

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Matematica
Corso di Laurea in Matematica

Una presentazione dei gruppi delle trecce

Relatore:
Dott. Roberto Pagaria

Presentata da:
Francesco Tosello

Correlatore:
Prof. Luca Moci

Anno Accademico 2019/2020

*Ad Arianna e Roberto,
condicio sine qua non.*

Abstract

The braid groups can be thought of as a generalisation of the symmetric group, in which not only the permutation but also the “direction of exchange” of points is considered; the consequence of this is that transpositions no longer have order two, indeed in the braid groups there are no elements of finite order. In this paper we follow the idea of Fox and Neuwirth given in [FN62] to discuss a proof of the presentation of the braid groups. First of all we recall some prerequisites: mainly results on groups, CW complexes, fundamental groups and covering spaces. Then we give the proof of this presentation, obtained by considering the braid groups as fundamental groups of certain configuration spaces. Finally, we have also derived a presentation of the symmetric group, exploiting a short exact sequence involving pure braids, braids and permutations. We believe that the main contribution of this dissertation could be the wealth of examples, proofs and references which, in our opinion, were scarce in the original paper, to the point of making necessary the modification of some otherwise imprecise constructions.

Indice

Introduzione	2
1 Prerequisiti	4
1.1 Richiami sui gruppi	5
1.2 Decomposizione cellulare: i CW complessi	12
1.3 Costruzione del gruppo fondamentale	16
1.4 Introduzione ai rivestimenti	21
2 Presentazione dei gruppi delle trecce	29
2.1 Definizione delle trecce e delle trecce pure	29
2.2 Decomposizione cellulare degli spazi di configurazioni	35
2.3 Discussione della presentazione	43
Bibliografia	52

Introduzione

In questo elaborato forniremo la dimostrazione di una presentazione dei gruppi delle trecce, ispirandoci a quella ideata da R. Fox e L. Neuwirth [FN62].

Un pregio delle trecce è la loro intuitività: una treccia, in matematica, è esattamente ciò che un profano si aspetta, ossia dei fili nello spazio che possono passarsi davanti l'un l'altro. Sebbene la definizione formale sia più tecnica, le trecce conservano questa semplicità pur permettendo notevoli sviluppi, fungendo da generalizzazione delle permutazioni. Citiamo a titolo informativo alcuni ambiti di applicazione della teoria delle trecce: in matematica hanno un ruolo importante nella teoria dei nodi; in fisica sono attualmente studiate in teoria quantistica dei campi perché descrivono il comportamento degli anioni, una generalizzazione di bosoni e fermioni; in informatica trovano applicazione in alcuni algoritmi di crittografia a chiave pubblica.

Le trecce con un numero $n \geq 1$ di fili fissati formano un gruppo con l'operazione di concatenazione: una volta ordinati i fili, due trecce si possono comporre attaccando la seconda sotto la prima; un'immagine si trova in figura 2.2. Trattandosi di un gruppo, al fine di studiarlo agevolmente è necessario descriverlo sinteticamente; uno dei metodi per fare questo è esibirne una presentazione, cioè fissare alcuni elementi, detti generatori, tramite i quali si possano “costruire” tutti gli altri e elencare le relazioni che intercorrono tra essi. Per quanto riguarda i gruppi delle trecce è nota una presentazione, dovuta ad Emil Artin [Art47] e vi sono in letteratura almeno un paio di dimostrazioni differenti di tale risultato, esposte ad esempio in [Gon11]; delle due, la dimostrazione ideata da Fox e Neuwirth, basandosi su argomenti di carattere geometrico, permette una comprensione più profonda della presentazione stessa. In questo elaborato abbiamo riproposto quest'ultima prova, cercando di renderla maggiormente fruibile ad un pubblico matematico non del settore: richiamando i prerequisiti necessari, aggiungendo degli esempi e fornendo una giustificazione ovvero una referenza per ogni affermazione fatta; abbiamo

preferito esibire nel presente scritto le dimostrazioni delle affermazioni relative all'articolo originale, mentre ci siamo avvalsi di riferimenti esterni per richiamare fatti noti in generale.

Di seguito esponiamo una breve traccia dei contenuti presenti, rimandando il lettore alle introduzioni dei singoli capitoli o sezioni per delle spiegazioni più esaustive. Il primo capitolo, dedicato interamente ai prerequisiti, mira a richiamare i contenuti necessari per la comprensione della dimostrazione, assumendo come noti solamente i contenuti di base insegnati in un corso di laurea triennale in matematica. Nello specifico figurano alcune nozioni riguardanti le presentazioni di gruppi, le azioni di gruppi e il simbolismo delle sequenze esatte corte; successivamente la definizione di CW complesso, seguita da qualche esempio a riguardo e una discussione sul complesso duale; una breve trattazione dell'omotopia e del gruppo fondamentale, corredata da alcuni teoremi utili concernenti i CW complessi; infine un breve riassunto della teoria dei rivestimenti. Nel secondo capitolo ci occupiamo della suddetta presentazione, cominciando con due definizioni equivalenti dei gruppi delle trecce: prima formalizziamo quella intuitiva esposta poc'anzi, poi ne diamo una algebrica secondo la quale il gruppo delle trecce è il gruppo fondamentale dello spazio di configurazioni di n punti distinti e non ordinati del piano, detto $UConf_n(\mathbb{C})$; quest'ultimo è lo spazio delle orbite, rispetto all'azione di permutazione dei punti, dello spazio in cui i punti sono ordinati: $Conf_n(\mathbb{C})$; spazio dal quale si ricava in modo analogo una definizione del gruppo delle trecce pure. A seguire, forniamo delle decomposizioni cellulari di questi spazi di configurazioni e applichiamo un teorema di calcolo del gruppo fondamentale alle loro decomposizioni duali; ad essere precisi è necessario applicare una correzione al fine di ottenere dei CW complessi regolari, perciò consideriamo delle varianti di tali spazi rispetto alla scelta originale degli autori. Infine, sfruttiamo i risultati ottenuti, combinandoli con una sequenza esatta corta che si ricava dalla già citata azione del gruppo simmetrico, per presentare quest'ultimo e metterlo in relazione con i gruppi delle trecce; nello specifico vedremo che questi si possono pensare come una generalizzazione delle permutazioni in cui si tenga conto anche del "verso" di scambio dei punti.

Capitolo 1

Prerequisiti

In questo capitolo richiamiamo alcuni prerequisiti di algebra e topologia, utili per comprendere lo sviluppo della tesi. Cominciamo con dei cenni sui gruppi liberi, ampi quanto basta per introdurre il concetto di presentazione di un gruppo, e alcuni richiami sulle azioni di gruppi che in seguito applicheremo ai rivestimenti; definiamo anche le successioni esatte corte e alcune loro proprietà fondamentali. Nella sezione successiva introduciamo la struttura di CW complesso, che formalizza l'idea di uno spazio topologico costruito a blocchi estendendo il concetto di complesso simpliciale; questo permette di semplificare il calcolo di alcuni invarianti topologici, tra i quali il gruppo fondamentale, che forniscono informazioni sullo spazio in questione. Come si vedrà, molti degli spazi comuni, ad esempio le sfere, i proiettivi, i poliedri, sono esprimibili tramite la struttura di CW complesso. Inoltre, definiamo la struttura duale di un dato CW complesso che verrà usata per semplificare i calcoli. Subito dopo richiamiamo brevemente il concetto di omotopia e la definizione di gruppo fondamentale di uno spazio, che sarà il fulcro della costruzione effettuata nel prossimo capitolo e ci permetterà di esplicitare la presentazione dei gruppi delle trecce tramite lo studio della geometria di certi spazi topologici; infatti il gruppo fondamentale è un funtore da **Top.** a **Grp** che descrive il numero e la natura dei “buchi” bidimensionali dello spazio topologico¹; nello stesso paragrafo presentiamo un metodo di calcolo del gruppo fondamentale di CW complessi e dei loro duali. In chiusura del capitolo esponiamo una parte della teoria dei rivestimenti, dalla quale ricaveremo una

¹**Top.** indica la categoria degli spazi topologici puntati e le mappe preservanti il punto base, mentre **Grp** è la categoria dei gruppi e gli omomorfismi di gruppi.

successione esatta corta che verrà applicata ai gruppi delle trecce nei prossimi capitoli per ottenere una presentazione del gruppo simmetrico.

1.1 Richiami sui gruppi

Innanzitutto diamo una definizione di gruppo libero e enunciamo il teorema di rappresentazione dei gruppi liberi, tramite il quale possiamo definire generatori e relazioni di un gruppo e quindi chiarire cosa si intenda per presentazione di un gruppo. Nella seconda parte definiamo l'azione di un gruppo su un insieme, accompagnandola con esempi e proprietà utili; successivamente descriviamo alcuni tipi di azioni utili nella teoria dei rivestimenti. In chiusura descriviamo brevemente il sintetico simbolismo delle successioni esatte, utile per descrivere certi morfismi di gruppi.

Nota. D'ora in avanti indicheremo con $\mathbb{1}$ o $\mathbb{1}_G$ l'elemento neutro di un gruppo G ; $H \leq G$ indicherà un sottogruppo; verranno usati equivalentemente i termini morfismo e omomorfismo di gruppi.

Definizione 1.1. Dato un insieme di simboli $X \equiv \{x_1, \dots, x_m\}$ vogliamo definire un gruppo i cui elementi siano sequenze di simboli in X , e la cui operazione sia la giustapposizione, indicata con “ \cdot ”. Definiamo un simbolo aggiuntivo indicato con 1 e, per ogni simbolo x_i , definiamo pure il simbolo x_i^{-1} . Sia $\tilde{X} \equiv \{x_1, \dots, x_m, 1, x_1^{-1}, \dots, x_m^{-1}\}$ e sia

$$\tilde{F}(X) \equiv \{y_1 \cdots y_k; k \in \mathbb{N}, y_j \in \tilde{X} \forall j = 1, \dots, k\}$$

l'insieme delle sequenze finite di simboli in \tilde{X} . Così $\tilde{F}(X)$ è un semigrupp; per renderlo un gruppo vogliamo imporre che 1 agisca come elemento neutro e che x_i^{-1} agisca come inverso di x_i ; per questo consideriamo la relazione \sim generata da $1 \cdot x_i \sim x_i \sim x_i \cdot 1 \quad \forall i$ e da $x_i \cdot x_i^{-1} \sim 1 \sim x_i^{-1} \cdot x_i \quad \forall i$; poi stabiliamo una relazione di equivalenza tra sequenze, detta \sim_{seq} , in cui due sequenze sono equivalenti se si passa dall'una all'altra con un numero finito di equivalenze \sim . Si dice **gruppo libero** su X il gruppo delle classi di equivalenza:

$$F(X) \equiv \tilde{F}(X) / \sim_{seq}$$

i cui elementi si dicono **parole**. Non è ovvio che $F(X)$ sia un gruppo, la dimostrazione e ulteriori dettagli sono presenti in [Art97, cap. 6].

Teorema 1.2 [Teorema di rappresentazione dei gruppi liberi]. *Dato un gruppo G ogni applicazione tra insiemi $f: X \rightarrow G$ si estende in modo unico ad un omomorfismo $\bar{f}: F(X) \rightarrow G$.*

Dimostrazione. Ad esempio si trova in [Art97, cap. 6, prop. 8.1]. □

Nota. D'ora in avanti, data una mappa f , indicheremo con $Ker f$ il suo nucleo e con $Imm f$ la sua immagine; la notazione $Imm_f(X)$ indicherà l'immagine del solo sottoinsieme X tramite f .

Definizione 1.3. Nelle ipotesi del teorema si dice che $Imm_f(X)$ genera $Imm_{\bar{f}}(F(X))$ e che gli elementi di X sono **generatori**. Si dicono invece **relazioni** gli elementi di $Ker \bar{f} \equiv \{x \in F(X); \bar{f}(x) = \mathbb{1}_G\}$. Da ciò segue che se \bar{f} è suriettiva vale

$$G \cong F(X) / Ker \bar{f}$$

Inoltre si dice che $R \subset Ker \bar{f}$ è un **insieme completo di relazioni** se $Ker \bar{f}$ è il più piccolo sottogruppo normale di $F(X)$ contenente R ; come dimostrato in [Art97, cap. 6, par. 8], questa condizione è equivalente ad essere il sottogruppo generato dai coniugati di elementi in R ; tale sottogruppo si indica $R^{F(X)} \equiv \{y^{-1} \cdot r \cdot y; r \in R, y \in F(X)\}$. Dunque nel caso di un insieme completo di relazioni vale $Ker \bar{f} = \langle R^{F(X)} \rangle$. Si dice **presentazione** di un gruppo G la coppia (X, R) dove X è un insieme di generatori di G e R una lista completa di relazioni. Così vale l'isomorfismo

$$G \cong F(X) / \langle R^{F(X)} \rangle$$

Una tale presentazione si scrive sinteticamente $G \equiv \langle X \mid R \rangle$.

Esempio 1.4. Qui proponiamo alcuni esempi di presentazioni. Talvolta, nell'esprimere le relazioni, al posto di indicare l'elemento da annullare scriveremo un'uguaglianza, da intendersi così: $xy = z$ significa che si annulla l'elemento xyz^{-1} .

1. Gruppo ciclico di ordine m : $C_m = \langle \alpha \mid \alpha^m \rangle$.
2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \langle x, y \mid xy = yx \rangle$.
3. Gruppo simmetrico con tre elementi: $\Sigma_3 = \langle \sigma, \gamma \mid \sigma^2, \gamma^2, \sigma\gamma\sigma = \gamma\sigma\gamma \rangle$; qui le permutazioni sono $\sigma = (1\ 2)$ e $\gamma = (2\ 3)$.

Grazie al prossimo teorema sappiamo che ogni gruppo ammette una presentazione; si dirà **finitamente presentato** se sia X che R sono finiti.

Teorema 1.5 *Ogni gruppo è isomorfo al quoziente di un gruppo libero.*

Tuttavia, per uno stesso gruppo esistono infinite presentazioni diverse perciò è utile saper riconoscere se due scritte presentano lo stesso gruppo; questo problema, strettamente legato al *problema della parola*, non è risolvibile in generale².

Definizione 1.6. Restringendoci a gruppi finitamente presentati ci sono delle trasformazioni, dette **trasformazioni di Tietze**, che permettono di passare da una presentazione ad un'altra dello stesso gruppo:

1. Aggiungere o rimuovere una relazione ricavabile dalle altre presenti.

Ad esempio $\langle x \mid x^3, x^6 \rangle \leftrightarrow \langle x \mid x^3 \rangle$.

2. Aggiungere o rimuovere un generatore che si esprime in funzione degli altri generatori; nel caso della rimozione bisogna avere cura di sostituire, nelle relazioni, l'espressione corrispondente al generatore tolto.

Ad esempio $\langle x, y, z \mid y^2, x = yz, xz = zy \rangle \leftrightarrow \langle y, z \mid y^2, yz^2 = zy \rangle$.

Prima di introdurre le azioni di gruppi richiamiamo alcuni concetti, riguardo ai sottogruppi normali, che saranno utili in seguito.

Definizione 1.7. Un sottogruppo $H \leq G$ si dice **normale** se $gHg^{-1} \subset H \forall g \in G$; in tal caso lo indicheremo con $H \triangleleft G$. Per tali sottogruppi le classi laterali sinistre, indicate con gH al variare di $g \in G$, e quelle destre coincidono; inoltre, in questo caso, l'insieme delle classi laterali è un gruppo, indicato con G/H . Useremo la stessa notazione per indicare l'insieme delle classi laterali sinistre anche quando H non sarà un sottogruppo normale.

Dato un sottogruppo $H \leq G$ si dice **normalizzatore** di H in G il sottoinsieme

$$N_G(H) \equiv \{g \in G \mid g \cdot H \cdot g^{-1} = H\}$$

²Ulteriori informazioni su Wikipedia. *Word problem for groups*. en. 2020. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Word_problem_for_groups (visitato il 31/08/2020).

