

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI  
BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**EQUAZIONE  
DEL  
CALORE**

Tesi di Laurea Magistrale in Analisi Matematica

Relatrice:  
Chiar.ma Prof.ssa  
Annamaria Montanari

Presentata da:  
Laura Gurioli

Sessione Unica  
Anno Accademico 2019/2020



# Introduzione

L'obiettivo di questa tesi è lo studio dell'equazione del calore.

Come accade per molti fenomeni fisici, anche per la diffusione del calore risulta utile trovare un modello che lo descriva nel modo più aderente possibile alla realtà e che ne riassume le principali caratteristiche, allo scopo di prevederne lo sviluppo o semplicemente di esaminarlo.

Questo modello, nel caso della diffusione del calore, può assumere la seguente forma

$$\Delta u - \partial_t u = 0.$$

Si può quindi rappresentare tale fenomeno con questa equazione a derivate parziali del secondo ordine, chiamata equazione del calore, essa sarà l'oggetto di studio di questa tesi.

Il capitolo 1 servirà a chiarire i concetti di modello matematico, equazione alle derivate parziali e di problema ben posto.

Inoltre ci occuperemo di come nasce il modello per la diffusione del calore in un corpo rigido omogeneo e isotropo.

Al termine del primo capitolo verranno descritte le più comuni condizioni al bordo che permettono di rendere questo problema ben posto.

Nello specifico vedremo le condizioni di Dirichlet, Neumann, Robin e miste.

Nel capitolo 2 definiremo l'equazione del calore e ne descriveremo alcune semplici proprietà.

Verrà poi analizzata una particolare soluzione dell'equazione del calore, la soluzione fondamentale  $\Gamma$ , che utilizzeremo poi per ricavare la soluzione del problema di Cauchy omogeneo e non omogeneo.

Successivamente ci occuperemo di individuare delle formule di media per le funzioni caloriche, che risultano molto importanti per le loro conseguenze, tra cui il principio del massimo e la disuguaglianza di Harnack.

A tale scopo introdurremo l'identità di Green che sarà utile nella dimostrazione della formula di Poisson-Jensen, di cui la formula di media è diretta conseguenza.

Infine definiremo la proprietà di media e vedremo come questa caratterizza le funzioni caloriche.

Nel capitolo 3 ci occuperemo dei principi di massimo (debole e forte) e dell'unicità della soluzione.

Partiremo dal principio di massimo debole, il quale afferma che, su domini limitati, ogni soluzione dell'equazione del calore presenta massimo e minimo sulla frontiera parabolica.

Da questo importante principio deriveremo poi l'unicità della soluzione e successivamente vedremo un risultato simile per funzioni definite su domini non limitati.

Inoltre proveremo un risultato più preciso, il principio di massimo forte.

Nell'ultimo capitolo torneranno utili le formule di media viste nel capitolo 2, grazie ad esse enunceremo e dimostreremo la disuguaglianza di Harnack.

Infine, servendoci di quest'ultima, proveremo il Teorema di Liouville per le funzioni caloriche, secondo cui ogni funzione calorica e limitata in  $\mathbb{R}^{n+1}$  è costante.

# Indice

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introduzione</b>  | <b>i</b>  |
| <b>1 Conduzione del calore: modellazione del problema</b>    | <b>1</b>  |
| 1.1 Modelli matematici . . . . .                             | 1         |
| 1.2 Equazioni a derivate parziali . . . . .                  | 2         |
| 1.3 Problemi ben posti . . . . .                             | 4         |
| 1.4 La conduzione del calore . . . . .                       | 5         |
| 1.5 Condizioni al bordo . . . . .                            | 7         |
| <b>2 L'equazione del calore</b>                              | <b>11</b> |
| 2.1 Equazione del calore . . . . .                           | 11        |
| 2.2 Soluzione fondamentale . . . . .                         | 13        |
| 2.3 Problemi a valori iniziali . . . . .                     | 18        |
| 2.3.1 Soluzione del problema omogeneo . . . . .              | 19        |
| 2.3.2 Soluzione del problema non omogeneo . . . . .          | 21        |
| 2.4 Formule di media . . . . .                               | 23        |
| 2.4.1 Identità di Green . . . . .                            | 23        |
| 2.4.2 Formula di Poisson-Jensen e formula di media . . . . . | 24        |
| 2.5 Formula di media migliorata . . . . .                    | 31        |
| 2.6 Proprietà di media calorica . . . . .                    | 35        |
| <b>3 Principio di massimo e unicità della soluzione</b>      | <b>39</b> |
| 3.1 Principio di massimo debole . . . . .                    | 39        |
| 3.2 Principio di massimo per il problema di Cauchy . . . . . | 42        |

---

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.3      | Principio di massimo forte . . . . .                        | 46        |
| <b>4</b> | <b>Disuguaglianza di Harnack e Teorema di Liouville</b>     | <b>51</b> |
| 4.1      | Disuguaglianza di Harnack . . . . .                         | 51        |
| 4.2      | Teorema di Liouville . . . . .                              | 57        |
| <b>A</b> | <b>Prerequisiti</b>   | <b>59</b> |
| A.1      | Integrazione per parti e teorema della divergenza . . . . . | 59        |
| A.2      | Formula di reciprocità per l'operatore di Laplace . . . . . | 61        |
| A.3      | Formula di coarea . . . . .                                 | 61        |
|          | <b>Bibliografia</b>   | <b>63</b> |

# Capitolo 1

## Conduzione del calore: modellazione del problema

In questo capitolo introdurremo il concetto di modello matematico, uno strumento fondamentale per descrivere fenomeni reali, analizzarli e prevederli. Solitamente questi modelli acquistano la forma di un sistema a derivate parziali.

Dalla necessità di creare un modello fedele alla realtà e al contempo concretamente utilizzabile a livello applicativo, nasce l'importanza che il problema risulti ben posto, ovvero che esista un'unica soluzione che dipenda con continuità dai dati.

Vedremo poi come nasce il modello per la diffusione del calore in un corpo rigido omogeneo e isotropo.

Infine analizzeremo le più comuni condizioni al bordo che ci permettono di rendere questo problema ben posto.

### 1.1 Modelli matematici

Il processo di modellazione matematica è una strategia che permette di determinare la soluzione di molti problemi di natura applicativa e non solo. Lo scopo è quello di ottenere un modello il più possibile aderente alla realtà,

attraverso un processo di attenta analisi delle informazioni che si hanno a disposizione e deduzioni logiche.

La modellazione matematica è diventata una pratica molto diffusa per descrivere gran parte dei fenomeni nelle scienze applicate, si fa uso di modelli matematici in tantissimi ambiti come ad esempio fisica, chimica, finanza, biologia, ecologia e medicina.

Grazie soprattutto alla capacità di calcolo sempre maggiore, la modellazione matematica seguita dall'analisi e dalla simulazione numerica ha preso sempre più piede anche nell'attività industriale e si è dimostrata fondamentale all'innovazione.

Con modello matematico si intende un insieme di equazioni e/o altre relazioni matematiche in grado di riassumere le caratteristiche fondamentali del fenomeno che si desidera descrivere, con lo scopo di prevederne e controllarne lo sviluppo o semplicemente di esaminarlo.

Un modello matematico si costituisce di due componenti fondamentali, leggi generali e relazioni costitutive, la cui combinazione è solitamente un'equazione o un sistema di equazioni a derivate parziali.

Le leggi generali sono regole valide per tutti i fenomeni di uno stesso tipo, mentre le relazioni costitutive riguardano nello specifico il fenomeno in esame e sono solitamente di natura sperimentale.

Nei modelli di cui ci occuperemo in questa tesi le leggi generali saranno quelle della Meccanica dei Continui (leggi di conservazione o di bilancio), mentre avremo come relazioni costitutive la legge di Fourier per il flusso del calore.

## 1.2 Equazioni a derivate parziali

Un'equazione a derivate parziali (PDE) è una relazione che coinvolge una funzione incognita a due o più variabili e alcune delle sue derivate parziali.

**Definizione 1.1** (Equazione a derivate parziali). Si definisce equazione a derivate parziali di ordine  $k \geq 1$  un'espressione del tipo

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$



dove  $U$  è sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione data e

$$u : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

è la funzione incognita.  $Du(x) = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$  è il vettore gradiente.

Distinguiamo le equazioni a derivate parziali in 2 principali categorie:

- **Lineari:** se  $F$  è lineare rispetto ad  $u$  e a tutte le sue derivate. Questo tipo di equazioni ha la forma

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

Se  $f \equiv 0$  l'equazione si dice omogenea.

- **Non lineari:** se  $F$  non è lineare. Possiamo sottocategorizzare questo tipo di equazioni nel seguente modo:

– **Semilineari:** se  $F$  ha la forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

– **Quasi lineari:** se  $F$  è lineare rispetto alle derivate di  $u$  di ordine massimo, è quindi della forma

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0$$

– **Completamente non lineari:** se  $F$  non è lineare rispetto alle derivate di  $u$  di ordine massimo.

### 1.3 Problemi ben posti

Nella costruzione di un modello matematico è fondamentale che rappresenti il più fedelmente possibile il fenomeno in esame. Questa però non è l'unica caratteristica che si richiede al modello, spesso per fare in modo che sia concretamente utilizzabile in ambito applicativo è necessario che sia anche ben posto.

**Definizione 1.2** (Problema ben posto). Un problema a derivate parziali si dice ben posto se si verificano le seguenti condizioni:

- esiste una soluzione del problema;
- la soluzione è unica;
- la soluzione dipende con continuità dai dati.

L'ultima proprietà, detta stabilità locale della soluzione rispetto ai dati, assicura che a piccole variazioni sui dati corrisponda una piccola variazione sulla soluzione.

Ciò è particolarmente importante in quanto garantisce che, nonostante errori di approssimazione frequenti nell'inserimento dei dati o dovuti alle procedure di calcolo, si possa ottenere una soluzione approssimata non troppo differente da quella originale.

L'esistenza della soluzione indica che il modello è coerente, mentre unicità e stabilità aumentano la possibilità di calcoli numerici accurati. Problemi ben posti, seppure molto complessi, diventano trattabili numericamente in modo efficace utilizzando metodi di Analisi Funzionale, è perciò sempre preferibile risolvere problemi di questo tipo.

Per assicurare esistenza e unicità della soluzione è spesso necessario aggiungere ulteriori informazioni al modello, solitamente si impongono condizioni iniziali e/o condizioni al bordo del dominio di riferimento.

Nella definizione precedente abbiamo richiesto che esista una soluzione ma senza specificare che tipo di regolarità essa debba avere. La definizione più naturale che possiamo dare è la seguente:

**Definizione 1.3** (Soluzione classica). Chiamiamo soluzione classica di una PDE di ordine  $k$  una funzione che possieda tutte le derivate fino all'ordine  $k$  e queste siano continue.

Diciamo che un problema a derivate parziali è risolvibile in senso classico se è ben posto e ha soluzione classica.

Non tutti i problemi ammettono questo tipo di soluzione, sono però ben posti se permettiamo una definizione più generale. Queste soluzioni meno regolari vengono chiamate deboli.

Siccome spesso non è possibile trovare soluzioni classiche per problemi a derivate parziali e quando è possibile può essere complicato dimostrarne la regolarità, una strategia utile è quella di studiare separatamente l'esistenza e la regolarità delle soluzioni.

Inizialmente si prova l'esistenza, l'unicità e la dipendenza con continuità dai dati, ovvero che il problema è ben posto per una certa soluzione debole. Successivamente, se possibile, si verifica la regolarità della soluzione.

## 1.4 La conduzione del calore

Il nostro obiettivo è studiare un modello matematico per la conduzione del calore in un corpo rigido, vediamo in questa sezione un'interpretazione fisica di questo fenomeno.

Per semplicità si assume che il corpo rigido sia omogeneo<sup>1</sup> e isotropo<sup>2</sup>, con densità costante  $\rho$  e che possa ricevere energia da una sorgente esogena (passaggio di corrente elettrica, reazione chimica, calore prodotto per assorbimento o irraggiamento dall'esterno, etc.).

Il calore è una forma di energia e come tale segue il relativo principio di conservazione:

---

<sup>1</sup>Un corpo è omogeneo se ogni sua parte ha la medesima densità e le medesime caratteristiche fisiche.

<sup>2</sup>Un corpo è isotropo rispetto a un determinato fenomeno fisico se presenta uguali proprietà in tutte le direzioni.

Sia  $V$  un elemento arbitrario di volume all'interno del corpo rigido. Il tasso di variazione dell'energia interna in  $V$  è uguale al flusso di calore attraverso il bordo  $\partial V$  di  $V$ , dovuto alla conduzione, più quello dovuto alla sorgente esterna.

Indichiamo con  $e = e(x, t)$  l'energia interna per unità di massa, la quantità di energia interna in  $V$  è data da

$$\int_V e\rho \, dx,$$

conseguentemente il suo tasso di variazione sarà

$$\frac{d}{dt} \int_V e\rho \, dx = \int_V e_t\rho \, dx.$$

Indichiamo con  $q$  il vettore flusso di calore che assegna la direzione del flusso e la sua velocità per unità di area. Se  $d\sigma$  è un elemento d'area contenuto in  $\partial V$  con versore normale esterno  $\nu$ ,  $q \cdot \nu$  è la velocità con la quale l'energia fluisce attraverso  $d\sigma$ . Di conseguenza il flusso di calore in entrata attraverso il bordo  $\partial V$  corrisponde a

$$- \int_{\partial V} q \cdot \nu \, d\sigma = - \int_V \operatorname{div} q \, dx.$$

Inoltre, indicando con  $r$  il tasso di calore per unità di massa fornito dal corpo esterno, il contributo dovuto alla sorgente esogena sarà

$$\int_V r\rho \, dx.$$

Applicando la legge dell'energia sopra citata si ottiene la seguente uguaglianza:

$$\int_V e_t\rho \, dx = - \int_V \operatorname{div} q \, dx + \int_V r\rho \, dx.$$

$V$  era stato scelto arbitrariamente, ciò permette di dedurre la legge fondamentale della conduzione del calore:

$$e_t\rho = -\operatorname{div} q + r\rho.$$

Notiamo che  $e$  e  $q$  sono incognite, assumiamo le seguenti leggi costitutive per identificare queste due quantità:

- Legge di Fourier per la conduzione del calore; essa afferma che il flusso è proporzionale al gradiente di temperatura

$$q = -k\nabla\theta$$

dove  $\theta$  è la temperatura assoluta e  $k > 0$  è la conduttività termica del materiale che può essere considerata costante. Il segno meno dipende dal fatto che il calore si trasmette spontaneamente dalle regioni a più alta temperatura verso quelle a più bassa temperatura.

