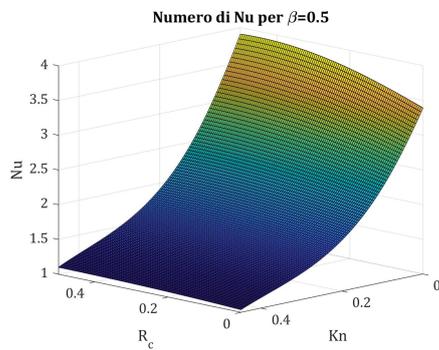


(b) $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 1$

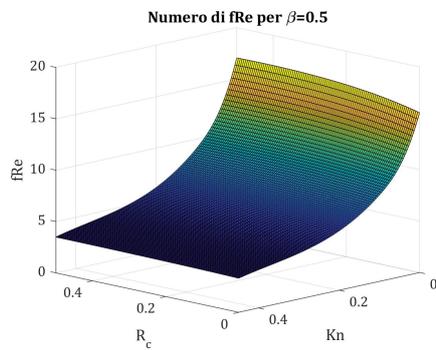
Figura 5.2: Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 1$

5.2.2 Caso $\beta = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

Si rappresentano in successione gli andamenti di Nu e fRe per i valori di $\beta = 0.5$, $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$. Poiché l'andamento non si discosta da quello in cui $\beta = 1$, si rimanda per il commento al paragrafo precedente.

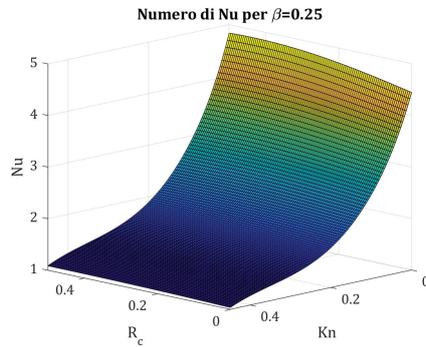


(a) $Nu(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.5$

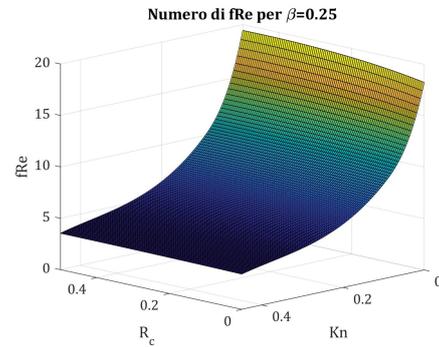


(b) $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.5$

Figura 5.3: Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.5$

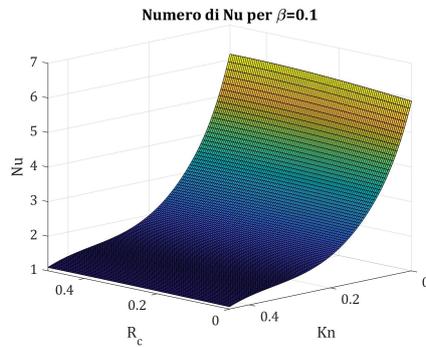


(a) $Nu(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.25$

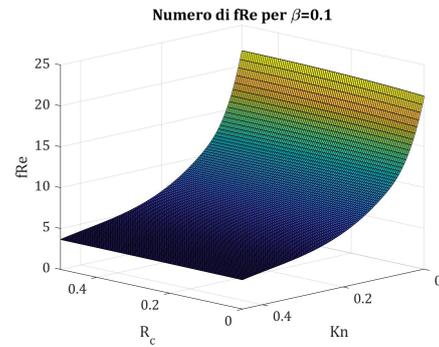


(b) $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.25$

Figura 5.4: Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.25$



(a) $Nu(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.1$



(b) $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.1$

Figura 5.5: Andamenti di $Nu(R_c, Kn)$ e $fRe(R_c, Kn)$ per $\beta = 0.1$

5.3 Relazioni operative e condizioni di riferimento

Sebbene nel capitolo 4 sia già stato trattato con il dovuto riguardo il problema di ottimizzazione che verrà affrontato, qui verranno brevemente riassunti gli aspetti fondamentali e le equazioni caratteristiche.

Si ricorda che viene considerato un *canale rettangolare* di lato corto $2a$ e lato lungo $2b$ definito dal fattore di forma β ; il canale è attraversato da un flusso gassoso in convezione forzata con tutti e quattro i lati scaldati, sotto condizioni di tipo T. Per ogni criterio PEC si vuole studiare il raggio di curvatura adimensionale R_c , tale da ottenere l'ottimizzazione della funzione obiettivo considerata. Tali *funzioni obiettivo* sono:

$$\dot{Q}' = \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{ref}}, \Delta T' = \frac{\Delta T}{\Delta T_{ref}}, P' = \frac{P}{P_{ref}}, \dot{m}' = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_{ref}}, L' = \frac{L}{L_{ref}}$$

dove le condizioni di riferimento (pedice *ref*) si riferiscono al caso di sezione a spigoli vivi ($R_c = 0$).

Le *relazioni operative* che esprimono le funzioni obiettivo sono:

$$\dot{Q}' = \frac{Nu' P'_h L' \Delta T'}{D'_h} \quad (5.1)$$

$$P' = \frac{\dot{m}'^2 (fRe)' L'}{A'_c D_h'^2} \quad (5.2)$$

Le *grandezze geometriche* A'_c , P'_h e D'_h sono definite in funzione di R_c e a/a_{ref} dalle equazioni:

$$A'_c = \left(\frac{a}{a_{ref}} \right)^2 \left[1 - \frac{\beta}{4} R_c^2 (4 - \pi) \right] \quad (5.3)$$

$$P'_h = \frac{a}{a_{ref}} \frac{1 + 1/\beta - 2R_c(1 - \pi/4)}{1 + 1/\beta} \quad (5.4)$$

$$D'_h = \frac{a}{a_{ref}} \frac{4/\beta - R_c^2(4 - \pi)}{1 + 1/\beta - 2R_c(1 - \pi/4)} \frac{1 + 1/\beta}{4/\beta} \quad (5.5)$$

Poiché a/a_{ref} non è un'incognita di progetto, sono state definite quattro restrizioni geometriche applicabili al problema di ottimizzazione, che permettono di esplicitare il rapporto a/a_{ref} in funzione di R_c : $a/a_{ref} = 1$, $D'_h = 1$, $P'_h = 1$ e $A'_c = 1$ (tabella 4.1).

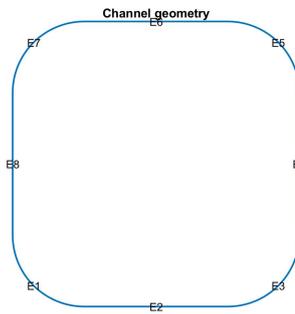
Le *condizioni di riferimento*, ovvero quelle grandezze per cui si sono normalizzate le varie relazioni operative, sono state scelte in due modi distinti: per quelle riferite alle condizioni geometriche, si è scelta la sezione a spigoli vivi, ovvero $R_c = 0$, mentre per le altre grandezze, che sono i numeri di Reynolds e Prandtl, la lunghezza del canale e il suo diametro idraulico, si sono usati valori numerici rappresentativi, di seguito riportati:

- $Re_{ref} = 1$
- $Pr_{ref} = 0.7$
- $L_{ref} = 5mm$
- $D_{href} = 0.01mm$

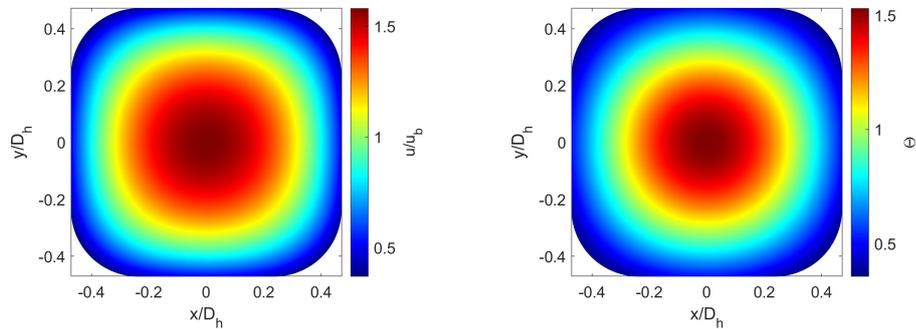
5.4 Campi di temperatura e velocità

In questo paragrafo verranno riportati gli andamenti dei campi di velocità u/u_b e di temperatura Θ adimensionali, ricavati dal codice Matlab sviluppato da Suzzi. Tale codice si basa sulla risoluzione numerica delle equazioni di Navier-Stokes, con condizioni al contorno di scorrimento del primo ordine.

Vengono ora riportati i grafici relativi alla geometria del canale, dipendente da R_c e da β , e ai campi menzionati sopra.



(a) Sezione del canale



(b) Velocità adimensionalizzata

(c) Temperatura adimensionalizzata

Figura 5.6: Geometria del canale e campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 1$ e $Kn = 0.1$

I profili di velocità e temperatura riportati in figura 5.6 sono indipendenti dalla posizione assiale della sezione del canale: questo è dovuto all'ipotesi fatta di flusso completamente sviluppato. Inoltre, in tali profili, lungo tutto il perimetro del canale si hanno sia $u/u_b \neq 0$ che $\Theta \neq 0$; ciò significa che, a causa degli effetti dovuti alla rarefazione, si ha un gradiente tra parete e fluido, con valore che varia a seconda della posizione relativa del perimetro del canale.

Vediamo ora se e come cambiano i campi di temperatura e velocità con la stessa geometria ma con $Kn = 0.45$.

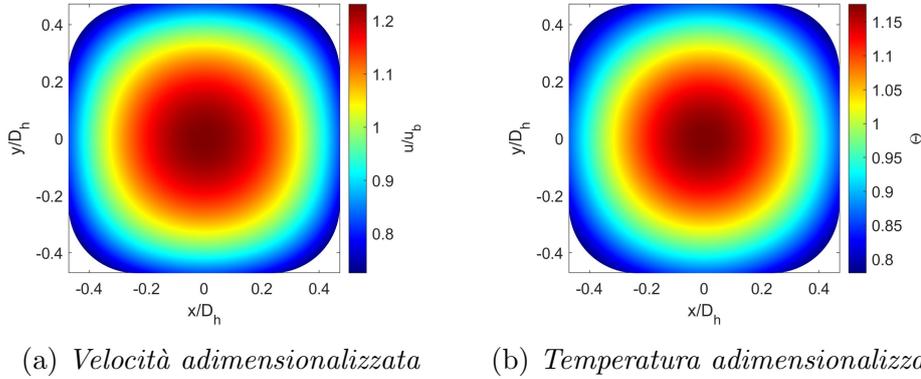


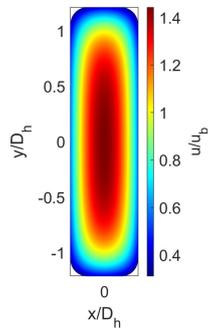
Figura 5.7: Campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 1$ e $Kn = 0.45$

Come si può riscontrare in figura 5.7, anche con un numero di Knudsen più elevato l'andamento qualitativo rimane invariato: le uniche differenze che si riscontrano sono dei salti di temperatura Θ e di velocità u/u_b a parete più accentuati e valori numerici minori per entrambi i campi. Se il grafico fosse sviluppato anche nella terza dimensione, si noterebbe uno schiacciamento maggiore in questo caso piuttosto che in quello con Kn minore.

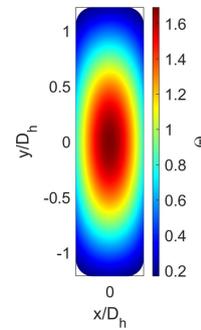
A titolo esemplificativo, si mostra anche una geometria differente, caratterizzata da $\beta = 0.25$ e $R_c = 0.25$; i numeri di Knudsen restano sempre 0.1 e 0.45. È interessante notare come le zone rosse, dunque quelle con gradienti di temperatura e di velocità maggiori, siano maggiormente sviluppate specialmente ai bordi del canale. In particolare, la temperatura adimensionalizzata per $Kn = 0.45$, non presenta zone fredde per tutta l'estensione trasversale, a causa di una forte rarefazione e conseguente difficoltà al raffreddamento.



