Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE, FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea Specialistica in Matematica

DERIVATI SULL'INFLAZIONE

Tesi di Laurea in Equazioni Differenziali Stocastiche applicate alla Finanza

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Andrea Pascucci

Presentata da:
Alice Monti

Sessione III
Anno Accademico 2009/2010

Al nonno Mario

'L'essenza della matematica
è nella sua libertà.'

Georg Cantor (1845-1918)

Introduzione

L'*inflazione* è il processo che riguarda il continuo aumento generalizzato del livello dei prezzi dei beni e servizi destinati al consumo della popolazione.
L'inflazione negativa è chiamata *deflazione*.
Il *tasso d'inflazione* è l'incremento percentuale di un indice di riferimento calcolato in un intervallo di tempo specifico, generalmente 12 mesi. Varia nel tempo e cambia da paese a paese. Esso misura l'aumento tendenziale dei prezzi ed influisce, quindi, in modo indiretto, sul potere d'acquisto della moneta. E' determinato, infatti, dal tasso di crescita della quantità di moneta, dove la quantità di moneta determina il livello dei prezzi.
La quantità di moneta disponibile in un sistema economico è controllata dallo Stato, che ha il monopolio sulla stampa di banconote. L'istituzione chiamata *banca centrale* è delegata a controllare la quantità di moneta in circolo, esercitando una cosiddetta *politica monetaria*. Una dei suoi principali propositi è mantenere una certa stabilità dei prezzi, ovvero bassa inflazione. Quando la banca centrale decide di aumentare l'inflazione, aumenta l'offerta di moneta stampandone di più e utilizzandola per acquistare titoli di Stato dal pubblico. In questo modo il governo fa perdere valore alla moneta che è già presente nelle mani dei cittadini. Quando, viceversa, desidera diminuire l'inflazione, diminuisce l'offerta di moneta vendendo parte dei titoli di debito pubblico che detiene nel proprio portafoglio.
L'inflazione, dunque, equivale a un'imposta sulla detenzione di moneta.
Alcune cause dell'inflazione sono il livello di richiesta monetaria nell'economia e l'inflazione attesa. Quest'ultima è molto importante, poichè gli aumenti dei prezzi futuri riducono l'ammontare di beni e servizi che si possono acquistare con i salari attuali. Essa è influenzata dalla politica monetaria e da quanto la popolazione crede nella capacità

e nell'impegno delle autorità (gorverno e banca centrale) nel raggiungimento dei loro obiettivi inflazionari.
Indicando con $p(t)$ il livello generale dei prezzi, il tasso d'inflazione è la derivata prima di $p(t)$ rispetto al tempo t, ovvero la velocità con cui cresce il livello medio dei prezzi:

$$i = \frac{dp}{dt}$$

Un importante aspetto su cui bisogna prestare la propria attenzione è il legame che sussiste tra la crescita/decrescita d'inflazione e la velocità di crescita dei prezzi.
Nel caso in cui si verifichi una crescita d'inflazione, si può affermare che la velocità di crescita dei prezzi sta crescendo, al contrario nel caso in cui si stia verificando una decrescita d'inflazione, si può affermare che i prezzi crescono ad un ritmo più lento. Bisogna, pertanto, stare attenti a non confondere la decrescita d'inflazione con la decrescita dei prezzi. I prezzi continuano a crescere, ma con ritmi e velocità diverse.
La banca centrale, nell'esercizio della politica monetaria, ha scelto come indice di riferimento, per il calcolo del tasso d'inflazione, l'indice dei prezzi al consumo, *Consumer Prices Index* o, più comunemente, CPI. Esistono due principali indici di prezzi, quello europeo, EUR CPI, e quello americano, USD CPI.
Il CPI è una misura statistica formata dalla media dei prezzi, ponderati attraverso uno specifico paniere di beni e servizi rappresentativo dei consumi di un consumatore medio. Esso misura l'aumento del livello generale dei prezzi, ossia l'inflazione al consumo rispetto al periodo considerato.
Se si indica con $I(t)$ il valore del CPI, o indice inflazionario, al tempo t, si può scrivere il tasso d'inflazione, al tempo $t \in [0, T]$, come:

$$i(t) = \frac{I(t)}{I(0)} - 1$$

La frazione $\frac{I(t)}{I(0)}$ può essere interpretata come tasso di cambio, infatti, se si moltiplica per un'ammontare di valuta reale, al tempo t, si ottiene l'ammontare corrispondente di valuta nominale, al tempo t, ossia calcolato tenendo conto anche dell'inflazione. Utilizzando il suo reciproco, ovviamente, si ottiene il cambio opposto, dalla valuta nominale a quella reale. Vedremo meglio questo concetto di tasso di cambio nel paragrafo (1.2.1).

Per analizzare l'inflazione, vi si può approcciare da due diversi punti di vista:

MACROECONOMICO: è basato sui modelli econometrici e ha come obiettivo la previsione del tasso d'inflazione, dato da un insieme di dati nel tempo. Studia l'evoluzione delle principali variabili macroeconomiche aggregate, in cui si riflette lo stato di salute del sistema economico, e le loro conseguenze sui mercati finanziari. L'obiettivo principale è la costruzione di scenari di medio-lungo termine in grado di prevedere i movimenti più ampi dei mercati. Il tasso d'inflazione, solitamente, viene collegato con altre variabili macroeconomiche, come ad esempio il tasso d'interesse a breve e i dati passati dell'inflazione, determinati attraverso i modelli autoregressivi. Questo approccio non è pertanto utile al calcolo dei prezzi dei derivati, perchè necessita di misure di probabilità storiche.

MATEMATICO-FINANZIARIO: ha come obiettivo lo sviluppo di modelli per il calcolo dei prezzi degli strumenti finanziari legati all'inflazione. Utilizza i modelli stocastici sotto la probabilità neutrale al rischio, che garantisce che il mercato sia libero da arbitraggi e che assicura l'esistenza di una strategia di copertura replicante.

Noi ci occuperemo di studiare l'inflazione dal punto di vista matematico-finanziario, poichè, rimanendo sempre l'incertezza dell'effettivo valore del potere d'acquisto a lungo termine, nonostante si possa essere in un periodo di bassa inflazione, è più utile e pratico riuscire a prezzare gli strumenti finanziari legati all'inflazione.

Indice

Capitolo 1

Strumenti finanziari

1.1 Inflation-Indexed Securities

Le *inflation-indexed securities* sono strumenti che promettono un rendimento superiore al tasso d'inflazione, a condizione che la security venga tenuta fino alla scadenza. Proteggono i loro acquirenti dai cambiamenti inaspettati del livello dei prezzi nell'economia, ossia dell'inflazione, e assicurano l'ammontare investito, garantendo un potere d'acquisto minimo garantito, ottenuto collegando i payoff di questi strumenti finanziari all'inflazione.
Oltre a garantire ai loro proprietari, coloro che le comprano, il mantenimento del potere d'acquisto, rilasciano in aggiunta una quota prefissata. I mutuatari, invece, coloro che le vendono, sostengono un costo costante in termini di valuta reale.
Inflation-indexed bonds pagano una cedola periodica, pari al prodotto fra l'indice di inflazione e il tasso della cedola nominale.

Esistono un gran numero di strutture di pagamento, dette anche 'cash flow', delle inflation-indexed securities. Vediamo alcune:

1. **capital indexed bond**, o meglio CIB, è la security più antica del mercato australiano ed è rilasciata dal Dipartimento del Tesoro australiano; la prima risale al 1983. L'indicizzazione di questa security avviene trimestralmente, sulla quota capitale del bond che viene rimborsata alla scadenza.

Indicando con r il tasso reale annuale e con $I(t)$ il valore del CPI al tempo $t \in [0, T]$, l'interesse, pagato trimestralmente sulla quota capitale corrente indicizzata al tasso fisso del coupon, è pari a:

$$r\frac{I(t)}{I(0)}$$

Alla scadenza T, invece, viene pagata una somma comprensiva del rimborso della quota capitale e dell'ultimo interesse:

$$100\frac{I(T)}{I(0)} + r\frac{I(T)}{I(0)}$$

Dato che, nel corso del tempo, l'indicizzazione inflazionaria aumenta il valore della security, così anche l'importo totale alla scadenza diventa più grande e di conseguenza aumenta il rischio del credito del titolare;

2. **interest indexed bond**, IIB, si è sviluppato anch'esso in Australia negli anni '80.
   E' strutturato in modo tale che, per ogni periodo, i pagamenti sono formati da una parte a tasso fisso (coupon fisso) e dall'altra a tasso variabile (indicizzazione della quota principale fissata).
   Periodicamente paga la cedola degli interessi pari a:

$$r + 100\Big(\frac{I(t)}{I(t-1)} - 1\Big)$$

   mentre, alla scadenza, paga:

$$100\frac{I(T)}{I(T-1)} + r$$

   Ogni trimestre avviene il reset del coupon, a seconda dell'andamento del CPI.
   Se il CPI aumenta, il coupon è eguagliato all'incremento maggiore del CPI più uno spread predeterminato del rendimento reale, altrimenti è eguagliato allo spread del rendimento reale. Il rimborso della quota principale alla scadenza non è regolato in base all'inflazione.
   Un esempio di questi strumenti finanziari sono i *real yield securities*, REALS;

3. **current pay indexed bond**, CPIB, è stato rilasciato in Turchia.
   E' molto simile agli IIBs e come loro è un'inflation-protected bond a tasso variabile.

Paga un coupon regolato secondo l'inflazione più una somma indicizzata, legata alla quota capitale fissata, ossia le cedole corrispondono a:

$$r\frac{I(t)}{I(t-1)} + 100(\frac{I(t)}{I(t-1)} - 1)$$

mentre il valore finale è:

$$100\frac{I(T)}{I(T-1)} + r\frac{I(T)}{I(T-1)}$$

E' anch'esso una nota a tasso variabile indicizzata all'inflazione;

4. **indexed annuity bond**, meglio conosciuto come IAB, è considerato come un flusso di redditi non legati alla quota principale. Non vi è, quindi, alcuna distinzione tra i pagamenti di capitale e duelli di interesse.
   Anche in questa security gli interessi vengono rivalutati trimestralmente. Paga annualmente una quota fissa più un elemento variabile, che serve per compensare l'inflazione pari a:
   $$B\frac{I(t)}{I(0)}$$
   dove B indica il pagamento di base annule. Alla scadenza, invece, paga:
   $$B\frac{I(T)}{I(0)}$$
   Un esempio si riscontra nuovamente nel mercato australiano;

5. **indexed zero-coupon bond**, IZCB, consiste in un singolo pagamento, alla scadenza T, della quota principale, rivalutata secondo l'inflazione, pari a:
   $$100\frac{I(T)}{I(0)}$$
   Non vengono pagate cedole. E' stato rilasciato nei mercati islandese, svedese e polacco;

6. **inflation protected bond**, conosciuto come IPB, è generalmente detenuto dalle tesorerie, poichè risultano molto importanti per i governi, in quanto chi li possiede ha l'incentivo di tenere un'inflazione bassa. Anche le società, tuttavia, possono

offrirli e trarne dei benefici. Gli investitori più comuni sono i fondi pensione e i fondi delle mutue. I bilanci delle aziende, infatti, sono pieni di beni reali e potrebbe risultare interessante, quindi, compensarli con un passivo reale. Inoltre, coprire l'esposizione dell'inflazione, nel portafoglio di una società, agisce come stabilizzante delle entrate.

Gli IPBs sono un tipo di investimento a reddito fisso, che garantisce un tasso di rendimento reale, al netto dell'inflazione, in modo da proteggere gli investitori dall'inflazione. Sono rilasciati dal Dipartimento del Tesoro statunitense e il loro utilizzo può esser fatto risalire al XVIII secolo, quando lo stato del Massachusetts rilasciò delle polizze di credito pubblico, connesse al prezzo dell'argento. Il primo proprietario, infatti, fu la Massachusetts Bay Company nel 1780.

Un esempio sono i titoli del Tesoro indicizzati all'inflazione statunitensi, (TIPS), creati per proteggere gli investitori dagli effetti negativi dell'inflazione. Sono considerati un investimento estremamente a basso rischio, dato che sono appoggiati dal governo e il loro valore nominale aumenta con l'inflazione, mentre il loro tasso d'interesse rimane fisso. Sono molto preziosi anche perchè sono esenti dalle imposte sul reddito statali e locali. Inoltre gli interessi sui TIPS sono pagati semestralmente.

La storia ha mostrato che l'indicizzazione, basata su un unico bene non fu una grande idea. Furono, così, sviluppati dei metodi di indicizzazione più complessi, basati su un paniere di beni che riflettesse i prezzi dell'intera economia.

Solo recentemente, nella seconda metà del 20th secolo, il debito indicizzato è diventato molto popolare, soprattutto tra i governi, in seguito a periodi di alta e volatile inflazione.

La caratteristica più importante degli inflation bonds è la loro abilità nel garantire una bassa o negativa correlazione con le altre attività, una lunga duration[1] rispetto ai tassi d'interesse reali e una bassa volatilità di resa.

[1]Si definisce *duration* la media ponderata delle cedole date di un bond, dove i valori scontati dei pagamenti delle cedole sono usati come pesi. Misura la sensibilità del prezzo del bond rispetto ai cambiamenti nel rendimento. Considerando un bond con cedole c_i, pagate ai tempi T_i, la duration D si definisce:

$$D = \frac{\sum_{i=1}^{n} T_i c_i e^{-yT_i}}{P}$$

dove P è il prezzo, al tempo $t = 0$, equivalente al rendimento alla scadenza y.

1.2 Inflation-Indexed Derivatives

Sin dagli anni '90, nei paesi aventi l'euro come moneta vigente e in Gran Bretagna, ha iniziato a crescere il mercato degli *inflation-indexed* o *inflation-linked derivatives.*
I derivati sono, solitamente, progettati e utilizzati per colmare lacune e produrre, sinteticamente, complicate strutture payoff, che il mercato sottostante non può produrre solamente per soddisfare la domanda degli emittenti o gli investitori.
Questi derivati hanno aggiunto flessibilità ai mercati sottostanti degli inflation-indexed bonds e hanno aperto nuove opportunità per raggiungere gli obiettivi finanziari, che sarebbero stati accessibili solo attarverso gli indexed bonds. La loro capacità di copertura, contro la varietà dei rischi, è una delle loro caratteristiche più interessanti.
Ad ogni modo esistono molti prodotti che rientrano in questa categoria, ad esempio:

1. swaps,
2. caps e floors,
3. caplets e floorlets,
4. swaptions e bond options.

Oggigiorno i prodotti più comuni sono gli *inflation-indexed swaps*, IIS.

Deacon, Derry e Mirfenderesky hanno suddiviso il mercato inflation-indexed in quattro categorie, a seconda del proprio sviluppo:

I LIVELLO: in questo livello di mercato non sono presenti strumenti legati all'indice d'interesse. I prezzi degli swaps sono formati sulla base dei mestieri abbinati all'offerta, alla domanda e/o all'assunzione del rischio di base, utilizzando gli strumenti degli altri mercati (livelli 2 o 3) come barriere. In questa categoria si trova il mercato spagnolo delle inflation swaps;

II LIVELLO: qui sono presenti strumenti finanziari, di solito inflation-indexed bonds,

che servono a fissare alcuni punti sulla yield curve[2] reale o inflazionaria. A causa della scarsità delle scadenze degli interessi, tuttavia, la domanda e l'offerta guidano ancora i prezzi nei punti mancanti della yield curve.
Esempi di questo livello sono i mercati dei paesi dove vige l'euro e il mercato francese delle inflation swaps;

III LIVELLO: questi mercati hanno molti strumenti negoziabili sul mercato. Si può, quindi, costruire una yield curve reale o inflazionaria vicina alla completezza e all'assenza di arbitraggi. In questo livello rientra il retail price index della Gran Bretagna, meglio conosciuto sotto il nome di UK RPI;

IV LIVELLO: questa categoria è al momento ipotetica, poichè tutti i mercati esistenti rientrano nei livelli sopra mezionati. Ci si aspetta, tuttavia, che nel futuro prossimo appaia un mercato con caratteristiche tali da rientrare in questo livello, ossia deve detenere un livello più alto di maturità, liquidità e stabilità, analogamente ai maggiori mercati degli swaps rate nominali e reali.
Gli IIS sarebbero, loro stessi, gli strumenti di base negoziabili del mercato e i loro prezzi sarebbero fissati indipendentemente da qualsiasi mercato sottostante.

Questi derivati necessitano di una valutazione attraverso specifici modelli.
Nel 2003 Jarrow e Yildirim proposero una struttura, il cosiddetto modello JY, simile alla struttura proposta nel 1997 da Barone e Castagna, basata sull'*analogia foreign-currency* e sul modello proposto da Heath, Jarrow e Morton nel 1992, detto *modello HJM*, che vedremo in dettaglio nel paragrafo (2.2.4). Jarrow e Yildirim hanno modellato l'evoluzione dei tassi instantanei reali e nominali e del CPI, che hanno interpretato come il tasso

[2]Sia $P(t,T)$ un bond con maturità T. Si cerca il tasso d'interesse short costante, y, che darà lo stesso valore di questo bond come il valore dato dal mercato, ossia bisogna risolvere l'equazione:

$$P(t,T) = e^{-y(T-t)} \cdot 1$$

dove 1 indica il valore del bond. Il **bond yield**, $y(t,T)$ è, quindi, dato da

$$y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t}$$

Se t viene fissato, la funzione $T \longmapsto y(t,T)$ è detta **yield curve**.

di cambio tra l'economia reale e quella nominale. Capiremo meglio questo concetto nel prossimo paragrafo (1.2.1).

Un esempio di questi derivati è l'**inflation cap**, un contratto che paga alla scadenza una somma prestabilita se viene soddisfatta una condizione, ossia che l'inflazione superi una certa soglia K, durante un intervallo prestabilito $[0, T]$. Il payoff C_T è dato da:

$$C_T = X \max\left[\left(\frac{I_T}{I_0} - 1\right) - K, 0\right]$$

dove X è il valore nominale del contratto e I_t è il valore del CPI al tempo t.

1.2.1 Analogia Foreign-Currency

Secondo l'*analogia foreign-currency*, le evoluzioni dei tassi istantanei reali e nominali e l'evoluzione del CPI sono modellate insieme. Più precisamente, i tassi nominali e reali sono interpretati come se fossero relativi a due valute diverse, rispettivamente una nazionale (in inglese 'domestic') e una estera (in inglese 'foreign'), mentre il CPI è interpretato come se fosse il loro tasso di cambio.
I tassi d'interesse mettono in relazione il presente con il futuro. Nel linguaggio economico il tasso d'interesse reale, indicato con r, è l'incremento del potere d'acquisto, mentre il tasso d'interesse nominale, n, è il tasso d'interesse corrisposto dalla banca. Il valore nominale, infatti, indica il valore 'teorico' o 'cartaceo' di un determinato bene, in contrapposizione al valore reale che indica il valore osservato o 'di mercato', tenendo conto degli aspetti monetari e dell'influenza della domanda/offerta del bene. Il tasso d'interesse reale, quindi, non è altro che il tasso d'interesse nominale al netto del tasso

d'inflazione, i, come si vede dalla seguente relazione, detta *relazione di Fisher*[3]:

$$r = n - i$$

Risulta, quindi, intuitivo affermare che $n > r$.

L'analogia foreign-currency è motivata dalla stessa definizione del CPI.
Denotando con $I(t)$ il valore del CPI al tempo t, è possibile acquistare questo paniere di beni e servizi con $I(0)$ unità di moneta, al tempo $t = 0$, mentre con $I(T)$ unità di moneta, al tempo $t = T$.
Ponendo $I(0) = 1$, una unità di moneta nominale al tempo T vale in termini reali

$$\frac{I(0)}{I(T)} = \frac{1}{I(T)}$$

ossia il nostro potere d'acquisto effettivo diminuisce.
Equivalentemente, una unità di moneta reale al tempo T vale in termini nominali

$$\frac{I(T)}{I(0)} = I(T)$$

E' possibile, pertanto, convertire il valore nominale nel corrispondente valore reale semplicemente dividendo per il valore del CPI in quel momento; oppure, viceversa, è possibile convertire il valore reale nel corrispondente valore nominale moltiplicando per esso.
Nell'introduzione, abbiamo visto il legame tra il tasso d'inflazione e il CPI:

$$i(t) = \frac{I(t)}{I(0)} - 1 = I(t) - 1$$

[3]E' stata formulata da Alan Fisher nel periodo tra le due guerre, prima della nascita dei mercati degli inflation-indexed bond. Afferma che il rendimento di un bond nominale è formato da tre componenti: aspettative inflazionistiche, un rendimento reale necessario, che gli investitori richiedono oltre alle aspettative, e un premio corrispondente al desiderio degli investitori di ricevere un compenso aggiuntivo, in quanto accettano ulteriori rischi inflazionistici, poichè titolari di bond nominali.
Questa formula, in realtà, è un'approssimazione. La formula esatta, infatti, sarebbe:

$$r = \frac{1+n}{1+i} - 1$$

L'approssimazione è accettabile solo nella misura in cui i valori di r, n e i siano relativamente piccoli, ossia non superino il valore di 20% l'anno.

si ottiene, quindi

$$I(t) = 1 + i(t) = e^{\int_0^t i(s)ds}$$

Se indichiamo con X_t^n il valore nominale di un'attività finanziaria e con X_t^r il suo corrispettivo valore reale, entrambi al tempo t, si ha

$$X_t^n = X_t^r\ I(t) = X_t^r\ e^{\int_0^t i(s)ds}$$

e di conseguenza

$$X_t^n > X_t^r$$

Sapendo che i valori nominali e reali coincidono al tempo 0, ossia

$$X_0^n = X_0^r$$

e che il valore nominale di un'attività finanziaria, al tempo t, è legato al valore nominale, al tempo 0, dalla seguente relazione

$$X_t^n = X_0^n\ e^{\int_0^t n(s)ds}$$

si trova

$$X_t^n = X_0^r\ e^{\int_0^t n(s)ds}$$

D'altra parte abbiamo appena visto che vale

$$X_t^n = X_t^r\ e^{\int_0^t i(s)ds}$$

allora, eguagliando i due valori di X_t^n, si ha

$$X_0^r\ e^{\int_0^t n(s)ds} = X_t^r\ e^{\int_0^t i(s)ds}$$

e infine

$$X_t^r = X_0^r\ e^{\int_0^t (n(s) - i(s))ds}$$

dove $n(s) - i(s) = r(s) \quad \forall s.$

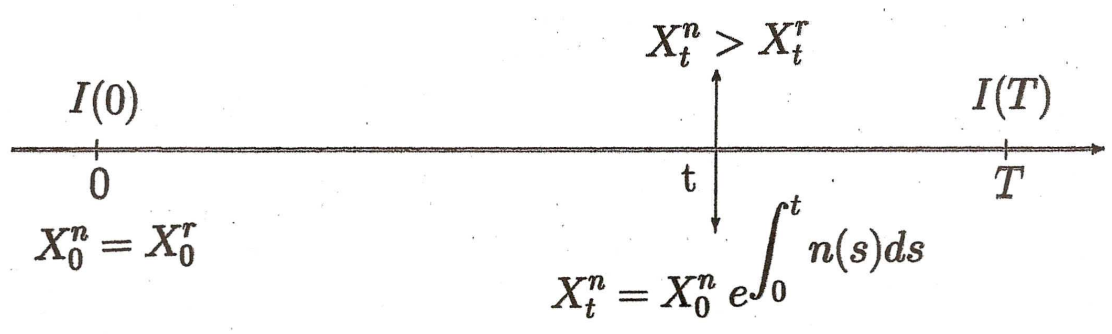

Figura 1.1: Confronto tra i valori nominali e reali di un'attività finanziaria.