- L'energia interna è proporzionale alla temperatura assoluta

$$e = c_\nu\theta$$

dove  $c_\nu$  è il calore specifico (a volume costante) del materiale che nei casi concreti più comuni può essere considerato costante.

Applicando questi risultati alla legge fondamentale per la conduzione del calore si ottiene

$$c_\nu\theta_t\rho = k\Delta\theta + r\rho.$$

Ponendo  $D = \frac{k}{c_\nu\rho}$  e  $f = \frac{r}{c_\nu}$  si ha l'equazione di diffusione

$$\theta_t - D\Delta\theta = f$$

dove il coefficiente  $D$  rappresenta la risposta termica del materiale.

## 1.5 Condizioni al bordo

Nella sezione precedente abbiamo ottenuto un'equazione che sintetizza l'evoluzione della temperatura in un corpo conduttore del calore.

Come abbiamo sottolineato nei paragrafi precedenti è preferibile però che il problema risulti ben posto. A tale proposito occorre inserire nel nostro modello ulteriori informazioni.

Analizziamo per prima cosa il caso in cui il corpo rigido studiato occupi nello spazio un dominio limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , nell'intervallo di tempo  $[0, T]$ .

**Definizione 1.4** (Cilindro parabolico e bordo parabolico). Definiamo cilindro parabolico l'insieme

$$Q_T := \Omega \times (0, T)$$

e chiamiamo  $\partial_p Q_T$  il suo bordo parabolico

$$\partial_p Q_T := (\bar{\Omega} \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T]).$$

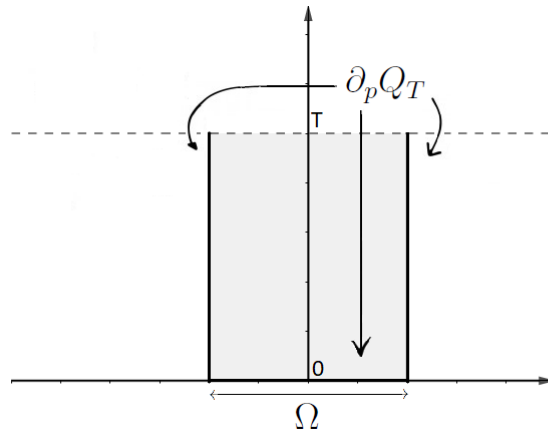


Figura 1.1: Bordo parabolico

La temperatura sarà rappresentata dalla funzione  $u = u(x, t)$ , che soddisfa l'equazione del calore  $u_t - D\Delta u = f$  nel cilindro parabolico  $Q_T$ .

Per assicurare l'unicità del problema abbiamo bisogno di assegnare, prima di tutto, la configurazione del sistema al tempo 0. Diverse configurazioni iniziali corrisponderanno, in generale, a differenti evoluzioni della temperatura.

Poniamo dunque:

$$u(x, 0) = g(x) \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Questo però non è sufficiente, è necessario anche tener conto di come il corpo interagisce con l'ambiente circostante. Esistono diversi modi di controllare l'interazione con l'ambiente, vediamo di seguito le più comuni condizioni al bordo che ci permettono di farlo.

- **Condizione di Dirichlet.** Viene assegnata la temperatura in ogni punto di  $\partial\Omega$ .

La condizione al bordo sarà della forma

$$u(x, t) = h(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T].$$

- **Condizione di Neumann.** Supponiamo che il bordo  $\partial\Omega$  sia una superficie liscia, ovvero dotata di retta o piano tangente in ogni suo punto.

Chiamiamo  $\nu = \nu(x)$  il versore normale al piano tangente a  $\partial\Omega$  nel punto  $x$ , orientato esternamente a  $\Omega$ .

Sia  $q$  il flusso di calore e  $k$  la costante di conduttività termica, dalla legge di Fourier abbiamo che  $q = -k\nabla u$  e di conseguenza il flusso entrante è  $-q \cdot \nu = k\nabla u \cdot \nu = k\partial_\nu u$ .

Alla luce di quanto detto, la condizione al bordo di Neumann assegna la derivata normale  $\partial_\nu u(x, t)$  per ogni  $x \in \partial\Omega$  e  $t \in (0, T]$ :

$$\partial_\nu u(x, t) = h(x, t) \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T].$$

- **Condizione di Robin.** Supponiamo che l'ambiente circostante sia tenuto a una temperatura  $U$  e che il flusso attraverso  $\partial\Omega$  sia proporzionale alla differenza  $U - u$ , cioè  $-q \cdot \nu = \gamma(U - u)$  con  $\gamma > 0$ .

Grazie alla legge di Fourier, otteniamo la condizione al bordo di Robin:

$$\partial_\nu u(x, t) + \alpha u(x, t) = \beta \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T].$$

con  $\alpha = \frac{\gamma}{k}$  e  $\beta = \frac{\gamma U}{k}$ .

- **Condizioni miste.** In questo caso la frontiera di  $\Omega$  viene suddivisa in diverse parti, su ciascuna delle quali viene applicata una condizione al bordo differente.

Riassumendo, nel caso di dominio limitato il problema avrà la forma

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & \text{in } Q_t \\ u(x, 0) = g(x) & \text{in } \bar{\Omega} \\ \text{condizioni al bordo su } \partial\Omega \times (0, T] \end{cases}$$

*Osservazione 1.* Si noti che non viene assegnata nessuna condizione per  $t = T$ ,  $x \in \Omega$ .

Le condizioni sono assegnate solamente sulla frontiera parabolica  $\partial_p Q_T$ .

Nel caso di dominio non limitato occorre invece richiedere che la soluzione non diverga all'infinito troppo rapidamente.

Un esempio tipico è il problema di Cauchy globale:

$$\begin{cases} u_t - D\Delta u = f & x \in \mathbb{R}^n, 0 < t < T \\ u(x, 0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{condizioni per } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$



# Capitolo 2

## L'equazione del calore

In questo capitolo definiremo innanzitutto l'equazione del calore e ne vedremo alcune proprietà.

Definiremo poi una particolare soluzione dell'equazione del calore, la soluzione fondamentale  $\Gamma$ , quest'ultima sarà utile per ricavare la soluzione del problema di Cauchy.

Successivamente dimostreremo la formula di Poisson-Jensen e le formule di media.

Definiremo infine la proprietà di media e vedremo come questa caratterizza le funzioni caloriche.

### 2.1 Equazione del calore

Definiamo in questa sezione l'equazione del calore e ne osserviamo alcune semplici proprietà.

**Definizione 2.1** (Equazione del calore). L'equazione del calore o equazione di diffusione per una funzione

$$u = u(x, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$$

con  $x$  variabile reale,  $t$  variabile temporale, ha la forma

$$\Delta u - \partial_t u = 0$$

dove  $\Delta$  indica l'operatore di Laplace  $\Delta = \Delta_x := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$ .

Nel caso non omogeneo l'equazione è

$$\Delta u - \partial_t u = f$$

con  $f : \mathbb{R}^n \times [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definizione 2.2** (Backward). Definiamo equazione aggiunta o backward dell'equazione del calore

$$\Delta u + \partial_t u = 0.$$

**Definizione 2.3** (Operatore del calore). L'operatore differenziale del secondo ordine  $H := \Delta - \partial_t$  viene chiamato operatore del calore.

Indichiamo con  $H^* := \Delta + \partial_t$  il suo operatore aggiunto.

Vediamo ora alcune proprietà dell'equazione del calore nel caso omogeneo:

- **Linearità.** Se  $u$  e  $v$  sono soluzioni, allora  $au + bv$  è soluzione per ogni scelta di  $a, b$  scalari.
- **Cambio di direzione temporale.** Se  $u = u(x, t)$  è soluzione di  $\Delta u - \partial_t u = 0$ , allora la funzione  $v(x, t) = u(x, -t)$  è soluzione dell'equazione aggiunta  $\Delta v + \partial_t v = 0$ .  
La funzione  $w(x, t) = u(-x, t)$  rimane invece soluzione di  $\Delta w - \partial_t w = 0$ .  
Dalla non invarianza dell'equazione del calore rispetto al cambio di segno nel tempo ne deriva l'irreversibilità temporale dei fenomeni descritti da essa.
- **Invarianza rispetto a traslazioni.** Sia  $u = u(x, t)$  soluzione di  $\Delta u - \partial_t u = 0$ , la funzione  $v(x, t) = u(x - y, t - s)$ , con  $y, s$  fissati, è ancora soluzione della stessa equazione.
- **Invarianza rispetto a dilatazioni paraboliche.** Definiamo dilatazione parabolica di parametro  $\lambda$  la trasformazione

$$\begin{aligned} \delta_\lambda : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, t) &\longmapsto (\lambda x, \lambda^2 t) \end{aligned}$$

Se  $u = u(x, t)$  è soluzione di  $\Delta u - \partial_t u = 0$ , allora  $v(x, t) = u(\delta_\lambda(x, y))$  è ancora soluzione della stessa equazione per ogni  $\lambda > 0$ .

Infatti

$$\begin{aligned} \Delta v(x, t) - \partial_t v(x, t) &= \Delta(u(\delta_\lambda(x, t))) - \partial_t(u(\delta_\lambda(x, t))) = \\ &= \lambda^2 \Delta u(\delta_\lambda(x, t)) - \lambda^2 \partial_t u(\delta_\lambda(x, t)) = \lambda^2 (\Delta u(\delta_\lambda(x, t)) - \partial_t u(\delta_\lambda(x, t))) = 0. \end{aligned}$$

**Definizione 2.4** (Funzione calorica). Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , definiamo funzione calorica una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti condizioni:

- $u \in C_x^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C_t^1(\Omega, \mathbb{R})$ , cioè  $\forall i, j = 1, \dots, n$  esistono e sono continue  $\partial_{x_j} u, \partial_{x_j, x_i} u, \partial_t u$  in ogni punto di  $\Omega$ ;
- $Hu(x, t) = 0 \forall (x, t) \in \Omega$ .

*Osservazione 2.* Si noti che l'insieme delle funzioni caloriche è un sottospazio lineare di  $u \in C_x^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C_t^1(\Omega, \mathbb{R})$ , ovvero se  $u, v$  sono caloriche e  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , allora  $\lambda u + \mu v$  è calorica.

## 2.2 Soluzione fondamentale

Nello studio delle equazioni a derivate parziali spesso è utile partire da particolari soluzioni attraverso le quali è possibile costruirne molte altre.

A questo proposito vediamo ora come si ricava la soluzione fondamentale per l'equazione del calore.

Un'approccio rapido per ricavare la soluzione fondamentale è quello di ricercarla tra le funzioni invarianti rispetto alla dilatazione

$$u(x, t) \longmapsto \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t).$$

Quindi richiediamo che

$$u(x, t) = \lambda^\alpha u(\lambda^\beta x, \lambda t) \quad \text{con } t > 0, \lambda > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Ponendo  $\lambda = \frac{1}{t}$  e  $v(y) := u(y, 1)$  si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{t^\alpha} u\left(\frac{x}{t^\beta}, 1\right) = \frac{1}{t^\alpha} v\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad \text{con } t > 0, \lambda > 0, x \in \mathbb{R}.$$

Ovviamente dobbiamo richiedere che la soluzione fondamentale soddisfi l'equazione del calore  $\Delta u(x, t) - \partial_t u(x, t) = 0$ . Deve verificare quindi

$$\alpha t^{-(\alpha+1)} v(y) + \beta t^{-(\alpha+1)} y \cdot Dv(y) + t^{-(\alpha+2\beta)} \Delta v(y) = 0$$

per  $y := t^{-\beta} x$ .

Possiamo trasformare l'equazione ottenuta in modo che dipenda unicamente dal parametro  $y$ , assumiamo  $\beta = \frac{1}{2}$ . Con le opportune semplificazioni si ha

$$\alpha v(y) + \frac{1}{2} y \cdot Dv(y) + \Delta v(y) = 0.$$

Vorremmo ora scegliere la costante  $\alpha$  in modo che  $v$  sia radiale, ovvero  $v(y) = w(|y|)$  con  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Si noti che questa scelta rende la funzione  $u$  radiale nella variabile  $x$ .

Calcoliamo quindi

$$\begin{aligned} \partial_i v(y) &= w' \frac{y_i}{|y|} \\ \partial_{ii}^2 v(y) &= w'' \frac{y_i^2}{|y|^2} + w' \frac{1}{|y|} - w' \frac{y_i^2}{|y|^3} \end{aligned}$$

sostituendo l'equazione diventa

$$\alpha w + \frac{1}{2} r \cdot w' + w'' + \frac{n-1}{r} w' = 0$$

dove  $r = |y|$  e  $' = \frac{d}{dr}$ .

Scegliendo  $\alpha = \frac{n}{2}$  si ha

$$(r^{n-1} w')' + \frac{1}{2} (r^n w)' = 0$$

e di conseguenza, per una certa costante  $a$ ,

$$(r^{n-1} w') + \frac{1}{2} (r^n w) = a.$$

Assumendo che  $w, w' \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ , possiamo concludere che  $a = 0$  e  $w' = -\frac{1}{2} r w$ . Di conseguenza  $w = b e^{-\frac{r^2}{4}}$ , per una certa costante  $b$ .

Unendo i risultati visti e tenendo conto della scelta delle costanti, la soluzione che cerchiamo deve avere la seguente forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} b e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Resta solamente da definire la costante  $b$ .

Scegliamo la costante di normalizzazione  $b$  in modo che per ogni  $t > 0$  si abbia una gaussiana, ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) \, dx = 1.$$

Grazie al cambio di variabili  $z = \frac{|x|}{2t^{\frac{1}{2}}}$  si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) \, dx = \frac{b}{t^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \, dx = 2^n b \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \, dz$$

poichè  $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2} \, dz = \pi^{\frac{n}{2}}$  si ottiene

$$2^n b \pi^{\frac{n}{2}} = 1.$$

Arriviamo quindi a scegliere  $b = (4\pi)^{-\frac{n}{2}}$ .

