

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Schemi 0-dimensionali, singolarità e Jacobiano di una curva piana

Tesi di Laurea in Geometria Algebrica

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Monica Idà

Presentata da:
Stefano Canino

Correlatore:
Chiar.mo Prof.
Enrique Arrondo

Sessione Unica
2019/20

*Numquam magnum ingenium
Sine mixtura dementiae fuit*

Indice

Introduzione	5
1 Varietà algebriche e schemi	7
1.1 Insiemi algebrici affini	8
1.2 Insiemi algebrici proiettivi	13
1.3 Funzioni regolari	22
1.4 Schemi affini	26
1.5 Schemi proiettivi	34
1.6 Schemi	37
2 Curve algebriche piane	43
2.1 Il fascio strutturale sullo spazio affine	43
2.2 Moltiplicità di intersezione per curve affini	45
2.3 Moltiplicità d'intersezione per curve proiettive	55
3 Lo schema Jacobiano di una curva piana	61
3.1 Il caso proiettivo	61
3.2 Il caso affine	68
3.3 Il teorema di Mather-Yau	71
3.4 Ideali monomiali	74
3.5 I punti m-pi ordinari	75
3.6 I punti doppi	76
4 I punti tripli	78
4.0.1 Analisi dei punti tripli con una tangente tripla	80
Bibliografia	98

Elenco delle figure

3.1	Rappresentazione grafica di $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$	75
3.2	Rappresentazione grafica di $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{C}))$	76
3.3	Rappresentazione grafica dello schema Jacobiano del punto A_n	77
4.1	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>1</i>	81
4.2	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>2.1</i>	83
4.3	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>2.2</i>	84
4.4	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.1</i>	86
4.5	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3</i>	87
4.6	Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1) \neq 0$	89
4.7	Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_7'(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) \neq 0$	90
4.8	Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_7'(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_8(\lambda_1) \neq 0$	90
4.9	Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_7'(\lambda_1), \varphi_9(\lambda_1) \neq 0$	90
4.10	Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_7'(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) =$ 0 e $\varphi_9(\lambda_1) \neq 0$	91
4.11	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3.1</i>	92
4.12	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3.2.1</i>	93
4.13	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3.2.2</i>	95
4.14	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3.3.1</i>	96
4.15	Poligono di Newton-Puiseux nel caso <i>3.2.3.3.2</i>	97

Introduzione

Questa tesi è stata scritta in parte a Madrid durante un periodo Erasmus presso l'Universidad Complutense, sotto la supervisione del prof. Enrique Arrondo, e in parte a Bologna sotto la supervisione della prof. Monica Idà. Lo scopo della tesi è quello di introdurre agli schemi 0-dimensionali ed alle singolarità di curve algebriche piane.

Nel primo capitolo c'è una breve introduzione alle varietà algebriche e agli schemi affini e proiettivi, che ne richiama le principali definizioni e proprietà ed introduce alcuni degli strumenti utilizzati nel seguito, in particolare: la dimensione di uno schema, la decomposizione primaria minimale di un ideale, la funzione di Hilbert ed il polinomio di Hilbert associati ad un ideale omogeneo.

Nel secondo capitolo, si comincia a parlare delle curve algebriche piane affini e proiettive, che vengono definite come i sottoschemi chiusi affini, rispettivamente proiettivi, associati agli ideali principali di $\mathbb{K}[x, y]$, rispettivamente agli ideali principali omogenei di $\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]$. La molteplicità di una curva \mathcal{C} in un punto P viene definita tramite le derivate parziali e viene successivamente mostrato che essa è, per $n \gg 0$, la dimensione di $\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1}$, dove \mathfrak{M} denota l'ideale massimale del punto nella curva. Si definisce poi la molteplicità di intersezione di due curve affini $f = 0$ e $g = 0$ in un loro punto comune P come la dimensione di $\mathcal{O}_P / (f, g)\mathcal{O}_P$. Nella tesi ho dato una dimostrazione elementare del fatto che se $\mathcal{C} : F = 0$ e $\mathcal{D} : G = 0$ sono proiettive, la molteplicità d'intersezione in un punto delle loro affinizzate può anche essere calcolata tramite la decomposizione primaria minimale ed il polinomio di Hilbert dell'ideale omogeneo (F, G) .

Nel terzo capitolo vengono definiti l'ideale e lo schema Jacobiani di una curva piana sia affine che proiettiva. Si mostra che lo schema Jacobiano è un invariante proiettivo e che lo schema Jacobiano di una curva proiettiva letto in una carta affine è lo schema Jacobiano dell'affinizzata della curva. Successivamente si analizzano diversi esempi di schemi Jacobiani per curve del piano proiettivo, per esempio di unioni di rette, della cubica con un nodo, della quartica con 3 cuspidi e così via. Se la curva è ridotta, il suo schema Jacobiano, che ha supporto sui punti singolari della curva, è uno schema 0-dimensionale; quindi negli esempi precedenti ho cercato, utilizzando CoCoA o Singular, una decomposizione primaria minimale dell'ideale Jacobiano per capire come fosse fatto, e il polinomio di Hilbert di ogni componente dello schema Jacobiano per calcolarne la lunghezza.

In questi esempi si nota che due nodi danno schemi Jacobiani isomorfi, così come due cuspidi di prima specie. Per capirne il motivo si enuncia un teorema di J.N.Mather e S.-T. Yau ([14]), che, insieme a [6], ci dice che germi biolomorfi di curve piane danno schemi Jacobiani isomorfi e viceversa. Questo viene usato per analizzare gli schemi Jacobiani di punti multipli ordinari e di tutti i tipi di punti doppi.

Nel quarto capitolo si studiano i punti tripli di una curva piana: il caso più complicato è naturalmente quello di un punto triplo in cui il cono tangente è una retta tripla. Gli strumenti utilizzati sono le serie di Puiseux e il Poligono di Newton-Puiseux, per i quali si rimanda a [2], e la tecnica di approssimazione con curve lisce razionali via via più osculanti, per la quale si rimanda per esempio a [5].

Capitolo 1

Varietà algebriche e schemi

Per tutta la tesi \mathbb{K} denoterà un campo algebricamente chiuso, salvo diverso avviso.

Se $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, lo stesso simbolo denoterà anche la funzione polinomiale associata ad f . Si osservi che questo è possibile essendo \mathbb{K} algebricamente chiuso e quindi infinito. Quando non si specificherà nulla gli anelli considerati saranno commutativi ed unitari. Inoltre \mathbb{A}^n sarà lo spazio affine n -dimensionale su \mathbb{K} e \mathbb{P}^n sarà lo spazio proiettivo n -dimensionale su \mathbb{K} .

In questo capitolo si introducono prima i concetti di varietà algebriche affini e proiettive e successivamente le loro generalizzazioni, ossia gli schemi. Molte dimostrazioni saranno omesse per non appesantire eccessivamente la trattazione.

Notazione 1.0.1.

La relazione "contenuto o uguale" verrà indicata con il simbolo \subset , mentre la relazione "contenuto strettamente" verrà indicata con il simbolo \subsetneq .

Notazione 1.0.2.

Con le lettere maiuscole si indicheranno i polinomi omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, con le lettere minuscole si indicheranno i polinomi qualunque di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$.

1.1 Insiemi algebrici affini

In questa sezione si introducono le varietà algebriche affini e se ne analizzano alcune proprietà.

Definizione 1.1.1.

Sia $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Poniamo:

$$\mathcal{V}(S) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \forall f \in S\}$$

$X \subset \mathbb{A}^n$ si dice insieme algebrico affine se $\exists S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ tale che $\mathcal{V}(S) = X$.

Osservazione 1.1.2.

Se I è l'ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ generato da $S \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, si può vedere facilmente che $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(S)$. Possiamo quindi considerare solo gli ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ al posto di sottoinsiemi di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ qualunque. Inoltre, se $f_1, \dots, f_t \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, scriviamo $\mathcal{V}(f_1, \dots, f_t)$ anziché $\mathcal{V}((f_1, \dots, f_t))$.

Definizione 1.1.3.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$. Poniamo:

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \forall p \in X\}$$

e diciamo che $\mathcal{I}(X)$ è l'ideale dell'insieme X .

Osservazione 1.1.4.