1.2.2 Notazioni

Come visto nel paragrafo precedente, useremo le lettere n e r per indicare, rispettivamente, nominale e reale.
Le strutture a termine dei fattori di sconto nell'economia nominale e in quella reale, dette **discount factor** nominale e reale, al tempo t con $0 \leq t \leq T$, sono il rapporto dei **bank account**, rispettivamente, nominale e reale:

$$D_n(t,T) = e^{-\int_t^T n(s)ds} = \frac{B_n(T)}{B_n(t)} = \frac{e^{\int_0^t n(s)ds}}{e^{\int_0^T n(s)ds}}$$

$$D_r(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds} = \frac{B_r(T)}{B_r(t)} = \frac{e^{\int_0^t r(s)ds}}{e^{\int_0^T r(s)ds}}$$

Il bank account, quindi, soddisfa:

$$\begin{cases} dB(t) = r(t)B(t)dt \\ B(0) = 1 \end{cases}$$

Il **bond nominale**, $P_n(t,T)$, è il prezzo, al tempo t, di un futuro euro, alla maturità T:

$$P_n(T,T) = 1$$

mentre il **bond reale**, $P_r(t,T)$, è definito come il prezzo, al tempo t, di un contratto pagante una unità di CPI, $I(T)$, alla scadenza T:

$$P_r(T,T) = I(T)$$

Si ha, quindi:

$$P_r(t,T) > P_n(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$$

Dati i tempi futuri T_{i-1} e T_i, i **tassi forward** nominali e reali, valutati al tempo t, sono:

$$F_n(t;T_{i-1},T_i) = \frac{P_n(t,T_{i-1}) - P_n(t,T_i)}{\tau_i P_n(t,T_i)} = \frac{1}{\tau_i}\left[\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)} - 1\right]$$

$$F_r(t;T_{i-1},T_i) = \frac{P_r(t,T_{i-1}) - P_r(t,T_i)}{\tau_i P_r(t,T_i)} = \frac{1}{\tau_i}\left[\frac{P_r(t,T_{i-1})}{P_r(t,T_i)} - 1\right]$$

poichè derivano dalla formula di capitalizzazione

$$P_x(t,T_{i-1}) = P_x(t,T_i)(1+\tau_i F_x(t;T_{i-1},T_i)) \qquad x \in \{n,r\}$$

dove τ_i è la year fraction[4] relativa all'intervallo $[T_{i-1},T_i]$, assunto uguale per entrambi i tassi. Facendo il limite per $T_{i-1} \to T_i$ del rapporto incrementale dei tassi forward, si ottengono i **tassi forward istantanei** nominali e reali, al tempo t con scadenza T

$$f_n(t,T) = -\frac{\partial \ln P_n(t,T)}{\partial T} \qquad f_r(t,T) = -\frac{\partial \ln P_r(t,T)}{\partial T}$$

Ora, integrando il tasso forward istantaneo reale

$$\int_t^T f_n(t,s)ds = \int_t^T -\frac{\partial \ln P_n(t,s)}{\partial s} = -\ln P_n(t,T)$$

si ottiene la seguente espressione per il bond nominale

$$P_n(t,T) = \underbrace{P_n(t,t)}_{1} e^{-\displaystyle\int_t^T f_n(t,s)ds} = E_n^{Q_n}\{D_n(t,T)|\mathcal{F}_t\}$$

[4]Dati due istanti di tempo t e T, si definisce **year fraction** la misura scelta del tempo tra t e T e si indica con $\tau(t,T)$. Quando t e T sono distanti meno di un giorno (in genere quando si tratta di quantità limite che coinvolgono tempi di maturità tendenti a zero), $\tau(t,T)$ va interpretato come la differenza di tempo $T-t$ (in anni). La scelta particolare che è stata fatta, di misurare il tempo tra due date, riflette ciò che è noto come **day-count convention**.

dove $E_n^{Q_n}$ è l'attesa condizionata alla filtrazione $\mathcal{F}_t$, associata alla misura martingala neutrale al rischio nominale Q_n[5].
In modo analogo si ottiene l'espressione per il bond reale, con attesa condizionata $E_r^{Q_r}$ rispetto alla misura martingala Q_r:

$$P_r(t,T) = \underbrace{P_r(t,t)}_{1} e^{-\int_t^T f_r(t,s)ds} = E_r^{Q_r}\{D_r(t,T)|\mathcal{F}_t\}$$

I **tassi short istantanei** nominali e reali non sono altro che i tassi forward istantanei, dove $T = t$:

$$n(t) = f_n(t,t) \qquad r(t) = f_r(t,t)$$

Ed, infine, il **CPI forward**, valutato al tempo t con scadenza T_i, è definito come:

$$\mathcal{I}_i(t) := I(t)\frac{P_r(t,T_i)}{P_n(t,T_i)}$$

1.2.3 Dinamiche

La dinamica del tasso short risulta essere:

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \tag{1.1}$$

dove $a(t)$ e $b(t)$ sono processi adattati scalari e W è un moto browniano.
La dinamica del bond è:

$$dP(t,T) = P(t,T)m(t,T)dt + P(t,T)v(t,T)dW(t) \tag{1.2}$$

mentre quella del tasso forward è:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \tag{1.3}$$

dove $m(t,T), v(t,T), \alpha(t,T)$ e $\sigma(t,T)$ sono processi adattati parametrizzati dal tempo di maturità T e W è, ancora, un moto browniano.

[5]La misura di probabilità neutrale al rischio è una misura di probabilità sotto la quale il prezzo libero da arbitraggi di un'attività finanziaria è pari al suo valore atteso futuro scontato. E' nota anche come misura martingala equivalente, di cui verrà data la definizione al primo paragrafo del prossimo capitolo (2.1).

La relazione che sussiste tra queste dinamiche è espressa dalla seguente proposizione, sotto l'ipotesi che $m(t,T), v(t,T), \alpha(t,T)$ e $\sigma(t,T)$ sono differenziabili in modo continuo rispetto la variabile T.

Proposizione 1.2.1.

1. se $P(t,T)$ soddisfa la (1.2), allora la dinamica del tasso forward è data da
$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$
dove α e σ soddisfano le seguenti relazioni
$$\begin{cases} \alpha(t,T) = v_T(t,T) \cdot v(t,T) - m_T(t,T) \\ \sigma(t,T) = -v_T(t,T) \end{cases}$$
dove $m_T(t,T)$ e $v_T(t,T)$ indicano le derivate parziali di $m(t,T)$ e $v(t,T)$, rispetto la variabile T.

2. se $f(t,T)$ soddisfa (1.3), allora il tasso short soddisfa
$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t)$$
dove
$$\begin{cases} a(t) = f_T(t,t) + \alpha(t,t) \\ b(t) = \sigma(t,t) \end{cases}$$
dove $f_T(t,t)$ indica la derivata parziale di $f(t,t)$, rispetto T.

3. se $f(t,T)$ soddisfa (1.3), allora il bond soddisfa la seguente dimanica
$$dP(t,T) = P(t,T)[r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2]dt + P(t,T)S(t,T)dW(t)$$
dove $\|\cdot\|$ denota la norma euclidea e valgono
$$\begin{cases} A(t,T) = -\displaystyle\int_t^T \alpha(t,s)ds \\ S(t,T) = -\displaystyle\int_t^T \sigma(t,s)ds \end{cases}$$

Capitolo 2

Modelli di valutazione dei prezzi

Prima di affrontare il modello proposto da Jarrow e Yildirim, utile per prezzare gli Year-on-Year Swaps, detti YYIIS, che vedremo nel prossimo capitolo, introduciamo brevemente i modelli a cui si ispira, in modo tale da capirne meglio i passaggi.

2.1 Approccio della Martingala

La teoria di finanza moderna ha sviluppato due teoremi fondamentali che stabiliscono le condizioni per avere un mercato completo e libero da arbitraggi e, quindi, adatto per prezzare le opzioni. Consideriamo un modello di mercato, costituito da un insieme di processi di prezzo, $S_0, S_1, \ldots, S_N$, nell'intervallo di tempo $[0, T]$, rispetto ad una misura P, dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. S_0 è chiamato **processo numeraire** ed è assunto strettamente positivo. E' un titolo di base, rispetto al quale si misurano i valori degli altri titoli; si tratta, cioè, di un'unità di conto. Solitamente, come numeraire si assume il titolo non rischioso.

Definizione 2.1.1. Dati uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ e una misura di probabilità Q, rispetto $\mathcal{F}_t$, si dice che Q è una **misura martingala equivalente**, o abbreviato EMM, per il modello di mercato, per il numeraire S_0 e per l'intervallo di tempo, se soddisfa le seguenti proprietà:

1. Q è equivalente a P rispetto $\mathcal{F}_t$;

2. tutti i processi di prezzo $S_n^*(t) = \dfrac{S_n(t)}{S_0(t)}, n = 1, \dots, N$ sono delle Q-martingale, sull'intervallo di tempo $[0, T]$, ossia

$$S_n^*(t) = E^Q[S_n^*(s)|\mathcal{F}_t] \qquad 0 \le t \le s$$

Si indica con $Q \sim P$ e viene anche detta **misura di probabilità neutrale al rischio**.

La proprietà di martingala è equivalente a

$$S_n(t) = E^Q[D^{S_0}(t, T)S_n(T)|\mathcal{F}_t] \qquad n = 1, \dots, N, t \in [0, T]$$

dove $D^{S_0}(t, T) = \dfrac{S_0(t)}{S_0(T)}$ è il fattore di sconto.

Il nome di misura di probabilità neutrale al rischio deriva dal fatto che, sotto di essa, tutte le attività finanziarie hanno il medesimo tasso di rendimento atteso (detto **tasso privo di rischio**), a prescindere dalla loro rischiosità.

Primo Teorema Fondamentale 2.1.1. Il modello è libero da arbitraggi se e solo se esiste una misura martingala, $Q \sim P$, tale che i processi

$$\frac{S_0(t)}{S_0(t)}, \frac{S_1(t)}{S_0(t)}, \dots, \frac{S_N(t)}{S_0(t)}$$

sono delle Q-martingale locali.

Se il numeraire S_0 è il bank account

$$S_0(t) = B(t) = e^{-\int_0^t r(s)ds}$$

si ha

$$dS_0(t) = r(t)S_0(t)dt$$

dove r è il tasso short. Si suppone, inoltre, che tutti i processi sono dei moti browniani. La misura $Q \sim P$ è una misura martingala se tutti gli insiemi hanno il tasso short come loro tasso di ritorno, ossia le Q-dinamiche sono della forma:

$$dS_i(t) = S_i(t)r(t)dt + S_i(t)\sigma_i(t)dW_i^Q(t), \qquad i = 1, \dots, N$$

dove W^Q è un moto browniano multidimensionale, rispetto a Q.

Secondo Teorema Fondamentale 2.1.2. Supponendo che vi sia assenza di arbitraggi, il modello di mercato è completo se e solo se la misura martingala Q è unica.

Da questi due teoremi segue che, in un mercato libero da arbitraggi e completo, i prezzi d'arbitraggio e quelli neutrali al rischio coincidono; essi sono determinati dalla quotazione S_0 osservabile sul mercato.

Se si vuole prezzare un credito contingente, X, con maturità T, bisogna, prima di tutto, considerare il mercato 'primario' $S_0, S_1, \ldots$ come dato a priori e, successivamente, si deve determinare il processo di prezzo $\Pi(t; X)$ per X, assumendo che il mercato 'primario' sia libero da arbitraggi. Esistono due approcci principali:

1. il derivato viene valutato in modo consistente con i prezzi delle attività sottostanti, ossia il mercato esteso $\Pi(t; X)$, $S_0, S_1, \ldots$ è libero da arbitraggi;

2. se il credito è raggiungibile, con la copertuta del portafoglio h, allora l'unico prezzo ragionevole è dato da
$$\Pi(t; X) = V_t(h)$$
dove $V_t(h)$ indica il valore del portafoglio h, al tempo t.

Il primo approccio richiede che esista una misura martingala per il mercato esteso. Se si assume Q come tale misura, allora il processo del prezzo, libero da arbitraggi, per il credito X, è
$$\Pi(t; X) = S_0(t) E_Q \left[\frac{X}{S_0(t)} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$
dove Q è la misura martingala per il mercato, dato a priori, con numeraire S_0.
Se si sceglie come numeraire il bank account $B(t)$, l'equazione appena scritta, ossia la formula del prezzo, si riduce a

$$\Pi(t; X) = E_Q \left[e^{-\int_t^T r(s)ds} X \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{2.1}$$

Per il secondo approccio, si assume che X possa essere replicato da h.
Dato che il possesso del contratto di un derivato e il possesso di un portafoglio replicante

sono equivalenti, si ha che il prezzo del derivato, al fine di evitare arbitraggi, è dato da:

$$\Pi(t; X) = V(t; h)$$

Diverse scelte di copertura dei portafogli produrranno lo stesso processo di prezzo.

Altri due teoremi molto importanti permettono di utilizzare l'approccio della martingala nella teoria di arbitraggio in un modo molto semplice.

Teorema della Rappresentazione della Martingala 2.1.3. Siano W un moto browniano d-dimensionale, $\mathcal{F}_t$ la filtrazione generata dal moto browniano W_t e M una qualsiasi martingala $\mathcal{F}_t$-adattata. Allora esistono i processi $h_1, \ldots, h_d$, $\mathcal{F}_t$-adattati, determinati in maniera univoca, tali che M si rappresenta nella seguente forma

$$M(t) = M(0) + \sum_{i=1}^{d} \int_0^t h_i(s) dW_i(s), \qquad t \in [0, T]$$

Se la martingala M è quadrato integrabile, allora vale

$$h_1, \ldots, h_d \in \mathcal{H}^2$$

Teorema di Girsanov 2.1.4. Sia W^P un moto browniano, rispetto a P, d-dimensionale, nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$. Sia φ un processo adattato d-dimensionale, vettore a colonna. Preso un T fissato, si definisce il processo L, sull'intervallo di tempo $[0, T]$, nel modo seguente

$$dL_t = \varphi_t^* L_t dW_t^P, \qquad L_0 = 1$$

ossia

$$L_t = e^{\int_0^t \varphi_s^* dW_s^P - \frac{1}{2} \int_0^t \|\varphi_s\|^2 ds}$$

Supponendo che

$$E_P[L_T] = 1$$

si definisce una nuova misura di probabilità Q, rispetto $\mathcal{F}_T$, come

$$L_T = \frac{dQ}{dP}$$

allora si ha

$$dW_t^P = \varphi_t dt + dW_t^Q$$

dove W^Q è un moto browniano, rispetto a Q.

Il processo φ, menzionato sopra, sarà spesso indicato come il **nucleo di Girsanov della trasformazione della misura**, ed è tale che

$$E_Q\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T \|\varphi_t\|^2 dt}\right] < \infty$$

L è detta **funzione di verosimiglianza** o **derivata di Radon-Nikodym**.
Un modo equivalente e più popolare di formulare la tesi del Teorema di Girsanov è dire che il processo W^Q, definito come

$$W_t^Q = W_t^P - \int_0^t \varphi_s ds$$

è un moto broniano, rispetto Q.

2.1.1 Cambio di Numeraire

Sia S_0 il numeraire, con la corrispondente misura martingala Q^0, che si vuole cambiare in S_1. Una soluzione immediata è quella di trovare la trasformazione appropriata di Girsanov da Q^0 a Q^1, che è la misura martingala corrispondente al numeraire S_1.
Siano i processi di prezzo del credito X ù

$$\Pi(0; X) = S_0(0)E^0\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] \qquad \Pi(0; X) = S_1(0)E^1\left[\frac{X}{S_1(T)}\right]$$

e la derivata di Radon-Nicodym condizionata a $\mathcal{F}_t$

$$L_0^1(T) = \frac{dQ^1}{dQ^0}$$

allora si può scrivere

$$\Pi(0; X) = S_1(0)E^0\left[\frac{X}{S_1(T)}L_0^1(T)\right]$$

e, di conseguenza

$$S_0(0)E^0\left[\frac{X}{S_0(T)}\right] = S_1(0)E^0\left[\frac{X}{S_1(T)}L_0^1(T)\right]$$

Si deduce

$$\frac{S_0(0)}{S_0(T)} = \frac{S_1(0)}{S_1(T)} L_0^1(T)$$

e si ottiene, infine, la derivata di Radon-Nicodym

$$L_0^1(T) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \frac{S_1(T)}{S_0(T)}$$

La scelta ovvia della funzione di verosimiglianza è data da

$$L_0^1(t) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \frac{S_1(t)}{S_0(t)} \qquad 0 \leq t \leq T$$

Proposizione 2.1.2. Sia Q^0 la misura martingala per il numeraire S_0, condizionata a $\mathcal{F}_t$,e sia S_1 un processo di prezzo di un'attività finanziaria positivo, tale che $\dfrac{S_1(t)}{S_0(t)}$ è una Q^0-martingala. Si definisce Q^1, condizionata a $\mathcal{F}_t$, dalla funzione di verosimiglianza

$$L_0^1(t) = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \frac{S_1(t)}{S_0(t)} \qquad 0 \leq t \leq T$$

Allora Q^1 è una misura martingala che ha per numeraire S_1 e per ogni $X \in L^1(\Omega, Q^0)$ si ha che il prezzo neutrale al rischio, rispetto Q^0, di un derivato europeo X equivale a[1]

$$E^{Q^0}[D^{S_0}(t,T)X|\mathcal{F}_t] = E^{Q^1}[D^{S_1}(t,T)X|\mathcal{F}_t] \qquad t \in [0,T]$$

dove $D^{S_1}(t,T)$ è il fattore di sconto relativo al processo di prezzo S_1, ossia

$$D^{S_1}(t,T) = \frac{S_1(t)}{S_1(T)}$$

Dimostrazione. Sia

$$Z_t = \frac{S_0(0)}{S_1(0)} \frac{S_1(t)}{S_0(t)} \qquad t \in [0,T]$$

Dato che S_1 è un processo di prezzo rispetto a Q^0, Z è una Q^0-martingala strettamente positiva, e, quindi, dalla formula di Bayes (A.0.13), si ha

$$E^{Q^1}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{E^{Q^0}[XZ_T|\mathcal{F}_t]}{E^{Q^0}[Z_T|\mathcal{F}_t]} = E^{Q^0}\left[X\frac{Z_T}{Z_t}\middle|\mathcal{F}_t\right] = E^{Q^0}\left[X\frac{D^{S_0}(t,T)}{D^{S_1}(t,T)}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

[1] $L^1(\Omega, Q^0)$ sta ad indicare lo spazio delle funzioni sommabili, rispetto Q^0, di ordine p, ossia tali che

$$\|X\|_p := \left(\int_\Omega |X|^p dQ^0\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

dove nell'ultima uguaglianza è stato usata la seguente identità

$$\frac{Z_T}{Z_t} = \frac{S_0(0)}{S_1(0)}\frac{S_1(T)}{S_0(T)}\frac{S_0(t)}{S_1(t)}\frac{S_1(0)}{S_0(0)} = \frac{S_0(t)}{S_1(t)}\frac{S_1(T)}{S_0(T)} = \frac{D^{S_0}(t,T)}{D^{S_1}(t,T)}$$

Si è, quindi, dimostrato che per ogni $X \in L^1(\Omega, Q^1)$ si ha

$$E^{Q^1}[D^{S_1}(t,T)X|\mathcal{F}_t] = E^{Q^0}\left[\frac{D^{S_0}(t,T)}{D^{S_1}(t,T)}X\middle|\mathcal{F}_t\right] \qquad t \in [0,T]$$

Da questo segue che

$$E^{Q^0}[D^{S_0}(t,T)X|\mathcal{F}_t] = E^{Q^0}\left[\frac{D^{S_0}(t,T)}{D^{S_1}(t,T)}(D^{S_1}(t,T)X)\middle|\mathcal{F}_t\right] = E^{Q^1}[X|\mathcal{F}_t]$$

di conseguenza, si ha che per ogni $X \in L^1(\Omega, Q^0)$ vale

$$E^{Q^0}[D^{S_0}(t,T)X|\mathcal{F}_t] = E^{Q^1}[D^{S_1}(t,T)X|\mathcal{F}_t] \qquad t \in [0,T]$$

Inoltre $Q^1 \sim Q^0$, poichè $\dfrac{dQ^1}{dQ^0} > 0$, allora Q^1 è una misura martingala con numeraire S_1 e si ha così la tesi. □

Corollario 2.1.3. Siano U e V due processi di prezzo, con misure martingale corrispondenti Q^U e Q^V. Allora si ha

$$\frac{dQ^V}{dQ^U}\bigg|\mathcal{F}_t = \frac{V_t U_0}{U_t V_0}$$

Si considerino, ora, i numeraire come processi di Ito.