Lemma 1.8 *Il normalizzatore $N_G(H)$ è il più grande sottogruppo di G soddisfacente: $H \triangleleft N_G(H) \leq G$. In particolare, H è normale in G se e solo se $N_G(H) = G$.*

Dimostrazione. Sfruttando le definizioni si verifica che $N_G(H) \leq G$; invece $H \triangleleft N_G(H)$ segue per costruzione perciò $N_G(H)$ soddisfa le condizioni. Sia ora $K \supset N_G(H)$ soddisfacente $H \triangleleft K \leq G$. Presi $g \in K$ e $h \in H$, mostriamo che esiste $\tilde{h} \in H \mid g \cdot \tilde{h} \cdot g^{-1} = h$. Siccome K è un sottogruppo, $g^{-1} \in K$ e quindi $g^{-1} \cdot h \cdot g = \tilde{h} \in H$ (per un certo \tilde{h}); dunque $g \cdot (g^{-1} \cdot h \cdot g) \cdot g^{-1} = g \cdot \tilde{h} \cdot g^{-1} = h$. Questo prova che in realtà $K = N_G(H)$. \square

Definizione 1.9. Siano (G, \cdot) un gruppo e S un insieme, eventualmente con struttura. Si dice **azione (sinistra)** di G su S , indicata con $G \curvearrowright S$, un morfismo di gruppi

$$\begin{aligned} \rho_G: G &\rightarrow \text{Aut}(S) \\ g &\mapsto (s \mapsto g \cdot s) \end{aligned}$$

tale che $(g \cdot h) \cdot s = g \cdot (h \cdot s)$. Si dice **azione destra** (indicata con $S \curvearrowleft G$ e $s \mapsto s \cdot g$) se $s \cdot (g \cdot h) = (s \cdot g) \cdot h$. Qui $\text{Aut}(S)$ indica il gruppo di automorfismi di S , ossia il gruppo delle applicazioni biunivoche in S che rispettano la struttura; nel linguaggio delle categorie sono gli isomorfismi della categoria.

Dato un elemento $s \in S$ si dice **stabilizzatore** di s in G il sottogruppo

$$\text{Stab}_G(s) \equiv \{g \in G \mid g \cdot s = s\} \leq G$$

Si dice invece **orbita** di s l'insieme

$$\text{Orb}_G(s) \equiv \{g \cdot s \mid g \in G\} \subset S$$

Nota. In questo testo denotiamo con Σ_m il gruppo simmetrico con m elementi.

Esempio 1.10. Su un qualunque insieme S di m elementi agisce il gruppo simmetrico Σ_m tramite permutazioni: $\rho_{\Sigma_m}: \Sigma_m \xrightarrow{\mathbb{1}} \text{Aut}(S)$.

Esempio 1.11. Il gruppo $GL(m, \mathbb{K})$ delle matrici invertibili $m \times m$ in un campo \mathbb{K} agisce su sé stesso tramite coniugio: $A \xrightarrow{\rho(M)} M^{-1}AM$. L'orbita dell'identità è semplicemente l'identità stessa, mentre l'orbita di una qualunque altra matrice sono le matrici a lei simili. Lo stabilizzatore di una matrice sono le matrici che commutano con essa.

Lemma 1.12 *Supponiamo che $G \curvearrowright S$ e $g \cdot s = t$. Allora valgono le seguenti identità:*

- $gStab_G(s) = \{h \in G \mid h \cdot s = t\}$
- $Stab_G(t) = g \cdot Stab_G(s) \cdot g^{-1} \equiv \{g \cdot h \cdot g^{-1} \mid h \in Stab_G(s)\}$

Dimostrazione. Per il primo punto, se $h \in Stab_G(s)$, allora $(g \cdot h) \cdot s = g \cdot s = t$ perciò $gStab_G(s) \subset \{h \in G \mid h \cdot s = t\}$. Viceversa $h \cdot s = g \cdot s \implies (g^{-1} \cdot h) \cdot s = s \implies h = g \cdot (g^{-1} \cdot h) \in gStab_G(s)$. Il secondo punto è simile. \square

Definizione 1.13. Dati due insiemi S, T sui quali agisce (con azioni eventualmente distinte) un gruppo G e data una mappa $f: S \rightarrow T$; tale mappa si dice **equivariante** rispetto all'azione di G , se $g \cdot f(s) = f(g \cdot s) \quad \forall g \in G, s \in S$.

Definizione 1.14. Data un'azione $G \curvearrowright S$ e un sottogruppo $H \leq G$, è naturalmente definita anche un'azione sulle classi laterali sinistre: $g_1 \cdot g_2 H \equiv g_1 g_2 H$. Si può dare un'analogia definizione nel caso di azioni destre.

Lemma 1.15 *Sia $G \curvearrowright S$ un'azione sinistra. Allora $\forall s \in S$ è ben definita un'applicazione biunivoca equivariante rispetto all'azione:*

$$\begin{aligned} \varphi_s: G/Stab_G(s) &\xrightarrow[su]{1-1} Orb_G(s) \\ gStab_G(s) &\mapsto g \cdot s \end{aligned}$$

dove $G/Stab_G(s)$ indica l'insieme delle classi laterali sinistre.

Dimostrazione. Si trova ad esempio su [Art97, cap. 5, prop. 6.4] \square

Definizione 1.16. Le azioni di gruppi possono godere di varie proprietà; qui ne elenchiamo alcune con le rispettive definizioni. Si dice che un'azione è

- **fedele** se ρ_G è iniettiva, cioè se $g \cdot s = s \quad \forall s \in S \implies g = \mathbb{1}$
- **libera** se tutti gli stabilizzatori sono banali, cioè se $\exists s \in S \mid g \cdot s = s \implies g = \mathbb{1}$
- **transitiva** se ha una sola orbita, ossia $\forall s, t \in S \exists g \in G \mid g \cdot s = t$

Esempio 1.17.

1. $\mathbb{Z} \curvearrowright \mathbb{R}$ tramite traslazioni di un fattore $m \in \mathbb{Z}$; tale azione è libera ma non transitiva.
2. $SO(3; \mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^3$ tramite rotazioni, esprimibili come una moltiplicazione per la relativa matrice; questa invece è un'azione transitiva, ma non libera a causa del punto fisso di ogni rotazione; ciononostante è fedele.

Definizione 1.18. Nel caso in cui un'azione agisca su un insieme dotato di una topologia, che indicheremo con X , gli automorfismi sono gli omeomorfismi; in tal caso si parla di **azione tramite omeomorfismi** e se ne possono studiare ulteriori proprietà. Un caso particolare si ha quando $G \subset Omeo(X)$, infatti il gruppo agisce tramite inclusione: $\rho_G \equiv \iota: G \hookrightarrow Omeo(X)$.

Definizione 1.19. Un'azione di un gruppo G su uno spazio topologico X si dice:

- **propriamente discontinua** se $\forall x \in X \exists U \subset X$ intorno di $x \mid U \cap g(U) \neq \emptyset$ per un numero finito di $g \in G$.
- **di rivestimento** se $\forall x \in X \exists U \subset X$ intorno di $x \mid U \cap g(U) \neq \emptyset \implies g = \mathbb{1}$.

Tra le varie proprietà che abbiamo elencato vi sono alcune relazioni, espresse nel seguente lemma:

Lemma 1.20 *Sia $G \curvearrowright X$ un'azione per omeomorfismi. Valgono:*

- *azione libera \implies fedele.*
- *azione di rivestimento \implies libera.*
- *se X è di Hausdorff e l'azione è libera e propriamente discontinua allora è anche di rivestimento.*

Dimostrazione. Il primo punto segue direttamente dalle definizioni. Sempre dalla definizione segue che per un'azione di rivestimento l'unico elemento che ha punti fissi è l'identità. Per quanto riguarda il terzo punto si veda [Man14, prop. 12.19]³. \square

³Nella referenza citata viene chiamata *azione propriamente discontinua* quella che qui chiamiamo *di rivestimento*.

Definizione 1.21. Supponiamo che su un insieme agiscano due gruppi, uno a sinistra e l'altro a destra: $(G, \cdot) \curvearrowright S \curvearrowleft (H, \star)$; le azioni si dicono **compatibili** se

$$(g \cdot s) \cdot h = g \cdot (s \cdot h) \quad \forall g \in G, h \in H$$

Lemma 1.22 Siano $(G, \cdot) \curvearrowright S \curvearrowleft (H, \star)$ due azioni compatibili, di cui la prima sia libera, e tali che $\forall h \in H, s \in S \exists g(s, h) \in G \mid g(s, h) \cdot s = s \cdot h$ (ad esempio se G è transitiva). Allora, fissato $s \in S$, si definisce l'applicazione

$$\begin{aligned} \psi_s: H &\rightarrow G \\ h &\mapsto g(s, h) \end{aligned}$$

Questa è un omomorfismo di gruppi che ha come nucleo $Stab_H(s)$. Se l'azione di H è transitiva l'omomorfismo è anche suriettivo.

Dimostrazione. Per ipotesi posso definire l'applicazione ψ_s ; inoltre è definita in modo univoco poiché l'azione di G è libera, perciò se $g_1 \cdot s = g_2 \cdot s = s \cdot h$ allora $g_1 = g_2$. Sfruttando il fatto che le azioni sono compatibili si mostra che tale applicazione è un omomorfismo: $\psi_s(h_1 \cdot h_2) \cdot s = s \cdot (h_1 \cdot h_2) = (s \cdot h_1) \cdot h_2 = (\psi_s(h_1) \cdot s) \cdot h_2 = \psi_s(h_1) \cdot (s \cdot h_2) = \psi_s(h_1) \cdot (\psi_s(h_2) \cdot s) = (\psi_s(h_1) \cdot \psi_s(h_2)) \cdot s$; quindi, siccome l'azione di G è libera, $\psi_s(h_1) \cdot \psi_s(h_2) = \psi_s(h_1 \cdot h_2)$. Il nucleo segue dalle definizioni. Se l'azione di H è transitiva, la suriettività segue dall'unicità della definizione di ψ_s . □

Per concludere la sezione diamo le definizioni basilari riguardo alle successioni esatte ed elenchiamo qualche proprietà correlata.

Nota. Nel formalismo delle successioni esatte indicheremo con $\mathbf{0}$ il gruppo banale formato da un solo elemento.

Definizione 1.23. Una successione, finita o infinita, di gruppi G_m e di morfismi $\alpha_m: G_m \rightarrow G_{m+1}$ si dice **successione esatta** se $\forall m$ vale $Ker \alpha_m = Imm \alpha_{m-1}$; in tal caso si indica

$$\dots \rightarrow G_{m-1} \xrightarrow{\alpha_{m-1}} G_m \xrightarrow{\alpha_m} G_{m+1} \rightarrow \dots$$

Si dice **successione esatta corta** una successione esatta nella forma

$$\mathbf{0} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow \mathbf{0}$$

Come vedremo nel prossimo lemma queste successioni hanno proprietà peculiari.

Lemma 1.24 *Le seguenti affermazioni sono valide comunque vengano scelti i gruppi (indicati da lettere latine maiuscole) e i morfismi di gruppi (contrassegnati da lettere greche minuscole).*

1. $A \xrightarrow{\alpha} B \rightarrow \mathbf{0} \implies \alpha$ suriettiva.
2. $\mathbf{0} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \implies \alpha$ iniettiva.
3. $\mathbf{0} \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \rightarrow \mathbf{0} \implies C \cong B/Imm \alpha \equiv B/A$ siccome α è un isomorfismo sull'immagine.

Dimostrazione. Si tratta di una verifica. □

1.2 Decomposizione cellulare: i CW complessi

Cominciamo esponendo la costruzione induttiva di una struttura di CW complesso, a cui verrà associato lo spazio topologico ottenuto attaccando tra loro le celle che la costituiscono; per rendere più comprensibile la definizione anteporremo alcuni esempi. A seguire definiremo i complessi regolari e daremo un metodo alternativo per verificare che uno spazio sia un CW complesso regolare; di questi spazi potremo fornire una descrizione puramente combinatoria tramite il poset delle celle e ciò ci permetterà di definire il complesso duale.

Esempio 1.25. In figura 1.1 è evidenziata una possibile struttura di CW complesso da assegnare alla sfera e al toro. Per la sfera si avranno le celle: 0-cella O , 1-cella γ , 2-celle A e B . Per il toro, la cui decomposizione è forse più comprensibile nella figura a destra, in cui sono indicate le identificazioni, le celle sono: 0-cella P , 1-celle α e β , 2-cella T .

Nota. Di qui in avanti indicheremo con $\|x\|$ la norma euclidea, con $D^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m; \|x\| \leq 1\}$ il disco chiuso e con $S^{m-1} \equiv \partial D^m \equiv \{x \in \mathbb{R}^m; \|x\| = 1\}$ la sfera standard.

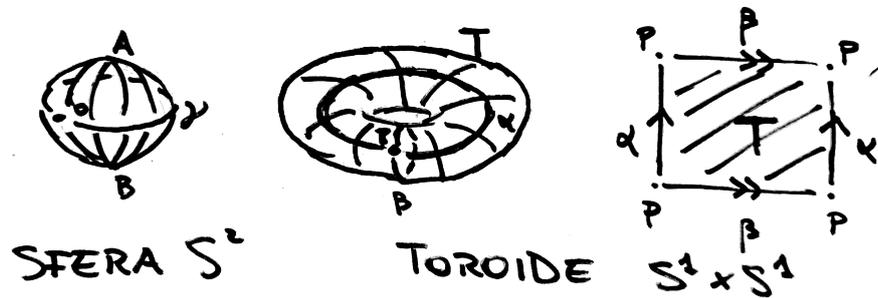


Figura 1.1: Esempi di decomposizioni cellulari di una sfera S^2 e un toro $S^1 \times S^1$.

Definizione 1.26. Sia X^0 un insieme di punti che costituiranno le 0-celle della struttura. Si costruisca lo **scheletro m-esimo** X^m induttivamente nel modo seguente: attaccando allo scheletro X^{m-1} delle palle aperte m-dimensionali D_α^m , dette **m-celle (aperte)**, tramite delle mappe $\varphi_\alpha : S_\alpha^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$, dette **mappe di incollamento**; ciò significa $X^m = X^{m-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^m$ con le identificazioni $x \sim \varphi_\alpha(x) \quad \forall \alpha \quad \forall x \in \partial D_\alpha^m$. Dunque l'insieme X^m si può identificare con $X^{m-1} \sqcup_\alpha D_\alpha^m$. Ora, se il procedimento termina con un numero finito N di passi il complesso si dice di **dimensione** N e si pone $X \equiv \bigcup_{m=1}^N X^m$ con la topologia indotta dagli incollamenti; altrimenti $X \equiv \bigcup_m X^m$ e si pone la topologia debole: $A \subset X$ aperto $\iff A \cap X^m$ aperto in $X^m \quad \forall m$. La collezione delle celle D_α^m e delle associate mappe di incollamento φ_α si dice struttura di **CW complesso** sullo spazio topologico X . Un sottoinsieme si dice **sottocomplesso** se è unione di celle la cui chiusura sta nel sottoinsieme. Una mappa tra CW complessi $f : X \rightarrow Y$ si dice **cellulare** se $f(X^m) \subset Y^m \quad \forall m$.

Nota. Nel corso della trattazione ci occuperemo solamente di CW complessi finito-dimensionali.

Esempio 1.27. Qui presentiamo alcuni esempi di strutture di CW complesso associate a spazi noti.

1. Sfera m-dimensionale.

È sufficiente una 0-cella, diciamo P , e una m-cella attaccata tramite $\varphi : S^{m-1} \rightarrow P$.

2. Proiettivo reale.

Tramite la costruzione

$$\mathbb{R}\mathbb{P}^m = S^m / x \sim -x = D^m / x \sim -x \text{ su } \partial D^m$$

si ottiene la decomposizione induttiva $\mathbb{R}\mathbb{P}^m = D^m \sqcup \mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$, con incollamento dato dalla mappa quoziente $\varphi: \partial D^m \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{m-1}$ che identifica i punti antipodali (a partire da $\mathbb{R}\mathbb{P}^0 = \{\star\}$). In questo modo $\mathbb{R}\mathbb{P}^m = \{\star\} \cup \overset{\circ}{D}^1 \cup \dots \cup \overset{\circ}{D}^m$ con la topologia indotta dai quozienti.

3. Supporto di un complesso simpliciale.

Dato un complesso simpliciale si può costruire una struttura di CW complesso con lo stesso spazio topologico soggiacente; è sufficiente sfruttare l'omeomorfismo tra un disco m-dimensionale e un m-simplesso.

Mentre per i complessi simpliciali si definisce naturalmente il complesso duale tramite la suddivisione baricentrica, per CW complessi arbitrari questo non è possibile, in quanto le celle possono essere eccessivamente irregolari; quindi ci restringiamo al caso di nostro interesse dando le opportune definizioni.

Definizione 1.28. Nella costruzione di un CW complesso esposta sopra, le mappe $\Phi_\alpha: D_\alpha^m \xrightarrow{\tilde{\varphi}_\alpha} X^{m-1} \sqcup_\beta D_\beta^m \xrightarrow{q} X^m \xrightarrow{\iota} X$ (qui $\tilde{\varphi}_\alpha$ è l'estensione di φ_α sull'interno tramite l'omeomorfismo) si chiamano **mappe caratteristiche** e le loro immagini **celle chiuse**. Notiamo che la struttura di CW complesso di uno spazio X è univocamente determinata dalla collezione delle sue mappe caratteristiche; pertanto talvolta si descrive il CW complesso elencando semplicemente le celle, se le mappe caratteristiche sono chiare dal contesto. Una cella si dice **regolare** se la sua mappa caratteristica è un omeomorfismo con l'immagine; il CW complesso si dice regolare se lo sono tutte le sue celle. In tal caso si sfrutta la caratterizzazione alternativa dei CW complessi regolari data nel prossimo lemma, in particolare il punto (2), per definire il **poset delle celle** P_X : l'insieme delle celle di X con la relazione è l'inclusione tra le celle chiuse⁴.