(a) Sezione del canale

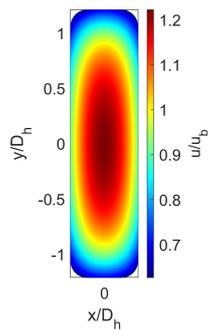


(b) Velocità adimensionalizzata

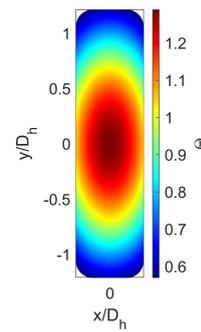


(c) Temperatura adimensionalizzata

Figura 5.8: Geometria del canale e campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 0.25$ e $Kn = 0.1$



(a) Velocità adimensionalizzata



(b) Temperatura adimensionalizzata

Figura 5.9: Campi di velocità e temperatura adimensionalizzati per $R_c = 0.25$, $\beta = 0.25$ e $Kn = 0.45$

5.5 Criteri PEC esaminati

In questo paragrafo verranno esposti tutti i criteri PEC esaminati con le relative funzioni obiettivo da ottimizzare. Per fare ciò, si sono sviluppati codici in Matlab che rappresentano anche graficamente i risultati onde rendere più agevole e scorrevole l'interpretazione delle equazioni proprie di ogni criterio; inoltre, ogni grafico verrà accompagnato da un commento che ne permetta la comprensione e l'analisi.

5.5.1 Criterio FG1a

Nel primo criterio esaminato, la funzione obiettivo che deve essere *massimizzata* è la *potenza termica* \dot{Q}' , mantenendo costanti e pari al valore unitario la lunghezza adimensionale del canale L' , la portata \dot{m}' e il salto termico $\Delta T'$. Applicando tali restrizioni all'equazione 5.1, si ottiene la seguente espressione per la potenza termica:

$$\dot{Q}' = Nu' \frac{P_h'}{D_h'}$$

Per come sono stati definiti Nu' , P_h' e D_h' è possibile scrivere le seguenti relazioni:

$$Nu' = Nu'(R_c, \beta) \quad \frac{P_h'}{D_h'} = \frac{P_h'}{D_h'}(R_c, \beta)$$

Difatti, sebbene sia P_h' che D_h' dipendano anche da a/a_{ref} , il loro rapporto ne risulta evidentemente indipendente, svincolando dunque l'andamento di \dot{Q}' dalle restrizioni geometriche applicate.

Una volta completate queste considerazioni di carattere generale, si è proceduto all'analisi della funzione obiettivo al variare del parametro β .

Caso $\beta = 1$

In questo primo caso si analizza l'andamento della potenza termica \dot{Q}' per $\beta = 1$. Ricordando che \dot{Q}' deve essere massimizzata, dal grafico in figura 5.10 è possibile analizzare, con colori diversi, l'andamento di tale funzione al variare del numero di Knudsen Kn e del raggio di curvatura R_c . Considerando i valori di $Kn = 0$ e $Kn = 0.01$ (colori nero e rosso, praticamente sovrapposti), si può notare come il massimo valore di \dot{Q}' si abbia per $R_c = 0.2$ ed è, in valore percentuale, poco più del 6% rispetto a quanto non sia per $R_c = 0$.

Analizzando anche gli altri valori di Knudsen, si può dire che per $Kn = 0.1$ la funzione resta costante attorno al valore unitario (variazioni del 2%), mentre per $Kn = 0.3$ e $Kn = 0.45$ si ha il valore massimo di questa per la geometria con spigoli vivi, per poi decrescere monotonamente fino ad avere il valore minimo per il valore massimo di R_c

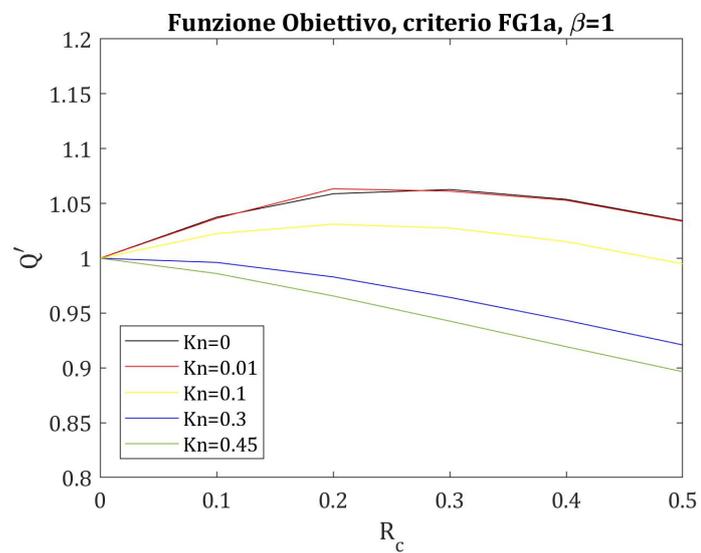


Figura 5.10: Funzione obiettivo criterio FG1a, $\beta = 1$

Caso $\beta = 0.5$

Per $\beta = 0.5$ varia solamente l'andamento della funzione obiettivo per $Kn = 0.1$; difatti non risulta più unitaria o quasi, ma segue l'andamento di $Kn = 0$ e $Kn = 0.01$, restando però più schiacciata. Anche gli andamenti per $Kn = 0.3$ e $Kn = 0.45$ risultano invariati qualitativamente, sono solamente più ravvicinati al valore di $\dot{Q}' = 1$.

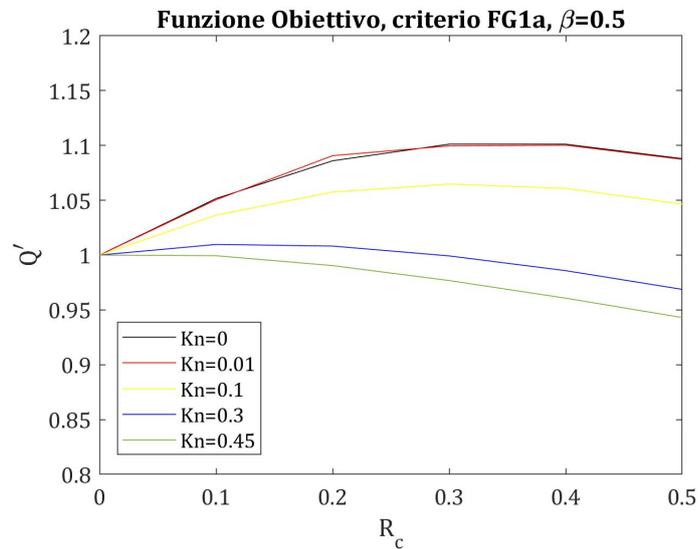


Figura 5.11: Funzione obiettivo criterio FG1a, $\beta = 0.5$

Caso $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

Vengono riuniti questi due valori di β poiché tra loro associabili: l'unica differenza sostanziale è che per $\beta = 0.25$ questa volta è $Kn = 0.45$ a restare prossimo, per ogni R_c , al valore unitario della potenza termica. Per $\beta = 0.1$ si ha che per ogni Knudsen preso in esame la \dot{Q}' cresce assieme a R_c , essendo massimizzata quando R_c è massimo.

Riassumendo questo primo criterio si è visto che al decrescere del valore di β la funzione obiettivo risulta sempre più monotona crescente per qualsivoglia valore di Knudsen esaminato, fino all'ultimo caso ($\beta = 0.1$) in cui per ogni Kn si ha \dot{Q}'_{max} per R_{cmax}

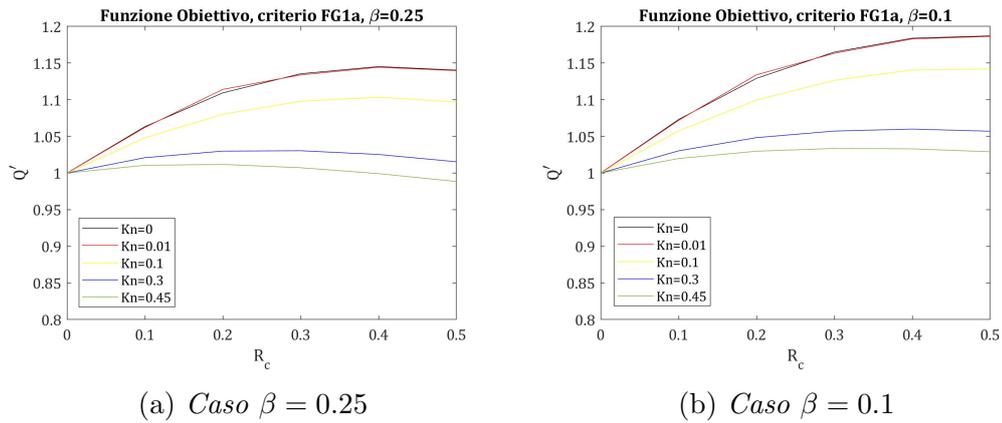


Figura 5.12: Funzione obiettivo, criterio FG1a per $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

5.5.2 Criterio FG1b

In questo secondo criterio, è il *salto di temperatura* $\Delta T'$ che deve essere *minimizzato*, mantenendo costanti e pari al valore unitario la lunghezza adimensionale del canale L' , la portata \dot{m}' e la potenza termica \dot{Q}' . Applicando tali restrizioni all'equazione 5.1, si ottiene la seguente espressione per il salto di temperatura:

$$\Delta T' = \frac{1}{Nu'} \frac{D_h'}{P_h'}$$

Anche qui valgono le stesse considerazioni fatte per il criterio FG1a, dunque anche l'andamento di $\Delta T'$ risulta indipendente dalle restrizioni geometriche applicate. Osserviamo ora l'andamento della funzione obiettivo al variare di β .

Caso $\beta = 1$

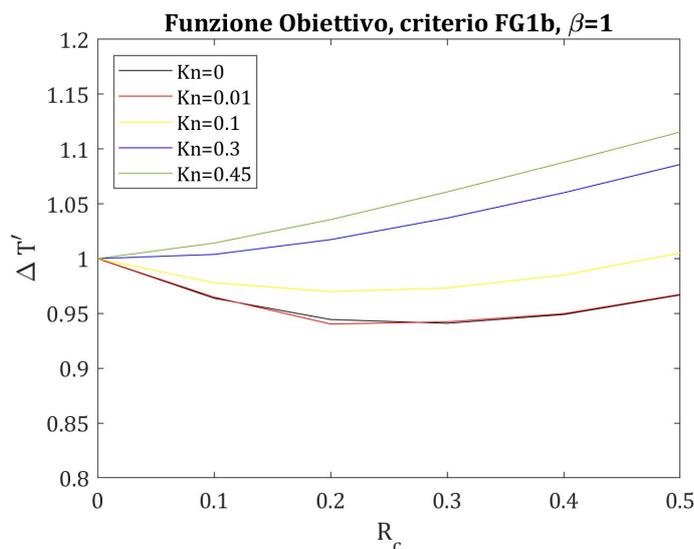


Figura 5.13: Funzione obiettivo criterio FG1b, $\beta = 1$

Osserviamo innanzitutto l'andamento della funzione obiettivo $\Delta T'$ per il valore di β unitario. Sapendo che tale funzione obiettivo deve essere minimizzata, è possibile notare come tale traguardo venga raggiunto per valori differenti di R_c a seconda del valore di Kn indagato. In particolare, per Knudsen pari a 0, 0.01 e 0.1, l'andamento qualitativo (e anche quantitativo

per i primi due valori) risulta lo stesso: infatti la funzione risulta decrescente fino a $R_c = 0.2$, dove raggiunge il minimo, per poi ricrescere assieme ad R_c . Comunque, per $Kn = 0.1$ il valore di $\Delta T'$ è oscillante attorno all'unità, con scostamenti massimi attorno al 3%.

Andamenti differenti per i valori di $Kn = 0.3$ e $Kn = 0.45$ (ma tra loro non dissimili), dove la funzione obiettivo risulta monotona crescente e ha dunque il minimo in corrispondenza del raggio di raccordo nullo. Fino a $R_c = 0.2$, comunque, si hanno scostamenti massimi dell'ordine del 2.5% rispetto al valore minimo raggiunto per $R_c = 0$ di $\Delta T'$.

Caso $\beta = 0.5$

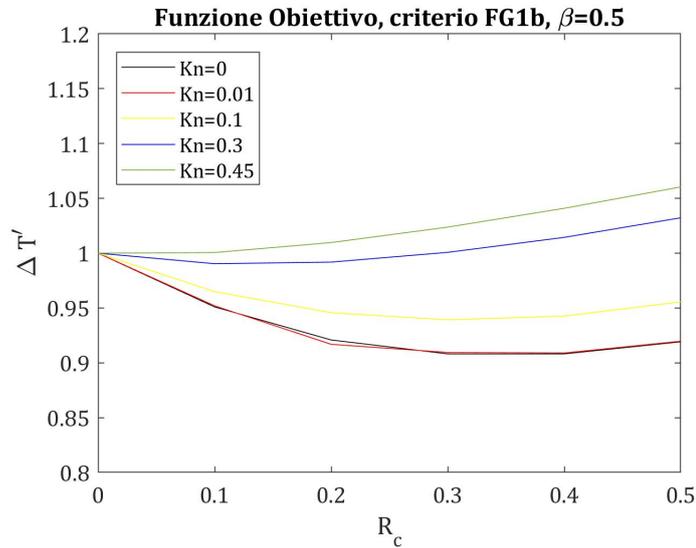


Figura 5.14: Funzione obiettivo criterio FG1b, $\beta = 0.5$

Per questo valore di β è possibile fare considerazioni simili al caso precedente: per $Kn = 0$, $Kn = 0.01$ e $Kn = 0.1$ si ha il minimo slittato leggermente in avanti ($R_c = 0.3$), ma comunque lo stesso andamento di $\Delta T'$; invece, per Knudsen pari a 0.3 e 0.45, si raggiunge il minimo della funzione obiettivo per $R_c = 0.2$, per poi avere andamento crescente con il raggio di raccordo.