Lemma 2.1.4. Siano U e V due processi di Ito positivi della forma

$$dU_t = (\ldots)dt + \sigma_t^U dW_t$$

$$dV_t = (\ldots)dt + \sigma_t^V dW_t$$

dove W è un moto browniano multidimensionale, con matrice di correlazione ρ, e $\sigma_t^U, \sigma_t^V \in \mathbb{L}^2_{loc}$ sono i coefficienti di diffusione.[2]

Allora $\dfrac{V_t}{U_t}$ è un processo di Ito della forma

$$d\frac{V_t}{U_t} = (\ldots)dt + \frac{V_t}{U_t}\left[\frac{\sigma_t^V}{V_t} - \frac{\sigma_t^U}{U_t}\right]dW_t$$

[2] $\mathbb{L}^2_{loc}$, con $p \geq 1$, sta ad indicare lo spazio dei processi X progressivamente misurabili e tali che $X(\omega) \in L^p([0,T])$ per quasi ogni ω.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalla formula di Ito, dato che si ha

$$d\frac{V_t}{U_t} = \frac{dV_t}{U_t} - \frac{V_t dU_t}{U_t^2} + \frac{V_t}{U_t^3} d\langle U, V\rangle_t - \frac{1}{U_t^2} d\langle U, V\rangle_t$$

□

Teorema 2.1.4.1. Siano U e V due processi di prezzo, come nel lemma prima, con Q^U e Q^V le relative misure martingale e W^U e W^V i relativi moti browniani.
Allora vale la seguente formula per il cambiamento del drift:

$$dW_t^V = dW_t^U + \rho\left(\frac{\sigma_t^V}{V_t} - \frac{\sigma_t^U}{U_t}\right)dt$$

2.1.2 Misura T-forward

Sia $P(t,T)$ il prezzo, al tempo t, di uno zero-coupon bond con maturità T, rispetto la misura martingala Q con numeraire il bank account B:

$$P(t,T) = E^Q[D(t,T)|\mathcal{F}_t] \qquad t \le T$$

e si consideri la misura T-forward Q^T. Allora il prezzo neutrale al rischio H_t, al tempo t, di un derivato qualsiasi X, vale:

$$H_t = E^{Q^T}\left[\underbrace{\frac{P(t,T)}{P(T,T)}}_{1} X \middle| \mathcal{F}_t\right] = P(t,T)E^{Q^T}[X|\mathcal{F}_t]$$

Proposizione 2.1.5. Se Q denota la misura martingala neutrale al rischio, allora la funzione di verosimiglianza, condizionata a $\mathcal{F}_t$

$$L^T(t) = \frac{dQ^T}{dQ} \qquad 0 \le t \le T$$

è data da

$$L^T(t) = \frac{P(t,T)}{B(t)P(0,T)}$$

In particolare, se la dinamica, rispetto Q, del T-bond è della forma

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + P(t,T)v(t,T)dW(t)$$

dove W è un moto browniano multidimensionale, rispetto Q, allora la dinamica di L^T è data da

$$dL^T(t) = L^T(t)v(t,T)dW(t)$$

ossia il nucleo di Girsanov per il passaggio da Q a Q^T è dato dalla volatilità del T-bond $v(t,T)$.

Dimostrazione. La tesi segue immediatamente dalla proposizione (2.1.2) con $Q^1 = Q^T$ e $Q^0 = Q$. □

Proposizione 2.1.6. Per un qualsiasi contingente X si ha

$$\Pi(t;X) = P(t,T)E^{Q^T}[X|\mathcal{F}_t]$$

Si nota che vale la relazione $Q = Q^T$ se e solo se il tasso r è deterministico.

2.2 Modello di Heath-Jarrow-Morton

Esistono un numero considerevole di modelli dei tassi di interesse, dove il tasso short r è l'unica variabile esplicita. Essi, in realtà, specificano la dinamica, rispetto una misura martingala Q, del tasso r. Nel quadro proposto da Heath, Jarrow e Morton, l'intera curva dei tassi forward si evolve simultaneamente, secondo un insieme di curve di volatilità. In linea di massima, qualsiasi modello di tasso di interesse, con una curva continua di tassi forward, può essere incorporato nel modello HJM.

2.2.1 Modello Vasicek

Definizione 2.2.1. Un modello è detto in possesso di una **struttura a termine affine**, indicata anche **ATM**, se la struttura a termine $\{P(t,T)|0 \leq t \leq T, T > 0\}$ ha la forma

$$P(t,T) = F(t,r(t);T)$$

dove

1. $F(t,r(t);T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r}$;

2. A e B sono due funzioni deterministiche.

Proposizione 2.2.2. Supponiamo che μ e σ siano della forma

$$\begin{cases} \mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t) \\ \sigma(t,r) = \sqrt{\gamma(t)r + \delta(t)} \end{cases}$$

dove α, β, γ e δ sono funzioni del tempo.
Allora il modello ammette una ATM, dove A e B soddisfano il sistema

$$\begin{cases} B_t(t,T) + \alpha(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\gamma(t)B^2(t,T) = -1 \\ B(T,T) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_t(t,T) = \beta(t)B(t,T) - \frac{1}{2}\delta(t)B^2(t,T) \\ A(T,T) = 0 \end{cases}$$

Proposizione 2.2.3. La dinamica del tasso r è data da:

$$dr = (b - ar)dt + \sigma dW$$

dove b e $a > 0$ sono due costanti.
Nel modello Vasicek i prezzi dei bond sono dati da:

$$P(t,T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

dove $$B(t,T) = \frac{1}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)$$

$$A(t,T) = \frac{(B(t,T) - T - t)(ab - \frac{1}{2}\sigma^2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 B^2(t,T)}{4a}$$

2.2.2 Modello Vasicek esteso (Hull-White)

Il modello Vasicek esteso, detto anche modello Hull-White, proposto da Hull e White nel 1994, dà la dinamica del tasso r come segue:

$$dr = (\theta(t) - a(t)r)dt + \sigma(t)dW$$

dove $\theta(t), a(t) > 0$ e $\sigma(t)$ sono funzioni dipendenti dal tempo.
Si considerino la curva teorica del tasso forward $\{f(0,T)|T > 0\}$ e la curva osservata $\{f^*(0,T)|T > 0\}$, dove f^* è definito come

$$f^*(t,T) = -\frac{\partial \log P^*(t,T)}{\partial T}$$

Fissata una curva qualsiasi dei bond osservati $\{P^*(0,T)|T > 0\}$, con la condizione che $P^*(0,T)$ è due volte differenziabile, e scelto θ in questo modo:

$$\theta(T) = f_T^*(0,T) + g'(T) + a(f^*(0,T) + g(T))$$

dove $g(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 = \frac{\sigma^2}{2}B^2(0,t)$ e $g'(T)$ è la sua derivata prima calcolata in T, allora si ha una struttura a termine $\{P(0,T)|T > 0\}$ tale che

$$P(0,T) = P^*(0,T), \qquad \forall T > 0$$

Proposizione 2.2.4. Se si sceglie θ come sopra, in modo tale da invertire la yiled curve e si fissano a e σ. Di conseguenza, si ottiene il prezzo del bond

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)}$$

dove $B(t,T)$ e $A(t,T)$ sono due funzioni deterministiche, che valgono:

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

$$A(t,T) = \frac{P^*(0,T)}{P^*(0,t)} \exp\left[B(t,T)f^*(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)(1 - e^{-2at})\right]$$

La dinamica del bond $P(t,T)$ è pari a:

$$dP(t,T) = P(t,T)(\ldots)dt + P(t,T) \cdot \sigma^P(t)dW$$

dove

$$\sigma^P(t) = -\sigma B(t,T)$$

Il modello Vasicek esteso è uno dei più popolari modelli dei tassi short con struttura ATM. Questo tipo di modelli, come si è appena visto, ha soluzioni esplicite per i prezzi dei bond e per i prezzi delle loro opzioni. E', inoltre, relativamente semplice per prezzare altri strumenti.

2.2.3 Modello di mercato LIBOR

Sia dato un insieme di maturità crescenti $T_0, T_1, \ldots, T_N$ e si definisca

$$\alpha_i = T_i - T_{i-1} \qquad i = 1, \ldots, N$$

Definizione 2.2.5. Il **tasso LIBOR forward**, valutato al tempo t, per l'intervallo di tempo $[T_{i-1}, T_i]$, è definito nel seguente modo:

$$L_i(t) = \frac{1}{\alpha_i} \frac{P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i)}{P(t, T_i)} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.2}$$

dove $P(t, T)$ indica il prezzo del bond.

In particolare, se si considerano solamente due scadenze S e T, si ha che:

1. il tasso LIBOR forward é:

$$L(t; S, T) = -\frac{P(t, T) - P(t, S)}{(T - S)P(t, T)}$$

2. il tasso LIBOR spot è:

$$L(S, T) = -\frac{P(S, T) - 1}{(T - S)P(S, T)}$$

Lemma 2.2.6. Il processo LIBOR L_i è una martingala rispetto la corrispondente misura forward Q^{T_i}, sull'intervallo $[0, T_{i-1}]$, per ogni $i = 1, \ldots, N$.

Definizione 2.2.7. Se il tasso LIBOR forward soddisfa la seguente dinamica

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i(t)dW^i(t) \qquad i = 1, \ldots, N$$

dove W^i è un moto browniano, rispetto Q^i, e $\sigma_i(t)$ è una funzione deterministica.
Allora si ha un **modello di mercato LIBOR**, detto anche **modello LFM**, con volatilità $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N$.

2.2.4 Modello HJM

Si suppone che, per ogni $T > 0$ fissato, il tasso forward $f(-,T)$ ha un differenziale stocastico dato da:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)d\overline{W}(t) \tag{2.3}$$

$$f(0,T) = f^*(0,T)$$

dove $d\overline{W}(t)$ è un moto browniano, rispetto alla misura P, d-dimensionale, mentre $\alpha(-,T)$ e $\sigma(-,T)$ sono processi adattati. Il simbolo * denota che è un valore di mercato, ossia osservato e non teroico. La prima equazione è un'equazione differenziale stocastica nella variabile t, per un qualsiasi tempo di maturità T. La condizione iniziale è la curva dei tassi forward osservati, $\{f^*(t,T); T \geq 0\}$, che inserirà i prezzi dei bond osservati, in $t = 0$, e quelli teorici. La formula dei prezzi, per qualsiasi credito contingente, sarà data dall'equazione (2.1). Se α, σ e la curva dei tassi forward iniziale sono specificati dalla relazione:

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$$

allora è specificata l'intera struttura a termine

$$\{P(t,T); T > 0, 0 \leq t \leq T\} \tag{2.4}$$

Dato che ci sono d fonti di casualità (una per ogni componente del moto browniano d-dimensionale) e un numero infinito di attività negoziate (un'obbligazione per tempo di maturità T), è stata introdotta, nel mercato delle obbligazioni, un'opportunità di arbitraggio. Il sistema indotto dai prezzi delle obbligazioni non permette arbitraggi, se α e σ soddisfano certe condizioni.

HJM: condizione per il drift 2.2.1. Si suppone che la famiglia dei tassi forward, data dalla formula (2.3), e che il mercato dei bond indotti sono liberi da arbitraggi.
Allora esiste un processo d-dimensionale, vettore a colonna,

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \ldots, \lambda_d(t)]'$$

tale che vale

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T) \int_t^T \sigma(t,s)' ds - \sigma(t,T)\lambda(t) \qquad 0 \leq t \leq T$$

In questa formula $'$ indica il vettore trasposto.

Se, ora, si considera il modello dell'approccio della martingala, si suppone che i tassi forward sono specificati, rispetto la misura martingala Q, in questo modo:

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

$$f(0,T) = f^*(0,T)$$

dove W è un moto browniano d-dimensionale rispetto Q.
Una misura martingala fornisce automaticamente i prezzi senza arbitraggio, ma esistono diverse formule per i prezzi dei bond, che richiedono una relazione di consistenza tra α e σ, nelle dinamiche dei tassi forward.

HJM: condizione per il drift rispetto Q 2.2.2. Sotto la misura martingala Q, i processi α e σ devono soddisfare la seguente relazione, per ogni $t \leq T$:

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)'ds$$

Dimostrazione. Si osserva che se si comincia modellando direttamente rispetto la misura martingala, allora si può applicare la condizione precedente (2.2.1) con $\lambda = 0$.
Più dettagliatamente, si ha la dinamica del prezzo del bond dalla proposizione (1.2.1)

$$dP(t,T) = P(t,T)[r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2]dt + P(t,T)S(t,T)dW(t)$$

Inoltre si sa che, rispetto ad una misura martingala, il tasso di ritorno locale è equivalente al tasso r. Di conseguenza si ottiene questa equazione

$$r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2 = r(t)$$

che dà il risultato. □

Rispetto una specifica scelta di α e σ e una struttura a termine iniziale dei tassi forward, i tassi forward sono espressi secondo la seguente relazione:

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s)$$

Si possono calcolare i prezzi dei bond, usando la formula (2.4), che poi vengono utilizzati per calcolare i prezzi dei derivati.

Come visto sopra, il modello HJM è completamente descritto dalla volatilità del tasso forward istantaneo. Nella pratica, sono stati studiati e utilizzati diversi moduli standard funzionali, per $\sigma(t,T)$. Si definisce la funzione della volatilità come il tipo di volatilità di Vasicek:

$$\sigma(t,T) = \sigma e^{\lambda(T-t)}$$

dove σ e λ sono due costanti. Abbiamo visto che il modello Vasicek esteso ha i seguenti processi per il tasso short:

$$dr(t) = [\theta(t) - a(t)r(t)]dt + \sigma(t)dW(t)$$

Inoltre se si assumono $a(t)$ e $\sigma(t)$ costanti positive, si ritorna al modello Vasicek esteso e la dinamica del tasso short $r(t)$ si esprime, con media dipendente dal tempo pari a $\frac{\theta(t)}{a}$, attraverso il processo

$$dr(t) = [\theta(t) - ar(t)]dt + \sigma dW(t)$$

La funzione dipendente dal tempo $\sigma(t)$ è scelta in modo tale da adeguarsi esattamente la struttura a termine dei tassi di interesse attualmente osservati nel mercato. Se si indicano il tasso forward istantaneo del mercato e il fattore di sconto del mercato, al tempo 0 con maturità T, rispettivamente con $f^*(0,T)$ e $P^*(0,T)$, si ha

$$f^*(0,T) = -\frac{\partial \ln P^*(0,T)}{\partial T}$$

si può, quindi, dimostare che

$$\theta(t) = \frac{\partial f^*(0,T)}{\partial T} + af^*(0,T) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

Il prezzo al tempo t di un bond, pagante 1 alla maturità T, è dato dalla seguente equazione

$$P(t,T) = A(t,T)e^{-B(t,T)r(t)} \tag{2.5}$$

dove

$$B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

$$A(t,T) = \frac{P^*(0,T)}{P^*(0,t)} \exp\left[B(t,T)f^*(0,t) - \frac{\sigma^2}{4a}B^2(t,T)(1-e^{-2at})\right]$$

Un algoritmo per usare il modello HJM si potrebbe scrivere così:

1. a proprio piacere si specifica la volatilità $\sigma(t,T)$;

2. i parametri di drift dei tassi forward sono dati da $\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)'ds$;

3. si va sul mercato e si osserva la struttura dei tassi forward $\{f^*(0,T); T \geq 0\}$;

4. si integra in modo da ottenere la seguente struttura del tasso forward

$$f(t,T) = f^*(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s)$$

5. si calcola il prezzo dei bond attraverso la formula $P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)ds}$;

6. si utilizzano i risultati di cui sopra, al fine di calcolare i prezzi per i derivati.

2.3 Modello di Jarrow e Yildirim

Il modello proposto da Jarrow e Yildirim nel 2003, modello JY, per i tassi d'interesse ed il tasso d'inflazione, è il principale modello di riferimento per valutare i derivati inflation-indexed. La loro idea di un modello con struttura a termine a tre fattori e libera da arbitraggi è analoga al modello foreign-currency HJM. E' definito, inoltre, come caso particolare del modello Vasicek esteso.

Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con associata la filtrazione $\mathcal{F}_t$, i moti browniani $\overline{W}_n(t)$ e $\overline{W}_r(t)$ con $t = 0, \ldots, T$ sono inizializzati a 0 e hanno correlazioni date da:

$$d\overline{W}_n(t)d\overline{W}_r(t) = \rho_{n,r}dt$$

$$d\overline{W}_n(t)d\overline{W}_I(t) = \rho_{n,I}dt$$

$$d\overline{W}_r(t)d\overline{W}_I(t) = \rho_{r,I}dt$$

L'evoluzione dei tassi forward istantanei nominali e reali, con maturità T, e l'evoluzione dell'indice inflazionario sono definite come segue:

$$df_n(t,T) = \alpha_n(t,T)dt + \sigma_n(t,T)d\overline{W}_n(t)$$

$$df_r(t,T) = \alpha_r(t,T)dt + \sigma_r(t,T)d\overline{W}_r(t)$$
$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \mu_I(t)dt + \sigma_I(t)d\overline{W}_I(t)$$

dove α_n, α_r e μ_I sono variabili casuali, mentre σ_n, σ_r e σ_I sono funzioni deterministiche del tempo soggette ad alcune condizioni tecniche di scorrevolezza e di limitatezza[3]. In questo modello i tassi forward istantanei hanno una distribuzione normale, mentre l'indice inflazionario ha una distribuzione log-normale. E' possibile, quindi, avere tassi nominali e reali negativi.

Dal Primo Teorema Fondamentale (2.1.1) segue che i tre precessi sono liberi da arbitraggi se esiste una misura Q_n equivalente a P tale che

$$\frac{P_n(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)P_r(t,T)}{B_n(t)}, \frac{I(t)B_r(t)}{B_n(t)} \tag{2.6}$$

sono delle Q_n-martingale.
Dal teorema di Girsanov (2.1.4), invece, dato che $\overline{W}_n$ e $\overline{W}_r$ moti browniani rispetto a P, segue che esistono dei prezzi di mercato $(\lambda_n(t), \lambda_r(t), \lambda_I(t))$ tali che

$$dW_n(t) = \overline{W}_n(t) - \int_0^t \lambda_n(s)ds$$

$$dW_r(t) = \overline{W}_r(t) - \int_0^t \lambda_r(s)ds$$

[3] $\alpha_n(v,T)$ è un processo adattato rispetto $\mathcal{F}_t$ ed è misurabile unitamente al fatto che soddisfa

$$\int_0^T |\alpha_n(v,T)|dv < \infty$$

anche $\sigma_n(v,T)$ soddisfa

$$\int_0^T |\sigma_2(v,T)|dv < \infty$$

sono dei moti browniani rispetto Q_n.
Le seguenti condizioni garantiscono che i prezzi (2.6) sono delle Q_n-martingale:

$$\alpha_n(t,T) = \sigma_n(t,T)\left(\int_t^T \sigma_n(t,s)ds - \lambda_n(t)\right)$$

$$\alpha_r(t,T) = \sigma_r(t,T)\left(\int_t^T \sigma_r(t,s)ds - \sigma_I(t)\rho_{r,I} - \lambda_r(t)\right)$$

$$\mu_I(t) = n(t) - r(t) - \sigma_I(t)\lambda_I(t)$$

La prima equazione è la restrizione del drift del tasso forward istantaneo libero da arbitraggi del modello originale HJM, come abbiamo visto per la condizione per il drift (2.2.1). La seconda equazione è la stessa della precedente, aggiustata dalla correlazione e dalla volatilità del tasso reale e inflazionario. L'ultima equazione, infine, deriva dall'equazione di Fisher, vista nel paragrafo (1.2.1) del capitolo precedente. Grazie al Lemma di Ito, (B.0.23), e alle martingale menzionate sopra, Jarrow e Yildirim hanno ottenuto le seguenti espressioni per i processi dei prezzi, rispetto la misura di probabilità Q_n:

$$df_n(t,T) = \sigma_n(t,T)\int_t^T \sigma_n(t,s)ds + \sigma_n(t,T)dW_n(t)$$

$$df_r(t,T) = \sigma_r(t,T)\int_t^T [\sigma_r(t,s)ds - \sigma_I(t)\rho_{r,I}]dt + \sigma_r(t,T)dW_r(t)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [n(t) - r(t)]dt + \sigma_I(t)dW_I(t)$$

$$\frac{dP_n(t,T)}{P_n(t,T)} = n(t)dt - \int_t^T \sigma_n(t,s)dW_n(t)$$

$$\frac{dP_r(t,T)}{P_r(t,T)} = \left[r(t) - \sigma_I(t)\rho_{r,I}\int_t^T \sigma_r(t,s)ds\right]dt - \left[\int_t^T \sigma_r(t,s)ds\right]dW_r(t) \tag{2.7}$$

Per facilitare il calcolo dei prezzi dei derivati, si ipotizza una volatilità esponenzialmente decrescente, ossia si modella le volatilità dei tassi forward con le seguenti funzioni deterministiche nel tempo:

$$\sigma_n(t,T) = \sigma_n e^{-a_n(T-t)}$$

$$\sigma_r(t,T) = \sigma_r e^{-a_r(T-t)}$$

dove σ_n, σ_r, a_n e a_r sono costanti positive, e così si ottiene il modello Vasicek esteso per i tassi short istantanei:

$$\begin{aligned} dn(t) &= [\theta_n(t) - a_n n(t)]dt + \sigma_n dW_n(t) \\ dr(t) &= [\theta_r(t) - \rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r(t) \\ \frac{dI(t)}{I(t)} &= [n(t) - r(t)]dt + \sigma_I dW_I(t) \end{aligned} \tag{2.8}$$

dove $\theta_n(t)$ e $\theta_r(t)$ sono delle funzioni deterministiche usate per adattarsi esattamente alla struttura a termine attuale dei tassi nominali e reali, rispettivamente, cioè:

$$\begin{aligned} \theta_n(t) &= \frac{\partial f_n(0,t)}{\partial T} + a_n f_n(0,t) + \frac{\sigma_n^2}{2a_n}(1 - e^{-2a_n t}) \\ \theta_r(t) &= \frac{\partial f_r(0,t)}{\partial T} + a_r f_r(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r}(1 - e^{-2a_r t}) \end{aligned}$$

dove $\frac{\partial f_n}{\partial T}$ è la derivata parziale di f_n rispetto al secondo argomento, analogamente $\frac{\partial f_r}{\partial T}$ è la derivata parziale di f_r rispetto al secondo argomento.

