Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

FACOLTÁ DI SCIENZE MATEMATICHE,FISICHE E NATURALI

Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

IL CONCETTO DI INFINITO TRA STORIA, SCIENZA E COMUNICAZIONE

Relatore:
Prof.ssa Silvia Benvenuti
Correlatore:
Prof. Alberto Parmeggiani

Presentata da:
Elena Bravaccini

II Sessione
Anno Accademico 2019/2020

Alla Storia che mi ha conquistato
e mi conquista tutt'ora.

"L'infinito! Nessun'altra questione ha mai toccato così profondamente lo spirito umano; nessun'altra idea ha stimolato altrettanto fruttuosamente il suo intelletto; tuttavia nessun altro concetto ha più bisogno di essere chiarito come quello di infinito."
D. Hilbert

Indice

Introduzione

L'idea di questa tesi è nata dalla mia esperienza lavorativa durante il tirocinio in una Scuola Secondaria di Primo grado di Bologna, effettuato al secondo anno di magistrale. Essendo all'interno di una classe, e avendo avuto la possibilità di relazionarmi con degli studenti, è cresciuto in me il desiderio di approfondire i metodi più adatti per "condividere" la conoscenza di alcuni aspetti della matematica.
In particolare, durante un'ora di lezione, la professoressa che seguivo a tirocinio ha proposto un quesito interessante agli alunni: "da quanti punti è composto un segmento?"
La domanda, semplice a primo impatto, non è risultata banale, infatti alcuni ragazzi hanno provato a rispondere ma non comprendendo la vera risposta, cioè infiniti punti: identificavano il concetto di segmento limitato con quello di segmento avente un numero finito di punti.
Dal momento in cui la classe era in disaccordo sulla risposta, mi è sorto l'interrogativo di come effettivamente viene concepito l'infinito matematico, argomento tanto affascinante quanto difficile poiché condivide con tutti gli altri oggetti matematici il fatto di essere un concetto astratto, quindi complesso da interiorizzare, specialmente per gli studenti della Scuola Secondaria.
La prima parte del lavoro che ho affrontato in questa tesi consiste nell'esplorare il tema dell'infinito nella sua componente storica; infatti, nella formazione di uno studente, didattica, storia ed epistemologia devono costituire un "circolo" nel quale ognuna di esse giustifica e rafforza le altre.
Dunque, nell'insegnamento della matematica a livello di scuola secondaria,

nello specifico, è bene che ci sia una componente storica per permettere ai ragazzi di entrare in confidenza con la disciplina, in modo da acquisirne la consapevolezza dei rapporti tra lo sviluppo del pensiero matematico e il contesto storico, filosofico, scientifico e tecnologico. In tal modo dominare un argomento nella sua evoluzione storica ed epistemologica ci permette di conoscerlo ed acquisire una conoscenza più ampia e completa. Inoltre, risulta evidente che la cognizione dell'evoluzione storica di un determinato argomento fornisce maggiori strumenti critici per la valutazione degli errori degli studenti.
Abbiamo poi proseguito con un'analisi di un argomento specifico inerente all'infinito, nella sua declinazione più fine, ovvero il Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein, oggetto del capitolo 2.
L'ultima parte dell'elaborato si dedica in particolare a progetti didattici riguardanti l'infinito matematico. Per questo abbiamo suddiviso il terzo e quarto capitolo in modo tale da procedere con un percorso adatto allo sviluppo di tali attività.
Innanzitutto, conoscendo gli ostacoli che si possono presentare in questo itinerario, ho voluto affrontare le difficoltà epistemologiche legate all'argomento dell'infinito, per renderlo più familiare e comprensibile agli studenti di diversi gradi di scuola. In particolare, in accordo con le indicazioni provenienti dalla Ricerca in Didattica, di cui diamo parzialmente conto nel capitolo 3, abbiamo seguito un percorso a spirale, ovvero la presentazione di attività con gradi di astrazione diversi e compatibili con le età degli studenti coinvolti. Per poter strutturare le attività, il terzo capitolo affronta infatti le difficoltà epistemologiche dell'insegnamento-apprendimento della matematica, così come evidenziate dalle ricerche della didattica della disciplina, (Didattica della Matematica).
Le attività presentate nel capitolo 4 si propongono di affrontare e auspicabilmente superare alcune delle complicazioni emerse nella didattica sia generalista che disciplinare.

Capitolo 1

Storia dell'infinito [1]

Probabilmente una prima idea di "senza limite" era apparsa e maturata nella mente dell'uomo primitivo. Guardando la luna, le stelle, il sole, il cielo ecc. nasce spontanea la domanda «Che cos'è?». Quell'uomo avrà trovato, com molta difficoltà, termini adeguati per esprimere quelle domande di senso e stupore che lo elevavano oltre la concretezza della vita, dalla quale traeva suoni mono-concettuali per un linguaggio essenziale. L'esiguità di mezzi linguistici e concettuali non impedisce all'uomo, già nelle età primordiali, di cercare spiegazioni a loro modo rigorose, commisurate alle condizioni di vita e alla cultura espressa in quel momento. Egli s'interroga sulla natura del fuoco e dell'acqua; poi sulla costituzione della materia, sull'origine del pensiero, su sé stesso, arrivando a chiedersi quanto vasto è il mondo. Lo sguardo dell'uomo s'innalza da un universo sensibile, di cui si ha quotidiana esperienza, a un "oltre", un al di là che questo universo con la sua vastità sembra indicare. Di primo acchito appare irragionevole pensare a "cose illimitate", cioè prive di un termine, inteso sia come inizio sia come fine. Quindi la domanda attorno a questa questione sussiste: se ha limiti, che "universo" è? Se il tempo ha un inizio, "prima" che cosa accadeva?

[1]Per evitare continue citazioni, si dichiara che il contenuto di questo capitolo è tratto dal libro *Infiniti infiniti* di Arrigo G., D'amore B., Sbaragli S.

1.1 Primi passi

In questo quadro di idee nasce la Scuola ionica, nella città di Mileto, nell'attuale Turchia. Il fondatore è Talete di Mileto (624 a.C. circa - 545 a.C. circa), colui che viene considerato il primo filosofo ma anche il primo matematico della storia. Egli identifica l'origine di tutte le cose *(archè)* nell'acqua in quanto, a suo avviso, tutto ha alla base della propria natura uno stato di umidità e a questo stato tutte le cose ritornano.
Uno dei suoi allievi, Anassimandro di Mileto (610 a.C-547 a.C), considera l'archè come qualcosa di qualitativamente indefinito (idea di indeterminazione), senza limiti. Si dice che egli avesse inventato un nuovo termine per indicare questo concetto, *à-peiron*, che significa "senza limite", senza confine, indefinito. La novità apportata da Anassimandro sta nel concepire all'origine della realtà, come archè, qualcosa di illimitato, infinito, indefinito. Serve allora domandarsi che cosa intenda Anassimandro per àpeiron. Oggi questi tre termini, *illimitato, infinito, indefinito* hanno un significato distinto: il primo si attribuisce a qualcosa che non ha limite, come la retta intesa nella sua estensione lineare; il secondo può essere inteso come una numerosità maggiore di qualsiasi cardinale naturale; infine il terzo è riferito a qualcosa senza un chiaro confine, o, ancora, senza una precisa definizione.
All'interno della sapienza antica, nel tempo a cui ci riferiamo, i tre termini erano invece considerati sinonimi e l'àpeiron conteneva in sé tutte quelle caratteristiche.

1.2 Pitagora e la scuola pitagorica

Pitagora (580 a.C. circa - 504 a.C. circa), filosofo e matematico di grande importanza, nasce nell'isola di Samo, nel Mar Egeo. Di lui si racconta che fosse figlio di Mnesarco, un agiato mercante che potè permettersi di far studiare il figlio; infatti tra i più illustri insegnanti di Pitagora si citano Anassimandro e soprattutto Talete. É proprio grazie a quest'ultimo che Pitagora allarga i propri orizzonti culturali verso l'Oriente: Egitto e Babilonia. Così Pita-

gora entra in contatto con la matematica dei Babilonesi che in quel tempo rappresentavano gli esponenti più illustri in questa disciplina. Al ritorno dal suo soggiorno in Oriente, Pitagora approda a Crotone da dove però, cacciato per ragioni politiche, si sposta e si stabilisce nella regione del Metaponto. Lì fonda una scuola, famosa quanto esclusiva, nella quale, si dice, prima di essere ammessi alle lezioni del Maestro, occorreva trascorrere tre interi anni in perfetto silenzio. Sulla sua morte i resoconti biografi non coincidono: secondo alcuni, Pitagora, rientrato a Crotone, sarebbe vissuto fino all'età di cento anni. La critica attuale tende a ritenere che una persona di nome Pitagora non sia mai esistita e che si tratti soprattutto di un ideale umano di scienziato, mistico e pensatore.
Alla base del pensiero di Pitagora c'è la convinzione che la spiegazione dell'universo sia di tipo matematico, perché la matematica costituisce la struttura del cosmo. Tutto, secondo lui, è descrivibile attraverso i numeri naturali e i loro rapporti. Gli oggetti reali, riconducibili tutti a composti di segmenti e figure geometriche, sono aggregati di monadi, corpuscoli unitari, dotati di grandezza, ma talmente piccoli da risultare non ulteriormente divisibili e, comunque, non nulli, non disposti a caso, bensì secondo un ordine geometrico-aritmetico prestabilito. Pitagora viene quindi considerato un "finitista", sostiene infatti che ogni oggetto matematico esiste solo se può essere costruito in un numero finito di passi a partire dai numeri naturali o da stringhe di un alfabeto finito. Acquistano così importanza le rappresentazioni figurali dei numeri tramite opportune configurazioni geometriche di monadi. Esempio di questo sono i numeri poligonali (triangolari, quadrati, pentagonali ecc.), ma anche quelli tetraedrici, piramidali quadrangolari ecc. L'illusione dei Pitagorici di poter esprimere tutto l'universo solo attraverso i numeri naturali e i loro rapporti, cioè attraverso i razionali, cade nel momento in cui scoprono essi stessi l'esistenza di grandezze incommensurabili.

Definizione 1.1. Due grandezze si dicono incommensurabili quando non esiste alcuna grandezza contenuta un numero intero di volte nell'una e nell'altra.

Ciò che permette la caduta dell'illusione pitagorica della monade è la dimostrazione dell'incommensurabilità tra il lato e la diagonale di un quadrato; questa dà vita, in modo indiretto, ai numeri irrazionali. Ne riporto la dimostrazione perché esplicativa:
Dimostrazione Consideriamo un quadrato e supponiamo che il suo lato contenga un numero naturale m di monadi, mentre la sua diagonale contenga un numero naturale n di monadi:

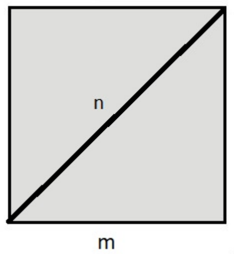


Figura 1.1: Lato e diagonale di un quadrato

Utilizziamo, come unità di misura comune per i due segmenti, il massimo comune divisore tra m ed n, per cui lato e diagonale misureranno rispettivamente $p = \frac{m}{MCD(m,n)}$ e $q = \frac{n}{MCD(m,n)}$ volte tale unità di misura. Osserviamo che se m ed n sono numeri primi tra loro, allora tale unità di misura vale 1 e si ha: $p = m$ e $q = n$. Ma, in ogni caso, p e q sono numeri primi tra loro per come sono definiti.
Applicando il Teorema di Pitagora abbiamo: $p^2 + p^2 = q^2$ cioè $2p^2 = q^2$. Il membro a sinistra è pari poiché ha 2 come fattore, quindi valendo l'uguaglianza, è pari anche il membro a destra, q^2: ma l'unico modo affinché un quadrato sia pari è che lo sia il numero che l'ha "originato" (q) sia pari. Dunque, possiamo scrivere $q = 2t$. Sostituiamo: $2p^2 = (2t)^2$, cioè $2p^2 = 4t^2$. Dividiamo entrambi i membri per 2, ottenendo $p^2 = 2t^2$.
Si osserva che il membro di destra è pari, per lo stesso ragionamento che abbiamo fatto precedentemente, dunque anche p è pari.
Ci troviamo, quindi, in una situazione in cui valgono contemporaneamente le seguenti affermazioni:

- p e q sono primi tra loro

- p e q sono entrambi pari.

Si giunge così ad una contraddizione, dovuta all'ipotesi errata che abbiamo considerato: ogni segmento si può esprimere come numero naturale di monadi.
Si nota che non tutte le coppie di segmenti sono commensurabili. Perciò, un'ipotesi finitistica in matematica è contradditoria.
In questo modo il finitismo pitagorico non è più sostenibile. Gli oggetti della matematica, come i segmenti, per esempio, richiedono immediatamente il concetto di infinito per essere compresi. Si apre così la strada alla formulazione di concetti matematici che non hanno più un corrispettivo nella realtà ingenuamente incontrata, nel mondo fisico di cui si fa immediatamente esperienza. Tra questi concetti privilegiamo l'infinito, a cui si può accedere solo a condizione che ci si stacchi proprio dal mondo sensibile raggiungendo un livello di ricerca più astratto.

1.3 Scuola eleatica

Parmenide ($VI - V sec.a.C.$) filosofo greco presocratico di Elea, fonda una scuola destinata a diventare tra le più importanti del periodo filosofico presocratico: la Scuola eleatica. Parmenide pone in antitesi due modi diversi e contrapposti di interpretare la verità:*doxa* è la verità di origine sensibile, accessibile con i sensi; *Alétheia* è la verità di carattere razionale, colta con la sola ragione.
L'uomo si serve della *doxa* solo in funzione del raggiungimento dell'*Alétheia*, considerata la vera conoscenza. Nella *doxa* si esclude l'infinito per evitare paradossi come quello che verrà illustrato di seguito con Zenone, mentre nell'*Alétheia*, che rappresenta la massima e vera conoscenza cui l'uomo aspira, si può arrivare a concepire l'infinito. La ricerca razionale che mira, come in tutti i filosofi del tempo, a dare ragione della realtà attraverso l'approdo

a un archè, porta Parmenide a formulare l'idea di un Essere totale, unico, perfetto, eterno, quindi a suo modo infinito, benchè la perfezione escluda l'idea di indefinito.
Uno dei suoi allievi fu Zenone di Elea (V sec a.C), che seguì le orme del maestro. I suoi famosi paradossi intendono sostenere le idee del maestro confutando le tesi contrarie. Un esempio molto importante che concerne l'infinito è il paradosso di Achille e la tartaruga.

Paradosso di Achille e la tartaruga: Achille Pie' Veloce è sfidato dalla tartaruga, notoriamente lenta, in una gara podistica. Entrambi stabiliscono che la tartaruga parta contemporaneamente ad Achille, ma con 100 m di vantaggio. Achille vincerà la gara se riuscirà a raggiungere la tartaruga. Tutti noi, in base alla nostra esperienza sensibile, pensiamo che Achille sia il favorito, ma vedremo che, con il paradossale ragionamento di Zenone, Achille perderà la gara perché non potrà raggiungere la tartaruga in un tempo finito. Supponiamo che Achille corra 10 volte più veloce della tartaruga. Mentre Achille in pochi secondi copre i 100 m dello svantaggio iniziale, la tartaruga ha percorso ulteriori 10 m; mentre Achille percorre questi 10 m, la tartaruga compie ancora 1 m; mentre Achille percorre il metro che lo distanzia dalla tartaruga, questa percorre 0,1 m; e così via. Dunque la tartaruga sarà sempre davanti ad Achille, il quale come abbiamo già detto perderà la gara.
La somma dei tratti che separano Achille dalla tartaruga è:

$$S = 100 + 10 + 1 + 0,1 + 0,01 + ... \tag{1.1}$$

cioè:

$$S = 110 + \sum_{n=0}^{\infty} 0,1^n = 110 + \frac{1}{1-0,1} = 110 + \frac{1}{0,9} = 111,\bar{1} \tag{1.2}$$

quindi il tratto che Achille deve percorrere per raggiungere la tartaruga, pur essendo una somma di infiniti addendi, ha un valore finito. In conclusione, si nota che, dopo aver percorso $111,112m$ Achille avrà superato la tartaruga. Zenone sapeva che Achille avrebbe raggiunto la tartaruga in breve tempo, ma il suo paradosso era una vera e propria provocazione per i suoi contemporanei. In particolare, la convergenza della serie S è possibile solo se si ammette la continuità dello spazio, cosa che, secondo la teoria atomistica, teoria secondo la quale lo spazio è costituito da elementi indivisibili (a-tomòs, non ulteriormente divisibile) distinguibili qualitativamente per posizione, forma e grandezza, e tra loro aggregati all'interno di un vuoto infinito, era impossibile. Per gli antichi Greci la somma di infiniti segmenti non può che essere un segmento infinito, infatti l'idea che la somma potesse essere finita era fuori dalla portata della maggioranza.

1.4 Aristotele

Nella filosofia e nella matematica greca, lo studio di ciò che concerne l'infinito portava a contraddizioni e paradossi, per cui tale argomento veniva trattato superficialmente, tralasciando di indagarne tutte le implicazioni. Aristotele (384 a.C. - 322 a.C), celebre filosofo greco, interpretò l'infinito secondo una duplice natura: *«in atto»* e *«in potenza»*. «In atto» significa che l'infinito si presenta in un atto unico, tutto in una volta, come una realizzazione in sè completa; «in potenza», invece, vuol dire che si dà una situazione che nell'istante in cui se ne parla è finita, ma con la sicurezza che si può sempre andare al di là del limite posto:

> Una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita,
> ma ve ne sono sempre di nuove.

Nell'opera *Physica*, Aristotele ammette solo l'uso dell'infinito potenziale: *Sicché l'infinito è in potenza, ma non in atto.* Infatti, per Aristotele, un segmento non è composto di infinite parti (in atto) perché è in sè completo, cioè pienamente realizzato; eppure un segmento è sempre divisibile (in potenza). Aristotele mantiene questa posizione perché concepisce la realtà in sé pienamente realizzata, tanto che il cosmo è in atto, cioè completo. L'infinito potenziale interviene per comprendere il movimento e la scoperta delle strutture che compongono il cosmo, potenzialmente infiniti; infinitamente divisibile è lo spazio, infinitamente estendibile è il tempo, le serie dei numeri sono potenzialmente infinite: così viene inteso l'infinito in potenza. Il nostro filosofo non ammette invece l'esistenza dell'infinito in atto, cioè di un corpo fisico infinito: questa impossibilità è legata come si diceva alla concezione prevalente presso gli antichi greci dell'infinito (fisico nel caso di Aristotele) come indefinito, non ultimato, imperfetto. La visione aristotelica della realtà fisica, con il relativo utilizzo delle categorie concettuali, è stata percepita nel corso della storia come un divieto dogmatico dell'uso l'infinito in atto. Molti studiosi si trovarono spesso ad un passo dal poter dominare razionalmente l'infinito, pur con tutti i suoi paradossi; ma l'apparente divieto imposto da Aristotele lo ha impedito.