Esempio 1.29. È bene osservare che la regolarità è una proprietà della struttura cellulare e non dello spazio topologico associato. Ad esempio, tra le decomposizioni cellulari del-

⁴Nella letteratura inglese questo poset si chiama *face poset* o *CW poset*

la sfera S^2 che si possono fornire, ve ne sono di regolari e di non regolari. Esaminiamone alcune:

- Decomposizione dell'esempio 1.27-1.
Questa non è regolare perché l'unica 2-cella ha il bordo consistente in un solo punto.
- Decomposizione descritta nell'esempio 1.25.
In questo caso le 2-celle sono regolari infatti le loro chiusure sono effettivamente dei dischi D^2 ; tuttavia la 1-cella ha entrambi i capi identificati perciò la chiusura risulta S^1 anziché D^1 , dunque il complesso non è regolare. Osserviamo che le 0-celle sono sempre regolari.
- Si consideri la seguente struttura cellulare costruita induttivamente con due celle in ogni dimensione: si parte da un paio di 0-celle che saranno gli emisferi di S^0 ; successivamente si produce la sfera successiva attaccando due 1-celle che saranno a loro volta gli emisferi di S^1 , perciò considerando come mappa d'incollamento l'identità; analogamente si incollano due 2-celle e si ottiene S^2 . Si può proseguire tale costruzione per costruire qualunque S^m ; addirittura, tramite questa costruzione possiamo definire il complesso $S^\infty \equiv \bigcup_{m \in \mathbb{N}} S^m$. Questa struttura assegnata ad S^m è regolare.

Lemma 1.30 *Dati uno spazio X di Hausdorff e una famiglia finita di mappe $\Phi_\alpha: D_\alpha^m \rightarrow X$, queste sono le mappe caratteristiche di un CW complesso regolare X se e solo se valgono i seguenti punti:*

1. Φ_α sono omeomorfismi e $X = \sqcup_\alpha \Phi_\alpha(D_\alpha^m)$
2. $\Phi_\alpha(\partial D_\alpha^m)$ è unione di celle chiuse, ossia immagini di alcuni D_α^m .

Dimostrazione. Questa definizione è presa da [Bjö+99, def. 4.7.4] ed è simile a quella in [Hat01, prop. A.2], fonte che contiene anche la dimostrazione. Per mostrare l'equivalenza delle due si veda la nota che compare a seguito della definizione nella prima referenza citata e si utilizzino i risultati [LW12, cap. III, lemma 1.3], [LW12, cap. III, thm. 2.1]. \square

Il lemma seguente è un fatto importante in sé, di cui noi ci serviremo nella definizione di complesso duale.

Lemma 1.31 *Per un CW complesso regolare X la struttura è completamente determinata, a meno di omeomorfismi cellulari, da P_X .*

Dimostrazione. Si veda [Bjö+99, prop. 4.7.23]. □

Definizione 1.32. Un CW complesso regolare si dice una **k-sfera PL** (con $k \in \mathbb{N}$) se ha una triangolazione che sia PL omeomorfa al bordo di un k -simpleso. Equivalentemente si può anche dire che il complesso è una decomposizione cellulare regolare PL della k -sfera. Per una spiegazione più dettagliata si rimanda a [Bjö+99]. In questo caso si può definire il **complesso duale** X^{op} come lo spazio determinato dal poset di celle P_X^{op} , ottenuto da P_X rovesciando le inclusioni; questo è ancora una decomposizione cellulare regolare PL della k -sfera [BZ92, p. 109]. Tale spazio è ben definito a meno di omeomorfismi cellulari, grazie al lemma 1.31.

In conclusione del paragrafo enunciamo il seguente lemma, che sarà cruciale per ottenere una decomposizione duale dei CW complessi presi in esame.

Lemma 1.33 *Sia X una decomposizione cellulare regolare PL della k -sfera e sia P_X il suo poset delle celle. Dato un sottocomplesso $A \leq X$ sia P_A il corrispondente sottoinsieme di P_X . Allora $(P_X \setminus P_A)^{\text{op}}$ è il poset di celle di un CW complesso regolare Y che è omotopicamente equivalente a $X \setminus A$.*

Dimostrazione. Per la prova si veda [BZ92, prop. 3.1]. La terminologia verrà definita nelle prossime sezioni. □

1.3 Costruzione del gruppo fondamentale

Cominciamo questa sezione richiamando il concetto di equivalenza omotopica e la costruzione del gruppo fondamentale attraverso una serie di definizioni ed esempi. A seguire esponiamo un semplice metodo di calcolo del gruppo fondamentale nel caso di spazi con struttura di CW complesso.

Nota. La teoria dell'omotopia studia gli spazi topologici a meno di deformazioni continue perciò in questa sezione le mappe considerate s'intenderanno tutte continue salvo avviso contrario. Inoltre, parlando genericamente di *spazi* si sottointenderà che siano muniti di una topologia.

Definizione 1.34. Una mappa $F : X \times I \rightarrow Y$ si dice **omotopia** tra le mappe $f(x) \equiv F(\bullet, 0)$ e $g(x) \equiv F(\bullet, 1)$, che si diranno **omotope**; si indicherà $f \sim g$. Due spazi X e Y si diranno **omotopicamente equivalenti** se esistono $f : X \rightarrow Y$, $h : Y \rightarrow X$ tali che $h \circ f \sim \mathbb{1}_X$ e $f \circ h \sim \mathbb{1}_Y$; f e h si diranno **equivalenze omotopiche**. Uno spazio omotopicamente equivalente ad un punto si dice **contraibile**.

Il gruppo fondamentale rileva cavità bidimensionali dello spazio tramite gli avvolgimenti di cammini chiusi, diamo quindi la prossima definizione.

Definizione 1.35. Dato uno spazio X e detto $I \equiv [0, 1]$, diremo **cammino in X** un'applicazione $\gamma : I \rightarrow X$. Si dice **cammino chiuso** o direttamente **cappio**, basato in $\gamma(0)$, se $\gamma(0) = \gamma(1)$; in tal caso si può passare al quoziente senza perdere informazioni: $\tilde{\gamma} : S^1 \rightarrow X$. Talvolta i cappi verranno chiamati anche **cicli**.

Un'omotopia $F : I \times I \rightarrow X$ tra i due cammini si dice **ad estremi fissi** se $F(0, u) = F(0, 0)$, $F(1, u) = F(1, 0) \forall u \in I$.

Considerando cammini chiusi sarà utile prenderli tutti con lo stesso estremo, quindi è utile la seguente definizione.

Definizione 1.36. Il dato di uno spazio topologico X e un punto $x_0 \in X$ si dice **spazio puntato** e viene indicato (X, x_0) ; il punto x_0 si dice **punto base**.

Nota. Salvo avviso contrario le mappe tra spazi puntati si intendono tali che portino il punto base dello spazio di partenza nel punto base dello spazio di arrivo.

Definizione 1.37. Consideriamo lo spazio puntato (X, x_0) e sia $\Omega(X, x_0)$ l'insieme dei cappi in X basati in x_0 . Su questo insieme si definisce una **composizione di cammini** nel modo seguente: $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Omega(X, x_0)$ si pone

$$\gamma_1 \circ \gamma_2 \equiv \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Per rendere $\Omega(X, x_0)$ un gruppo con questa operazione bisogna considerare i cammini a meno di riparametrizzazione, ma, siccome diverse parametrizzazioni di un cammino sono casi particolari di cammini omotopi ad estremi fissi, possiamo direttamente definire

il **gruppo fondamentale** dello spazio X basato in x_0 , indicando con \sim l'omotopia ad estremi fissi:

$$\pi_1(X, x_0) \equiv \Omega(X, x_0) / \sim$$

Inoltre, ad una mappa $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ si può associare l'omomorfismo di gruppi

$$\begin{aligned} f_* : \pi_1(X, x_0) &\rightarrow \pi_1(Y, f(x_0)) \\ \gamma &\mapsto f \circ \gamma \end{aligned}$$

in modo tale che sia ben definito il funtore

$$\begin{aligned} \pi_1 : \mathbf{Top.} &\rightarrow \mathbf{Grp} \\ X &\mapsto \pi_1(X, x_0) \\ f &\mapsto f_* \end{aligned}$$

Ricordiamo alcune semplici proprietà del gruppo fondamentale e una definizione che saranno utili nel seguito.

Lemma 1.38 *Sia $f : X \rightarrow Y$ un'equivalenza omotopica. Fissato $x_0 \in X$ arbitrario, la mappa f_* definita sopra è un isomorfismo.*

Dimostrazione. Si può trovare su [Hat01, prop. 1.18]. □

Lemma 1.39 *Il gruppo fondamentale di uno spazio connesso per archi è indipendente, a meno di isomorfismo, dalla scelta del punto base. In tal caso il gruppo fondamentale si indicherà $\pi_1(X)$.*

Definizione 1.40. Se uno spazio è connesso per archi e ha gruppo fondamentale banale si dirà **semplicemente connesso**. Notiamo che la definizione è ben posta grazie al lemma precedente. Uno spazio è semplicemente connesso se e solo se tutti i cammini tra due punti scelti arbitrariamente nello spazio sono omotopi tra loro.

Esempio 1.41. Spazi semplicemente connessi sono ad esempio gli spazi contraibili, tra cui gli spazi vettoriali, oppure $S^m \ \forall m \geq 2$.

Lemma 1.42 *Per spazi connessi per archi vale l'isomorfismo:*

$$\pi_1(X \times Y) \cong \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

Dimostrazione. Si trova ad esempio su [Hat01, prop. 1.12].

□

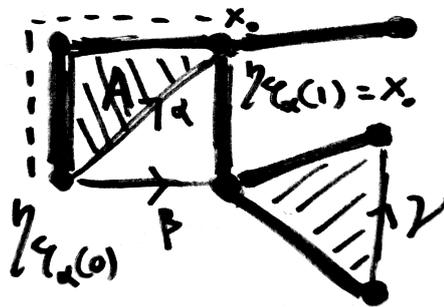
Nel caso di CW complessi connessi il gruppo fondamentale dipende solamente dal 2-scheletro; i generatori derivano dallo 1-scheletro e sono i cappi presenti dopo il collasso di un albero massimale; l'aggiunta di 2-celle provoca la chiusura dei "buchi" su cui queste sono attaccate imponendo le relative relazioni sul gruppo. Di seguito mostriamo alcuni esempi di calcolo e successivamente il teorema generale, del quale abbiamo appena fornito una descrizione intuitiva, preceduto da alcune necessarie definizioni.

Esempio 1.43.

1. Al grafo illustrato in figura 1.2a, con 7 vertici e 9 spigoli, sono attaccate delle 2-celle in modo naturale lungo gli spigoli. Nella figura sono evidenziati il punto base x_0 e l'albero massimale scelto. Contraendo l'albero massimale restano tre generatori: α , β e γ ; invece le relazioni da imporre sono due. Il cammino α si può contrarre passando per la 2-cella A, il cui bordo è $\alpha \circ \eta_{\varphi_\alpha(0)}$; quest'ultima verrà imposta come relazione annullando di fatto il generatore. In ultima analisi rimarrà soltanto il generatore β , perciò il gruppo fondamentale del grafo è \mathbb{Z} .
2. Nella figura 1.2b è esibita una decomposizione di S^2 con una 0-cella e una 2-cella, il cui bordo è incollato tutto in P. Da ciò risulta in effetti che il gruppo fondamentale non ha generatori, perciò la sfera è semplicemente connessa.
3. La figura 1.2c è una rappresentazione di $\mathbb{R}P^2$ come D^2 con il bordo identificato tramite l'antipodale. La decomposizione conta una 0-cella, una 1-cella con il bordo tutto attaccato all'unico punto, e una 2-cella incollata

Definizione 1.44. Diciamo **grafo** un CW complesso 1-dimensionale, **vertici** le sue 0-celle e **lati** le 1-celle. Notiamo che, essendo localmente connesso per archi, un grafo è connesso \iff è connesso per archi. Un **sottografo** è un'unione di vertici e lati del grafo tale che, se contiene un lato, allora contiene i suoi vertici; ovvero, equivalentemente, è un sottoinsieme chiuso del grafo; un sottografo contraibile si dice **albero** e si dirà anche **massimale** se contiene tutti i vertici del grafo.

Lemma 1.45 *In un albero, data una qualunque coppia di punti distinti, vi è un unico cammino iniettivo che li congiunga; lo chiameremo **cammino diretto** tra i due punti.*



(a) Grafo.



(b) Sfera.



(c) Piano proiettivo: \mathbb{RP}^2 .

Figura 1.2: Esempi di decomposizioni cellulari.

Dimostrazione. Chiedere che il cammino sia iniettivo corrisponde a considerare dei cammini che “non tornano sui propri passi”. Una spiegazione formale si trova in [Hat01, cap. 1, p. 85]. \square

Lemma 1.46 *Ogni grafo connesso contiene un albero massimale.*

Dimostrazione. Si trova ad esempio in [Hat01, prop. 1A.1]. \square

Lemma 1.47 *In un grafo con v vertici, un sottografo connesso che contiene tutti i vertici è un albero massimale se e soltanto se ha $v - 1$ lati.*

Dimostrazione. Per contenere tutti i vertici deve avere almeno $v - 1$ lati. Ne ha di più se e soltanto se alcune coppie di vertici sono connesse da più di un cammino, perciò sono presenti dei cicli nel sottografo. \square

Ora si comprenderà l’enunciato del seguente teorema, che permette il calcolo esplicito della presentazione del gruppo fondamentale di un CW complesso; si ricordi che, data una m -cella, $\varphi_\alpha: S_\alpha^{m-1} \rightarrow X^{m-1}$ è la mappa d’incollamento e $\Phi_\alpha: D_\alpha^m \rightarrow X$ la mappa caratteristica della cella.

Teorema 1.48 Sia X un CW complesso connesso, \mathcal{A} un albero massimale nello 1-scheletro X^1 e $x_0 \in \mathcal{A}$. Per ogni $v \in \mathcal{A}$ indico con η_v il cammino diretto da x_0 a v .

I generatori di $\pi_1(X, x_0)$ sono dati da $\gamma_\alpha \equiv \eta_{\varphi_\alpha(0)} \circ \phi_\alpha \circ \eta_{\varphi_\alpha(1)}^{-1} \forall \alpha \in J$, con $J = \{ \text{indici delle 1-celle non contenute in } \mathcal{A} \}$.

Le relazioni si ottengono, una per ogni 2-cella, considerando la mappa di incollamento φ_β parametrizzata in modo tale che $\varphi_\beta(0) \in \mathcal{A}$, e imponendo nullo il cappio

$$\rho_\beta \equiv \eta_{\varphi_\beta(0)} \circ \varphi_\beta \circ \eta_{\varphi_\beta(0)}.$$

Si ottiene così la seguente presentazione del gruppo fondamentale:

$$\pi_1(X, x_0) = \langle \gamma_\alpha, \alpha \in J \mid \rho_\beta, \forall \beta \text{ indice di una 2-cella} \rangle$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si combinino [Hat01, es. 1.22] e [Hat01, prop 1.26]. □

1.4 Introduzione ai rivestimenti

In apertura richiamiamo le definizioni essenziali riguardo ai rivestimenti e alcune loro proprietà; faremo inoltre un cenno ai sollevamenti di omotopie e li useremo per definire l'azione di monodromia. Definita quest'ultima, e esibite le sue principali proprietà, introduciamo gli automorfismi di rivestimento dalla cui azione sullo spazio totale ricaviamo una prima successione esatta corta. Questo procedimento sarà una traccia per estendere il ragionamento ad azioni di gruppi generici di omeomorfismi; da questi ultimi ricaveremo la successione esatta corta che necessiteremo in seguito. Infine, introduciamo i rivestimenti regolari ed esponiamo alcuni corollari della costruzione precedente validi in questo caso particolare.

Definizione 1.49. Si dice **rivestimento** il dato (E, B, p) dove la **proiezione di rivestimento** è una funzione continua $p : E \rightarrow B$ tra due spazi topologici, soddisfacente alla condizione: per ogni $x \in B$ esiste un intorno aperto di x : $U \subset B$, detto **aperto banalizzante**, tale che $p^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ e $p|_{V_\alpha}$ sia un omeomorfismo $\forall \alpha \in A$, con V_α aperti detti **placche**. Lo spazio B si dice **base** del rivestimento ed E **spazio totale**. Al variare di $x \in B$ l'insieme $p^{-1}(x)$ si dice **fibra** di x . Un rivestimento si dice **connesso** quando lo è il suo spazio totale. Notiamo che B è localmente connesso per archi $\iff E$ è localmente connesso per archi.