**Definizione 2.5** (Soluzione fondamentale). Definiamo soluzione fondamentale per l'equazione del calore la funzione

$$\Gamma(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}, t < 0 \end{cases}$$

*Osservazione 3.* La funzione  $\Gamma$  ha una singolarità nel punto  $(0, 0)$ . Si ha infatti che

$$\Gamma(0, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} +\infty.$$

**Lemma 2.2.1.** Sia  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$  un multi-indice, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$  si ha

$$D^\beta \Gamma(x, t) = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}} p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Gamma(x, t)$$

dove  $|\beta|_c := \sum_{j=1}^n \beta_j + 2\beta_{n+1}$  e  $p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right)$  è una funzione polinomiale in  $\mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.*

Poniamo  $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$ , per  $t > 0$  si ha

$$\begin{aligned} \partial_{x_j} \Gamma(x, t) &= \Gamma(x, t) \frac{x_j}{2t} = t^{-\frac{1}{2}} \Gamma(x, t) \frac{x_j}{2\sqrt{t}} = t^{-\frac{|\beta|_c}{2}} p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Gamma(x, t) \\ \partial_{x_i x_j} \Gamma(x, t) &= \Gamma(x, t) \left( \frac{\delta_{ij}}{2t} + \frac{x_i x_j}{4t^2} \right) = t^{-1} \Gamma(x, t) \left( \frac{\delta_{ij}}{2} + \frac{x_i x_j}{4t} \right) = \\ &= t^{-\frac{|\beta|_c}{2}} p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Gamma(x, t) \\ \partial_t \Gamma(x, t) &= \Gamma(x, t) \left( -\frac{n}{2t} + \frac{|x|^2}{4t^2} \right) = t^{-1} \Gamma(x, t) \left( -\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4t} \right) = \\ &= t^{-\frac{|\beta|_c}{2}} p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Gamma(x, t) \end{aligned}$$

e così via. □

**Proposizione 2.2.2.** *La soluzione fondamentale ha le seguenti proprietà:*

1.  $\Gamma$  è calorica in  $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ;
2.  $\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) dx = 1$ ;
3.  $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ ;
4.  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ ;
5. Indichiamo con  $\delta$  la delta di Dirac, allora  $H\Gamma = -\delta$  nel senso debole delle distribuzioni.

*Dimostrazione.*

Le proprietà 1. e 2. sono immediate per come è stata costruita la soluzione fondamentale.

Dimostriamo la proprietà 3.

Sia  $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  compatto, allora esistono  $T_1, T_2 \in \mathbb{R}$ ,  $T_1 < T_2$  tali che

$K \subseteq \mathbb{R}^n \times ]T_1, T_2[$ . Sfruttando la seconda proprietà otteniamo

$$\begin{aligned} \int_K \Gamma(x, t) \, dx dt &\leq \int_{\mathbb{R}^n \times ]T_1, T_2[} \Gamma(x, t) \, dx dt \leq \int_{T_1}^{T_2} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) \, dx \right) dt = \\ &= \int_{T_1}^{T_2} dt = T_2 - T_1 < +\infty. \end{aligned}$$

Proviamo di seguito la proprietà 4.

Abbiamo osservato che la soluzione fondamentale ha una singolarità nel punto  $(0, 0)$  e notiamo che  $\Gamma \in C^\infty(\{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} | t \neq 0\})$ . Vogliamo ora dimostrare che  $\Gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus (0, 0))$ , per farlo mostriamo che  $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  e per ogni multi-indice  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{n+1})$ , si ha

$$\lim_{(x, t) \rightarrow (x_0, 0)} D^\beta \Gamma(x, t) = 0.$$

Ciò deriva direttamente dal lemma, infatti

$$D^\beta \Gamma(x, t) = t^{-\frac{|\beta|_x}{2} - \frac{n}{2}} p_\beta \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right) (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0.$$

Infine proviamo la proprietà 5.

Vediamo innanzitutto che dimostrare  $H\Gamma = -\delta$  equivale a provare che, per ogni funzione test  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ , vale

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx dt = -\varphi(0, 0).$$

Infatti per ogni  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$  si ha

$$H\Gamma = -\delta \iff \langle H\Gamma, \varphi \rangle = -\langle \delta, \varphi \rangle = -\varphi(0, 0) \iff \langle \Gamma, H^* \varphi \rangle = -\varphi(0, 0).$$

Siccome  $\Gamma$  è localmente sommabile si ha

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1} \times ]0, +\infty[} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx dt &= \int_{\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx \right) dt. \end{aligned}$$

Procediamo calcolando

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx \right) dt &= \\ &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) \Delta \varphi(x, t) \, dx \right) dt + \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \Gamma(x, t) \partial_t \varphi(x, t) \, dt \right) dx \end{aligned}$$

integrando per parti due volte rispetto a  $x$  il primo integrale e una volta rispetto a  $t$  il secondo otteniamo

$$\begin{aligned} &= \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Delta \Gamma(x, t) \varphi(x, t) \, dx \right) dt - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx + \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\varepsilon}^{+\infty} \partial_t \Gamma(x, t) \varphi(x, t) \, dt \right) dx = \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} H \Gamma(x, t) \varphi(x, t) \, dx \right) dt + \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx. \end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, t) H^* \varphi(x, t) \, dx \right) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx.$$

Calcoliamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx - \varphi(0, 0) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \left( \varphi(x, \varepsilon) - \varphi(0, 0) \right) \, dx$$

ed effettuando il cambio di variabili  $x = 2\sqrt{\varepsilon}y$ ,  $dx = (2\sqrt{\varepsilon})^n dy$  si ha

$$= \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} \left( \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) - \varphi(0, 0) \right) \, dy.$$

Passando al limite sotto al segno di integrale possiamo concludere che

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x, \varepsilon) \varphi(x, \varepsilon) \, dx - \varphi(0, 0) = \\ &= \pi^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( e^{-|y|^2} \left( \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) - \varphi(0, 0) \right) \right) \, dy = 0. \end{aligned}$$

□

## 2.3 Problemi a valori iniziali

In questa sezione utilizzeremo la soluzione fondamentale  $\Gamma$  per ricavare la soluzione del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$



Si noti che le soluzioni di questo problema si possono vedere come la combinazione delle soluzioni del problema omogeneo

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

e di quelle del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Analizziamo perciò i due problemi separatamente.

### 2.3.1 Soluzione del problema omogeneo

Con il teorema sotto enunciato dimostreremo che la convoluzione

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy$$

è soluzione del problema di Cauchy omogeneo, sotto opportune ipotesi su  $g$ .

**Teorema 2.3.1.** *Sia  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e sia  $u$  la convoluzione sopra citata. Allora*

1.  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ;
2.  $u_t(x, y) - \Delta u(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$ ;
3.  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = g(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Il primo punto discende dal fatto che  $\Gamma$  è infinite volte differenziabile su  $\mathbb{R}^n \times [\delta, \infty) \forall \delta > 0$ , con derivate uniformemente limitate.

Per provare il punto 2 è sufficiente notare che  $\Gamma$  è soluzione dell'equazione del calore, quindi

$$u_t(x, y) - \Delta u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} [(\Gamma_t - \Delta_x \Gamma)(x - y, t)] g(y) dy = 0$$

per  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $t > 0$ .

Dimostriamo ora il terzo punto del teorema.

Fissiamo  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\varepsilon > 0$ . Siccome  $g$  è una funzione continua  $\exists \delta > 0$  tale che

$$|g(y) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } |y - x_0| < \delta.$$

Tenendo presente quanto detto si ha

$$\begin{aligned} |u(x, t) - g(x_0)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy - g(x_0) \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) dy \right| = \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) (g(y) - g(x_0)) dy \right| \leq \int_{B(x_0, \delta)} \Gamma(x - y, t) (g(y) - g(x_0)) dy + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \Gamma(x - y, t) (g(y) - g(x_0)) dy =: I + J \end{aligned}$$

dove

$$I \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) dy = \varepsilon.$$

D'altra parte se poniamo  $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$  allora per  $y \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)$  si ha:

$$|y - x_0| \leq |y - x| + \frac{\delta}{2} \leq |y - x| + \frac{1}{2}|y - x_0|$$

Da cui segue che  $|x - y| \geq \frac{1}{2}|y - x_0|$ . Possiamo ora valutare  $J$ :

$$\begin{aligned} J &\leq 2\|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} \Gamma(x - y, t) dy \leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} dy \leq \\ &\leq \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x_0, \delta)} e^{-\frac{|y-x_0|^2}{16t}} dy = \frac{C}{t^{n/2}} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Per  $t \rightarrow 0^+$  si ottiene  $J \rightarrow 0$ .

Quindi per  $t$  sufficientemente piccolo e  $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$  si ha  $J < \varepsilon$  e

$$|u(x, t) - g(x_0)| < 2\varepsilon.$$

□

### 2.3.2 Soluzione del problema non omogeneo

Proviamo ora che la convoluzione

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds \end{aligned}$$

è soluzione del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

**Teorema 2.3.2.** *Sia  $f \in C_x^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C_t^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  a supporto compatto e sia  $u$  la convoluzione sopra citata. Allora*

1.  $u \in C_x^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C_t^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ ;
2.  $u_t(x, y) - \Delta u(x, t) = f(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0$ ;
3.  $\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,0)} u(x, t) = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.*  $\Gamma$  presenta una singolarità nel punto  $(0, 0)$ , non è possibile quindi derivare sotto il segno di integrale. Effettuiamo perciò un cambio di variabili:

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds.$$

Tenendo conto che  $f$  ha supporto compatto, otteniamo che

$$u_t(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) f_t(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy$$

e

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x - y, t - s) dy ds \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Ne segue che  $u_t$  e  $D_x^2 u$  sono funzioni di classe  $C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , di conseguenza lo sono anche  $u$  e  $D_x u$ .

Vediamo ora il punto 2 del teorema

$$\begin{aligned}
u_t(x, y) - \Delta u(x, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left( \frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) f(x - y, t - s) dy ds + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy = \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) dy ds + \\
&+ \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) \left( -\frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) f(x - y, t - s) dy ds + \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy = \\
&=: I_\varepsilon + J_\varepsilon + K
\end{aligned}$$

Possiamo stimare  $I_\varepsilon$  nel seguente modo

$$|I_\varepsilon| \leq (\|f_t\|_{L^\infty} + \|D^2 f\|_{L^\infty}) \int_0^\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, s) dy ds \leq \varepsilon C$$

Integrando per parti una volta rispetto a  $s$  e due volte rispetto a  $y$ , e ricordando che  $\Gamma$  è soluzione dell'equazione del calore, si ha che

$$\begin{aligned}
J_\varepsilon &= \int_\varepsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial s} - \Delta_y \right) \Gamma(y, s) f(x - y, t - s) dy ds + \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy - \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, t) f(x - y, 0) dy = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy - K
\end{aligned}$$

Combinando i risultati ottenuti:

$$u_t(x, y) - \Delta u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(y, \varepsilon) f(x - y, t - \varepsilon) dy = f(x, t)$$

Notiamo infine che  $\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq t\|f\|_{L^\infty} \rightarrow 0$ .

□

Combinando le soluzioni ottenute per i due problemi possiamo concludere che, se  $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in C_x^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap C_t^1(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$  e  $f$  ha supporto compatto, allora la funzione

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t) g(y) dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(x - y, t - s) f(y, s) dy ds = \\
&= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} g(y) dy + \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} f(y, s) dy ds
\end{aligned}$$

è soluzione di

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

## 2.4 Formule di media

In questa sezione ci interessa individuare una formula di media per le soluzioni dell'equazione del calore.

Introdurremo innanzitutto l'identità di Green che sarà utile nella dimostrazione della formula di Poisson-Jensen, di cui la formula di media è diretta conseguenza.

### 2.4.1 Identità di Green

Per prima cosa vediamo la formula di reciprocità per l'operatore del calore  $H$ .

Ricordiamo che  $H^*$  rappresenta l'operatore aggiunto di  $H$ .

**Proposizione 2.4.1** (Formula di reciprocità per l'operatore del calore  $H$ ).

Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e siano  $u, v \in C_x^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C_t^1(\Omega, \mathbb{R})$ , allora

$$uH^*v - vHu = \operatorname{div}_x(u\nabla_x v - v\nabla_x u) + \partial_t(uv).$$

*Dimostrazione.* Grazie alla formula di reciprocità per l'operatore di Laplace (si veda A.2) si ha

$$\begin{aligned} uH^*v - vHu &= u(\Delta_x + \partial_t)v - v(\Delta_x - \partial_t)u = u\Delta_x v + u\partial_t v - v\Delta_x u + v\partial_t u = \\ &= \operatorname{div}_x(u\nabla_x v - v\nabla_x u) + \partial_t(uv). \end{aligned}$$

□

Grazie a questa uguaglianza sarà facile dimostrare l'identità di Green.

**Proposizione 2.4.2** (Identità di Green). Sia  $\Omega$  aperto regolare di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e siano  $u, v \in C_x^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}) \cap C_t^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ , allora

$$\int_{\Omega} (uH^*v - vHu) d(x, t) = \int_{\partial\Omega} (u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle - v \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + uv\nu_t) d\sigma$$

dove  $\nu = (\nu_x, \nu_t)$  rappresenta la normale esterna a  $\Omega$ ,  $\nu_x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nu_t \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Integrando la formula di reciprocità e applicando il teorema della divergenza (Teorema A.1.2) si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (uH^*v - vHu) d(x, t) &= \int_{\Omega} (\operatorname{div}_x(u\nabla_x v - v\nabla_x u) + \partial_t(uv)) d(x, t) = \\ &= \int_{\partial\Omega} ((u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle - v \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle) + uv\nu_t) d\sigma \end{aligned}$$

□

*Osservazione 4.* Se  $v \equiv 1$  si ha

$$\int_{\Omega} vHu d(x, t) = \int_{\partial\Omega} (\langle \nabla_x u, \nu_x \rangle - u\nu_t) d\sigma.$$

Se, oltre a questo,  $u$  soddisfa l'equazione del calore abbiamo che

$$\int_{\partial\Omega} (\langle \nabla_x u, \nu_x \rangle - u\nu_t) d\sigma = 0.$$

### 2.4.2 Formula di Poisson-Jensen e formula di media

Prima di verificare la formula di media per le funzioni caloriche, introduciamo il concetto di palla del calore.

**Definizione 2.6** (Palla del calore). Fissato  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , chiamiamo palla del calore di centro  $(x_0, t_0)$  e raggio  $r$  l'insieme

$$E((x_0, t_0), r) := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) > \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \right\}$$

*Osservazione 5.* Il bordo della palla del calore è un insieme di livello della soluzione fondamentale.

*Osservazione 6.*

$$E((x_0, t_0), r) = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < t_0 - t < r, |x_0 - x|^2 < 2n(t_0 - t) \log \left( \frac{r}{t_0 - t} \right) \right\}$$

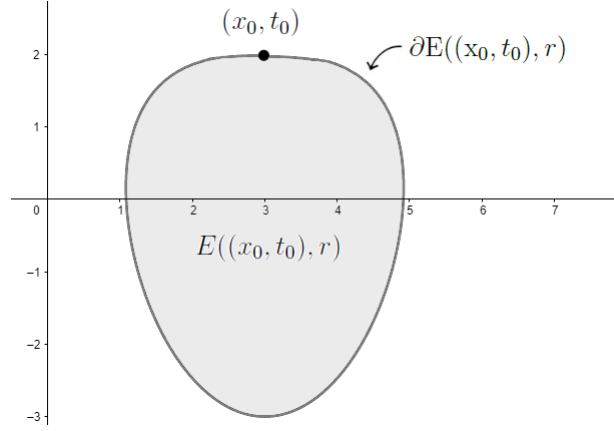


Figura 2.1: palla del calore di centro  $(3, 2)$  e  $r = 5$

*Osservazione 7.*  $(x_0, t_0) \in \partial E((x_0, t_0), r)$ .