1.5 Euclide

In questo paragrafo affrontiamo un grande matematico, iniziatore dell'impostazione assiomatica delle teorie matematiche: Euclide, vissuto nel IV-III secolo a.C.
Tra i suoi scritti più importanti troviamo gli *Elementi*, un'opera costituita da 13 libri, all'interno della quale si nota l'influenza aristotelica inerente la concezione di infinito, inteso come potenziale e mai attuale.
Vediamo qualche esempio.
Nel postulato II del I libro, Euclide non usa il termine retta, ma parla di un ente geometrico che chiama *eutheia grammé* (linea terminata) per il quale richiede, tramite il postulato, che si possa *prolungare continuamente per diritto*. Anche il V postulato di Euclide, oggi detto "delle parallele", nella sua formulazione originaria non parlava di rette parallele, perché ciò avrebbe sottinteso la considerazione di un'infinità in atto. Euclide lo esprime nel modo seguente:

Se un segmento prolungabile continuamente per diritto, venendo

> a cadere su due altri segmenti prolungabili continuamente per diritto, forma gli angoli interni e dalla stessa parte minori di due retti, i due segmenti, eventualmente opportunamente prolungati, si incontrano da quella stessa parte in cui sono gli angoli minori di due retti.

Nella proposizione XX del IX libro, Euclide non dimostra che "esistono infiniti numeri primi" ma che "i numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi", in sintonia con la sua posizione di parlare di infinito senza mai nominarlo in modo attuale, ma solo ricorrendo all'infinità potenziale. Una delle espressioni più celebri enunciate da Euclide è: *Il tutto è maggiore della parte.*
Alcuni esperti e studiosi hanno concluso che Euclide scelse questa affermazione per eliminare gli insiemi infiniti - evitando quindi di andare contro quel "divieto" imposto da Aristotele - per i quali infatti questo non vale. Sembra dunque che Euclide voglia evidenziare che nei suoi studi l'infinità non viene affrontata.

1.6 Archimede

É proprio Archimede di Siracusa (287 a.C - 212 a.C) che introduce, all'interno di una sua opera minore *Arenarius*, un originale sistema di numerazione per rappresentare i grandi numeri, dandosi come obiettivo quello di dimostrare che il numero di granelli di sabbia nell'universo è finito, e di dare una maggiorazione per tale numero. L'opera è dedicata al sovrano di Siracusa, Gelone II, e inizia così:

> Alcuni pensano, o re Gelone, che il numero dei granelli di sabbia sia infinito per grandezza: parlo del numero dei granelli non solo della sabbia che è nei dintorni di Siracusa e nel resto della Sicilia, ma anche della sabbia sparsa su tutta la Terra... Ci sono altri, al contrario, che partono dall'affermazione sicura che questo numero non è infinito, ma che tuttavia non si potrebbe enunciarne

> un altro che sia più grande... Ebbene, io cercherò di provarti, attraverso delle dimostrazioni geometriche di cui potrai seguire i ragionamenti, che certi numeri che ho espresso... sorpassano non solo il numero di granelli di sabbia il cui volume è uguale a quello della Terra, ma anche il numero dei granelli di sabbia il cui volume è uguale a quello del cosmo.

Il cosmo di cui parla Archimede è descritto dalla teoria eliocentrica di Aristarco di Samo, con la Terra che ruota attorno al Sole immobile al centro della sfera delle stelle fisse. E il numero dei granelli di sabbia nella sua stima è enorme, in notazione moderna circa 10^{63}.
Il metodo di numerazione greca non offriva metodi efficaci per esprimere e trattare numeri molto grandi; in questa opera Archimede elabora una sistemazione che gli permette di trattare numeri di enorme ordine di grandezza. Il metodo si basa sulle miriadi di miriadi in base alle quali Archimede periodizza il sistema dei numeri (la miriade è pari a $10^4 = 10000$, e quindi una miriade di miriadi è pari a 10^8, cioè cento milioni):

- numeri del Primo ordine (o 'numeri primi'): da 1 a 10^8;
- numeri del Secondo ordine (o 'numeri secondi'): da 10^8 a 10^{16};
- $\cdots$
- numeri del 10^8 - esimo ordine: da $10^{8 \cdot 10^8}$ a $10^{16 \cdot 10^8}$ =A

Questi numeri (da 1 ad A) costituiscono il "Primo Periodo", il "Secondo Periodo" ha anch'esso i suoi ordini ed è costruito come il primo, ma prendendo A come unità; quindi comprende i numeri da A ad A^2:

- numeri del Primo ordine (o 'numeri primi'): da A a 10^8A;
- numeri del Secondo ordine (o 'numeri secondi'): da 10^8A a 10^{16}A;
- $\cdots$
- numeri del 10^8 - esimo ordine: da $10^{8 \cdot 10^8}$A a $10^{16 \cdot 10^8}$A=A^2

e si continua così fino ad ottenere 10^8 periodi.
In questo modo Archimede introduce una regola con la quale si può andare avanti indeterminatamente nello scrivere numeri sempre più grandi. Questo fatto risulta elementare per il nostro metodo di rappresentazione, che ci abitua a pensare il sistema dei numeri come un sistema "aperto", dove per passare a numeri più grandi si tratta solo di aumentare il numero delle cifre; ciò non è altrettanto semplice per sistemi come quello greco o romano, che devono introdurre sempre nuovi simboli per numeri più grandi.
Dopo aver descritto questo metodo di numerazione, Archimede passa al problema dei granelli di sabbia vero e proprio.Viene risolto partendo dalla supposizione che il numero di granelli contenuto in una sfera della grandezza di un seme di papavero sia minore di 10 000, poi utilizzando il fatto che il rapporto fra i volumi di due sfere è uguale al rapporto dei cubi dei loro raggi. In questo modo si trova una serie di proporzioni fra volumi di sfere sempre più grandi, partendo dal seme di papavero e arrivando alla sfera del cosmo (cioè alla sfera avente per raggio la distanza Terra-Sole) ed a quella delle stelle fisse (qui Archimede utilizza l'ipotesi di Aristarco che il volume del cosmo sia medio proporzionale fra quello della Terra e quello della sfera delle stelle fisse.)
Con questi calcoli, Archimede prova che il numero dei granelli di sabbia contenuti nel cosmo è minore di 10^{51}, e quello contenuto nella sfera delle stelle fisse è minore di 10^{63}.
Vediamo, dunque, come l'infinito affascini Archimede che propone problemi la cui soluzione comporta numeri enormi: la sua ricerca mostra una continua tensione tra l'impossibilità dell'infinito in atto (finitezza dell'Universo) e la possibilità dell'infinito potenziale (nel sistema dei numeri).

1.7 Galileo Galilei

Ora effettuiamo un "salto" di secoli e arriviamo al XIV secolo per parlare di Galileo Galilei (1564-1642): scienziato, filosofo e scrittore. All'interno

della sua opera *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* sono presenti tutte le sue considerazioni sull'infinito e sui suoi paradossi.
Secondo Galileo, le linee, ma anche gli oggetti concreti che si trovano in natura, sono formati da un continuo (infinito attuale) di parti piccole a piacere ma misurabili (e quindi a loro volta divisibili):

> Ogni parte (se parte si può chiamare) dell'infinito è infinita: sì che se bene una linea di cento palmi è maggiore d'una di un palmo solo, non però i punti di quella sono più dei punti di questa, ma e questi e quelli sono infiniti.

Le sue considerazioni di geometria lo portano a concludere che l'infinito può entrare in collisione con l'VIII nozione comune di Euclide: *"il tutto è maggiore della parte"*. Basta disegnare un triangolo ABC e vedere che tra il lato AB e il segmento NM, che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca ottenuta congiungendo i punti di AB con C e considerando il punto P' , corrispondente di P, come intersezione di MN con CP. Tutto ciò contro l'intuizione che sembra portare a far credere che AB, dato che ha lunghezza doppia rispetto a MN, sia formato da un numero maggiore di punti.

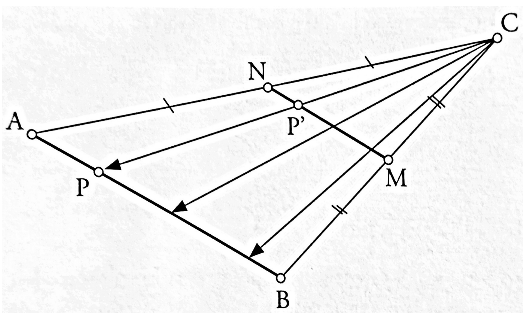


Figura 1.2: Corrispondenza biunivoca tra due segmenti in un triangolo

Galileo fece un'importante considerazione: da una parte, l'insieme dei numeri naturali quadrati $\mathbb{N}_Q$ è parte propria dell'insieme dei naturali $\mathbb{N}$; dall'altra parte, è facile stabilire una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}_Q$. Infatti, se ad ogni numero si fa corrispondere il suo quadrato si ottiene:

$$\begin{array}{cccccccccc} \mathbb{N} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n & \cdots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\ \mathbb{N}_Q & 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdots & n^2 & \cdots \end{array}$$

Si riporta, di seguito, un estratto dell'opera di Galilei *Nuove scienze*, riferito al paradosso degli interi e dei quadrati. I personaggi che intervengono nel dialogo sono: Simplicio (l'aristotelico) e Salviati (Galileo stesso).

> SALVIATI: Benissimo, e sapete ancora, che sì come i prodotti si dimandano quadranti, i producenti, cioè quelli che si moltiplicano, si chiamano lati o radici; gli altri [numeri] poi, che non nascono da numeri moltiplicati in se stessi, non sono altrimenti quadrati. Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendono i quadrati e non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò propositione verissima: non è così?
> SIMPLICIO: Non si può dir altrimenti.
> SALVIATI: Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più d'una sola radice, né radice alcuna più d'un quadrato solo.
> SIMPLICIO: Così sta!
> SALVIATI: Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo, converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri, perché tanti sono quante le loro radici, e radici sono tutti i numeri; e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser più che i propri quadrati, essendo la maggior parte non quadrati.

In questo brano emerge una situazione apparentemente paradossale.
Prima ipotesi: i quadrati sono solo una parte dei numeri (naturali). Secon-

da ipotesi: esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e quello $\mathbb{N}_Q$ dei numeri quadrati. Secondo la prima ipotesi, per l'aristotelico vi sono meno numeri quadrati di numeri (naturali). Ma di fronte alla seconda, anche l'aristotelico non può non riconoscere l'esistenza della corrispondenza biunivoca che sancisce la stessa numerosità dei due insiemi: quello dei numeri naturali e quello dei numeri quadrati.
Perciò, qual è l'errore che causa il paradosso? L'errore sta nell'aver esteso a un'infinità una proprietà degli insiemi finiti, secondo la quale ogni parte propria di un insieme possiede meno elementi dell'insieme stesso.
Perciò la famosa affermazione di Euclide *il tutto è maggiore della parte* va definitivamente in crisi.

Confrontare

Le riflessioni di Galileo, su questi paradossi, contengono anche suggerimenti stimolanti su come potremmo pretendere di misurare l'infinito. In effetti, non possiamo contare né i numeri naturali né i loro quadrati; pur tuttavia, possiamo confrontare i due insiemi e stabilire rigorosamente che gli uni sono tanti quanti gli altri, perché c'è una corrispondenza biunivoca. Per spiegarci con un esempio più semplice, facciamo il caso di un impresario teatrale che vuole verificare il successo di un suo spettacolo. Per dichiarare il tutto esaurito, può contare prima il numero dei posti, poi quello dei biglietti venduti e accertarsi infine che sono uguali; ma può anche più rapidamente sbirciare la sala da dietro il sipario e controllare che ogni spettatore ha la sua poltrona e ogni poltrona il suo spettatore, che non ci sono né posti vuoti né spettatori in piedi e di nuovo rallegrarsi. Se però passiamo a un contesto infinito, non possiamo pretendere di contare posti e (forse) spettatori, né, per riferirci al primo esempio di Galileo, numeri naturali e i loro quadrati. Possiamo tuttavia ancora confrontare i due insiemi coinvolti, stabilire ove possibile una corrispondenza biunivoca tra essi e dedurre in tal caso che hanno lo stesso numero di elementi: è quello che fa Galileo nella trattazione del paradosso.

In definitiva, nel caso dell'infinito possiamo, se non contare, almeno confrontare: decidere se due insiemi sono o no ugualmente numerosi. C'è però un'obiezione che sorge abbastanza spontaneamente, e cioè: ne vale realmente la pena? In effetti si potrebbe ragionevolmente sostenere che gli insiemi infiniti sono tutti, appunto, infiniti, e come tali hanno forzatamente lo stesso numero (infinito) di elementi. Appare dunque inutile soffermarsi in questo genere di confronti, poiché l'infinito appiattisce tutto. L'esempio dei numeri e dei quadrati sembra confermarlo. Successivamente vedremo cosa

1.8 Eulero

Leonhard Euler (1707-1783) fu un matematico e fisico svizzero, considerato uno dei più importanti matematici del Settecento. Egli non esita ad usare l'infinito sperimentandolo in matematica, particolarmente per quanto riguarda lo studio delle serie infinite. Scopre alcune relazioni importanti tra la teoria dei numeri e l'analisi. Tra gli sviluppi in serie prodotti da Eulero vediamo i seguenti:

- il numero trascendente
$$\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots=e$$
gioca un ruolo importante in analisi

- il numero trascendente π è il rapporto tra la lunghezza di una circonferenza e il suo diametro.
$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

Eulero non avverte la necessità di studiare e determinare criteri per trattare le serie in modo rigoroso, secondo i parametri attuali. La sua originalità sta nell'analizzare le serie infinite in modo autonomo e indipendente dalle visioni classiche del concetto di infinito che ne impedivano un'adeguata indagine, a causa della reverenza suscitata dal concetto di infinito in ambito filosofico.

1.9 Bolzano

Nel XVIII secolo, lo sviluppo dell'analisi vede mettere da parte la questione dell'infinito, attuale e potenziale, e farsi avanti sempre di più una certa disinvoltura nel manipolare l'infinito. I matematici procedono nella loro ricerca e formulano tutti i concetti e le tecniche che oggi fanno parte di ogni corso di analisi matematica (come, per esempio, successioni e serie infinite, funzioni continue, funzione derivata, integrali, risoluzione di equazioni differenziali ecc) usando i numeri reali, i quali non sono però stati costruiti in modo rigoroso.
Tra il 1842 e il 1848, Bernhard Bolzano (1781-1848) scrive *Paradoxien des Unendlichen* (I paradossi dell'infinito). Si tratta di una raccolta di 70 brevi paragrafi. Leggendo questa opera si nota come Bolzano cerca di fissare le idee sul concetto di infinito:

> Una notevole relazione tra due insiemi infiniti, consiste nella possibilità di accoppiare ciascun oggetto appartenente a un insieme con un oggetto appartenente all'altro, con il risultato che nessuno degli oggetti di entrambi gli insiemi rimanga senza corrispondente, e neppure compaia in due o più coppie.
> Nonostante la loro equinumerosità in membri, due insiemi infiniti possono tuttavia stare in una relazione di disuguaglianza per quel che riguarda le loro moltitudini, così che l'uno possa risultare una parte propria dell'altro.

Utilizzando propriamente la corrispondenza biunivoca Bolzano si avvicina alla definizione di Galileo-Dedekind di insieme infinito, senza però precisarla. In questo ambito, l'atteggiamento di Bolzano di fronte all'infinito è profondamente diverso da quello di Galileo. Egli afferma infatti che non c'è alcun paradosso nello stabilire una corrispondenza biunivoca tra un insieme infinito B e una sua parte propria infinita A. Egli, inoltre, afferma che, dati due segmenti di lunghezza diversa, ambedue hanno infiniti punti, ma in quello più lungo ve n'è un'infinità maggiore. Secondo Georg Cantor (1845-1918), matematico tedesco, le incertezze di Bolzano sono dovute al fatto che manca ancora l'idea di cardinale di un insieme, idea che verrà presentata proprio da lui stesso e che presenteremo nel capitolo successivo.

1.10 I numeri naturali

Molti studiosi tra cui matematici, filosofi e ricercatori, hanno approfondito lo studio dei numeri naturali, ma tra tutti emergono per i risultati ottenuti Frege, Peano e Von Neumann.
Nel nostro lavoro, l'attenzione a questi matematici, si focalizza sull'uso del concetto di infinito, nello studio che porterà poi a definire i numeri reali.

1.10.1 Frege

Gottlob Frege (1848-1925) fu un matematico, logico e filosofo tedesco, considerato il padre della logica matematica moderna e che contribuisce in modo significativo alla definizione dei numeri naturali.
La costruzione di Frege si basa sull'assunto che un numero naturale è una proprietà estensionale del concetto: "l'estensione di un concetto". Egli definisce allora i numeri naturali come segue:

- il numero 0 appartiene al concetto "non identico a se stesso";
- il numero 1 appartiene al concetto "identico a 0"
- il numero 2 appartiene al concetto "identico a 0 o a 1";
- il numero 3 appartiene al concetto "identico a 0 o a 1 o a 2"
- e così via

Cantor, nonostante si trovi d'accordo sulla necessità di fondare la base dei naturali sulla logica matematica, critica alcuni particolari di Frege, nello specifico il fatto di definire un numero come estensione di un concetto.

1.10.2 Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) fu un matematico e logico italiano, il cui tentativo di definire i numeri naturali ha avuto molto più successo di quello di Frege e inizia tramite l'utilizzo di assiomi.
Riportiamo di seguito la seguente versione del suo procedimento; siano $\mathbb{N}, 0, a^+$ termini primitivi che indicano rispettivamente l'insieme dei numeri naturali, lo zero e la funzione "successore" $a^+ : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$. Assumiamo, dunque, i seguenti assiomi:

- la totalità dei numeri naturali è una classe, indicata con $\mathbb{N}$;
- zero (0) è un numero;
- ad ogni numero x ne corrisponde un altro, detto il successivo di x e indicato con x^+;
- zero non è il successivo di alcun numero;
- a numeri distinti corrispondono successivi distinti;
- *assioma di ricorsione:* se una classe C contiene 0 e se, per ogni a di C, contiene anche a^+, allora C include $\mathbb{N}$.