Nota. D'ora in poi E indicherà lo spazio totale e B lo spazio base; inoltre li assumeremo sempre entrambi connessi e localmente connessi per archi.

Lemma 1.50 *Ricordiamo che valgono i seguenti fatti:*

- *La proiezione di rivestimento è una mappa aperta.*
- *Le fibre sono discrete e hanno tutte la stessa cardinalità; se questa è finita si dice **grado** del rivestimento.*
- *La mappa p_* indotta dal rivestimento sui gruppi fondamentali è iniettiva.*

Dimostrazione. Si trova in [Man14, prop. 12.12]. □

Siccome la proiezione di rivestimento collega, tramite omeomorfismi locali, la topologia dello spazio base a quella dello spazio totale, è possibile “sollevare” una mappa da B a E prolungandola lungo gli aperti banalizzanti; diamo quindi la definizione seguente.

Definizione 1.51. Data una mappa continua $f: Y \rightarrow B$, si dice **sollevamento** di f una mappa continua $\hat{f}: Y \rightarrow E$ tale che $f = p \circ \hat{f}$.

Teorema 1.52 *Sia data un'omotopia $F: I \times Y \rightarrow B$. Allora data una qualunque $f_0: Y \rightarrow E$, esiste un'unica mappa $\hat{F}: I \times Y \rightarrow E$ tale che $\hat{F}(0, \bullet) = f_0(\bullet)$ e anche $p \circ \hat{F} = F$. Tale omotopia si dirà **sollevamento di F in f_0** .*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Hat01, prop. 1.30]. □

Definizione 1.53. Siccome i cammini sono casi particolari di omotopie possiamo interpretare il teorema precedente in questo senso, ottenendo che, una volta scelto il punto base $y \in E$, ogni cammino γ in B si solleva in modo unico in E ad un cammino che chiameremo $\hat{\gamma}_y$. Dunque, fissato un punto base $x \in B$ e detta $p^{-1}(x)$ la sua fibra, è ben definita un'azione destra $p^{-1}(x) \curvearrowright \pi_1(B, x)$, detta **azione di monodromia** del rivestimento sulla fibra di x :

$$\begin{aligned} \text{Mon}_p(x): p^{-1}(x) \times \pi_1(B, x) &\rightarrow p^{-1}(x) \\ (y, \gamma) &\mapsto \hat{\gamma}_y(1) \end{aligned}$$

Nel caso di rivestimenti connessi e localmente connessi l'azione di monodromia è transitiva; ciò segue dall'unicità del sollevamento.

L'azione di monodromia ha un'importante proprietà di commutatività, esposta nel lemma seguente.

Lemma 1.54 *Sia dato il seguente un diagramma commutativo (di applicazioni continue), con p, q rivestimenti:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ B & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Allora $\forall y \in E, \alpha \in \pi_1(B, p(y))$ si ha $\varphi(y \cdot \alpha) = \varphi(y) \cdot f_*(\alpha)$.

Dimostrazione. Per una dimostrazione si veda [Man14, prop. 13.3]. □

Il prossimo lemma descrive le relazioni che intercorrono tra l'immagine del gruppo fondamentale tramite p_* e le fibre dei punti.

Lemma 1.55 *Dato un rivestimento $p: E \rightarrow B$ e scelto un punto base $y \in p^{-1}(x)$, diremo $p_*\pi_1(E, y) \equiv \text{Imm } p_*\pi_1(E, y)$. Valgono le seguenti proprietà:*

1. $p_*\pi_1(E, y) = \text{Stab}_{\pi_1(B, x)}(y)$.
2. La funzione φ_y del lemma 1.15 è una biezione tra le classi laterali destre di $p_*\pi_1(E, y)$ in $\pi_1(B, x)$ e la fibra $p^{-1}(x)$.
3. I coniugati di $p_*\pi_1(E, y)$ in $\pi_1(B, x)$ sono tutti e soli i sottogruppi $\{p_*\pi_1(E, u) \mid p(u) = x\}$.

Dimostrazione. Si trova un risultato simile in [Man14, teo. 13.1]; il primo punto è lo stesso, scritto con la terminologia delle azioni di gruppi. Il secondo è un caso particolare del lemma 1.15, in cui l'azione è transitiva sulla fibra poiché il rivestimento è connesso; il terzo segue dal secondo punto del lemma 1.12, considerando sempre la stessa azione sulle classi laterali. □

Un altro tipo di azione naturale sullo spazio totale è dato dagli omeomorfismi dello spazio stesso: $\text{Omeo}(E) \curvearrowright E$ tramite $\rho_{\text{Omeo}(E)} = \mathbb{1}$; in particolare possiamo considerare solo quelli compatibili con il rivestimento scelto, nel senso che ora specifichiamo.

Definizione 1.56. Siano $q_1: E \rightarrow B$ e $q_2: F \rightarrow B$ due rivestimenti. Si dice **morfismo di rivestimenti** un'applicazione continua $f: E \rightarrow F$ tale che $q_1 = q_2 \circ f$. Notiamo che ciò definisce la categoria dei rivestimenti dello spazio B e dei morfismi di rivestimento. Gli isomorfismi della categoria sono gli omeomorfismi f che siano compatibili con i rivestimenti: quelli tali che $q_1 = q_2 \circ f$ e $q_2 = q_1 \circ f^{-1}$. Dato un singolo rivestimento $q: E \rightarrow B$ si dicono **automorfismi del rivestimento**, indicati con $Aut(q)$, gli isomorfismi di q in sé stesso, cioè gli omeomorfismi f di E tali che $q = q \circ f$.

Sia quindi $q: E \rightarrow B$ un rivestimento. Per quanto visto, $Aut(q)$ è un sottogruppo di $Omeo(E)$ che agisce tramite omeomorfismi su E ; questa azione è compatibile con l'azione di monodromia su una fibra $q^{-1}(x)$ tuttavia non è transitiva, perciò il lemma 1.22 non risulta direttamente applicabile; ciononostante il lemma seguente mostra che possiamo restringerci adeguatamente e renderlo applicabile.

Lemma 1.57 *Sia $q: E \rightarrow B$ un rivestimento connesso. Sia $y \in E$ e sia $x \equiv q(y)$ la sua proiezione. Scelto $\alpha \in \pi_1(B, x)$, $\exists f \in Aut(q) \mid f(y) = y \cdot \alpha \iff \alpha \in N_{\pi_1(B, x)}(q_*\pi_1(E, y))$.*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [Fra20, lemma 7.8.17]. □

Dunque possiamo applicare il lemma 1.22 considerando l'azione di monodromia agente solo dal normalizzatore:

$$N(q_*\pi_1(E, y)) \equiv N_{\pi_1(B, x)}(q_*\pi_1(E, y))$$

ottenendo da (1.2) la sequenza esatta corta

$$\mathbf{0} \rightarrow \pi_1(E, y) \xrightarrow{q_*} N(q_*\pi_1(E, y)) \xrightarrow{\psi_y^{(q)}} Aut(q) \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.1)$$

Osserviamo che, grazie al punto (1) del lemma 1.55, si ottiene

$$Stab_{N(\pi_1(E, y))}(y) = Stab_{\pi_1(B, x)}(y) = q_*\pi_1(E, y)$$

da cui si ricava il primo gruppo della sequenza appena vista.

Fin qui abbiamo considerato l'azione sinistra di un sottogruppo $G \leq Omeo(E)$ su E combinata con l'azione di monodromia di un certo rivestimento q ; tuttavia, anche in

assenza di tale rivestimento, sotto opportune condizioni, l'azione stessa $G \curvearrowright \text{Omeo}(E)$ fornisce uno spazio delle orbite tale che la proiezione al quoziente sia un rivestimento; di qui il nome di azione di rivestimento.

Lemma 1.58 *Se G agisce tramite omeomorfismi su E con un'azione di rivestimento e lo spazio quoziente E/G è connesso, allora la proiezione $p: E \rightarrow E/G$ è un rivestimento regolare.*

Dimostrazione. Che sia un rivestimento è mostrato in [Man14, prop. 12.18], ricordando la nota 3; mentre la regolarità, che definiremo in 1.62, segue dal prossimo teorema (numero 1.59); infatti, il nucleo di un omeomorfismo è sempre un sottogruppo normale del dominio. \square

Dunque possiamo combinare l'azione sinistra $G \curvearrowright \text{Omeo}(E)$ con l'azione destra di monodromia $p^{-1}(x) \curvearrowright \pi_1(E/G, x)$ indotta dal rivestimento dello spazio delle orbite. Sappiamo dal lemma 1.20 che l'azione $G \curvearrowright E$ è libera. Fissato un punto $x \in E/G$, su $p^{-1}(x)$ la stessa azione è anche transitiva, per costruzione; quindi $\forall y, z \in p^{-1}(x) \exists! g \in G \mid g(y) = z$. Da ciò segue un'altra sequenza esatta corta, ricavata dal teorema seguente.

Teorema 1.59 *Nelle ipotesi del lemma 1.58, fissato un punto $x \in E/G$, l'azione di G su $p^{-1}(x)$ e quella di monodromia sono compatibili. Inoltre, siccome l'azione di G è libera e transitiva, per ogni $y \in p^{-1}(x)$ fissato, si ha l'omomorfismo di gruppi*

$$\begin{aligned} \psi_y: \pi_1(E/G, x) &\rightarrow G \\ \alpha &\mapsto g \in G \mid g(y) = y \cdot \alpha \end{aligned}$$

il cui nucleo è $p_\pi_1(E, y)$; se anche E è connesso l'omomorfismo è pure suriettivo.*

Dimostrazione. Per la verifica che siano compatibili si veda [Man14, lemma 13.13]. L'omomorfismo è ben definito per quanto visto appena sopra; il resto segue dal lemma 1.22, siccome sappiamo che l'azione di monodromia è transitiva quando lo spazio base è connesso. \square

Lemma 1.60 *Nelle ipotesi del lemma 1.58, detto $p: E \rightarrow E/G$ il rivestimento, si ha $\text{Aut}(p) = G$.*

Dimostrazione. Si trova ad esempio in [Hat01, prop. 1.40(b)]. \square

Alla luce di questo risultato si può riformulare il teorema dicendo: dato un gruppo G che agisce tramite omeomorfismi sullo spazio connesso E in modo tale che l'azione sia di rivestimento, allora si ricava la seguente successione esatta corta, valida comunque si fissi $y \in E$:

$$\mathbf{0} \rightarrow \pi_1(E, y) \xrightarrow{p} \pi_1(E/G, p(y)) \xrightarrow{\psi_y} G \rightarrow \mathbf{0} \quad (1.2)$$

da cui segue

$$\text{Aut}(E \xrightarrow{p} E/G) \cong \frac{\pi_1(E/G, p(y))}{p_*\pi_1(E, y)}$$

Ribadiamo che le due sequenze esatte corte ricavate fino ad ora sono indotte da due azioni di monodromia differenti: la prima presuppone l'esistenza di un rivestimento del quale considerare gli automorfismi; la seconda è relativa al rivestimento indotto dall'azione di un generico gruppo di omeomorfismi su uno spazio. D'altra parte, in presenza di un rivestimento $q: E \rightarrow B$, si può considerare come sottogruppo di omeomorfismi agente su E il gruppo $\text{Aut}(q)$, ottenendo così un secondo rivestimento con relativa azione di monodromia discussa nel secondo caso sopra citato.

Lemma 1.61 *Dato un rivestimento connesso $q: E \rightarrow B$, l'azione $\text{Aut}(q) \curvearrowright E$ è di rivestimento.*

Dimostrazione. Si può trovare la dimostrazione in [Man14, lemma 13.26]; si ricordi la nota in pedice (3). \square

In tal caso siamo in presenza di due rivestimenti indicati nel diagramma seguente:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & B \\ \downarrow p & & \\ E/\text{Aut}(q) & & \end{array}$$

ciascuno dei quali induce un'azione destra di monodromia, compatibile con l'azione sinistra $\text{Aut}(q) \curvearrowright E$, da cui deriva una successione esatta corta.

Siccome per definizione la mappa q passa al quoziente rispetto ad $\text{Aut}(q)$, si ottiene il

diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{q} & B \\
 \downarrow p & \nearrow \tilde{q} & \\
 E/Aut(q) & &
 \end{array}
 \tag{1.3}$$

Esaminiamo ora una classe peculiare di rivestimenti, quelli regolari, che sono dotati di maggiore simmetria; questa caratteristica permette di esprimere lo spazio base come spazio delle orbite rispetto all'azione di un certo gruppo e ciò li rende più ricchi di struttura.

Definizione 1.62. Un rivestimento si dice **regolare** se soddisfa una delle condizioni equivalenti del lemma seguente.

Lemma 1.63 *Dato un rivestimento $q: E \rightarrow B$ sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1. $\exists y \in E \mid q_*\pi_1(E, y) \triangleleft \pi_1(B, q(y))$
(la condizione è indipendente dalla scelta di $y \in E$).
2. $Aut(q) \curvearrowright E$ è transitiva sulle fibre di q .

Dimostrazione. Si trova ad esempio su [Hat01, prop. 1.39(a)]; che la prima condizione sia indipendente dalla scelta del punto $y \in E$ è mostrato in [Man14, lemma 13.20]. \square

La simmetria alla quale abbiamo fatto menzione si nota ad esempio nella scelta del punto base: all'interno della stessa fibra la scelta di un punto piuttosto che un altro è ininfluenza.

Dal lemma 1.58 sappiamo che i rivestimenti dati da azioni di rivestimento sono regolari. Viceversa, se un rivestimento è regolare, la mappa $\tilde{q}: E/Aut(q) \rightarrow B$ del diagramma (1.3) è un omeomorfismo: in generale è continua, aperta e suriettiva; se l'azione di $Aut(q)$ è transitiva allora \tilde{q} è pure iniettiva. Quindi, a meno di omeomorfismo dello spazio base, il rivestimento q è ottenuto come spazio quoziente rispetto all'azione di rivestimento di $Aut(q)$. Riassumiamo nel prossimo teorema le proprietà principali dei rivestimenti regolari.

Teorema 1.64 *Sia $q: E \rightarrow B$ un rivestimento regolare. Allora*

1. si ottiene la sequenza esatta corta

$$0 \rightarrow \pi_1(E, y) \xrightarrow{q_*} \pi_1(B, q(y)) \xrightarrow{\psi_y^{(q)}} \text{Aut}(q) \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

2. vale l'omeomorfismo $E/\text{Aut}(q) \simeq B$

Dimostrazione. Il punto (1) segue dalla sequenza esatta corta (1.1). Il secondo dal diagramma (1.3), come detto sopra. \square

Capitolo 2

Presentazione dei gruppi delle trecce

Iniziamo questo capitolo introducendo i gruppi delle trecce e i gruppi delle trecce pure, prima con una definizione intuitiva e poi con l'ausilio della definizione degli spazi di configurazioni. Mostriamo come il passaggio dalle trecce pure alle trecce generiche si ottenga tramite l'azione del gruppo simmetrico; come vedremo questa è un'azione di rivestimento perciò se ne ricava un'utile sequenza esatta corta. Al fine di calcolare la presentazione esplicita dei suddetti gruppi, esibiamo una decomposizione cellulare degli spazi di configurazioni; ci ispiriamo a quella introdotta da Fox e Neuwirth ma correggiamo alcuni dettagli tecnici, in modo da rendere i complessi presi in esame regolari; questo sia per lo spazio di configurazioni ordinato sia per quello non ordinato. Infine, dimostriamo la presentazione da loro esibita e sfruttiamo la già citata sequenza esatta corta per ricavare anche una presentazione del gruppo simmetrico.

Nota. Per questo capitolo fissiamo un numero $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ che rappresenterà il numero di punti presi in esame e la dimensione dei gruppi delle trecce.

2.1 Definizione delle trecce e delle trecce pure

La definizione certamente più intuitiva di treccia è quella di fili nello spazio che si passano davanti l'un l'altro; d'altra parte, siccome questi fili possono essere visti come il moto di punti distinti nel piano, si ricava una definizione più tecnica che fa uso degli spazi di configurazioni. Lo spazio delle configurazioni può essere ordinato oppure non ordinato; nel primo caso possiamo considerare la situazione particolare in cui alla fine

del moto i punti siano tornati nella posizione di partenza e parleremo di trecce pure; il secondo caso si ottiene considerando lo spazio quoziente del primo rispetto all'azione del gruppo simmetrico che scambia i punti in questione; siccome questa è un'azione di rivestimento ricaviamo una sequenza esatta corta tra trecce pure, trecce generiche e il gruppo simmetrico.