Si può risolvere per $I(t)$, quindi, ponendo $Y = \ln I(t)$ e richiamando il lemma di Ito (B.0.23), si ha:

$$dY(t) = \frac{\partial Y}{\partial t}dt + \frac{\partial Y}{\partial I(t)}dI(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Y}{\partial I(t)^2} < dI(t) >^2 \tag{2.9}$$

Calcolando le derivate parziali e sostituendole, si ottiene:

$$dY(t) = [n(t) - r(t)]dt - \frac{1}{2}\sigma_I^2 dt + \sigma_I dW_I(t) \tag{2.10}$$

Ora si può finalmente considerare l'integrale da t a T e, con un secondo cambiamento di variabili, si ottiene il processo esplicito per $I(T)$, per ogni $t < T$:

$$I(T) = I(t)e^{\int_t^T [n(s) - r(s)]ds - \frac{1}{2}\sigma_I^2(T-t) + \sigma_I(W_I(T) - W_I(t))}$$

Supponendo che i tassi istantanei nominali e reali sono distribuiti normalmente rispetto le relative misure neutrali al rischio, si vede che il tasso reale r è un processo Ornestein-Uhlenbeck, rispetto la misura nominale Q_n, e l'indice inflazionario $I(t)$, al tempo t, è distribuito log-normalmente rispetto Q_n, per ogni $t > 0$.

Ci sono, tuttavia, diversi svantaggi in questo modello. Il primo, e più importante, è che i parametri non sono direttamente osservabili nel mercato. Il secondo è che non è consentito un collegamento tra gli strumenti che sono negoziati come prodotti zero-coupon e year-on-year. Questo ultimo punto non si prende in considerazione se si è interessati a strumenti di valutazione dei prezzi nei mercati, in cui non esiste un mercato liquido per questo prodotto.

2.3.1 Modello di Mercato di Mercurio

Nel 2004 Fabio Mercurio ha sviluppato due modelli di mercato, alternativi al modello JY appena visto, per il prezzaggio degli YYIIS.

Il suo primo modello di mercato recupera il modello LFM log-normale per i tassi reali e nominali, e un moto browniano per il tasso inflazionario forward. Il prezzo di un YYIIS dipende dalle volatilità istantanee dei tassi forward nominali e reali e le loro correlazioni, per ogni maturità di pagamento, e dalle correlazioni tra i tassi forward reali e gli indici inflazionari forward, sempre per ogni maturità di pagamento. Confrontato con il modello JY, questo modello ha il vantaggio di avere parametri in input più facili, ma allo stesso tempo ha lo svantaggio per quanto riguarda i calcoli da effettuare. La volatilità dei tassi reali, infatti, potrebbe essere difficoltosa da stimare. Presi in considerazioni questi difetti, Mercurio ha sviluppato un secondo modello di mercato per cercare di superarli.

Il secondo modello utilizza il fatto che l'indice inflazionario forward, al tempo T_i, è una martingala rispetto la misura T_i-forward. Dopodichè sviluppa il processo dell'indice inflazionario $dI(T_{i-1})$, sempre rispetto la misura T_i-forward, e ottiene una formula dei prezzi per un YYIIS, molto simile a quella del caso JY, preferibile in un modello LFM.

Vedremo l'applicazione di questi due modelli di mercato nei paragrafi (3.2.2) e (3.2.3) del prossimo capitolo.

2.3.2 Modello di Mercato di Belgrade-Benhamou-Koehler

Contemporaneamente a Mercurio, Belgrade, Benhamou e Koehler svilupparono, nel 2004, un modello di mercato alternativo al modello JY.

Questo modello cerca di incorporare le informazioni provenienti dai mercati degli zero-coupn swaps e degli YYIIS, per produrre un modello senza arbitraggi.
Ha due obiettivi principali:

1. essere semplice, ossia avere pochi parametri;

2. essere robusto, ossia essere in grado di replicare i prezzi del mercato.

La sua ossatura è supporre che il modello di mercato per l'inflazione consideri l'indice di ritorno inflazionario forward come una diffusione con la struttura della volatilità deterministica. Rispetto alla misura di probabilità neutrale al rischio Q, questo indice segue un moto browniano con volatilità e drift deterministici. Nel loro paper, Belgrade, Benhamou e Koehler hanno considerato tre diverse forme funzionali di volatilità (costante, con decomposizione esponenziale ed aggiustata esponenzialmente). Hanno presentato un metodo per parametrizzare la struttura della volatilità per inserire i dati di mercato. Inoltre, essi compiono una convessità di regolazione degli swaps inflazionari, derivante dalla differenza tra le misure martingale tra il numeratore e il denominatore. Dato che non si riesce a stimare implicitamente le correlazioni dai dati di mercato, essi suggeriscono alcune condizioni al contorno che per alcune ipotesi di modello (ad esempio struttura di volatilità costante) risultano non realistiche. Questo modello potrebbe essere usato solo nei mercati in cui si ottengono abbastanza informazioni provenienti dagli ZCIIS e dagli YYIIS. Uno svantaggio, tuttavia, è che è intenso computazionalmente.

Capitolo 3

Inflation-Indexed Swaps

E' necessario introdurre questi contratti, perchè possono essere considerati come la calibrazione in input del nostro particolare modello di prezzo.
Dato un insieme di istanti di tempo $T_1, T_2, \ldots, T_M$, un *inflation-indexed swap* è uno scambio, dove in ogni istante di tempo avviene un pagamento. La parte A paga alla parte B una somma calcolata al tasso d'inflazione relativo al periodo considerato, mentre viceversa la parte B paga alla parte A la stessa somma calcolata però ad un tasso fisso.
I più importanti inflation-indexed swaps sono gli *zero-coupon inflation-indexed swaps*, ZCIIS, e gli *year-on-year inflation-indexed swaps*, YYIIS.
Uno ZCIIS è un contratto che prevede un unico pagamento alla scadenza del contratto T_M, che assumiamo essere espressa in anni. Supponendo $T_0 = 0$ e $I(T_0) = I_0$, la parte A paga alla parte B, rispetto all'intervallo $[0, T_M]$, la somma variabile:

$$N\left[\frac{I(T_M)}{I_0} - 1\right] \tag{3.1}$$

mentre, viceversa, la parte B paga alla parte A la somma fissata:

$$N[(1 + K)^M - 1] \tag{3.2}$$

dove K è il tasso di interesse fissato dal contratto e N è il valore nominale definito nel contratto.
In altre parole, assumendo come tasso annuale composto:

$$K_M = (1 + K)^M - 1$$

il payoff di uno ZCIIS, al tempo T_M, denotato con $ZCIIS(T_M; T_M, K)$, è:

$$\mathbf{ZCIIS}(T_M; T_M, K) = N\left[\left(\frac{I(T_M)}{I_0} - 1\right) - K_M\right] \tag{3.3}$$

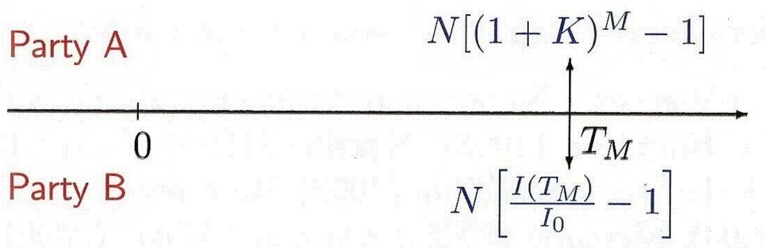

Figura 3.1: 'cash flow' relativo a uno ZCIIS, con scadenza T_M, dove M indica il numero degli anni.

Un YYIIS, invece, è un contratto che prevede un pagamento ad ogni istante di tempo T_i. Supponendo, come sopra, $T_0 = 0$, la parte A paga alla parte B, ad ogni istante di tempo T_i rispetto all'intervallo $[0, T_M]$, la somma variabile:

$$N\psi_i\left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right] \tag{3.4}$$

dove ψ_i è la year fraction del pagamento variabile relativa all'intervallo di tempo $[T_{i-1}, T_i]$. Viceversa la parte B paga alla parte A, ad ogni istante di tempo T_i, la somma fissata:

$$N\varphi_i K \tag{3.5}$$

dove φ_i è la year fraction della parte fissata dal contratto, relativa all'intervallo di tempo $[T_{i-1}, T_i]$, e N è il valore nominale del contratto.
E 'importante notare che YYIIS fissa il valore iniziale dell'indice inflazionario per ciascuna data di pagamento, invece di usare sempre lo stesso valore iniziale $I(T_0)$.
Il payoff di un YYIIS, al tempo T_M, denotato con $YYIIS(T_i; T_{i-1}, t_i, K)$, è quindi:

$$\mathbf{YYIIS}(T_i; T_{i-1}, t_i, K) = N\left[\psi_i\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right) - \varphi_i K\right] \tag{3.6}$$

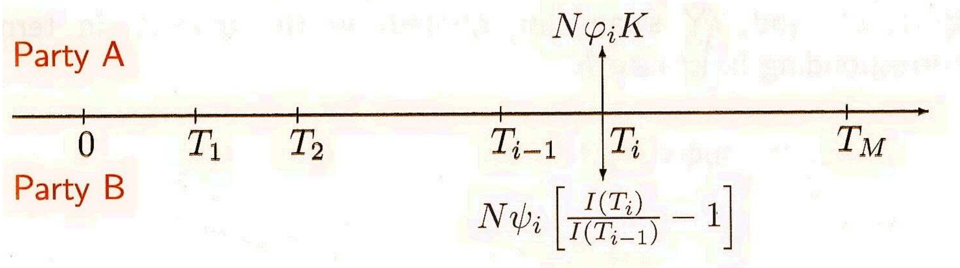

Figura 3.2: 'cash flow' relativo a un YYIIS, con scadenza T_M, dove M indica il numero degli anni.

3.1 Zero-Coupon Swaps

Per semplicità, denominiamo *lato* o *parte variabile* la somma variabile pagata dalla parte A alla parte B, ossia quella calcolata al tasso d'inflazione, mentre chiamiamo *lato* o *parte fisso* la somma fissa pagata viceversa dalla parte B alla parte A, ossia quella calcolata al tasso fisso, e supponiamo che la scadenza del contratto sia dopo M anni.
Si può notare che la valutazione del lato fisso non necessita di una profonda analisi, poichè basta scontare il pagamento fisso finale, dato di cui si conosce l'ammontare, con lo zero-coupon bond reale. Per la valutazione del lato variabile, invece, bisogna apprestare qualche attenzione.
Dalla teoria standard dei prezzi senza arbitraggi, il prezzo del lato variabile[1], al tempo t con $0 = T_0 \leq t < T_M$, è il valore atteso neutrale al rischio, rispetto alla filtrazione $\mathcal{F}_t$, del payoff nominale scontato alla scadenza:

$$\begin{aligned}\mathbf{ZCIIS}_f(t, T_M, I_0, N) &= N E_n \left\{ \frac{B_n(t)}{B_n(T_M)} \left(\frac{I(T_M)}{I_0} - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \\ &= N \left[\frac{1}{I_0} E_n \left\{ P_n(t, T_M) I(T_M) \middle| \mathcal{F}_t \right\} - P_n(t, T_M) \right] = \qquad (3.7) \\ &= N E_n \left\{ e^{-\int_t^{T_M} n(s) ds} \left(\frac{I(T_M)}{I_0} - 1 \right) \middle| \mathcal{F}_t \right\}\end{aligned}$$

[1]Denotiamo con $ZCIIS_f$ il lato variabile dello ZCIIS, dove la f pedice indica floating, che significa variabile in inglese.

$\mathcal{F}_t$ rappresenta la σ-algebra generata dal processo sottostante al tempo t e $E_n\{-|\mathcal{F}_t\}$ denota il valore atteso rispetto la misura martingala neutrale al rischio Q_n. Per semplificare il calcolo di questo valore atteso ricorriamo ad un risultato dell'analogia foreign-currency, che, supponendo di essere al tempo t, afferma che il valore atteso attuale di un payoff nominale $S(T_M)$ (a scadenza), considerato rispetto alla misura reale neutrale al rischio, scontato in t con il tasso d'interesse reale e moltiplicato per il tasso di cambio X al tempo t, equivale al valore atteso dello stesso payoff nominale, scontato rispetto l'economia nominale, moltiplicato per il tasso di cambio X al tempo T_M, considerato rispetto alla misura nominale neutrale al rischio[2], cioè:

$$X(t)E_r\left\{e^{-\int_t^{T_M} r(s)ds} S(T_M)\Big|\mathcal{F}_t\right\} = E_n\left\{e^{-\int_t^{T_M} n(s)ds} S(T_M)X(T_M)\Big|\mathcal{F}_t\right\}$$

Ponendo $S(T_M) = 1$ e considerando come tasso di cambio il CPI, per ogni $t < T_M$, si ha quindi:

$$I(t)P_r(t,T_M) = I(t)E_r\left\{e^{-\int_t^{T_M} r(s)ds}\Big|\mathcal{F}_t\right\} = E_n\left\{e^{-\int_t^{T_M} n(s)ds} I(T_M)\Big|\mathcal{F}_t\right\} \quad (3.8)$$

Espandendo la formula (3.7) e sostitutendo il valore atteso $E_n\{\cdot\}$ nell'equazione sopra, (3.8), si ottiene una formula per il lato variabile, indipendente dal modello, data da:

$$\mathbf{ZCIIS}_f(t,T_M,I_0,N) = N\left[\frac{I(t)}{I_0}P_r(t,T_M) - P_n(t,T_M)\right] \quad (3.9)$$

In particolare, al tempo $t = 0$, vale:

$$\mathbf{ZCIIS}_f(0,T_M,I_0,N) = N\Big[P_r(0,T_M) - P_n(0,T_M)\Big] \quad (3.10)$$

Essendo indipendenti dal modello, questi prezzi non sono basati su ipotesi specifiche riguardanti l'evoluzione del mercato dei tassi d'interesse, ma sull'assenza di arbitraggi. Questo importante risultato ci consente di estrapolare, in maniera semplice, il prezzo dello zero-coupon reale dal prezzo quotato dello ZCIIS e dallo zero coupon nominale. Il

[2]Il prezzo nominale di uno zero-coupon bond reale è equivalente al prezzo nominale del contratto pagante un'unità di CPI alla maturità del bond.

mercato, infatti, quota, con frequenza giornaliera, i valori del cosiddetto *tasso dello zero coupon swap*, $K = K(T_M)$, per alcune scadenze T_M date. Di conseguenza, equiparando la formula (3.10) con il valore nominale attuale di (3.2) e considerando il fattore di sconto $P_n(0, T_M)$, si ottiene il seguente fattore di sconto, $P_r(0, T_M)$, nell'economia reale, con scadenza T_M:

$$P_r(0, T_M) = P_n(0, T_M)(1 + K)^M \tag{3.11}$$

Infine, il tasso fisso dello ZCIIS, per il quale lo ZCIIS ha valore 0 al tempo $t = 0$, è dato da:

$$K = \left[\frac{P_r(0, T_M)}{P_n(0, T_M)}\right]^{\frac{1}{M}} - 1 \tag{3.12}$$

Osservazione 3.1.1. Nel modello proposto da Kazziha, nel 1999, il valore, al tempo t, del CPI forward, con scandenza T, è definito come la somma fissata X che deve essere scambiata al tempo T con il CPI $I(T)$, per cui lo scambio vale 0 al tempo t. Dalla formula (3.8) segue immediatamente:

$$I(t)\, P_r(t, T) = X\, P_n(t, T)$$

Il vantaggio dell'approccio di Kazziha è il fatto che non sia necessaria l'analogia foreign-currency per la definizione del CPI forward $\mathcal{I}_i$. Inoltre il sistema di prezzaggio, che ha definito, è basato solamente sugli zero-coupon bond nominali e il CPI forward. In questo modo il valore, al tempo $t = 0$, del CPI forward, con scadenza T_M, si può ottenere dal mercato applicando la semplice formula:

$$\mathcal{I}_M(0) = I(0)(1 + K)^M$$

che è equivalente alla (3.11).

3.2 Year-on-Year Swaps

Nonostante siano abbastanza simili agli ZCIIS, gli YYIIS non sono così facili da prezzare e richiedono, nella loro valutazione, un altro tipo di approccio.

Riprendendo le ipotesi viste nella definizione degli YYIIS, dalla (3.4) segue che il valore, al tempo $t < T_i$, di ogni singolo pagamento, in T_i, del lato variabile[3] di un YYIIS:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i E_n\left\{ D_n(t, T_i)\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right)\middle|\mathcal{F}_t\right\} \tag{3.13}$$

Per $t > T_{i-1}$ l'equazione appena vista si riduce al caso precedente, ossia a prezzare il lato variabile di uno ZCIIS tramite l'equazione (3.9).
Utilizzando le proprietà dell'attesa condizionata, si può riscrivere il payoff come segue:

$$N\psi_i E_n\left\{ e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(s)ds} \underbrace{E_n\left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} n(s)ds} \left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right)\middle|\mathcal{F}_{T_{i-1}}\right]}_{ZCIIS_f(T_{i-1}, T_i, I(T_{i-1}), 1)} \middle|\mathcal{F}_t\right\} \tag{3.14}$$

Prestando attenzione a questa equazione, si osserva che il valore atteso più interno altro non è che il payoff $ZCIIS_f(T_{i-1}, T_i, I(T_{i-1}), 1)$, con valore nominale pari a 1. Analogamente alla formula (3.10), al tempo T_{i-1}, si ottiene la seguente struttura per la parte variabile di un YYIIS:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i E_n\left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(s)ds} \Big(P_r(T_{i-1}, T_i) - P_n(T_{i-1}, T_i)\Big)\middle|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= N\psi_i E_n\left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(s)ds} P_r(T_{i-1}, T_i)\middle|\mathcal{F}_t\right] - N\psi_i P_n(t, T_i) \tag{3.15}$$

L'ultimo valore atteso può essere visto come il prezzo nominale di un derivato pagante, in unità nominali, lo zero-coupon bond reale $P_r(T_{i-1}, T_i)$, al tempo T_{i-1}. Se i tassi reali fossero deterministici, questo sarebbe equivalente al valore attuale, in termini nominali,

[3] Denotiamo con $\mathbf{YYIIS}_f$ il lato variabile di un YYIIS, dove la f pedice indica floating, che, in inglese, significa variabile.

del prezzo forward del bond reale. Si avrebbe, infatti:

$$E_n\left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(s)ds} P_r(T_{i-1},T_i)\middle|\mathcal{F}_t\right] = P_r(T_{i-1},T_i)P_n(t,T_{i-1}) = \frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}P_n(t,T_{i-1}) \tag{3.16}$$

Nella pratica, tuttavia, i tassi reali sono stocastici, di conseguenza il valore atteso della formula (3.15) è dipendente dal modello.
Per valutare questo valore atteso, quindi, si ricorre al modello JY.

3.2.1 Valutare un YYIIS con il Modello JY

Denotando con Q_n^T la misura nominale T-forward, vista al paragrafo (2.1.2), per una qualsiasi maturità T e con valore atteso associato E_n^T, si può riscrivere la formula (3.15), ossia il payoff di un singolo pagamento del lato variabile di un YYIIS, come segue:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,N) = N\psi_i E_n\left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} n(s)ds} P_r(T_{i-1},T_i)\middle|\mathcal{F}_t\right] - N\psi_i P_n(t,T_i) = \tag{3.17}$$

$$= N\psi_i E_n^{T_{i-1}}\left[P_n(t,T_{i-1})\underbrace{\frac{P_r(T_{i-1},T_i)}{P_r(T_{i-1},T_{i-1})}}_{1}\underbrace{P_n(T_{i-1},T_{i-1})}_{1}\middle|\mathcal{F}_t\right] - N\psi_i P_n(t,T_i) =$$

$$= N\psi_i P_n(t,T_{i-1})E_n^{T_{i-1}}[P_r(T_{i-1},T_i)|\mathcal{F}_t] - N\psi_i P_n(t,T_i)$$

Per calcolare quest'ultimo valore atteso, è necessario richiamare la formula (2.5) dello zero-coupon bond del modello di Hull e White:

$$P_r(t,T) = A_r(t,T)e^{-B_r(t,T)r(t)}$$

dove

$$B_r(t,T) = \frac{1}{a_r}\left[1 - e^{-a_r(T-t)}\right]$$

$$A_r(t,T) = \frac{P_r^M(0,T)}{P_r^M(0,t)}\exp\left[B_r(t,T)f_r^M(0,t) - \frac{\sigma_r^2}{4a_r}\left(1 - e^{-2a_r t}\right)B_r(t,T)^2\right]$$

Si osserva che il tasso short istantaneo reale, $r(T_{i-1})$, rispetto questa misura nominale forward, è un processo Ornstein Uhlenbeck e la sua funzione di densità di probabilità è gaussiana, ossia è una variabile casuale normale. Qualsiasi cambiamento di misura, quindi, ha effetto sul suo termine di drift, che corrisponde alla sua media, e non sulla sua varianza. Il valore atteso scritto sopra, allora, diventa:

$$E_n^{T_{i-1}}[P_r(T_{i-1},T_i)|\mathcal{F}_t] = A_r(T_{i-1},T_i)E_n^{T_{i-1}}\left[e^{B_r(T_{i-1},T_i)r(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right] =$$

$$= A_r(T_{i-1},T_i)e^{-B_r(T_{i-1},T_i)[m_r^t(T_{i-1}) - \frac{1}{2}B_r(T_{i-1},T_i)\nu_r^t(T_{i-1})]}$$

dove $m_r^t(T_{i-1})$ e $\nu_r^t(T_{i-1})$ sono, rispettivamente, la media e la varianza di $r(T_{i-1})$, condizionate a $\mathcal{F}_t$, e valgono:

$$m_r^t(T_{i-1}) = E[r(T_{i-1})|\mathcal{F}_t] = r(t)e^{-a_r(T_{i-1}-t)} + \alpha(T_{i-1}) - \alpha(t)e^{-a_r(T_{i-1}-t)} +$$

$$-\rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r B_r(t,T_{i-1}) - \frac{\rho_{n,r}\sigma_r\sigma_n}{a_r+a_n}\left[B_r(t,T_{i-1}) + a_r B_n(t,T_{i-1})B_r(t,T_{i-1}) - B_n(t,T_{i-1})\right]$$

$$\nu_r^t(T_{i-1}) = Var[r(T_{i-1})|\mathcal{F}_t] = \frac{\sigma_r^2}{2a_r}\left[1 - e^{-2a_r(T_{i-1}-t)}\right]$$

dove $\alpha(t) = f_r^*(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2}(1-e^{-2a_r t})^2$.