**Definizione 2.7** (Nucleo). Se  $t \neq 0$  chiamiamo nucleo

$$W(x, t) := \frac{1}{4} \left( \frac{|x|}{t} \right)^2.$$

La formula di media per funzioni caloriche che vedremo in seguito sarà diretta conseguenza della formula di rappresentazione di Poisson-Jensen che enunciamo e dimostriamo di seguito.

**Teorema 2.4.3** (Formula di Poisson-Jensen). *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto e sia  $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ . Allora  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  e  $r > 0$  tale che  $\overline{E((x_0, t_0), r)} \subseteq \Omega$ , si ha*

$$u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0) - N_r(Hu)(x_0, t_0)$$

dove

$$M_r(u)(x_0, t_0) := \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t)$$

e

$$\begin{aligned} N_r(f)(x_0, t_0) &:= \\ &= \frac{n}{2r^{\frac{n}{2}}} \int_0^r \rho^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_{\partial E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \right) f(x, t) d(x, t) \right) d\rho. \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $\varepsilon > 0$  definiamo

$$A_\varepsilon := E((x_0, t_0), r) \cap \{t < t_0 - \varepsilon\}.$$

L'identità di Green in  $A_\varepsilon$  per la coppia di funzioni  $u$  e  $v$ , con  $v := \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)$  diventa

$$- \int_{A_\varepsilon} vHu \, d(x, t) = \int_{\partial A_\varepsilon} (u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle - v \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + uv\nu_t) \, d\sigma$$

Notiamo che  $\partial A_\varepsilon = \Sigma_\varepsilon \cup \partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)$  con  $\Sigma_\varepsilon = E((x_0, t_0), r) \cap \{t = t_0 - \varepsilon\}$  e  $\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r) = \partial E((x_0, t_0), r) \cap \{t \leq t_0 - \varepsilon\}$ .

Possiamo quindi scomporre l'integrale nel modo seguente

$$\begin{aligned} - \int_{A_\varepsilon} vHu \, d(x, t) &= \int_{\Sigma_\varepsilon} (u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle - v \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + uv\nu_t) \, d\sigma + \\ &+ \int_{\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)} (u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle - v \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + uv\nu_t) \, d\sigma =: I_\varepsilon + J_\varepsilon \end{aligned}$$

Analizziamo singolarmente i tre integrali che compaiono in questa formula.

Per il termine a sinistra dell'uguale è sufficiente notare che, siccome  $v \in L'_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} - \int_{A_\varepsilon} vHu \, d(x, t) = - \int_{E((x_0, t_0), r)} vHu \, d(x, t).$$

Ci concentriamo ora sul termine  $I_\varepsilon$ .

Avevamo osservato che

$$E((x_0, t_0), r) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid 0 < t_0 - t < r, |x_0 - x|^2 < 2n(t_0 - t) \log(\frac{r}{t_0 - t})\},$$

da questo possiamo dedurre

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 - t = \varepsilon, |x_0 - x|^2 < 2n\varepsilon \log(\frac{r}{t_0 - t})\}.$$

La normale esterna nei punti di questo insieme è della forma  $\nu = (0, 1)$ , per cui si ha

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_0 - x|^2 < 2n\varepsilon \log(\frac{r}{t_0 - t})\}} u(x, t_0 - \varepsilon) \Gamma(x_0 - x, \varepsilon) \, dx = \\ &= \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_0 - x|^2 < 2n\varepsilon \log(\frac{r}{\varepsilon})\}} u(x, t_0 - \varepsilon) e^{-\frac{|x-x_0|^2}{4x}} \, dx \end{aligned}$$



Effettuando il cambio di variabile  $y = \frac{x_0 - x}{2\sqrt{\varepsilon}}$  otteniamo

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \frac{1}{(4\pi\varepsilon)^{\frac{n}{2}}} (4\varepsilon)^{\frac{n}{2}} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|^2 < \frac{2n\varepsilon \log(\frac{r}{\varepsilon})}{4\varepsilon}\}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}y, t_0 - \varepsilon) e^{-|y|^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|^2 < \frac{n \log(\frac{r}{\varepsilon})}{2}\}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}y, t_0 - \varepsilon) e^{-|y|^2} dx \end{aligned}$$

Per  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ha  $\frac{n \log(\frac{r}{\varepsilon})}{2} \rightarrow \infty$ , per cui

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_\varepsilon &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n \mid |y|^2 < \frac{n \log(\frac{r}{\varepsilon})}{2}\}} u(x_0 - 2\sqrt{\varepsilon}y, t_0 - \varepsilon) e^{-|y|^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x_0, t_0) e^{-|y|^2} dx = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} u(x_0, t_0) \pi^{\frac{n}{2}} = u(x_0, t_0). \end{aligned}$$

In ultimo analizziamo  $J_\varepsilon$ .

Essendo  $\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)$  sottoinsieme di  $\partial E((x_0, t_0), r)$ , allora  $v = \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) = (\frac{1}{4\pi r})^{\frac{n}{2}}$  su questo insieme. Ne segue che

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \int_{\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)} u \langle \nabla_x v, \nu_x \rangle d\sigma + \\ &+ \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)} (- \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + u \nu_t) d\sigma =: J_\varepsilon^1 + J_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Stimiamo  $J_\varepsilon^2$  utilizzando l'*Osservazione 4*.

$$\begin{aligned} J_\varepsilon^2 &= \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)} (- \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + u \nu_t) d\sigma = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{\partial A_\varepsilon} (- \langle \nabla_x u, \nu_x \rangle + u \nu_t) d\sigma + \int_{\Sigma_\varepsilon} O(1) d\sigma = \\ &= - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{A_\varepsilon} H u dz + O\left( \left( 2n\varepsilon \log\left( \frac{r}{\varepsilon} \right) \right)^{\frac{n}{2}} \right) \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^2 = - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} H u d(x, t).$$

Ci concentriamo ora sul termine  $J_\varepsilon^1$ .

Tenendo conto che

$$\nu(x, t) = - \frac{\nabla_{(x,t)} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_{(x,t)} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|}, \quad (x, t) \in \partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)$$

e che

$$\begin{aligned}\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) &= \nabla_x \left( \left( \frac{1}{4\pi(t_0 - t)} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} \right) = \\ &= \left( \frac{1}{4\pi(t_0 - t)} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} = \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)\end{aligned}$$

possiamo ricavare  $\langle \nabla_x v, \nu_x \rangle$  come segue

$$\begin{aligned}\langle \nabla_x v(x, t), \nu_x(x, t) \rangle &= \langle \nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t), -\frac{\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} \rangle = \\ &= -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} \langle \nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t), \nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) \rangle = \\ &= \frac{-1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} \langle \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t), \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) \rangle = \\ &= -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} \left( \frac{|x_0 - x|}{2(t_0 - t)} \right)^2 (\Gamma(x_0 - x, t_0 - t))^2 = \\ &= -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} W(x_0 - x, t_0 - t) (\Gamma(x_0 - x, t_0 - t))^2.\end{aligned}$$

Su  $\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)$  si ha

$$\langle \nabla_x v, \nu_x \rangle = -\frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n W(x_0 - x, t_0 - t).$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} J_\varepsilon^1 &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} -\left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \int_{\partial_\varepsilon E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma = \\ &= -\left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \int_{\partial E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma\end{aligned}$$

Unendo i risultati ottenuti per  $\varepsilon \rightarrow 0$  otteniamo il seguente risultato

$$\begin{aligned}- \int_{E((x_0, t_0), r)} v H u d(x, t) &= u(x_0, t_0) - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \int_{E((x_0, t_0), r)} H u(x, t) d\sigma + \\ - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \int_{\partial E((x_0, t_0), r)} &u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma\end{aligned}$$

che possiamo riscrivere come

$$u(x_0, t_0) = - \int_{E((x_0, t_0), r)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \right) Hu(x, t) d\sigma + \\ + \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^n \int_{\partial E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma.$$

Notiamo che questa uguaglianza è valida per ogni  $\rho \in ]0, r[$

$$u(x_0, t_0) = - \int_{E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi \rho} \right)^n \right) Hu(x, t) d\sigma + \\ + \left( \frac{1}{4\pi \rho} \right)^n \int_{\partial E((x_0, t_0), \rho)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) \frac{1}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma.$$

Da questo risultato moltiplicando per  $\rho^{\frac{n-2}{2}}$  e integrando rispetto a  $\rho$  tra 0 e  $r$ , otteniamo

$$\int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} u(x_0, t_0) d\rho = \\ - \int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} \int_{E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi \rho} \right)^n \right) Hu(x, t) d\sigma d\rho + \\ + \left( \frac{1}{4\pi} \right)^n \int_0^r \rho^{\frac{-n-2}{2}} \int_{\partial E((x_0, t_0), \rho)} \frac{u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma d\rho =: V_1 + V_2.$$

Il termine a sinistra dell'uguale risulta

$$\int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} u(x_0, t_0) d\rho = u(x_0, t_0) \int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} d\rho = u(x_0, t_0) \left[ \frac{2\rho^{\frac{n}{2}}}{n} \right]_0^r = \frac{2r^{\frac{n}{2}}}{n} u(x_0, t_0).$$

Stimiamo di seguito  $V_2$  servendoci del cambio di variabile  $s = \left( \frac{1}{4\pi \rho} \right)^{\frac{n}{2}}$ ,

$\rho = \frac{1}{4\pi} s^{-\frac{2}{n}}$ ,  $d\rho = -\frac{2}{n} s^{-\frac{2}{n}-1} ds$  e della formula di coarea (Teorema A.3.1)

$$V_2 = \\ = \left( \frac{1}{4\pi} \right)^n \int_0^r \rho^{\frac{-n-2}{2}} \int_{\partial E((x_0, t_0), \rho)} \frac{u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma d\rho = \\ = - \left( \frac{1}{4\pi} \right)^{n+1+\frac{-n-2}{2}} \frac{2}{n} \int_{-\infty}^{\left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}}} \int_{\{\Gamma(x_0-x, t_0-t)=s\}} \frac{u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma ds = \\ = \left( \frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n} \int_{\left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}}}^{+\infty} \int_{\{(x, t) \in R^{n+1} | \Gamma(x_0-x, t_0-t)=s\}} \frac{u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t)}{|\nabla_x \Gamma(x_0 - x, t_0 - t)|} d\sigma ds = \\ = \left( \frac{1}{4\pi} \right)^{\frac{n}{2}} \frac{2}{n} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t).$$

Unendo i risultati si ricava

$$\begin{aligned} \frac{2r^{\frac{n}{2}}}{n}u(x_0, t_0) &= \frac{2(4\pi)^{-\frac{n}{2}}}{n} \int_{E((x_0, t_0), \rho)} u(x, t)W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) + \\ &- \int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} \int_{E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^n \right) Hu(x, t) d\sigma d\rho \end{aligned}$$

e dividendo per  $\frac{2}{n}r^{\frac{n}{2}}$  otteniamo la formula di Poisson-Jensen

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), \rho)} u(x, t)W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) + \\ &- \frac{nr^{-\frac{n}{2}}}{2} \int_0^r \rho^{\frac{n-2}{2}} \int_{E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^n \right) Hu(x, t) d\sigma d\rho \end{aligned}$$

□

Dalla formula di Poisson-Jensen è immediato derivare il seguente risultato.

**Corollario 2.4.4** (Teorema di Pini-Watson o formula di media per funzioni caloriche). *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto e sia  $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ ,  $Hu = 0$ .*

*Allora  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  e  $r > 0$  tale che  $\overline{E((x_0, t_0), r)} \subseteq \Omega$ , si ha*

$$u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0) = \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t)W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t).$$

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi  $Hu = 0$  si deduce che  $N_r(Hu)(x_0, t_0) = 0$  e perciò  $u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0)$ . □

*Osservazione 8.* Se  $u \equiv 1$  allora per ogni  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e per ogni  $r > 0$  la formula diventa

$$\left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) = 1$$

Conseguentemente se  $u$  è una funzione definita su un aperto contenente  $\overline{E((x_0, t_0), r)}$  ed è continua, allora  $M_r(u)(x_0, t_0)$  è finito.

## 2.5 Formula di media migliorata

In questa sezione vogliamo dimostrare una formula di media più generale di quella appena vista.

Il limite della formula che compare nel teorema di Pini-Watson consiste nel fatto che il nucleo  $W(x_0 - x, t_0 - t)$  non è limitato sulla palla del calore  $E((x_0, t_0), r)$ .

Pertanto il vantaggio della nuova formula risiederà nella limitatezza del nuovo nucleo  $W_r^m$  (che andremo a definire successivamente) sulla palla del calore  $E_m((x_0, t_0), r)$  (definiremo anch'essa qui di seguito).

Per prima cosa introduciamo alcune notazioni. Per ogni  $m \in \mathbb{N}$  definiamo:

- $\omega_m$  misura della palla unitaria in  $\mathbb{R}^m$ ;
- $\Phi(x_0 - x, t_0 - t) := \left( \frac{1}{4\pi(t_0 - t)} \right)^{\frac{m}{2}} \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) = \left( \frac{1}{4\pi(t_0 - t)} \right)^{\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}}$ ;
- $R_r^2(x_0 - x, t_0 - t) := 4(t_0 - t) \ln \left( (4\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \Phi(x_0 - x, t_0 - t) \right)$ ;
- $E_m((x_0, t_0), r) := \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Phi(x_0 - x, t_0 - t) > \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n+m}{2}} \right\}$ .

**Proposizione 2.5.1.** *Sia  $u \in C_x^2(\mathbb{R}^{n+1}) \cap C_t^1(\mathbb{R}^{n+1})$  soluzione di  $Hu = 0$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

Allora  $\forall m \in \mathbb{N}, \forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\forall r > 0$ , si ha

$$u(x_0, t_0) = \omega_m (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \int_{E_m((x_0, t_0), r)} u(x, t) R_r^m(x_0 - x, t_0 - t) \left( W(x_0 - x, t_0 - t) + \frac{m}{m+2} \frac{R_r^2(x_0 - x, t_0 - t)}{4(t_0 - t)^2} \right) d(x, t).$$

*Dimostrazione.* Definiamo una nuova funzione in  $\mathbb{R}^{n+m+1}$   $u_m(x, y, t) = u(x, t)$  con  $y \in \mathbb{R}^m$  e  $(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Notiamo che  $u_m$  è indipendente dalla variabile  $y$ . Per cui, denotando con  $H_m$  il nuovo operatore  $H_m := H + \Delta_y = \Delta_x + \Delta_y - \partial_t$ , possiamo osservare che  $H_m u_m = Hu$ .