Dal percorso di Peano che abbiamo sopra illustrato, emerge che il principio di ricorsione ha un'evidente attinenza con l'infinito; in matematica tale principio risulta importante essendo alla base della dimostrazione per induzione.

1.10.3 Von Neumann

John Von Neumann (1903-1957) è stato un matematico, fisico e informatico ungherese, poi naturalizzato statunitense, uno dei più grandi matematici della storia moderna.
La novità del percorso che Von Neumann propone per costruire i numeri naturali si basa sulla teoria degli insiemi.
Di seguito, si riporta la sua costruzione:

- chiamiamo 0 l'insieme vuoto: $0 = \varnothing$
- chiamiamo 1 l'insieme che contiene il solo insieme vuoto $1 = \{\varnothing\}$
- chiamiamo 2 l'insieme che contiene $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$: $2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- chiamiamo 3 l'insieme che contiene $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$: $3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$
- e così via

Dunque si può anche scrivere: $0 = \{\varnothing\}, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \cdots$

1.11 I numeri reali

Nel seguente paragrafo tratteremo la costruzione dei numeri reali da parte di Weierstrass e successivamente Dedekind.

1.11.1 Weierstrass

Karl Weierstrass (1815-1897) è stato un matematico tedesco, riconosciuto da molti come il "padre dell'analisi moderna". Si occupa di ricerche sulle funzioni ellittiche e approfondisce la teoria delle funzioni analitiche e di quelle abeliane; ottiene parecchi risultati nel calcolo delle variazioni e infine, ciò che per noi risulta più importante, dà una costruzione rigorosa dell'insieme dei numeri reali. La costruzione di Weierstrass inizia dall'insieme $\mathbb{Q}$ e si basa sull'idea di "aggregati finiti", cioè su somme di unità frazionarie.
Per esempio, al numero $0,75$ può corrispondere l'aggregato finito $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}$, ma anche l'aggregato $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}$. Gli aggregati finiti che corrispondono a uno stesso numero razionale si possono riunire in una classe di equivalenza. Così ogni numero razionale può essere definito da una classe infinita che contiene aggregati finiti tra loro equivalenti.
Successivamente, Weierstrass propone di creare nuovi numeri, "gli irrazionali", appunto, definendoli a loro volta come classi di aggregati infiniti. Questo è possibile solo se si ammette che una somma di infinite frazioni può essere

un numero finito, ciò che Weierstrass ammette e giustifica.
All'irrazionale $\sqrt{2}$ corrisponde, per esempio, l'aggregato infinito

$$\left\{1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}, 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}, \cdots\right\} \tag{1.3}$$

Come si può notare, da queste successive frazioni si ottengono dei valori alternativamente minori e maggiori di $\sqrt{2}$ e tali che ogni valore differisce da $\sqrt{2}$ di una quantità minore del precedente. La successione di queste frazioni se prolungata all'infinito, converge verso $\sqrt{2}$, nel senso che, assegnata una qualsiasi quantità ϵ, tutti i suoi elementi, tranne un numero finito di essi, elevati al quadrato differiscono da 2 per una quantità minore di ϵ. Ciò che si ottiene sono infinite oscillazioni della successione intorno a $\sqrt{2}$.
Dunque, il metodo di Weierstrass si basa sull'addizione fra numeri razionali, rendendo così più semplice l'estensione di tale operazione in $\mathbb{R}$, ma il concetto di aggregato finito, oltre ad essere poco intuitivo, si appoggia sull'idea di "sommatoria numerica" e "serie numerica", nozioni matematiche che di solito vengono introdotte in una fase successiva alla costruzione di un insieme numerico, perciò questo approccio, per quanto corretto, non ebbe larga diffusione.

1.11.2 Dedekind

Richard Dedekind (1831-1916) fu concittadino e allievo di Gauss(1777-1855). Dedekind intorno al 1858 elabora, utilizzando un metodo molto semplice, il *Postulato della continuità della retta* che contribuisce alla definitiva sistemazione della teoria dei numeri irrazionali.
Dedekind per definire i numeri reali in modo che soddisfino una versione aritmetica della proprietà di continuità della retta adottò il celebre metodo dei "tagli" o "sezioni", che gli permise appunto di definire rigorosamente, a partire da $\mathbb{Q}$, l'insieme $\mathbb{R}$, aggiungendo appunto a $\mathbb{Q}$ i numeri irrazionali.
Egli osservò che ogni numero razionale x individua una "sezione" del corpo razionale ordinario, cioè una coppia di classi A_1 e A_2 tali che ogni numero di A_1 è minore di ogni numero di A_2, mentre x è il più grande numero

della classe A_1 oppure il più piccolo numero della classe A_2. Una coppia $(A_1; A_2)$ tale che ogni numero di A_1 sia minore di ogni numero di A_2 può tuttavia, pur essendo definita senza alcuna ambiguità, non corrispondere ad alcun numero razionale x, allo stesso modo in cui una sezione della retta (ad esempio quella prodotta dal punto Q della retta) può non corrispondere ad alcuna frazione razionale. Ma ogni qualvolta ciò accade, pensò Dedekind è legittimo "creare" un nuovo numero (irrazionale) y che corrisponda alla coppia $(A_1; A_2)$ cioè che sia, esso stesso, la coppia $(A_1; A_2)$. Viene così chiarito il fatto che $(\mathbb{Q}; <)$ è denso ma non continuo, mentre $(\mathbb{R}; <)$ è denso e continuo.

In conclusione, i risultati trovati da Dedekind sulla densità dei numeri reali, sono riusciti a caratterizzare la diversità dell'infinito tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, come vedremo nel prossimo capitolo.

Capitolo 2

Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein[1]

Nel seguente capitolo, tra tutti i risultati che trattano l'infinito matematico, ci concentreremo, in particolare, su quello esposto da Cantor, Schröder e Bernstein
A partire da questo teorema saranno introdotte le attività presentate nel quarto capitolo.

2.1 Cantor

Cantor(1845-1918) è stato un brillante matematico tedesco, che ha affrontato molti problemi della matematica: fra questi, il problema dell'unicità della scomposizione di una funzione reale in una serie trigonometrica lo porta a formulare alcuni interrogativi sugli insiemi infiniti e sulla struttura topologica della retta.
Parliamo della seguente serie:

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots$$

[1]Per evitare continue citazioni, si dichiara che il contenuto di una parte di questo capitolo è tratto dal libro *Infiniti infiniti* di Arrigo G., D'amore B., Sbaragli S.

o, sinteticamente,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Quando la serie converge, essa è detta "serie di Fourier della funzione f"; Cantor si occupa di stabilire le condizioni minime per la funzione f affinché la serie sia convergente e dimostra l'unicità della scomposizione. In tutto questo ci sono due condizioni importanti che coinvolgono l'infinito: il numero di massimi e di minimi e il numero di punti di discontinuità che la funzione può assumere nell'intervallo da 0 a 2π, affinché sia esprimibile con una serie di Fourier. Nel 1872, Cantor riesce ad estendere la convergenza di tali serie anche per funzioni con un numero infinito di punti di discontinuità.
Riportiamo sinteticamente di seguito le tappe dello studio grazie al quale Cantor è riuscito a dare un nuovo volto all'infinito matematico.

Definizione 2.1. Due insiemi, finiti o infiniti, si dicono equipotenti se è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra di essi.

Osservazione

- I segmenti AB e CD (pensati come insiemi di punti) sono equipotenti al di là della loro lunghezza

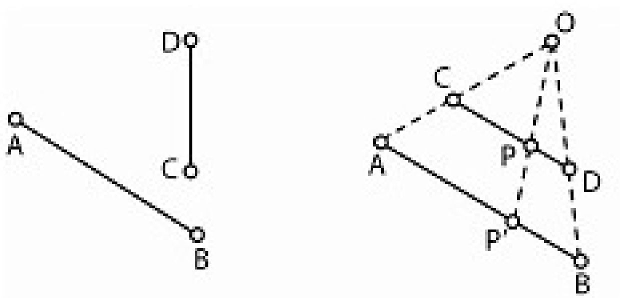


Figura 2.1: Corrispondenza biunivoca tra segmenti di lunghezza differente

- L'insieme dei punti di un segmento è equipotente all'insieme dei punti di una semiretta

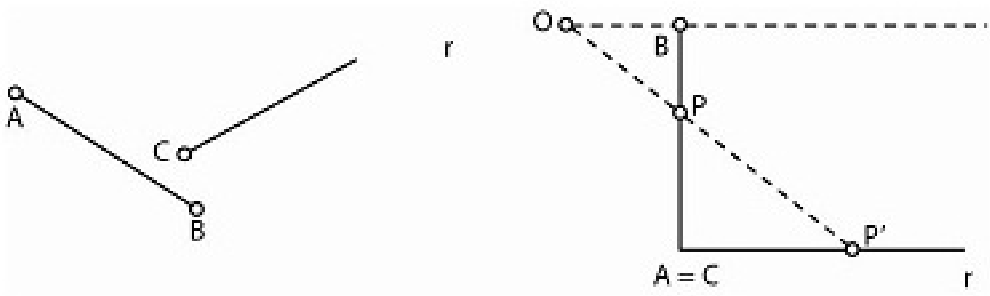


Figura 2.2: Corrispondenza biunivoca tra un segmento e una semiretta

- L'insieme dei punti di un segmento è equipotente all'insieme dei punti di una retta

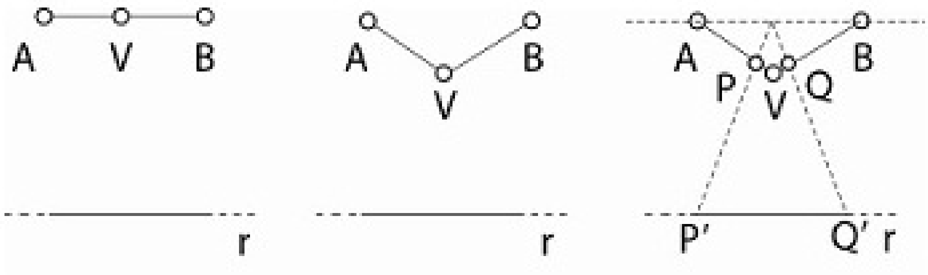


Figura 2.3: Corrispondenza biunivoca tra un segmento e una retta

2.2 La costruzione dei numeri transfiniti

"Contare confrontando" significa mettere in corrispondenza biunivoca ed è una modalità semplicissima e molto antica di contare, basti pensare al metodo di conteggio "sulle dita di una mano". All'epoca di Cantor tuttavia, gli studiosi del momento credevano che nel caso di conteggi e confronti tra infiniti, oltre a essere impossibile portare a termine l'operazione, si ottenessero solo antinomie legate a quel concetto intrattabile.
Così Galileo, per bocca di Salviati, già citato nel capitolo precedente, giudicava il fatto che i quadrati perfetti 1, 4, 9, 16,... si potessero mettere in tale corrispondenza con tutti i numeri 1, 2, 3, 4,... :

> In ultima conclusione, gli attributi di eguale maggiore e minore non aver luogo ne gl'infiniti.

Il pregiudizio dei più era legato all'atteggiamento tradizionale, registrato da Euclide stesso, di eliminazione dall'ambito matematico del termine, almeno nella sua accezione di infinito attuale.
Esisteva una definizione in positivo di infinito, così esplicitata da Dedekind *Un insieme è infinito se lo si può mettere in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio.* Cantor però decise di usare questa definizione in negativo, in funzione di una caratterizzazione del finito, affermando che: *Un insieme è non-infinito ("finito secondo Dedekind") se non può essere messo in corrispondenza biunivoca con alcuna sua parte propria.*

Questi studi di Cantor hanno portato ad importanti risultati, alcuni dei quali verranno esaminati di seguito. Primo tra tutti va citato quello della scoperta che nell'infinito è possibile fare alcune distinzioni (1874), cioè si poteva, effettivamente, contare e confrontare: vennero dunque studiati insiemi numerici con la potenza del numerabile, ovvero insiemi che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$, dunque insiemi che hanno la stessa cardinalità.

Proposizione 2.2.1. Gli insiemi dei numeri interi e razionali si possono mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Dimostrazione. Inizialmente proviamo che $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno la stessa cardinalità.
Si può considerare una funzione che associa ai numeri naturali pari, gli interi positivi ed ai numeri naturali dispari, gli interi negativi, nel modo seguente:

$$g(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ pari} \\ \frac{-n-1}{2}, & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases} \tag{2.1}$$

Questa funzione è iniettiva e suriettiva e quindi dà la corrispondenza cercata.
Per provare la biunivocità tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$.
Osserviamo la figura seguente:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{2}{1} & & \frac{3}{1} & \rightarrow & \frac{4}{1} & & \frac{5}{1} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{2}{2} & & \frac{3}{2} & & \frac{4}{2} & & \frac{5}{2} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{3} & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{3} & & \frac{4}{3} & & \frac{5}{3} & \cdots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{2}{4} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
\frac{1}{5} & & \frac{2}{5} & & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

La prova consueta consiste in uno schema diagonale, dove per semplicità si rappresentano soltanto i razionali positivi, e viene suggerito un "percorso" che permette, soppresse le frazioni non ridotte ai minimi termini, di ottenere una corrispondenza biunivoca con i naturali.
Si possono mettere poi i razionali "non negativi" in corrispondenza biunivoca con i numeri naturali pari e quelli negativi con i dispari: dalla dimostrazione

della numerabilità di $\mathbb{Z}$ si può ottenere una corrispondenza biunivoca tra i naturali e tutto $\mathbb{Q}$.

Osservazione Se si considerano tutte le frazioni scritte (senza "cancellare" le frazioni non ridotte ai minimi termini), esse sono semplicemente coppie (ordinate) di numeri naturali (positivi); in modo analogo si può provare che $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ha la potenza del numerabile, ma omettiamo questa dimostrazione nel presente elaborato.

Proposizione 2.2.2. L'insieme dei numeri algebrici si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali.

Prima di affrontare la dimostrazione, proponiamo la seguente definizione:

Definizione 2.2. Un numero reale w è definito algebrico se è soluzione di un'equazione della forma $a_0x_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-1}x_{n-1} + a_nx_n = 0$ dove $n, a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ sono numeri interi.

Dimostrazione Possiamo supporre, grazie a semplici e immediati passaggi che non modificano la generalità della situazione, che i numeri n e a_0 siano positivi, che i coefficienti $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$, non abbiano divisori comuni (diversi da 1) e che l'equazione non sia riducibile; fatte queste ipotesi, risulta dai teoremi dell'aritmetica e dell'algebra che l'equazione che ammette come soluzione un determinato numero algebrico reale è interamente determinata; inversamente, a un'equazione di questo tipo corrispondono al massimo n soluzioni algebriche reali.
Sia W l'insieme dei numeri algebrici: Cantor dimostra che W è numerabile. Vediamo come. Innanzitutto, chiamiamo altezza di un'equazione algebrica A il numero:

$$h(A) = n - 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + |a_n|$$

L'altezza h è di conseguenza, per ogni equazione algebrica, un numero naturale ben determinato; inversamente, a un dato numero naturale m corrisponde solo un numero limitato di equazioni algebriche di altezza m. Per esempio, per dati numeri naturali assunti come altezze, proponiamo di seguito le equazioni algebriche che hanno tale altezza; per ciascuna di tali equazioni si dà l'elenco delle soluzioni che sono in numero finito e che sono numeri algebrici:

- equazione: $x = 0$ essa ha come soluzione il numero algebrico 0;
- equazioni: $x + 1 = 0, x - 1 = 0, c^2 = 0$ hanno come soluzioni i numeri algebrici seguenti: $-1, 1, 0$;
- equazioni: $x+2 = 0, x-2 = 0, 2x+1 = 0, 2x-1 = 0, 3x = 0, x^2-1 = 0$ hanno come soluzione i numeri algebrici seguenti: $-2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, -1, 1$ ecc..

Possiamo quindi allineare in una successione tutti i numeri algebrici reali nel modo seguente: inizialmente ordiniamo le equazioni per altezza crescente, dopo di che, a parità di altezza, ordiniamo i vari numeri algebrici (che sono ogni volta in quantità finita) per esempio secondo l'ordine naturale ($<$) di $\mathbb{R}$. Nel caso in cui un numero algebrico si presenti una seconda volta o più, non viene preso in esame. La successione sarà quindi (per quel che riguarda i suoi primi termini): $0, -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ...$
Possiamo concludere che questa successione, contenente tutti i numeri algebrici, è equipotente all'insieme $\mathbb{N}$.
Un risultato molto importante è il seguente teorema:

Teorema 2.2.3. *I numeri naturali non si possono mettere in corrispondenza biunivoca con i numeri reali dell'intervallo* $[0, 1]$

Dimostrazione. La dimostrazione è costruttiva:
data una corrispondenza f tra i numeri naturali (non è ovviamente restrittivo escludere lo zero) e l'intervallo [0,1] si prova che essa non può essere suriettiva, tanto meno una corrispondenza biunivoca.
Per far questo, si usano gli sviluppi decimali propri dei numeri dell'intervallo, con la sola eccezione di 1, per cui si adopera lo sviluppo improprio $1 = 0, \overline{9}$

il che assicura unicità. Disponiamo i valori di f nel seguente ordine:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= 0, \boldsymbol{a_{1,1}} a_{1,2} a_{1,3} a_{1,4} a_{1,5} a_{1,6} \cdots \\
f(2) &= 0, a_{2,1} \boldsymbol{a_{2,2}} a_{2,3} a_{2,4} a_{2,5} a_{2,6} \cdots \\
f(3) &= 0, a_{3,1} a_{3,2} \boldsymbol{a_{3,3}} a_{3,4} a_{3,5} a_{3,6} \cdots \\
f(4) &= 0, a_{4,1} a_{4,2} a_{4,3} \boldsymbol{a_{4,4}} a_{4,5} a_{4,6} \cdots \\
f(5) &= 0, a_{5,1} a_{5,2} a_{5,3} a_{5,4} \boldsymbol{a_{5,5}} a_{5,6} \cdots \\
f(6) &= 0, a_{6,1} a_{6,2} a_{6,3} a_{6,4} a_{6,5} \boldsymbol{a_{6,6}} \cdots \\
&\cdots \quad \cdots
\end{aligned}
$$

Si può ora definire un numero x_0 dell'intervallo che ha nello sviluppo proprio una cifra differente in una posizione almeno da ogni numero della lista: se $x_0 = 0, b_1 b_2 b_3 b_4 ... b_k ...$ si può porre

$$
b_k = \begin{cases} 5, & \text{se } a_{k,k} \neq 5 \\ 6, & \text{se } a_{k,k} = 5 \end{cases}
$$

Dunque f non è suriettiva perché x_0 non fa parte dei suoi valori.