Dopo aver applicato il cambio di numeraire, dal bank account B allo zero-coupon bond $P(t,T)$, visto in dettaglio al paragrafo (2.1.1), si utilizzano la dinamica dello zero-coupon bond (2.7) e il teorema del cambio di numeraire (2.1.4.1), per ottenere:

$$dW_t^B = dW_t^P + \rho\left(\frac{\sigma^P}{P_t} - \overbrace{\frac{\sigma^B}{B_t}}^{0}\right)dt =$$

$$= dW^{T_{i-1}} + \rho_{n,r}\left[\frac{-P(t,T_{i-1})\sigma_n B_n(t,T_{i-1})}{P(t,T_{i-1})}\right]dt = dW^{T_{i-1}} + \rho_{n,r}[-\sigma_n B_n(t,T_{i-1})]dt$$

Sostituendo questa espressione, nella dinamica del tasso short istantaneo (2.8) del modello JY, si ottiene la seguente dinamica per il tasso reale istantaneo, rispetto la misura $Q_n^{T_{i-1}}$:

$$dr(t) = [\theta_r(t) - \rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r^B(t) =$$

$$= [\theta_r(t) - \rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r - a_r r(t)]dt + \sigma_r[dW^{T_{i-1}}(t) + \rho_{n,r}(-\sigma_n B_n(t,T_{i-1}))dt] =$$

$$= [-\rho_{n,r}\sigma_n\sigma_r B_n(t,T_{i-1}) + \vartheta_r(t) - \rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r - a_r r(t)]dt + \sigma_r dW_r^{T_{i-1}}(t)$$

dove $W_r^{T_{i-1}}$ è un moto browniano rispetto la misura $Q_n^{T_{i-1}}$.
Di conseguenza, si ha che il prezzo del bond reale, $P_r(T_{i-1}, T_i)$, è distribuito log-normalmente, rispetto $Q_n^{T_{i-1}}$. Dopo vari calcoli algebrici, infine, si ottiene:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i P_n(t, T_{i-1}) \frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} - N\psi_i P_n(t, T_i) \quad (3.18)$$

dove

$$C(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma_r B_r(T_{i-1}, T_i) \Bigg[B_r(t, T_{i-1}) \Bigg(\rho_{r,I}\sigma_I - \frac{1}{2}\sigma_r B_r(t, T_{i-1}) + \\ + \frac{\rho_{n,r}\sigma_n}{a_n + a_r}(1 + a_r B_n(t, T_{i-1})) \Bigg) - \frac{\rho_{n,r}\sigma_n}{a_n + a_r} B_n(t, T_{i-1}) \Bigg]$$

Il valore atteso del prezzo di uno zero-coupon bond reale, rispetto una misura nominale forward, nel modello JY, è, quindi, equivalente al prezzo forward attuale di un bond reale, moltiplicato con un fattore di correzione, che dipende dalle volatilità istantanee del tasso nominale, reale e del CPI, dalla correlazione istantanea tra i tassi nominali e reali e dalla correlazione istantanea tra il tasso reale e il CPI.
L'esponenziale C è il termine di correlazione appena menzionato. Esso spiega la stocasticità dei tassi effettivi e di fatto si annulla per $\sigma_r = 0$. Quando ciò avviene si ha la formula deterministica per il tasso reale.

Il valore, al tempo t, del lato variabile di un YYIIS si ottiene semplicemente sommando i valori di tutti i pagamenti variabili:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, \mathcal{T}, \Psi, N) = N\psi_{\iota(t)} \left[\frac{I(t)}{I(T_{\iota(t)-1})} P_r(t, T_{\iota(t)}) - P_n(t, T_{\iota(t)}) \right] + \quad (3.19)$$
$$+ N \sum_{i=\iota(t)+1}^{M} \psi_i \left[P_n(t, T_{i-1}) \frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} - P_n(t, T_i) \right]$$

dove si è stabilito che $\mathcal{T} := \{T_1, \ldots, T_M\}$, $\Psi := \{\psi_1, \ldots \psi_M\}$ e $\iota(t) = \min\{i : T_i > t\}$[4] e dove il primo pagamento, dopo il tempo t, è stato valutato in base alla formula dello ZCIIS (3.9). In particolare, al tempo $t = 0$, si ha

$$\mathbf{YYIIS}_f(0, \mathcal{T}, \Psi, N) = N\psi_1 \Big[P_r(0, T_1) - P_n(0, T_1) \Big] + \quad (3.20)$$

[4]Per definizione $T_{\iota(t)-1} \le t \le T_{\iota(t)}$

$$+N\sum_{i=2}^{M}\psi_i\left[P_n(0,T_{i-1})\frac{P_r(0,T_i)}{P_r(0,T_{i-1})}e^{C(0,T_{i-1},T_i)}-P_n(0,T_i)\right]$$

andando a sostituire

$$F_x(0,T_{i-1},T_i)=\frac{1}{\tau_i}\left[\frac{P_x(0,T_{i-1})}{P_x(0,T_i}-1\right]\qquad x\in\{n,r\}$$

si ottiene

$$\mathbf{YYIIS}_f(0,\mathcal{T},\Psi,N)=N\sum_{i=1}^{M}\psi_iP_n(0,T_i)\left[\frac{1+\tau_iF_n(0;T_{i-1},T_i)}{1+\tau_iF_r(0;T_{i-1},T_i)}e^{C(0,T_{i-1},T_i)}-1\right]$$

Il vantaggio di usare i modelli gaussiani per i tassi nominali e reali è chiaro per quanto la trattabilità analitica è preoccupata. Tuttavia, la possibilità di avere interessi negativi e la difficoltà, dello stimare storicamente i parametri del tasso reale, hanno portato a soluzioni alternative. Infatti sono stati proposti, come valutazioni alternative di un YYIIS e di altri derivati inflation-indexed, due modelli di mercato diversi.

3.2.2 Valutare un YYIIS con il Primo Modello di Mercato

Per un prezzaggio alternativo di un YYIIS si osserva che si può cambiare la misura e riscrivere il valore atteso della formula (3.17) in questo modo:

$$P_n(t,T_{i-1})E_n^{T_{i-1}}\left\{P_r(T_{i-1},T_i)\middle|\mathcal{F}_t\right\}=P_n(t,T_i)E_n^{T_i}\left\{\frac{P_r(T_{i-1},T_i)}{P_n(T_{i-1},T_i)}\middle|\mathcal{F}_t\right\}= \tag{3.21}$$

$$=P_n(t,T_i)E_n^{T_i}\left\{\frac{1+\tau_iF_n(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{1+\tau_iF_r(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}\middle|\mathcal{F}_t\right\}$$

che può essere calcolato non appena si specifica la distribuzione di entrambi i tassi forward rispetto la misura nominale T_i-forward.

Sembra naturale, quindi, ricorrere al modello LFM, descritto al paragrafo (2.2.3), che suppone l'evoluzione dei tassi forward semplicemente composti, ossia le variabili che esplicitamente fanno parte dell'ultimo valore atteso.

Dato che $I(t)P_r(t,T_i)$ è il prezzo di un'attività nell'economia nominale, il CPI forward, della forma

$$\mathcal{I}_i(t)=I(t)\frac{P_r(t,T_i)}{P_n(t,T_i)},$$

è una martingala rispetto $Q_n^{T_i}$, dalla definizione stessa di $Q_n^{T_i}$.
Supponendo che la sua dinamica, $\mathcal{I}_i$, sia log-normale, ossia

$$d\mathcal{I}_i(t) = \sigma_{I,i}\mathcal{I}_i(t)dW_i^I(t) \tag{3.22}$$

dove $\sigma_{I,i}$ è una costante positiva e W_i^I è un moto browniano rispetto $Q_n^{T_i}$, e supponendo inoltre che entrambi i tassi nominali e reali forward seguono la formula (2.2) del modello LFM, l'analogia, con la valutazione dei derivati cross-currency, implica che le dinamiche di $F_n(-;T_{i-1},T_i)$ e $F_r(-;T_{i-1},T_i)$, rispetto $Q_n^{T_i}$, sono date da

$$dF_n(t;T_{i-1},T_i) = \sigma_{n,i}F_n(t;T_{i-1},T_i)dW_i^n(t) \tag{3.23}$$

$$dF_r(t;T_{i-1},T_i) = F_r(t;T_{i-1},T_i)[-\rho_{I,r,i}\sigma_{I,i}\sigma_{r,i}dt + \sigma_{r,i}dW_i^r(t)]$$

dove $\sigma_{r,i}$ e $\sigma_{n,i}$ sono costanti positive, W_i^n e W_i^r sono due moti browniano con correlazione istantanea ρ_i e $\rho_{I,r,i}$ è la correlazione istantanea tra $\mathcal{I}_i(-)$ e $F_r(-;T_{i-1},T_i)$, cioè

$$dW_i^I(t)dW_i^r(t) = \rho_{I,r,i}dt$$

Permettendo a $\sigma_{I,i}$, $\sigma_{r,i}$ e $\sigma_{n,i}$ di essere due funzioni determistiche del tempo, i calcoli qui di seguito non sono complicati. Si supporrà che tali volatilità sono costanti soltanto per una semplificazione di notazione. In pratica, tuttavia, le implicazioni, dell'utilizzo di coefficienti costanti o dipendenti dal tempo, dovrebbero essere analizzate attentamente.

Il valore atteso nella formula (3.21) si può quindi calcolare facilmente con un'integrazione numerica, osservando che la coppia[5]

$$(X_i, Y_i) = \left(\ln \frac{F_n(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{F_n(t;T_{i-1},T_i)}, \ln \frac{F_r(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{F_r(t;T_{i-1},T_i)} \right) \tag{3.24}$$

condizionata a $\mathcal{F}_t$ rispetto a $Q_n^{T_i}$, si distribuisce come una variabile random normale bivariata con vettore principale:

$$M_{X_i,Y_i} = \begin{bmatrix} \mu_{x,i}(t) \\ \mu_{y,i}(t) \end{bmatrix}$$

[5] Per semplicità di notazione si scrive (X_i, Y_i) invece di $(X_i(t), Y_i(t))$.

dove
$$\mu_{x,i}(t) = -\frac{1}{2}\sigma^2_{n,i}(T_{i-1} - t)$$

$$\mu_{y,i}(t) = [-\frac{1}{2}\sigma^2_{r,i} - \rho_{I,r,i}\sigma_{I,i}\sigma_{r,i}](T_{i-1} - t)$$

e matrice di varianza e corvarianza pari a:

$$V_{X_i,Y_i} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{x,i}(t) & \rho_i\sigma_{x,i}(t)\sigma_{y,i}(t) \\ \rho_i\sigma_{x,i}(t)\sigma_{y,i}(t) & \sigma^2_{y,i}(t) \end{bmatrix}$$

dove
$$\sigma_{x,i}(t) = \sigma_{n,i}\sqrt{T_{i-1} - t}$$

$$\sigma_{y,i}(t) = \sigma_{r,i}\sqrt{T_{i-1} - t}$$

Si sa che la densità $f_{X_i,Y_i}(x, y)$ di (X_i, Y_i) si può decomporre in questo modo:

$$f_{X_i,Y_i}(x, y) = f_{X_i|Y_i}(x, y)f_{Y_i}(y)$$

dove

$$f_{X_i|Y_i}(x, y) = \frac{1}{\sigma_{x,i}(t)\sqrt{2\pi}\sqrt{1 - \rho_i^2}} \exp\left[\frac{\left(\frac{x - \mu_{x,i}(t)}{\sigma_{x,i}(t)} - \rho_i\frac{y - \mu_{y,i}(t)}{\sigma_{y,i}(t)}\right)^2}{2(1 - \rho_i^2)}\right]$$

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sigma_{y,i}(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_{y,i}(t)}{\sigma_{y,i}(t)}\right)^2\right]$$

Allora il valore atteso nella formula (3.21) diventa:

$$E_n^{T_i}\left\{\frac{1 + \tau_iF_n(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_iF_r(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}\middle|\mathcal{F}_t\right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(1 + \tau_iF_n(t; T_{i-1}, T_i)e^x)f_{X_i|Y_i}(x, y)}{1 + \tau_iF_r(t; T_{i-1}, T_i)e^y}f_{Y_i}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tau_iF_n(t; T_{i-1}, T_i)e^{\mu_{x,i}(t) + \rho_i\sigma_{x,i}(t)\frac{y - \mu_{y,i}(t)}{\sigma_{y,i}(t)} + \frac{1}{2}\sigma^2_{x,i}(t)(1 - \rho_i^2)}}{1 + \tau_iF_r(t; T_{i-1}, T_i)e^y}f_{Y_i}(y)dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tau_i F_n(t; T_{i-1}, T_i) e^{\rho_i \sigma_{x,i}(t) z - \frac{1}{2}\sigma_{x,i}^2(t)\rho_i^2}}{1 + \tau_i F_r(t; T_{i-1}, T_i) e^{\mu_{y,i}(t) + \sigma_{y,i}(t) z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

e così si ottiene il payoff di un pagamento singolo variabile di un YYIIS:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = \tag{3.25}$$

$$= N\psi_i P_n(t, T_i) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + \tau_i F_n(t; T_{i-1}, T_i) e^{\rho_i \sigma_{x,i}(t) z - \frac{1}{2}\sigma_{x,i}^2(t)\rho_i^2}}{1 + \tau_i F_r(t; T_{i-1}, T_i) e^{\mu_{y,i}(t) + \sigma_{y,i}(t) z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - N\psi_i P_n(t, T_i)$$

Per valutare l'intera parte variabile dello swap bisogna prestare un pò d'attenzione, poichè non è possibile sommare semplicemente i valori (3.25) dei pagamenti variabili singoli. Non si può supporre, infatti, che le volatilità $\sigma_{I,i}$, $\sigma_{n,i}$ e $\sigma_{r,i}$ siano costanti positive per ogni i, poichè esiste una relazione ben precisa tra due CPI forward consecutivi e i corrispondenti tassi forward nominali e reali:

$$\frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)} = \frac{1 + \tau_i F_n(t; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_r(t; T_{i-1}, T_i)}$$

Chiaramente, se si suppone che $\sigma_{I,i}$, $\sigma_{n,i}$ e $\sigma_{r,i}$ sono costanti positive, $\sigma_{I,i-1}$ non può essere ugualmente costante e i suoi valori ammissibili sono ottenuti dall'uguagliare le variazioni quadratiche istantanee di entrambi i lati della formula appena scritta.

Congelando i tassi forward al loro valore al tempo 0 nei coefficienti di diffusione della parte a destra dell'equazione sopra, tuttavia, si possono ancora ottenere le volatilità forward del CPI, che sono approssimativamente costanti. Per esempio nel caso del modello a un fattore

$$\begin{aligned}
\sigma_{I,i-1} &= \sigma_{I,i} + \sigma_{r,i} \frac{\tau_i F_r(t; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_r(t; T_{i-1}, T_i)} - \sigma_{n,i} \frac{\tau_i F_n(t; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_n(0; T_{i-1}, T_i)} \\
&\approx \sigma_{I,i} + \sigma_{r,i} \frac{\tau_i F_r(0; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_r(0; T_{i-1}, T_i)} - \sigma_{n,i} \frac{\tau_i F_n(0; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_n(0; T_{i-1}, T_i)}
\end{aligned}$$

Applicando questa procedura di congelamento per ogni $i < M$ a partire da $\sigma_{I,M}$ oppure, equivalentemente, per ogni $i > 2$ a partire da $\sigma_{I,1}$, consente ancora di supporre che le volatilità $\sigma_{I,i}$ sono tutte costanti e impostate su uno dei loro valori ammissibili. Il valore al tempo t della parte variabile dello swap è perciò data da:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t,\mathcal{T},\Psi,N) = N\psi_{\iota(t)}\left[\frac{I(t)}{I(T_{\iota(t)-1})}P_r(t,T_{\iota(t)}) - P_n(t,T_{\iota(t)})\right]$$

$$+N\sum_{i=\iota(t)+1}^{M}\psi_i P_n(t,T_i)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\tau_i F_n(t;T_{i-1},T_i)e^{\rho_i\sigma_{x,i}(t)z-\frac{1}{2}\sigma_{x,i}^2(t)\rho_i^2}}{1+\tau_i F_r(t;T_{i-1},T_i)e^{\mu_{y,i}(t)+\sigma_{y,i}(t)z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz - 1\right]$$

In particolare per $t=0$ si ha:

$$\mathbf{YYIIS}_f(0,\mathcal{T},\Psi,N) = N\psi_1\Big[P_r(0,T_1) - P_n(0,T_1)\Big] + \tag{3.26}$$

$$+N\sum_{i=2}^{M}\psi_i P_n(0,T_i)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\tau_i F_n(0;T_{i-1},T_i)e^{\rho_i\sigma_{x,i}(0)z-\frac{1}{2}\sigma_{x,i}^2(0)\rho_i^2}}{1+\tau_i F_r(0;T_{i-1},T_i)e^{\mu_{y,i}(0)+\sigma_{y,i}(0)z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz - 1\right] =$$

$$= N\sum_{i=1}^{M}\psi_i P_n(0,T_i)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+\tau_i F_n(0;T_{i-1},T_i)e^{\rho_i\sigma_{x,i}(0)z-\frac{1}{2}\sigma_{x,i}^2(0)\rho_i^2}}{1+\tau_i F_r(0;T_{i-1},T_i)e^{\mu_{y,i}(0)+\sigma_{y,i}(0)z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}dz - 1\right]$$

Questo prezzo dipende dai seguenti parametri:

1. le volatilità istantanee dei tassi forward nominali e reali e le loro correlazioni per ogni tempo di pagamento T_i, con $i = 2,\dots,M$;

2. le volatilità istantanee degli indici forward inflazionari e le loro correlazioni con i tassi forward reali, ancora per ogni $i = 2,\dots,M$.

Confrontando l'espressione del payoff (3.20) con quella (3.26), scritta appena sopra, si nota che quest'ultima sembra molto più complicata sia in termini di parametri di input sia in termini di calcolo coinvolti. Le integrazioni numeriche uni-dimensionali, tuttavia, non sono così poco maneggevoli e dispendiose di tempo. Inoltre, i parametri di input sono determinati più facilmente che quelli provenienti dal precedente approccio dei tassi short, come tipico in un modello di mercato. Per tutta questa serie di motivi la formula (3.26) è preferibile alla (3.20).

Come nel caso del modello JY, visto al paragrafo precedente (3.2.1), valutare un YYIIS con LFM ha lo svantaggio che la volatilità dei tassi reali può risultare molto difficile da calcolare, specialmente quando si risale ai dati storici. Per questo motivo, è stato proposto un secondo modello di mercato, che permette di superare questo problema di stima.

3.2.3 Valutare un YYIIS con il Secondo Modello di Mercato

Applicando la definizione del CPI e usando il fatto che $\mathcal{I}_i$ è una martingala rispetto la misura $Q_n^{T_i}$, si può anche scrivere, per $t < T_{i-1}$:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, N) = N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_{i-1}}\left\{ \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 \middle| \mathcal{F}_t \right\} = \tag{3.27}$$

$$= N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_{i-1}}\left\{ \frac{\mathcal{I}_i(T_i)}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})} - 1 \middle| \mathcal{F}_t \right\} =$$

$$= N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_{i-1}}\left\{ \frac{\mathcal{I}_i(T_{i-1})}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})} - 1 \middle| \mathcal{F}_t \right\}$$

La dinamica di $\mathcal{I}_i$ rispetto $Q_n^{T_i}$ è data dalla (3.22) e vale un'evoluzione analoga per $\mathcal{I}_{i-1}$ rispetto $Q_n^{T_{i-1}}$. la dinamica di $\mathcal{I}_{i-1}$ rispetto $Q_n^{T_i}$, invece, può essere ricavato grazie al cambio del numeraire:

$$d\mathcal{I}_{i-1}(t) = \mathcal{I}_{i-1}(t)\sigma_{I,i-1}\left[-\frac{\tau_i \sigma_{n,i} F_n(t; T_{i-1}, T_i)}{1 + \tau_i F_n(t; T_{i-1}, T_i)} \rho_{I,n,i} dt + dW_{i-1}^I(t) \right] \tag{3.28}$$

dove $\sigma_{I,i-1}$ è una costante positiva, W_{i-1}^I è un moto browniano rispetto $Q_n^{T_i}$ con

$$dW_{i-1}^I(t) dW_i^I(t) = \rho_{I,i} dt$$

e $\rho_{I,n,i}$ è la correlazione istantanea tra $\mathcal{I}_{i-1}(-)$ e $F_n(-; T_{i-1}, T_i)$.