Definiamo inoltre  $\Gamma_m(x, y, t) := \Gamma(x, t) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right)$  la soluzione fondamentale per l'operatore  $H_m$ .

Dimostriamo brevemente che  $H_m \Gamma_m = 0$ .

$$\begin{aligned} H_m \Gamma_m &= (H + \Delta_y) \left( \Gamma(x, t) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) \right) = \\ &= H(\Gamma(x, t)) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) + \Gamma(x, t) H \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) + \\ &+ \Delta_y \left( \Gamma(x, t) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) \right) = \end{aligned}$$

poichè  $H\Gamma = 0$  e  $\Gamma$  è indipendente da  $y$

$$\begin{aligned} &= \Gamma(x, t) H \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) + \Gamma(x, t) \Delta_y \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) = \\ &= \Gamma(x, t) (H + \Delta_y) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) = \Gamma(x, t) (\Delta_y - \partial_t) \left( (4\pi t)^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto, grazie alle ipotesi della proposizione si ha  $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$  e  $Hu = 0$ .

Allora  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  e  $r > 0$  tale che  $\overline{E((x_0, t_0), r)} \subseteq \Omega$ , è verificato il teorema di Pini-Watson cioè

$$u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0) = \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t).$$

Denotiamo con  $z = (x, t)$  i punti di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , con  $\bar{z} = (x, y, t)$  i punti di  $\mathbb{R}^{n+m+1}$  e ricordiamo che  $u_m(\bar{z}) = u(z)$ .

La formula in  $n + m + 1$  dimensioni diventa

$$u_m(\bar{z}_0) = \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{\{\bar{z} \in \mathbb{R}^{n+m+1} \mid \Gamma_m(\bar{z}_0 - \bar{z}) > (\frac{1}{4\pi r})^{\frac{n+m}{2}}\}} u_m(\bar{z}) W(\bar{z}_0 - \bar{z}) d\bar{z}.$$

Per prima cosa notiamo che

$$W(\bar{z}_0 - \bar{z}) = \frac{1}{4} \left( \frac{|x_0 - x|}{t_0 - t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{|y_0 - y|}{t_0 - t} \right)^2 = W(z_0 - z) + \frac{1}{4} \left( \frac{|y_0 - y|}{t_0 - t} \right)^2.$$

Per quanto riguarda invece il dominio di integrazione possiamo ricavare, attraverso la sequenza di equivalenze sottostante, che

$$\begin{aligned} &\{\bar{z} \in \mathbb{R}^{n+m+1} \mid \Gamma_m(\bar{z}_0 - \bar{z}) > (\frac{1}{4\pi r})^{\frac{n+m}{2}}\} = \\ &= \{z \in \mathbb{R}^{n+m+1} \mid z \in E_m((x_0, t_0), r); |y_0 - y| < R_r(z_0 - z)\}. \end{aligned}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\Gamma_m(\bar{z}_0 - \bar{z}) &> \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \iff \\
&\iff \Gamma(\bar{z}_0 - \bar{z}) \left( (4\pi(t_0 - t))^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}} \right) > \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \iff \\
&\iff e^{-\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)}} > (4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}}{\Gamma(\bar{z}_0 - \bar{z})} \iff \\
&\iff -\frac{|y_0 - y|^2}{4(t_0 - t)} > \ln \left( (4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}}{\Gamma(\bar{z}_0 - \bar{z})} \right) \iff \\
&\iff -|y_0 - y|^2 > 4(t_0 - t) \ln \left( (4\pi(t_0 - t))^{\frac{m}{2}} \frac{(4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}}{\Gamma(\bar{z}_0 - \bar{z})} \right) \iff \\
&\iff -|y_0 - y|^2 > 4(t_0 - t) \ln \left( (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \Phi^{-1}(z_0 - z) \right) \iff \\
&\iff |y_0 - y|^2 < 4(t_0 - t) \ln \left( (4\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \Phi(z_0 - z) \right) \iff \\
&\iff |y_0 - y|^2 < R_r^2(z_0 - z) \iff |y_0 - y| < R_r(z_0 - z)
\end{aligned}$$

Notiamo che l'ultimo passaggio vale se  $(4\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \Phi(z_0 - z) > 1$ , di conseguenza  $\Phi(z_0 - z) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$  e quindi  $z \in E_m((x_0, t_0), r)$ .

Grazie a queste due osservazioni e ricordando che  $u_m(\bar{z}) = u(z)$  possiamo riscrivere la formula di media  $(n + m + 1)$ -dimensionale nel modo seguente

$$\begin{aligned}
u(z_0) &= \\
&= \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{E_m(z_0, r)} \int_{|y_0 - y| < R_r(z_0 - z)} u(z) \left( W(z_0 - z) + \frac{1}{4} \left( \frac{|y_0 - y|}{t_0 - t} \right)^2 \right) dy dz = \\
&= \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{E_m(z_0, r)} u(z) W(z_0 - z) \left( \int_{|y_0 - y| < R_r(z_0 - z)} dy \right) dz + \\
&+ \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{E_m(z_0, r)} u(z) \left( \int_{|y_0 - y| < R_r(z_0 - z)} \frac{1}{4} \left( \frac{|y_0 - y|}{t_0 - t} \right)^2 dy \right) dz =
\end{aligned}$$

Effettuando il cambio di variabili  $y' = \frac{y - y_0}{R_r(z_0 - z)}$ ,  $dy = R_r^m(z_0 - z) dy'$  e

ricordando che  $\omega_m$  è la misura della palla unitaria in  $\mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{E_m(z_0, r)} u(z) W(z_0 - z) R_r^m(z_0 - z) \omega_m dz + \\
&+ \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \int_{E_m(z_0, r)} u(z) \frac{1}{4(t_0 - t)^2} R_r^{m+2}(z_0 - z) \frac{m}{m+2} \omega_m dz = \\
&= \left(\frac{1}{4\pi r}\right)^{\frac{n+m}{2}} \omega_m \int_{E_m(z_0, r)} u(z) R_r^m(z_0 - z) \left( W(z_0 - z) + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{R_r^2}{4(t_0 - t)^2} \right) dz
\end{aligned}$$

□

*Osservazione 9.* Il teorema di Pini-Watson visto nel capitolo precedente è un caso particolare della proposizione vista. Infatti ci si può ricondurre ad esso ponendo  $m = 0$ , di conseguenza si ha  $\omega_m = 1$  e

$$u(x_0, t_0) = (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t).$$

**Definizione 2.8** (Nucleo). Sia  $m \in \mathbb{N}$ , definiamo il nuovo nucleo

$$\begin{aligned}
W_r^m(x_0 - x, t_0 - t) &= \\
&= (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \omega_m R_r^m(x_0 - x, t_0 - t) \left( W(x_0 - x, t_0 - t) + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{R_r^2}{4(t_0 - t)^2} \right).
\end{aligned}$$

**Proposizione 2.5.2.** Sia  $u \in C_x^2(\mathbb{R}^{n+1}) \cap C_t^1(\mathbb{R}^{n+1})$  soluzione di  $Hu = 0$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Allora  $\forall m \in \mathbb{N}$ ,  $\forall (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $\forall r > 0$ , si ha

$$u(x_0, t_0) = \int_{E_m((x_0, t_0), r)} u(x, t) W_r^m(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t).$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla proposizione precedente e dalla definizione del nucleo  $W_r^m(x_0 - x, t_0 - t)$ .

□

Se  $m$  è sufficientemente grande, questa nuova formula di media ha il vantaggio, rispetto a quella proposta nel teorema di Pini-Watson, di avere un nucleo  $W_r^m(x_0 - x, t_0 - t)$  limitato sulla palla  $E_m((x_0, t_0), r)$ .



## 2.6 Proprietà di media calorica

In questa sezione definiremo per prima cosa la proprietà di media calorica e successivamente dimostreremo che questa caratterizza le funzioni caloriche.

Prima di enunciare il teorema che prova la correlazione tra funzioni caloriche e proprietà di media verranno riportati due lemmi e un teorema che saranno fondamentali per la sua dimostrazione.

**Definizione 2.9** (Proprietà di media calorica). Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto. Diciamo che  $u$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega$  se  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  e  $\forall r > 0$  tali che  $\overline{E((x_0, t_0), r)} \subseteq \Omega$  si ha  $u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0)$ .

**Definizione 2.10** (Mollificatore). Definiamo mollificatore una funzione  $J : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le seguenti condizioni:

- $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ;
- $\text{supp} J \subset B(0, 1)$ ;
- $J \geq 0$ ;
- $\int_{\mathbb{R}^{n+1}} J(x) dx = 1$ .

Inoltre per ogni  $\varepsilon > 0$  possiamo definire la funzione  $J_\varepsilon : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J_\varepsilon(x, t) := \varepsilon^{n-1} J\left(\frac{(x, t)}{\varepsilon}\right)$ .

**Lemma 2.6.1.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto e sia  $u \in C(\Omega)$ . Se  $u$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega$  allora  $u_\varepsilon := u * J_\varepsilon$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $u$  soddisfa la proprietà di media calorica quindi  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  e  $\forall r > 0$  tali che  $\overline{E((x_0, t_0), r)} \subseteq \Omega$  si verifica

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) = \\ &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), 0)} u(x_0 - x, t_0 - t) W(x, t) d(x, t). \end{aligned}$$

Se  $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$  e  $r > 0$  sono tali che  $\overline{\Omega_r(x_0, t_0)} \subseteq \Omega_\varepsilon$  si ha

$$\begin{aligned} M_r(u_\varepsilon)(x_0, t_0) &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), 0)} u_\varepsilon(x_0 - x, t_0 - t) W(x, t) d(x, t) = \\ &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), 0)} \left( \int_{B(0, \varepsilon)} u(x_0 - x - \xi, t_0 - t - \tau) J_\varepsilon(\xi, \tau) d(\xi, \tau) \right) W(x, t) d(x, t) = \\ &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \int_{B(0, \varepsilon)} J_\varepsilon(\xi, \tau) \left( \int_{E((x_0, t_0), 0)} u(x_0 - x - \xi, t_0 - t - \tau) W(x, t) d(x, t) \right) d(\xi, \tau) = \\ &= (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{(4\pi r)^{-\frac{n}{2}}} \int_{B(0, \varepsilon)} J_\varepsilon(\xi, \tau) u(x_0 - \xi, t_0 - \tau) d(\xi, \tau) = u_\varepsilon(x_0, t_0). \end{aligned}$$

In conclusione per ogni  $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$  e  $r > 0$  tali che  $\overline{\Omega_r(x_0, t_0)} \subseteq \Omega_\varepsilon$  vale  $u_\varepsilon(x_0, t_0) = M_r(u_\varepsilon)(x_0, t_0)$ , ovvero  $u_\varepsilon$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega_\varepsilon$ . □

**Lemma 2.6.2.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto e sia  $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ .*

*Se  $u$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega$  allora  $Hu = 0$  in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Per assurdo supponiamo che esista  $(x_0, t_0) \in \Omega$  per cui  $Hu \neq 0$ , scegliamo  $Hu(x_0, t_0) > 0$  (assumendo  $Hu(x_0, t_0) < 0$  il ragionamento sarà analogo).

Siccome  $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$  esiste  $r > 0$  tale che  $E((x_0, t_0), r) \subset \Omega$  e  $Hu(x_0, t_0) > 0 \forall (x, y) \in E((x_0, t_0), r)$ .

Inoltre  $u$  soddisfa la formula di Poisson-Jensen

$$u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0) - N_r(Hu)(x_0, t_0)$$

dove

$$\begin{aligned} N_r(Hu)(x_0, t_0) &= \\ &= \frac{n}{4r^{\frac{n}{2}}} \int_0^r \rho^{\frac{n}{2}-1} \left( \int_{\partial E((x_0, t_0), \rho)} \left( \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \right) Hu(x, t) d(x, t) \right) d\rho. \end{aligned}$$

Notiamo che  $\Gamma(x_0 - x, t_0 - t) - \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{n}{2}} > 0$  se  $(x, y) \in E((x_0, t_0), \rho)$ , per definizione di palla del calore.

Da questo e da  $Hu(x_0, t_0) > 0$  possiamo dedurre che  $N_r(Hu)(x_0, t_0) > 0$ . Ne

segue che  $u(x_0, t_0) < M_r(u)(x_0, t_0)$ , siamo arrivati quindi ad un assurdo.  $\square$

Del teorema seguente non daremo dimostrazione.

**Teorema 2.6.3.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto e sia  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  una successione di funzioni caloriche in  $\Omega$ .*

*Se esiste  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tale che  $u_j \rightrightarrows u \forall K \subset \Omega$  con  $K$  compatto.*

*Allora  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $Hu = 0$  in  $\Omega$ .*

In ultimo definiamo  $R(x_0, t_0) := \sup\{r > 0 : E((x_0, t_0), r) \in \Omega\}$ .

Grazie a queste informazioni preliminari, possiamo ora enunciare e dimostrare il seguente teorema.

**Teorema 2.6.4.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  aperto. Sono equivalenti:*

1.  $u \in C(\Omega)$  e soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega$ ;
2.  $u \in C(\Omega)$  e  $\forall (x_0, t_0) \in \Omega$  la funzione  $r \rightarrow M_r(u)(x_0, t_0)$  è costante in  $]0, R(x_0, t_0)[$ ;
3.  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $Hu = 0$  in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* 1.  $\Rightarrow$  2.

Fissato  $(x_0, t_0) \in \Omega$  si ha che  $u(x_0, t_0) = M_r(u)(x_0, t_0) \forall r \in ]0, R(x_0, t_0)[$ .

Quindi, banalmente, l'applicazione  $r \rightarrow M_r(u)(x_0, t_0)$  è costante in  $]0, R(x_0, t_0)[$ .

2.  $\Rightarrow$  1.

Sia  $(x_0, t_0) \in \Omega$  arbitrario, grazie alla continuità di  $u$ , se  $r \in ]0, R(x_0, t_0)[$  si ha

$$\begin{aligned}
 |u(x_0, t_0) - M_r(u)(x_0, t_0)| &= \left| u(x_0, t_0) \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) + \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x_0, t_0), r)} u(x, t) W(x_0 - x, t_0 - t) d(x, t) \right| \leq \\
 &\leq \left( \frac{1}{4\pi r} \right)^{\frac{n}{2}} \sup_{E((x_0, t_0), r)} |u(x_0, t_0) - u(x, t)| \int_{E((x_0, t_0), r)} W((x_0 - x, t_0 - t)) d(x, t) \leq \\
 &\leq c \sup_{E((x_0, t_0), r)} |u(x_0, t_0) - u(x, t)| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.
 \end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che  $M_r(u)(x_0, t_0) \xrightarrow{r \rightarrow 0} u(x_0, t_0)$ , inoltre sappiamo che  $r \rightarrow M_r(u)(x_0, t_0)$  è costante in  $]0, R(x_0, t_0)[$ .