Osservazione In quest'ultima dimostrazione vediamo l'utilizzo del *metodo diagonale*, introdotto da Cantor in un secondo momento (1891): esso prende il nome dall'uso che si fa dei termini nella diagonale della tabella.
Da questo teorema discende immediatamente che i numeri reali non sono numerabili; si dirà che un insieme ha la potenza del continuo se può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali. Ecco che quindi risultano tra gli insiemi numerici infiniti almeno due cardinalità (o potenze) diverse: quella del numerabile e quella del continuo, di cui ne parleremo in seguito.
Cantor riuscì a trovare una connessione tra il continuo e il numerabile introducendo l'*insieme delle parti*, che è l'insieme di tutti i sottoinsiemi di un insieme dato.

Osservazione Il punto di partenza della costruzione dei numeri transfiniti è il concetto di equipotenza. L'equipotenza, definita in un insieme di insiemi

M, è una relazione di equivalenza, che indichiamo col simbolo $\mathcal{R}$. Ne segue il concetto di numero cardinale (o potenza) di un insieme I di M: è la classe di equivalenza dell'insieme quoziente $M = \mathcal{R}$ che ha come elemento I (Cantor, 1955).

Teorema 2.2.4 (Teorema di Cantor)**.** *Dato un insieme U, il corrispondente insieme delle parti $\mathcal{P}(U)$ ha potenza superiore a quella di U.*

Dimostrazione. Osserviamo per prima cosa che se U è vuoto, allora $\mathcal{P}(U) = \varnothing$, perciò $card(U) = 0$ e $card(\mathcal{P}(U)) = 1$. Poi supponiamo $U \neq \varnothing$ e consideriamo il sottoinsieme S di $\mathcal{P}(U)$ costituito da sottoinsiemi aventi un solo elemento (singoletti), cioè $S = \{a | a \in U\}$. Consideriamo poi la funzione:

$$\begin{aligned} f: \quad & U \to S \\ & a \to \{a\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Questa funzione è biunivoca, quindi possiamo concludere che U è equipotente ad una parte di $\mathcal{P}(U)$. A questo punto, basta dimostrare che $\mathcal{P}(U)$ non è equipotente a U. Procediamo per assurdo, supponendo che U sia equipotente a $\mathcal{P}(U)$. Deve esistere quindi una corrispondenza biunivoca tra U e $\mathcal{P}(U)$, cioè una corrispondenza tale che a ogni elemento x di U faccia corrispondere un insieme I_x di $\mathcal{P}(U)$. Costruiamo allora un nuovo insieme H, elemento di $\mathcal{P}(U)$, mediante il seguente criterio:

- se $x \in I_x$, allora $x \notin H$
- se $x \notin I_x$, allora $x \in H$

Quindi H differisce da I_x per almeno un elemento. Di conseguenza la corrispondenza tra U e $\mathcal{P}(U)$ non è biunivoca, ciò che crea l'assurdo con la supposizione di partenza. La conclusione allora è la seguente: $\mathcal{P}(U)$ ha cardinalità maggiore di U.

Questi risultati danno una svolta decisiva alla ricerca di Cantor: dal percorso finora mostrato appare evidente che almeno una cardinalità maggiore di quella di $\mathbb{N}$ esiste. Come abbiamo potuto notare precedentemente, grazie agli insiemi dei quadrati, dei pari, dei dispari, una cardinalità infinita minore di quella di $\mathbb{N}$ non esiste, dato che ogni suo sottoinsieme infinito ha cardinalità n; dunque, quella di $\mathbb{N}$ è la cardinalità infinita minore possibile. L'abbiamo già denominata "infinità numerabile" o "del numerabile" e la indichiamo, per semplicità, con n. Abbiamo visto però che l'insieme dei numeri reali compresi tra 0 e 1 è più che numerabile; questa cardinalità è ovviamente la stessa di $\mathbb{R}$, insieme dei numeri reali, che ha come modello immediato la retta geometrica, pensata come insieme dei punti. Poiché la caratteristica della retta geometrica è la sua continuità, diciamo che questa cardinalità si chiama: "cardinalità del continuo" che indichiamo con c, che è anche la cardinalità dei punti di un piano. Osando prendere in prestito il linguaggio relazionale aritmetico, potremmo così concludere: $n < c$.

Per molti anni, Cantor cercò un insieme infinito A di cardinalità tale da interporsi tra n e c, del tipo $n < card(A) < c$, ma invano. Tanto che decise di proporre ed accettare una sorta di ipotesi momentanea, detta ipotesi del continuo (**IC**): tra n e c non ci sono altri cardinali transfiniti; a questo punto, dunque, n è il primo cardinale transfinito e c è il secondo, ammettendo **IC**. Cantor decise di usare la prima lettera dell'alfabeto ebraico come segno ricorrente e di indicare n con $\aleph_0$ (alèf zero) e con $\aleph_1$ (alèf uno) il cardinale transfinito successivo c. Ricordiamo che l'insieme $\mathbb{R}$ dei reali si può definire con il metodo dei "tagli", o "sezioni" di Dedekind, come abbiamo potuto osservare nel capitolo precedente, che sono tutte le possibili coppie di insiemi tratte da $\mathbb{Q}$; dunque, la cardinalità di $\mathbb{R}$ è quella dell'insieme potenza di $\mathbb{Q} : card\ (\mathcal{P}(\mathbb{Q}))$.

Tra i risultati di Cantor troviamo che la cardinalità dell'insieme potenza di un insieme di cardinalità finita a è di 2^a, allora si può scrivere, in forma aritmetica un po' forzata, la relazione tra c e $n : c = 2^n$. Ecco dunque trovato un modo per indicare una sorta di "successivo" tra i cardinali transfiniti, dato che quello usuale introdotto tra i naturali non può funzionare; è evidente infatti che $n + 1 = n$. Se si interpone tra due numeri naturali s e $s + 1$ un

oggetto nuovo a, ottenendo la successione: $0, 1, 2, ..., s, a, s+1, ...$ è dunque possibile trovare una corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$: da 0 ad s si fanno corrispondere i naturali tra 0 ed s; ad a si fa corrispondere $s+1$; ad $s+1$ si fa corrispondere $s+2$, e così via.
Questa formalizzazione permette la dimostrazione che l'insieme dei punti del piano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ha la stessa cardinalità di quello dei punti di una retta. Ogni punto P corrisponde ad una coppia di numeri reali (x, y) elemento di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e viceversa. Dunque:

$$|\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = c \cdot c = 2^n \cdot 2^n = 2^{n+n} = 2^n = c$$

Essendo l'insieme dei numeri irrazionali continuo e quello dei numeri algebrici numerabile, si deduce che l'insieme dei numeri irrazionali non algebrici, cioè i trascendenti, deve avere la cardinalità del continuo. Questa nuova idea di successivo fra i transfiniti permette di proseguire nell'elenco ordinato: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \cdots, \aleph_n, ...$ che Cantor esprime come "successione dei numeri cardinali transfiniti". Ora se vale l'ipotesi del continuo **IC** tra n e c, cioè tra $\aleph_0$ ed $\aleph_1$, che cosa accade tra $\aleph_n$ ed $\aleph_{n+1}$? Per analogia, l'ipotesi del continuo **IC** si può estendere in maniera naturale all'intera successione dei numeri cardinali transfiniti, assumendo così la denominazione di ipotesi generalizzata del continuo (**IGC**): non esiste alcun cardinale transfinito compreso tra due cardinali transfiniti successivi $\aleph_n$ e $\aleph_{n+1}$, cioè tra $\aleph_n$ e $2^{\aleph_n}$.
A questo punto, la successione dei cardinali transfiniti costituisce una nuova classe di numeri, a partire dai quali possono essere definite operazioni che sono tra le più comuni, come, per esempio, l'addizione e la moltiplicazione.
Nel caso dell'addizione tra cardinali, essa viene definita come l'unione di insiemi disgiunti: $card(A) + card(B) = card(A \cup B)$, con $A \cap B = \varnothing$. Tale definizione è adatta sia ad insiemi finiti che infiniti, ma porta a risultati piuttosto diversi nel caso di cardinali transfiniti; per esempio:
$\aleph_0 = \aleph_0 + n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = 2 \cdot \aleph_0$
$\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + ... + \aleph_0 = n \cdot \aleph_0$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$
La moltiplicazione tra cardinali viene invece espressa come il prodotto car-

tesiano degli insiemi: $card(A) \cdot card(B) = card(A \times B)$, con $A \times B$ prodotto cartesiano di A e B. Anche qui, come prima, porta a risultati diversi; per esempio:
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0^2$
$\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0 \cdot \dots \cdot \aleph_0 = \aleph_0^n$, per ogni $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Successivamente, Cantor costruisce i numeri ordinali transfiniti. Per prima cosa fissiamo alcune conoscenze:

- Dato un insieme A e una relazione d'ordine stretto $<$ (cioè antiriflessiva, antisimmetrica e transitiva), si dice che A è totalmente ordinato, se e solo se, comunque scelti in A due elementi distinti a, b, è sempre vera una sola delle relazioni $a < b$ oppure $b < a$.

- Un ordinamento di un insieme I si dice buono (quindi I si dice ben ordinato) se e solo se ogni sottoinsieme A di I possiede un minimo, che chiamiamo "primo elemento" (tolto questo, il sottoinsieme rimanente ha un minimo che chiamiamo "secondo" e così via). Nel caso di un insieme finito, ogni ordinamento totale è un buon ordinamento, non è così per insiemi infiniti.

- Dati due insiemi A, B equipotenti e totalmente ordinati, fra le applicazioni biunivoche da A verso B ve n'è una sola che rispetta i due ordini: la chiamiamo similitudine.

- Due insiemi bene ordinati hanno lo stesso numero ordinale solo se si può stabilire tra di essi una similitudine.

- Dato un insieme I ben ordinato, chiamiamo tratto iniziale (o segmento) rispetto a un suo elemento a il sottoinsieme degli elementi di I che precedono a.

A seguire, Cantor costruisce il numero ω rispetto al quale l'insieme $\mathbb{N}$ è tratto iniziale.
Cantor, a questo proposito, afferma che:

> É perfino permesso immaginare il numero ω appena creato come limite a cui tendono i numeri n (naturali), purchè con ciò si voglia intendere solamente che è il primo numero intero (naturale) che segue tutti i numeri n, che cioè deve essere dichiarato superiore ad ogni numero n.

Procedendo con ordine, ecco come vengono costruiti i numeri ordinali transfiniti:

1. si ammette che 0 sia il primo numero ordinale;

2. la successione dei numeri naturali $0, 1, 2, 3, ..., n, ...$ si ottiene, partendo da 0, aggiungendo un'unità ad un numero già formato: questo è il *primo principio di generazione*;

3. come "limite" di questa successione, aggiungiamo il numero ordinale ω: questo è il *secondo principio di generazione*;

4. si prosegue poi applicando ancora il primo principio di generazione più volte e si ottiene: $0, 1, 2, 3, ..., n, ..., \omega, \omega + 1, \omega + 2, ..., \omega + n, ...$

Cantor osserva che la successione appena ottenuta non ha un massimo, quindi applica ancora il secondo principio di generazione e, dopo aver raggiunto ω elementi, arriva al numero 2ω, che è un numero maggiore di tutti i precedenti; poi continua applicando alternativamente il primo o il secondo principio di generazione, ottenendo così:
$0, 1, 2, 3, ..., n, ..., \omega, \omega{+}1, \omega{+}2, ..., \omega{+}n, ..., 2\omega, 2\omega{+}1, 2\omega{+}2, ..., 3\omega, ..., n\omega, (n{+}1)\omega, ..., \omega^2, \omega^3, ..., \omega^n, ..., \omega^\omega, ...$
A questo punto, Cantor considera il seguente primo segmento della sua successione:
$0, 1, 2, 3, ..., n, ..., \omega$

il quale è, in modo evidente, un insieme ben ordinato. Si chiede quindi se questa successione sia simile alla successione seguente:
$0, 1, 2, 3, ..., n, ...$
La risposta è negativa, dato che è impossibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra le due successioni che ne rispetti l'ordine. In una tale corrispondenza, dovrebbe essere $f(n+1) = f(n) + 1$, ma ω non è successivo di alcun numero n, dunque non è immagine di alcun numero n. Di conseguenza, l'ordinalità di $0, 1, 2, 3, ..., n, ..., \omega$ è superiore a quella degli insiemi numerabili.
Ogni volta che si applica il secondo principio, si aumenta l'ordinalità. Questo passaggio molto delicato è oggetto della seguente annotazione di Cantor:

> La prima impressione che vi farà tale successione (la successione allargata dei numeri naturali) sarà senz'altro che non si vede come, proseguendola, si possa arrivare a una specie di arresto, che invece sarebbe necessario se dobbiamo ottenere con questo mezzo una nuova potenza determinata, ossia la potenza della seconda classe, immediatamente superiore a quella della prima classe.

L'operazione è resa possibile dal terzo principio di generazione, che Cantor enuncia in questo modo:

> Per realizzare questo arresto, ai due modi di generazione se ne viene ad aggiungere un terzo, che io chiamo principio di limitazione, e che consiste nell'esigenza di non creare un nuovo numero intero, tramite uno dei due altri modi, che se la totalità dei numeri antecedenti è numerabile in una classe di numeri già esistente e conosciuta in tutta la sua estensione.

Sorge, quindi, una domanda: la successione dei numeri cardinali transfiniti e quella dei numeri ordinali transfiniti sono uguali? O, è possibile trovare dei collegamenti tra le due successioni?
Cantor ritiene che si possa rispondere affermativamente a queste questioni, a condizione che qualsiasi insieme possa essere bene ordinato.

La sua possibile soluzione al problema può essere così riassunta: sia E un qualunque insieme infinito. Scegliamo arbitrariamente un suo elemento, che chiamiamo e_1, e lo togliamo da E. Otteniamo $E - \{e_1\}$. In seguito togliamo un altro elemento, e_2, e otteniamo $E - \{e_1, e_2\}$; continuando, fino a quando, abbiamo tolto tutti gli elementi e_n (n naturale) e ottenuto $E - \{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}$. A questo punto, togliamo da questa differenza, di nuovo, un elemento qualunque che chiamiamo e_ω (ω indica la potenza della seconda classe di Cantor). Continuiamo togliendo successivamente elementi che chiamiamo $e_{\omega+1}, ..., e_{2\omega}, ...$
Al momento in cui l'insieme differenza risulta vuoto, l'insieme tolto è esattamente E, ma l'ordine imposto ai suoi elementi fa sì che ora E sia ben ordinato.
Tale modo di procedere ha però incontrato parecchie critiche e resistenze. Nel 1904, Ernest Zermelo (1871-1953) formula il cosiddetto "assioma della scelta". Di seguito viene proposta una delle tante versioni dell'assioma della scelta:

Definizione 2.3 (Assioma della scelta)**.** Per ogni insieme A, i cui elementi sono insiemi non vuoti e disgiunti P_i, esiste almeno un insieme C che contiene un elemento e uno solo di ogni P_i .

Si evince che la possibilità di confrontare le sue successioni dei cardinali e degli ordinali transfiniti dipende dall'accettazione o meno di tale assioma della scelta.

2.3 Il teorema

Un notevole risultato di Cantor, il teorema che riportiamo di seguito, fu causa di molta sorpresa negli ambienti matematici per la sua apparente paradossalità.

Teorema 2.3.1. *L'intervallo unitario $I = [0, 1]$ si può mettere in corrispondenza biunivoca con il quadrato unitario $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.*

Dimostrazione. Poniamo il quadrato su un sistema di assi cartesiano ortogonale di origine O, in modo tale che due lati consecutivi siano "appoggiati" sugli assi, facendo coincidere uno dei vertici con l'origine. Considerando il lato del quadrato come unità di misura, segue che ogni punto P interno alla superficie quadrata ha coordinate reali x_P ed y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, dunque, in notazione decimale: $x_P = 0, a_1 a_2 ... a_n ..., y_P = 0, b_1 b_2 ... b_n ...$. Ad ogni coppia ordinata di numeri reali $(x_P; y_P)$ facciamo corrispondere il numero reale x'_P così definito: $x'_P = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 ... a_n b_n ...$, ottenuto preponendo 0 e la virgola ed alternando poi le singole cifre decimali di ciascuna coordinata. Si può immediatamente constatare che $0 < x'_P < 1$, che tale x'_P è definito in modo univoco a partire da x_P ed y_P, infine che esso si può considerare come coordinata ascissa di un punto P', pensabile dunque come il corrispondente di P nella corrispondenza definita.
Per quanto riguarda l' "implicazione inversa", partendo da P' e dalla sua coordinata ascissa tramite il metodo inverso di distribuzione delle cifre, possiamo risalire univocamente a P.

Questo risultato, tutt'altro che intuitivo, ha messo in crisi lo stesso Cantor, il quale ha cercato confronto e supporto nell'amico Dedekind, come risulta dallo scambio epistolare tra i due, del quale si riportano alcune brevi parti.

Cantor a Dedekind: Halle, 2 dicembre 1873:

> A proposito delle questioni che mi hanno occupato in questi ultimi tempi, mi accorgo che, in questo ordine di idee, si presenta anche la seguente: una superficie [per esempio un quadrato compreso il suo contorno] può essere messa in relazione univoca con una curva [per esempio un segmento, estremi compresi] in modo che ad ogni punto della superficie corrisponda un punto della curva, e reciprocamente ad ogni punto della curva un punto della superficie?
> Mi sembra, in questo momento, che rispondere alla domanda pre-

> senti grandi difficoltà, sebbene [...] si sia totalmente inclini a dare una risposta negativa, che quasi si considera superflua una dimostrazione.

Dedekind a Cantor: Halle, 18 maggio 1874:

> [..] a Berlino, un mio amico, al quale ho esposto la stessa difficoltà, mi ha dichiarato che la cosa era per così dire assurda, perché si capisce benissimo che due variabili indipendenti non possono essere ricondotte ad una sola.