L'evoluzione di $\mathcal{I}_{i-1}$ rispetto $Q_n^{T_i}$ dipende dal tasso forward nominale $F_n(-; T_{i-1}, T_i)$, in modo tale che il calcolo della (3.28) sia piuttosto coinvolto, in generale. Per evitare complicazioni spiacevoli, come quelle indotte dalle integrazioni di dimensione più grande, è stato congelato il drift nella formula (3.28) al suo valore al tempo t attuale, in modo che $\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})$ condizionato rispetto $\mathcal{F}_t$ sia distribuito log-normalmente anche rispetto $Q_n^{T_i}$. Questo porta a

$$E_n^{T_i}\left\{\frac{\mathcal{I}_i(T_{i-1})}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right\} = \frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)}e^{D_i(t)}$$

dove

$$D_i(t) = \sigma_{I,i-1}\left[\frac{\tau_i\sigma_{n,i}F_n(t;T_{i-1},T_i)}{1+\tau_iF_n(t;T_{i-1},T_i)}\rho_{I,n,i} - \rho_{I,i}\sigma_{I,i} + \sigma_{I,i-1}\right](T_{i-1}-t)$$

allora risulta

$$\mathbf{YYIIS}_f(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,N) = N\psi_iP_n(t,T_i)\left[\frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)}e^{D_i(t)}-1\right] =$$

$$= N\psi_iP_n(t,T_i)\left[\frac{P_n(t,T_{i-1})P_r(t,T_i)}{P_n(t,T_i)P_r(t,T_{i-1})}e^{D_i(t)}-1\right]$$

Infine, il valore al tempo t dell'intera parte variabile dello swap è

$$\mathbf{YYIIS}_f(t,\mathcal{T},\Psi,N) = \tag{3.29}$$

$$= N\psi_{\iota(t)}P_n(t,T_{\iota(t)})\left[\frac{\mathcal{I}_{\iota(t)}(t)}{I(T_{\iota(t)-1})}-1\right] + N\sum_{i=\iota(t)+1}^{M}\psi_iP_n(t,T_i)\left[\frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)}e^{D_i(t)}-1\right] =$$

$$= N\psi_{\iota(t)}\left[\frac{I(t)}{I(T_{\iota(t)-1})}P_r(t,T_{\iota(t)})-P_n(t,T_{\iota(t)})\right]+N\sum_{i=\iota(t)+1}^{M}\psi_i\left[P_n(t,T_{i-1})\frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}e^{D_i(t)}-P_n(t,T_i)\right]$$

In particolare, al tempo $t=0$, si ha

$$\mathbf{YYIIS}_f(0,\mathcal{T},\Psi,N) = N\sum_{i=1}^{M}\psi_iP_n(0,T_i)\left[\frac{\mathcal{I}_i(0)}{\mathcal{I}_{i-1}(0)}e^{D_i(0)}-1\right] = \tag{3.30}$$

$$= N\psi_1\left[P_r(0,T_1)-P_n(0,T_1)\right] + N\sum_{i=2}^{M}\psi_i\left[P_n(0,T_{i-1})\frac{P_r(0,T_i)}{P_r(0,T_{i-1})}e^{D_i(0)}-P_n(0,T_i)\right] =$$

$$= N\sum_{i=1}^{M}\psi_iP_n(0,T_i)\left[\frac{1+\tau_iF_n(0;T_{i-1},T_i)}{1+\tau_iF_r(0;T_{i-1},T_i)}e^{D_i(0)}-1\right]$$

Questo prezzo di un YYIIS dipende dai seguenti parametri:

1. le volatilità istantanee degli indici forward inflazionari e le loro correlazioni;

2. le volatilità istantanee dei tassi forward nominali;

3. le correlazioni istantanee tra gli indici forward inflazionari e i tassi forward nominali.

L'espressione (3.30) appare molto simile alla (3.20) e potrebbe essere preferibile alla (3.26), in quanto combina il vantaggio di una formula interamente analitica con quello di un modello di mercato. Inoltre, al contrario della (3.26), il termine di correzione D non dipende dalla volatilità dei tassi reali, che, in genere, sono difficoltosi da stimare.

La debolezza di questo modello è il fatto che è basato su un'approssimazione che colpisce le scadenze a lungo termine T_i, specialmente quando le correlazioni tra i tassi forward nominali e l'inflazione sono diversi da 0. Tale formula, infatti, è esatta quando $\rho_{I,n,i}$ sono impostate a 0 e i termini D_i sono semplificati di conseguenza, ma in generale tali correlazioni possono avere un impatto non trascurabile sui termini D_i e si possono trovare dei loro valori non nulli, soprattutto quando si calibra il modello ai dati di mercato di un YYIIS.

Capitolo 4

Inflation-Indexed Caplets/Floorlets

Un *inflation-indexed caplet*, IIC, è un'opzione call sul tasso inflazionario implicito CPI. Analogamente un *inflation-indexed floorlet*, IIF, è un'opzione put sullo stesso tasso inflazionario. In formula, al tempo T_i, il payoff di un IICF è:

$$\mathbf{IICF}(t, T_{i-1}, T_i, N, \psi_i) = N\psi_i \left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 - k\right)\right]^+ \tag{4.1}$$

dove k è lo strike di IICF, ψ_i è la year fraction del contratto, relativa all'intervallo di tempo $[T_{i-1}, T_i]$, N è il valore nominale del contratto ed, infine, ω vale 1 per il caplet e -1 per il floorlet.

Impostanto $K := 1 + k$, la teoria standard dei prezzi assenti da arbitraggi implica che il valore, al tempo $t \leq T_{i-1}$, del payoff precedente, al tempo T_i, sia:

$$\begin{aligned}\mathbf{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega) &= N\psi_i E_n\left[e^{-\int_t^{T_i} n(s)ds}\left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K\right)\right]^+ \middle| \mathcal{F}_t\right] = \\ &= N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_i}\left[\left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K\right)\right]^+ \middle| \mathcal{F}_t\right]\end{aligned} \tag{4.2}$$

Il prezzo di un IICF è, quindi, simile a quello di un opzione forward.

4.1 Valutare un IICplt con il Modello JY

Come visto precedentemente, supporre tassi nominali e reali gaussiani, rispetto ad una misura di probabilità neutrale al rischio, conduce ad una distribuzione del CPI log-normale, rispetto la misura Q_n, che viene conservata quando si passa alla misura forward nominale. Di conseguenza, anche la distribuzione della frazione di CPI, $\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$, condizionata a $\mathcal{F}_t$, è distribuita log-normalmente, rispetto la misura forward nominale $Q_n^{T_i}$. Tutto ciò implica che il payoff (4.2) può essere calcolato non appena si conosce il valore atteso di questa frazione e la varianza del suo logaritmo. Si osserva, infatti, che se X è una variabile casuale log-normale, con valore atteso $E[X] = m$ e $Var[\ln(X)] = v$, si ha:[1]

$$E\{[\omega(X-K)]^+\} = \omega m \Phi\left[\omega \frac{\ln\frac{m}{K} + \frac{1}{2}v^2}{v}\right] - \omega K \Phi\left[\omega \frac{\ln\frac{m}{K} - \frac{1}{2}v^2}{v}\right] \tag{4.3}$$

dove $\Phi(\cdot)$ è la funzione standard di distribuzione normale cumulativa.
Come si è visto prima, il cambio di misura interessa solo la media di $I(t)$ e non la sua varianza, si ha, quindi, rispetto $Q_n^{T_i}$:

$$\mathbf{YYIIS}_f(t; T_{i-1}, T_i, K) = P_n(t, T_i)\left\{ E_n^{T_i}\left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right] - K\right\}$$

che, confrontato alla (3.18), dà, immediatamente, l'attesa condizionata di $\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}$:

$$E_n^{T_i}\left[\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{P_n(t, T_{i-1})}{P_n(t, T_i)} \frac{P_r(t, T_i)}{P_r(t, T_{i-1})} e^{C(t, T_{i-1}, T_i)} = m$$

[1] Questa espressione deriva dalla seguente proposizione:
Sia X una variabile casuale distribuita log-normalmente e siano M e V la media e la varianza di $Y := \ln(X)$. Allora vale

$$E\{[\omega(X-K)]^+\} = \omega e^{M+\frac{1}{2}V^2} \Phi\left(\omega \frac{M - \ln(K) + V^2}{V}\right) - \omega K \Phi\left(\omega \frac{M - \ln(K)}{V}\right)$$

per ogni $K > 0, \omega \in \{-1, 1\}$, dove E indica l'attesa, rispetto alla distribuzione di X, e Φ denota la funzione standard di sitribuzione normale cumulativa.

La varianza del logaritmo della frazione può essere analogamente calcolata rispetto la misura nominale neutrale al rischio:[2]

$$Var_n^{T_i}\left[\ln\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right] = V^2(t,T_{i-1},T_i) = v$$

dove

$$\begin{aligned}
V^2(t,T_{i-1},T_i) = {} & \frac{\sigma_n^2}{2a_n^3}\left[1-e^{-a_n(T_i-T_{i-1})}\right]^2\cdot\left[1-e^{-2a_n(T_{i-1}-t)}\right]+\sigma_I^2(T_i-T_{i-1})+\\
& +\frac{\sigma_n^2}{2a_r^3}\left[1-e^{-a_r(T_i-T_{i-1})}\right]^2\left[1-e^{-2a_r(T_{i-1}-t)}\right]-2\rho_{n,r}\frac{\sigma_n\sigma_r}{a_na_r(a_n+a_r)}\cdot\\
& \cdot\left[1-e^{-a_n(T_i-T_{i-1})}\right]\left[1-e^{-a_r(T_i-T_{i-1})}\right]\left[1-e^{-(a_n+a_r)(T_{i-1}-t)}\right]+\\
& +\frac{\sigma_n^2}{a_n^2}\left[T_i-T_{i-1}+\frac{2}{a_n}e^{-a_n(T_i-T_{i-1})}-\frac{1}{2a_n}e^{-2a_n(T_i-T_{i-1})}-\frac{3}{2a_n}\right]+\\
& +\frac{\sigma_r^2}{a_r^2}\left[T_i-T_{i-1}+\frac{2}{a_r}e^{-a_r(T_i-T_{i-1})}-\frac{1}{2a_r}e^{-2a_r(T_i-T_{i-1})}-\frac{3}{2a_r}\right]+\\
& -2\rho_{n,r}\frac{\sigma_n\sigma_r}{a_na_r}\left[T_i-T_{i-1}-\frac{1-e^{-a_n(T_i-T_{i-1})}}{a_n}-\frac{1-e^{-a_r(T_i-T_{i-1})}}{a_r}+\right.\\
& \left.+\frac{1-e^{-(a_n+a_r)(T_{i-1}-t)}}{a_n+a_r}\right]+2\rho_{n,I}\frac{\sigma_n\sigma_I}{a_n}\left[T_i-T_{i-1}-\frac{1-e^{-a_n(T_i-T_{i-1})}}{a_n}\right]+\\
& -2\rho_{r,I}\frac{\sigma_r\sigma_I}{a_r}\left[T_i-T_{i-1}-\frac{1-e^{-a_r(T_i-T_{i-1})}}{a_r}\right]
\end{aligned}$$

Così, dalla formula (4.3), sostituendo l'attesa e la varianza calcolate in precedenza, si trova il prezzo di un IICplt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{IICplt}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,K,N,\omega) = {} & \omega N\psi_iP_n(t,T_i)\left[\frac{P_n(t,T_{i-1})}{P_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}\cdot\right.\\
& \cdot e^{C(t,T_{i-1},T_i)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{P_n(t,T_{i-1})}{KP_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}+C(t,T_{i-1},T_i)-\frac{1}{2}V^2(t,T_{i-1},T_i)}{V(t,T_{i-1},T_i)}\right)+\\
& \left.-K\Phi\left(\omega\frac{\ln\frac{P_n(t,T_{i-1})}{KP_n(t,T_i)}\frac{P_r(t,T_i)}{P_r(t,T_{i-1})}+C(t,T_{i-1},T_i)-\frac{1}{2}V^2(t,T_{i-1},T_i)}{V(t,T_{i-1},T_i)}\right)\right]
\end{aligned}$$

[2] Questo perchè il cambio di misura produce solamente un termine additivo deterministico, che non ha impatto sul calcolo della varianza.

4.2 Valutare un IICplt con il Secondo Modello di Mercato

Per calcolare il payoff (4.2), rispetto al secondo modello di mercato, si applica, innanzitutto, la proprietà della torre delle attese condizionate, per ottenere

$$\mathbf{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega) = \tag{4.4}$$

$$= N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_i}\left[\frac{E_n^{T_i}[(\omega(I(T_i) - KI(T_{i-1})))^+|\mathcal{F}_{T_{i-1}}]}{I(T_{i-1})}\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

dove si assume $I(T_{i-1}) > 0$.

Attenendosi all'approccio del modello di mercato, il calcolo del valore atteso esterno, della formula appena scritta, dipende dal fatto se modella i tassi forward o direttamente il CPI forward. Il modello di mercato che andremo ad utilizzare è lo stesso visto al paragrafo (3.2.3), poichè, rispetto al primo modello di mercato visto, conduce ad una formula più semplice con meno parametri di input.

Supponendo che vale

$$d\mathcal{I}_i(t) = \sigma_{I,i}\mathcal{I}_i(t)dW_i^I(t)$$

e ricordando che $I(T_i) = \mathcal{I}_i(T_i)$, si ha

$$E_n^{T_i}\left[[\omega(I(T_i) - KI(T_{i-1}))]^+|\mathcal{F}_{T_{i-1}}\right] = E_n^{T_i}\left[[\omega(\mathcal{I}_i(T_i) - KI(T_{i-1}))]^+|\mathcal{F}_{T_{i-1}}\right] =$$

$$= \omega\mathcal{I}_i(T_i)\Phi\left[\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(T_i)}{KI(T_{i-1})} + \frac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right] - \omega KI(T_{i-1})\Phi\cdot$$

$$\cdot\left[\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(T_i)}{KI(T_{i-1})} - \frac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right]$$

affinchè dalla (4.4) e dalla definizione di $\mathcal{I}_{i-1}$, si abbia

$$\mathbf{IICplt}(t, T_{i-1}, T_i, \psi_i, K, N, \omega) = \omega N\psi_i P_n(t, T_i) E_n^{T_i}\left[\frac{\mathcal{I}_i(T_{i-1})}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})}\Phi\cdot\right. \tag{4.5}$$

$$\cdot\Bigg[\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(T_i)}{KI(T_{i-1})}+\frac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\Bigg]-K\Phi\Bigg[\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(T_i)}{KI(T_{i-1})}-\frac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\Bigg]\Bigg|\mathcal{F}_{T_{i-1}}\Bigg]$$

Ricordando la formula (3.27) e congelando, nuovamente, il drift al tempo t, si ha che la frazione $\frac{\mathcal{I}_i(T_{i-1})}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})}$, condizionata a $\mathcal{F}_t$, rispetto la misura $Q_n^{T_i}$, è distribuita lognormalmente. Precisamente, impostando

$$V_i(t) := \sqrt{(\sigma_{I,i-1}^2+\sigma_{I,i}^2-2\rho_{I,i}\sigma_{I,i-1}\sigma_{I,i})(T_{i-1}-t)}$$

si ottiene

$$\ln\frac{\mathcal{I}_i(T_{i-1})}{\mathcal{I}_{i-1}(T_{i-1})}\Bigg|\mathcal{F}_t\sim\mathcal{N}\Bigg(\ln\frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)}+D_i(t)-\frac{1}{2}V_i(t)^2,V_i(t)^2\Bigg)$$

L'algebra lineare porta, infine, ad avere

$$\mathbf{IICplt}(t,T_{i-1},T_i,\psi_i,K,N,\omega)=\omega N\psi_iP_n(t,T_i)\Bigg[\frac{\mathcal{I}_i(t)}{\mathcal{I}_{i-1}(t)}e^{D_i(t)}\Phi\cdot \tag{4.6}$$

$$\cdot\Bigg(\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(t)}{K\mathcal{I}_{i-1}(t)}+D_i(t)+\frac{1}{2}\mathcal{V}_i(t)^2}{\mathcal{V}_i(t)}\Bigg)-K\Phi\Bigg(\omega\frac{\ln\frac{\mathcal{I}_i(t)}{K\mathcal{I}_{i-1}(t)}+D_i(t)-\frac{1}{2}\mathcal{V}_i(t)^2}{\mathcal{V}_i(t)}\Bigg)\Bigg]=$$

$$=\omega N\psi_iP_n(t,T_i)\Bigg[\frac{1+\tau_iF_n(t;T_{i-1},T_i)}{1+\tau_iF_r(t;T_{i-1},T_i)}e^{D_i(t)}\Phi\Bigg(\omega\frac{\ln\frac{1+\tau_iF_n(t;T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau_iF_r(t;T_{i-1},T_i))}+D_i(t)+\frac{1}{2}\mathcal{V}_i(t)^2}{\mathcal{V}_i(t)}\Bigg)+$$

$$-K\Phi\Bigg(\omega\frac{\ln\frac{1+\tau_iF_n(t;T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau_iF_r(t;T_{i-1},T_i))}+D_i(t)-\frac{1}{2}\mathcal{V}_i(t)^2}{\mathcal{V}_i(t)}\Bigg)\Bigg]$$

dove

$$\mathcal{V}_i(t)=\sqrt{V_i(t)^2\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}$$

Analogamente al prezzo di un YYIIS, valutato nel secondo modello di mercato, visto al paragrafo (3.2.3), anche il prezzo di questo caplet dipende:

1. dalle volatilità istantanee degli indici inflazionari forward e dalle loro correlazioni;

2. dalle volatilità istantanee dei tassi forward nominali;

3. dalle correlazioni istantanee tra gli indici inflazionari forward e i tassi forward nominali.

Di conseguenza, la formula appena scritta, per gli IICplt, possiede, in termini di parametri input, tutti i vantaggi e gli svantaggi del prezzo dello swap (3.29).

L'analogia con la formula Black and Scholes del 1973 rende questa espressione appena scritta abbastanza attraente da un punto di vista pratico, e fornisce un ulteriore supporto per la modellazione dei CPI forward come moti browniani rispetto le loro misure associate.

Capitolo 5

Inflation-Indexed Caps/Floors

Un *inflation-indexed cap*, IICap, è una successione di inflation-indexed caplets, quindi, valgono tutte le valutazioni effettuate al capitolo precedente. Analoga definizione per gli *inflation-indexed floor*, IIFloor.
Dato un insieme di date $T_0, T_1, \dots, T_M$, con $T_0 = 0$, un IICapFloor paga, ad ogni istante T_i, con $i = 1, \dots, M$, la quantità

$$N\psi_i\left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1 - k\right)\right]^+$$

dove k è lo strike. Denotando, nuovamente, $K := 1 + k$ la teoria standard dei prezzi assenti da arbitraggi implica che il valore, al tempo 0, di un IICapFloor è il seguente:

$$\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega) =$$

$$= N\sum_{i=1}^{M}\psi_i E_n\left\{e^{\int_0^{T_i} n(s)ds}\left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K\right)\right]^+\right\} =$$

$$= N\sum_{i=1}^{M}P_n(0, T_i)\psi_i E_n^{T_i}\left\{\left[\omega\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - K\right)\right]^+\right\}$$

dove, ancora una volta, sono stati stabiliti $\mathcal{T} := \{T_1, \dots, T_M\}$ e $\Psi := \{\psi_1, \dots, \psi_M\}$.

Dal secondo modello di mercato, si ottiene immediatamente, dalla (4.6):

$$\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega) = \omega N\sum_{i=1}^{M}\psi_i P_n(0, T_i)\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{1+\tau_i F_n(0;T_{i-1},T_i)}{1+\tau_i F_r(0;T_{i-1},T_i)} e^{D_i(0)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{1+\tau_i F_n(0;T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau_i F_r(0;T_{i-1},T_i))}+D_i(0)+\dfrac{1}{2}\mathcal{V}_i(0)^2}{\mathcal{V}_i(0)}\right)+\right.$$
$$\left.-K\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{1+\tau_i F_n(0;T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau_i F_r(0;T_{i-1},T_i))}+D_i(0)-\dfrac{1}{2}\mathcal{V}_i(0)^2}{\mathcal{V}_i(0)}\right)\right]$$

5.1 Valutare un IICapFloor con il Primo Modello di Mercato

La valutazione di un IICapFloor con il primo modello di mercato, visto al paragrafo (3.2.2), utilizza il modello LFM. Dalla formula (4.5) e dalla definizione di $\mathcal{I}_i$ si ha

$$\mathbf{IICplt}(t)=\omega N\phi_i P_n(t,T_i)E_n^{T_i}\left[\frac{P_r(T_{i-1},T_i)}{P_n(T_{i-1},T_i)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{P_r(T_{i-1},T_i)}{KP_n(T_{i-1},T_i)}+\dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\right)+\right.$$
$$\left.-K\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{P_r(T_{i-1},T_i)}{KP_n(T_{i-1},T_i)}-\dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\right)\middle|\mathcal{F}\right]$$

dove questo valore atteso si può riscrivere come

$$E_n^{T_i}\left[\frac{1+\tau F_n(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{1+\tau F_r(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{1+\tau F_n(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau F_r(T_{i-1};T_{i-1},T_i))}+\dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\right)+\right.$$
$$\left.-K\Phi\left(\omega\frac{\ln\dfrac{1+\tau F_n(T_{i-1};T_{i-1},T_i)}{K(1+\tau F_r(T_{i-1};T_{i-1},T_i))}-\dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2(T_i-T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i-T_{i-1}}}\right)\middle|\mathcal{F}\right]$$

Seguendo l'approccio del paragrafo (3.2.2), si suppone che i tassi forward nominali e reali evolvano secondo le formule (3.23) e che le volatilità del CPI siano costanti congelando la procedura alla fine del paragrafo. Il valore atteso, appena riscritto, si può calcolare con un'integrazione numerica, osservando, ancora una volta, che la coppia (3.24) è distribuita come una variabile casuale normale bivariata, con il vettore della media e la matrice di varianza-covarianza corrispondenti a quelli della coppia.

La dimensione del problema da risolvere, tuttavia, si può ridurre assumendo tassi reali deterministici. Come osservato in precedenza, sia la volatilità dei tassi reali sia la loro correlazione con i tassi nominali, giocano un ruolo fondamentale nella valutazione dei derivati inflation-indexed. Si suppongono tassi reali deterministici, per semplicità, anche se questi parametri dovrebbero essere presi in considerazione esplicitamente.