Da ciò possiamo concludere che  $M_r(u)(x_0, t_0) = u(x_0, t_0) \forall r \in ]0, R(x_0, t_0)[$ .

3.  $\Rightarrow$  1.

È conseguenza diretta del teorema di Pini-Watson.

1.  $\Rightarrow$  3.

Come conseguenza del Lemma 2.6.1, dato che  $u$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega$ , allora  $u_\varepsilon = u * J_\varepsilon$  soddisfa la proprietà di media calorica in  $\Omega_\varepsilon$ .

Siccome  $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$  possiamo applicare il lemma 2.6.2 deducendo che  $Hu_\varepsilon = 0$  in  $\Omega_\varepsilon$ .

Inoltre,  $u_\varepsilon \rightrightarrows u \forall K \subset \Omega$  con  $K$  compatto, ci troviamo ora nelle ipotesi del Teorema 2.6.3.

Possiamo quindi concludere che  $u \in C^\infty(\Omega)$  e  $Hu = 0$  in  $\Omega$ .

□

## Capitolo 3

# Principio di massimo e unicità della soluzione

In questo capitolo enunceremo e dimostreremo il principio di massimo debole. Esso afferma che, su domini limitati, ogni soluzione dell'equazione del calore presenta massimo e minimo sulla frontiera parabolica.

Da questo importante principio deriveremo poi l'unicità della soluzione e successivamente vedremo un risultato simile per funzioni definite su domini non limitati.

Infine proveremo un risultato più preciso, il principio di massimo forte, applicabile ai casi in cui massimo e minimo vengono assunti anche nell'interno del dominio, oltre che sulla frontiera parabolica.

### 3.1 Principio di massimo debole

Vediamo ora il principio di massimo debole su domini limitati, il quale afferma che massimo e minimo dell'equazione omogenea del calore vengono assunti sulla frontiera parabolica  $\partial_p Q_T$ .

Questo risultato è conseguenza del fatto che il calore fluisce sempre verso regioni dove la temperatura è più bassa. Inoltre, siccome il futuro è influenzato dal passato ma non viceversa, il valore di una soluzione al tempo  $t$  è

indipendente da ogni cambiamento nei dati dopo  $t$ .

Quanto affermato da questo principio non esclude la possibilità che massimo e minimo possano essere assunti anche in un punto di  $\overline{Q_T} \setminus \partial_p Q_T$  ed è per questo che viene utilizzato l'aggettivo debole.

Prima di iniziare ricordiamo le definizioni di cilindro parabolico

$$Q_T := \Omega \times (0, T)$$

e del suo bordo parabolico

$$\partial_p Q_T := (\overline{\Omega} \times \{t = 0\}) \cup (\partial\Omega \times (0, T]).$$

**Teorema 3.1.1** (Principio del massimo debole). *Sia  $u \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che*

$$\Delta u - \partial_t u \geq 0 \quad (\text{risp. } \leq 0) \quad \text{in } Q_T$$

*allora il massimo (risp. minimo) di  $u$  è assunto sulla frontiera parabolica  $\partial_p Q_T$  di  $Q_T$ :*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u \quad \left( \text{risp. } \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\partial_p Q_T} u \right).$$

*Osservazione 10.* Se  $u$  è negativa (risp. positiva) su  $\partial_p Q_T$  allora è negativa (risp. positiva) in tutto  $\overline{Q_T}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo il teorema per  $\Delta u - \partial_t u \geq 0$ , la dimostrazione per  $\Delta u - \partial_t u \leq 0$  è analoga.

Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $T - \varepsilon > 0$ , poniamo  $v = u - \varepsilon t$  allora

$$\Delta v - \partial_t v = \Delta u + \Delta(-\varepsilon t) - \partial_t u - \partial_t(-\varepsilon t) = \Delta u - \partial_t u + \varepsilon \geq 0.$$

Possiamo affermare che il massimo di  $v$  in  $\overline{Q_{T-\varepsilon}}$  è assunto in un punto di  $\partial_p Q_{T-\varepsilon}$ .

Se, per assurdo, questo non fosse vero esisterebbe un punto  $(x_0, t_0)$  con  $x_0 \in \Omega$  e  $0 < t_0 \leq T - \varepsilon$  tale che  $v(x_0, t_0)$  è punto di massimo in  $\overline{Q_{T-\varepsilon}}$ .

Allora  $\forall j = 1, \dots, n$  si ha  $v_{x_j x_j}(x_0, t_0) \leq 0$  quindi  $\Delta v(x_0, t_0) \leq 0$ . Inoltre

$v_t(x_0, t_0) = 0$  se  $t_0 < T - \varepsilon$  e  $v_t(x_0, t_0) \geq 0$  se  $t_0 = T - \varepsilon$ .

In entrambi i casi si verifica quindi

$$\Delta v(x_0, t_0) - \partial_t v(x_0, t_0) \leq 0$$

il che genera un assurdo.

Abbiamo quindi che

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} v = \max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} v$$

e siccome  $v \leq u$

$$\max_{\partial_p Q_{T-\varepsilon}} v \leq \max_{\partial_p Q_T} u.$$

D'altra parte  $u \leq v + \varepsilon T$  quindi

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u \leq \max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} v + \varepsilon T \leq \max_{\partial_p Q_T} u + \varepsilon T.$$

Poichè  $u \in C(\overline{Q_T})$  si verifica che

$$\max_{\overline{Q_{T-\varepsilon}}} u \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\overline{Q_T}} u.$$

e per  $\varepsilon \rightarrow 0$  possiamo concludere che

$$\max_{\overline{Q_T}} u \leq \max_{\partial_p Q_T} u.$$

□

**Corollario 3.1.2.** *Sia  $u \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che*

$$\Delta u - \partial_t u = 0 \quad \text{in } Q_T$$

*allora massimo e minimo di  $u$  sono assunti su  $\partial_p Q_T$ :*

$$\max_{\overline{Q_T}} u = \max_{\partial_p Q_T} u, \quad \min_{\overline{Q_T}} u = \min_{\partial_p Q_T} u.$$

*Di conseguenza*

$$\min_{\partial_p Q_T} u \leq u(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} u \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

*Dimostrazione.* Questo risultato deriva banalmente dal Teorema 3.1.1.  $\square$

Un'importante conseguenza del principio di massimo debole è l'unicità per problemi a valori iniziali su domini limitati.

**Teorema 3.1.3** (Unicità su domini limitati). *Siano  $f \in C(Q_T)$  e  $g \in C(\partial_p Q_T)$ . Se esiste  $u \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  soluzione del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } Q_T \\ u = g & \text{in } \partial_p Q_T \end{cases}$$

*allora questa è l'unica soluzione.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che esistano due soluzioni del problema,  $u_1$  e  $u_2$ .

La funzione  $w := u_1 - u_2$ ,  $w \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , è soluzione di

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } Q_T \\ w = 0 & \text{in } \partial_p Q_T. \end{cases}$$

Per il principio di massimo debole si ha che massimo e minimo di  $w$  sono assunti sulla frontiera parabolica, quindi

$$0 = \min_{\partial_p Q_T} w \leq w(x, t) \leq \max_{\partial_p Q_T} w = 0 \quad \forall (x, t) \in \overline{Q_T}.$$

Per cui  $w \equiv 0$  e di conseguenza  $u_1 \equiv u_2$ .

$\square$

## 3.2 Principio di massimo per il problema di Cauchy

Quanto dimostrato nella sezione precedente vale per domini limitati, possiamo però estendere questo risultato a problemi di Cauchy definiti sull'insieme  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .



Vediamo per prima cosa un risultato analogo al principio del massimo debole per problemi di questo tipo.

**Teorema 3.2.1** (Principio di massimo per il problema di Cauchy). *Siano  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  e  $u \in C_x^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C_t^1(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  soluzione di*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

*Se esistono  $A, a > 0$  costanti tali che  $u$*

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$$

*allora*

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} u = \sup_{\mathbb{R}^n} g.$$

*Dimostrazione.* Analizziamo innanzitutto il caso specifico in cui si verifica

$$4aT < 1.$$

Esisterà  $\varepsilon > 0$  per cui  $4a(T + \varepsilon) < 1$ .

Fissati  $y \in \mathbb{R}^n$  e  $\mu > 0$  definiamo la funzione

$$v(x, t) := u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \quad x \in \mathbb{R}^n, t > 0.$$

Notiamo che  $T + \varepsilon - t > 0$  e ricordiamo che la soluzione fondamentale verifica  $\Gamma_t - \Delta \Gamma = 0$ , si ha perciò

$$v_t - \Delta v = 0 \quad \text{in } x \in \mathbb{R}^n \times (0, T].$$

Fissato  $r > 0$ , chiamiamo  $B(y, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ . Sul cilindro parabolico  $Q_T = B(y, r) \times (0, T]$  la funzione  $v$  verifica le ipotesi del Teorema 3.1.1 quindi

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\partial_p Q_T} v.$$

Il massimo è assunto sul bordo parabolico

$$\partial_p Q_T = B(y, r) \times \{t = 0\} \cup \partial B(y, r) \times [0, T]$$

quindi

$$\max_{\overline{Q_T}} v = \max_{B(y,r) \times \{t=0\}} v \quad \text{oppure} \quad \max_{\overline{Q_T}} v = \max_{\partial B(y,r) \times [0,T]} v.$$

Analizziamo separatamente le due possibilità e mostriamo che in entrambi i casi vale

$$\max_{\overline{Q_T}} v \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g$$

se  $r$  è sufficientemente grande.

Se  $x \in B(y, r)$  e  $t = 0$  si ha

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{|x-y|^2}{4(T+\varepsilon)}} \leq u(x, 0) = g(x).$$

Mentre per  $x \in \partial B(y, r)$  e  $0 \leq t \leq T$ , ponendo  $\gamma := \frac{1}{4(T+\varepsilon)} - a > 0$ , si ottiene che per  $r$  sufficientemente grande

$$\begin{aligned} v(x, t) &= u(x, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq Ae^{a|x|^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon-t)}} \leq \\ &\leq Ae^{a(|y|+r)^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{\frac{n}{2}}} e^{\frac{r^2}{4(T+\varepsilon)}} = Ae^{a(|y|+r)^2} - \mu(4(a + \gamma))^{\frac{n}{2}} e^{(a+\gamma)r^2} \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g. \end{aligned}$$

Da ciò possiamo dedurre che

$$v(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T$$

e di conseguenza, per  $\mu \rightarrow 0$ ,

$$u(x, t) \leq \sup_{\mathbb{R}^n} g \quad \text{per ogni } y \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$$

Nel caso generale, quando  $4aT \geq 1$ , si procede definendo  $T_1 = \frac{1}{8a}$  e applicando il ragionamento precedente per ogni intervallo  $[0, T_1], [T_1, 2T_1], \dots, [mT_1, T]$ .

□

*Osservazione 11.* Vale lo stesso risultato sostituendo *inf* a *sup*.

In generale su regioni non limitate la soluzione non è unica, d'altro canto non tutte le soluzioni sono 'fisicamente corrette'.

Il problema che potrebbe sorgere per questo tipo di problemi è che la soluzione cresca molto rapidamente per  $|x| \rightarrow \infty$ , è utile quindi inserire una condizione

di controllo per valori di  $|x|$  grandi.

La condizione  $|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}$  assicura l'unicità della soluzione garantendo l'esclusione di soluzioni 'fisicamente scorrette'.

**Teorema 3.2.2** (Unicità per il problema di Cauchy). *Siano  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  e  $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ . Fissate  $A, a > 0$  costanti, esiste al più una soluzione  $u \in C_x^2(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C_t^1(\mathbb{R}^n \times (0, T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  del problema*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

che soddisfa

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$$

*Dimostrazione.* Siano  $u_1$  e  $u_2$  due soluzioni del problema per le quali si verifica

$$|u_1(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2}, \quad |u_2(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{per } x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T.$$

La funzione  $w := u_1 - u_2$ ,  $w \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$ , è soluzione di

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ w = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Notiamo che

$$|w(x, t)| = |(u_1 - u_2)(x, t)| \leq |u_1(x, t)| + |u_2(x, t)| \leq 2Ae^{a|x|^2}.$$

Possiamo ora applicare il principio di massimo per i problemi di Cauchy ottenendo

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} w = 0 \quad e \quad \inf_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} w = 0$$

da cui possiamo dedurre che  $w \equiv 0$  e di conseguenza  $u_1 \equiv u_2$ .

□

### 3.3 Principio di massimo forte

Abbiamo visto, grazie al principio di massimo debole, che i punti di massimo e minimo per le funzioni che soddisfano l'equazione del calore sono sempre assunti sul bordo parabolico. Questo però non esclude la possibilità che siano assunti anche in altri punti.

Vediamo ora un risultato più preciso, il principio di massimo forte, basato sul fatto che su domini connessi il massimo interno delle funzioni caloriche si propaga lungo una H-traiettoria.

**Definizione 3.1** (H-traiettoria). Definiamo H-traiettoria di classe  $C^1$  una mappa di classe  $C^1$

$$\begin{aligned} \gamma : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ s &\longmapsto \gamma(s) = (x(s), t(s)) \end{aligned}$$

con  $-\infty < a < b < +\infty$  tale che

$$t'(s) < 0 \quad \forall s \in [a, b].$$

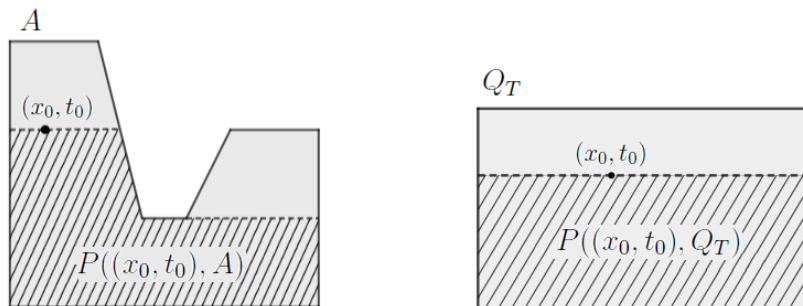


Figura 3.1: Esempi di insiemi di propagazione

**Definizione 3.2** (Insieme di propagazione). Sia  $A$  aperto di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $(x_0, t_0) \in A$  chiamiamo insieme di propagazione di  $(x_0, t_0)$  in  $A$  l'insieme

$$\begin{aligned} P((x_0, t_0), A) &:= \\ &= \{(x, t) \in A \mid \exists \gamma : [a, b] \rightarrow A \text{ H-traiettoria t.c. } \gamma(a) = (x_0, t_0), \gamma(b) = (x, t)\}. \end{aligned}$$

*Osservazione 12.*  $P((x_0, t_0), A)$  è un sottoinsieme aperto di  $A$ .