Cantor a Dedekind: Halle, 20 giugno 1877:

> Vorrei sapere se voi considerate aritmeticamente rigoroso un metodo di dimostrazione da me applicato.[...] io facevo parte di quelli che ritenevano verosimile la risposta negativa, fino al momento recentissimo nel quale, grazie a una successione abbastanza complessa di pensieri, sono giunto alla convinzione che la risposta è affermativa, senza alcuna restrizione. Poco dopo ho trovato la dimostrazione che avete sotto gli occhi.

A questo punto, Cantor presenta a Dedekind una dimostrazione che può ricondursi a quella vista sopra della corrispondenza tra i punti del quadrato e i punti del suo lato.[2.3.1] Cantor, impaziente nell'attesa di conoscere la risposta del collega che tarda ad arrivare, sollecita una sua reazione il 25 giugno 1877:

> Fin tanto che voi non mi approvate, non posso che dire: lo vedo ma non lo credo.

Dedekind risponde il 29 giugno 1877:

> Ho esaminato ancora una volta la vostra dimostrazione e non vi ho trovato lacune; sono convinto che il vostro interessante teorema è esatto e mi felicito con voi.

Il risultato di cui si andrà a parlare è una variante della dimostrazione del risultato sopra citato.[2.3.1]
Nel 1887, Cantor enuncia un nuovo teorema, del quale non propone una dimostrazione sollecitando così la curiosità e lo studio dei suoi colleghi. Dedekind tenterà una dimostrazione del teorema lo stesso anno, senza mai pubblicarla. Nel 1896, Schröder(1841-1902), matematico tedesco, ne annuncia una prova, che si rivelerà però errata.
La questione posta da Cantor sembra una sfida accolta da molti matematici che tentano di formulare una dimostrazione del teorema. Sarà Bernstein (1878-1956), anch'esso matematico tedesco, nel 1898 a raggiungere la costruzione della dimostrazione che verrà pubblicata l'anno successivo.
Da qui il nome del teorema: Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein.
Enunciamo i due seguenti lemmi, che ci serviranno per la dimostrazione del teorema:

Lemma 2.3.2. *Sia f un'applicazione da un insieme A in un insieme B e sia g un'applicazione da B in A. Allora esiste un sottoinsieme C di A tale che*

$$A \setminus g(B \setminus f(C)) = C$$

Lemma 2.3.3. *Sia f un'applicazione da un insieme A in un insieme B e sia g un'applicazione da B in A. Allora esiste un sottoinsieme C di A e un sottoinsieme M di B tali che:*

$$f(C) = M$$

$$(A \setminus C) = g(B \setminus M)$$

Teorema 2.3.4 (Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein)**.** *Due insiemi, ciascuno dei quali è equipotente ad un sottoinsieme dell'altro, sono equipotenti. O, equivalentemente, dati due insiemi A e B, se esistono due funzioni iniettive $f : A \to B$ e $g : B \to A$, allora $A \cong B$.*

Dimostrazione. In base al lemma 2.3.3, esistono un sottoinsieme C di A e un sottoinsieme M di B tali che:

$$f(C) = M$$

$$(A \setminus C) = g(B \setminus M)$$

Dato che g è un'applicazione iniettiva (e suriettiva) da $(B \setminus M)$ su $(A \setminus C)$, allora anche la sua inversa g^{-1} è un'applicazione biunivoca da $(A \setminus C)$ su $(B \setminus M)$. Perciò possiamo definire l'applicazione h da A in B data da:

$$\begin{aligned} h = f \quad &\text{su } C \\ h = g^{-1} \quad &\text{su } A \setminus C \end{aligned} \tag{2.3}$$

Tale applicazione è una biezione da A su B, per cui $A \cong B$.

Capitolo 3

Didattica della matematica

In questo capitolo ci proponiamo di esporre alcuni dei temi centrali nella Didattica della Matematica, declinandoli con riferimento all'argomento di nostro interesse, ovvero la didattica del concetto di infinito. Dopo aver quindi spiegato brevemente cosa sia il "contratto didattico" e quale sia la differenza tra "misconcezione" ed "errore", illustreremo la posizione inizialmente espressa da Paul Duval, che vede nell'astrattezza dei concetti matematici la principale difficoltà epistemologica dell'insegnamento/apprendimento di questa disciplina. Il concetto di infinito è chiaramente emblematico di questa difficoltà: per questo, cercheremo di evidenziare i principali ostacoli cognitivi legati alla sua acquisizione, in vista degli esempi di applicazioni che svilupperemo nel prossimo capitolo.

Il termine didattica deriva dal verbo greco *didàskein* (insegnare): la didattica è la teoria e la pratica dell'insegnare, prima di tutto a scuola, poi, con il parallelo dilatarsi dei terreni dell'educazione, in qualsiasi contesto formale e informale; è una disciplina che studia il processo di apprendimento che intercorre tra allievo, insegnante e sapere, con lo scopo di rendere più efficace l'insegnamento e di conseguenza migliorare l'apprendimento. Chevallard (1982) elabora il cosiddetto *Triangolo della Didattica* o *Sistema didattico*, al fine di esporre elementi di analisi e di riflessione rivolti alle attività didattiche e ad i loro effetti. Le riflessioni hanno come perno le relazioni fra i tre poli del triangolo. In particolare:

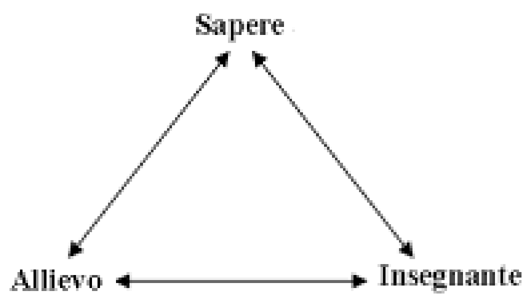


Figura 3.1: Il sistema didattico

> Affrontare le questioni dell'insegnamento e dell'apprendimento in termini di didattica, significa che la trasmissione della conoscenza è un fenomeno complesso, che necessita di numerose mediazioni, e che occorre sempre tenere insieme i tre poli, del maestro, del sapere e dell'allievo, ma senza ridurre l'analisi ad uno dei tre. [10]

3.1 Il Contratto Didattico

Jean Jaques Rousseau (1712-1778) nel suo *Contrat Social* del 1762 scrive che in ogni contratto stipulato, sono sempre presenti delle clausole non esplicitate ma tacitamente ammesse, clausole di comportamento che ci si aspetta dal modello di società in cui si vive.
Facendo un salto avanti di circa due secoli, tra il 1970 ed il 1990 questo concetto pre-rivoluzione francese venne portato all'interno degli studi pedagogici, in particolare di quelli di didattica della matematica.
Le origini della definizione formale di contratto didattico si trovano in [5] e

[6] e sono stati ispirati da quello che è noto come uno dei più famosi casi della storia della didattica della matematica.

3.1.1 Il caso di Gaël

Durante uno studio sui fallimenti elettivi degli studenti che se la cavano in tutte le materie ad eccezione della matematica, Brousseau si imbatte in Gaël un bambino di 8 anni che da quel giorno diventerà l'esempio introduttivo perfetto per ogni studioso di didattica che debba affrontare un discorso sul contratto didattico.
La situazione in cui si trova Gaël è descritta in [11] come segue:

- In luogo di esprimere coscientemente la propria conoscenza, Gaël la esprime sempre e solo in termini che coinvolgono l'insegnante.
- Le sue competenze non sono mai sue competenze ma sono quello che la maestra ha detto di fare.
- Le sue capacità strategiche non sono mai sue proprie capacità, ma sono quello che la maestra dice di fare e come dice di fare la maestra.

Per stimolare processi cognitivi che escano da questo circolo vizioso, in cui si trova immerso Gaël, i ricercatori si trovano costretti a proporgli situazioni svincolate dall'ambiente didattico, o come definisce Brousseau a-didattico, ottenendo risposte positive come ragionamenti più personali e nel complesso più produttivi. Sulla base di questi risultati, vennero sviluppate nuove teorie che legano i processi cognitivi e il rapporto insegnante-allievo all'interno dell'ambiente scolastico. In particolare, Brousseau nella sua definizione di contratto didattico tiene conto dei saperi e della situazione scolastica:

Definizione 3.1 (Contratto didattico secondo Brousseau)**.** In una situazione di insegnamento preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito quello di risolvere il problema (matematico) che gli viene presentato. L'accesso a questo compito avviene mediante un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite e degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini del maestro attese dall'allievo, ed i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono un tacito accordo che d'ora in poi verrà chiamato contratto didattico. [11]

Forniamo ulteriori esempi, al fine di precisare meglio cosa si intenda con l'espressione "contratto didattico":

Esempio 3.1. *Immaginiamo di trovarci alle scuole superiori, e supponiamo che, dall'inizio dell'anno il professore abbia interrogato tutti i lunedì chiedendo esclusivamente l'argomento appena svolto. Supponiamo che, per necessità di valutazione, abbia bisogno di interrogare in un giorno diverso "dal solito", trovandosi nella condizione di constatare che l'alunno risulta impreparato tenta di metterlo a proprio agio facendo domande su argomenti precedenti.*
A questo punto lo studente si sentirà "tradito" dall'insegnante per due motivi: essere stato interrogato inaspettatamente e su argomenti non oggetto di valutazione.

Vediamo che lo studente dell'esempio chiaramente si sbaglia, l'insegnante, dovendo presentarsi allo scrutinio con delle valutazioni, non intendeva "fregarlo". Stava solamente svolgendo il suo lavoro, anzi, stava cercando di aiutarlo.
Il vero problema è che la ripetizione nella modalità e tempistica delle interrogazioni ha generato nella mente dello studente l'idea che sarebbe sempre stato così, vincolando il docente al contratto didattico.
Nell'esempio successivo, si nota come altri effetti del contratto didattico, siano invece dovuti alla concezione stessa della materia: in matematica, in particolare, ci si aspetta che le soluzioni ai problemi proposti necessitino di calcoli, e che i problemi posti contengano sempre tutti e soli i dati necessari alla loro soluzione univoca. L'esempio cui ci riferiamo è noto come effetto *età del capitano*.

Esempio 3.2 (L'effetto età del Capitano)**.** La consegna del problema proposto è molto semplice ed è:
In una nave ci sono 26 pecore e 10 capre.
Quanti anni ha il capitano?
La risposta corretta sarebbe: *Con i dati a mia disposizione non sono in grado di rispondere a questa domanda.*
Invece, nel corso di ripetute sperimentazioni, si riscontra che la maggior parte degli studenti calcola l'età del capitano della nave manipolando in qualche modo i numeri forniti nel testo, ad esempio sommandoli o sottraendoli.

Le clausole del contratto didattico che sembrano guidare il comportamento dei bambini sono state approfonditamente studiate[37],in particolare gioca un ruolo importante la convinzione che un problema dato dalla maestra abbia sicuramente soluzione. Emerge anche come i bambini imparino ad affrontare i problemi mettendo in pratica sequenze prestabilite attivate da stimoli indipendenti dal senso matematico del problema (ad esempio facendo ricorso a *parole chiave* che richiamano l'uso di una particolare operazione). L'emergere di convinzioni su quali siano le risposte attese di fronte a determinati compiti e l'attivazione di procedure in base a tali convinzioni e indipendentemente dalla costruzione di un significato matematico è facilmente riscontrabile anche a livello di scuola secondaria di secondo grado.
Il contratto didattico, quindi, dirige i comportamenti dell'allievo e addirittura può dirigere l'interpretazione di un testo, di un problema, di un'attività; ma dirige anche i comportamenti e le valutazioni dell'insegnante. Infatti il contratto didattico permette di spiegare certi comportamenti osservati e perfino prevederli.
Nei problemi come quello dell'età del capitano è presente la rottura del contratto didattico, perché chiede di esporre una soluzione senza fornire i dati per farlo; di conseguenza gli studenti, una volta diventati consapevoli, si opporranno a tale situazione.
La rottura del contratto didattico può essere utilizzata come strategia didattica. Infatti, un esempio può essere lo scambio di ruoli allievo-insegnante:

se il docente assegna il compito di inventare un problema si ha uno scambio momentaneo di ruoli tra insegnante e allievo. Questa modalità permette ad entrambi i soggetti di prendere consapevolezza di alcuni elementi a loro ignoti. *Tra i fattori comuni che spesso emergono dalle risposte a questa consegna troviamo la mancanza negli esercizi di una situazione realmente problematica e di una struttura narrativa consistente.*[37] Nonostante nelle Indicazioni Nazionali si trovi scritto:

> Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola.

É evidente la presenza del problema già dai primi anni della scuola dell'obbligo.
Sarebbe probabilmente improprio parlare di "soluzioni" al problema del contratto didattico; tuttavia, alcune pratiche permettono un approccio più adeguato: ci riferiamo allo scambio dei ruoli sopra citato e al *cooperative learning*. Quest'ultimo, infatti, permette di scardinare il contratto didattico poiché all'interno di ogni gruppo, ciascun componente "acquista" un ruolo, c'è chi diventa il leader, chi assume il ruolo di mediatore tra i componenti del gruppo, chi assume una funzione specifica, ecc.: questa modalità didattica permette di focalizzare maggiormente l'attenzione sul problema proposto dall'insegnante.

3.2 Le misconcezioni

La parola "misconcezione" (o "misconcetto") è un termine che viene usato da qualche anno nella ricerca in Didattica della Matematica. Le misconcezioni si possono interpretare come concezioni momentanee non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica. É importante sottolineare che "misconcezione" non è sinonimo di errore, chiamarle errori infatti

sarebbe semplicistico e banale, ma sono le cause degli errori.
Rosetta Zan, per esempio, dice:

> «Le convinzioni specifiche scorrette sulla Matematica sono quelle responsabili di errori, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile.»[36]

É evidente il fatto che gli studi effettuati abbiano costretto ad esaminare l'interpretazione della realtà da parte del soggetto e a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza (acquisita in modo erroneo), non come un'assoluta mancanza di conoscenza. Infatti:

> «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.»[14]

Le rappresentazioni deboli che uno studente si fa di un concetto, possono essere in certi casi delle interpretazioni errate delle informazioni ricevute, ovvero delle misconcezioni.
In un primo momento, queste rappresentazioni possono non risultare di ostacolo all'apprendimento degli allievi, se non quando diventano modelli forti e non corretti di un concetto. In questo caso, il modello forte costituisce un ostacolo agli apprendimenti futuri, poiché "blocca" l'allievo.
In particolare, ci aiuta a comprendere meglio la distinzione tra immagine e modello riportata in [11]:

> «Farsi un modello di un concetto, dunque, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile)».

Nell'allievo è frequente che la costruzione di un concetto sia difficoltosa, in particolar modo nel caso in cui il modello che viene rappresentato risulti essere un'immagine-misconcezione non approfondita a dovere.
Dal punto di vista didattico, quando un insegnante propone un'immagine forte, convincente, persistente, e in alcuni casi univoca di un concetto, l'immagine si trasforma in modello intuitivo [20] . Dunque, si crea una corrispondenza tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando; ma questo modello potrebbe non rispecchiare il sapere matematico chiamato in gioco, generando così un "modello parassita"[20] che vincola l'apprendimento futuro. Infatti, più il modello intuitivo è stabile, più è complicato "smontarlo" per costruire un'immagine del concetto più chiara. In questo caso, le misconcezioni diventano impedimenti quasi insormontabili per l'avanzare adeguato dell'apprendimento.

3.2.1 Misconcezioni "inevitabili" ed "evitabili"

Le misconcezioni vengono distinte in due categorie: inevitabili ed evitabili. [30]
Quelle inevitabili non dipendono né dalla trasposizione didattica, ovvero il lavoro che di un oggetto del sapere da insegnare fa un oggetto di insegnamento, effettuata dal docente [9] né dall'ingegneria didattica, ovvero la riproduzione delle condizioni favorevoli all'uso e alla produzione originale di una conoscenza[7] ma dipendono dalla necessità di illustrare qualcosa per spiegare un concetto che non potrà mai essere esauriente a causa delle caratteristiche dell'allievo.
In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come inevitabili momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono costretti a fornire per poter iniziare la presentazione di un concetto, rappresentazioni che potrebbero contenere delle informazioni ancora non del tutto corrette del concetto matematico che si vuole trattare.

Esempio 3.3 (Misconcezione "inevitabile")**.** Nei primi anni di scuola primaria, si forma prematuramente un modello concettuale di moltiplicazione,

quando si ha a disposizione solamente l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali.
Tale operazione genera spesso misconcezioni nel momento in cui si passa ad un altro insieme numerico. L'affermazione *la moltiplicazione accresce sempre* è molto difficile da oltrepassare. Per evitare ciò, l'insegnante può aver anticipato, affermando ai ragazzi, che non sempre questo si verifica o ancora, l'insegnante può aver posto l'attenzione sull'esistenza di altri numeri oltre ai naturali che invece di "far aumentare" il risultato, lo "fanno diminuire". In ogni caso, questi tentativi vengono effettuati dal docente per evitare che si crei la misconcezione del concetto di moltiplicazione e per permettere, successivamente, di costruire il modello del concetto di moltiplicazione più ottimale, che quindi consideri, per esempio, l'ampliamento ai numeri razionali.
Nonostante i tentativi dell'insegnante, può comunque essersi "insediata" nella mente di alcuni studenti la convinzione che *la moltiplicazione accresca sempre* a causa dei risultati delle operazioni di moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali, quelle a cui loro "sono abituati".
Perciò, tale misconcezione risulta quindi essere "inevitabile" poiché presuppone allo studente la conoscenza di alcuni aspetti del sapere matematico "limitati" alla sua età: ovvero non è possibile presentare il concetto nella sua totalità. Quindi, la misconcezione, in questo particolare caso, non è direttamente legata alla trasposizione didattica, ma alla necessaria gradualità di presentazione del sapere che, inevitabilmente, non è esauriente del concetto matematico.

Per quanto riguarda, invece, le misconcezioni evitabili, esse dipendono dalle scelte che l'insegnante prende per effettuare la trasposizione didattica e dalle scelte concernenti l'ingegneria didattica.
Spesso accade che l'apprendimento degli aspetti matematici è condizionato dalle proposte della *noosfera*: libri di testo, riviste, programmi, ecc.. e a questo si aggiungono le rappresentazioni convenzionali che il docente ha messo in atto nel contratto didattico instaurato in classe.[11] Questo, inevitabilmente, spinge lo studente a confondere la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere, infatti:

> Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni.[15]

Di conseguenza occorre che, dal punto di vista didattico, si faccia molta attenzione alla scelta, ai contesti ed alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi.