Nota. D'ora in avanti identificheremo canonicamente $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ e li tratteremo come lo stesso spazio vettoriale topologico, con la metrica standard. Questo sarà identificato con l'iperpiano $H_0 \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = 0\}$ di un \mathbb{R}^3 visto capovolto, cioè con l'asse z orientato verso il basso; questo al solo scopo di *leggere* le trecce dall'alto verso il basso. Analogamente definiamo anche gli iperpiani $H_t \equiv \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = t\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Definizione 2.1. Consideriamo dei punti (P_1, \dots, P_n) , $P_j \in H_0$ e le loro proiezioni ortogonali su H_1 : (Q_1, \dots, Q_n) ¹. Una **treccia geometrica (generica)** sarà un insieme T di n **fil**i, ossia cammini \mathcal{F}_j da P_j a $Q_{\tau(j)}$, tali che:

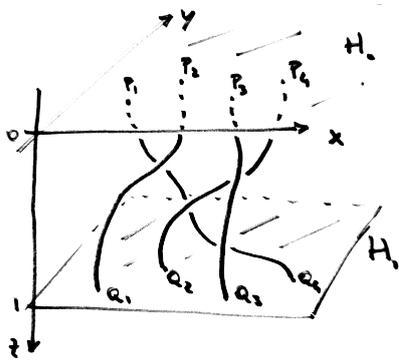
- $\tau \in \Sigma_n$ si dirà **permutazione della treccia** e si indicherà τ_T
- $Card(\mathcal{F}_j \cap H_t) = 1 \quad \forall j \quad \forall t \in [0, 1]$
- $\mathcal{F}_1 \cap H_t \neq \dots \neq \mathcal{F}_n \cap H_t \quad \forall t \in [0, 1]$

Una treccia si può quindi considerare un sottoinsieme di $\mathbb{C} \times [0, 1]$. La treccia si dirà **treccia pura** se $\tau_T = \mathbb{1}$. In figura 2.1 sono disegnate una treccia generica e una treccia pura.

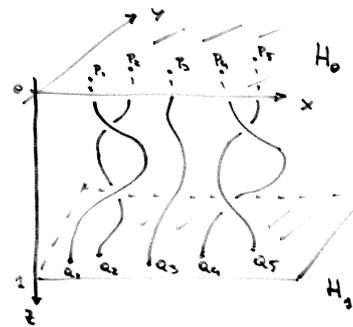
Siccome siamo interessati agli intrecci dei fili più che ai cammini specifici, consideriamo le trecce a meno di omotopia cioè lavoriamo con classi di omotopia di trecce, definite come segue; un'omotopia di trecce è un'omotopia di ciascun filo tale che $F_u \equiv (\mathcal{F}_{1,u}, \dots, \mathcal{F}_{n,u})$ sia una treccia $\forall u \in [0, 1]$ dove u è il parametro dell'omotopia; per omotopie di trecce pure si richiede che F_u sia una treccia pura.

Nota. D'ora in avanti sarà sottointeso, salvo indicazione contraria, che quando parleremo di trecce considereremo classi di omotopia di trecce, scegliendone un rappresentante.

¹Solitamente si preferisce considerare i punti $P_j \equiv (j, 0, 0)$ e $Q_j \equiv (j, 0, 1)$, siccome si considerano le trecce a meno di omotopie dei fili.



(a) Treccia generica a 4 fili.



(b) Treccia pura a 5 fili.

Figura 2.1: Esempi di trecce.

Per visualizzare le trecce si sceglie un piano parallelo all'asse z tale per cui le proiezioni dei punti P_1, \dots, P_n su questo piano siano distinte, e si disegna la proiezione della treccia su questo piano; si stabilisce il sistema di riferimento in modo tale che il piano coincida con O_{xz} , in questo modo risaltano le sovrapposizioni; l'unica cautela sta nell'evidenziare quale filo passi davanti all'altro, per poter ricostruire la treccia tridimensionale a meno di equivalenze omotopiche. Sempre scegliendo opportunamente un rappresentante si possono prendere i fili in modo che siano poligonali e che si possa dividere l'intervallo $[0, 1]$ in segmenti $[t_i, t_{i+1}]$ tali che nella proiezione ci sia una sola sovrapposizione in ogni sottointervallo. Un esempio di rappresentazione schematica di trecce si ha in figura 2.2.

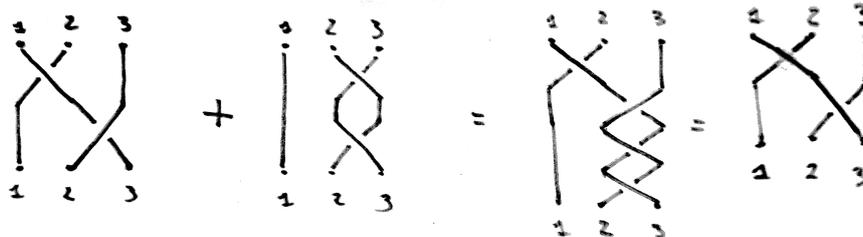


Figura 2.2: Concatenazione di trecce.

Definizione 2.2. Dal'illustrazione appena menzionata si evince che una treccia arbitraria si può ottenere come concatenazione di trecce più semplici, ad esempio trecce con un solo incrocio. In effetti la **concatenazione** è un'operazione ben definita tra due classi di equivalenza di trecce e rende le trecce geometriche un gruppo, detto appunto **gruppo**

delle **treccie geometriche**, indicato con \mathcal{B}_n ; analogamente si definisce il **gruppo delle treccie geometriche pure** $\mathcal{PB}_n \leq \mathcal{B}_n$. Un esempio di concatenazione è mostrato in figura 2.2; l'elemento neutro è la treccia in cui ogni filo è un segmento verticale che collega P_j con Q_j ; l'inverso di una treccia lo esamineremo a breve. Notiamo che ciascun filo della treccia ottenuta mediante concatenazione va riparametrizzato in $[0, 1]$ ma questo non cambia la classe di equivalenza. I "mattoncini da costruzione" delle treccie sono le **treccie elementari**: la j -esima, indicata ε_j , è la treccia ottenuta con una sola sovrapposizione in cui il filo j -esimo passa sopra al filo $(j+1)$ -esimo. Di queste treccie è semplice costruire l'inverso: in ε_j^{-1} sarà il filo $(j+1)$ -esimo a passare sopra al j -esimo. Quindi per una treccia generica l'inverso si ottiene riflettendo la treccia rispetto ad H_1 e traslando l'immagine verticalmente per riallineare i punti iniziali su H_0 .

Per le dimostrazioni e ulteriori sviluppi di questa costruzione geometrica si rimanda a [Han89, cap. 1, par. 1] in cui sono presenti anche ulteriori referenze sull'argomento.

Grazie alle proprietà elencate nella def. 2.1, una treccia si può considerare come il moto di punti distinti nello spazio; diamo quindi le necessarie definizioni per ottenere questa seconda caratterizzazione.

Definizione 2.3. Siano

$$\mathcal{D} \equiv \cup_{1 \leq i < j \leq n} \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i = z_j\} \quad \text{e} \quad \text{Conf}_n(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{C}^n \setminus \mathcal{D}$$

rispettivamente la **grande diagonale**² e lo **spazio di configurazioni** di n punti su \mathbb{C} . Notiamo che i punti di $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ sono ordinati e distinti.

Per uso futuro definiamo anche

$$\text{Zero}_n(\mathbb{C}) \equiv \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_1 + \dots + z_n = 0\}$$

$$\text{Conf}_n^0(\mathbb{C}) \equiv \text{Conf}_n(\mathbb{C}) \cap \text{Zero}_n(\mathbb{C})$$

rispettivamente i **punti a somma zero** e lo **spazio di configurazioni a somma zero**.

²Dall'inglese *big diagonal*.

Lemma 2.4 *Innanzitutto $Conf_n(\mathbb{C})$ e $Conf_n^0(\mathbb{C})$ sono varietà reali connesse, in particolare connesse per archi, di dimensioni rispettivamente $2n$ e $2n - 2$.*

*Inoltre $\mathcal{PB}_n \cong \pi_1(Conf_n(\mathbb{C}))$, i cui elementi si diranno **treccie (algebriche) pure**.*

Dimostrazione. Siccome \mathcal{D} è un chiuso e \mathbb{C}^n una $2n$ -varietà, $Conf_n(\mathbb{C})$ è una varietà immersa $2n$ -dimensionale aperta. La connessione per archi segue dal fatto che in \mathbb{C} si può sempre trovare un cammino tra due punti dati che non passi per un numero finito di punti fissati. La mappa

$$h: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow Conf_n^0(\mathbb{C})$$

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto (z_1, \dots, z_{n-1}, -z_1 - \dots - z_{n-1})$$

è ben definita se dal dominio vengono tolti gli $\binom{n}{2}$ iperpiani chiusi le cui immagini sono i punti di \mathcal{D} ; si verifica che così è un omeomorfismo, dunque $Conf_n^0(\mathbb{C})$ è una $(2n-2)$ -varietà immersa aperta. Per dimostrarne la connessione per archi si può procedere così: per ottenere un cammino tra due punti $(z_1, \dots, z_n), (w_1, \dots, w_n) \in Conf_n^0(\mathbb{C})$, si prenda il cammino $[0, 1] \ni t \xrightarrow{\gamma} (1-t) \cdot (z_1, \dots, z_n) + t \cdot (w_1, \dots, w_n) \in Conf_n^0(\mathbb{C})$; grazie alla locale connessione, se alcune delle traiettorie dei punti si dovessero incrociare (uscendo quindi da $Conf_n(\mathbb{C})$), si potrebbero modificare i cammini di quei punti in un intorno dell'incrocio facendo in modo di restare in $Conf_n^0(\mathbb{C})$, ad esempio sostituendo le traiettorie rettilinee con archi di circonferenze; questo grazie al fatto che si considerano un numero finito di punti e che vale la proprietà già citata sopra per \mathbb{C} . Per quanto riguarda l'isomorfismo, si associa ad una treccia geometrica il cammino in $Conf_n(\mathbb{C})$ che corrisponde all'intersezione col piano H_t al variare di $t \in [0, 1]$; questo è per costruzione un morfismo di gruppi ben definito. L'inverso si costruisce procedendo al contrario e si verifica che anch'esso è un morfismo di gruppi ben definito. \square

Definizione 2.5. Anche per una treccia generica si può considerare il cammino in $Conf_n(\mathbb{C})$ ad essa associato; tuttavia, a meno che non sia una treccia pura, il punto iniziale e quello finale non coincidono; per ovviare a questo inconveniente che ci impedisce di identificare anche le treccie generiche con un gruppo fondamentale, consideriamo l'azione del gruppo simmetrico che scambia le coordinate: $\Sigma_n \curvearrowright Conf_n(\mathbb{C})$ data da $\tau \cdot (z_1, \dots, z_n) \equiv (z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)})$. Nominiamo gli spazi delle orbite

$$UCConf_n(\mathbb{C}) \equiv Conf_n(\mathbb{C}) / \Sigma_n \quad UConf_n^0(\mathbb{C}) \equiv Conf_n^0(\mathbb{C}) / \Sigma_n$$

Notiamo che la stessa azione si può definire più in generale su \mathbb{C}^n , o addirittura su $S^{2n} = \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$, fissando il punto all'infinito³; quindi è ben definito anche lo spazio

$$UZero_n(\mathbb{C}) \equiv Zero_n(\mathbb{C})/\Sigma_n$$

Tuttavia questo non è una varietà, come invece dimostreremo per gli spazi precedenti.

Lemma 2.6 *Su \mathbb{C}^n e suoi sottoinsiemi l'azione appena descritta produce quozienti che sono spazi di Hausdorff; su $Conf_n(\mathbb{C})$ è libera e propriamente discontinua, dunque è un'azione di rivestimento.*

Dimostrazione. I quozienti sono di Hausdorff poiché \mathbb{C}^n è di Hausdorff e localmente compatto e il gruppo Σ_n è finito; si sfrutta un risultato che si trova su [Fra20, teo. 6.6.10]. Se considero punti distinti, l'unica permutazione che li lascia invariati è l'identità quindi l'azione su $Conf_n(\mathbb{C})$ è libera; se non sono distinti è falso, perciò su \mathbb{C}^n non è libera. Siccome Σ_n è finito, l'azione è anche propriamente discontinua. Dal lemma 1.20 segue che sia un'azione di rivestimento. \square

Lemma 2.7 *Gli spazi $UConf_n(\mathbb{C})$ e $UConf_n^0(\mathbb{C})$ sono varietà connesse quindi la proiezione $\Lambda: Conf_n(\mathbb{C}) \rightarrow UConf_n(\mathbb{C})$ è un rivestimento regolare.*

*Inoltre $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(UConf_n(\mathbb{C}))$, i cui elementi si diranno **treccie (algebriche generiche)**.*

Dimostrazione. Che i due spazi quoziente siano varietà topologiche segue dalle proprietà dell'azione esposte nel lemma 2.6, il risultato preciso si trova in [Fra20, teo. 6.6.19]; dalla connessione degli spazi $Conf_n(\mathbb{C})$ e $Conf_n^0(\mathbb{C})$ esposta nel lemma 2.4 segue che le varietà quoziente siano connesse, quindi si può applicare il lemma 1.58 e ottenere il risultato circa la proiezione di rivestimento. Analogamente a quanto fatto nel lemma 2.4, si costruisce un morfismo $\varphi: \mathcal{B}_n \rightarrow \pi_1(UConf_n(\mathbb{C}))$ componendo i cammini $\gamma: [0, 1] \rightarrow Conf_n(\mathbb{C})$ con la proiezione Λ ; che sia un morfismo segue dalle definizioni. Fissato un punto base in $Conf_n(\mathbb{C})$ ogni cammino $\beta \in \pi_1(UConf_n(\mathbb{C}))$ si solleva in modo unico; quindi, scelto il punto base su H_0 , è ben definita la treccia $\varphi^{-1}(\beta)$. Si verifica che φ^{-1} sia un morfismo e che i due siano uno l'inverso dell'altro sfruttando la continuità dei fili. \square

³Si intende lo spazio topologico ottenuto compattificando \mathbb{C} con un punto tramite la compattificazione di Alexandroff, descritta più nel dettaglio nella def. 2.13.

Teorema 2.8 *Per un qualsiasi n fissato ad inizio del capitolo vale la successione esatta corta*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{PB}_n \xrightarrow{\Lambda_*} \mathcal{B}_n \xrightarrow{\psi^{(\Lambda)}} \Sigma_n \rightarrow \mathbf{0} \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Per il lemma 2.7 la proiezione Λ è un rivestimento regolare; pertanto, applicando il teorema 1.64 si ottiene una sequenza esatta corta nella quale basta sostituire i gruppi fondamentali con i rispettivi gruppi delle trecce, secondo i risultati dei lemmi 2.4 e 2.7. \square

2.2 Decomposizione cellulare degli spazi di configurazioni

Ora che abbiamo espresso i gruppi delle trecce come gruppi fondamentali degli spazi di configurazioni, forniamo a questi ultimi una struttura di CW complessi così da ottenerne una presentazione sfruttando le tecniche del cap. 1. In primo luogo esibiremo una decomposizione cellulare di \mathbb{C}^n in cui \mathcal{D} sia un sottocomplesso e che “rispetti” - nel senso che preciseremo in seguito - l’azione di Σ_n . A partire da questa decomposizione, per semplicità di calcolo, descriveremo la struttura duale che verrà usata nella prossima sezione. La decomposizione da noi proposta si differenzia leggermente da quella fornita in [FN62] poiché le ipotesi del lemma 1.33 richiedono che il complesso sia una decomposizione regolare PL di una sfera.

Per chiarezza espositiva richiamiamo la decomposizione originale fornita dagli autori, premettendo la definizione di una relazione d’ordine totale su \mathbb{C} che ci permetterà di descriverne agevolmente la struttura.

Definizione 2.9. Su \mathbb{C} si può stabilire l’ordine lessicografico come segue: $z \equiv (a, b) <_{\text{lex}} (c, d) \equiv w \iff a < c \vee (a = c \wedge b < d)$; nel primo caso scriveremo $z < w$ e nel secondo $z \stackrel{\vee}{=} w$.

Dunque, per un punto $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, valgono le relazioni indicate sinteticamente con $z_{\tau(1)} \square \dots \square z_{\tau(n)}$ dove ciascun \square è uno dei simboli $<, \stackrel{\vee}{=}, =$ e τ una permutazione. Fissati τ e i simboli da inserire al posto dei \square , la scrittura $\theta \equiv (\tau(1) \square \dots \square \tau(n))$ identifica un insieme di \mathbb{C}^n i cui punti hanno coordinate soddisfacenti le relazioni in essa

esprese; per un insieme così identificato la scrittura non è unica, come mostra l'esempio 2.10. Le celle della decomposizione di \mathbb{C}^n esibita nell'articolo originale sono tutte quelle definite dai simboli θ al variare di τ e della scelta dei \square ; si osservi che formano una partizione di \mathbb{C}^n .