Per dimostrare il principio del massimo forte ci serviremo del seguente lemma.

**Lemma 3.3.1.** *Sia  $B \subseteq A$  e  $(x_0, t_0) \in B$ . Se  $\forall (x, t) \in B$  e  $r > 0$  tale che  $E((x, t), r) \subseteq A$  si verifica che  $E((x_0, t_0), r) \subseteq B$ , allora*

$$P((x_0, t_0), A) \subseteq B.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo  $(x, t) \in P((x_0, t_0), A)$  arbitrario, vorremmo mostrare che  $(x, t) \in B$ .

Per definizione di insieme di propagazione esisterà una H-traiettoria  $\gamma$  tale che  $\gamma(a) = (x_0, t_0)$  e  $\gamma(b) = (x, t)$ .

Il lemma è dimostrato se proviamo che  $(x, t) = \gamma(b) \in B$ .

Osserviamo innanzitutto che, per ragioni di compattezza,  $\forall s \in [a, b]$  esiste  $r > 0$  tale che  $E(\gamma(s), r) \subseteq A$ .

Prima di dimostrare il lemma proviamo che fissato  $s \in [a, b]$  esiste  $\delta > 0$  tale che

$$\gamma(\sigma) \in E(\gamma(s), r) \quad \forall \sigma \leq b \text{ t.c. } a \leq s < \sigma \leq s + \delta .$$

Notiamo che, per definizione di palla di calore, provare ciò equivale a mostrare che

$$\Gamma(\gamma(s) - \gamma(\sigma)) > (4\pi r)^{-\frac{n}{2}} \quad \forall \sigma \leq b \text{ t.c. } a \leq s < \sigma \leq s + \delta .$$

Indichiamo  $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ , essendo  $\gamma$  una H-traiettoria è  $C^1$  e  $s \rightarrow t(s)$  è strettamente decrescente. Per queste ragioni per ogni sottoinsieme finito di  $[a, b]$  esistono due costanti  $M, m > 0$  per cui si verificano

$$|x'(s)| \leq M \quad e \quad t'(s) \leq -m.$$

Di conseguenza

$$\frac{|x(s) - x(\sigma)|^2}{t(s) - t(\sigma)} \leq \frac{M^2}{m}(b - a) \quad \text{per } a \leq s < \sigma \leq b.$$

Scegliendo  $\varepsilon > 0$  abbastanza piccolo da verificare

$$(4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{M^2}{4m}(b-a)} > (4\pi r)^{-\frac{n}{2}}$$

esisterà  $\delta > 0$  tale che

$$t(s) - t(\sigma) < \varepsilon \text{ per } a \leq s < \sigma \leq s + \delta \text{ e } \sigma \leq b.$$

Con la scelta di un  $\delta$  di questo tipo si ha

$$\Gamma(\gamma(s) - \gamma(\sigma)) = (4\pi(t(s) - t(\sigma)))^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|x(s) - x(\sigma)|^2}{4(t(s) - t(\sigma))}} > (4\pi\varepsilon)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{M^2}{4m}(b-a)} > (4\pi r)^{-\frac{n}{2}}.$$

Abbiamo perciò provato l'affermazione precedente.

Grazie alle osservazioni fatte possiamo ora dimostrare il lemma.

Definiamo l'insieme  $\Sigma = \{s \in [a, b] \mid \gamma(s) \in B\}$ .

Dalle ipotesi del lemma si ha che  $(x_0, t_0) = \gamma(a) \in B$ , quindi  $a \in \Sigma$ .

Inoltre osserviamo che se  $s \in \Sigma$  e quindi  $\gamma(s) \in B$  allora, siccome esiste  $r > 0$  tale che  $E(\gamma(s), r) \subseteq A$ , si avrà per ipotesi che  $E(\gamma(s), r) \subseteq B$ .

Per quanto provato per ogni  $\sigma \in [s, s + \delta] \cap [a, b]$  vale che

$\gamma(\sigma) \in E(\gamma(s), r) \subseteq B$ , quindi  $\gamma(\sigma) \in B$  e di conseguenza  $\sigma \in \Sigma$ .

Abbiamo perciò che se  $s \in \Sigma$  allora  $[s, s + \delta] \cap [a, b] \subseteq \Sigma$ , da cui  $[a, b] = \Sigma$ .

In particolare  $b \in \Sigma$ , possiamo quindi concludere che  $\gamma(b) \in B$ .

□

**Teorema 3.3.2** (Principio di massimo forte). *Sia  $Q_T = \Omega \times (0, T)$  un cilindro parabolico e  $u \in C_x^2(Q_T) \cap C_t^1(Q_T) \cap C(\overline{Q_T})$  tale che  $Hu = 0$ . Se esiste  $(x_0, t_0)$  tale che*

$$u(x_0, t_0) = \max_{Q_T} u$$

*allora  $u$  è costante sull'insieme di propagazione di  $(x_0, t_0)$  in  $Q_T$ , cioè*

$$u \equiv u(x_0, t_0) \text{ in } P((x_0, t_0), Q_T).$$

*Dimostrazione.* Definiamo l'insieme

$$B := \{(x, t) \in Q_T \mid u(x, t) = \max_{Q_T} u\}.$$

Si noti che  $(x_0, t_0) \in B$  per ipotesi.

Consideriamo  $(x, t) \in B$  e  $r > 0$  tale che  $E((x, t), r) \subseteq Q_T$ , di conseguenza  $\forall \rho \in ]0, r[$  si ha  $\overline{E((x, t), \rho)} \subseteq Q_T$ .

Applicando la formula di media per funzioni caloriche otteniamo

$$u(x, t) = \left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x, t), \rho)} u(y, \tau) W(x - y, t - \tau) d(y, \tau).$$

Tenendo presente che

$$\left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x, t), \rho)} W(x - y, t - \tau) d(y, \tau) = 1$$

si ha

$$\left( \frac{1}{4\pi\rho} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{E((x, t), \rho)} \left( u(y, \tau) - u(x, t) \right) W(x - y, t - \tau) d(y, \tau) = 0.$$

Siccome  $(x, t) \in B$  allora  $u(y, \tau) - u(x, t) \leq 0$  in  $E((x, t), \rho)$ .

Inoltre  $W(x - y, t - \tau) > 0$  in  $E((x, t), \rho)$ .

Per cui, grazie alla continuità di  $u$ , si deduce che  $u(y, \tau) - u(x, t) = 0$ , quindi

$$u(y, \tau) = u(x, t) = \max_{Q_T} u \quad \forall (y, \tau) \in E((x, t), \rho).$$

Di conseguenza  $E((x, t), \rho) \subseteq B$  per ogni  $\rho \in ]0, r[$  e quindi  $E((x, t), r) \subseteq B$ .

Ci troviamo ora nelle ipotesi del Lemma 3.3.1 per cui  $P((x_0, t_0), Q_T) \subseteq B$  cioè

$$u(x, t) = \max_{Q_T} u \quad \forall (x, t) \in P((x_0, t_0), Q_T).$$

□





# Capitolo 4

## Disuguaglianza di Harnack e Teorema di Liouville

In questo capitolo, servendoci delle formule di media viste nel capitolo 2, enunceremo e dimostreremo la disuguaglianza di Harnack.

Successivamente, grazie a quest'ultima, proveremo il Teorema di Liouville per le funzioni caloricche, il quale afferma che ogni funzione calorica e limitata in  $\mathbb{R}^{n+1}$  è costante.

### 4.1 Disuguaglianza di Harnack

Ci occupiamo in questa sezione di dimostrare la disuguaglianza di Harnack, essa mette in relazione i valori di una funzione calorica in punti diversi. Prima di enunciare questa disuguaglianza è necessario fare alcune osservazioni che saranno utili per la sua dimostrazione.

Fissiamo  $m \in \mathbb{N}$  e indichiamo con  $G$  una Gaussiana generalizzata. Scelto  $\theta > 1$  esiste  $r_0 = r_0(\theta) > 0$  tale che

$$\theta^{-1}G(x_0 - x, t_0 - t) \leq \Gamma(x_0 - x, t_0 - t) \leq \theta G(x_0 - x, t_0 - t) \quad (4.1)$$

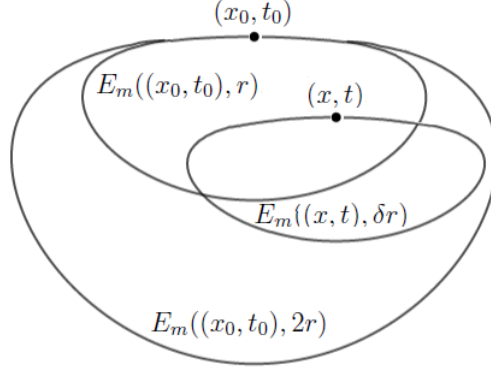
per ogni  $r \leq r_0$ ,  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$ .

Grazie a ciò possiamo osservare che, fissato  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $r \leq \frac{r_0}{2}$ , per ogni

$\varepsilon > 0$  esiste  $\delta = \delta(m, \varepsilon) > 0$  tale che

$$E_m((x, t), \delta r) \subset E_m((x_0, t_0), 2r)$$

per ogni  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$  che verifica  $t_0 - t \geq \varepsilon r$ .



**Teorema 4.1.1** (Disuguaglianza di Harnack). *Siano  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$  aperto,  $u \geq 0$  una funzione calorica in  $\Omega$ . Siano inoltre  $m > 2$  naturale e  $\varepsilon > 0$ .*

*Fissati  $(x_0, t_0) \in \Omega$  e  $r \leq \frac{r_0}{4}$  tali che  $E_m((x_0, t_0), 4r) \subset \Omega$ , allora per ogni  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$  che verifichi  $t_0 - t \geq \varepsilon r$  esiste una costante  $C = C(m, \varepsilon) > 0$  tale che*

$$u(x, t) \leq Cu(x_0, t_0).$$

*Dimostrazione.* Per il teorema 2.5.2 si ha

$$u(x_0, t_0) = \int_{E_m((x_0, t_0), 3r)} u(\bar{x}, \bar{t}) W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) d(\bar{x}, \bar{t}).$$

Per ipotesi  $u \geq 0$ , inoltre per quanto osservato precedentemente esiste  $\delta > 0$  tale che  $E_m((x, t), \delta r) \subset E_m((x_0, t_0), 2r)$  e di conseguenza

$$\begin{aligned} u(x_0, t_0) &= \int_{E_m((x_0, t_0), 3r)} u(\bar{x}, \bar{t}) W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) d(\bar{x}, \bar{t}) \geq \\ &\geq \int_{E_m((x, t), \delta r)} u(\bar{x}, \bar{t}) W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) d(\bar{x}, \bar{t}) = \\ &= \int_{E_m((x, t), \delta r)} u(\bar{x}, \bar{t}) \frac{W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t})}{W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t})} W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) d(\bar{x}, \bar{t}). \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente dimostrare l'esistenza di due costanti

$C_1 = C_1(m, \varepsilon) > 0$  e  $C_2 = C_2(m, \varepsilon) > 0$  tali che

$$\inf_{(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)} W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \geq C_1 r^{-(\frac{n}{2}+1)}$$

$$\sup_{(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)} W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) \leq C_2 r^{-(\frac{n}{2}+1)}.$$

Infatti, una volta provato ciò, si ha che

$$u(x_0, t_0) \geq \frac{C_1}{C_2} \int_{E_m((x, t), \delta r)} u(\bar{x}, \bar{t}) W_{\delta r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) d(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{C_1}{C_2} u(x, t)$$

e ponendo  $C := \frac{C_2}{C_1}$  si ottiene

$$u(x, t) \leq Cu(x_0, t_0).$$

Rimane quindi da provare l'esistenza di queste due costanti.

Per definizione di nucleo si ha

$$\begin{aligned} W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) &= \\ &\geq (12\pi r)^{-\frac{n+m}{2}} \omega_m R_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \left( W(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) + \frac{m}{m+2} \frac{R_{3r}^2}{4(t_0 - \bar{t})^2} \right) \geq \\ &\geq C_m r^{-\frac{n+m}{2}} R_{3r}^{m+2}(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \frac{1}{(t_0 - \bar{t})^2} \end{aligned}$$

per una certa costante  $C_m > 0$ .

Sull'insieme  $E_m((x_0, t_0), 2r)$ , quindi anche su  $E_m((x, t), \delta r)$ , si verifica

$$\Phi(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) > \left( \frac{1}{8\pi r} \right)^{\frac{n+m}{2}}$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} R_{3r}^2(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) &= 4(t_0 - \bar{t}) \ln \left( (12\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \Phi(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \right) > \\ &> 4(t_0 - \bar{t}) \ln \left( \left( \frac{12\pi r}{8\pi r} \right)^{\frac{n+m}{2}} \right) = 4(t_0 - \bar{t}) \ln \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{n+m}{2}} \right). \end{aligned}$$

Elevando alla  $\frac{m+2}{2}$  si ottiene

$$R_{3r}^{m+2}(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \geq C'_m (t_0 - \bar{t})^{\frac{m}{2}+1}$$

e di conseguenza

$$W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \geq C_m'' r^{-\frac{n+m}{2}} (t_0 - \bar{t})^{\frac{m}{2}-1}$$

con  $C_m'$  e  $C_m''$  costanti opportunamente scelte.

Siccome  $(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)$  si ha  $t - \bar{t} > 0$ , inoltre per ipotesi  $t_0 - t \geq \varepsilon r$ , quindi

$$t_0 - \bar{t} > t_0 - t \geq \varepsilon r$$

da cui, scegliendo opportunamente  $C_1$ , otteniamo

$$W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \geq C_m'' r^{-\frac{n+m}{2}} (\varepsilon r)^{\frac{m}{2}-1} = C_1 r^{-\frac{n}{2}-1}.$$

Abbiamo provato quindi che esiste una costante  $C_1 = C_1(m, \varepsilon)$  tale che

$$\inf_{(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)} W_{3r}^m(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \geq C_1 r^{-(\frac{n}{2}+1)}.$$

Dimostriamo ora l'esistenza di una costante  $C_2$  che verifichi la seconda disuguaglianza.