Valgono le seguenti proprietà degli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} :

- $\mathcal{V}(0) = \mathbb{A}^n$, $\mathcal{V}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]) = \emptyset$
- $S_1 \subset S_2 \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \mathcal{V}(S_1) \supset \mathcal{V}(S_2)$
- $I, J \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ ideali $\Rightarrow \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$
- $\{I_j\}_{j \in J}$ collezione di ideali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow \bigcap_{j \in J} \mathcal{V}(I_j) = \mathcal{V}\left(\sum_{j \in J} I_j\right)$
- $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = (0)$, $\mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
- $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow \mathcal{I}(X_1) \supset \mathcal{I}(X_2)$
- $\{X_j\}_{j \in J}$ collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{A}^n \Rightarrow \mathcal{I}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{I}(X_j)$

- $X, X' \subset \mathbb{A}^n \Rightarrow \mathcal{I}(X \cap X') \supset \mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(X')$

Osservazione 1.1.5.

Dall'osservazione precedente segue che gli insiemi algebrici affini soddisfano gli assiomi dei chiusi di una topologia. Essi definiscono pertanto una topologia su \mathbb{A}^n detta **topologia di Zariski**. Inoltre è possibile mostrare che gli aperti $\mathcal{D}(f) := \mathbb{A}^n \setminus \mathcal{V}(f)$ formano una base per la topologia di Zariski di \mathbb{A}^n al variare di $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Nel seguito \mathbb{A}^n viene sempre considerato con la topologia di Zariski.

Riportiamo ora un teorema che consente di caratterizzare gli ideali associati ad un insieme algebrico affine.

Teorema 1.1.6. (Nullstellensatz)

Sia $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un ideale. Allora $\mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$

Dimostrazione.

Si veda [8] Cap. 4 Teorema 2 □

Si osservi che affinché valga il Nullstellensatz è fondamentale che \mathbb{K} sia algebricamente chiuso.

Osservazione 1.1.7.

Abbiamo definito due operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} che sono "quasi" l'uno l'inverso dell'altro. In particolare se si restringe \mathcal{V} agli ideali radicali e \mathcal{I} agli insiemi algebrici si ha effettivamente $\mathcal{I} = \mathcal{V}^{-1}$, abbiamo cioè una biezione che rovescia le inclusioni:

$$\{\text{Ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \xleftrightarrow[\mathcal{I}]{\mathcal{V}} \{\text{Insiemi algebrici di } \mathbb{A}^n\}$$

Passiamo ora a dare la nozione di decomposizione in irriducibili di un insieme algebrico affine.

Lemma 1.1.8.

Sia X un chiuso non vuoto di uno spazio topologico. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

- i. $X \subset X_1 \cup X_2, \quad X_1, X_2 \text{ chiusi} \Rightarrow X \subset X_1 \vee X \subset X_2$
- ii. $X = X_1 \cup X_2, \quad X_1, X_2 \text{ chiusi} \Rightarrow X = X_1 \vee X = X_2$

iii. Comunque si scelgano due aperti di X non vuoti, la loro intersezione non è vuota

Dimostrazione.

Si veda [1] Lemma 1.10. □

Definizione 1.1.9.

Un chiuso non vuoto X di uno spazio topologico si dice irriducibile se soddisfa una delle tre condizioni equivalenti di 1.1.8.

Definizione 1.1.10.

Un insieme algebrico affine irriducibile è detto varietà affine. Se X è un insieme algebrico affine e $Y \subset X$ è una varietà affine si dice che Y è una sottovarietà affine di X .

Proposizione 1.1.11.

Un insieme algebrico affine X è irriducibile se e solo se $\mathcal{I}(X)$ è primo.

Dimostrazione.

Si veda [1] Proposizione 1.12. □

Teorema 1.1.12.

Ogni insieme algebrico affine $X \subset \mathbb{A}^n$ può essere scritto in un unico modo a meno dell'ordine come unione finita $X = X_1 \cup \dots \cup X_r$ di varietà tali che $X_i \not\subset X_j \forall i \neq j$. Gli X_i sono detti le componenti irriducibili di X .

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 1.14. □

Un modo per trovare la decomposizione in irriducibili di un insieme algebrico affine è utilizzare l'algebra commutativa. L'osservazione fondamentale in tal senso è data dal Teorema della base di Hilbert, il quale ci consente di affermare che $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ è noetheriano ed usare quindi il teorema di decomposizione primaria degli anelli noetheriani.

Definizione 1.1.13.

Sia A un anello e sia $I \subset A$ un suo ideale. I è detto primario se $I \neq A$ e vale:

$$xy \in I, y \notin I \Rightarrow \exists n > 0 \mid x^n \in I$$

Proposizione 1.1.14.

Il radicale di un ideale primario è il più piccolo primo che lo contiene.

Dimostrazione.

Si veda [4], Proposizione 4.1. \square

Osservazione 1.1.15.

Nelle notazioni della definizione precedente, è possibile dimostrare che I è primario se e solo se $A/I \neq 0$ ed ogni divisore dello zero di A/I è nilpotente.

Teorema 1.1.16. (Decomposizione primaria)

Sia I un ideale proprio di un anello noetheriano. Allora I si può scrivere come $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, con I_1, \dots, I_r primari e tali che:

$$\sqrt{I_i} \neq \sqrt{I_j} \quad \forall i \neq j \quad \text{e} \quad \bigcap_{j \neq i} I_j \not\subset I_i$$

Inoltre l'insieme $\{\sqrt{I_1}, \dots, \sqrt{I_r}\}$ è indipendente dalla decomposizione così come sono indipendenti dalla decomposizione gli ideali primari I_i per i quali $\sqrt{I_i}$ è minimale nell'insieme $\{\sqrt{I_1}, \dots, \sqrt{I_r}\}$. La decomposizione $I = I_1 \cap \cdots \cap I_r$ è detta decomposizione primaria minimale di I .

Dimostrazione.

Si veda [4] Teorema 4.5, Corollario 4.11 e Teorema 7.13. \square

Osservazione 1.1.17.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico affine. Per il teorema precedente abbiamo una decomposizione primaria minimale $\mathcal{I}(X) = I_1 \cap \cdots \cap I_r$, che non è unica. Tuttavia passando ai radicali e tenendo conto del fatto che $\mathcal{I}(X)$ è radicale si ha $\mathcal{I}(X) = \sqrt{\mathcal{I}(X)} = \sqrt{I_1 \cap \cdots \cap I_r} = \sqrt{I_1} \cap \cdots \cap \sqrt{I_r}$ (l'ultima uguaglianza segue da [4], Esercizio 1.13) e questa decomposizione è unica poichè i $\sqrt{I_i}$ sono univocamente determinati. Inoltre poichè i $\sqrt{I_i}$ sono primi, si ha che i $\mathcal{V}(\sqrt{I_i})$ sono irriducibili e poichè $\bigcap_{j \neq i} I_j \not\subset I_i \quad \forall i$ si ha che $\mathcal{V}(\sqrt{I_i}) \not\subset \mathcal{V}(\sqrt{I_j}) \quad \forall i \neq j$ e quindi:

$$X = \mathcal{V}(\mathcal{I}(X)) = \mathcal{V}(\sqrt{I_1} \cap \cdots \cap \sqrt{I_r}) = \mathcal{V}(\sqrt{I_1}) \cup \cdots \cup \mathcal{V}(\sqrt{I_r})$$

è la decomposizione in irriducibili di X .

Osservazione 1.1.18.

Dal Nullstellensatz segue (si veda [4] p. 69) che vi è una corrispondenza biunivoca tra i punti di \mathbb{A}^n e gli ideali massimali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Riassumendo quanto visto si ha quindi il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{Ideali radicali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} & \longleftrightarrow & \{\text{Insiemi algebrici di } \mathbb{A}^n\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{Ideali primi di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} & \longleftrightarrow & \{\text{Varietà algebriche di } \mathbb{A}^n\} \\ \cup & & \cup \\ \{\text{Ideali massimali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} & \longleftrightarrow & \{\text{Punti di } \mathbb{A}^n\} \end{array}$$

Osservazione 1.1.19.

Tutti i risultati ottenuti finora possono essere generalizzati rimpiazzando lo spazio affine \mathbb{A}^n con un qualunque insieme algebrico affine $X \subset \mathbb{A}^n$. A tal fine si osservi che due polinomi f e g definiscono la stessa funzione su X se e solo se $f - g \in \mathcal{I}(X)$. È quindi naturale dare le seguenti definizioni, che generalizzano gli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} al caso degli insiemi algebrici affini.

Definizione 1.1.20.

Dato un insieme algebrico affine X si definisce:

$$\Gamma(X) := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] / \mathcal{I}(X)$$

$\Gamma(X)$ è detto anello delle coordinate di X e le sue classi di equivalenza si indicheranno equivalentemente come \bar{f} o $[f]$. Se $p \in X$ e $\bar{f} \in \Gamma(X)$, poniamo $\bar{f}(p) := f(p)$.