Esempio 3.4 (Misconcezione "evitabile")**.** Si riporta una sperimentazione in una classe di scuola primaria.
Dopo aver costruito dei fogli quadrati di carta dove sono state evidenziate le pieghe delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio quadrato nella seguente posizione rispetto a quella "classica" scelta dai bambini per parlare di quadrato:

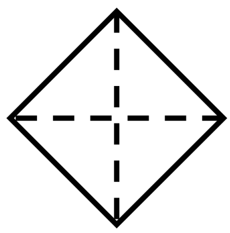


Figura 3.2

I bambini hanno immediatamente obbiettato: «Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato». I bambini tenevano il quadrato disposto nel modo classico, come vediamo nella seguente figura:

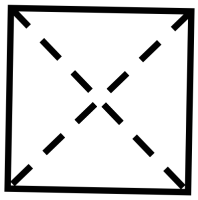


Figura 3.3

Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: «Perché quello che ho in mano io è un rombo e il vostro è un quadrato?». I bambini: «Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique».
Dunque, nella logica di ciò che era stato loro insegnato, i bambini avevano ragione: infatti la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione solo su una particolare posizione assunta dall'oggetto, posizione che risultava intuitiva, ma che nascondeva le caratteristiche matematiche del concetto.
Perciò, in questo caso, le misconcezioni "evitabili" sembrano dipendere da due diverse cause: la ripetitività della rappresentazione proposta dall'insegnante (che consiste nel quadrato disegnato con i lati orizzontali e verticali rispetto al punto di vista del lettore e che viene proposta dalla noosfera in modo quasi esclusivo) e soprattutto l'istituzionalizzazione verbale di tale scelta.

Risulta quindi indispensabile per il superamento di misconcezioni inevitabili e per evitare le misconcezioni evitabili, fornire una grande varietà di mezzi semiotici di oggettivazione opportunamente organizzati e integrati in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi gestite con consapevolezza e coerenza da parte dell'insegnante.[32]

3.3 Teoria dei registri di rappresentazione semiotica

In matematica, si parla più spesso di "oggetti matematici" che di concetti matematici in quanto si studiano maggiormente oggetti piuttosto che concetti.
É molto importante ciò che Vygotskij dichiara:

> Tutte le funzioni psichiche superiori sono unite da una caratteristica comune superiore, quella di essere dei processi mediati, cioè di includere nella loro struttura, come parte centrale ed essenziale del processo nel suo insieme, l'impiego del segno come mezzo fondamentale di orientamento e di dominio dei processi psichici. L'elenco centrale del processo di formazione dei concetti è l'uso funzionale del segno, o della parola, come mezzo che permette all'adolescente di sottomettere al suo potere le proprie operazioni psichiche, di dominare il corso dei propri processi psichici.[35]

In Duval, la nozione di concetto passa in secondo piano, perché ciò che acquista maggior priorità è la coppia *segno, oggetto.* Per Duval, questo porta ad un paradosso, il paradosso cognitivo del pensiero matematico:

> [...]da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi

> acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? Questo paradosso è ancora più forte se si identifica attività matematica ed attività concettuale e se si considera le rappresentazioni semiotiche come secondarie o estrinseche». [17]

Secondo l'insegnante, secondo la noosfera e secondo lo stesso studente, egli (studente) sta entrando in contatto con un "oggetto" matematico ma, di fatto, e nessuno talvolta sembra rendersene conto, lo studente sta entrando a contatto solo con una rappresentazione semiotica particolare di quell' "oggetto". Lo studente non ha, non può avere, accesso diretto all' "oggetto" e l'insegnante e la noosfera confondono le due cose; lo studente è come bloccato, come inibito: non può far null'altro che confondere "oggetto" e sua rappresentazione semiotica perché non se ne rende conto, non lo sa. E quindi, di fronte ad un successivo bisogno concettuale, che si manifesta per esempio con la necessità di modificare la rappresentazione semiotica di quello stesso "oggetto", lo studente non ha mezzi critici né culturali né cognitivi; l'insegnante e la noosfera non capiscono il perché ed accusano lo studente, colpevolizzandolo di qualche cosa che egli non capisce. In realtà, in questa fase paradossale, nessuno capisce più quel che sta accadendo in quanto ciascuno degli attori di questa avventura ha una percezione diversa del problema. D'altra parte l'analisi delle rappresentazioni è un fatto nuovo, nello studio dei processi cognitivi, anche se lo è meno sul piano strettamente filosofico. [13]
Infatti, citando Duval si può affermare che *«non c'è noetica*(acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni)».
Il segno non è un simbolo convenzionale che connota o codifica direttamente un oggetto, ma un simbolo elementare unitario in un sistema di segni che Duval chiama *Registro di rappresentazione semiotica* e ha le seguenti caratteristiche:

- Si ha accesso agli oggetti matematici solo attraverso la produzione di rappresentazioni semiotiche;

- Ciascuna rappresentazione semiotica dello stesso oggetto matematico non esplicita le stesse proprietà dell'oggetto rappresentato, ma solo il proprio contenuto;

- La comprensione è nella coordinazione di registri differenti nelle attività matematiche, ovvero nella capacità di riconoscere un oggetto matematico nelle sue possibili rappresentazioni semiotiche; è una capacità che si manifesta nelle attività di conversione da un registro all'altro e in quelle di trattamento delle rappresentazioni nei rispettivi registri.

Qualsiasi rappresentazione, come per esempio un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale, ecc, non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione tipiche della matematica e questo potrebbe essere la fonte di alcune di quelle misconcezioni che abbiamo chiamato precedentemente inevitabili:

> «I modelli restano distinti dalla nozione stessa, non solo a causa dell'astrazione propria della nozione (passaggio dall'oggetto alla classe di oggetti) ma anche a causa dell'idealizzazione (passaggio dall'oggetto reale alla sua immagine ideale, mediante il passaggio intermedio del modello)».[23]

In aggiunta, si è notato come sia proprio la necessità della semiotica una delle cause del nascere di alcune misconcezioni, generalmente misconcezioni inevitabili.

3.4 Difficoltà epistemologiche e didattiche nell'insegnamento dell'infinito matematico

Durante il processo di insegnamento-apprendimento si formano da una parte idee transitorie e dall'altra parte bisogna fare i conti con il fatto che tali idee resisteranno poi al tentativo di superarle. Le rotture sono quindi necessarie per superare quelli che vengono chiamati *ostacoli*. Quest'ultimo è un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi precedenti, ma che si rileva fallimentare nel momento in cui si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante sia sbagliata, si cerca di salvarla; questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti. In particolare possiamo distinguere tre tipi di ostacoli:

- di natura ontogenetica, cioè legata alla natura particolare dello studente;
- di natura didattica, cioè legata alle scelte di contenuti e di metodologia dell'insegnante;
- di natura epistemologica, cioè legata allo specifico di certi contenuti matematici.

Vedremo quindi come il concetto di infinito si scontra maggiormente con ostacoli del secondo e terzo tipo, quelli didattici ed epistemologici.
In particolare, gli studi in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento dell'infinito matematico sono numerosi, e hanno puntato particolarmente l'attenzione sugli allievi per esaminare quali siano i motivi che fanno dell'infinito un argomento cognitivamente così difficile da essere costruito correttamente. Questi studi mostrano come, sia dal punto di vista storico sia per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione di questo argomento sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contradditorio e solamente grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva che riguarda solo un numero limitato di individui.
Come abbiamo potuto vedere nel primo capitolo, spesso le dimostrazioni che si effettuano nel campo dell'infinito si basano su corrispondenze biunivoche; queste dimostrazioni risultano essere abbastanza convincenti per un adulto esperto, ma non sempre lo sono per uno studente, anche se quest'ultimo è

maturo. Ad esempio le corrispondenze tra l'insieme $\mathbb{N}$ dei naturali e l'insieme dei naturali pari, o tra $\mathbb{N}$ e l'insieme dei naturali quadrati sono state analizzate anche da Duval; egli mostra che uno dei motivi forti di non accettazione della dimostrazione da parte degli studenti sta nello *scivolamento* dal verbo "avere" al verbo "essere" nel corso della dimostrazione: "Ogni naturale ha un quadrato (avere un quadrato) - non tutti i naturali sono quadrati di naturali (essere un quadrato)." [14] . Si sono effettuate molte ricerche sulle intuizioni errate e rappresentazioni che si fanno gli studenti nel tentare di mettere in corrispondenza biunivoca insiemi infiniti; tutti gli studi eseguiti avevano come scopo principale quello di guidare gli studenti all'uso della corrispondenza biunivoca come unico criterio di paragone tra le quantità infinite.
Un altro problema riscontrato nelle ricerche di [14] è il fenomeno noto in letteratura come *dipendenza*; ovvero viene messa in evidenza la convinzione degli studenti basata sulla veridicità dell'$VIII$ nozione comune di Euclide: "Il tutto è maggiore della parte", sia per il finito che per l'infinito. Ci riferiamo alla dipendenza della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici. Riportiamo qualche esempio: dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi; o ancora, gli studenti hanno spesso la convinzione che il numero di punti che si trovano in due diversi segmenti è più grande nel segmento di maggior lunghezza.
Uno dei fenomeni di dipendenza in ambito geometrico è legato all'idea di segmento concepito come "collana di perle", ossia il segmento considerato come filo (segmento) formato da perline (punti) a contatto l'una con l'altra. Tale modello si fonda su misconcezioni riguardanti il punto matematico considerato come ente avente una qualche dimensione, una qualche forma. Nelle ricerche di [14]viene messo in evidenza come le difficoltà nella comprensione dell'infinito matematico e nella padronanza del concetto di continuità da parte di studenti di scuola superiore siano legate al problema della presenza del modello intuitivo che gli studenti hanno degli enti geometrici, in particolare del punto e del segmento. Nella ricerca di [30],[31] si sottolinea la presen-

za delle stesse misconcezioni possedute dagli allievi anche negli insegnanti di scuola primaria e secondaria di primo grado, e non solo per il segmento considerato come una "collana di perle", ma anche, più in generale, per gli enti primitivi della geometria.
Un altro fenomeno ritenuto causa di difficoltà è l'*appiattimento* che consiste nel considerare tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, cioè nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Abbiamo visto come, già dall'antichità, il dibattito tra denso e continuo fu caratterizzato da moltissimi fraintendimenti e polemiche e la reale consapevolezza matematica fu raggiunta solo alla fine del XIX secolo. Le ricerche dimostrano che il dibattito continua tutt'ora in didattica, riguardante la difficoltà, da parte di molti studenti, di passare dal denso al continuo e di capire come nel denso vi siano, molti più "buchi" rispetto al continuo. Nel dettaglio, in letteratura si è mostrato come, una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ debbano avere la stessa cardinalità (dopo la dimostrazione, da parte del ricercatore o insegnante, della corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), risulta frequente la generalizzazione che, allora, tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità; misconcezioni che non dipendono solo da un ostacolo epistemologico, ma anche da ostacoli didattici. In particolare, anche il fenomeno di appiattimento, così come quello di dipendenza, si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso sulla corrispondenza biunivoca nei casi finiti.

Esempio 3.5 (Segmentino-segmentone)**.**

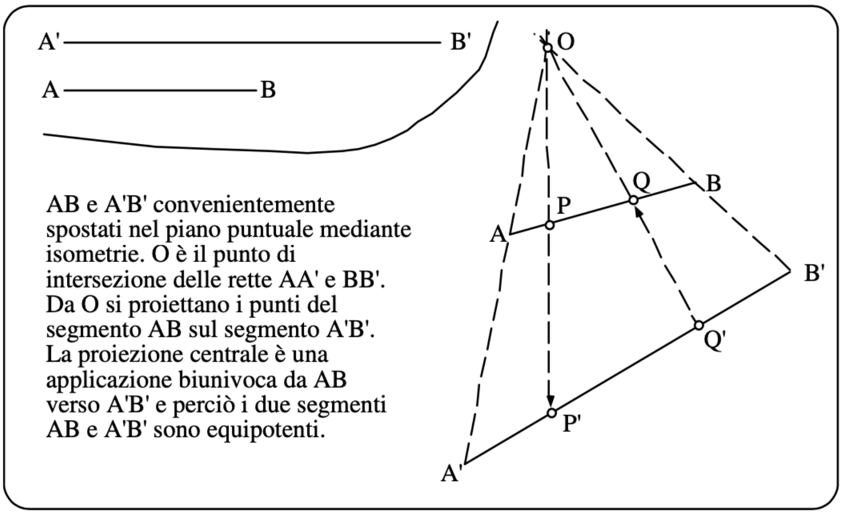


Figura 3.4

Dopo aver proposto una dimostrazione, chi la rifiuta lo fa principalmente perché vede ancora il segmento secondo il modello della "collana", gli studenti sono infatti portati a concludere ciò che affermavo precedentemente: maggiore lunghezza allora insieme dei punti è maggiore.
L'ostacolo epistemologico (inteso nel senso classico alla Bachelard e Brousseau) è una conoscenza stabile ed evidente che funziona bene in ambiti precedenti, che costituisce un modello forte ma che crea problemi ed errori al momento in cui si cerca di adattarlo a nuove conoscenze, a situazioni nuove. Dunque, per superare l'ostacolo occorrono nuove conoscenze. Sicuramente può essere utile collegarsi al concetto di densità (il segmento puntuale è denso perché presi arbitrariamente due suoi punti, tra essi ce ne sono infiniti altri), chiaramente è molto difficile che gli studenti della scuola secondaria di II grado e, a maggior ragione, quelli della scuola secondaria di I grado possano capire perfettamente questo fatto.

Esempio 3.6 (Forme periodiche)**.** Consideriamo il problema relativo all'uguaglianza tra $0,\overline{9}$ e 1.

Chi rifiuta la dimostrazione, lo fa perché non riesce ancora a capire il significato esatto di forma decimale periodica di un numero razionale. Quando vengono introdotti i numeri periodici nella scuola media, l'insegnante spesso mette in guardia gli studenti affermando: «Potrei continuare la divisione e otterrei sempre lo stesso resto, quindi al quoziente dovrei riportare sempre la stessa cifra...». Da qui nasce sicuramente l'idea del "avvicinarsi sempre di più al risultato senza mai raggiungerlo". In questo caso quindi, sarebbe necessario parlare di ostacolo didattico.
Inoltre di fronte all'uguaglianza una buona parte di studenti ritiene che $0,\overline{9}$ non sia uguale ad 1. In particolare, si possono suddividere i ragazzi in due categorie: nella prima viene posta l'attenzione alla somma $0,9+0,09+0,009+0,0009+\cdots$, dunque ci sono studenti che non accettano l'uguaglianza perché affermano che, continuando ad aggiungere 9 dopo la virgola, ci si avvicina sempre di più ad 1, senza però mai raggiungerlo. In questo modo quindi generalizzano questa situazione di mancato "arrivo al traguardo". Riporto alcune frasi di studenti:

> Se io scrivo 0,9 questo è quasi 1 ma non è 1 perché gli manca 0,1; ma se io aggiungo 0,09 mi trovo a 0,99 che è sempre più vicino a 1, ma non è 1 perché gli manca 0,01; sempre così, la somma cresce e cresce, ma gli manca sempre 0,000000001 anche con infiniti zeri, sempre qualche cosa, a 1 non ci arrivo mai, perché ogni volta gli manca un po'.
>
> Ho capito, è come un trucco: voglio arrivare al traguardo che è 1 e faccio come la lumaca, prima 0,9, poi 0,99, poi 0,999 e così via sempre più 9; sarebbe come dire che faccio un passo alla volta di 0,9, poi 0,99, poi 0,999. Sì, vedo che sono sempre più vicino a 1, ma è ovvio che non ci posso arrivare mai!
>
> Mah! Se fosse uguale, perché scriverlo cosi [e indica $0,\overline{9}$]? Tanto vale scriverlo normale [indica 1]; se lo scrivono così [e indica nuovamente $0,\overline{9}$], vuol dire che è diverso. Ad 1 non ci arrivi mai; se ci guardo bene 0,999999 non può essere 1.

Anche nella seconda categoria troviamo studenti che non accettano l'uguaglianza tra $0,\overline{9}$ e 1, in particolare viene posta l'attenzione sulla differenza tra $0,\overline{9}$ e 1. Essi concludono che manca sempre qualcosa di esprimibile come $0,00...01$. Alcuni soggetti quindi dichiarano che non è escluso che in matematica questa uguaglianza possa valere, ma nella realtà ciò non è possibile, denunciando quindi il solito "scollamento" tra matematica e realtà.
Alcune citazioni inserite nella categoria precedente possono essere usate anche qui, infatti:

> Se io scrivo $0,\overline{9}$ allora per arrivare ad 1 ci vuole 0,1. [L'intervistatore gli fa notare l'errore.] Ah, sì, diciamo che se scrivo tanti 9 dopo la virgola, allora l'1 appare tanto lontano dopo la virgola. Così: a 0,999999 ci manca 0,000001. Quello che manca, ogni volta, è 0, poi molti zeri, poi 1, manca sempre, non è mai 1.

> [Più o meno fa un discorso analogo al precedente, ma aggiunge] Ecco, se io potessi continuare poi e poi all'infinito, allora la differenza dovrebbe essere 0,000000... ma la cifra 1 all'infinito, l'ultima cifra 1 non può essere scritta, dunque la differenza c'è sempre, ma è 0,000...00....

Una minoranza di studenti riescono a riconoscere che essendo questa differenza zero allora i due numeri devono essere uguali. [16]

3.4.1 Alcune considerazioni

Successivamente si riportano alcuni commenti e considerazioni dei ragazzi suscitate in loro dalla presentazione di alcune dimostrazioni:

> [...] fino a qui stava la dimostrazione ed è corretta, però non so, questo non mi convince, perché non può essere ...
> (Si riferisce alla dimostrazione dell'uguaglianza tra $0,\overline{9}$ e 1.)

> Si, lo accetto perché vedo la corrispondenza biunivoca, ma uno allora potrebbe, ma no, sì vedo la funzione, ma non è, non può

> essere ...
> (Si riferisce alla dimostrazione che gli insiemi dei punti di due segmenti di diversa lunghezza possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro.)
>
> Si, i passaggi sono semplici, molto facili, molto convincenti; però, non so, se tu il segmento lo metti qui e lo trasli, si vede subito che non può essere; e poi dipende da come prendi le coordinate.
> (Si riferisce alla dimostrazione che ci sono tanti punti in un quadrato quanti in un suo lato.)