Caso $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

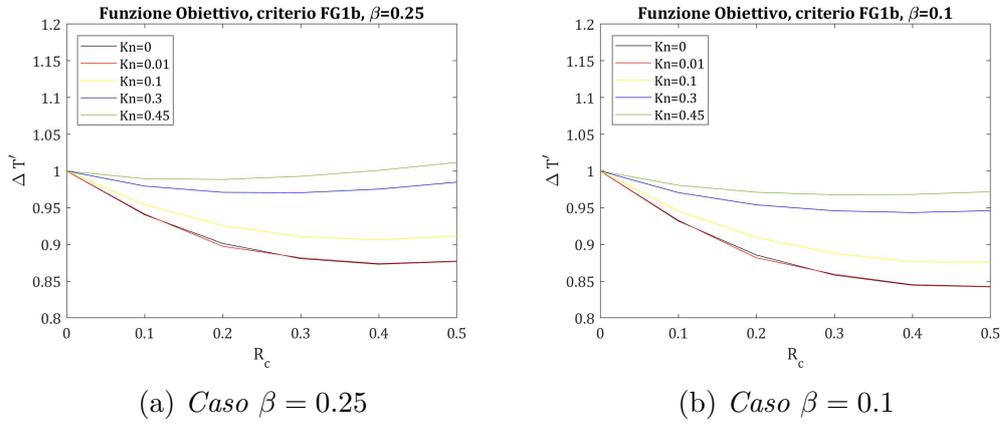


Figura 5.15: Funzione obiettivo, criterio FG1b per $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

Vengono qui riuniti i grafici per gli ultimi due valori di β (ovvero 0.25 e 0.1), poiché si ha lo stesso andamento della funzione obiettivo per tutti i valori di Kn indagati: difatti, eccezion fatta per $\beta = 0.25$ e $Kn = 0.45$, il $\Delta T'$ risulta sempre minimizzato per il valore massimo di R_c , ovvero 0.5. Comunque, anche per il caso così detto eccezionale, non si hanno andamenti del troppo dissimili: difatti, si hanno oscillazioni al più dell'1.5% attorno al valore unitario della funzione obiettivo.

Riassumendo, per come è stata definita la $\Delta T'$, che è semplicemente il reciproco della \dot{Q}' del criterio FG1a, si hanno andamenti per l'appunto reciproci rispetto al primo criterio analizzato: difatti, al crescere di β , anziché avere andamento monotono crescente come in precedenza, si ha sempre più un andamento monotono decrescente, come risulta evidente nei due grafici in figura 5.15.

5.5.3 Criterio FG2a

Per il criterio FG2a, la funzione obiettivo è la *potenza termica* \dot{Q}' , che deve essere *massimizzata* mantenendo costanti e pari al valore unitario la lunghezza adimensionale del canale L' , la potenza P' e il salto di temperatura $\Delta T'$. L'andamento di \dot{Q}' è analogo a quello ottenuto per il criterio FG1a, per cui si rimanda alla trattazione e ai grafici di questi. Per capirne il motivo, basta considerare che per ottenere la funzione obiettivo per il criterio FG1a non si è applicata all'equazione 5.1 la restrizione $\dot{m}' = 1$, ma solamente quelle riferite alla lunghezza L' e al salto di temperatura $\Delta T'$; analogamente in questo criterio non viene utilizzata la restrizione $P' = 1$, ma solamente le altre due, ovvero le stesse del criterio FG1a.

5.5.4 Criterio FG2b

Per il criterio FG2b, la funzione obiettivo è il *salto di temperatura* $\Delta T'$ che deve essere *minimizzato*, mantenendo costanti e pari al valore unitario la lunghezza adimensionale del canale L' , la potenza P' e la potenza termica \dot{Q}' . L'andamento di $\Delta T'$ è analogo a quello ottenuto per il criterio FG1b, per cui si rimanda alla trattazione e ai grafici di questi. Per capirne il motivo, basta considerare che per ottenere la funzione obiettivo per il criterio FG1b, non si è applicata all'equazione 5.1 la restrizione $\dot{m}' = 1$, ma solamente quelle riferite alla lunghezza L' e alla potenza termica \dot{Q}' ; analogamente in questo criterio non viene utilizzata la restrizione $P' = 1$, ma solamente le altre due, ovvero le stesse del criterio FG1b.

5.5.5 Criterio FN1

In questo criterio, la funzione obiettivo è la *lunghezza adimensionale* del condotto L' , che deve essere *minimizzata* mantenendo costanti e pari al valore unitario la potenza P' , la potenza termica \dot{Q}' e il salto di temperatura $\Delta T'$. Applicando tali restrizioni all'equazione 5.1, si ottiene la seguente espressione per la lunghezza adimensionale:

$$L' = \frac{1}{Nu'} \frac{D_h'}{P_h'}$$

Si può notare istantaneamente che l'espressione di L' è del tutto analoga a quella di $\Delta T'$ del criterio FG1a; quindi, per l'andamento della funzione obiettivo, ci si può riferire alla trattazione e ai grafici di tale criterio, ricordandosi solamente che al posto di $\Delta T'$ va inserita la funzione obiettivo propria di questo criterio, cioè L' .

5.5.6 Criterio FN2

Per il criterio FN2, la funzione obiettivo è la *lunghezza adimensionale* del condotto L' , che deve essere *minimizzata*, mantenendo costanti e pari al valore unitario la portata \dot{m}' , il salto di temperatura $\Delta T'$ e la potenza termica \dot{Q}' . L'adattamento di L' è analogo a quello ottenuto per il criterio FN1, per cui si rimanda alla trattazione e ai grafici di questi. Per capirne il motivo, basta considerare che per ottenere la funzione obiettivo per il criterio FN1, non si è applicata all'equazione 5.1 la restrizione $P' = 1$, ma solamente quelle riferite al salto di temperatura $\Delta T'$ e alla potenza termica \dot{Q}' ; analogamente in questo criterio non viene utilizzata la restrizione $\dot{m}' = 1$, ma solamente le altre due, ovvero le stesse del criterio FN1.

5.5.7 Criterio FN3

In questo criterio, la funzione obiettivo è la *potenza* P' , che deve essere *minimizzata* mantenendo costanti e pari al valore unitario la portata \dot{m}' , la potenza termica \dot{Q}' e il salto di temperatura $\Delta T'$. Applicando tali restrizioni all'equazione 5.2, si ottiene la seguente espressione per la potenza:

$$P' = \frac{(fRe)' L'}{A_c' D_h'}$$

Sostituendo ad L' la sua espressione, si ottiene:

$$P' = \frac{(fRe)'}{Nu'} \frac{1}{A_c'^2}$$

Per come è stata definita la potenza P' , si può notare come essa dipenda, oltre che dai parametri geometrici R_c e β e da Kn , anche dalla particolare restrizione geometrica applicata. Nella trattazione che segue si è scelto di raggruppare, al variare discreto di β , gli andamenti della funzione obiettivo in più grafici, in ognuno dei quali, mantenendo costante Knudsen, sono state inserite le quattro restrizioni geometriche considerate.

Si aggiunge come premessa che si confonderanno, da qui in avanti, i valori di $Kn = 0$ e $Kn = 0.01$, in quanto il loro andamento risulta del tutto indistinguibile e intercambiabile; in particolare, si utilizzerà il valore di Knudsen pari a 0. Osserviamo ora l'andamento della funzione obiettivo al variare di β .

Caso $\beta = 1$

Nei grafici in figura 5.16, in particolare quelli per $Kn = 0$ e $Kn = 0.1$, si può notare come l'andamento della funzione obiettivo sia sostanzialmente lo stesso: per la restrizione geometrica $D_h' = 1$ si ha il valore minimo di P' per raggio di raccordo nullo e sia per $A_c' = 1$ che per $P_h' = 1$ il suo minimo lo si ha per raggio di raccordo massimo. Invece, per $a/a_{ref} = 1$, si ha un andamento prossimo al valore unitario della funzione obiettivo, con discostamento massimo pari al 4.5% in corrispondenza di $R_c = 0.3$ nel grafico (a) e pari al 3.5% in corrispondenza dello stesso valore di R_c nel grafico (b).

Per gli altri due grafici, ovvero quelli per Knudsen pari a 0.3 e 0.45, si ha un andamento più rialzato, cioè tutte le restrizioni geometriche tendono a raggrupparsi attorno a $P' = 1$; comunque, valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il caso in cui $Kn = 0.1$, tranne per il caso in cui $a/a_{ref} = 1$, che risulta debolmente crescente e con il minimo dunque posto a $R_c = 0$.

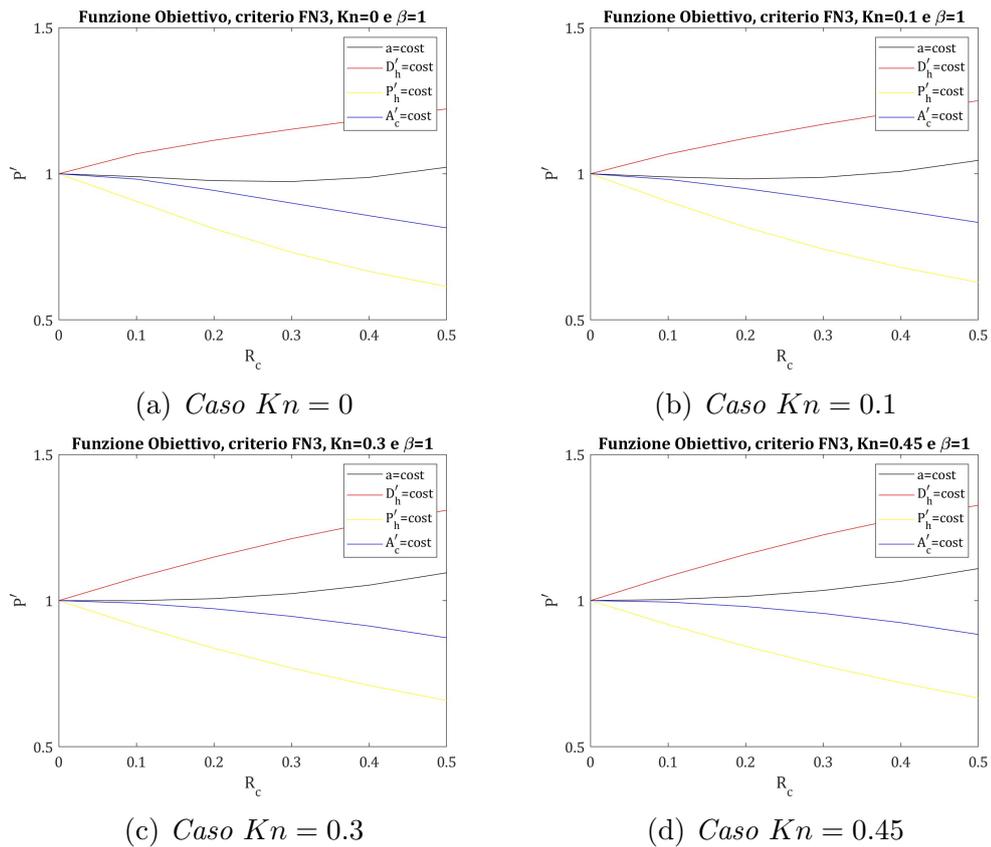
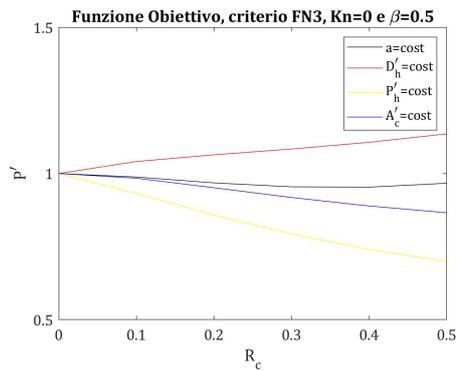


Figura 5.16: Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 1$ e vari valori di Knudsen

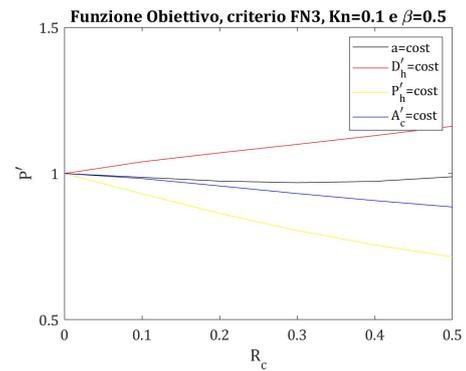
Caso $\beta = 0.5$

In questo secondo caso, corrispondente a $\beta = 0.5$, si può riscontrare immediatamente una riduzione di variabilità dei valori della funzione obiettivo per ogni restrizione geometrica: se per esempio prima si avevano dei valori che si discostavano anche del 38% da $P'=1$ (*cfr.* figura 5.16, grafico (a), restrizione $P_h' = 1, R_c = 0.5$), ora ci si attesta a dei valori prossimi al più del 25% (*cfr.* figura 5.17, grafico (a), restrizione $P_h' = 1, R_c = 0.5$).