Osservazione 1.1.21.

$\Gamma(X)$ è una \mathbb{K} -algebra ed è anche detta, per quanto visto nell'osservazione precedente, la \mathbb{K} -algebra delle funzioni polinomiali su X .

Definizione 1.1.22.

Dati un insieme algebrico affine X e $\bar{A} \subset \Gamma(X)$ si definisce:

$$\mathcal{V}_X(\bar{A}) = \{p \in X \mid \bar{f}(p) = 0 \forall \bar{f} \in \bar{A}\}$$

Definizione 1.1.23.

Dati un insieme algebrico affine X e $Y \subset X$ si definisce:

$$\mathcal{I}_X(Y) = \{\bar{f} \in \Gamma(X) \mid \bar{f}(p) = 0 \forall p \in Y\}$$

Osservazione 1.1.24.

Nelle notazioni delle definizioni precedenti, siano:

$$\pi : \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X) = \Gamma(X)$$

e $A := \pi^{-1}(\overline{A})$. Allora è possibile mostrare facilmente che $\mathcal{V}_X(\overline{A}) = \mathcal{V}(A) \cap X$ e che $\mathcal{I}_X(Y) = \pi(\mathcal{I}(Y))$. Da ciò discende che gli ideali massimali di $\Gamma(X)$ sono in corrispondenza biunivoca con gli ideali massimali di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ che contengono $\mathcal{I}(X)$, cioè essi sono gli ideali della forma $\mathcal{I}_X(p)$ con $p \in X$. Allo stesso modo gli ideali primi di $\Gamma(X)$ corrispondono alle sottovarietà incluse in X , mentre gli ideali primi minimali (rispetto all'inclusione) di $\Gamma(X)$ corrispondono alle componenti irriducibili di X . Dunque $\Gamma(X)$ consente di ricostruire tutte le informazioni sulla varietà X . Questa rappresenterà, come si vedrà, una grossa differenza con gli insiemi algebrici proiettivi, per cui l'ultima affermazione è falsa.

Osservazione 1.1.25.

È possibile mostrare che la categoria degli insiemi algebrici affini su \mathbb{K} è equivalente alla categoria delle \mathbb{K} -algebre ridotte e finitamente generate.

1.2 Insiemi algebrici proiettivi

In questa sezione si introducono le varietà algebriche proiettive e se ne analizzano alcune proprietà. Si noti che, apparentemente, la teoria delle varietà algebriche proiettive dovrebbe essere uguale a quella delle varietà algebriche affini sostituendo gli ideali qualunque con gli ideali omogenei; tuttavia, come si vedrà, questa "piccola" sostituzione genererà importanti differenze.

Proposizione 1.2.1.

Sia $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Allora si ha:

1. Se F è non nullo allora è omogeneo di grado d se e solo se sussiste l'identità:

$$F(tx_0, \dots, tx_n) = t^d F(x_0, \dots, x_n) \quad (1.1)$$

2. (Relazione di Eulero) Se F è omogeneo di grado d allora:

$$\sum_{i=0}^n x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = dF \quad (1.2)$$

Dimostrazione.

Si veda [17] Pag. 453, Proposizione A.12. \square

Osservazione 1.2.2.

Si osservi che non è possibile definire il valore di un polinomio in un punto di \mathbb{P}^n poichè esso dipende dal rappresentante scelto: ad esempio se consideriamo $f(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + x_1 + x_2$ e $[1, 1, 1] = [2, 2, 2] \in \mathbb{P}^2$ si ha $f(1, 1, 1) = 3 \neq 8 = f(2, 2, 2)$. Dunque un polinomio omogeneo non definisce una funzione su \mathbb{P}^n . Tuttavia dalla (1.1) segue che se è possibile dire quando un polinomio omogeneo si annulla in un punto di \mathbb{P}^n e di conseguenza la seguente definizione è ben posta.

Definizione 1.2.3.

Sia $S \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un insieme di polinomi omogenei. Poniamo:

$$\mathcal{V}(S) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0 \forall F \in S\}$$

$X \subset \mathbb{P}^n$ si dice insieme algebrico proiettivo se $\exists S \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ insieme di polinomi omogenei tale che $\mathcal{V}(S) = X$.

Osservazione 1.2.4.

L'osservazione 1.2.2 mette in luce il fatto che, al contrario del caso affine, non è possibile definire l'ideale associato ad un insieme algebrico proiettivo semplicemente come l'insieme dei polinomi di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ che si annullano in tutti i suoi punti poichè la condizione di annullamento in un punto può essere imposta solo se il polinomio è omogeneo e di conseguenza, si avrebbe un insieme formato da soli polinomi omogenei, che però non sarebbe un ideale poichè non sarebbe chiuso rispetto alla somma. La soluzione a questo problema è data dal considerare un particolare tipo di ideali: gli ideali omogenei.

Definizione 1.2.5.

Un anello S è detto anello graduato se il gruppo abeliano $(S, +)$ ha una decomposizione $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ tale che $F \in S_d, G \in S_e \Rightarrow FG \in S_{d+e}$. Gli elementi di S_d vengono detti elementi omogenei di grado d . Un elemento $F \in S$ ha una scrittura unica come $F = F_0 + F_1 + \dots + F_t$, con $F_i \in S_i$; F_i è detto componente (omogenea) di F di grado i .

Lemma 1.2.6.

Sia S un anello graduato e sia I un ideale di S . Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. I ammette un sistema di generatori dato da elementi omogenei
2. $\forall F \in I$, se $F = F_0 + \dots + F_d$ con $F_i \in S_i$, allora $F_i \in I \forall i = 1, \dots, d$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Lemma 2.1. □

Definizione 1.2.7.

Un ideale di un anello graduato che soddisfa una delle due condizioni equivalenti del lemma precedente è detto ideale omogeneo.

Notazione 1.2.8.

Dato un anello graduato S ed un ideale omogeneo $I \subset S$ poniamo $I_d := I \cap S_d$.

Osservazione 1.2.9.

Osserviamo che, dati un anello graduato S ed un ideale omogeneo $I \subset S$, l'anello quoziente S/I possiede anch'esso una naturale struttura di anello graduato. Infatti considerando la mappa naturale $\pi : S \rightarrow \bigoplus_{d \geq 0} S_d/I_d$ si ha $\ker(\pi) = I$ e dunque possiamo scrivere $S/I = \bigoplus_{d \geq 0} S_d/I_d$.

Riassumiamo nella seguente proposizione le principali proprietà degli ideali omogenei.

Proposizione 1.2.10.

Sia S un anello graduato. Allora vale che:

- Somme, prodotti ed intersezioni di ideali omogenei di S sono ancora ideali omogenei.
- Il radicale di un ideale omogeneo di S è un ideale omogeneo.
- Un ideale omogeneo I di S è primo $\Leftrightarrow \forall f, g$ omogenei tali che $fg \in I$ si ha $f \in I \vee g \in I$.

- Dato un ideale omogeneo, è possibile scegliere una sua decomposizione primaria minimale in modo che gli ideali che vi compaiono siano primari omogenei.
- L'unico ideale massimale omogeneo di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è $\mathfrak{M} = (x_0, \dots, x_n)$, detto **ideale irrilevante**.

Dimostrazione.

Per i primi tre punti si veda [12], per il quarto punto si veda [16]. Il quinto punto segue immediatamente dal Nullstellensatz proiettivo. \square

Si può a questo punto dare la definizione di ideale associato ad un insieme algebrico proiettivo.

Definizione 1.2.11.

Sia X un insieme algebrico proiettivo. Posto:

$$T = \{F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid F \text{ omogeneo, } F(p) = 0 \forall p \in X\}$$

si definisce $\mathcal{I}(X)$ come l'ideale di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ generato da T .

Definizione 1.2.12.

Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo. Si chiama cono affine definito da I l'insieme algebrico affine $\mathcal{V}(I) \subset \mathbb{A}^{n+1}$.

Osservazione 1.2.13.

Essendo generato da polinomi omogenei, $\mathcal{I}(X)$ è un ideale omogeneo. Come visto nell'osservazione 1.2.4, a priori non è possibile definire:

$$\mathcal{I}(X) = \{F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid F(p) = 0 \forall p \in X\}$$

Se però si prende come convenzione che dato $f \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, $f = f_1 + \dots + f_d$, $\deg f_i = i$ e $p \in \mathbb{P}^n$ vale $f(p) = 0 \Leftrightarrow f_i(p) = 0 \forall i = 1, \dots, d$ allora le due definizioni sono equivalenti.