Esempio 2.10. Dalla definizione: $(2 < 3 \stackrel{\vee}{=} 1 = 4) \equiv \{(x_1, \dots, x_8) \in \mathbb{R}^6 \mid x_3 < x_5, x_5 = x_1, x_6 < x_2, x_1 = x_7, x_2 = x_8\}$. Lo stesso insieme di punti si può indicare con la scrittura equivalente $(2 < 3 \stackrel{\vee}{=} 4 = 1)$.

Accenniamo ora i metodi di calcolo della dimensione e del bordo di una cella, risultati che dimostreremo nel teorema 2.18. Per la dimensione bisognerà sottrarre 1 per ogni simbolo $\stackrel{\vee}{=}$ e 2 per ogni simbolo $=$, a partire da $2n$. Il bordo di una cella θ è formato da celle chiuse di dimensione minore; perciò se in $\partial\theta$ è presente una data cella ρ ci sarà anche il suo bordo $\partial\rho$; dunque, per avere una descrizione completa è sufficiente descrivere le celle massimali del bordo, sapendo di dover aggiungere a catena i loro bordi. Le celle massimali si ricavano da θ imponendo una sola condizione ulteriore, cioè sostituendo uno alla volta i simboli: $\stackrel{\vee}{=}$ con $=$ e i simboli $a < b$ con $a \stackrel{\vee}{=} b$ e $b \stackrel{\vee}{=} a$, come mostrato nell'esempio seguente.

Esempio 2.11. In figura 2.3a è rappresentata una possibile configurazione dei tre punti della cella $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 < 3)$ di \mathbb{C}^3 ; partendo dal basso sono sovrapposte una alla volta le tre componenti di \mathbb{C}^3 . Infatti, il punto 1 è scelto arbitrariamente su \mathbb{C} , il punto 2 sulla semiretta passante per 1 raffigurata nel secondo disegno, e il punto 3 sul semipiano a destra della retta passante per 1 e 2. Variando le posizioni dei tre punti rispettando le condizioni descritte sopra si ottengono tutti i punti della cella. Pertanto, il bordo di tale cella è dato dalle posizioni limite di tale configurazione al variare dei punti all'interno della cella stessa; esplicitamente dalle celle: $(1 = 2 < 3)$, $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 \stackrel{\vee}{=} 3)$, $(1 \stackrel{\vee}{=} 3 \stackrel{\vee}{=} 2)$, $(3 \stackrel{\vee}{=} 1 \stackrel{\vee}{=} 2)$ e anche dai bordi di queste ultime: le celle $(1 = 2 \stackrel{\vee}{=} 3)$, $(3 \stackrel{\vee}{=} 1 = 2)$, $(1 = 2 = 3)$, $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 = 3)$, $(1 = 3 \stackrel{\vee}{=} 2)$, $(3 \stackrel{\vee}{=} 1 = 2)$. Ad esempio, il punto 3, raggiungendo una configurazione limite muovendosi all'interno della cella può posizionarsi sulla retta passante per i punti 1 e 2; potrebbe andare a coincidere con il punto 1 o il punto 2, ovvero capitare in uno dei tre casi indicati in figura 2.3b con delle croci.



(a) Rappresentazione della cella $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 < 3)$ di \mathbb{R}^6 .

Figura 2.3: Esempi di descrizione di una cella.

Per ovviare al fatto che questa decomposizione cellulare di \mathbb{C}^n non è più regolare una volta aggiunto il punto ∞ , notiamo che vale il

Lemma 2.12 *La mappa seguente è un omeomorfismo:*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &\simeq \mathbb{C} \times \text{Zero}_n(\mathbb{C}) \\ (z_1, \dots, z_n) &\mapsto (z_1 + \dots + z_n, z_i - \frac{z_1 + \dots + z_n}{n}) \end{aligned}$$

Inoltre si restringe a $\mathcal{D} \simeq \mathbb{C} \times (\mathcal{D} \cap \text{Zero}_n(\mathbb{C}))$.

Dimostrazione. La mappa descritta è continua nella topologia di \mathbb{C}^{n+1} perché funzione continua delle componenti; notiamo che l'osservazione finale è una semplice verifica ricordando la definizione di \mathcal{D} . La sua inversa, sempre continua per lo stesso motivo, è

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \text{Zero}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ (w, w_1, \dots, w_n) &\mapsto (w_1 + \frac{w}{n}, \dots, w_n + \frac{w}{n}) \end{aligned}$$

□

Da questo lemma segue che $\text{Conf}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \times \text{Conf}_n^0(\mathbb{C})$ e quindi pure l'isomorfismo

$$\mathcal{PB}_n \cong \pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C})) \cong \pi_1(\text{Conf}_n^0(\mathbb{C})) \quad (2.2)$$

poiché \mathbb{C} è semplicemente connesso. Pertanto possiamo ridurci a studiare $Zero_n(\mathbb{C})$; tuttavia, siccome necessitiamo di lavorare su una sfera, aggiungeremo il punto ∞ costruendo la compattificazione di Alexandroff; richiamiamola brevemente.

Definizione 2.13. Dato uno spazio topologico (X, τ) non compatto, si consideri l'insieme $\bar{X} \equiv X \cup \{\infty\}$ dotato della seguente topologia: un insieme non contenente ∞ è aperto se e solo se lo è in τ ; altrimenti, se $\infty \in A \subset \bar{X}$, l'insieme A è aperto se e soltanto se $\bar{X} \setminus A$ è compatto e chiuso in X .

È noto che la compattificazione di \mathbb{R}^m sia omeomorfa ad S^m tramite la proiezione stereografica, mandando ∞ in $(1, 0, \dots, 0)$ e viceversa:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} &\rightarrow S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} \\ (y_1, \dots, y_m) &\mapsto \left(1 - \frac{1}{\|y\|}, \frac{y_1}{\|y\|}, \dots, \frac{y_m}{\|y\|}\right) \\ (x_0, \dots, x_m) &\leftarrow \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_m}{1-x_0}\right) \end{aligned}$$

Siccome $Zero_n(\mathbb{C})$ è un sottoinsieme di \mathbb{R}^{2n} , tramite questo omeomorfismo la sua compattificazione di Alexandroff è

$$\{(x_0, \dots, x_{2n}) \in S^{2n} \mid x_1 + x_3 + \dots + x_{2n-1} = 0, x_2 + x_4 + \dots + x_{2n} = 0\} \simeq S^{2n-2}$$

L'omeomorfismo in fondo è giustificato dal fatto che tagliando una sfera con un iperpiano passante per l'origine si ottiene una sfera della dimensione inferiore.

Definizione 2.14. La decomposizione di $S^{2n-2} \subset S^{2n}$ che prendiamo in esame si ottiene da quella descritta nelle pagine precedenti aggiungendo a tutte le celle la condizione $z_1 + \dots + z_n$; tuttavia, proprio per le condizioni ulteriori imposte, le dimensioni delle celle calano, come proviamo grazie ai prossimi lemmi. Per chiarezza ricordiamo la descrizione delle celle: al variare di τ e dei simboli \square tra $=$, $<$ e $\overset{\vee}{=}$, la cella in questione sarà formata dai punti di $Zero_n(\mathbb{C})$ soddisfacenti $z_{\tau(1)} \square \dots \square z_{\tau(n)}$. Si aggiunge anche la 0-cella $\{\infty\}$; notiamo che questa appartiene al bordo di tutte le celle tranne della 0-cella ($1 = \dots = n$).

Lemma 2.15 Sia $A \subset \mathbb{R}^m$ e sia $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora si ha l'omeomorfismo

$$A \simeq \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x \in A\}$$

Dimostrazione. La mappa $x \xrightarrow{1 \times f} (x, f(x))$ è continua nella topologia prodotto grazie all'ipotesi su f ; è pure iniettiva e suriettiva per costruzione. L'inversa è continua essendo una proiezione sulle prime componenti. \square

Nota. Grazie al lemma precedente, $\forall i, j, k, l \leq m$ è ben definita la notazione

$$(x_i \square x_j, \dots, x_k \square x_l) \equiv \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_i \square x_j, \dots, x_k \square x_l\}$$

nel senso che al variare di m si ottengono spazi omeomorfi; verrà usata nel seguito per abbreviare le scritte.

Lemma 2.16 *Vale anche il seguente omeomorfismo: $\forall i, j \leq m$ $(x_i \leq x_j) \cup \{\infty\} \simeq \bar{E}_{i+}^m$ dove E_{i+}^m indica l'emisfero i -esimo positivo della m -sfera:*

$$E_{i+}^m \subset S^m \equiv \{(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} \mid x_0^2 + \dots + x_m^2 = 1, x_i > 0\}$$

Inoltre, intersecando degli emisferi si ottiene $E_{i_1+}^m \cap \dots \cap E_{i_p+}^m \simeq D_m$, con bordo $\partial D_m = \cup_j (E_{i_j+}^m \cap_{k \neq j} E_{i_k+}^m) \forall i_1, \dots, i_p \leq m$.

Dimostrazione. Si consideri la proiezione stereografica

$$\begin{aligned} S^m \subset \mathbb{R}^{m+1} &\rightarrow \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \\ (x_0, \dots, x_m) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1-x_0}, \dots, \frac{x_m}{1-x_0} \right) \\ (1, 0, \dots, 0) &\mapsto \infty \end{aligned}$$

e la si componga con la rotazione seguente (per semplicità supponiamo $i=1, j=2$):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} &\rightarrow \mathbb{R}^m \cup \{\infty\} \\ (y_1, \dots, y_m) &\mapsto \left(\frac{y_1 + y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}}, y_3, \dots, y_m \right) \\ \infty &\mapsto \infty \end{aligned}$$

Siccome entrambe le mappe esibite sono omeomorfismi allora lo è la composizione, quindi è provato il primo risultato enunciato. Per provare che l'intersezione $E \equiv E_{i_1+}^m \cap \dots \cap E_{i_p+}^m$

Nota. D'ora in avanti sarà sottointesa, salvo esplicita indicazione, la condizione $z_1 + \dots + z_n = (x_1, x_2) + \dots + (x_{2n-1}, x_{2n}) = 0$.

Esempio 2.17. Identifico $\mathbb{C}^n \ni (z_1, \dots, z_n) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Un primo esempio di cella è $(z_1 \stackrel{\vee}{=} z_2 = z_3) \simeq (z_1 \stackrel{\vee}{=} z_2) = (x_1 < x_3, x_2 = x_4) \simeq (x_1 < x_3)$ che ha dimensione $3 - 2 = 1$ se intesa come cella di $Zero_n(\mathbb{C})$; infatti si calcola $6 - 2 - 1 - 2 = 1$.

L'esempio seguente è un caso in cui $n = 7$; valgono gli omeomorfismi:

$$\begin{aligned} & (z_1 < z_2, z_3 \stackrel{\vee}{=} z_4, z_5 \stackrel{\vee}{=} z_6, z_7 = z_7) \subset \mathbb{C}^7 \\ & \simeq (z_1 < z_2, z_3 \stackrel{\vee}{=} z_4, z_5 \stackrel{\vee}{=} z_6) \subset \mathbb{C}^6 \\ & = (x_1 < x_3, x_5 = x_7, x_6 < x_8, x_9 = x_{11}, x_{10} < x_{12}) \subset \mathbb{R}^{12} \\ & \simeq (x_1 < x_2, x_3 < x_4, x_5 < x_6, x_7 = x_8, x_9 = x_{10}) \subset \mathbb{R}^{12} \\ & \simeq (x_1 < x_2, x_3 < x_4, x_5 < x_6) \subset \mathbb{R}^{10} \end{aligned}$$

e la cella avrà dimensione $14 - 2 - 1 - 1 - 2 = 8 = 10 - 2$.

Teorema 2.18 *Le celle descritte nella def. 2.14 forniscono a $S^{2n-2} \simeq Zero_n(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$ la struttura di CW complesso regolare PL. Inoltre $\mathcal{D} \cup \{\infty\}$ è un sottocomplesso.*

Dimostrazione. Per la regolarità si sfrutta il lemma 1.30; i lemmi 2.15 e 2.16 ne garantiscono le ipotesi. Siccome S^{2n-2} è una varietà infinitamente differenziabile (altresì detta *liscia*) e pure le mappe caratteristiche delle celle sono lisce, tale decomposizione risulta essere PL; questo risultato, dovuto a Whitehead [Whi40], è spiegato in [Lur09]. Per quanto riguarda il sottocomplesso l'affermazione segue dal calcolo del bordo di una cella, infatti i simboli “=” restano tali nell'espressione del bordo. Ricordiamo che i bordi delle celle si calcolano come visto nell'es. 2.11 e le dimensioni come visto nell'es. 2.17.

□

Data la decomposizione di $Zero_n(\mathbb{C})$ ora affrontiamo il caso dello spazio di punti non ordinati, ottenuto dall'azione $\Sigma_n \curvearrowright \mathbb{C}^n$ esposta nella def. 2.5. Come vedremo si ottiene un risultato analogo al teorema precedente per lo spazio $UZero_n(\mathbb{C})$. Cominciamo con la decomposizione dello spazio $UConf_n(\mathbb{C})$, similmente a quanto fatto per $Conf_n(\mathbb{C})$.

Lemma 2.19 *Sia $g: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \times Zero_n(\mathbb{C})$ la decomposizione del lemma 2.12. Tale decomposizione è equivariante rispetto all'azione di Σ_n , il quale agisce solo sulla seconda*

componente, nel senso che, posto $g(z) \equiv (u, v)$, si ha $g(\tau \cdot z) = \tau \cdot g(z) = (u, \tau \cdot v)$ $\forall \tau \in \Sigma_n$; inoltre $z \in \mathcal{D} \implies v \in \mathcal{D} \cap \text{Zero}_n(\mathbb{C})$. Dunque la mappa induce un omeomorfismo $U\text{Conf}_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \times U\text{Conf}_n^0(\mathbb{C})$, da cui segue l'isomorfismo $\mathcal{B}_n \cong \pi_1(U\text{Conf}_n(\mathbb{C})) \cong \pi_1(U\text{Conf}_n^0(\mathbb{C}))$.

Dimostrazione. La verifica della prima parte si ottiene ricordando le costruzioni delle mappe esplicitate in 2.12. Dimostriamo l'omeomorfismo: sia π la proiezione rispetto all'azione di Σ_n ; la mappa g rispetta le relazioni di equivalenza nel diagramma seguente, nel senso che $\pi(z) = \pi(w) \implies (\mathbb{1} \times \pi)(g(z)) = (\mathbb{1} \times \pi)(g(w))$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Conf}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C} \times \text{Conf}_n^0(\mathbb{C}) \\ \downarrow \pi & & \downarrow \mathbb{1} \times \pi \\ U\text{Conf}_n(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{C} \times U\text{Conf}_n^0(\mathbb{C}) \end{array}$$

Da questo segue che l'omeomorfismo passa ai quozienti, come mostrato ad esempio in [Fra20, cor. 2.2.17]. \square

Gli elementi di Σ_n agiscono tramite omeomorfismi su $\text{Zero}_n(\mathbb{C})$ permutandone le celle (tranne $\{\infty\}$ che rimane fissa); dunque verranno identificate celle chiuse della stessa dimensione. Per ogni cella quoziente scegliamo il rappresentante in cui i valori compaiano in ordine crescente e indichiamolo $\{1 \square \dots \square n\}$. Al variare dei simboli \square si ottiene una decomposizione di $U\text{Zero}_n(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$; per i dettagli si veda [LW12, cap. III, cor. 5.9].