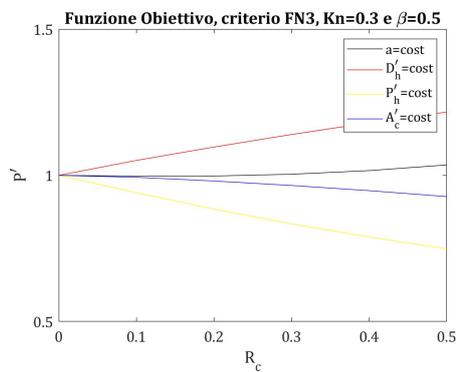
Essendo i valori raggruppati in intervalli più ristretti, è possibile notare che per $Kn = 0$ e $Kn = 0.1$, esclusa la restrizione $D_h' = 1$ che risulta monotona crescente e con il minimo per $R_c = 0$, la funzione obiettivo risulta minimizzata per $R_c = 0.5$. Per gli altri due grafici, si può osservare ciò che era accaduto anche per il caso di $\beta = 1$, ovvero un innalzamento generale della funzione obiettivo, che questa volta ha il suo valore minimo per le restrizioni $a/a_{ref} = 1$ e $D_h' = 1$ in corrispondenza di raggio di raccordo nullo e per le restrizioni $A_c' = 1$ e $P_h' = 1$ per raggio di raccordo massimo.



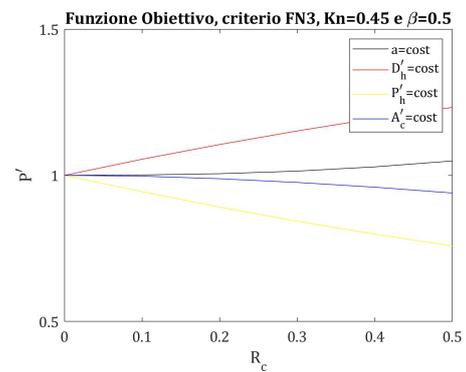
(a) *Caso $Kn = 0$*



(b) *Caso $Kn = 0.1$*



(c) *Caso $Kn = 0.3$*



(d) *Caso $Kn = 0.45$*

Figura 5.17: Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.5$ e vari valori di Knudsen

Caso $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

Si sono raggruppati assieme questi due valori di β perché tra loro qualitativamente non dissimili: si assiste ad un ulteriore restringimento del campo di variabilità dei risultati, come già detto in precedenza per $\beta = 0.5$. Nel caso della figura 5.18 essa si può descrivere ugualmente con quanto si è fatto per la figura 5.17.

Invece, per la 5.19, si ha che per $Kn = 0$ e $Kn = 0.1$ la funzione obiettivo viene minimizzata per tutte le restrizioni geometriche per il valore massimo del raggio di raccordo; invece per i casi $Kn = 0.3$ e $Kn = 0.45$ la funzione P' è praticamente unitaria, con un discostamento massimo che si attesta sul 7.5%.

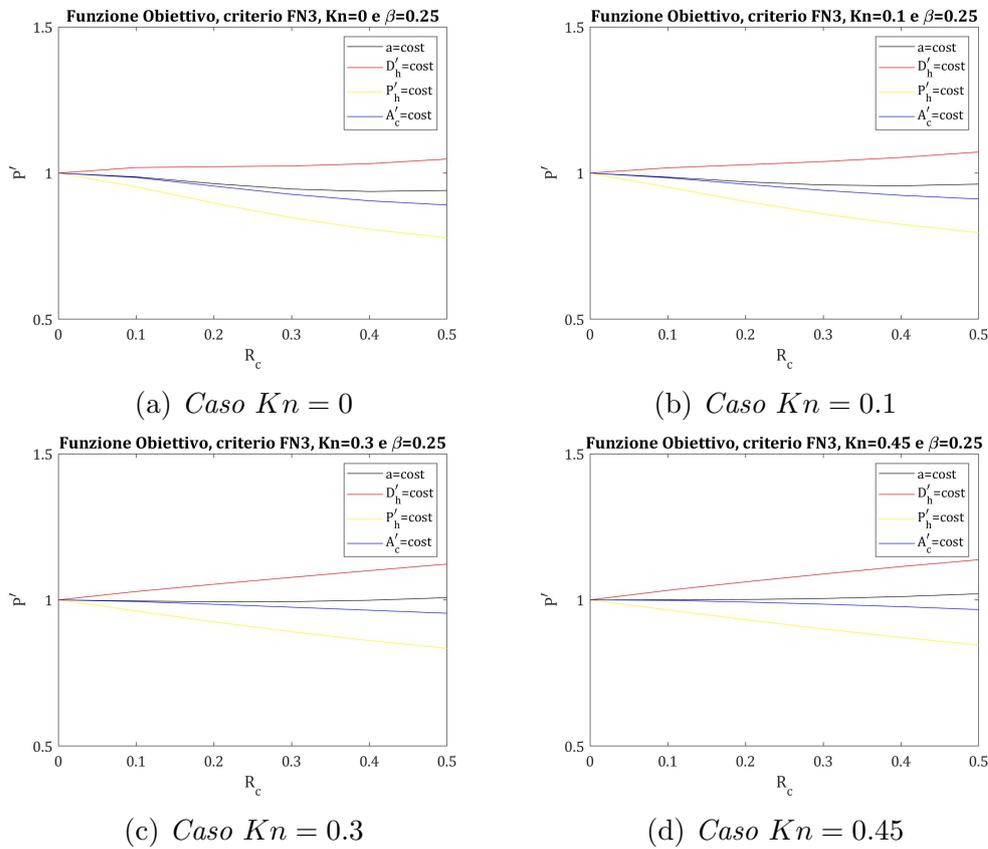


Figura 5.18: Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.25$ e vari valori di Knudsen

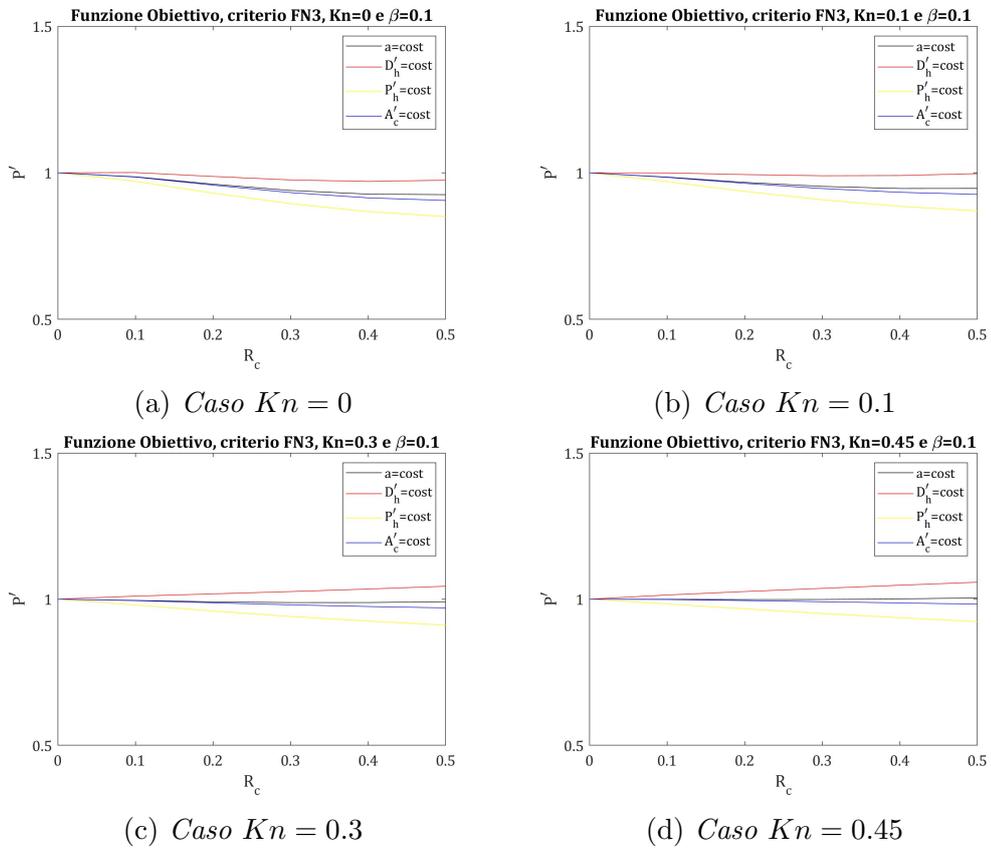


Figura 5.19: Funzione obiettivo, criterio FN3 per $\beta = 0.1$ e vari valori di Knudsen

Si può inoltre notare che al decrescere di β si ha un restringimento della forbice relativa alla funzione obiettivo per tutti i valori di Knudsen e tutte le restrizioni geometriche. Ciò risulta particolarmente evidente nelle ultime due figure (5.18 e 5.19), dove il valore della potenza P' si discosta di poche punti percentuali dal valore unitario che si ottiene in corrispondenza di $R_c = 0$.

5.5.8 Criterio VG2a

In questo criterio, la funzione obiettivo è la *lunghezza adimensionale* del condotto L' , che deve essere *minimizzata* mantenendo costanti e pari al valore unitario la portata \dot{m}' , la potenza P' e il salto di temperatura $\Delta T'$. Applicando tali restrizioni all'equazione 5.2, si ottiene la seguente espressione per la lunghezza:

$$L' = \frac{A_c' D_h'^2}{(fRe)'}$$

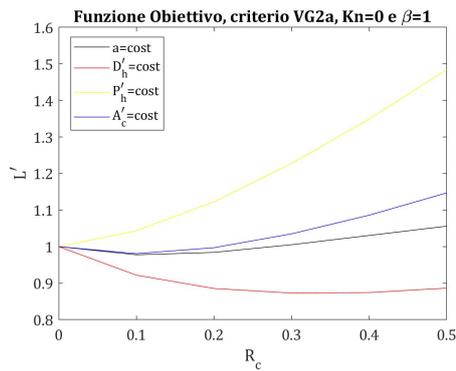
Per come è stata definita la lunghezza adimensionale L' , essa dipende anche dalla restrizione geometrica applicata, oltre che dai parametri geometrici e dal numero di Knudsen.

Vediamo ora come ottimizzare tale funzione obiettivo, raggruppando i risultati come si è fatto per il criterio precedente.

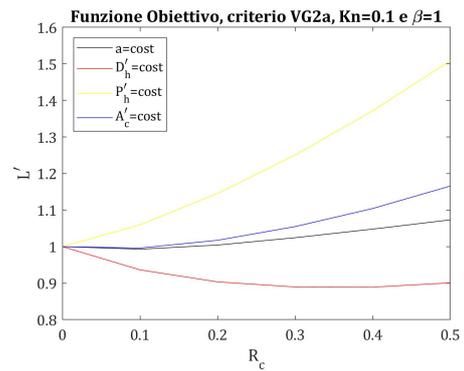
Caso $\beta = 1$

Riferendosi ai grafici in figura 5.20, è immediato notare come l'andamento riscontrato della funzione obiettivo sia molto simile per tutti i valori di Kn esaminati: l'unica differenza sostanziale è che, con il crescere del numero di Knudsen, crescono anche i valori raggiunti da L' per ogni valore di R_c . Questo è analogo a ciò che era accaduto per il criterio FN3.