Osservazione 1.2.14.

Se I è un ideale omogeneo di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, ha senso scrivere:

$$\mathcal{V}(I) = \{p \in \mathbb{P}^n \mid F(p) = 0 \forall F \in I\}$$

Infatti, essendo $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ noetheriano, per I esiste un insieme finito di generatori omogenei G_1, \dots, G_k , quindi $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(G_1, \dots, G_k)$.

Osservazione 1.2.15.

Alcune proprietà degli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} viste nel caso affine continuano a valere anche nel caso proiettivo. In particolare:

- $\mathcal{V}(0) = \mathbb{P}^n \quad \mathcal{V}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]) = \emptyset$
- $I_1 \subset I_2 \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ideali omogenei $\Rightarrow \mathcal{V}(I_1) \supset \mathcal{V}(I_2)$.
- $I, J \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ideali omogenei $\Rightarrow \mathcal{V}(I) \cup \mathcal{V}(J) = \mathcal{V}(IJ) = \mathcal{V}(I \cap J)$
- $\{I_j\}_{j \in J}$ collezione di ideali omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \Rightarrow \bigcap_{j \in J} \mathcal{V}(I_j) = \mathcal{V}\left(\sum_{j \in J} I_j\right)$
- $\mathcal{I}(\mathbb{A}^n) = (0), \quad \mathcal{I}(\emptyset) = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$
- $X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{P}^2 \Rightarrow \mathcal{I}(X_1) \supset \mathcal{I}(X_2)$
- $\{X_j\}_{j \in J}$ collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{P}^n \Rightarrow \mathcal{I}\left(\bigcup_{j \in J} X_j\right) = \bigcap_{j \in J} \mathcal{I}(X_j)$
- $X, X' \subset \mathbb{P}^n \Rightarrow \mathcal{I}(X \cap X') \supset \mathcal{I}(X) + \mathcal{I}(X')$

In particolare gli insiemi algebrici proiettivi rispettano gli assiomi dei chiusi di una topologia e dunque definiscono, come nel caso affine, la topologia di Zariski, questa volta in \mathbb{P}^n . Anche in questo caso gli aperti $\mathcal{D}(F) = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{V}(F)$, formano una base per la topologia di Zariski di \mathbb{P}^n al variare di F , dove F è omogeneo, $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$.

Altre proprietà degli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} continuano a valere con le dovute accortezze. Un primo esempio è dato dal seguente teorema.

Teorema 1.2.16. (Nullstellensatz proiettivo)

Sia $I \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo. Allora:

- $\mathcal{V}(I) = \emptyset \Leftrightarrow \exists d_0$ tale che I contenga tutti i polinomi omogenei di grado $d \geq d_0 \Leftrightarrow \sqrt{I} = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \vee \sqrt{I} = \mathfrak{M}$.
- $\mathcal{V}(I) \neq \emptyset \Rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{V}(I)) = \sqrt{I}$.
- In ogni caso, se $F \in \mathcal{I}(\mathcal{V}(I))$ è omogeneo e non costante $\Rightarrow \exists m$ tale che $F^m \in I$.

Dimostrazione.

Si veda [12] es. I 2.2. per la prima parte, e si utilizzi il Teorema 1.1.6 per la seconda. \square

Osservazione 1.2.17.

Come messo in evidenza dal Nullstellensatz proiettivo, al contrario di quanto accadeva nel caso affine, un ideale omogeneo può definire l'insieme vuoto anche non essendo l'intero anello $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Ciò corrisponde al fatto che $\mathcal{V}(I)$ può essere il vuoto o perché il cono affine di I è il vuoto o perché è $\{0\} \subset \mathbb{A}^{n+1}$. Tutto quanto precede ci assicura che esiste una corrispondenza biunivoca che rovescia le inclusioni tra l'insieme degli insiemi algebrici proiettivi e l'insieme degli ideali radicali omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ diversi da \mathfrak{M} , data da $X \rightarrow \mathcal{I}(X)$ e $I \rightarrow \mathcal{V}(I)$.

Come nel caso affine, anche in quello proiettivo si definisce il concetto di varietà.

Definizione 1.2.18.

Un insieme algebrico proiettivo irriducibile è detto varietà proiettiva. Se X è un insieme algebrico proiettivo e $Y \subset X$ è una varietà proiettiva, si dice che Y è una sottovarietà proiettiva di X .

Osservazione 1.2.19.

È possibile dimostrare che, analogamente al caso affine, un insieme algebrico proiettivo X è irriducibile se e solo se $\mathcal{I}(X)$ è primo. Non è più vera invece la corrispondenza biunivoca tra punti ed ideali massimali: l'unico ideale massimale omogeneo di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ è infatti quello irrilevante. È possibile tuttavia mostrare che si ha una corrispondenza biunivoca tra punti di \mathbb{P}^n e gli ideali primi omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ tali che non ci sia nessun altro ideale primo omogeneo tra essi e l'ideale irrilevante.

Osservazione 1.2.20.

Anche per gli insiemi algebrici proiettivi si ha l'unicità della decomposizione in irriducibili (a meno dell'ordine). Come nel caso affine, questa può essere individuata utilizzando la decomposizione primaria in maniera analoga a quanto illustrato nell'osservazione 1.1.17, a meno che $X = \emptyset$.

Osservazione 1.2.21.

Facciamo a questo punto un'osservazione semplice, ma cruciale, che consente di mettere in relazione gli insiemi algebrici proiettivi e quelli affini. Siano $U_i = \mathcal{D}(x_i) \subset \mathbb{P}^n$. Consideriamo $X \subset \mathbb{P}^n$ insieme algebrico proiettivo ed un punto $P = [a_0, \dots, a_n] \in \mathbb{P}^n$ che sta in $X \cap U_i$. Poichè $P \in U_i$ si ha $a_i \neq 0$, quindi $P = [\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}]$ e dunque il punto di \mathbb{A}^n corrispondente a P è $p = (\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i})$. Poichè $P \in X$ si ha $F(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 1, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}) \forall F \in \mathcal{I}(X)$. Di conseguenza, posto $f(x_1, \dots, x_n) := F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$, si ha $P \in X \cap U_i \Leftrightarrow f(p) = 0$ per tutti gli f ottenuti al variare di F in $\mathcal{I}(X)$. Si può dimostrare banalmente che, dato un ideale omogeneo I , i polinomi della forma $F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ al variare di F in I formano un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$. Alla luce di tutto ciò si ha quindi che $X \cap U_i$ può vedersi come l'insieme algebrico affine di \mathbb{A}^n definito dall'ideale formato dai polinomi $F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n)$ al variare di F in $\mathcal{I}(X)$.

L'osservazione precedente giustifica dunque le seguenti definizioni.

Definizione 1.2.22.

Dato un polinomio omogeneo $F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si chiama deomogeneizzato di F rispetto a x_i il polinomio $f \in \mathbb{K}[y_1, \dots, y_n]$ definito come:

$$f(y_1, \dots, y_n) := F(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

Definizione 1.2.23.

Dato un ideale omogeneo $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si chiama deomogeneizzato di I rispetto a x_i l'ideale:

$$J := \{F(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_n), F \in I\} \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

Definizione 1.2.24.

Dato un insieme algebrico proiettivo $X \subset \mathbb{P}^n$ sia J il deomogeneizzato di $\mathcal{I}(X)$ rispetto a x_i . Si chiama affinizzato di X rispetto a x_i l'insieme algebrico affine $\mathcal{V}(J) \subset \mathbb{A}^n$.

Molto spesso è utile anche passare da insiemi algebrici affini a insiemi algebrici proiettivi. A tal fine diamo la seguenti definizioni.

Definizione 1.2.25.

Dato un polinomio $f \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ di grado d si chiama omogeneizzato di f rispetto a x_0 il polinomio omogeneo F definito come:

$$F := x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right)$$

Definizione 1.2.26.

Dato un ideale $J \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e posto:

$$S := \left\{ x_0^d f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right), f \in J \right\} \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

si chiama omogeneizzato di J rispetto a x_0 l'ideale di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ generato da S .

Definizione 1.2.27.

Sia

$$\begin{aligned} \phi_n : \quad \mathbb{A}^n &\mapsto \mathbb{P}^n \\ (a_1, \dots, a_n) &\mapsto [1, a_1, \dots, a_n] \end{aligned}$$

la mappa di inclusione di \mathbb{A}^n in \mathbb{P}^n e sia $Y \subset \mathbb{A}^n$. Si chiama chiusura proiettiva di Y e si indica con \bar{Y} la chiusura topologica di $\phi_n(Y)$ rispetto alla topologia di Zariski di \mathbb{P}^n .