Rispetto i tassi reali deterministici, il valore LIBOR futuro $F_r(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)$ è semplicemente pari al tasso forward attuale $F_r(0; T_{i-1}, T_i)$, in modo tale che si può scrivere

$$\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega) = \omega N \sum_{i=1}^{M} \omega N \phi_i P_n(t, T_i) \cdot$$

$$\cdot E_n^{T_i}\left[\frac{1+\tau F_n(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{1+\tau F_r(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)} \Phi\left(\omega \frac{\ln \dfrac{1+\tau F_n(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{K(1+\tau F_r(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i))} + \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 (T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right) + \right.$$

$$\left. -K\Phi\left(\omega \frac{\ln \dfrac{1+\tau F_n(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i)}{K(1+\tau F_r(T_{i-1}; T_{i-1}, T_i))} - \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 (T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right) \middle| \mathcal{F}\right]$$

Dato che il tasso forward nominale $F_n(-; T_{i-1}, T_i)$ segue il modello LFM (3.24), infine si ottiene:

$$\mathbf{IICapFloor}(0, \mathcal{T}, \Psi, K, N, \omega) = \omega N \phi_1 \cdot$$

$$\cdot \left[P_r(0, T_1)\Phi\left(\omega \frac{\ln \dfrac{P_r(0, T_1)}{K P_n(0, T_1)} + \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 T_1}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_1}}\right) - K P_n(0, T_1)\Phi\left(\omega \frac{\ln \dfrac{P_r(0, T_1)}{K P_n(0, T_1)} - \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 T_1}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_1}}\right) \middle| \mathcal{F}\right] +$$

$$+\omega N \sum_{i=2}^{M} \omega N \phi_i P_n(0, T_i) \int_{-\infty}^{+\infty} J(x) \frac{1}{\sigma_{n,i}\sqrt{2\pi T_{i-1}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x + \frac{1}{2}\sigma_{n,i}^2 T_{i-1}}{\sigma_{n,i}\sqrt{T_{i-1}}}\right)^2} dx$$

dove

$$J(x) := \frac{1+\tau F_n(0; T_{i-1}, T_i)e^x}{1+\tau F_r(0; T_{i-1}, T_i)} \Phi\left[\omega \frac{\ln \dfrac{1+\tau F_n(0; T_{i-1}, T_i)e^x}{K(1+\tau F_r(0; T_{i-1}, T_i))} - \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 (T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right] +$$

$$-K\Phi\left[\omega \frac{\ln \dfrac{1+\tau F_n(0; T_{i-1}, T_i)e^x}{K(1+\tau F_r(0; T_{i-1}, T_i))} - \dfrac{1}{2}\sigma_{I,i}^2 (T_i - T_{i-1})}{\sigma_{I,i}\sqrt{T_i - T_{i-1}}}\right]$$

Capitolo 6

Inflation-Indexed Swaptions

Una *swaption* è un'opzione per entrare in uno swap ad una data prefissata ed ad un tasso swap prefissato. Un *inflation-indexed swaption*, in particolare, è un'opzione per entrare in un inflation-indexed swap.

6.1 Valutazione di uno Swap Reale Fissato VS uno Swap Nominale Variabile

Si supponga, in generale, che lo swap inizi ad un certo tempo futuro T_α, detto *forward-start*, ed effettui i pagamenti ai tempi periodici T_i, fino ad arrivare alla maturità T_M. In questo swap, la parte A paga un tasso fisso K, rispetto al valore di contratto variabile N_i, regolato dall'inflazione degli intervalli $[T_\alpha, T_i]$:

$$S\frac{I(T_i)}{I(T_0)}N_i\varphi_i$$

e alla maturità

$$\frac{I(T_i)}{I(T_0)}N_i$$

La parte B, invece, ad ogni data T_i paga un tasso variabile nominale, non regolato dall'inflazione, fissato al tempo T_{i-1}, rispetto il valore di contratto variabile N_i:

$$N_i\varphi_i f_n(T_{i-1}, T_i)$$

dove φ_i indica la year-fraction relativa agli anni trascorsi nell'intervallo $[T_{i-1}, T_i]$, e alla maturità paga N_i.
In questo tipo di swap, come in quelli di valute, la prassi di mercato è che notionals devono essere scambiate nel corso della durata dell'operazione di swap per ridurre il rischio di cambio per la parte legata all'inflazione.

La teoria standard dell'assenza di arbitraggi implica che il valore di uno swap, al tempo $0 \leq t \leq T_M$, è dato da

$$E_n\Big[\sum_{i=i(t)}^{M} S\varphi_i N_i \frac{I(T_i)}{I(T_0)} e^{-\int_t^{T_i} n(s)ds} + N_M \frac{I(T_M)}{I(T_0)} e^{-\int_t^{T_M} n(s)ds} \Big| \mathcal{F}_t\Big] +$$

$$-E_n\Big[\sum_{i=i(t)}^{M} \varphi_i N_i f_n(T_{i-1}, T_i) e^{-\int_t^{T_i} n(s)ds} + N_M e^{-\int_t^{T_M} n(s)ds} \Big| \mathcal{F}_t\Big] = \qquad (6.1)$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \varphi_i N_i \frac{SI(t)}{I(T_0)} P_r(t, T_i) + N_M \frac{I(t)}{I(T_0)} P_r(t, T_M) - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i N_i f_n(T_{i-1}, T_i) P_n(t, T_i) + N_M P_n(t, T_M)$$

semplificato all'ultima espressione se si utilizza lo stesso argomento, usato per valutare la parte variabile di uno ZCIIS (3.8), per trovare il valore di $E_n[I(T_i)e^{-\int_t^{T_i} n(s)ds}|\mathcal{F}_t]$, e dove $i(t) = \min\{i : T_i > t\}$.

Il tasso swap forward $S_{\alpha,M}(t)$, al tempo t, è il tasso del lato variabile, che rende lo swap un contratto equo per il tempo attuale. In altre parole, è quel tasso fisso K che, sostituito al tasso S, rende la parte a lato sinistro della formula appena scritta equivalente al destro, ossia soddisfa:

$$\sum_{i=1}^{M} \varphi_i N_i \frac{KI(t)}{I(T_0)} P_r(t, T_i) + N_M \frac{I(t)}{I(T_0)} P_r(t, T_M) - \sum_{i=1}^{M} \varphi_i N_i f_n(T_{i-1}, T_i) P_n(t, T_i) + N_M P_n(t, T_M) = 0$$

Risolvendo questa equazione per il tasso swap, si trova

$$S_{\alpha,M}(t) = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{M} N_i(P_n(t, T_{i-1}) - P_n(t, T_i)) + N_M\Big[P_n(t, T_M) - \frac{I(t)}{I(T_0)} P_r(t, T_M)\Big]}{\sum_{i=\alpha+1}^{M} \frac{I(t)}{I(T_0)} \varphi_i N_i P_r(t, T_i)}$$

Più intuitivamente, la versone 'payer' di questo swap può essere replicata comprando un bond a tasso nominale variabile e vendendo un bond a tasso reale fisso. Il tasso swap, che stiamo cercando, è il tasso fisso K che si dovrebbe pagare per rendere nullo il valore di questo portafoglio, al tempo 0.

Questa formula è anche indipendente dal modello ed è stata derivata esclusivamente con i principi di non arbitraggio. Vale la pena ricordare che per il suo calcolo non servono alcuna correlazione o volatilità tra i tassi nominali e reali o inflazione.

6.2 Valutazione di una Swaption Europea

Nelle swaption europee le volatilità e le correlazioni giocano un ruolo fondamentale nelle formule dei prezzi. Un'opzione sul diritto di pagare il tasso fisso in uno swap è detta *payer's swaption*, mentre una sul diritto di pagare il tasso variabile, ossia ricevere il tasso fisso, è detta *receiver's swaption*. Quando c'è un'unica data di esercizio (generalmente l'inizio di uno swap forward o una data di reset per rompere un contratto di swap), si chiama *swaption europea*.

Per ottenere il payoff di una payer's swaption, si suppone che lo swap sottostante abbia un tasso fisso con strike, K, e maturità pari all'inizio dello swap, con partenza forward T_α. Se si sostituisce questo tasso all'equazione (6.1), si sa che l'opzione sarà esercitata se viene soddisfatta la seguente condizione

$$\sum_{i=1}^{M} N_i \varphi_i f(T_\alpha, T_{i-1}, T_i) P_n(T_\alpha, T_i) - K \frac{I(T_\alpha)}{I(T_0)} P_r(T_\alpha, T_i) + N_M P_n(T_\alpha, T_M) - \frac{I(T_\alpha)}{I(T_0)} P_n(T_\alpha, T_i) > 0$$

Se si usa l'operatore positivo e il fattore annuale si ha

$$C(t) = \sum_{i=1}^{M} N_i \varphi_i P_r(t, T_i) \frac{I(t)}{I(T_0)}$$

ed infine il payoff di una payer's swaption è

$$V(T_\alpha) = (S_{\alpha,M}(T_\alpha) - K)^+ C(T_\alpha)$$

dove $S_{\alpha,M}(t)$ è il tasso swap del mercato, al tempo t, di uno swap che parte a T_α, con maturità T_M. In modo analogo, il payoff di una receiver's swaption è

$$(K - S_{\alpha,M}(T_\alpha))^+ C(T_\alpha)$$

Il valore al tempo t di una swaption europea, con maturità T_M, rispetto la misura di probabilità Q_n, è data da

$$V(t) = E_n\left[V(T_\alpha)e^{-\int_t^{T_\alpha} n(s)ds}\Big|\mathcal{F}_t\right]$$

questo comporta la simulazione di un integrale che è piuttosto ingombrante.
Esiste un approccio alternativo che semplifica i calcoli. Se si effettua un cambio di misura, dalla misura neutrale al rischio a quella T-forward, ossia si usa come numeraire il bond nominale $P_n(t,T)$, con $T \geq T_\alpha$, invece di quello nominale del mercato, il prezzo di una swaption è dato da

$$V(t) = P_n(t,T)E_n^T\left[\frac{(S_{\alpha,M}(T_\alpha) - K)^+}{P_n(T_\alpha,T)}C(T_\alpha)\right] \tag{6.2}$$

Per calcolare l'ultimo valore atteso è necessario trovare le dinamiche dei fattori, rispetto la misura T-forward, date dalle formule (2.8).
Utilizzando la tecnica del cambio di numeraire, sviluppata da Brigo e Mercurio nel 2001, si trovano i processi per il tasso nominale, reale e l'indice inflazionario, rispetto la misura T-forward:

$$dn(t) = [\theta_n - a_n n(t) - \sigma_n^2 B_n(t,T)]dt + \sigma_n dW_n^T(t)$$

$$dr(t) = [\theta_r - a_r r(t) - \sigma_r^2 B_r(t,T)]dt + \sigma_r dW_r^T(t)$$

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [n(t) - r(t) - \sigma_I\sigma_n\sigma_{n,I}B_n(t,T)]dt + \sigma_I dW_I^T$$

dove $B_n(t,T) = \dfrac{1}{a_n}(1 - e^{-a_n(T-t)})$.
Queste espressioni possono essere espresse come processi Ornstein-Ulhenbeck e possono essere integrate facilmente fino al tempo t, condizionato a $\mathcal{F}_s$, $0 \leq s \leq t$:

$$n(t) = n(s)e^{-a_n(t-s)} + \int_s^t e^{-a_n(t-u)}(\theta_n(u) - \sigma_n^2 B_n(u,T))du + \sigma_n\int_s^t e^{-a_n(t-u)}dW_n^T(u)$$

$$r(t) = r(s)e^{-a_r(t-s)} + \int_s^t e^{-a_r(t-u)}(\theta_r(u) - \sigma_n\sigma_r\rho_{n,r} - \sigma_I\sigma_r\rho_{I,r}B_n(u,T))du + \sigma_r \int_s^t e^{-a_r(t-u)}dW_r^T(u)$$

Di conseguenza, $n(t)$ e $r(t)$, condizionati a $\mathcal{F}_s$, sono distribuiti normalmente, con media e varianza date rispettivamente da:

$$n(t) : \begin{cases} E[n(t)|\mathcal{F}_s] = n(s)e^{-a_n(t-s)} + \theta_n(t) - e^{-a_n(t-s)}\theta_n(s) + \\ \qquad + \dfrac{\sigma_n^2}{2a_n}\left[e^{-a_n(t-s)}B_n(s,T) - B_n(t,T) - B_n(s,t)\right] \\ Var[n(t)|\mathcal{F}_s] = \dfrac{\sigma_n^2}{2a_n}(1 - e^{-a_n(t-s)}) \end{cases}$$

dove

$$\theta_n(t) = f_n^*(0,t) + \frac{\sigma_n^2}{2a_n^2}(1 - e^{-a_n t})^2$$

$$r(t) : \begin{cases} E[r(t)|\mathcal{F}_s] = r(s)e^{-a_r(t-s)} + \theta_r(t) - e^{-a_r(t-s)}\theta_r(s) - B_r(s,t)\rho_{r,I}\sigma_I\sigma_r + \\ \qquad + \dfrac{\rho_{n,r}\sigma_n\sigma_r}{a_n + a_r}\left[e^{-a_r(t-s)}B_r(s,T) - B_r(t,T) - B_r(s,t)\right] \\ Var[r(t)|\mathcal{F}_s] = \dfrac{\sigma_r^2}{2a_r}(1 - e^{-a_r(t-s)}) \end{cases}$$

dove

$$\theta_r(t) = f_r^*(0,t) + \frac{\sigma_r^2}{2a_r^2}(1 - e^{-a_r t})^2$$

Il logaritmo dell'indice inflazionario è distribuito normalmente, con media e varianza date da

$$\log(I(t)) : \begin{cases} E[\log(I(t))|\mathcal{F}_s] = \log(I(T_s))\left[n(t) - r(t) - \rho_{n,I}\sigma_I\sigma_n B_n(t,T) - \dfrac{1}{2}\sigma_I^2\right](t-s) \\ Var[\log(I(t))|\mathcal{F}_s] = \sigma_I^2 \end{cases}$$

Una volta che si conosce la corretta distribuzione dei fattori, rispetto la misura T-forward, è abbastanza semplice valutare una swaption europea, a qualsiasi istante di tempo.
Se si è interessati al valore della swaption al tempo $t = s = 0$, si usa come numeraire il bond con maturità T_α. La formula di prezzo (6.2) si riduce alla seguente

$$V_0 = P_n(0,T_\alpha)E_n^{T_\alpha}[V(T_\alpha)]$$

dato che $P_n(0,T_\alpha)$ è conosciuto al tempo 0 e vale $P_n(T_\alpha,T_\alpha) = 1$.

6.3 Year-on-Year Inflation-Indexed Swaption

Un *year-on-year inflation-indexed swaption*, YYIISO, è un opzione per entrare in un year-on-year inflation-indexed swap, $YYIIS(T_\alpha, T_M, K)$, al tempo T_α con il tasso swap fissato K. Questo YYIIS parte all'istante di tempo T_m e ha pagamenti nelle date $T_{\alpha+1}, T_{\alpha+2}, \dots, T_M$.

Sia $YYIISO(t; T_\alpha, T_M, K)$ il prezzo di questa opzione al tempo $t \le T_\alpha$. Il payoff di un $YYIIS(T_\alpha, T_M, K)$, quindi, è:

$$\mathbf{YYIISO}(T_\alpha, T_M, K) = \max[YYIIS(T_\alpha, T_M, K), 0]$$

dove il payoff di un YYIIS è espresso secondo la seguente formula, per la teoria standard libera da arbitraggi, supponendo che le year-fraction siano coincidenti, ossia $\psi_i = \varphi_i$ per ogni $i = \alpha + 1, \dots, M$:

$$\mathbf{YYIIS}(t; T_\alpha, T_M, K) = \sum_{i=\alpha+1}^{M} \Pi\left[t, N\psi_i\left(\frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})} - 1\right)\right] - \sum_{i=\alpha+1}^{M} \Pi\Big[t, N\varphi_i K\Big] =$$

$$= \sum_{i=\alpha+1}^{M} \Pi\left[t, N\psi_i \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\right] - (K+1) \sum_{i=\alpha+1}^{M} N\psi_i P_n(t, T_i)$$

Esiste una formula alternativa di valutazione del payoff di un YYIISO, che coinvolge il tasso swap forward. Per trovare questa formula si ricorda l'equazione del tasso swap forward

$$S_{\alpha,M}(t) = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{M} \Pi\left[t, N\psi_i \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\right] - \sum_{i=\alpha+1}^{M} N\psi_i P_n(t, T_i)}{\sum_{i=\alpha+1}^{M} N\psi_i P_n(t, T_i)}$$

Per ogni coppia α, k, tale che $\alpha \le k$, si definisce il portafoglio

$$V_\alpha^k(t) = \sum_{i=\alpha+1}^{M} \psi_i P_n(t, T_i)$$

Questo portafoglio è autofinanziante poichè ψ_i sono costanti e V_α^k è solamente una somma ponderata di attività finanziarie negoziate, perciò si tratta di un portafoglio autofinanziante.

Allora esiste una misura martingala per il numeraire V_α^k, che verrà indicata con Q_α^k. Grazie a questo portafoglio, si può riscrivere la formula del tasso swap forward come segue:

$$S_{\alpha,M}(t) = \frac{\sum_{i=\alpha+1}^{M} \Pi\left[t, N\psi_i \frac{I(T_i)}{I(T_{i-1})}\right] - V_\alpha^k(t)}{V_\alpha^k(t)}$$

Dato che V_α^k è un portafoglio autofinanziante ed anche $\displaystyle\sum_{j=\alpha+1}^{k} \Pi\left[t, N\psi_j \frac{I(T_j)}{I(T_{j-1})}\right]$ è un portafoglio autofinanziante, essendo somma di portafogli autofinanzianti, ne segue che $S_{\alpha,M}$ è una Q_α^k-martingala.

A questo punto, il payoff di un YYIIS si può riscrivere così:

$$\mathbf{YYIIS}(t; T_\alpha, T_M, K) = (S_{\alpha,M}(t) - K)V_\alpha^k(t)$$

e, di conseguenza, il payoff di un YYIISO diventa:

$$\mathbf{YYIISO}(T_\alpha, T_M, K) = V_\alpha^k(t)[S_{\alpha,M}(t) - K, 0]$$

dal quale si nota che $YYIISO(T_\alpha, T_M, K)$ potrebbe essere considerato come un opzione call sul tasso swap forward, espresso in unità di V_α^k.

La naturale scelta della misura da usare per valutare un YYIISO è la misura Q_α^k. Tuttavia, anche se si sceglie la volatilità con salto da zero nel modello specificato nel paragrafo (3.2.1), in modo che il modello è puramente Wiener guidato, il tasso swap sarà una somma di variabili lognormale e, quindi, il tasso swap avrà una brutta distribuzione in questo modello. Sembra plausibile che non esista alcuna formula esplicita, in questo caso, per un YYIISO. Il problema è analogo a quello dei prezzi dei tassi di interesse swaptions, ipotizzando un modello HJM per i tassi forward.

6.3.1 Modello di Mercato degli Inflation-Indexed Swap

In questo tipo di modelli di mercato, l'ipotesi fondamentale è che la distribuzione dei tassi swap sia log-normale.
Dato un insieme di tempi crescenti $T_0, T_1, \dots, T_M$, si definisce B come l'insieme costituito dalle coppie (α, k) di interi positivi α e k tali che $0 \leq m < k < M$. Per qualsiasi coppia (α, k) in B si suppone che il tasso swap forward $S_{\alpha,k}$ abbia una dinamica data da

$$dS_{\alpha,k}(t) = S_{\alpha,k}(t)\sigma_\alpha^k(t)dW_\alpha^k(t)$$

dove W_α^k è moto browninano multidimensionale, rispetto la misura Q_α^k, e σ_α^k è un vettore di funzioni del tempo non stocastiche.

Proposizione 6.3.1. Per qualsiasi modello di mercato degli swap, il prezzo di un $YYIISO(t; T_\alpha, T_M, K)$, al tempo t, dove $t \leq T_\alpha$, di una payer's swap $YYIIS(T_\alpha, T_M)$ è dato da:

$$\mathbf{YYIISO}(t; T_\alpha, T_M, K) = V_\alpha^M[S_{\alpha,M}(t)N(d_1) - KN(d_2)]$$

dove

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{1}{\Sigma_{\alpha,M}}\left[\ln\left(\frac{S_{\alpha,M}}{K}\right) + \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha,M}^2\right] \\ d_2 &= d_1 - \Sigma_{\alpha,M} \\ \Sigma_{\alpha,M}^2 &= \int_t^{T_\alpha} \|\sigma_\alpha^M(s)\|^2 ds \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per ipotesi, si ha

$$S_{\alpha,M}(T_M) = S_{\alpha,M}(t)e^{\int_t^{T_M} \sigma_\alpha^M(s)dW_\alpha^M(s) - \frac{1}{2}\int_t^{T_M} \|\sigma_\alpha^M(s)\|^2 ds}$$

Da qui, condizionato al tempo t, si ha

$$\ln S_{\alpha,M}(T_M) \sim N\left(\ln S_{\alpha,M}(t) - \frac{\Sigma^2}{2}, \Sigma^2\right)$$

dove

$$\Sigma^2 = \int_t^{T_0} \|\sigma_\alpha^M(s)\|^2 ds$$

Così, denotanto con $f_X(x)$ la funzione densità per una variabile casuale normale standard e utilizzando la misura Q_α^M, la valutazione senza arbitraggi dà

$$\begin{aligned}\mathbf{YYIISO}(t; T_\alpha, T_M, K) &= V_\alpha^M(t) E_t^{Q_\alpha^M}[\max[S_{\alpha,M}(T_M) - K, 0]] = \\ &= V_\alpha^M(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \max[S_{\alpha,M}(t) e^{-\frac{\Sigma^2}{2} + x\Sigma} - K, 0] f_X(x) dx = \\ &= V_\alpha^M(t) \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\alpha,M}(t) e^{-\frac{\Sigma^2}{2} + x\Sigma} f_X(x) dx - KN(-x_0) = \\ &= V_\alpha^M(t)[S_{\alpha,M}(t) N(-x_0 + \Sigma) - KN(-x_0)]\end{aligned}$$

dove

$$x_0 = \frac{1}{\Sigma}\left(\ln\left(\frac{K}{\Psi(t,T)}\right) + \frac{\Sigma^2}{2}\right)$$

$\square$

6.4 Zero-Coupon Inflation-Indexed Swaption

Uno *zero-coupon inflation-indexed swaption*, ZCIISO, è un opzione per entrare in uno zero-coupon inflation-indexed swap, per un dato tasso swap pre-specificato in un istante di tempo pre-specificato.