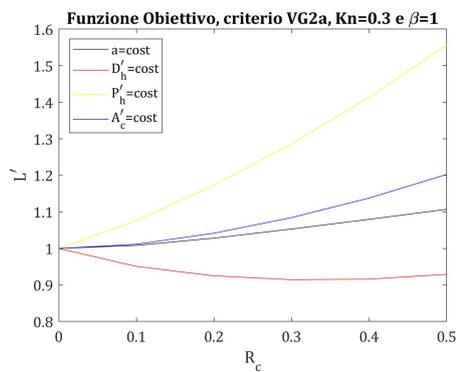
Ricordando che la funzione obiettivo deve essere minimizzata, si conclude che tale scopo viene raggiunto per la restrizione geometrica $D_h' = 1$ per $R_c = 0.5$ (sebbene già con il raggio di curvatura pari a 0.3 si abbia poca differenza dal minimo assoluto) e per tutte le altre restrizioni con $R_c = 0$; dunque, si può dire che il raggio di curvatura porti un giovamento solo per $D_h' = 1$.



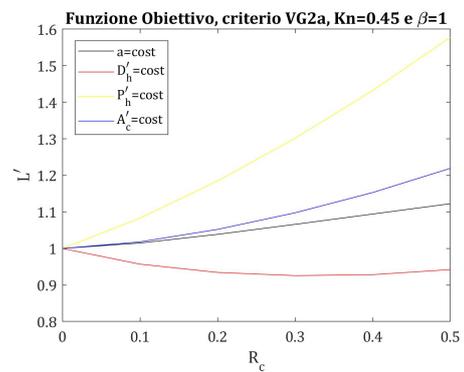
(a) *Caso $Kn = 0$*



(b) *Caso $Kn = 0.1$*



(c) *Caso $Kn = 0.3$*

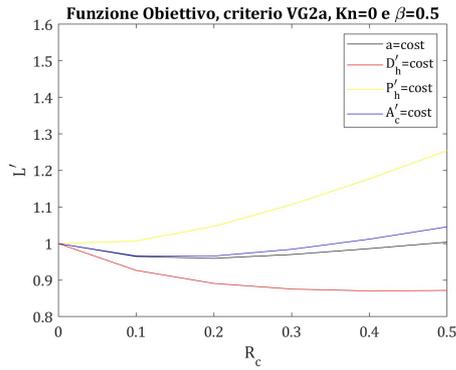


(d) *Caso $Kn = 0.45$*

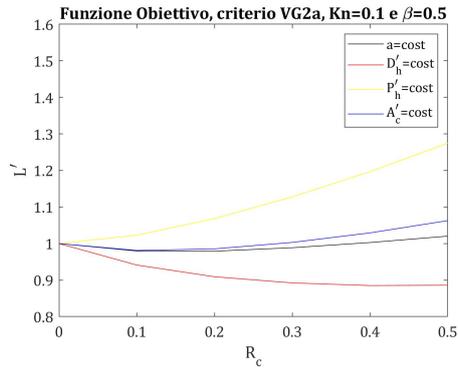
Figura 5.20: Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 1$ e vari valori di Knudsen

Caso $\beta = 0.5$

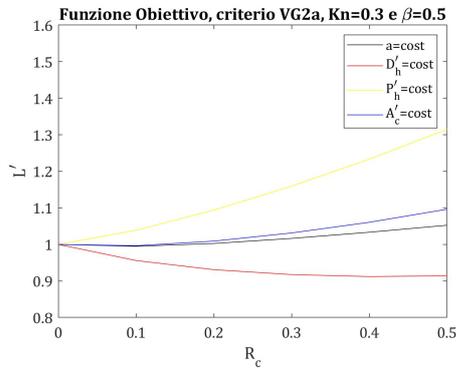
Anche qui è facile notare un restringimento della forbice dei valori per $R_c = R_{cmax}$, che comporta, per i casi in cui $Kn = 0$ e $Kn = 0.1$, un andamento pressoché costante ed unitario delle restrizioni geometriche $a/a_{ref} = 1$ e $A'_c = 1$, con al più un leggero aumento per quest'ultima. Invece per $P'_h = 1$ e $D'_h = 1$ l'andamento è analogo a quello che si ha per $\beta = 1$, solamente con dei valori raggiunti, in termini assoluti, minori.



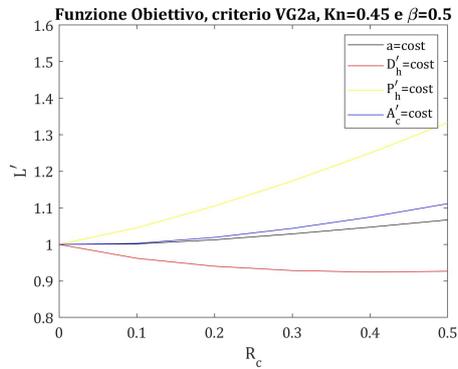
(a) *Caso $Kn = 0$*



(b) *Caso $Kn = 0.1$*



(c) *Caso $Kn = 0.3$*



(d) *Caso $Kn = 0.45$*

Figura 5.21: Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.5$ e vari valori di Knudsen

Caso $\beta = 0.25$ e $\beta = 0.1$

Anche per questo criterio si è scelto di raggruppare assieme questi ultimi due valori di β , in quanto tra loro non dissimili. Per $\beta = 0.25$ l'andamento è analogo a quello che si ha per $\beta = 0.5$, mentre per $\beta = 0.1$ tutti i valori sono concentrati attorno a $L' = 1$.

L'unica osservazione degna di nota è che nell'ultimo caso, per $Kn = 0$ e $Kn = 0.1$, la funzione obiettivo, seppur debolmente, è monotona decrescente con il crescere del raggio di curvatura.

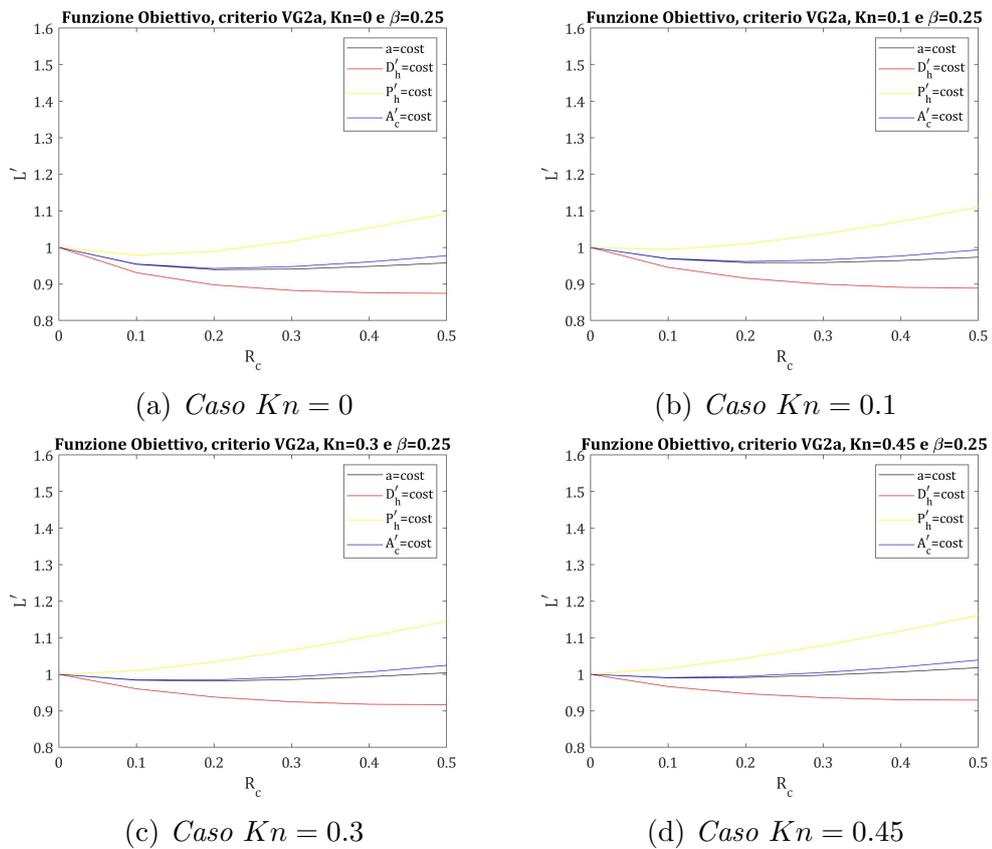
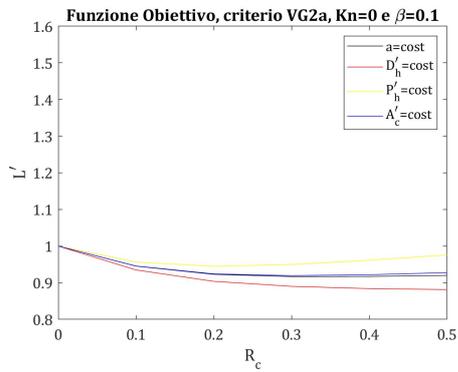
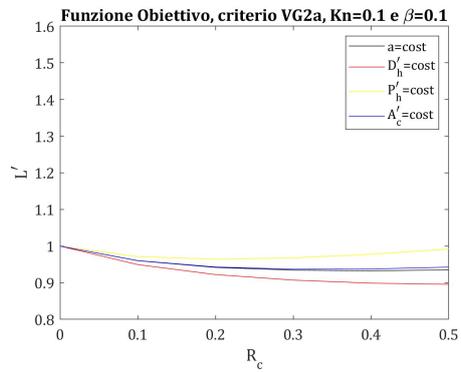


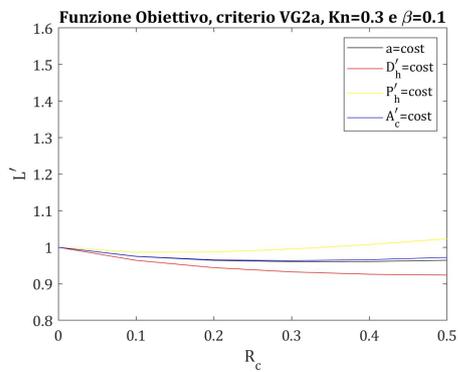
Figura 5.22: Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.25$ e vari valori di Knudsen



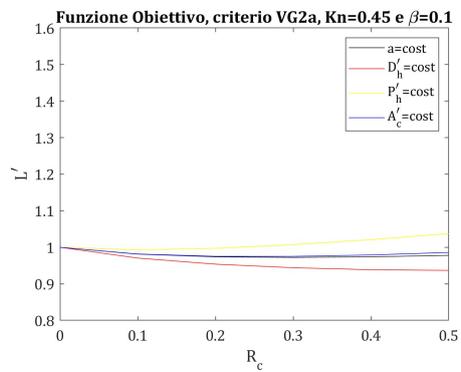
(a) *Caso $Kn = 0$*



(b) *Caso $Kn = 0.1$*



(c) *Caso $Kn = 0.3$*



(d) *Caso $Kn = 0.45$*

Figura 5.23: Funzione obiettivo, criterio VG2a per $\beta = 0.1$ e vari valori di Knudsen

5.5.9 Criterio VG2b

Per il criterio VG2b, la funzione obiettivo è la *temperatura adimensionale* $\Delta T'$, che deve essere *minimizzata*, mantenendo costanti e pari al valore unitario la portata \dot{m}' , la potenza P' e la potenza termica \dot{Q}' . L'andamento di P' è analogo a quello ottenuto per il criterio FN3, per cui si rimanda alla trattazione e ai grafici di questi. Per capirne il motivo, basta considerare le equazioni 5.1 e 5.2 ed applicare le varie restrizioni proprie di questo criterio ed ottenere la funzione obiettivo $\Delta T'$, del tutto analoga alla P' del criterio FN3.

5.6 Conclusioni e sviluppi futuri

Nel capitolo che si sta ora concludendo, si sono analizzate le prestazioni termo-idrauliche di un canale a sezione rettangolare con spigoli arrotondati, attraversato da un flusso gassoso, e dunque rarefatto, sotto condizioni di tipo T e con tutti e quattro i lati riscaldati. Oltre ai *nove* criteri PEC presi in esame, ad inizio capitolo si sono forniti anche i grafici relativi al campo di applicazione del numero di Knudsen e ai numeri di Nu e fRe .

I grafici delle funzioni obiettivo sono di fondamentale importanza per ogni problema legato alla progettazione di microcanali attraversati, in particolare, da un flusso gassoso. Questo sia perché in letteratura non sono presenti molti articoli scientifici riguardanti la rarefazione nei microcanali sia perché, come si è visto, la configurazione ottimale *non* è affatto univoca e dipende fortemente dai vari criteri PEC e dalle varie restrizioni geometriche analizzate.

L'analisi dei risultati ha portato alla conclusione che non vi sia una particolare restrizione geometrica o un particolare raggio di smusso che portino a determinati benefici; ma piuttosto, caso per caso, ci sono certe combinazioni che portano ai vantaggi maggiori. Per quanto riguarda il fattore di forma β , è invece possibile fare un discorso più generale: difatti, si è visto che al diminuire di questi diminuisce anche la dipendenza della funzione obiettivo dal raggio di smusso R_c ; ovvero, in linea di massima, quando β è minimo è minima anche la dispersione dei valori della funzione obiettivo per qualsiasi restrizione geometrica attorno al valore unitario di questa.