Osservazione 1.2.28.

Dato $Y \subset \mathbb{A}^n$ e detto I l'omogeneizzato di $\mathcal{I}(Y)$, si dimostra che la chiusura proiettiva di Y è l'insieme algebrico proiettivo $\mathcal{V}(I) \subset \mathbb{P}^n$.

Osservazione 1.2.29.

Tramite l'omogeneizzazione e la deomogeneizzazione di polinomi è possibile passare dall'affine al proiettivo e viceversa, tuttavia bisogna fare attenzione al fatto che non sempre ideali omogenei diversi hanno deomogeneizzati diversi. Può succedere infatti che, anche considerando tutte le possibili deomogeneizzazioni rispetto alle coordinate, ideali omogenei diversi abbiano tutti i deomogeneizzati uguali. A tal fine si introduce la saturazione di un ideale omogeneo. Per farlo è necessaria la seguente proposizione.

Proposizione 1.2.30.

Siano $I, I' \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ ideali omogenei. Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni:

1. I deomogeneizzati di I ed I' rispetto a x_i sono uguali $\forall i = 0, \dots, n$.
2. $\forall F \in I \exists m \in \mathbb{N} \mid x_i^m F \in I' \forall i = 0, \dots, n$ e $\forall F' \in I' \exists m' \in \mathbb{N} \mid x_i^{m'} F' \in I \forall i = 0, \dots, n$.
3. $\exists d_0 \in \mathbb{N} \mid I_d = I'_d \forall d \geq d_0$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Proposizione 2.8. □

Definizione 1.2.31.

Dato un ideale omogeneo $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ si chiama saturazione di I l'ideale omogeneo:

$$\text{sat}(I) := \{F \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \mid \exists m \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_i^m F \in I \forall i = 0, \dots, n\}$$

Un ideale omogeneo è detto saturo se coincide con la sua saturazione.

Osservazione 1.2.32.

Per la precedente proposizione, due ideali omogenei hanno tutti i deomogeneizzati uguali se e solo se hanno la stessa saturazione, di conseguenza la saturazione di un ideale omogeneo può anche essere vista come il più grande ideale omogeneo che ha tutti i deomogeneizzati uguali all'ideale di partenza. Combinando il punto 1 del Nullstellensatz proiettivo ed il punto 3 della proposizione precedente inoltre si deduce che un ideale omogeneo definisce l'insieme algebrico proiettivo vuoto se e solo se la sua saturazione è $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. Si vede quindi subito che la saturazione di un ideale è uno strumento molto utile per confrontare ideali omogenei differenti. Non sempre però è semplice vedere qual è la saturazione di un ideale omogeneo, ma esistono degli algoritmi per farlo ed è dunque possibile utilizzare dei software di calcolo simbolico.

La saturazione di un ideale omogeneo interviene anche nella sua decomposizione primaria e può essere utilizzata quando si analizzano le componenti di un insieme algebrico proiettivo, come messo in luce dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.2.33.

Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo proprio. Allora la saturazione di I è l'intersezione di tutte le componenti primarie di I il cui radicale non è \mathfrak{M} .

Dimostrazione.

Si veda [1] Proposizione 2.11. □

Diamo ora una definizione analoga a quella di anello delle coordinate data per gli insiemi algebrici affini.

Definizione 1.2.34.

Dato un insieme algebrico proiettivo $X \subset \mathbb{P}^n$, si definisce:

$$S(X) := \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$$

$S(X)$ è detto anello delle coordinate omogenee di X e le sue classi di equivalenza si indicheranno equivalentemente come \bar{f} o $[f]$.

Osservazione 1.2.35.

Al contrario di quanto accadeva nel caso affine, $S(X)$ non può considerarsi come l'anello delle funzioni polinomiali su X poichè, come visto, un polinomio omogeneo non definisce una funzione su un insieme algebrico proiettivo.

Osservazione 1.2.36.

È possibile mostrare attraverso degli esempi che, al contrario di quanto accadeva nell'affine, non è possibile ricostruire tutte le informazioni di X a partire da $S(X)$. Si veda ad esempio [1] pag. 20, Esempio 2.14 .

1.3 Funzioni regolari

Vogliamo a questo punto introdurre il concetto di funzione regolare su un insieme algebrico (affine o proiettivo), attraverso il quale potremo definire i morfismi tra insiemi algebrici.

Definizione 1.3.1.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico affine e sia $U \subset X$ un suo aperto. Una funzione $\varphi: U \rightarrow \mathbb{K}$ si dice regolare in $x \in U$ se esistono $\bar{f}, \bar{g} \in \Gamma(X)$ ed un aperto $V \subset U \cap \mathcal{D}_X(\bar{g})$, $x \in V$, tale che $\varphi|_V = \frac{\bar{f}}{\bar{g}}$. Indichiamo con $\mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni regolari $U \rightarrow \mathbb{K}$ regolari in ogni punto di U .

La definizione appena data si adatta agli insiemi algebrici proiettivi come segue.

Definizione 1.3.2.

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un insieme algebrico proiettivo e sia $U \subset X$ un suo aperto. Una funzione $\varphi: U \rightarrow \mathbb{K}$ si dice regolare in $x \in U$ se esistono $\overline{F}, \overline{G} \in S(X)$, omogenei e dello stesso grado, ed un aperto $V \subset U \cap \mathcal{D}_X(\overline{G})$, $x \in V$, tale che $\varphi|_V = \frac{\overline{F}}{\overline{G}}$. Indichiamo con $\mathcal{O}(U)$ l'insieme delle funzioni regolari $U \rightarrow \mathbb{K}$ regolari in ogni punto di U .

Osservazione 1.3.3.

Nella precedente definizione abbiamo dovuto chiedere che \overline{F} e \overline{G} fossero dello stesso grado poichè questo garantisce che la corrispondente funzione razionale sia ben definita sui punti di X .

Enunciamo ora alcuni teoremi che saranno utili in seguito. Per farlo servono alcuni richiami di algebra commutativa, in particolare sulle localizzazioni di anelli.

Definizione 1.3.4.

Dato un anello A , un suo sottoinsieme $S \subset A$ si dice sistema moltiplicativo se:

- $1 \in S$
- $s, t \in S \Rightarrow st \in S$

Definizione 1.3.5.

Dato un anello A ed un sistema moltiplicativo $S \subset A$ si chiama localizzazione di A rispetto a S il quoziente:

$$S^{-1}A : (A \times S) / \sim \text{ dove } (a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow \exists u \in S \mid u(at - bs) = 0$$

$S^{-1}A$ è un anello definendo su di esso le operazioni $(a, s) + (b, t) = (at + bs, st)$ e $(a, s) \cdot (b, t) = (ab, st)$. La classe di equivalenza $[(a, s)]$ verrà indicata come $\frac{a}{s}$.

Esempio 1.3.6.

Dato un anello A importanti esempi di sistemi moltiplicativi di A sono i seguenti:

- $S = \{f^n\}_{n \geq 0}$, dove $f \in A$. In tal caso si scrive $S^{-1}A = A_f$.

- $S = A \setminus \mathfrak{p}$ dove \mathfrak{p} è un ideale primo di A . In tal caso si scrive $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$ e si dice che $A_{\mathfrak{p}}$ è la localizzazione di A in \mathfrak{p} . L'anello $A_{\mathfrak{p}}$ ha un unico ideale massimale, che è $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, pertanto $A_{\mathfrak{p}}$ è un anello locale.

Definizione 1.3.7.

Siano A e B anelli locali e siano \mathfrak{M}_A e \mathfrak{M}_B i loro rispettivi ideali massimali. Un morfismo $\varphi: A \rightarrow B$ è detto locale se $\varphi^{-1}(\mathfrak{M}_B) = \mathfrak{M}_A$.

Notazione 1.3.8.

Dati un anello graduato S , $\mathfrak{p} \subset S$ ideale primo omogeneo ed $F \in S$ elemento omogeneo, indichiamo con $S_{(\mathfrak{p})}$ e con $S_{(F)}$ i sottoanelli, rispettivamente di $S_{\mathfrak{p}}$ e di S_F , formati dalle frazioni i cui numeratori e denominatori sono elementi omogenei dello stesso grado. Tale notazione risulta comoda quando si parla di funzioni regolari nel proiettivo, essendo esse definite da funzioni razionali i cui numeratori e denominatori hanno uguale grado.