Per definizione di nucleo si ha

$$W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) = (4\pi\delta r)^{-\frac{n+m}{2}} \omega_m R_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) \left( W(x - \bar{x}, t - \bar{t}) + \frac{m}{m+2} \cdot \frac{R_{\delta r}^2}{4(t - \bar{t})^2} \right).$$

Osserviamo che  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), r)$  con  $r < r_0$  esiste una costante  $C$  tale che

$$W(x - \bar{x}, t - \bar{t}) = \frac{1}{4} \left( \frac{|x - \bar{x}|}{t - \bar{t}} \right)^2 \leq C \left( \frac{|x - \bar{x}|^2}{(t - \bar{t})^2} + 1 \right).$$

Inoltre, grazie all'equazione (4.1), per un'opportuna costante  $C$ , si ha

$$R_r^2(x - \bar{x}, t - \bar{t}) = 4(t - \bar{t}) \ln \left( (4\pi r)^{\frac{n+m}{2}} \Phi(x - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) \right) \leq C(t - \bar{t}) \ln \left( \frac{Cr}{t - \bar{t}} \right)$$

uniformemente  $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e  $(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), r)$  con  $r < r_0$ .

Analogamente se  $(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)$  si ha

$$R_r^2(x - \bar{x}, t - \bar{t}) \leq C(t - \bar{t}) \ln \left( \frac{Cr\delta}{t - \bar{t}} \right).$$

Unendo questi risultati si ottiene

$$\begin{aligned}
W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) &= (4\pi\delta r)^{-\frac{n+m}{2}} \omega_m R_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) W(x - \bar{x}, t - \bar{t}) + \\
&+ (4\pi\delta r)^{-\frac{n+m}{2}} \omega_m R_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) \frac{m}{m+2} \cdot \frac{R_{\delta r}^2}{4(t - \bar{t})^2} \leq \\
&\leq Cr^{-\frac{n+m}{2}} (t - \bar{t})^{\frac{m}{2}} \left( \ln \left( \frac{Cr\delta}{t - \bar{t}} \right) \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{|x - \bar{x}|^2}{(t - \bar{t})^2} + 1 \right) + \\
&+ Cr^{-\frac{n+m}{2}} \frac{(t - \bar{t})^{\frac{m+2}{2}}}{(t - \bar{t})^2} \left( \ln \left( \frac{Cr\delta}{t - \bar{t}} \right) \right)^{\frac{m+2}{2}} \leq \\
&\leq Cr^{-\frac{n+m}{2}} (t - \bar{t})^{\frac{m}{2}} \left( \ln \left( \frac{Cr\delta}{t - \bar{t}} \right) \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{|x - \bar{x}|^2}{(t - \bar{t})^2} + 1 + \frac{1}{t - \bar{t}} \ln \left( \frac{Cr\delta}{t - \bar{t}} \right) \right) \leq \\
&\leq C_2 r^{-(\frac{n}{2}+1)}
\end{aligned}$$

per un'opportuna scelta di  $C_2$ .

Abbiamo quindi provato l'esistenza di una costante  $C_2$  tale che

$$\sup_{(\bar{x}, \bar{t}) \in E_m((x, t), \delta r)} W_{\delta r}^m(x - \bar{x}, t - \bar{t}) \leq C_2 r^{-(\frac{n}{2}+1)}.$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Con il teorema che segue proveremo che, fissato  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$ , la disuguaglianza di Harnack risulta verificata anche nel caso in cui  $(x, t)$  appartenga alla regione parabolica

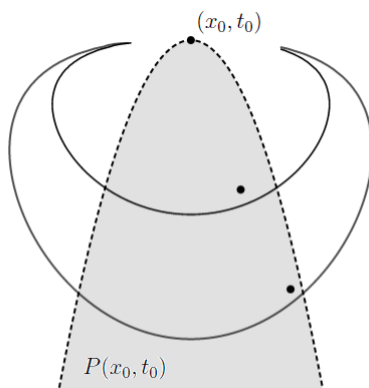
$$P(x_0, t_0) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - x_0|^2 < t_0 - t\}.$$

**Teorema 4.1.2.** *Sia  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n$ , se  $u \geq 0$  è una funzione calorica in  $\mathbb{R}^{n+1}$  allora*

$$u(x, t) \leq Cu(x_0, t_0) \quad \forall (x, t) \in P(x_0, t_0)$$

dove la costante  $C > 0$  è la stessa del Teorema 4.1.1.

*Dimostrazione.* Dimostrare il teorema equivale a provare che per ogni  $(x, t) \in P(x_0, t_0)$  esiste  $r > 0$  e  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tali che  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$  e  $t_0 - t \geq \varepsilon r$ .



In questo modo è possibile applicare la disuguaglianza di Harnack dimostrata nel teorema precedente.

Per prima cosa vorremmo che  $r$  soddisfi

$$(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r) = \{(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \Phi(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}\}.$$

Siccome  $(x, t) \in P(x_0, t_0)$  e quindi  $\frac{|x-x_0|^2}{t_0-t} < 1$  si ha

$$\Phi(x_0 - \bar{x}, t_0 - \bar{t}) = \left(4\pi(t_0 - t)\right)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{|x_0 - x|^2}{4(t_0 - t)}} > \left(4\pi(t_0 - t)\right)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{4}}.$$

Di conseguenza se  $r$  verifica

$$\left(4\pi(t_0 - t)\right)^{-\frac{n+m}{2}} e^{-\frac{1}{4}} > (4\pi r)^{-\frac{n+m}{2}}$$

cioè  $r > (t_0 - t)e^{\frac{1}{2(n+m)}}$  allora sicuramente si verifica  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$ .

Vorremmo inoltre scegliere  $\varepsilon \in ]0, 1[$  tale che  $t_0 - t \geq \varepsilon r$ .

Scegliendo  $\varepsilon$  e  $r$  tali che

$$\varepsilon < \frac{t_0 - t}{r} < e^{-\frac{1}{2(n+m)}}$$

si verificano contemporaneamente  $(x, t) \in E_m((x_0, t_0), r)$  e  $t_0 - t \geq \varepsilon r$ .

Il teorema è quindi dimostrato. □

## 4.2 Teorema di Liouville

Il teorema di Liouville per le funzioni armoniche afferma che se  $u$  è una funzione armonica e limitata su  $\mathbb{R}^n$  allora  $u$  è costante.

Lo stesso accade per funzioni caloriche, dimostreremo infatti che una funzione calorica e limitata su  $\mathbb{R}^{n+1}$  è necessariamente costante.

Vediamo innanzitutto un teorema che sarà utile per questa dimostrazione.

**Teorema 4.2.1.** *Sia  $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione calorica e non negativa, allora*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t)$$

*esiste ed è indipendente da  $x$ . In particolare,*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = \inf_{\mathbb{R}^{n+1}} u \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $m := \inf_{\mathbb{R}^{n+1}} u$  e definiamo  $v := u - m$ .

Notiamo che  $v : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione calorica non negativa e  $\inf_{\mathbb{R}^{n+1}} v = 0$ .

Di conseguenza, per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $v(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < \varepsilon$ .

Inoltre, come conseguenza del Teorema 4.1.2., esiste  $C > 0$  tale che

$$v(x, t) \leq C v(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \quad \forall (x, t) \in P(x_\varepsilon, t_\varepsilon),$$

ricordiamo che  $P(x_\varepsilon, t_\varepsilon) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x - x_\varepsilon|^2 < t_\varepsilon - t\}$  indica la regione parabolica.

Unendo i risultati si ottiene che per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n+1}$  tale che

$$v(x, t) \leq C v(x_\varepsilon, t_\varepsilon) < C\varepsilon \quad \forall (x, t) \in P(x_\varepsilon, t_\varepsilon).$$

D'altra parte fissato  $x \in \mathbb{R}^n$  esiste  $t_\varepsilon^* \in \mathbb{R}$  tale che  $(x, t) \in P(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$  per ogni  $t < t_\varepsilon^*$ .

Quindi per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $t_\varepsilon^* \in \mathbb{R}$  tale che

$$v(x, t) < C\varepsilon \quad \forall t < t_\varepsilon^*.$$

Dal momento che  $v \geq 0$ , possiamo concludere che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e quindi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = m \inf_{\mathbb{R}^{n+1}} u \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

□

Grazie a questo teorema, siamo ora in grado di dimostrare il Teorema di Liouville per funzioni caloriche.

**Teorema 4.2.2.** *Se  $u : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  è calorica e limitata allora  $u$  è costante.*

*Dimostrazione.* Per ipotesi  $u$  è limitata, definiamo

$$m := \inf_{\mathbb{R}^{n+1}} u \quad M := \sup_{\mathbb{R}^{n+1}} u$$

quindi si ha che

$$m \leq u \leq M.$$

Consideriamo ora la funzione  $v := u - m$  e notiamo che  $v \geq 0$ , inoltre, essendo  $u$  calorica, lo sarà anche  $v$ .

Siamo ora sotto le ipotesi del Teorema 4.2.1., quindi

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} v(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

da cui

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = m = \inf_{\mathbb{R}^{n+1}} u \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Analogamente, definendo la funzione  $w := M - u$ , anch'essa calorica e non negativa, si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} w(x, t) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

da cui

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(x, t) = M = \sup_{\mathbb{R}^{n+1}} u \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Possiamo quindi concludere che, per l'unicità del limite,  $m = M$  e quindi  $u$  è costante.

□



# Appendice A

## Prerequisiti

### A.1 Integrazione per parti e teorema della divergenza

**Definizione A.1** (Normale esterna). Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e  $x_0 \in \partial\Omega$ .

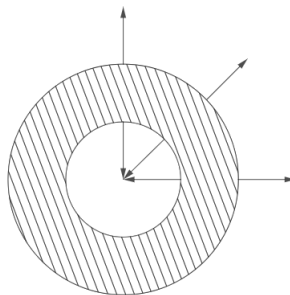
Se esiste un vettore  $\nu \perp \partial\Omega$  con  $|\nu| = 1$  e tale che  $\exists \delta > 0$  che verifichi:

- $x_0 + t\nu \notin \overline{\Omega} \forall t \in ]0, \delta[$
- $x_0 - t\nu \in \overline{\Omega} \forall t \in ]0, \delta[$

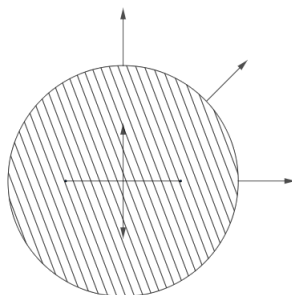
chiamiamo questo vettore normale esterna a  $\partial\Omega$  nel punto  $x_0$ .

Esempi:

- L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  ammette normale esterna in ogni punto del bordo.



- L'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\} \setminus \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1; y = 0\}$  non ammette normale esterna nei punti dell'insieme  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1; y = 0\}$ .



**Definizione A.2** (Aperto regolare). Un insieme aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $n \geq 2$  si dice regolare se:

- $\Omega$  è limitato;
- $Int(\overline{\Omega}) = \Omega$ ;
- $Fr(\Omega)$  è una  $(n - 1)$ -varietà differenziabile di classe almeno  $C^1$ .

*Osservazione 13.* Un aperto regolare ammette normale esterna in ogni punto del bordo.

**Teorema A.1.1** (Teorema di integrazione per parti). Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto regolare e  $f \in C^1(\overline{\Omega})$  allora  $\forall j = 1 \dots n$

$$\int_{\Omega} \partial_{x_j} f \, dx = \int_{\partial\Omega} f \nu_j \, d\sigma$$

dove  $\nu_j$  indica la componente  $j$ -esima della normale esterna.

**Teorema A.1.2** (Teorema della divergenza). Siano  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto regolare e  $F \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$  allora

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma$$

dove  $\operatorname{div} F = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} F_j$  indica la divergenza di  $F$ .

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div} F \, dx &= \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \partial_{x_j} F_j \, dx = \sum_{j=1}^n \int_{\partial\Omega} F_j \nu_j \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^n (F_j \nu_j) \, d\sigma = \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle \, d\sigma \end{aligned}$$

□

## A.2 Formula di reciprocità per l'operatore di Laplace

Indichiamo con  $\Delta = \Delta_x := \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$  l'operatore di Laplace o laplaciano.

**Proposizione A.2.1.** *Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  aperto regolare di classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  e  $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$  allora*

$$\operatorname{div}(v\nabla u - u\nabla v) = v\Delta u - u\Delta v.$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo innanzitutto  $\operatorname{div}(v\nabla u)$ .

$$\operatorname{div}(v\nabla u) = \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (v \partial_{x_j} u) = \sum_{j=1}^n \left( v \partial_{x_j}^2 u + \partial_{x_j} v \partial_{x_j} u \right) = v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle.$$

Allo stesso modo  $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \langle \nabla u, \nabla v \rangle$ . Unendo i risultati si ha

$$\operatorname{div}(v\nabla u - u\nabla v) = v\Delta u + \langle \nabla v, \nabla u \rangle - u\Delta v - \langle \nabla u, \nabla v \rangle = v\Delta u - u\Delta v.$$

□

## A.3 Formula di coarea

**Teorema A.3.1.**

*Sia  $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Definiamo l'insieme  $\Omega_{r_1, r_2} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid r_1 < g(x) < r_2\}$ .*

*Se  $\nabla g(x) \neq 0 \, \forall x \in \Omega_{r_1, r_2}$  per ogni  $f \in C(\overline{\Omega_{r_1, r_2}})$  si ha*

$$\int_{\Omega_{r_1, r_2}} f(x) \, dx = \int_{r_1}^{r_2} \left( \int_{\{g(x)=\rho\}} \frac{f(x)}{|\nabla g(x)|} \, d\sigma \right) d\rho.$$

Esempio:

Consideriamo la funzione  $g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = |x|$ .

$$|\nabla g(x)| = \left| \frac{x}{|x|} \right| = 1.$$

Definendo  $B(0, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid 0 < |x| < r\}$  e applicando la formula di coarea si ottiene

$$\int_{B(0,r)} f(x) \, dx = \int_0^r \left( \int_{\{|x|=\rho\}} f(x) \, d\sigma \right) d\rho = \int_0^r \left( \int_{\partial B(0,\rho)} f(x) \, d\sigma \right) d\rho.$$

# Bibliografia

- [1] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society.
- [2] Sandro Salsa, *Equazioni a derivate parziali*, Springer.
- [3] Mirea Di Tonno, *L'operatore del calore*, Tesi di laurea magistrale in Analisi, I sessione a.a. 2015/2016, Università di Bologna.



# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare la professoressa Montanari per la disponibilità con cui ha seguito il mio lavoro.

Alle mie sorelle Francesca e Linda a cui, nonostante mettano a dura prova la mia sopportazione, voglio molto bene.

Alla mia famiglia per il sostegno e l'affetto.

Ringrazio gli amici che ho incontrato dall'inizio di questo percorso e che hanno reso questo viaggio molto più divertente.

A tutti gli amici che c'erano già prima, vi prometto che il prossimo obiettivo sarà un corso di galateo.

Un ringraziamento speciale va a Nicola che più di chiunque altro mi è stato vicino in questi anni, la persona migliore che abbia mai incontrato.