Per quanto riguarda i possibili sviluppi futuri, potrebbero essere interessanti certi effetti che vengono completamente trascurati in questa trattazione, come la dissipazione viscosa, la rugosità superficiale, lo scambio termico coniugato e la variazione delle proprietà termofisiche in funzione di pressione e temperatura. Inoltre, anche la variazione delle condizioni termiche rispetto a quelle di tipo T esaminate, potrebbe avere dei risultati e riscontri pratici.

Appendice

In questa sezione vengono presentati *quattro* script Matlab, funzionali per la realizzazione dei grafici dell'elaborato. Non si è riportato lo Script dell'Ing. Suzzi in quanto i valori numerici di Nu ed fRe che esso permette di ricavare sono già stati presentati e comunque in buona parte presenti anche negli script seguenti.

- Il primo script permette di graficare i numeri di Nu e fRe nel caso di sezione quadrata e spigoli vivi, ovvero $\beta = 1$ e $R_c = 0$, sia in scala logaritmica che non. Viene utilizzato nel capitolo 5, figura 5.1;
- Il secondo, sempre usato nel capitolo 5 per le figure 5.2, 5.3, 5.4 e 5.5, serve per la generazione di grafici 3D, i quali mettono in relazione Nu , fRe e Kn al variare discreto di β , il quale può avere il valore di 1, 0.5, 0.25 o 0.1;
- Il penultimo script è relativo al criterio FG1a, dunque permette la generazione dei grafici relativi a questo criterio. Viene preso questo come rappresentativo per tutti i criteri fino al FN2, in quanto tra loro molto simili nella struttura;
- L'ultimo è relativo al criterio FN3, analogo a quello del criterio VG2b e simile al VG2a. Si è scelto di riportare anche questo perché diverso in certe sue parti rispetto allo script precedente.

Script numero 1: grafici Nu e fRe per $\beta = 1$ e $R_c = 0$.

```

%% Sono i grafici per Rc=0 e Beta=1 (quadrato spigoli vivi) di Nu e fRe in scala log e normale
% Servono per vedere in che range di Kn valgono le nostre equazioni (fino a Kn=0.45 circa)
% NB: guardare quelli in scala logaritmica!!!

clc, clear all, close all

%valori indagati di Kn
valoriKn=[0 0.0001 0.001 0.01 0.03 ...
          0.05 0.07 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.7 1 ];

%valori Nu fRe trovati per via numerica con script di Suzzi
valoriNu=[2.9779 2.9773 2.9719 2.9159 2.7769 ...
          2.6320 2.4880 2.2831 1.7400 1.3801 ...
          1.1356 0.9617 0.7333 0.5385];
valorifRe=[14.2296 14.2183 14.1167 13.1804 11.5067 ...
          10.2270 9.2143 8.0341 5.6620 4.3874 ...
          3.5867 3.0355 2.3240 1.7210 ];

Kn=logspace(-5,1,101);

%%approssimazione con minizzazione errore quadratico medio ...
...con relazione polinomiale fratta

%calcolo e plot di Nu
err=@(p) p(1)./(1+p(2).*valoriKn+p(3).*(valoriKn.^2))-valoriNu;
po=[1 1 1];
p=lsqnonlin(err,po);
Nu=p(1)./(1+p(2).*Kn+p(3).*(Kn.^2));

figure
semilogx(Kn,Nu,valorikn,valorinu,'o');
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('Kn');
ylabel('Nu');
axis([0 1 0 4]);
figure
plot(Kn,Nu,valorikn,valorinu,'o');

H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('Kn');
ylabel('Nu');
axis([0 1 0 4]);

%calcolo e plot di fRe
err=@(s) s(1)./(1+s(2).*valoriKn)-valorifRe;
so=[1 1];
s=lsqnonlin(err,so);
fRe=s(1)./(1+s(2).*Kn);

figure
semilogx(Kn,fRe,valorikn,valorifre,'o');
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('Kn');
ylabel('fRe');
axis([0 1 0 15]);
figure
plot(Kn,fRe,valorikn,valorifre,'o');

H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('Kn');
ylabel('fRe');
axis([0 1 0 15]);

```

Script numero 2: grafici 3D, Nu , fRe e Kn .

```

%%grafici 3D che correlano Nu, fRe e Kn al variare di Beta=[0.1 0.25 0.5 1]

clc
clear all
close all

%valori indagati di Rc=rc/a
valoriRc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];
%valori indagati di Kn=lamba/Dh
valoriKn=[0 0.01 0.1 0.3 0.45];

%valori Nu fRe trovati per via numerica con script di Suzzi per Beta=0.1
valoriNu(1,:)= [5.9093 5.9970 6.0714 6.1258 6.1555 6.1567]; %0
valoriNu(2,:)= [5.4829 5.5612 5.6271 5.6751 5.7012 5.7030]; %0.01
valoriNu(3,:)= [3.0890 3.1239 3.1529 3.1738 3.1852 3.1866]; %0.1
valoriNu(4,:)= [1.4863 1.5010 1.5130 1.5216 1.5266 1.5277]; %0.3
valoriNu(5,:)= [1.0694 1.0795 1.0875 1.0934 1.0968 1.0976]; %0.45

valorifRe(1,:)= [21.1744 21.4555 21.6492 21.7729 21.8403 21.8570]; %0
valorifRe(2,:)= [19.0682 19.3087 19.4753 19.5826 19.6418 19.6570]; %0.01
valorifRe(3,:)= [10.0908 10.1852 10.2514 10.2950 10.3197 10.3266]; %0.1
valorifRe(4,:)= [4.9537 4.9873 5.0107 5.0262 5.0350 5.0374]; %0.3
valorifRe(5,:)= [3.5904 3.6114 3.6261 3.6357 3.6412 3.6426]; %0.45

%interpolazione e plot di Nu(Rc) e fRe(Rc)

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valoriKn,valoriNu,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('Nu');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di Nu per \beta=0.1');

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valoriKn,valorifRe,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('fRe');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di fRe per \beta=0.1')

%valori Nu fRe trovati per via numerica con script di Suzzi per Beta=0.25

%valori indagati di Rc=rc/a
valoriRc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];
%valori indagati di Kn=lamba/Dh
valoriKn=[0 0.01 0.1 0.3 0.45];

valoriNu1(1,:)= [4.4414 4.5870 4.7102 4.7981 4.8405 4.8314]; %0
valoriNu1(2,:)= [4.1909 4.3241 4.4361 4.5159 4.5549 4.5479]; %0.01
valoriNu1(3,:)= [2.6363 2.7044 2.7607 2.8013 2.8236 2.8261]; %0.1
valoriNu1(4,:)= [1.4005 1.4283 1.4503 1.4662 1.4756 1.4785]; %0.3
valoriNu1(5,:)= [1.0384 1.0557 1.0690 1.0784 1.0840 1.0859]; %0.45

valorifRe1(1,:)= [18.2370 18.7632 19.1121 19.3206 19.4183 19.4165]; %0
valorifRe1(2,:)= [16.5893 17.0463 17.3514 17.5364 17.6256 17.6273]; %0.01
valorifRe1(3,:)= [9.2135 9.4046 9.5343 9.6166 9.6597 9.6661]; %0.1
valorifRe1(4,:)= [4.6878 4.7567 4.8035 4.8335 4.8497 4.8531]; %0.3
valorifRe1(5,:)= [3.4389 3.4815 3.5104 3.5289 3.5390 3.5414]; %0.45

```

```

%interpolazione e plot di Nu(Rc) e fRe(Rc)

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valorikn,valorinu1,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('Nu');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di Nu per \beta=0.25');

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valorikn,valorifre1,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('fRe');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di fRe per \beta=0.25')

%valori Nu fRe trovati per via numerica con script di Suzzi per Beta=0.5

%valori indagati di Rc=rc/a
valoriRc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];
%valori indagati di Kn=lamba/Dh
valoriKn=[0 0.01 0.1 0.3 0.45];

valoriNu2(1,:)=[3.3928 3.5786 3.7350 3.8466 3.9042 3.9031]; %0
valoriNu2(2,:)=[3.2757 3.4515 3.5990 3.7051 3.7620 3.7655]; %0.01
valoriNu2(3,:)=[2.3732 2.4781 2.5639 2.6268 2.6656 2.6793]; %0.1
valoriNu2(4,:)=[1.3816 1.4209 1.4505 1.4711 1.4840 1.4894]; %0.3
valoriNu2(5,:)=[1.0394 1.0617 1.0778 1.0887 1.0954 1.0983]; %0.45

valorifre2(1,:)=[15.5511 16.2801 16.7275 16.9662 17.0579 17.0299]; %0
valorifre2(2,:)=[14.3059 14.9500 15.3501 15.5702 15.6618 15.6467]; %0.01
valorifre2(3,:)=[8.4141 8.7046 8.8916 9.0053 9.0646 9.0761]; %0.1
valorifre2(4,:)=[4.4761 4.5826 4.6511 4.6940 4.7180 4.7256]; %0.3
valorifre2(5,:)=[3.3301 3.3949 3.4363 3.4623 3.4771 3.4822]; %0.45

%interpolazione e plot di Nu(Rc) e fRe(Rc)

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valorikn,valorinu2,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('Nu');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di Nu per \beta=0.5');

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valorikn,valorifre2,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);

```

```

H=gca;
get (H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('fRe');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di fRe per \beta=0.5')

%valori Nu fRe trovati per via numerica con script di Suzzi per Beta=1

%valori indagati di Rc=rc/a
valoriRc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5];
%valori indagati di Kn=lamba/Dh
valoriKn=[0 0.01 0.1 0.3 0.45];

valoriNu3(1,:)= [2.9779 3.2196 3.4126 3.5453 3.6260 3.6576]; %0
valoriNu3(2,:)= [2.9151 3.1484 3.3551 3.4656 3.5465 3.5783]; %0.01
valoriNu3(3,:)= [2.2831 2.4327 2.5477 2.6282 2.6783 2.6973]; %0.1
valoriNu3(4,:)= [1.3801 1.4327 1.4683 1.4910 1.5044 1.5093]; %0.3
valoriNu3(5,:)= [1.0418 1.0705 1.0888 1.1002 1.1067 1.1091]; %0.45

valorifRe3(1,:)= [14.2296 15.1685 15.6484 15.8602 15.9564 16.0021]; %0
valorifRe3(2,:)= [13.1804 14.0198 14.4603 14.6677 14.7695 14.8167]; %0.01
valorifRe3(3,:)= [8.0341 8.4320 8.6584 8.7865 8.8593 8.8897]; %0.1
valorifRe3(4,:)= [4.3874 4.5342 4.6180 4.6669 4.6952 4.7062]; %0.3
valorifRe3(5,:)= [3.2879 3.3762 3.4262 3.4553 3.4721 3.4785]; %0.45

%interpolazione e plot di Nu(Rc) e fRe(Rc)

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valoriKn,valoriNu3,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get (H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('Nu');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di Nu per \beta=1');

figure
xq=linspace(min(valoriRc),max(valoriRc),101);
yq=linspace(min(valoriKn),max(valoriKn),101);
Vq=interp2(valoriRc,valoriKn,valorifRe3,xq,yq,'spline');
surf(xq,yq,Vq);
H=gca;
get (H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Kn');
zlabel('fRe');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 0.45]);
title('Numero di fRe per \beta=1')