Teorema 1.3.9.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico affine e sia $\bar{f} \in \Gamma(X)$, $\bar{f} \neq 0$. Allora esiste un isomorfismo naturale di \mathbb{K} -algebre $\Gamma(X)_{\bar{f}} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{D}_X(\bar{f}))$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 3.3. □

Teorema 1.3.10.

Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ un insieme algebrico proiettivo e sia $\bar{F} \in S(X)$ un elemento omogeneo di grado positivo. Allora esiste un isomorfismo naturale di \mathbb{K} -algebre $S(X)_{(\bar{F})} \rightarrow \mathcal{O}(\mathcal{D}_X(\bar{F}))$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 3.4. □

Teorema 1.3.11.

Sia X un insieme algebrico affine o proiettivo e sia $Y \subset X$ una sottovarietà. Consideriamo l'insieme delle coppie (U, f) , dove $U \subset X$ è un aperto che interseca Y ed f è una funzione regolare su U . Su questo insieme definiamo la relazione $(U, f) \sim (U', f')$ se e solo se esiste un aperto non vuoto $U'' \subset U \cap U'$ che interseca Y e tale che $f|_{U''} = f'|_{U''}$. Allora:

1. La relazione \sim è di equivalenza e l'insieme delle classi di equivalenza, indicato con $\mathcal{O}_{X,Y}$, è un anello locale il cui anello massimale è l'insieme delle funzioni regolari che si annullano su Y .
2. $\forall U \subset X$ aperto, $U \cap Y \neq \emptyset$ la mappa di restrizione $\mathcal{O}_{X,Y} \rightarrow \mathcal{O}_{U,Y \cap U}$ è un isomorfismo.
3. Se X è un insieme algebrico affine allora la mappa $\Gamma(X)_{\mathcal{I}_X(Y)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$, che manda $\frac{\bar{f}}{\bar{g}}$ nella classe di $(\mathcal{D}_X(\bar{g}), \frac{\bar{f}}{\bar{g}})$ è un isomorfismo.
4. Se X è un insieme algebrico proiettivo allora la mappa $S(X)_{(\mathcal{I}_X(Y))} \rightarrow \mathcal{O}_{X,Y}$, che manda $\frac{\bar{F}}{\bar{G}}$ nella classe di $(\mathcal{D}_X(\bar{G}), \frac{\bar{F}}{\bar{G}})$ è un isomorfismo.
5. L'anello $\mathcal{O}_{X,Y}$ è un dominio se e solo se X ha un'unica componente irriducibile contenente Y .

Dimostrazione.

Si veda [1] Proposizione 3.9. □

Definizione 1.3.12.

Nelle notazioni del teorema precedente, se Y è un punto $p \in X$, l'anello $\mathcal{O}_{X,p}$ è detto anello dei germi di funzioni regolari nel punto p . Se X è irriducibile $\mathcal{O}_{X,X}$ è un campo, detto campo delle funzioni razionali su X ed indicato con $\mathcal{K}(X)$.

Possiamo a questo punto dare la definizione di morfismo tra varietà.

Definizione 1.3.13.

Siano X e Y due varietà algebriche. Un morfismo tra X e Y è una mappa continua $\varphi: X \rightarrow Y$ tale che $\forall V \subset Y$ aperto e per ogni $f \in \mathcal{O}_Y(V)$ si abbia $f \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(V)} \in \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(V))$. Un isomorfismo tra X e Y è un morfismo che ammette un'inversa, che è a sua volta un morfismo.

Osservazione 1.3.14.

Nella definizione di isomorfismo appena data non è sufficiente chiedere solo che il morfismo sia invertibile poichè esistono morfismi di varietà invertibili la cui inversa non è un morfismo.

1.4 Schemi affini

In questa sezione si introduce il concetto di schema affine, che è un primo passo verso la definizione generale di schema. Per farlo serviranno alcuni strumenti, come i fasci e gli spettri di anelli; diamo quindi le prime definizioni sull'argomento.

Definizione 1.4.1.

Sia X uno spazio topologico. Un prefascio di anelli su X è una mappa \mathcal{F} dall'insieme degli aperti di X all'insieme degli anelli, che soddisfa le seguenti condizioni:

1. $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$.
2. Se U e V sono aperti di X tale che $V \subset U$ allora esiste un omomorfismo di anelli, detto mappa di restrizione da U a V , $\rho_{UV}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$. Quando ciò non causerà ambiguità, si scriverà $\rho_{UV}(s) = s|_V$.
3. Per ogni aperto $U \subset X$ l'omomorfismo ρ_{UU} è l'identità.
4. Se U, V, W sono aperti tale che $W \subset V \subset U$ allora $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

Gli elementi di $\mathcal{F}(U)$ sono dette sezioni di \mathcal{F} su U .

Definizione 1.4.2.

Dato uno spazio topologico X , un aperto $U \subset X$ ed un prefascio \mathcal{F} su X , la restrizione di \mathcal{F} a U è definita come $\mathcal{F}|_U(U') = \mathcal{F}(U')$ per ogni sottoinsieme aperto $U' \subset U$.

Definizione 1.4.3.

Siano X uno spazio topologico, \mathcal{F} un prefascio su X e $p \in X$. Sull'insieme delle coppie (U, s) con U intorno aperto di p e $s \in \mathcal{F}(U)$ si definisce la relazione di equivalenza $(U, s) \sim (U', s') \Leftrightarrow \exists U'' \subset U \cap U'$ intorno di p tale che $s|_{U''} = s'|_{U''}$. Tale insieme quozientato rispetto alla relazione di equivalenza appena descritta è un anello, indicato con \mathcal{F}_p , ed è detto spiga di \mathcal{F} in p .

Definizione 1.4.4.

Dato uno spazio topologico X e due prefasci su X , \mathcal{F} e \mathcal{F}' , un morfismo di prefasci $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ è una collezione di omomorfismi $\varphi(U): \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$

al variare di U negli aperti di X che sia compatibile con i morfismi di restrizione ρ e ρ' , cioè tale che per ogni coppia di aperti di X , U e V , tali che $U \subset V$ il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \mathcal{F}'(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

Un isomorfismo di prefasci è un morfismo di fasci tale che ogni morfismo $\varphi(U)$ sia un isomorfismo.

Osservazione 1.4.5.

Sia X uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ un morfismo di prefasci. Allora $\forall p \in X$ φ induce sulle spighe un omomorfismo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}'_p$ definito come $\varphi_p([(U, s)]) = [(U, \varphi(U)(s))]$.

Definizione 1.4.6.

Sia X uno spazio topologico e sia \mathcal{F} un prefascio su X . Diciamo che \mathcal{F} è un fascio su X se soddisfa anche la seguente proprietà: dato un aperto $U \subset X$, e un suo ricoprimento aperto $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ tale che $\forall i \in I \exists s_i \in \mathcal{F}(U_i) \mid s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \forall i, j \in I$ allora $\exists! s \in \mathcal{F}(U)$ tale che $s|_{U_i} = s_i \forall i \in I$.

Tutte le definizioni date finora per un prefascio valgono anche per un fascio. Dato un fascio su uno spazio topologico ed una mappa continua con dominio in tale spazio è inoltre possibile definire un fascio sullo spazio d'arrivo come indicato dalla seguente definizione.

Definizione 1.4.7.

Siano X, X' spazi topologici, $\varphi : X \rightarrow X'$ una mappa continua e \mathcal{F} fascio su X . Si chiama immagine diretta di \mathcal{F} il fascio $\varphi_* \mathcal{F}$ su X' definito come segue: $(\varphi_* \mathcal{F})(U') = \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U')) \forall U'$ aperto di X' , con mappe di restrizione $\rho'_{U', V'} := \rho_{\varphi^{-1}(U'), \varphi^{-1}(V')} \forall V' \subset U'$ aperti di X' .

Osservazione 1.4.8.

Consideriamo una mappa continua $\varphi : X \rightarrow X'$ ed un fascio \mathcal{F} su X . Prendiamo poi $p \in X$ e $U' \subset X'$ intorno aperto di $\varphi(p)$. Poichè $\varphi^{-1}(U')$ è un

intorno aperto di p abbiamo il seguente omomorfismo tra le spighe:

$$\begin{aligned} \alpha_p: (\varphi_*\mathcal{F})_{\varphi(p)} &\rightarrow \mathcal{F}_p \\ [(U', s')] &\rightarrow [(\varphi^{-1}(U'), s')] \end{aligned}$$

L'omomorfismo α_p ci servirà per definire successivamente i morfismi nella categoria degli spazi localmente anulati.