Teorema 2.20 *La decomposizione di $U\text{Zero}_n(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$ appena descritta è una decomposizione regolare PL di S^{2n-2} . Inoltre $\mathcal{D}/\Sigma_n \cup \{\infty\}$ è un sottocomplesso.*

Dimostrazione. Innanzitutto mostriamo che è una sfera tramite l'uso dei polinomi simmetrici; qui li richiamiamo brevemente, per ulteriori informazioni si consulti [Cox12]. I polinomi simmetrici elementari in n variabili su \mathbb{C} sono dei polinomi $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ tali che per ogni scelta di $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ i coefficienti del polinomio $\prod_{i=1}^n (t - \alpha_i) \equiv t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ si sono $a_j = (-1)^j \cdot p_j(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \forall j$. Ricordiamo anche che $a_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Sapendo questo si costruisca la mappa

$$\begin{aligned} U\text{Zero}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathbb{C}^{n-1} \\ [\alpha_1, \dots, \alpha_n] &\mapsto (a_n, \dots, a_2) \end{aligned}$$

calcolando i coefficienti a_j come sopra, tramite i polinomi simmetrici elementari. Tale mappa per costruzione è ben definita ed è pure continua siccome definita tramite polinomi. Osserviamo che il termine a_1 è sempre nullo per costruzione, perciò anche l'inversa è ben definita: associa ad un polinomio nella forma $t^n + a_2 t^{n-2} + \dots + a_n$ le sue radici; anche questa mappa è continua, pertanto sono omeomorfismi. Passando alla compattificazione di Alexandroff di entrambi gli spazi si verifica l'omeomorfismo $UZero_n(\mathbb{C}) \cup \{\infty\} \simeq S^{2n-2}$. Ci scusiamo con il lettore per l'omissione della dimostrazione della regolarità del complesso; nell'articolo originale, all'inizio della seconda sezione, è presente una bozza del ragionamento necessario; naturalmente va adattata al nostro complesso $UZero_n(\mathbb{C})$. La struttura PL discende dallo stesso ragionamento fatto nella prova del teorema 2.18. È analoga anche la prova riguardante il sottocomplesso, considerando che le celle di $\mathcal{D} \cup \{\infty\}$ vengono incollate tra loro. \square

2.3 Discussione della presentazione

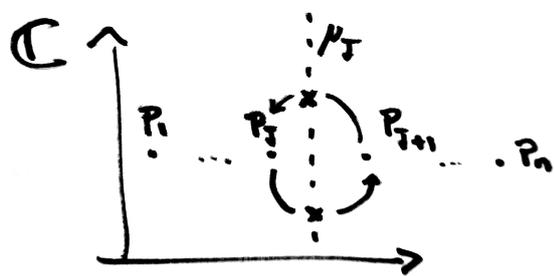
In questa sezione esaminiamo il procedimento proposto da Fox e Neuwirth per presentare \mathcal{B}_n , giustificando i passaggi effettuati. A seguire ricaviamo i generatori di \mathcal{PB}_n con un metodo analogo e, dalla sequenza esatta corta (2.1) descritta alla fine della sezione 2.1, otteniamo una presentazione di Σ_n .

Nota. D'ora in avanti indicheremo con α^{op} la cella duale di α e con X^{op} il complesso duale di X .

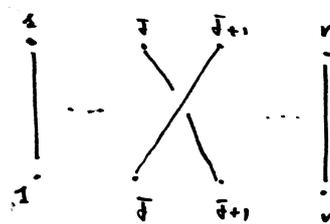
Siccome \mathcal{B}_n è il gruppo fondamentale dello spazio $UConfn^0(\mathbb{C})$, al quale abbiamo fornito una struttura di CW complesso, siamo intenzionati ad applicare il teorema 1.48 che ne fornirà una presentazione; tuttavia, sapendo che il complesso $UConfn^0(\mathbb{C})$ è ottenuto da $UZero_n(\mathbb{C}) \cup \{\infty\}$ rimuovendo un sottocomplesso di dimensione inferiore di due unità, conviene passare al complesso duale tramite il lemma 1.33 in modo tale da agevolare il calcolo delle relazioni; osserviamo che per applicare il lemma è necessario il teorema 2.20.

Considerando il complesso duale di $UConfn(\mathbb{C})$ notiamo che è presente una sola 0-cella: il duale di $\{1 < \dots < n\}$; questo semplifica il calcolo del gruppo fondamentale poiché un albero massimale è la 0-cella stessa, perciò ad ogni 1-cella duale corrisponde un generatore. Detta $\mu_j \equiv \{1 < \dots < j \overset{\vee}{=} j+1 < \dots < n\}$, $j = 1, \dots, n-1$ una generica cella

di dimensione $2n - 3$, chiamiamo σ_j il generatore corrispondente alla cella duale μ_j^{op} . Interpretiamo geometricamente quanto appena detto: si prenda un punto x_0 nell'interno della cella $\{1 < \dots < n\}$, questo sarà la 0-cella nel complesso duale; il generatore σ_j corrisponde ad un coppia basato in x_0 che tocca la cella μ_j ; si tratta di uno scambio dei punti P_j e P_{j+1} , che avviene, come mostrato in figura 2.4a, passando proprio per μ_j . Per distinguere tra un cammino e il suo inverso occorre fissarne un verso di percorrenza, cioè stabilire se σ_j scambia i punti in senso orario ovvero antiorario; per mantenere una notazione coerente con l'articolo originale optiamo per il senso antiorario e gli assegnamo la treccia geometrica in figura 2.4b.



(a) Movimento lungo il cammino del generatore σ_j .



(b) Treccia geometrica corrispondente al generatore σ_j .

Figura 2.4: Generatore σ_j .

Scelti i generatori bisogna imporre le relazioni che si ottengono dai duali delle celle di dimensione $2n - 4$ di $UConf_n^0(\mathbb{C})$ (che ha dimensione $2n - 2$). Per quanto detto poc'anzi, dal teorema 1.48 segue che la relazione corrispondente ad una tale cella β^{op} sarà data semplicemente dal suo bordo: $\varphi_{\beta^{\text{op}}}$. In $UZero_n(\mathbb{C})$ vi sono tre tipologie di celle di dimensione $2n - 4$:

$$\begin{aligned} \lambda_{i,k} &\equiv \{1 < \dots < i \stackrel{\vee}{=} i+1 < \dots < k \stackrel{\vee}{=} k+1 < \dots < n\} \\ \lambda_{i,i+1} &\equiv \{1 < \dots < i \stackrel{\vee}{=} i+1 \stackrel{\vee}{=} i+2 < \dots < n\} \\ \lambda_j &\equiv \{1 < \dots < j = j+1 < \dots < n\} \end{aligned}$$

tuttavia solo le prime due appartengono a $UConf_n^0(\mathbb{C})$. Consideriamo una generica cella del primo tipo $\lambda_{i,k}$: questa appartiene al bordo delle celle μ_j e μ_k quindi il bordo della cella duale $\lambda_{i,k}^{\text{op}}$, che è una cella regolare grazie al lemma 1.33 e perciò ha il bordo omeomorfo ad S^1 , sarà formato da tratti di alcuni dei cammini $\sigma_i, \sigma_i^{-1}, \sigma_k, \sigma_k^{-1}$. Studiamo chi sia

precisamente il bordo di $\lambda_{i,k}^{\text{op}}$ riconducendoci a $Conf_n^0(\mathbb{C})$ tramite la proiezione di rivestimento Λ del lemma 2.7; alla fine proietteremo in $UConf_n^0(\mathbb{C})$ il cammino ottenuto. Consideriamo ad esempio il bordo della cella $(1 < \dots < i \stackrel{\vee}{=} i+1 < \dots < k \stackrel{\vee}{=} k+1 < \dots < n)^{\text{op}}$. Per chiarezza, al posto del caso generale ne discutiamo uno più specifico: fissiamo $n = 4, i = 1, k = 3$. La cella $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 < 3 \stackrel{\vee}{=} 4)$ appartiene al bordo di quattro celle, le cui immagini tramite la proiezione sono proprio le celle μ_1 e μ_3 , e ciascuna di queste è a sua volta sul bordo di solamente due celle, la cui proiezione sarà $\{1 < 2 < 3 < 4\}$; il complesso duale che ne deriva è illustrato in figura 2.5. La peculiare struttura del poset suggerisce che, una volta scelto il punto iniziale e il verso di percorrenza, il ciclo fatto dal bordo $\varphi_{\lambda_{1,3}^{\text{op}}}$ sia obbligato; tuttavia, notiamo che il verso di percorrenza seguito è ininfluente ai fini di determinare la relazione derivante da questa cella. Dunque, scelto

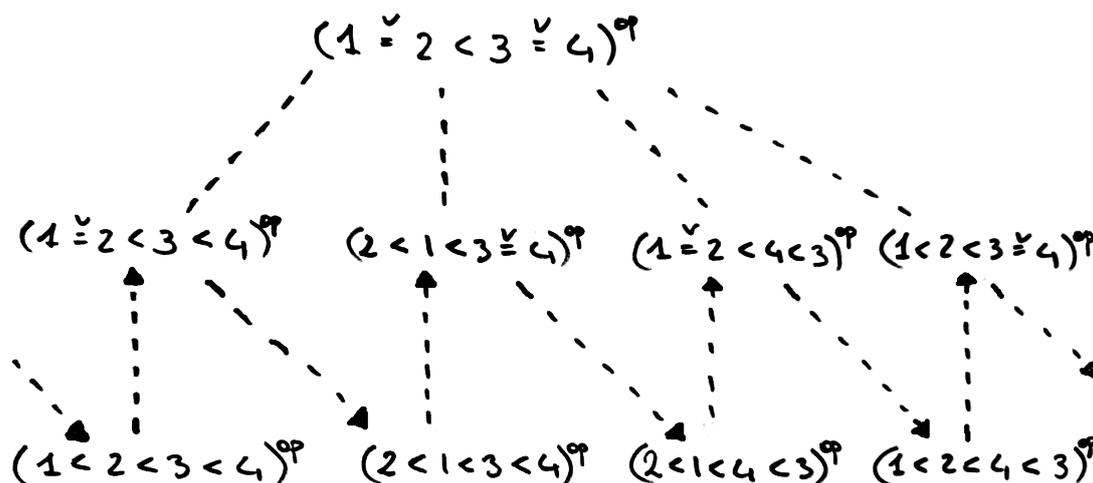


Figura 2.5: Poset della cella $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 < 3 \stackrel{\vee}{=} 4)^{\text{op}}$.

ad esempio il ciclo indicato in figura 2.6, per ottenere la relazione è sufficiente proiettarlo su $UConf_n^0(\mathbb{C})$ e si ottiene $\varphi_{\lambda_{i,k}^{\text{op}}} = \sigma_i \cdot \sigma_k \cdot \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_k^{-1}$. In figura 2.7 sono illustrati i corrispondenti movimenti dei punti e la treccia risultante. Rimarchiamo il fatto che in questa espressione la presenza di un generatore ovvero del suo inverso dipende convenzione sui versi di rotazione adottata sopra; naturalmente la relazione risultante è equivalente. Il caso in dimensione generica n è del tutto analogo poiché il numero di celle interessate rimane invariato.

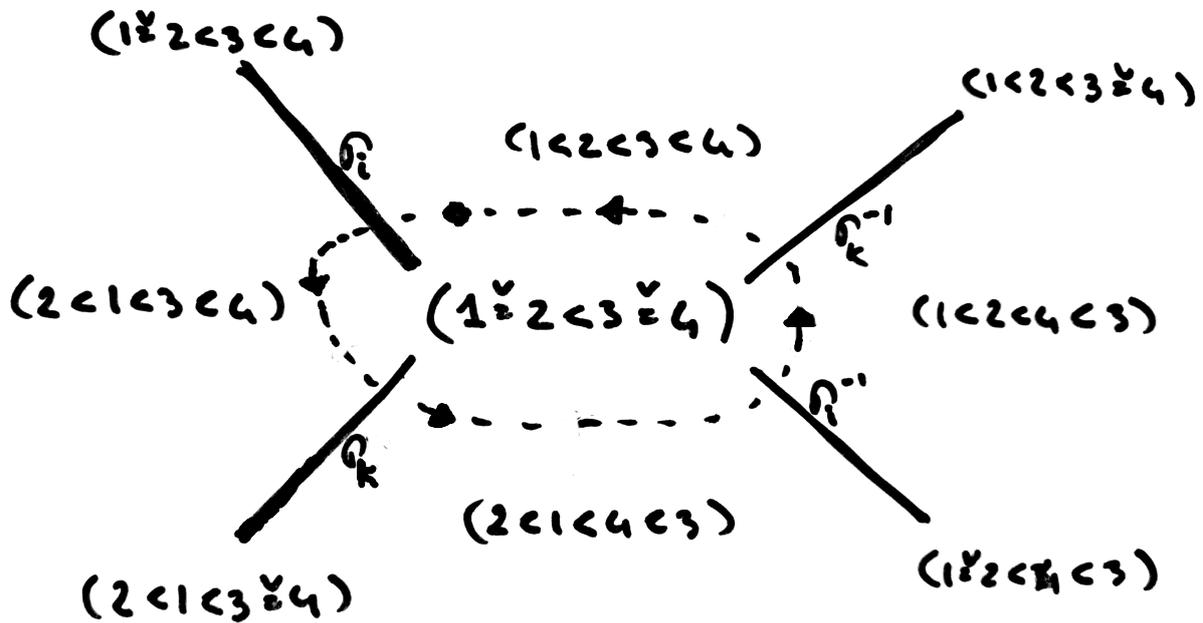


Figura 2.6: Rappresentazione delle celle di $Conf_4^0(\mathbb{C})$ interessate nel ciclo $\varphi_{\lambda_{1,3}^{op}}$.

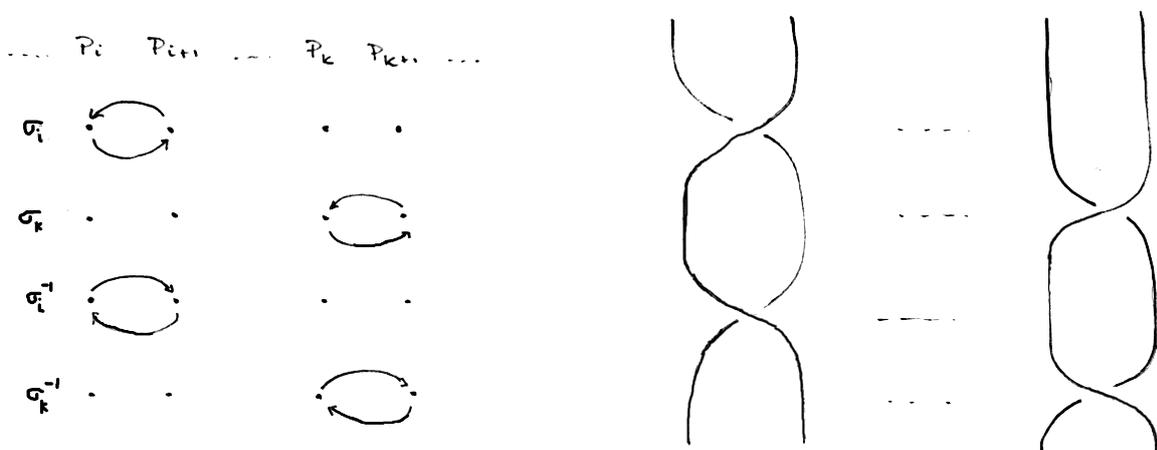


Figura 2.7: Movimento dei punti corrispondente alla relazione del primo tipo e relativa treccia associata; questi rappresentano, ad esempio, il moto lungo il ciclo della figura 2.6.

Un ragionamento analogo vale per le celle della seconda tipologia: si consideri $\lambda_{i,i+1}$; questa apparterrà sempre ai bordi delle celle μ_i e μ_{i+1} , tuttavia lavorando in $Conf_n^0(\mathbb{C})$ le preimmagini da considerare sono sei. Il poset risultante è simile al precedente, in

figura 2.8 ne abbiamo presentato un esempio. Da ciò si ricava la relazione $\varphi_{\lambda_{i,i+1}^{op}} = \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1}^{-1} \cdot \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_{i+1}^{-1}$. I relativi moti dei punti e la treccia corrispondente sono nell'illustrazione 2.9.

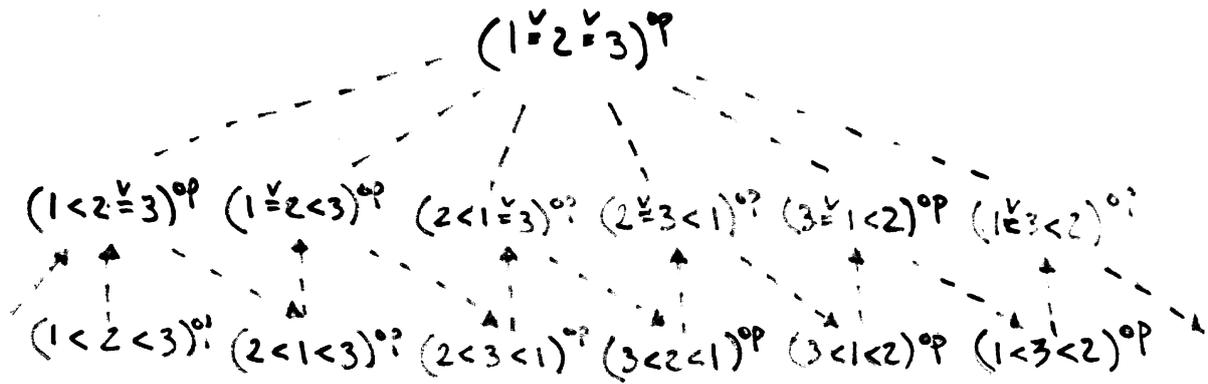


Figura 2.8: Poset della cella $(1 \stackrel{\vee}{=} 2 \stackrel{\vee}{=} 3)^{op}$ di $Conf_3^0(\mathbb{C})$.