Sia $ZCIISO(t; T_0, T, K)$ il prezzo di uno ZCIISO al tempo t di un opzione, con maturità T_0, per entrare in un payer's ZCIIS, che parte al tempo T_0 e paga al tempo T, con tasso swap equivalente a K, indicato con $ZCIIS(t; T_0, T, K)$. Il payoff di questa opzione, quindi, è dato da:

$$\mathbf{ZCIISO}(T_0, T, K) = \max[ZCIIS(T_0, T, K), 0]$$

dove il payoff di uno ZCIIS è espresso secondo la seguente formula, per la teoria standard libera da arbitraggi,

$$ZCIIS(T_0, T, K) = P_r(T_0, T) - P_n(T_0, T)(1 + K)^{T - T_0}$$

poichè il payoff al tempo t è

$$ZCIIS(T_0, T, K) = \Pi\left[T_0, \frac{I(T)}{I(T_0)} - (1+K)^{T-T_0}\right] = \Pi\left[T_0, \frac{I(T)}{I(T_0)}\right] - \Pi[T_0, (1+K)^{T-T_0}]$$

dove la prima parte vale

$$\Pi\left[T_0, \frac{I(T)}{I(T_0)}\right] = \frac{P_n(T_0,T)}{I(T_0)} E_n^T[I(T)] = \frac{P_n(T_0,T)}{I(T_0)} E_n^T\Bigg[\underbrace{\frac{I(T)P_r(T,T)}{P_n(T,T)}}_{\text{è una } Q_n^T\text{-martingala}} \Bigg] = P_r(T_0,T)$$

mentre la seconda parte vale

$$\Pi[T_0, (1+K)^{T-T_0}] = P_n(T_0,T)(1+K)^{T-T_0}$$

Quindi, il payoff di uno ZCIISO diventa

$$\mathbf{ZCIISO}(T_0,T,K) = \max[P_r(T_0,T) - P_n(T_0,T)(1+K)^{T-T_0}, 0]$$

Indicando $(1+K)^{T-T_0} = G$ e definendo

$$\Psi(t,T) = \frac{P_r(t,T)}{P_n(t,T)}$$

si può riscrivere il payoff in questo modo

$$\mathbf{ZCIISO}(T_0,T,K) = P_n(T_0,T)\max[\Psi(T_0,T) - G, 0]$$

Usando come numeraire $P_n(t,T)$, il prezzo di uno swaption, al tempo t, è

$$\mathbf{ZCIISO}(t;T_0,T,K) = P_n(t,T)E_n^T[\max[\Psi(T_0,T) - G, 0]] \tag{6.3}$$

Per calcolare il valore atteso in questa equazione, si supporrà un modello HJM senza salti, in modo tale che $\Psi(T_0,T)$ sia distribuito log-normalmente. Dato che si restringe al modello senza salti, le Q^n-dinamiche di $P_n(t,T)$ e $P_r(t,T)$ sono date dalle equazioni (2.7) con l'ipotesi che $\delta^n = 0$ e $\delta^r = 0$.

Dal lemma di Ito (B.0.23) segue che la dinamica di $\Psi(t,T)$, rispetto alla misura nominale neutrale al rischio Q^n, è

$$\frac{d\Psi(t,T)}{\Psi(t,T)} = [a(t,T) - n(t) + \beta_n(t,T)\beta_n^*(t,T) - \beta_r(t,T)\beta_n^*(t,T)]dt + [\beta_r(t,T) - \beta_n(t,T)]dW_t$$

Per cambiare misura in quella T-forward nominale Q_n^T, si utilizza la derivata di Radon-Nicodym

$$L_n^T = \left.\frac{dQ_n^T}{dQ_n}\right|_t = \frac{P_n(t,T)}{B(t)}\frac{1}{P(0,T)}$$

per cui la sua dinamica è data da

$$dL_n^T = L_n^T \beta_n(t,T) dW_n^T$$

Così, dal teorema di Girsanov (2.1.4) si ha

$$dW_t = \beta_n^*(t,T)dt + dW_n^T$$

e, di conseguenza, la dinamica di $\Psi(t,T)$, rispetto la misura nominale T-forward Q_n^T, é

$$\frac{d\Psi(t,T)}{\Psi(t,T)} = [a(t,T) - n(t)]dt + [\beta_r(t,T) - \beta_n(t,T)]dW_n^T$$

Dal lemma di Ito (B.0.23), si trova

$$d\ln\Psi(t,T) = [a(t,T) - n(t) - \frac{1}{2}\|\beta_r(t,T) - \beta_n(t,T)\|^2]dt + [\beta_r(t,T) - \beta_n(t,T)]dW_n^T$$

quindi si ha

$$\ln\Psi(T_0,T) \sim N\left(\ln\Psi(t,T) + M - \frac{\Sigma^2}{2}, \Sigma^2\right)$$

dove

$$M = \int_t^{T_0} [a(s,T) - n(s)]ds$$

$$\Sigma^2 = \int_t^{T_0} \|\beta_r(t,T) - \beta_n(t,T)\|^2 ds$$

Denotando con $f_X(x)$ la funzione densità per una variabile casuale normale standard, si può riscrivere il valore atteso, dell'equazione (6.3), in questo modo

$$E_n^T[\max[\Psi(T_0,T) - G, 0]] = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left[\Psi(t,T)e^{M - \frac{\Sigma^2}{2} + x\Sigma} - G, 0\right] f_X(x)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{+\infty} \Psi(t,T)e^{M - \frac{\Sigma^2}{2} + x\Sigma} f_X(x)dx - GN(-x_0)$$

dove

$$x_0 = \frac{\ln\left(\frac{G}{\Psi(t,T)}\right) - M + \frac{\Sigma^2}{2}}{\Sigma}$$

Dopo alcuni calcoli, si arriva al prezzo di uno ZCIISO, dato il modello HJM standard senza salti:

$$\mathbf{ZCIISO}(t; T_0, T, K) = P_r(t,T)e^M N(d_1) - P_n(t,T)GN(d_2)$$

dove

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{1}{M}\left(\ln\left(\frac{P_r(t,T)}{GP_n(t,T)}\right) + M + \frac{\Sigma^2}{2}\right) \\
d_2 &= d_1 - \Sigma \\
M &= \int_t^{T_0} [a(s,T) - n(s)]ds \\
\Sigma^2 &= \int_t^{T_0} \|\beta_r(s,T) - \beta_n(s,T)\|^2 ds \\
G &= (1+K)^{T-T_0}
\end{aligned}$$

Dato che uno ZCIISO è un caso particolare di un YYIISO, uno ZCIISO può anche essere valutato usando il modello di mercato degli inflation swaps.
Più precisamente, si ha

$$\mathbf{ZCIISO}(t; T_\alpha, T_{\alpha+1}, K) = YYIISO(t; T_\alpha, T_{\alpha+1}, K)$$

Appendice A

Teoria di Probabilità

In questa appendice iniziale saranno introdotte alcune nozioni di base sulla teoria di probabilità. Nel seguito, Ω indicherà un insieme non vuoto e I un intervallo reale, del tipo $[0, t]$ oppure $[0, +\infty[$.

Definizione A.0.1. Dato un insieme $\Omega \neq \emptyset$, si definisce **σ-algebra** $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di Ω, $\mathcal{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, tale che:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$;
2. se $F \in \mathcal{F}$, allora $F^c := (\Omega \setminus F) \in \mathcal{F}$;
3. per ogni successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $F_n \in \mathcal{F}$, si ha $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

Definizione A.0.2. Si definisce **misura di probabilità** P sulla σ-algebra $\mathcal{F}$ di Ω un'applicazione $P : \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ che ad ogni evento associa la sua probabilità, cioè tale che:

1. $P(\emptyset) = 0$;
2. $P(\Omega) = 1 < \infty$;
3. per ogni successione $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, con $F_n \in \mathcal{F}$, a due a due disgiunti, si ha

$$P(\bigcup_{n\geq 1} F_n) = \sum_{n\geq 1} P(F_n)$$

Definizione A.0.3. Si definisce **spazio di probabilità** una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, dove

- $(\Omega, \mathcal{F})$ è uno spazio misurabile, ossia $\mathcal{F}$ è una σ-algebra su Ω;

- P è una misura di probabilità su $\mathcal{F}$.

Definizione A.0.4. Una misura di probabilità Q, su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si dice P**-assolutamente continua**, e si scrive $Q <<_{\mathcal{F}} P$, se per ogni $A \in \mathcal{F}$ tale che $P(A) = 0$ vale $Q(A) = 0$.

Definizione A.0.5. Dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una misura di probabilità Q si dice **equivalente** a P, e si indica $Q \sim P$, se:

$$Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F}$$

ossia se vale $Q <<_{\mathcal{F}} P$ e $P <<_{\mathcal{F}} Q$.

Teorema di Radon-Nikodym A.0.6. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità di misura finita, ossia $P(\Omega) < +\infty$, e sia Q una misura di probabilità finita, tale che $Q \sim P$. Allora esiste una funzione non negativa $L : \Omega \to [0, +\infty[$ tale che

1. L è $\mathcal{F}$-misurabile;

2. L è P-sommabile;

3. $Q(A) = \int_A L dP$ per ogni $A \in \mathcal{F}$.

La funzione L è unica P-q.s ed è detta **derivata di Radon-Nicodyn** di Q rispetto a P su $\mathcal{F}$, ossia è la densità di Q rispetto a P:

$$L = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}}$$

Definizione A.0.7. Una **variabile aleatoria**, indicata con v.a., sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, è una funzione $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^N$ misurabile, ossia tale che

$$X^{-1}(H) \in \mathcal{F}, \qquad H \in \mathscr{B}$$

dove $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbb{R}^N)$ è la σ-algebra dei Borelliani, ossia la σ-algebra generata dalla topologia euclidea di $\mathbb{R}^N$, ossia

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^N) = \sigma(\{A | A \textit{ aperto di } \mathbb{R}^N\})$$

Nel caso $N = 1$ è detta *v.a. reale*.

Definizione A.0.8. Dato lo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si definisce **variabile aleatoria casuale** una funzione

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

tale che X è $\mathcal{F}$-misurabile.

Definizione A.0.9. Una misura di probabilità definita su $(\mathbb{R}^N, \mathscr{B})$ è detta **distribuzione**.

Definizione A.0.10. Data una v.a. reale $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sommabile, ossia

$$\int_\Omega |X|\, dP = \int_\Omega X^+ dP + \int_\Omega X^- dP < \infty$$

dove X^+ e X^- sono due v.a. non-neagtive tali che $X = X^+ - X^-$ ed entrambi gli integrali a destra dell'equazione sono finiti, il **valore atteso**, o **media**, di X è

$$E[X] := \int_\Omega X\, dP$$

Definizione A.0.11. La **varianza**, o **deviazione standard**, di una v.a. reale X è definita da

$$var(X) = E[(X - E[X])^2]$$

Essa fornisce una stima di quanto X si discosta in media dal proprio valore atteso. Si può notare che

$$var(X) = E[X^2] - E[X]^2$$

Definizione A.0.12. Dati una v.a. reale X, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e $B \in \Omega$ un evento di probabilità positiva, si definisce *l'attesa di* X *condizionata a* B così

$$E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

Dato $B \in \mathcal{F}$ tale che $0 < P(B) < 1$ e $\mathcal{G}$ una σ-algebra generata da B

$$\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega, B, B^c\}$$

si definisce *l'attesa di* X *condizionata a* $\mathcal{G}$ così

$$E[X|\mathcal{G}](\omega) = \begin{cases} E[X|B], \omega \in B \\ E[X|B^c], \omega \in B^c \end{cases}$$

Si osserva che $E[X|\mathcal{G}]$ è una variabile aleatoria.

Osservazione A.0.1. Se una v.a. si distribuisce normalmente, ossia $X \sim N_{\mu,\sigma^2}$, allora vale

$$E[X] = \mu \qquad var(X) = \sigma^2$$

dove N_{μ,σ^2} è la *distribuzione normale* con media μ e varianza σ^2:

$$N_{\mu,\sigma^2}(H) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_H e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx, \qquad H \in \mathscr{B}$$

In particolare, la v.a. $\frac{X-\mu}{\sigma}$ ha una distribuzione normale standard, ossia

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N_{0,1}$$

dove $N_{0,1}$ è detta *distribuzione normale standard*, con media 0 e varianza 1.
Se, invece, la v.a. X è definita da $X = e^Z$ con $Z \sim N_{\mu,\sigma^2}$, allora si dice che X ha una *distribuzione log-normale.*

Formula di Bayes A.0.13. Siano $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ uno spazio di probabilità e P, Q due misure di probabilità su di esso, tali che $Q <<_{\mathcal{F}} P$. Siano, inoltre, $X \in L^1(\Omega, Q)$ e $\mathcal{G}$ una sotto-σ-algebra di $\mathcal{F}$. Allora, posto $L = \left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}}$, si ha

$$E^Q[X|\mathcal{G}] = \frac{E^P[XL|\mathcal{G}]}{E^P[L|\mathcal{G}]}$$

Dimostrazione. Si ponga $A = E^Q[X|\mathcal{G}]$ e $B = E^P[L|\mathcal{G}]$.
Dato che $\{B = 0\} \in \mathcal{G}$, si ha

$$Q(B = 0) = \int_{B=0} LdP = \int_{B=0} BdP = 0$$

e quindi

$$Q(B > 0) = 1$$

Inoltre AB è ovviamente $\mathcal{G}$-misurbaile e per ogni $G \in \mathcal{G}$ vale

$$\int_G ABdP = \int_G E^P[AL|\mathcal{G}]dP = \int_G ALdP = \int_G E^Q[X|\mathcal{G}]dQ = \int_G XdQ = \int_G XLdP$$

quindi si ha

$$AB = E^P[XL|\mathcal{G}]$$

e, così, si ha la tesi. $\square$

Appendice B

Processi Stocastici

Definizione B.0.14. Dato I un intervallo reale ordinato, si definisce **processo stocastico** in $\mathbb{R}^N$ una famiglia $X = (X_t)_{t \in I}$ di v.a. definite su uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, a valori in $\mathbb{R}^N$:

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}^N, \qquad n \in I$$

Intuitivamente esso rappresenta l'evolversi aleatorio di un certo sistema, in cui una sua traiettoria rappresenta una possibile evoluzione del sistema.

Definizione B.0.15. Si dice **traiettoria** del processo stocastico $X = (X_t)_{t \in I}$, associato all'evento $\omega \in \Omega$, l'applicazione

$$t \mapsto X_t(\omega) \in \mathbb{R}^N$$

Definizione B.0.16. Si definisce **filtrazione**, sullo spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, una famiglia $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ crescente di sotto-σ-algebre di $\mathcal{F}$, ossia tale che

$$\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F} \qquad \forall t$$

.

In altre parole, una filtrazione rappresenta l'incremento delle informazioni disponibili dall'osservazione di un sistema stocastico nel tempo, ossia $\mathcal{F}_t$ indica l'informazione disponibile al tempo t.

Definizione B.0.17. Dato un processo stocastico X e una filtrazione $(\mathcal{F}_t)$, si dice che il processo è **adattato** alla filtrazione se X_t è $\mathcal{F}_t$-misurabile, ossia

$$\mathcal{F}_t^X \subseteq \mathcal{F}_t, \qquad \forall t \in I$$

dove la famiglia di σ-algebre $(\mathcal{F}_t^X)_{t\in I} = \mathcal{F}^X$, definita da

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_k, 0 \leq k \leq t) := \sigma(\{X_s^{-1}(H) | 0 \leq s \leq t, H \in \mathscr{B}\})$$

è detta **filtrazione naturale** per X o **filtrazione associata** al processo X.
E' la più piccola filtrazione rispetto alla quale X è adattato.

Definizione B.0.18. Dato un processo stocastico M sommabile e $\mathcal{F}_t$-adattato, nello spazio con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, si dice che M è una **martingala** rispetto $\mathcal{F}_t$ e alla misura P se

$$M_s = E[M_t|\mathcal{F}_s], \qquad \forall 0 \leq s \leq t$$

Osservazione B.0.2. Si può osservare che una martingala è un processo stocastico che in media rimane costante, cioè il suo valore atteso è costante nel tempo. Infatti per ogni t vale

$$E[M_t] = E[E[M_t|\mathcal{F}_0]] = E[M_0]$$

Definizione B.0.19. Dato uno spazio di probabilità con filtrazione $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$, un processo stocastico $W = (W_t)_{t\in[0,+\infty[}$ in $\mathbb{R}$ si dice **processo di Wiener** o **moto browniano** se:

1. $W_0 = 0$ q.s.[1];

2. W è $\mathcal{F}_t$-adattato e continuo, ossia se le sue traiettorie sono continue;

3. per $s < t$ la v.a. $W_t - W_s$ ha distribuzione normale con media 0 e varianza $t - s$, ossia $W(t) - W(s) \sim N_{0,t-s}$, ed è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

Definizione B.0.20. Sia $(\Omega, \mathcal{F}, P, \mathcal{F}_t)$ uno spazio di probabilità con filtrazione. Si definisce **moto browniano d-dimensionale** un processo stocastico $W = (W_t)_{t\in[0,\infty[}$ in $\mathbb{R}^d$, ossia $W = (W^1, \ldots, W^d)$, tale che:

[1]q.s. sta ad indicare quasi sicuramente.

1. $W_0 = 0$ P-q.s.;
2. W è un processo stocastico adattato, rispetto $\mathcal{F}_t$, e continuo;
3. per $t > s \geq 0$ la variabilie aleatoria $W_t - W_s$ ha distribuzione multi-normale $N_{0,(t-s)I_d}$, dove I_d indica la matrice identità $d \times d$, ed è indipendente da $\mathcal{F}_s$.

Osservazione B.0.3. Dalle prime due condizioni della definizione segue che le traiettorie di un moto browniano partono, al tempo $t = 0$, dall'origine q.s. e sono continue. Mentre dalla prima e dalla terza condizione segue che per ogni t

$$W_t \sim N_{0,t}$$

poichè $W_t = W_t - W_0$ q.s.

Osservazione B.0.4. Un processo stocastico segue un moto browniano se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

dove W_t è un moto browniano, e μ e σ sono costanti reali.
μ è detto **termine di drift**, o semplicemente **deriva**, e σ è detta **volatilità** o **termine di diffusione**. Intuitivamente, μ 'imprime la direzione' al processo X, mentre la componente di X contenente σ è una martingala locale che dà solo un 'contributo stocastico' all'evoluzione di X.
L'equazione differenziale stocastica ha una soluzione analitica nella forma:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(W_t - W_0)}$$

La variabile casuale $\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)$ ha distribuzione normale con valore atteso $(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ e varianza $\sigma^2 t$.

Definizione B.0.21. Un processo stocastico $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ si dice **processo Ornestein-Uhlenbeck** se è definito dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dS_t = \theta(\mu - S_t)dt + \sigma dW_t$$

dove W_t è un moto browniano e θ, μ e σ sono delle costanti positive.

Definizione B.0.22. Un **processo di Ito** è un processo stocastico X della forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s \qquad t \in [0, T]$$

dove X_0 è una variabile aleatoria, $\mathcal{F}_0$-misurabile, $\mu \in \mathbb{L}^1_{loc}$ e $\sigma \in \mathbb{L}^2_{loc}$.
Nel caso in cui W è un moto browniano d-dimensionale, X è sempre un processo di Ito, dove μ è una vettore $N \times 1$ e σ una matrice $N \times d$.

Lemma di Ito B.0.23. Supponiamo che il processo X abbia come differenziale stocastico:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

dove μ e σ sono dei processi adattati. Sia f una funzione $C^{1,2}$, ossia avente derivata seconda continua. Si definisca il processo $Z = f(t, X(t))$.
Allora Z ha differenziale stocastico dato da:

$$df(t, X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right]dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW(t)$$

Formula di Ito B.0.24. Considerando le ipotesi del Lemma di Ito, df è dato da

$$df = \frac{\partial f}{\partial t}dt + \frac{\partial f}{\partial x}dX + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(dX)^2$$

dove è si utilizza la seguente tabella di moltiplicazione formale:

$$\begin{cases} (dt)^2 = 0 \\ dt \cdot dW = 0 \\ (dW)^2 = dt \end{cases}$$

Bibliografia

[1] Bjork T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press, 2^{nd} Edition, 2004

[2] Brigo D. e Mercurio F., *Interest Rate Models - Theory and Practice. With Smile, Inflation and Credit*, Springer 2^{nd} Edition, 2006

[3] Deacon M., Derry A. e Mirfendereski D., *Inflation-Indexed Securities*, Wiley Finance, 2004

[4] Hinnerich Mia, *Inflation-indexed Swaps and Swaptions*, Journal of Banking and Finance, Ottobre 2006

[5] Jarrow R. e Yildirim Y, *Valuing Default Swaps Under Market and Credit Risk Correlation*, Journal of Fixed Income, 11 (4), Marzo 2002

[6] Jarrow R. e Yildirim Y, *Pricing Treasury Inflation Protected Securities and Related Derivative securities using an HJM Model*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 38 (2), June 2003

[7] Malvaez L., *Valuation of Inflation-Indexed Derivatives with three factor model*, University of Oxford, 2005

[8] Pascucci A., *Calcolo Stocastico per la Finanza*, Springer, 2008

[9] Pascucci A., *PDE and Martingale Methods in Option Pricing*, Springer, 2011

Ringraziamenti

‘Se mi sento triste, faccio matematica per essere felice. Se sono felice, faccio matematica per restare felice.’ (A. Rényi)

Questo percorso nel mondo matematico universitario è, purtroppo, giunto al termine. Vorrei ringraziare, innanzitutto, il mio professore Andrea Pascucci, che mi ha accompagnato in questi quattro fantastici anni, sia con il lavoro di tesi triennale, sia con quest'ultimo conclusivo. In secondo luogo, ringrazio la mia famiglia, i miei genitori e mia sorella per avermi supportato e, soprattutto, sopportato in tutti questi anni, perchè riconosco di non essere sempre stata amorevole nei comportamenti. Ringrazio la mia nonna Augusta, per aver fatto festa per ogni mio voto d'esame, e i miei nonni Piera e Senesio per non avermi mai abbandonata con il prezioso consiglio ‘ciapa sò e porta a cà’, che poche volte ho ascoltato. Un grazie particolare e pieno di amore va Gaetano, che, più di tutti, mi è stato vicino nei momenti più difficili e nascosti dagli altri, nei momenti di crisi, di strippo e pieni di lacrime. Grazie ai miei compagni di studi, con i quali ho preparato esami con anche nottate in bianco, in particolare alla mia amica Agnese, alla quale vola il mio pensiero in questi giorni difficili in Giappone. Infine, come potersi dimenticare l'incipit di questo viaggio, che non sarebbe mai iniziato se in una triste festa di compleanno non avessi conosciuto Alessandro, il mio compagno di studi. In una sola sera, mi ha fatto conoscere cosa significasse ‘studiare matematica’ da un altro punto di vista, attraverso il libro ‘L'enigma dei numeri primi’, una facoltà, nelle mie fantasie, irraggiungibile e inaffrontabile. Senza questa conoscenza non avrei trovato il coraggio di abbandonare ingegneria per tuffarmi in questo bellissimo mare di formule e numeri. Ho imparato a credere in me stessa e conoscere lati di me di cui nemmeno immaginavo l'esistenza.

La cosa più importante è conoscersi e capire la rotta che si vuole dare alla propria nave.