Il nostro scopo a questo punto è quello di definire una struttura di fascio su un particolare tipo di spazi topologici: gli spettri di anelli.

Definizione 1.4.9.

Dato un anello A si chiama spettro di A l'insieme $\text{Spec}(A)$ formato da tutti gli ideali primi di A .

Osservazione 1.4.10.

Per poter definire un fascio sullo spettro di un anello bisogna munire quest'ultimo di una topologia. Per farlo possiamo ispirarci alla topologia di Zariski definita negli spazi affini e proiettivi. Osserviamo che un polinomio si annulla in un punto, o più in generale su un insieme irriducibile, se e solo se sta nell'ideale massimale del punto, o nell'ideale primo dell'insieme irriducibile. Sulla base di questa osservazione possiamo quindi generalizzare gli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} agli spettri di anelli.

Definizione 1.4.11.

Sia A un anello e sia $S \subset A$. Si definisce:

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid f \in \mathfrak{p} \ \forall f \in S\} = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A) \mid S \subset \mathfrak{p}\}$$

Definizione 1.4.12.

Sia A un anello e sia $X \subset \text{Spec}(A)$. Si definisce:

$$I(X) := \{f \in A \mid f \in \mathfrak{p} \ \forall \mathfrak{p} \in X\} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in X} \mathfrak{p}$$

Osservazione 1.4.13.

È chiaro anche in questo caso che se I è l'ideale generato da $S \subset A$ si ha $V(I) = V(S)$. Valgono inoltre, con le dovute accortezze, proprietà analoghe a quelle già viste per gli operatori \mathcal{V} e \mathcal{I} . Più precisamente:

- $V(0) = \text{Spec}(A)$, $V(A) = \emptyset$
- $I, J \in A$ ideali $\Rightarrow V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$
- $\{I_j\}_{j \in J}$ collezione di ideali di $A \Rightarrow \bigcap_{j \in J} V(I_j) = V\left(\sum_{j \in J} I_j\right)$
- $I(\text{Spec}(A)) = \sqrt{(0)}$
- $X_1, X_2 \subset \text{Spec}(A) \Rightarrow I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$
- $X_1, X_2 \subset \text{Spec}(A) \Rightarrow I(X_1 \cap X_2) \supset I(X_1) + I(X_2)$
- $J \subset A$ ideale $\Rightarrow I(V(J)) = \sqrt{J}$

Ancora una volta quindi gli insiemi della forma $V(S)$ soddisfano gli assiomi dei chiusi di una topologia e possiamo quindi dare la seguente definizione.

Definizione 1.4.14.

Dato un anello A , si chiama topologia di Zariski di $\text{Spec}(A)$ quella i cui chiusi sono gli insiemi della forma $V(S)$. Nel seguito l'insieme $\text{Spec}(A)$ verrà sempre considerato come spazio topologico con la topologia di Zariski.

Diamo a questo punto due utili risultati sulla topologia appena definita.

Proposizione 1.4.15.

Sia A un anello e sia $\mathfrak{p} \in \text{Spec}(A)$. Allora la chiusura di $\{\mathfrak{p}\}$ è $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$. In particolare $\{\mathfrak{p}\}$ è chiuso se e solo se \mathfrak{p} è un ideale massimale.

Dimostrazione.

Si veda [1] Lemma 3.18. □

Proposizione 1.4.16.

Sia A un anello e sia $X = \text{Spec}(A)$. Allora gli insiemi della forma $D(f) := X \setminus V(f)$, $f \in A$ formano una base per la topologia di Zariski di X .

Dimostrazione.

Si veda [1] Lemma 3.22. □

Possiamo a questo punto definire un fascio sullo spettro di un anello mediante il seguente teorema.

Teorema 1.4.17.

Sia A un anello e sia $X = \text{Spec}(A)$. Allora:

- L'assegnazione $D(f) \rightarrow A_f$ definisce un fascio su X indicato con \mathcal{O}_X .
- $\forall \mathfrak{p} \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ è isomorfa a $A_{\mathfrak{p}}$ mediante il seguente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} A_{\mathfrak{p}} & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \\ \frac{g}{f} & \rightarrow & \left[\left(D(f), \frac{g}{f} \right) \right] \end{array}$$

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 3.23. □

Osservazione 1.4.18.

Il teorema precedente potrebbe apparire "incompleto", poichè il fascio \mathcal{O}_X sembra assegnare un anello solo agli aperti della forma $D(f)$ di $\text{Spec}(A)$. Tuttavia è possibile mostrare che dato uno spazio topologico Y ed una sua base di aperti \mathcal{B} , un assegnamento da \mathcal{B} all'insieme degli anelli, che soddisfa gli assiomi di fascio si estende in maniera unica ad un fascio su Y . Dunque, combinando quanto detto col fatto che gli aperti $D(f)$ formano una base della topologia di Zariski di $\text{Spec}(A)$ si ha che in effetti \mathcal{O}_X è un fascio su X . Si potrebbe anche scrivere esplicitamente com'è fatto $\mathcal{O}_X(U)$ per un qualunque aperto $U \subset \text{Spec}(A)$ ma non è utile ai fini di questa tesi.

Per dare la definizione di schema affine dobbiamo infine introdurre gli spazi anulati.

Definizione 1.4.19.

Uno spazio anulato è una coppia (X, \mathcal{O}_X) , dove X è uno spazio topologico e \mathcal{O}_X è un fascio di anelli. Uno spazio anulato (X, \mathcal{O}_X) si dice localmente anulato se $\forall p \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale.

Osservazione 1.4.20.

Segue immediatamente dal teorema 1.4.17 che, dato un anello A ed indicato con $\mathcal{O}_{\text{Spec}(A)}$ il fascio costruito nel teorema citato, detto **fascio strutturale**, si ha che $(\text{Spec}(A), \mathcal{O}_{\text{Spec}(A)})$ è uno spazio localmente anulato. D'ora in poi, se non diversamente specificato, quando parleremo di spettro di un anello lo intenderemo sempre munito del suo fascio strutturale.

Definizione 1.4.21.

Siano (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) due spazi anulati. Un morfismo di spazi anulati è una coppia (φ, ψ) tale che:

- $\varphi: X \rightarrow Y$ è una mappa continua.
- $\psi: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$ è un morfismo di fasci.

Un isomorfismo di spazi anulati è un morfismo di spazi anulati invertibile la cui inversa è un morfismo di spazi anulati.

Definizione 1.4.22.

Siano (X, \mathcal{O}_X) e (Y, \mathcal{O}_Y) due spazi localmente anulati. Un morfismo di spazi localmente anulati è una coppia (φ, ψ) tale che:

- (φ, ψ) è un morfismo di spazi anulati.
- Dette ψ_p e α_p gli omomorfismi costruiti come indicato rispettivamente nelle osservazioni 1.4.5 e 1.4.8 si ha che:

$$\alpha_p \circ \psi_p: \mathcal{O}_{Y, \varphi(p)} \rightarrow (\varphi_*\mathcal{O}_X)_{\varphi(p)} \rightarrow \mathcal{O}_{X, p}$$

è un omomorfismo locale di anelli locali $\forall p \in X$.

Un isomorfismo di spazi localmente anulati è un morfismo di spazi localmente anulati invertibile la cui inversa è un morfismo di spazi localmente anulati.

Osservazione 1.4.23.

È possibile mostrare che se ψ è un isomorfismo di fasci la seconda richiesta della definizione 1.4.22 segue automaticamente e quindi non necessita di essere verificata. Di conseguenza per trovare un isomorfismo tra due spazi anulati X e Y è sufficiente trovare un omeomorfismo $\varphi: X \rightarrow Y$ ed un isomorfismo di fasci $\psi: \mathcal{O}_Y \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_X$.

Possiamo finalmente dare la definizione di schema affine.

Definizione 1.4.24.

Uno schema affine è uno spazio localmente anulato isomorfo, come spazio localmente anulato, allo spettro di un anello.