```

Script numero 3: criterio FG1a, grafici bidimensionali.

```

%% PEC FG1a: L'=1, m'=1, DeltaT'=1, Ob: massimizzare Q'
clear all, clc
B=[1 0.5 0.25 0.1]; % valori indagati per B=a/b: fattore geometrico.
j=1; % B(j) definisce il valore di Beta che mi interessa indagare.
Rc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]'; % Rc=rc/a
Kn=[0 0.01 0.1 0.3 0.45];
%NB: sono ordinati secondo Rc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]

% Scrivo i numeri di Nu per Kn=0
Nu1=zeros(4,6);
Nu1(1,:)= [2.9779 3.2196 3.4126 3.5453 3.6260 3.6576]; % Nu per Beta=1
Nuref1=2.9779;
Nu1(2,:)= [3.3928 3.5786 3.7350 3.8466 3.9042 3.9031]; % Nu per Beta=0.5
Nuref2=3.3928;
Nu1(3,:)= [4.4414 4.5870 4.7102 4.7981 4.8405 4.8314]; % Nu per Beta=0.25
Nuref3=4.4414;
Nu1(4,:)= [5.9093 5.9970 6.0714 6.1258 6.1555 6.1567]; % Nu per Beta=0.1
Nuref4=5.9093;

Nu1norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu1norm(1,i)=Nu1(1,i)./Nuref1;
    Nu1norm(2,i)=Nu1(2,i)./Nuref2;
    Nu1norm(3,i)=Nu1(3,i)./Nuref3;
    Nu1norm(4,i)=Nu1(4,i)./Nuref4;
end

Q1=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        Q1(i,m)=Nu1norm(i,m).*((1+1./B(j))-2.*Rc(m).*(1-pi/4)).^2)./((1+1./B(j)).^2).*(4./B(j))./(4./B(j)-Rc(m)^2.*(4-pi));
    end
end

% Scrivo i numeri di Nu per Kn=0.01
Nu2=zeros(4,6);
Nu2(1,:)= [2.9151 3.1484 3.3551 3.4656 3.5465 3.5783]; % Nu per Beta=1
Nuref11=2.9151;
Nu2(2,:)= [3.2756 3.4515 3.5990 3.7051 3.7620 3.7655]; % Nu per Beta=0.5
Nuref22=3.2756;
Nu2(3,:)= [4.1909 4.3241 4.4361 4.5159 4.5549 4.5479]; % Nu per Beta=0.25
Nuref33=4.1909;
Nu2(4,:)= [5.4829 5.5612 5.6271 5.6751 5.7012 5.7030]; % Nu per Beta=0.1
Nuref44=5.4829;

Nu2norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu2norm(1,i)=Nu2(1,i)./Nuref11;
    Nu2norm(2,i)=Nu2(2,i)./Nuref22;
    Nu2norm(3,i)=Nu2(3,i)./Nuref33;
    Nu2norm(4,i)=Nu2(4,i)./Nuref44;
end

Q2=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        Q2(i,m)=Nu2norm(i,m).*((1+1./B(j))-2.*Rc(m).*(1-pi/4)).^2)./((1+1./B(j)).^2).*(4./B(j))./(4./B(j)-Rc(m)^2.*(4-pi));
    end
end

% Scrivo i numeri di Nu per Kn=0.1
Nu3=zeros(4,6);
Nu3(1,:)= [2.2831 2.4327 2.5477 2.6282 2.6783 2.6973]; % Nu per Beta=1
Nuref111=2.2831;
Nu3(2,:)= [2.3732 2.4781 2.5639 2.6268 2.6656 2.6793]; % Nu per Beta=0.5
Nuref222=2.3732;
Nu3(3,:)= [2.6363 2.7044 2.7607 2.8013 2.8236 2.8261]; % Nu per Beta=0.25
Nuref333=2.6363;
Nu3(4,:)= [3.0890 3.1239 3.1529 3.1738 3.1852 3.1866]; % Nu per Beta=0.1
Nuref444=3.0890;

Nu3norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu3norm(1,i)=Nu3(1,i)./Nuref111;

```

```

        Nu3norm(2,i)=Nu3(2,i)./Nuref222;
        Nu3norm(3,i)=Nu3(3,i)./Nuref333;
        Nu3norm(4,i)=Nu3(4,i)./Nuref444;
    end

    Q3=zeros(4,6);
    for i=1:4
        for m=1:6
            Q3(i,m)=Nu3norm(i,m).*((1+1./B(j)-2.*Rc(m).*(1-pi/4)).^2)./((1+1./B(j)).^2).*(4./B(j))./(4./B(j)-Rc(m)^2.*(4-pi)));
        end
    end

    % Scrivo i numeri di Nu per Kn=0.3
    Nu4=zeros(4,6);
    Nu4(1,:)= [1.3801 1.4327 1.4683 1.4910 1.5044 1.5093]; % Nu per Beta=1
    Nuref1111=1.3801;
    Nu4(2,:)= [1.3816 1.4209 1.4505 1.4711 1.4840 1.4894]; % Nu per Beta=0.5
    Nuref2222=1.3816;
    Nu4(3,:)= [1.4005 1.4283 1.4503 1.4662 1.4756 1.4785]; % Nu per Beta=0.25
    Nuref3333=1.4005;
    Nu4(4,:)= [1.4863 1.5010 1.5130 1.5216 1.5266 1.5277]; % Nu per Beta=0.1
    Nuref4444=1.4863;

    Nu4norm=zeros(4,6);
    for i=1:6
        Nu4norm(1,i)=Nu4(1,i)./Nuref1111;
        Nu4norm(2,i)=Nu4(2,i)./Nuref2222;
        Nu4norm(3,i)=Nu4(3,i)./Nuref3333;
        Nu4norm(4,i)=Nu4(4,i)./Nuref4444;
    end

    Q4=zeros(4,6);
    for i=1:4
        for m=1:6
            Q4(i,m)=Nu4norm(i,m).*((1+1./B(j)-2.*Rc(m).*(1-pi/4)).^2)./((1+1./B(j)).^2).*(4./B(j))./(4./B(j)-Rc(m)^2.*(4-pi)));
        end
    end

    % Scrivo i numeri di Nu per Kn=0.45
    Nu5=zeros(4,6);
    Nu5(1,:)= [1.0418 1.0705 1.0888 1.1002 1.1067 1.1091]; % Nu per Beta=1
    Nuref11111=1.0418;
    Nu5(2,:)= [1.0394 1.0617 1.0778 1.0887 1.0954 1.0983]; % Nu per Beta=0.5
    Nuref22222=1.0394;
    Nu5(3,:)= [1.0384 1.0557 1.0690 1.0784 1.0840 1.0859]; % Nu per Beta=0.25
    Nuref33333=1.0384;
    Nu5(4,:)= [1.0694 1.0795 1.0875 1.0934 1.0968 1.0976]; % Nu per Beta=0.1
    Nuref44444=1.0694;

    Nu5norm=zeros(4,6);
    for i=1:6
        Nu5norm(1,i)=Nu5(1,i)./Nuref11111;
        Nu5norm(2,i)=Nu5(2,i)./Nuref22222;
        Nu5norm(3,i)=Nu5(3,i)./Nuref33333;
        Nu5norm(4,i)=Nu5(4,i)./Nuref44444;
    end

    Q5=zeros(4,6);
    for i=1:4
        for m=1:6
            Q5(i,m)=Nu5norm(i,m).*((1+1./B(j)-2.*Rc(m).*(1-pi/4)).^2)./((1+1./B(j)).^2).*(4./B(j))./(4./B(j)-Rc(m)^2.*(4-pi)));
        end
    end

    figure
    plot(Rc,Q1(1,:), 'k-');
    hold on
    plot(Rc,Q2(1,:), 'r-');
    hold on
    plot(Rc,Q3(1,:), 'y-');
    hold on
    plot(Rc,Q4(1,:), 'b-');
    hold on
    plot(Rc,Q5(1,:), '-');
    hold on
    legend('Kn=0', 'Kn=0.01', 'Kn=0.1', 'Kn=0.3', 'Kn=0.45')
    H=gca;
    get(H);
    set(H, 'FontName', 'Cambria');

```

```
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('Q^{\prime}');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FG1a, \beta=',num2str(B(j))]);
```

Script numero 4: criterio FN3, grafici bidimensionali.

```

%% PEC FN3: m'=1, Q'=1, DeltaT'=1, Ob: minimizzare P'
clear all, clc
B=[1 0.5 0.25 0.1]; % valori indagati per B=a/b: fattore geometrico.
j=4; % B(j) definisce il valore di Beta che mi interessa indagare.
Rc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]'; % Rc=rc/a

%NB: sono ordinati secondo Rc=[0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5]

% Scrivo i numeri di Nu e fRe per Kn=0 e li normalizzo
Nu1=zeros(4,6);
Nu1(1,:)= [2.9779 3.2196 3.4126 3.5453 3.6260 3.6576]; % Nu per Beta=1
Nuref1=2.9779;
Nu1(2,:)= [3.3928 3.5786 3.7350 3.8466 3.9042 3.9031]; % Nu per Beta=0.5
Nuref2=3.3928;
Nu1(3,:)= [4.4414 4.5870 4.7102 4.7981 4.8405 4.8314]; % Nu per Beta=0.25
Nuref3=4.4414;
Nu1(4,:)= [5.9093 5.9970 6.0714 6.1258 6.1555 6.1567]; % Nu per Beta=0.1
Nuref4=5.9093;

fRe1=zeros(4,6);
fRe1(1,:)= [14.2296 15.1685 15.6484 15.8602 15.9564 16.0021]; % fRe per Beta=1
fReref1=14.2296;
fRe1(2,:)= [15.5511 16.2801 16.7275 16.9662 17.0579 17.0299]; % fRe per Beta=0.5
fReref2=15.5511;
fRe1(3,:)= [18.2370 18.7632 19.1121 19.3206 19.4183 19.4165]; % fRe per Beta=0.25
fReref3=18.2370;
fRe1(4,:)= [21.1744 21.4555 21.6492 21.7729 21.8403 21.8570]; % fRe per Beta=0.1
fReref4=21.1744;

Nu1norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu1norm(1,i)=Nu1(1,i)./Nuref1;
    Nu1norm(2,i)=Nu1(2,i)./Nuref2;
    Nu1norm(3,i)=Nu1(3,i)./Nuref3;
    Nu1norm(4,i)=Nu1(4,i)./Nuref4;
end

fRe1norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    fRe1norm(1,i)=fRe1(1,i)./fReref1;
    fRe1norm(2,i)=fRe1(2,i)./fReref2;
    fRe1norm(3,i)=fRe1(3,i)./fReref3;
    fRe1norm(4,i)=fRe1(4,i)./fReref4;
end

% Scrivo i numeri di Nu e fRe per Kn=0.01 e li normalizzo
Nu2=zeros(4,6);
Nu2(1,:)= [2.9151 3.1484 3.3551 3.4656 3.5465 3.5783]; % Nu per Beta=1
Nuref11=2.9151;
Nu2(2,:)= [3.2756 3.4515 3.5990 3.7051 3.7620 3.7655]; % Nu per Beta=0.5
Nuref22=3.2756;
Nu2(3,:)= [4.1909 4.3241 4.4361 4.5159 4.5549 4.5479]; % Nu per Beta=0.25
Nuref33=4.1909;
Nu2(4,:)= [5.4829 5.5612 5.6271 5.6751 5.7012 5.7030]; % Nu per Beta=0.1
Nuref44=5.4829;

fRe2=zeros(4,6);
fRe2(1,:)= [13.1804 14.0198 14.4603 14.6677 14.7695 14.8167]; % fRe per Beta=1
fReref11=13.1804;
fRe2(2,:)= [14.3059 14.9500 15.3501 15.5702 15.6618 15.6467]; % fRe per Beta=0.5
fReref22=14.3059;
fRe2(3,:)= [16.5893 17.0463 17.3514 17.5364 17.6256 17.6273]; % fRe per Beta=0.25
fReref33=16.5893;
fRe2(4,:)= [19.0682 19.3087 19.4753 19.5826 19.6418 19.6570]; % fRe per Beta=0.1
fReref44=19.0682;

Nu2norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu2norm(1,i)=Nu2(1,i)./Nuref11;
    Nu2norm(2,i)=Nu2(2,i)./Nuref22;
    Nu2norm(3,i)=Nu2(3,i)./Nuref33;
    Nu2norm(4,i)=Nu2(4,i)./Nuref44;
end

fRe2norm=zeros(4,6);