É evidente come le conoscenze pregresse, l'uso dei sensi e dell'intuizione talvolta prevalgono rispetto alla veridicità della dimostrazione. É interessante continuare un dialogo per poter cogliere gli aspetti che emergono dalle loro osservazioni senza demolirli ma prendendo spunto perché acquisiscano piena consapevolezza delle dimostrazioni fatte, così diventa veramente un apprendimento significativo.

Capitolo 4

Progettazione di attività inerenti l'infinito matematico

In quest'ultimo capitolo cercheremo di utilizzare le nozioni studiate finora per costruire attività inerenti l'infinito matematico.
In particolare, negli studi in Didattica viene evidenziata l'ooportunità di un percorso a spirale per quanto riguarda le conoscenze matematiche. Ovvero, durante il percorso scolastico di uno studente, gli stessi contenuti vengono trattati seguendo un modello a spirale: nella scuola primaria, nella scuola secondaria di primo grado e nella scuola secondaria di secondo grado.
Il livello dell'approfondimento dell'argomento che si tratta deve andare parallelamente con lo sviluppo della persona. Infatti dal punto di vista di uno studente della primaria ci si aspetta un approccio esclusivamente concreto improntato a creare un'intuizione dell'argomento di cui stiamo parlando. Successivamente nel periodo di pieno sviluppo della coscienza di un ragazzo quale la secondaria di secondo grado, si tende a lavorare con maggiore astrazione, cercando di stimolare non solo uno sguardo critico dello studente nei confronti dell'argomento ma anche la consapevolezza delle sue potenzialità nei riguardi della materia.
Tutto questo significa che nel momento in cui uno studente si trova ad affrontare nuovamente argomenti già trattati egli, in una piena visione alla Piaget,

riconosce di poter arricchire la trattazione già svolta con nuove nozioni, competenze e auspicabilmente punti di riflessione, che coronerà nella soggettiva trattazione che avverrà ad un livello più elevato.

Per quanto riguarda l'astrazione, riportiamo la lettera n.100 del 7 febbraio 1761 [19] in cui Eulero esplicita egregiamente tale concetto:

> I sensi ci rappresentano solo oggetti che esistono attualmente fuori di noi, e le idee sensibili si riferiscono tutte a questi oggetti; ma da queste idee sensibili l'anima si forma un gran numero di altre idee che, pur traendo la loro origine dalle prime, non rappresentano però cose che esistono realmente. Per esempio, quando vedo la luna piena, se fisso la mia attenzione esclusivamente sul suo contorno, mi formo l'idea della circolarità, ma non potrei certamente dire che la circolarità esista di per se stessa. La luna è sì rotonda, ma tale forma non esiste separatamente dalla luna. Lo stesso vale per tutte le altre figure; e quando io vedo una tavola triangolare o quadrata, posso avere l'idea di un triangolo o di un quadrato, quantunque una simile figura non esista mai di per se stessa o separatamente da un oggetto reale, avente questa figura. Le idee dei numeri hanno un'origine del tutto simile: avendo visto due o tre persone o altri oggetti, l'anima se ne forma l'idea del due o del tre, che non è più legata a quelle persone. Una volta arrivata all'idea del tre, l'anima può andare oltre e formarsi idee di numeri più grandi, del quattro, cinque, dieci, cento, mille eccetera, senza mai aver visto esattamente tante cose insieme. E per ritornare alle figure, Vostra Altezza può ben formarsi l'idea di un poligono, per esempio, di 1761 lati, quantunque non abbia mai visto un oggetto reale con una simile figura; e può persino darsi che un oggetto simile non sia mai esistito. Un sol caso dunque, in cui si son visti due o tre oggetti, può aver portato l'anima a formarsi idee di altri numeri di qualsiasi grandezza.
>
> L'anima dispiega in ciò una nuova facoltà, chiamata astrazione,

che si ha quando l'anima fissa la propria attenzione esclusivamente su una quantità o qualità dell'oggetto da cui la separa, considerandola come se non fosse più unita ad esso. Per esempio, quando tocco una pietra calda e fisso la mia attenzione unicamente sul calore, io mi formo l'idea del calore, idea che non è più legata alla pietra. Tale idea è formata dall'astrazione, poiché è separata dalla pietra, e l'anima avrebbe potuto ricavare la stessa idea toccando un legno caldo o immergendo la mano in un'acqua calda. È così che per mezzo dell'astrazione l'anima si forma mille altre idee di quantità e proprietà degli oggetti, separandole in seguito dagli oggetti stessi. Se vedo un abito rosso e fisso la mia attenzione unicamente sul colore, mi formo allora l'idea del rosso, separata dall'abito; ed è evidente che anche un fiore rosso, o un qualsiasi altro corpo di questo colore avrebbero potuto condurmi alla stessa idea.

Tali idee, acquisite per astrazione, sono chiamate nozioni per distinguerle dalle idee sensibili che ci rappresentano cose realmente esistenti.

Si sostiene che l'astrazione è una prerogativa degli uomini e degli spiriti ragionevoli e che gli animali ne sono assolutamente privi. Una bestia, per esempio, prova la stessa sensazione dell'acqua calda come noi, ma non sarebbe capace di separare l'idea del calore dall'idea dell'acqua: essa conosce il calore solo in quanto si trova nell'acqua, e così non ha l'idea astratta del calore come noi. Si dice che queste nozioni sono idee generali, che si riferiscono a più cose insieme, come il calore si può trovare in una pietra, nel legno, nell'acqua o in qualsiasi altro corpo, ma la nostra idea del calore non è legata a nessun corpo, perché se la mia idea del calore fosse legata ad una certa pietra, che mi ha per prima fornito questa idea, io non potrei dire che un pezzo di legno o altri corpi sono caldi. È chiaro dunque che queste nozioni o idee genera-

li non sono affatto legate a certi oggetti, come invece lo sono le idee sensibili; e allo stesso modo che queste nozioni distinguono l'uomo dagli animali, così lo sollevano propriamente al grado del ragionamento, al quale le bestie non potrebbero mai pervenire.
Ma vi è ancora un'altra specie di nozioni, che si formano per astrazione e che forniscono all'anima i più importanti soggetti per dispiegare le sue forze: sono le idee dei generi e delle specie. Quando vedo un pero, un ciliegio, un melo, una quercia, un abete eccetera, ho una serie di idee diverse le une dalle altre; tuttavia vi noto molte cose che sono loro comuni, come il tronco, i rami e le radici; io mi soffermo unicamente a quelle cose che le differenti idee hanno in comune e chiamo albero l'oggetto a cui queste qualità convengono. Così l'idea dell'albero, che mi sono formato in questo modo, è una nozione generale, che comprende le idee sensibili del melo, del pero, e in generale di ogni albero attualmente esistente. Ora l'albero che corrisponde alla mia idea generale dell'albero non esiste in nessun luogo; caso non è un pero perché in questo caso i meli non potrebbero esservi compresi; per la stessa ragione non è un ciliegio, né un susino né una quercia eccetera. In una parola esso esiste solo nella mia anima; esso non è che un'idea, ma un'idea che si realizza in una infinità di oggetti. Così, quando dico ciliegio, mi scrivo di una nozione generale che comprende tutti i ciliegi esistenti: tale nozione infatti non è affatto limitata al ciliegio, che si trova nel mio giardino, perché in tal caso ogni altro ciliegio ne sarebbe escluso.
In rapporto a simili nozioni generali, ogni oggetto realmente esistente, che vi è compreso, è chiamato individuo; e l'idea generale, per esempio, di ciliegio, è chiamata una specie, o un genere. Queste due parole significano pressappoco la stessa cosa; ma il genere è più generale e contiene in sé molte specie. Così la nozione di un albero può essere considerata come un genere, poiché essa rac-

> chiude in sé non solo le nozioni dei peri, dei meli, delle quercie, degli abeti eccetera, che sono specie, ma anche l'idea o la nozione dei ciliegi dolci, agri, e di tanti altri tipi di ciliegi, che sono specie contenenti ciascuna un gran numero di individui attualmente esistenti.
> Anche tale maniera di formarsi idee generali avviene dunque per astrazione, ed è in ciò soprattutto che l'anima dispiega quell'attività e quelle operazioni dalle quali noi ricaviamo tutte le nostre conoscenze. Senza tali nozioni generali noi non differiremmo affatto dalle bestie.

Negli esempi che vedremo successivamente ci rifacciamo alle Indicazioni Nazionali: un ragazzo della scuola secondaria di primo grado vede le funzioni come relazioni tra insiemi discreti e cerca di intuire il passaggio al continuo. Mentre, per quanto riguarda il passaggio alla scuola secondaria di secondo grado, l'obbiettivo è quello della formalizzazione.
Abbiamo quindi deciso di costruire delle attività inerenti due argomenti, suddivise in base al livello scolastico, in particolare soffermandoci sulla scuola secondaria, sia di primo che di secondo grado.
Nel particolare, gli argomenti che abbiamo scelto sono strettamente collegati con il Teorema di Cantor-Schröder-Bernstein. Per quanto riguarda *Due segmenti di lunghezza differente hanno lo stesso insieme di punti* è evidente e immediato che, poiché per due punti passa una e una sola retta, allora la funzione che si costruisce è iniettiva, sia considerando come dominio il segmento di lunghezza maggiore sia considerando quello di lunghezza minore.
A proposito della *Corrispondenza biunivoca tra insiemi che presentano lo stesso tipo di infinito* è, anche in questo caso, intuitivo il collegamento. L'iniettività di una funzione da un'insieme all'altro e la sua inversa, la troviamo in particolar modo nella dimostrazione con il metodo della diagonale di Cantor.

4.1 Argomento 1: Due segmenti di lunghezza differente hanno lo stesso insieme di punti

Per quanto riguarda la scuola secondaria di primo grado, è evidente come i ragazzi, usciti dal percorso di scuola primaria, trovino ancora molto difficile l'astrazione matematica.

> Passare da una conoscenza primaria ad una secondaria di primo grado, allora, significa cominciare ad essere consapevoli della necessità di rimandare sempre, nell'incontro personale (e di tutti) con la realtà, la parte al tutto e il tutto alla parte, ovvero di collegare sempre le prospettive parziali di lettura rappresentativa del mondo e della vita in un sistema unitario e integrato di significati personali, che se non può ambire a presentarsi come sintesi compiuta e definitiva dei modelli parziali che ingloba, si preoccupa, però, di chiarire e approfondire i nessi e i raccordi che individua tra loro. [Indicazioni Nazionali]

Durante i tre anni, si cerca infatti di introdurli in questo mondo così apparentemente lontano. Apparentemente perché la strada è invece percorribile da tutti.
L'argomento che abbiamo scelto è spesso fonte di errori e difficoltà; è importante, come abbiamo visto nel capitolo 3, la $VIII$ nozione di Euclide *Il tutto è maggiore della parte* perché nei ragazzi crea confusione, infatti per quanto riguarda l'infinito, ciò non vale. Gli studenti non distinguono ancora la differenza tra infinito e illimitato, per cui di fronte alla domanda "Ci sono più punti nel segmento AB o in CD?", come riportato in figura, la loro risposta è

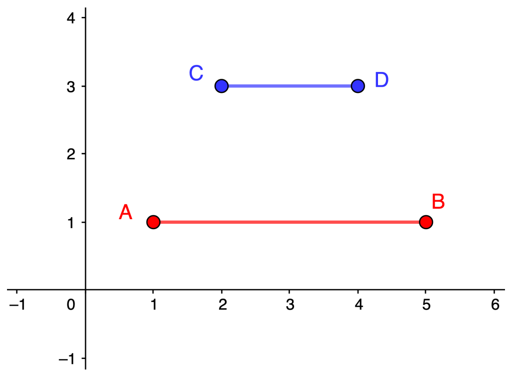
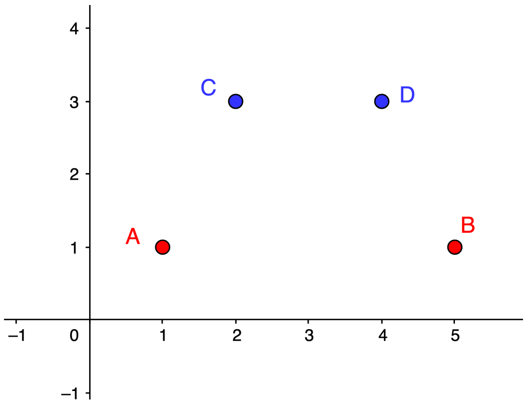
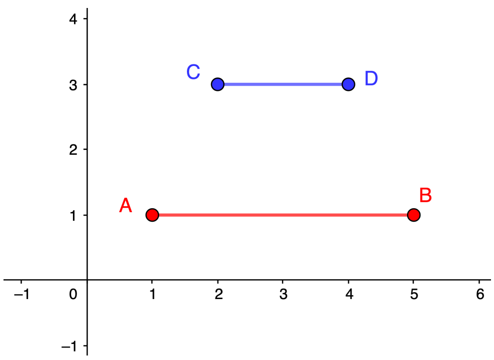


Figura 4.1

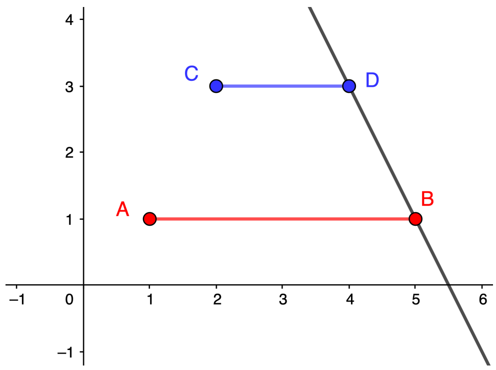
strettamente legata al concetto *il segmento è limitato* invece che *il segmento è costituito da infiniti punti*, perciò non riconoscono le diverse grandezze in gioco: la misura del segmento e l'insieme dei punti del segmento.
Nell'esperienza avuta, grazie al tirocinio curriculare, effettuato proprio in una scuola secondaria di primo grado, abbiamo potuto notare come sia importante proporre domande ai ragazzi, instaurando con loro un dialogo attento e dinamico, per farli giungere tramite un percorso costituito da piccoli "paletti", i quali andranno a definire le conoscenze che via via in loro aumentano. Come già anticipato precedentemente, per andare incontro al problema dell'astrazione, cercando di accompagnare i ragazzi verso l'apprendimento e superamento della difficoltà, abbiamo ritenuto utile proporre, a fine dialogo, un'attività. In particolare, grazie all'aiuto del Software GeoGebra, si ripropone la dimostrazione che presentò Cantor, lasciando spazio all'aspetto visivo, come mostrano le immagini seguenti:



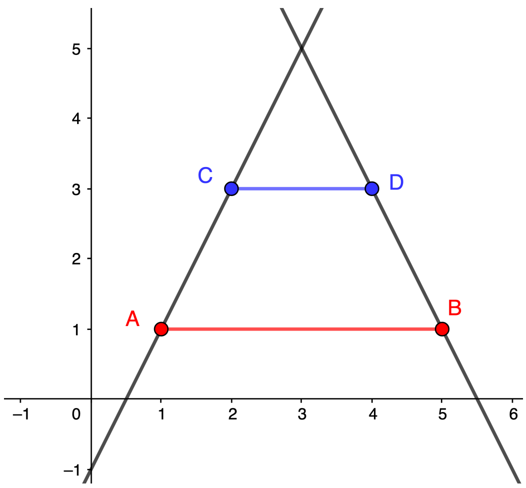
(a) Si prendono 4 punti sul piano cartesiano



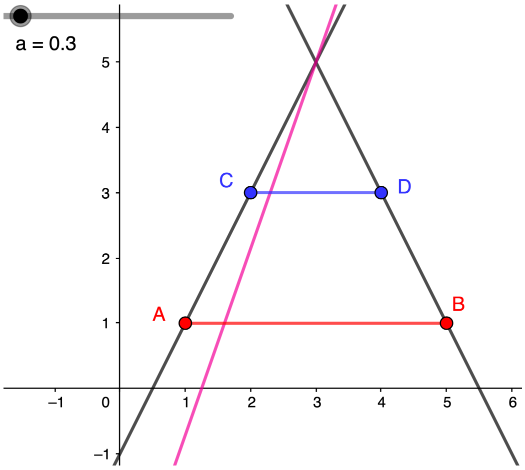
(b) Si tracciano due segmenti, AB e CD



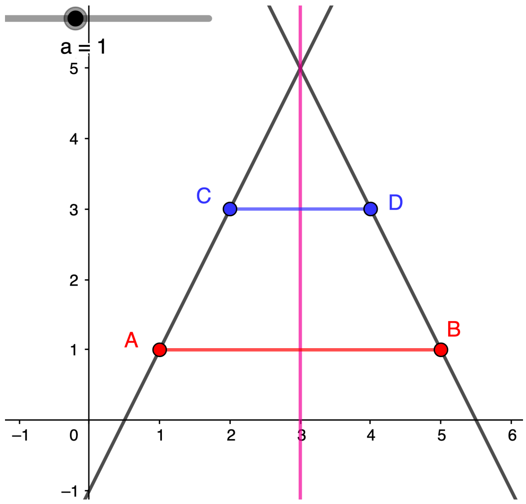
(c) Si disegna la retta passante per B e D



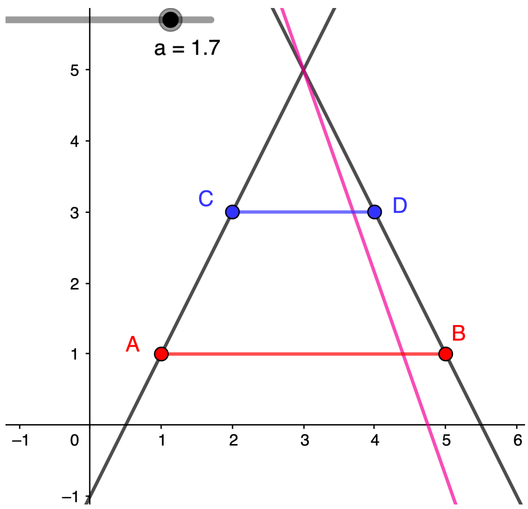
(d) e la retta per A e C



(a) *Fissata l'intersezione tra le due rette, si traccia la retta passante per l'intersezione che interseca i due segmenti*



(b) Grazie all'utilizzo di GeoGebra, si cambia il coefficiente **a** della retta



(c) Ogni retta che li interseca passa esattamente per un punto in ciascun segmento

Un altro motivo che ci ha spinto nella scelta del dialogo continuo con i ragazzi, sono proprio le Indicazioni Nazionali, infatti:

> [...] Avere rapporti tra soggetti dentro l'istituzione scuola, tra docente e allievi, tra docenti e genitori, significa infatti far sempre riferimento all'incontro di ruoli e competenze comunque formalizzate in statuti, norme, contratti, gerarchie, ecc.
> Con lo scambio, e anche con il rapporto, il rischio dell'estraneità tra i soggetti coinvolti nel processo educativo e della sostituzione del coinvolgimento pieno e diretto, libero e gratuito di ciascuno, con la prestazione pattuita o corretta, ma agita più per dovere che per intima adesione, resta sempre rilevante.
> Questo accade molto meno, invece, se alle logiche dello scambio e del rapporto si sostituisce e si vive quella della relazione educativa. [...]
> Nella relazione educativa ci si prende cura l'uno dell'altro come persone: l'altro ci sta a cuore, e si sente che il suo bene è, in fondo, anche la realizzazione del nostro. Quando si entra in questo clima, gli studenti apprendono meglio.