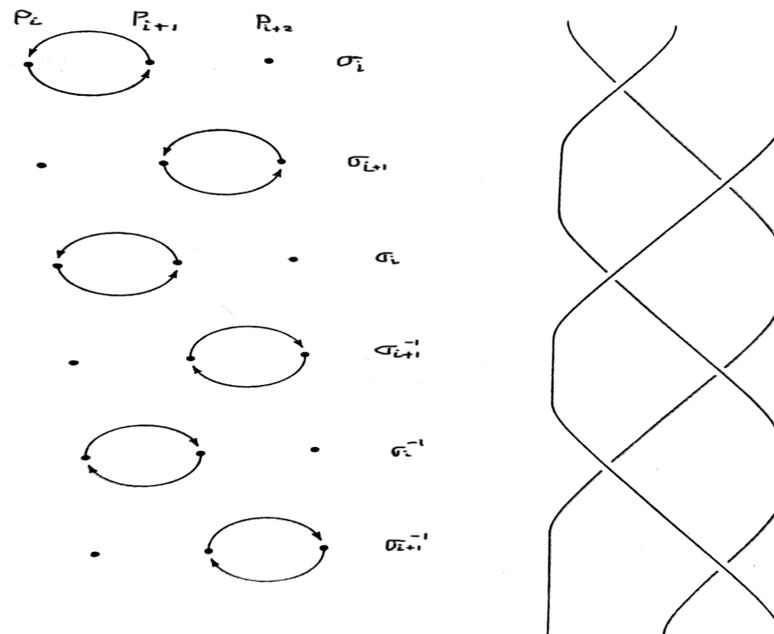


Figura 2.9: Movimento dei punti corrispondente alla relazione del secondo tipo e relativa treccia associata; questi rappresentano, ad esempio, il moto lungo il ciclo in figura 2.8.

Questa discussione prova il seguente

Teorema 2.21 [Presentazione dei gruppi delle trecce].

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_n &= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \varphi_{\lambda_{i,k}}^{\text{op}} \quad 1 \leq i < k \leq n-1 \rangle = \\ &= \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \cdot \sigma_k = \sigma_k \cdot \sigma_i \quad |i-k| > 1, \\ &\quad \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \quad \forall i > \end{aligned}$$

Per ricavare i generatori di \mathcal{PB}_n applichiamo nuovamente il teorema 1.48, questa volta al complesso $\text{Conf}_n^0(\mathbb{C})^{\text{op}}$ che ha $n!$ 0-celle. Fissiamo il punto base $x \equiv (1 < \dots < n)^{\text{op}}$ e costruiamo un albero massimale.

Lemma 2.22 *L'insieme delle celle nella forma*

$$(1 < 2 < \dots < i-1 < \dots < i \stackrel{\vee}{=} j < \dots < n)^{\text{op}} \quad \forall i < j$$

è un albero massimale dello 1-scheletro di $\text{Conf}_n^0(\mathbb{C})^{\text{op}}$; lo chiameremo \mathcal{A}_n .

Dimostrazione. Innanzitutto proviamo che il grafo corrispondente è connesso, mostrando per induzione su $l = n, \dots, 0$ che connette ogni vertice nella forma

$$(1 < \dots < l < a_{l+1} < \dots < a_n)^{\text{op}}$$

dove a_{l+1}, \dots, a_n sono una permutazione di $l+1, \dots, n$. Sia $l+m$ l'indice corrispondente al valore $l+1$ in questa cella; grazie all'ipotesi induttiva è sufficiente esibire un cammino da

$$(1 < \dots < l+1 < a_{l+1} < \dots < a_{l+m-1} < a_{l+m+1} < \dots < a_n)^{\text{op}}$$

alla suddetta cella; tale cammino è quello che sposta il termine $l+1$ a destra fino alla posizione $l+m$ scambiandolo successivamente con $a_{l+1}, \dots, a_{l+m-1}$. Per provare che è un albero verifichiamo che abbia $n! - 1$ lati, per quanto visto nel lemma 1.47. Al variare di $i = 1, \dots, n-1$ prima fisso la posizione del simbolo $\stackrel{\vee}{=} (n-i)$ scelte e successivamente permutato le $n-i$ cifre da i ad n ; così ottengo la formula seguente, che si verifica per induzione su n :

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i) \cdot (n-i)! = n! - 1$$

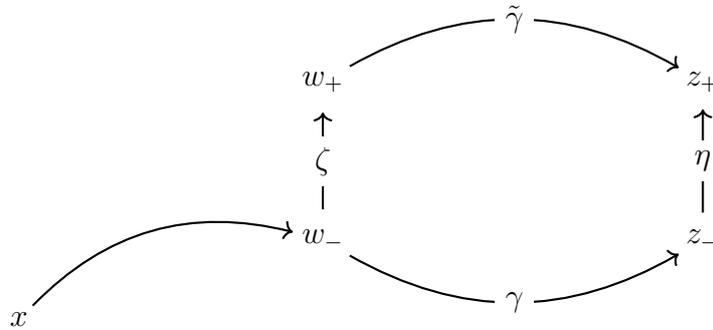
□

Seguendo la costruzione appena vista, il cammino diretto in \mathcal{A}_n per raggiungere un vertice $y \equiv (b_1 < \dots < b_n)^{\text{op}}$ si ottiene partendo da $(1 < \dots < n)^{\text{op}}$ e, per $k = n - 1, \dots, 1$ muovendo il valore k verso destra, nella posizione relativa che assume in y rispetto ai valori maggiori di k . Ad esempio, in $\text{Conf}_4^0(\mathbb{C})$, per raggiungere il vertice $(2 < 4 < 1 < 3)^{\text{op}}$ il cammino in \mathcal{A}_4 è il seguente:

$$(1 < 2 < 3 < 4)^{\text{op}} \rightarrow (1 < 2 < 4 < 3)^{\text{op}} \rightarrow (2 < 1 < 4 < 3)^{\text{op}} \rightarrow (2 < 4 < 1 < 3)^{\text{op}}$$

Da ciò segue un'osservazione importante riguardo all'albero: le proiezioni tramite Λ_\star dei cammini diretti sono composte dai generatori di \mathcal{B}_n che abbiamo scelto prima, e mai dai loro inversi; questo perché nell'albero, partendo dal punto base per raggiungere un qualunque punto, il lato $(1 < 2 < \dots < i - 1 < \dots < i \stackrel{\vee}{=} j < \dots < n)^{\text{op}}$ si percorre da $(\dots < i < j < \dots)^{\text{op}}$ a $(\dots < j < i < \dots)^{\text{op}}$ e mai viceversa.

Ora, per ricavare i generatori di \mathcal{PB}_n dal teorema 1.48, è sufficiente calcolare il ciclo corrispondente a ciascun lato del grafo; possiamo includere anche i lati appartenenti all'albero, in tal caso il ciclo corrispondente sarà omotopicamente banale. Sia $\eta \equiv (\dots < i \stackrel{\vee}{\underset{\text{pos. } h}{=}} j < \dots)^{\text{op}}$ $i < j$ un lato generico di vertici $z_- \equiv (\dots < i \underset{\text{pos. } h}{<} j < \dots)^{\text{op}}$ e $z_+ \equiv (\dots < j \underset{\text{pos. } h}{<} i < \dots)^{\text{op}}$; il caso $j \stackrel{\vee}{=} i$ si proietta sullo stesso generatore a meno di un segno ($\sigma_h^{\pm 1}$), pertanto tratteremo contemporaneamente entrambi i casi. I due vertici del lato η hanno solamente i valori i e j scambiati, perciò i rispettivi cammini diretti coincidono fino ad un certo vertice $w_- \equiv (1 < \dots < i - 1 < \dots < i \underset{\text{pos. } k}{<} j < \dots < n)^{\text{op}}$; dopodiché nel cammino in direzione di z_+ avverrà lo scambio di i e j attraverso un lato che chiameremo ζ , raggiungendo un punto w_+ ; infine i due cammini giungeranno ai rispettivi vertici tramite dei tratti γ e $\tilde{\gamma}$. Nel diagramma seguente abbiamo schematizzato i cammini appena descritti.



Ciò che importa per ricavare la presentazione del gruppo simmetrico non sono tanto i generatori espliciti quanto le loro proiezioni in \mathcal{B}_n ; infatti, dalla sequenza esatta corta (2.1) si ottiene l'isomorfismo

$$\psi^{(\Lambda)}: \mathcal{B}_n / \text{Imm}_{\Lambda^*}(\mathcal{PB}_n) \xrightarrow{\cong} \Sigma_n$$

Dunque, una presentazione del gruppo simmetrico si ricava dalla quella del gruppo delle trecce aggiungendo alcune relazioni, precisamente le immagini dei generatori di \mathcal{PB}_n ; osserviamo che la relazione imposta non cambia se coniughiamo l'elemento, infatti $aba^{-1} = \mathbb{1} \implies b = \mathbb{1}$; per questo motivo possiamo escludere il tratto iniziale in comune e considerare semplicemente il cammino $\gamma \cdot \eta \cdot \tilde{\gamma}^{-1} \zeta^{-1}$. Prima di concludere il calcolo di queste proiezioni, ricordiamo le relazioni già presenti nel gruppo delle trecce che potremo usare per semplificare le scritture: $\sigma_r \cdot \sigma_s = \sigma_s \cdot \sigma_r$ se $s \neq r \pm 1$ e anche $\sigma_r \cdot \sigma_{r+1} \cdot \sigma_r = \sigma_{r+1} \cdot \sigma_r \cdot \sigma_{r+1}$ per ogni r . A questo punto osserviamo che le proiezioni dei cammini γ e $\tilde{\gamma}$ sono le stesse; infatti, siccome sia z_- e z_+ che w_- e w_+ differiscono solo per i valori i e j , gli spostamenti di valori da effettuare per connetterli sono gli stessi; supponiamo $\gamma \equiv \sigma_{t_1} \cdots \sigma_{t_p}$. Le proiezioni dei cammini η e ζ sono rispettivamente $\sigma_h^{\pm 1}$ e σ_k , con $h \leq k$ poiché per passare da w a z posso spostare dei valori a destra di $i \leq j$ ma non viceversa. Riassumendo, la relazione ricavata dal lato η è

$$\varphi_\eta \equiv \sigma_{t_1} \cdots \sigma_{t_p} \sigma_h^{\pm 1} \sigma_{t_p}^{-1} \cdots \sigma_{t_1}^{-1} \sigma_k^{-1}$$

Analizziamo più nel dettaglio il cammino γ : per passare dalla configurazione di w_- a quella di z_- è necessario spostare $k-h$ valori a destra della coppia $i < j$; questo si ottiene tramite scambi del tipo $\sigma_u \sigma_{u+1}$ con un indice u opportuno, che varierà da $k-1$ ad h ; tali scambi potrebbero essere intervallati da altri generatori. Mostriamo per induzione forte su p , con k e h variabili, che la relazione si riduce a $\varphi_\eta = \sigma_k^{\pm 1} \sigma_k^{-1}$ perciò in un caso è banale mentre nell'altro possiamo invertire il segno senza cambiare il sottogruppo generato, ottenendo σ_k^2 . Prima di procedere con l'induzione, verificiamo che in effetti vi è almeno uno di tali generatori per ogni $k = 1, \dots, n-1$ esibendo per ciascuno di essi un lato dal quale deriva. Consideriamo il lato

$$(1 < 2 < \cdots < k+1 \stackrel{\vee}{=} k < \cdots < n-1 < n)^{\text{op}}$$

Il procedimento descritto sopra, applicato in questo caso, mostra che γ è il cammino stazionario perciò la relativa relazione si riduce a σ_k^{-2} . Torniamo all'induzione: dovendo tenere conto degli scambi si avrà necessariamente $p \geq 2(k - h)$, quindi nel caso base $p = 0$, $h = k$ e la conclusione è immediata; notiamo che questo avviene quando il lato η appartiene nell'albero massimale. Supponiamo ora che per ogni $p < N$ la relazione si riduca alla forma cercata e prendiamo $p = N$. Sicuramente $t_p \neq h - 1$, altrimenti separerebbe i valori i e j ; se inoltre $t_p \neq h + 1$, possiamo usare la relazione commutativa presente in \mathcal{B}_n per scambiare $\sigma_h^{\pm 1}$ e σ_{t_p} e annichilire questo con $\sigma_{t_p}^{-1}$, dopodiché sfruttiamo l'ipotesi induttiva e concludiamo. Rimane il caso in cui $t_p = h + 1$: per le stesse motivazioni di prima questo indica necessariamente che siamo in presenza di uno scambio, perciò $t_{p-1} = h$; dunque i termini centrali sono

$$\cdots \sigma_h \sigma_{h+1} \sigma_h^{\pm 1} \sigma_{h+1}^{-1} \sigma_h^{-1} \cdots$$

e grazie alle relazioni di \mathcal{B}_n che abbiamo richiamato sopra si riducono a $\sigma_{h+1}^{\pm 1}$. Per concludere sfruttiamo l'ipotesi induttiva ricordando che sono presenti $k - h$ scambi. Il ragionamento appena concluso motiva il prossimo teorema.

Teorema 2.23 [Presentazione del gruppo simmetrico].

$$\begin{aligned} \Sigma_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i^2 = 1 \quad \forall i, \\ \sigma_i \cdot \sigma_k = \sigma_k \cdot \sigma_i \quad |i - k| > 1, \\ \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i = \sigma_{i+1} \cdot \sigma_i \cdot \sigma_{i+1} \quad \forall i > \end{aligned}$$

Da questo risultato si capisce che in effetti il gruppo delle trecce è una generalizzazione del gruppo simmetrico; precisamente nel gruppo delle trecce si considera anche il verso di scambio dei punti e questo ha l'effetto di rendere gli elementi di ordine infinito; la dimostrazione dell'ultima affermazione è un corollario presente in [FN62].

Bibliografia

- [Whi40] J. H. C. Whitehead. «On C_1 -Complexes». In: *Annals of Mathematics* 41.4 (1940), pp. 809–824. ISSN: 0003486X. DOI: 10.2307/1968861. URL: <http://www.jstor.org/stable/1968861> (visitato il 02/09/2020).
- [Art47] Emil Artin. «Theory of Braids». In: *Annals of Mathematics*. 2^a ser. 48.1 (gen. 1947), pp. 101–126. DOI: 10.2307/1969218. URL: <https://www.jstor.com/stable/1969218> (visitato il 29/08/2020).
- [FN62] R. Fox e L. Neuwirth. «The braid groups». In: *Mathematica Scandinavica* 10 (1962), pp. 119–126. DOI: <https://doi.org/10.7146/math.scand.a-10518>.
- [Han89] V.L. Hansen. *Braids and Coverings: Selected Topics*. London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 1989. ISBN: 9780521387576.
- [BZ92] Anders Björner e Günter M. Ziegler. «Combinatorial Stratification of Complex Arrangements». In: *Journal of the American Mathematical Society* 5.1 (gen. 1992), pp. 105–149. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-1992-1119198-9>.
- [Art97] Michael Artin. *Algebra*. it. Trad. en da Paolo Maroscia. Programma di Matematica, Fisica, Elettronica. Bollati Boringhieri, 1997. ISBN: 978-88-339-5586-5.
- [Bjö+99] A. Björner et al. *Oriented Matroids*. Cambridge University Press, 1999.
- [Hat01] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. 2001. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf> (visitato il 27/08/2020).
- [Lur09] Jacob Lurie. *Whitehead Triangulations. Lecture 3*. 13 Feb. 2009. URL: <http://www-math.mit.edu/~lurie/937notes/937Lecture3.pdf> (visitato il 02/09/2020).
- [Gon11] Juan González-Meneses. «Basic results on braid groups». en. In: *Annales Mathématiques Blaise Pascal* 18.1 (2011), pp. 15–59. DOI: 10.5802/ambp.293. URL: ambp.centre-mersenne.org/item/AMBp_2011__18_1_15_0/.
- [Cox12] David A. Cox. *Galois Theory*. 2^a ed. Pure and Applied Mathematics: A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. Wiley, 2012. Cap. 2. ISBN: 978-1-118-07205-9.

- [LW12] A.T. Lundell e S. Weingram. *The Topology of CW Complexes*. The university series in higher mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781468462548.
- [Man14] Marco Manetti. *Topologia*. it. 2^a ed. Springer, 2014. ISBN: 978-88-470-5661-9. DOI: 10.1007/978-88-470-5662-6.
- [Fra20] Stefano Francaviglia. *Topologia*. it. 2^a ed. Bologna, 2020. ISBN: 978-1985667020.