```

```

for i=1:6
    fRe2norm(1,i)=fRe2(1,i)./fReref11;
    fRe2norm(2,i)=fRe2(2,i)./fReref22;
    fRe2norm(3,i)=fRe2(3,i)./fReref33;
    fRe2norm(4,i)=fRe2(4,i)./fReref44;
end

% Scrivo i numeri di Nu e fRe per Kn=0.1 e li normalizzo
Nu3=zeros(4,6);
Nu3(1,:)= [2.2831 2.4327 2.5477 2.6282 2.6783 2.6973]; % Nu per Beta=1
Nuref111=2.2831;
Nu3(2,:)= [2.3732 2.4781 2.5639 2.6268 2.6656 2.6793]; % Nu per Beta=0.5
Nuref222=2.3732;
Nu3(3,:)= [2.6363 2.7044 2.7607 2.8013 2.8236 2.8261]; % Nu per Beta=0.25
Nuref333=2.6363;
Nu3(4,:)= [3.0890 3.1239 3.1529 3.1738 3.1852 3.1866]; % Nu per Beta=0.1
Nuref444=3.0890;

fRe3=zeros(4,6);
fRe3(1,:)= [8.0341 8.4320 8.6584 8.7862 8.8593 8.8897]; % fRe per Beta=1
fReref111=8.0341;
fRe3(2,:)= [8.4141 8.7046 8.8916 9.0053 9.0646 9.0761]; % fRe per Beta=0.5
fReref222=8.4141;
fRe3(3,:)= [9.2135 9.4046 9.5343 9.6166 9.6597 9.6661]; % fRe per Beta=0.25
fReref333=9.2135;
fRe3(4,:)= [10.0908 10.1852 10.2514 10.2950 10.3197 10.3266]; % fRe per Beta=0.1
fReref444=10.0908;

Nu3norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu3norm(1,i)=Nu3(1,i)./Nuref111;
    Nu3norm(2,i)=Nu3(2,i)./Nuref222;
    Nu3norm(3,i)=Nu3(3,i)./Nuref333;
    Nu3norm(4,i)=Nu3(4,i)./Nuref444;
end

fRe3norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    fRe3norm(1,i)=fRe3(1,i)./fReref111;
    fRe3norm(2,i)=fRe3(2,i)./fReref222;
    fRe3norm(3,i)=fRe3(3,i)./fReref333;
    fRe3norm(4,i)=fRe3(4,i)./fReref444;
end

% Scrivo i numeri di Nu e fRe per Kn=0.3 e li normalizzo
Nu4=zeros(4,6);
Nu4(1,:)= [1.3801 1.4327 1.4683 1.4910 1.5044 1.5093]; % Nu per Beta=1
Nuref1111=1.3801;
Nu4(2,:)= [1.3816 1.4209 1.4505 1.4711 1.4840 1.4894]; % Nu per Beta=0.5
Nuref2222=1.3816;
Nu4(3,:)= [1.4005 1.4283 1.4503 1.4662 1.4756 1.4785]; % Nu per Beta=0.25
Nuref3333=1.4005;
Nu4(4,:)= [1.4863 1.5010 1.5130 1.5216 1.5266 1.5277]; % Nu per Beta=0.1
Nuref4444=1.4863;

fRe4=zeros(4,6);
fRe4(1,:)= [4.3874 4.5342 4.6180 4.6669 4.6952 4.7062]; % fRe per Beta=1
fReref1111=4.3874;
fRe4(2,:)= [4.4761 4.5826 4.6511 4.6940 4.7180 4.7257]; % fRe per Beta=0.5
fReref2222=4.4761;
fRe4(3,:)= [4.6878 4.7567 4.8035 4.8335 4.8497 4.8531]; % fRe per Beta=0.25
fReref3333=4.6878;
fRe4(4,:)= [4.9537 4.9873 5.0107 5.0262 5.0350 5.0374]; % fRe per Beta=0.1
fReref4444=4.9537;

Nu4norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu4norm(1,i)=Nu4(1,i)./Nuref1111;
    Nu4norm(2,i)=Nu4(2,i)./Nuref2222;
    Nu4norm(3,i)=Nu4(3,i)./Nuref3333;
    Nu4norm(4,i)=Nu4(4,i)./Nuref4444;
end

fRe4norm=zeros(4,6);
for i=1:6

```

```

fRe4norm(1,i)=fRe4(1,i)./fReref1111;
fRe4norm(2,i)=fRe4(2,i)./fReref2222;
fRe4norm(3,i)=fRe4(3,i)./fReref3333;
fRe4norm(4,i)=fRe4(4,i)./fReref4444;
end

% Scrivo i numeri di Nu e fRe per Kn=0.45 e li normalizzo
Nu5=zeros(4,6);
Nu5(1,:)= [1.0418 1.0705 1.0888 1.1002 1.1067 1.1091]; % Nu per Beta=1
Nuref11111=1.0418;
Nu5(2,:)= [1.0394 1.0617 1.0778 1.0887 1.0954 1.0983]; % Nu per Beta=0.5
Nuref22222=1.0394;
Nu5(3,:)= [1.0384 1.0557 1.0690 1.0784 1.0840 1.0859]; % Nu per Beta=0.25
Nuref33333=1.0384;
Nu5(4,:)= [1.0694 1.0795 1.0875 1.0934 1.0968 1.0976]; % Nu per Beta=0.1
Nuref44444=1.0694;

fRe5=zeros(4,6);
fRe5(1,:)= [3.2879 3.3762 3.4262 3.4553 3.4721 3.4785]; % fRe per Beta=1
fReref11111=3.2879;
fRe5(2,:)= [3.3301 3.3949 3.4363 3.4623 3.4771 3.4822]; % fRe per Beta=0.5
fReref22222=3.3301;
fRe5(3,:)= [3.4389 3.4815 3.5104 3.5289 3.5390 3.5414]; % fRe per Beta=0.25
fReref33333=3.4389;
fRe5(4,:)= [3.5904 3.6114 3.6261 3.6357 3.6412 3.6426]; % fRe per Beta=0.1
fReref44444=3.5904;

Nu5norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    Nu5norm(1,i)=Nu5(1,i)./Nuref11111;
    Nu5norm(2,i)=Nu5(2,i)./Nuref22222;
    Nu5norm(3,i)=Nu5(3,i)./Nuref33333;
    Nu5norm(4,i)=Nu5(4,i)./Nuref44444;
end

fRe5norm=zeros(4,6);
for i=1:6
    fRe5norm(1,i)=fRe5(1,i)./fReref11111;
    fRe5norm(2,i)=fRe5(2,i)./fReref22222;
    fRe5norm(3,i)=fRe5(3,i)./fReref33333;
    fRe5norm(4,i)=fRe5(4,i)./fReref44444;
end

%%%% Metto in ordine le 4 restrizioni geometriche (a=cost, Dhnorm=cost,
%%%% Phnorm=cost e Acnorm=cost) e calcolo DeltaT per ogni restrizione.
%%%% Kn=0
DT1a=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT1a(i,m)=(fRe1norm(i,m)./Nu1norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end
DT1b=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT1b(i,m)=(fRe1norm(i,m)./Nu1norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((4.*(1+(1./B(j))-2.*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT1c=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT1c(i,m)=(fRe1norm(i,m)./Nu1norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((1+1./B(j))./(1+1./B(j))-2.*Rc
    end
end
DT1d=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT1d(i,m)=(fRe1norm(i,m)./Nu1norm(i,m)).*(1-B(j)).*(1-pi./4).*Rc(m)^2/(1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))^2;
    end
end

figure
plot(Rc,DT1a(1,:), 'k-');
hold on
plot(Rc,DT1b(1,:), 'r-');

```

```

hold on
plot(Rc,DT1c(1,:), 'y-');
hold on
plot(Rc,DT1d(1,:), 'b-');
hold on
legend('a=cost', 'D_h^\prime=cost', 'P_h^\prime=cost', 'A_c^\prime=cost')
H=gca;
get(H);
set(H, 'FontName', 'Cambria');
set(H, 'FontSize', 13);
xlabel('R_c');
ylabel('P^\prime');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FN3, Kn=0 e \beta=', num2str(B(j))]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Kn=0.01%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DT2a=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT2a(i,m)=(fRe2norm(i,m)/Nu2norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end
DT2b=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT2b(i,m)=(fRe2norm(i,m)/Nu2norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((4.*(1+(1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT2c=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT2c(i,m)=(fRe2norm(i,m)/Nu2norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((1+1./B(j))./(1+1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT2d=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT2d(i,m)=(fRe2norm(i,m)/Nu2norm(i,m)).*(1-B(j)).*(1-pi./4).*Rc(m)^2/(1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))^2;
    end
end

figure
plot(Rc,DT2a(1,:), 'k-');
hold on
plot(Rc,DT2b(1,:), 'r-');
hold on
plot(Rc,DT2c(1,:), 'y-');
hold on
plot(Rc,DT2d(1,:), 'b-');
hold on
legend('a=cost', 'D_h^\prime=cost', 'P_h^\prime=cost', 'A_c^\prime=cost')
H=gca;
get(H);
set(H, 'FontName', 'Cambria');
set(H, 'FontSize', 13);
xlabel('R_c');
ylabel('P^\prime');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FN3, Kn=0.01 e \beta=', num2str(B(j))]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Kn=0.1%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DT3a=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT3a(i,m)=(fRe3norm(i,m)/Nu3norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end
DT3b=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT3b(i,m)=(fRe3norm(i,m)/Nu3norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((4.*(1+(1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT3c=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT3c(i,m)=(fRe3norm(i,m)/Nu3norm(i,m)).*(1./((1-(B(j))./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((1+1./B(j))./(1+1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end

```

```

end
end
DT3d=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT3d(i,m)=(fRe3norm(i,m)./Nu3norm(i,m)).*(1-B(j).*(1-pi./4).*Rc(m)^2/(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end

figure
plot(Rc,DT3a(1,:), 'k-');
hold on
plot(Rc,DT3b(1,:), 'r-');
hold on
plot(Rc,DT3c(1,:), 'y-');
hold on
plot(Rc,DT3d(1,:), 'b-');
hold on
legend('a=cost', 'D_h^\prime=cost', 'P_h^\prime=cost', 'A_c^\prime=cost')
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('P^\prime');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FN3, Kn=0.1 e \beta=', num2str(B(j))]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Kn=0.3%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DT4a=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT4a(i,m)=(fRe4norm(i,m)./Nu4norm(i,m)).*(1./((1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2);
    end
end
DT4b=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT4b(i,m)=(fRe4norm(i,m)./Nu4norm(i,m)).*(1./((1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((4.*(1+(1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT4c=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT4c(i,m)=(fRe4norm(i,m)./Nu4norm(i,m)).*(1./((1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((1+(1./B(j))./(1+(1./B(j))-2).*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT4d=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT4d(i,m)=(fRe4norm(i,m)./Nu4norm(i,m)).*(1-B(j).*(1-pi./4).*Rc(m)^2/(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end

figure
plot(Rc,DT4a(1,:), 'k-');
hold on
plot(Rc,DT4b(1,:), 'r-');
hold on
plot(Rc,DT4c(1,:), 'y-');
hold on
plot(Rc,DT4d(1,:), 'b-');
hold on
legend('a=cost', 'D_h^\prime=cost', 'P_h^\prime=cost', 'A_c^\prime=cost')
H=gca;
get(H);
set(H,'FontName','Cambria');
set(H,'FontSize',13);
xlabel('R_c');
ylabel('P^\prime');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FN3, Kn=0.3 e \beta=', num2str(B(j))]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Kn=0.45%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
DT5a=zeros(4,6);
for i=1:4

```

```

    for m=1:6
        DT5a(i,m)=(fRe5norm(i,m)./Nu5norm(i,m)).*(1./(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi)))^2;
    end
end
DT5b=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT5b(i,m)=(fRe5norm(i,m)./Nu5norm(i,m)).*(1./(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((4.*(1+(1./B(j))-2.*Rc(m)).*(1-
    end
end
DT5c=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT5c(i,m)=(fRe5norm(i,m)./Nu5norm(i,m)).*(1./(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))).*(1./((1+1./B(j))./(1+1./B(j))-2.*Rc
    end
end
DT5d=zeros(4,6);
for i=1:4
    for m=1:6
        DT5d(i,m)=(fRe5norm(i,m)./Nu5norm(i,m)).*(1-B(j)).*(1-pi./4).*Rc(m)^2/(1-(B(j)./4).*Rc(m)^2.*(4-pi))^2;
    end
end
end

figure
plot(Rc,DT5a(1,:), 'k-');
hold on
plot(Rc,DT5b(1,:), 'r-');
hold on
plot(Rc,DT5c(1,:), 'y-');
hold on
plot(Rc,DT5d(1,:), 'b-');
hold on
legend('a=cost', 'D_h^\prime=cost', 'P_h^\prime=cost', 'A_c^\prime=cost')
H=gca;
get(H);
set(H, 'FontName', 'Cambria');
set(H, 'FontSize', 13);
xlabel('R_c');
ylabel('P^\prime');
xlim([0 0.5]);
ylim([0 2]);
title(['Funzione Obiettivo, criterio FN3, Kn=0.45 e \beta=', num2str(B(j))]);

```

Bibliografia

- [1] Nicola Suzzi. *Valutazione delle prestazioni termo-idrauliche di microcanali a spigoli smussati*. Tesi finale di laurea in Termofluidodinamica avanzata. 2013.
- [2] Amati Federico. *Ottimizzazione delle prestazioni termo-idrauliche di microcanali a sezione triangolare con spigoli smussati*. Elaborato finale di laurea in Termofluidodinamica applicata. 2018.
- [3] Dario Andrini. *Valutazione delle prestazioni termo-idrauliche ed ottimizzazione di microcanali a spigoli smussati per flussi elettro-osmotici*. Tesi finale di laurea in Termofluidodinamica applicata. 2016
- [4] Shashi P., Subrata K. *Fabrication of microchannels: a review*. SAGE Publications. 2014
- [5] <https://it.m.wikipedia.org/wiki/Lab-on-a-chip>. *Lab-on-a-chip*. Wikipedia