Per quanto riguarda la scuola secondaria di secondo grado, facendo riferimento anche alle Indicazioni Nazionali e a vari PTOF (Piani Triennali Offerta Formativa):

> Fornire agli studenti strumenti culturali e metodologici per una comprensione approfondita della realtà e per la realizzazione di un personale percorso di vita; fare acquisire una concezione unitaria e armoniosa del sapere, comprendendo la connessione tra cultura umanistica e metodi di conoscenza propri della matematica e delle scienze fisiche naturali; sviluppare la capacità di imparare ad imparare individuando le proprie attitudini e organizzando il proprio apprendimento lungo tutto l'arco della vita; educare alla complessità, sviluppando la capacità di affrontare i cambiamenti con atteggiamento razionale-critico.

o ancora:

> Per quanto riguarda il biennio: la matematica si propone di far acquisire un metodo scientifico, cioè un metodo rigoroso di conoscenza che promuove l'osservazione e l'analisi critica della realtà sviluppando: capacità intuitive-logiche, processi di astrazione e di formazione dei concetti, ragionamenti di tipo induttivo e deduttivo, attitudini sia analitiche che sintetiche.

Si comprende così che i ragazzi della secondaria di II grado sono pronti ad accogliere, imparare e capire le dimostrazioni, in senso lato.
Per questo abbiamo considerato essere adeguato l'approfondimento, sempre successivamente ad un dialogo docente-alunno, della dimostrazione presentata da Cantor, quella presentata solo graficamente ai ragazzi della scuola secondaria di primo grado, ma da un punto di vista più costruttivo. Infatti durante il biennio, gli studenti iniziano ad approcciarsi alle dimostrazioni nella geometria.
Inoltre, abbiamo ritenuto alla loro portata il risultato proposto da Cantor, al quale anche lui stesso, inizialmente, faceva fatica a credere *Lo vedo, ma non ci credo*, come abbiamo visto nel capitolo 2: la corrispondenza biunivoca tra i punti di un quadrato e i punti di un suo lato.

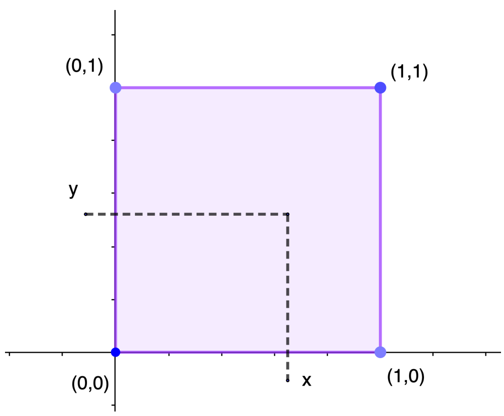
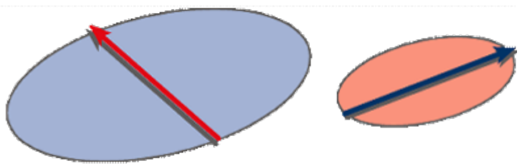
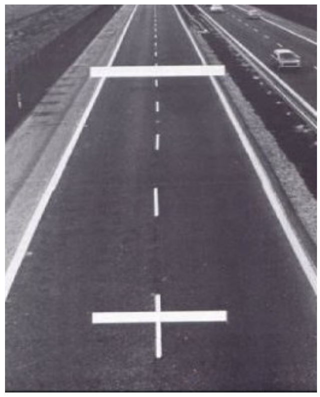


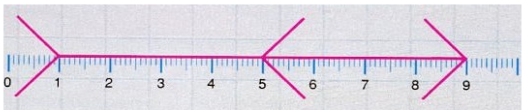
Figura 4.2

Prendiamo in considerazione un punto P del quadrato, che avrà coordinate (x, y) non maggiori del lato stesso del quadrato; per questo motivo, dunque, x e y saranno numeri decimali compresi tra 0 e 1. A questo punto, facciamo corrispondere alla coppia che identifica univocamente il punto P, (x, y) un numero reale t compreso tra 0 e 1. Questo punto identificherà, univocamente, un punto del lato del quadrato.
Viceversa, ad un qualsiasi punto del lato a cui corrisponde univocamente il numero reale t possiamo far corrispondere la coppia ordinata (x, y) che individua un punto del quadrato.
In questo modo riusciamo a dimostrare l'ipotesi, costruendo la corrispondenza biunivoca.
Anche in questo caso, inizialmente ci si gioca nel dialogo con gli studenti, facendo spesso riferimento alle definizioni, in particolare, di segmento e di equipotenza tra insiemi infiniti.
In questo modo, si accompagnano i ragazzi all'utilizzo delle conoscenze che hanno a disposizione, per esempio le definizioni, e si permette loro di manipolarle.
Così, si applica il metodo della *reinvenzione guidata:* l'idea centrale del pensiero di Freudenthal sull'apprendimento è espressa dicendo che esso è un'appropriazione di strutture e di procedure che avviene attraverso la *re-invenzione* di ogni soggetto; l'attività del "matematizzare" si esplica e si realizza sostanzialmente quando il soggetto si appropria delle idee e delle strutture re-inventandole in modo attivo. Soltanto se si attua un apprendimento di questo tipo le nozioni si radicano nella mente, gli algoritmi non sono puramente memorizzati in modo passivo, ma possono essere addirittura richiamati e ricostruiti se per avventura fossero stati dimenticati.
Infatti soltanto vedendo dall'alto la meta finale si può scegliere la strada giusta e guidare gli altri alla loro scelta autonoma.[22]

Da ricerche effettuate, risulta evidente come l'illusione ottica fa aumentare la difficoltà degli studenti, di qualsiasi livello scolastico, proprio in riferimento alla domanda "Ci sono più punti nel segmento AB o in CD?"
Vediamo quindi le seguenti immagini:







4.2 Argomento 2: Corrispondenza biunivoca tra insiemi che presentano lo stesso tipo di infinito

L'analisi degli inizi della quantificazione comporta approfondire il problema della corrispondenza; in particolare, Piaget la definisce così:

> Confrontare due quantità significa o mettere in proporzione le loro dimensioni, o porre in corrispondenza i loro elementi termine con termine.[27]

Questa corrispondenza è lo strumento impiegato dalla mente per scomporre le totalità da confrontare fra loro.

Innanzitutto, la scelta dell'argomento è dettata dalle difficoltà dei ragazzi, viste nel capitolo precedente, dovute alla *dipendenza*, alla dipendenza della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici. Infatti, la problematicità sta proprio nel confrontare tra loro gli insiemi infiniti. L'obbiettivo, quindi, che si siamo prefissati, è appunto legato a questo.
Per quanto riguarda la scuola secondaria di primo grado, tenendo sempre a mente ciò che abbiamo proposto nella trattazione dell'attività 4.1, l'attività che vogliamo presentare si rifà al *Paradosso dell'Albergo di Hilbert*.

> Le stanze dell'albergo Finis sono tutte occupate, il numero delle stanze dell'albergo è uguale a quello delle persone ospitate. Si presenta un viaggiatore, purtroppo non c'è modo di assegnargli una stanza, infatti aggiungendo un nuovo visitatore, il numero delle stanze dell'albergo è minore del numero delle persone che desiderano una stanza. Il viaggiatore decide allora di recarsi all'Albergo di Hilbert che ha una caratteristica, dispone di infinite stanze. Purtroppo però, anche queste sono già tutte occupate. Dunque, anche in questo caso, il numero di stanze corrisponde al numero delle persone ospitate. Sembrerebbe che non ci sia posto per il nuovo arrivato. [A questo punto, dico ai ragazzi "Una possibilità di ospitare il nuovo arrivato, c'è! Qual è?" Si lascia alla classe qualche minuto e poi si propone una discussione. Sperando di arrivare alla soluzione, che è la seguente:] il gestore dell'albergo, Hilbert, ha un'idea, chiede ad ogni ospite dell'albergo di spostarsi nella camera successiva. Dato che le stanze sono infinite, ce n'è sempre una successiva, quindi ogni ospite ottiene una stanza. In questo modo Hilbert libera la prima stanza, che può essere assegnata al visitatore. Perciò, osserviamo che il numero delle stanze dell'albergo corrisponde al numero delle persone già ospitate più una.
> Tutte le stanze dell'albergo sono piene, quando purtroppo si presenta all'albergo un gruppo di infiniti viaggiatori.

["C'è un modo per dar loro una sistemazione?" In questo momento, prima di proporre una soluzione ai ragazzi, si lasciano loro nuovamente un paio di minuti per pensare e provare a giungere, da soli, ad una risposta. Anche in questo caso, si procede seguendo un dialogo e accompagnando i ragazzi verso la conclusione. Anche nel seguente caso, si spera di arrivare ad una fine:] Il gestore ha un'altra idea, chiede ad ogni ospite dell'albergo, di spostarsi nella camera con il numero doppio di quello della stanza in cui si trova adesso. Per esempio, l'1 nella 2, il 2 nella 4, il 3 nella 6, ecc. In questo modo si liberano tutte le stanze dispari. Quindi ora ci sono infinite stanze libere, adatte ad accogliere infiniti viaggiatori. Perciò, in conclusione, il numero di stanze corrisponde al numeri di infiniti ospiti più infiniti nuovi viaggiatori.

Presentiamo, dunque, ai ragazzi la seguente immagine:

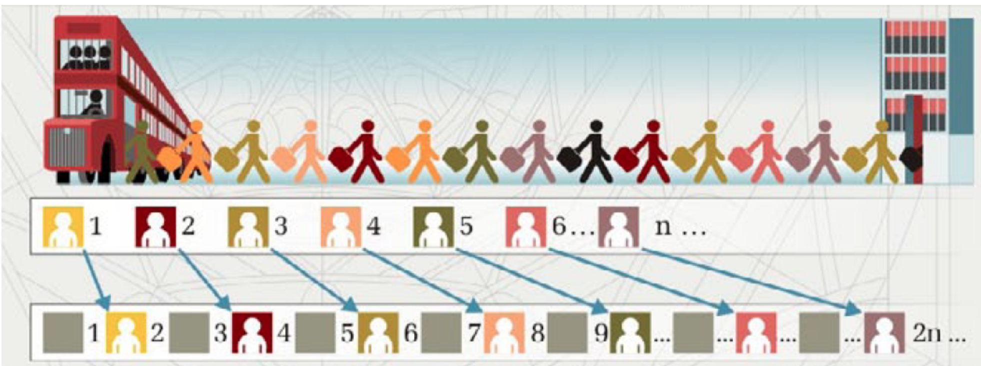


Figura 4.3: Albergo di Hilbert

facendoli lavorare sulla "relazione" che c'è tra i numeri sulla prima riga (i numeri naturali) con i numeri sulla seconda riga (i numeri pari), evidenziandone l'evidente corrispondenza biunivoca.
Abbiamo ritenuto opportuno proporre questo tipo di "indovinello-problema" per due motivi: durante le ore di tirocinio, abbiamo notato che la curiosità dei ragazzi viene stimolata nel momento in cui si propongono loro attività non specificatamente scolastiche, per cui un indovinello rientrava nel contesto; inoltre, l'Albergo di Hilbert concilia la semplicità intuitiva con la difficoltà della dipendenza, citata sopra, infatti è un buon esempio per approfondire la corrispondenza biunivoca tra i numeri pari e i numeri naturali.
A proposito della corrispondenza biunivoca all'interno di un contesto di scuola secondaria di secondo grado, si può proporre la dimostrazione, effettuata da Cantor, per quanto riguarda la numerabilità dell'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$.
Ovviamente, inizialmente, viene sfidata l'intuizione dei ragazzi in un dialogo docente-allievo, come dicevamo precedentemente.
Dopodiché si ripropone la seconda parte della dimostrazione della proposizione 2.2.1.

L'importanza di questa dimostrazione sta nel metodo che viene utilizzato e come tale metodo aiuta gli allievi a prendere consapevolezza di ciò che avevano intuito; inoltre riteniamo essenziali le conclusioni che si possono trarre utilizzando il concetto di corrispondenza biunivoca.

4.3 Conclusioni

L'intenzione iniziale del lavoro di tesi era quella di testare le attività costruite su un pubblico di studenti ma, a causa delle condizioni sanitarie in cui ci siamo trovati ad operare, non mi è stato possibile effettuare la sperimentazione durante il tirocinio.
Ritengo che gli argomenti trattati nell'elaborato e, in particolare le attività del quarto capitolo, siano da considerare un punto di partenza nella trattazione dell'infinito in classe. Per questo, in vista della posizione che assumerò l'anno prossimo all'interno di una scuola secondaria di primo grado come docente, uno degli obiettivi che mi pongo è quello di affrontare con i miei futuri studenti ciò che ho analizzato nella tesi e verificarlo durante il mio insegnamento.

Bibliografia

[1] ABIAN A., *The theory of sets and transfinite arithmetic.* Saunders, (1965)

[2] ARRIGO G., D'AMORE B., SBARAGLI S., *Infiniti infiniti.* Aspetti concettuali e didattici concernenti l'infinito matematico. Edizioni Erickson, (2010)

[3] ASSOCIAZIONE EURESIS, *Da uno a infinito.* Al cuore della matematica. FriMedia, (2010)

[4] BOLONDI G., *Perchè studiare la matematica.* Pearson Italia, (2012)

[5] BROUSSEAU G., *L'échec et le contrat. Recherches en didactique des mathématiques.*, 1980

[6] BROUSSEAU G., PÈRES J., *Le cas Gaël*, Université de Bordeaux, Irem (1981)

[7] BROUSSEAU G., *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica.* Scritti scelti a cura di D'amore. Bologna, Pitagora Editrice, 2008

[8] CASTELNUOVO E., *Didattica della Matematica.* A cura di Arzarello F., Bartolini Bussi M.G. UTET Università, (2017)

[9] CHEVALLARD Y., *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*, La pensée sauvage, Grenoble, 1985

[10] Cornu L., Vergnioux A., *La didactique en questions*, Paris, Hachette, 1992

[11] D'Amore B., *Elementi di didattica della matematica.*, Bologna, Pitagora, (1999)

[12] D'Amore B., *Lingua, Matematica e Didattica.* La matematica e la sua didattica., (2000)

[13] D'Amore B., *Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica.* La matematica e la sua didattica. (2001)

[14] D'Amore B., *La ricerca in Didattica della Matematica come Epistemologia dell'apprendimento della Matematica*, Scuola & Città, (2002)

[15] D'Amore B., *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna, Pitagora, (2003)

[16] D'Amore B., Arrigo G., Estévez M.B. et al, *Il "senso dell'infinito".* La matematica e la sua didattica, (2004)

[17] Duval R., *Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, (1993)

[18] Duval R., *Signe et object (I). Trois grandes étapes dans la problématique des rapports entre representation et objet.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives (1998)

[19] Euler L., *Lettere a una principessa tedesca.* A cura di Cantelli G., Bollati Boringhieri, (2007)

[20] Fischbein E., *Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.). Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna, Zanichelli (1985)

[21] Frank A.B., Di Martino P., Natalini R., Rosolini G., *Didattica della Matematica.* Mondadori Università, (2017)

[22] Freudenthal H., *Ripensando l'Educazione Matematica.* A cura di Manara C.F., Brescia, Editrice La Scuola, (1994)

[23] Maier H., *Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superarle.* Convegno del decennale. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale, Castel San Pietro Terme. Bologna, Pitagora (1996)

[24] Manara R., *La matematica e la realtà.* Linee di metodo. Marietti 1820, (2002)

[25] Ministero dell'istruzione dell'Università e della Ricerca *Indicazioni Nazionali*

[26] Péter R., *Giocando con l'infinito.* Matematica per tutti. BUR Biblioteca Univ. Rizzoli, (2010)

[27] Piaget J., Szeminska A., *La genesi del numero nel bambino.* La Nuova Italia, (1941)

[28] Prodi G., *Analisi Matematica.* Bologna, Monograf, (1970)

[29] Ruaro L.*Cardinalità di insiemi e numeri cardinali.* Tesi di Laurea in Matematica, (2015)

[30] Sbaragli S., *Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". La matematica e la sua didattica.*, (2005)

[31] Sbaragli S., *Le misconcezioni in aula* In: G. Boselli, M. Seganti (eds.). Dal pensare delle scuole: riforme, Roma, Armando Editore, (2006)

[32] Sbaragli S., Santi G., Le scelte dell'insegnante relative al concetto di angolo.*Bollettino dei docenti di matematica.* (2012)

[33] SCINICARELLI F. *Il ruolo delle misconcezioni in Didattica della Matematica: una sperimentazione in classe.* Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, (2019)

[34] STROMBERG K.R., *An introduction to classical real analysis.* Wadsworth International Group, (1981)

[35] VYGOTSKIJ L., *Thought and Language.* Cambridge, MIT Press., [Ed. italiana: 1990, Bari, Laterza], (1962).

[36] ZAN R., *Problemi e convinzioni*, Bologna, Pitagora Editrice, (1998)

[37] ZAN R., *I problemi di matematica. Difficoltà di comprensione e formulazione del testo*, Carocci Faber, (2016)

[38] ZELLINI P., *Breve storia dell'infinito.* Adelphi, (1993)