Osservazione 1.4.25.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico affine e sia $I = \mathcal{I}(X) \subset R = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ il suo ideale. Abbiamo allora $\Gamma(X) = R/I$ e vogliamo capire com'è fatto $\text{Spec}(\Gamma(X))$. Osserviamo che possiamo scrivere:

$$\text{Spec}(\Gamma(X)) = \underbrace{\{\text{Ideali massimali di } \Gamma(X)\}}_M \cup \underbrace{\{\text{Ideali primi ma non massimali di } \Gamma(X)\}}_P$$

e che sussistono le seguenti relazioni biunivoche:

$$\{\text{Ideali primi di } \Gamma(X)\} \longleftrightarrow \{\text{Ideali primi di } R \text{ che contengono } I\}$$

$$\{\text{Ideali massimali di } \Gamma(X)\} \longleftrightarrow \{\text{Ideali massimali di } R \text{ che contengono } I\}$$

da cui, sfruttando il fatto che se un ideale è massimale è anche primo, si ha:

$$\{\text{Ideali p. ma non m. di } \Gamma(X)\} \longleftrightarrow \{\text{Ideali p. ma non m. di } R \text{ che contengono } I\}$$

Usando infine che gli ideali massimali di R che contengono I corrispondono ai punti di X e che gli ideali primi ma non massimali di R che contengono I corrispondono alle sottovarietà di X che non sono punti di X si ha:

$$M \longleftrightarrow \{\text{Punti di } X\} \quad P \longleftrightarrow \{\text{Sottovarietà che non sono punti di } X\}$$

e dunque:

$$\text{Spec}(\Gamma(X)) \longleftrightarrow \{\text{Punti di } X\} \cup \{\text{Sottovarietà che non sono punti di } X\}$$

Nel caso particolare in cui X è irriducibile, cioè X è una varietà algebrica affine, I è primo e di conseguenza tra gli ideali primi di R che contengono I c'è ovviamente anche I stesso, che corrisponde all'ideale nullo di $\Gamma(X)$: questo ideale rappresenta un punto particolare detto **punto generico**, la cui chiusura è l'intero $\text{Spec}(\Gamma(X))$. Se invece X è riducibile, i primi minimali di $\text{Spec}(\Gamma(X))$ sono in corrispondenza biunivoca con le componenti irriducibili di X . Se \mathfrak{p}_j è un primo minimale, $\overline{\{\mathfrak{p}_j\}}$ dà tutti i punti, chiusi e non, della componente irriducibile corrispondente. In ogni caso si può dimostrare che M con la topologia di Zariski indotta da $\text{Spec}(\Gamma(X))$ e X sono omeomorfi: si deduce quindi che gli schemi affini sono una generalizzazione degli insiemi algebrici affini. Come abbiamo visto, se X è un insieme algebrico affine

$\text{Spec}(\Gamma(X))$ si ottiene aggiungendo ad X dei punti, che non sono chiusi e che rappresentano tutte le sottovarietà di X .

A tal proposito è interessante osservare che, dai teoremi 1.3.9 e 1.4.17 segue $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\Gamma(X))}(D(f)) = \Gamma(X)_{\bar{f}} \cong \mathcal{O}(\mathcal{D}_X(\bar{f}))$. Si ha quindi che, nel caso in cui l'anello considerato sia l'anello delle coordinate di un insieme algebrico affine, le sezioni del fascio strutturale sono le funzioni regolari sugli aperti. Allo stesso modo, usando il teorema 1.3.11, si vede che le spighe del fascio strutturale sono gli anelli dei germi delle funzioni regolari in un punto.

Esempio 1.4.26.

Consideriamo $X = \mathbb{A}^2$. Per quanto detto nell'osservazione precedente, e considerando che $\mathcal{I}(X) = (0) \subset \mathbb{K}[x, y]$, i punti di X visto come schema $\text{Spec}(\mathbb{K}[x, y])$ sono:

- Gli ideali massimali di $\mathbb{K}[x, y]$, che corrispondono ai punti di X come spazio affine.
- Gli ideali primi, ad eccezione di quello banale, di $\mathbb{K}[x, y]$, che corrispondono alle curve irriducibili di \mathbb{A}^2 .
- L'ideale primo $(0) \subset \mathbb{K}[x, y]$, che è il punto generico.

Quando guardiamo il piano affine come schema dunque stiamo considerando come punti non solo quelli usuali ma anche le curve irriducibili ed il punto generico.

Esempio 1.4.27.

Consideriamo ora $P = (0, 0) \in \mathbb{A}^2$. Poniamo $I := \mathcal{I}(P) = (x, y)$, $J := (x, y)^2 = (x^2, xy, y^2)$ e $A = \mathbb{K}[x, y]/J$. Si ha $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J) = P$ ma vediamo che vi sono delle differenze tra $X = \text{Spec}(\Gamma(P))$ e $Y = \text{Spec}(A)$ mettendoli a confronto:

- X ha un unico punto (chiuso), che è $\mathfrak{p} := (0) \subset \Gamma(P) \cong \mathbb{K}$, ed anche Y ha un unico punto (chiuso anch'esso) che è $\mathfrak{q} := (\bar{x}, \bar{y}) \subset A$. Come spazi topologici dunque i due spettri sono omeomorfi.
- $\mathcal{O}_X(\mathfrak{p}) = \Gamma(P)_{\bar{1}} \cong \Gamma(P) \cong \mathbb{K}$, cioè il fascio strutturale di X , come visto nell'osservazione 1.4.25, associa al suo unico punto, che è anche

il suo unico aperto non vuoto, l'anello delle sue funzioni regolari, che in questo caso coincidono con le costanti. Invece $\mathcal{O}_Y(\mathfrak{q}) = A_{\bar{1}} \cong A = \{a + b\bar{x} + c\bar{y} ; a, b, c, \in \mathbb{K}\}$

Notiamo quindi che nonostante X ed Y siano entrambi formati da un punto, il fascio strutturale permette di distinguerli e fornisce dunque delle informazioni aggiuntive. In particolare per determinare un elemento di $\mathcal{O}_X(\mathfrak{p})$ è sufficiente assegnare un $a \in \mathbb{K}$ mentre per conoscerne uno di $\mathcal{O}_Y(\mathfrak{q})$ sono necessari due valori aggiuntivi $b, c \in \mathbb{K}$. Questo corrisponde al fatto che I è l'ideale formato da tutti i polinomi di $\mathbb{K}[x, y]$ privi di termine noto, ossia le curve di \mathbb{A}^2 che passano per P , mentre J è l'ideale che contiene tutti i polinomi di $\mathbb{K}[x, y]$ privi di termine noto e di termini di grado 1, ossia le curve di \mathbb{A}^2 che passano per P ed hanno un punto singolare in P . Alla luce di ciò il valore a è da interpretarsi come il valore della funzione nel punto P mentre $b\bar{x} + c\bar{y}$ è da interpretarsi come una direzione tangente. Lo schema X rappresenta quindi il punto P mentre lo schema Y rappresenta il punto P e tutte le direzioni tangenti uscenti da P .

Quanto visto nell'esempio precedente è la descrizione dello schema formato dal primo intorno infinitesimale di P . Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione 1.4.28.

Sia $p \in \mathbb{A}^2$. Si chiama n -esimo intorno infinitesimale di p lo schema $\text{Spec}(\mathbb{K}[x, y]/\mathcal{I}(p)^{n+1})$.

1.5 Schemi proiettivi

Così come ripercorrendo la teoria degli insiemi algebrici affini, ed adattandola dove necessario, è stato possibile definire la teoria degli insiemi algebrici proiettivi, allo stesso modo ripercorrendo ed adattando la teoria degli schemi affini è possibile definire la teoria degli schemi proiettivi: anche in questo caso le differenze saranno dovute essenzialmente alla necessità di dover considerare solo anelli graduati ed ideali omogenei.

Definizione 1.5.1.

Sia $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ un anello graduato. Posto $S_+ = \bigoplus_{d > 0} S_d$ definiamo $\text{Proj } S$ come l'insieme degli ideali primi ed omogenei di S che non contengono S_+ .

Osservazione 1.5.2.

L'operatore V si definisce analogamente e con le dovute cautele a quello definito per gli spettri di anelli e valgono proprietà analoghe a quelle dell'osservazione 1.4.13. In particolare se I è un ideale omogeneo allora $V(I) = \{\mathfrak{p} \in \text{Proj}(S) \mid \mathfrak{p} \supset I\}$. Ancora una volta quindi, dato un anello graduato S , abbiamo una topologia di Zariski definita su $\text{Proj}(S)$. Di conseguenza $\text{Proj}(S)$ è uno spazio topologico e possiamo definire su di esso un fascio.

Proposizione 1.5.3.

Sia S un anello graduato e sia $X = \text{Proj}(S)$. Allora:

- Gli insiemi della forma $D(F) := \text{Proj}(S) \setminus V(F)$ con $F \in S$ elemento omogeneo di grado positivo, formano una base per la topologia di Zariski di $\text{Proj}(S)$.
- Se $I \subset S$ è un ideale omogeneo e $F \in S$ è un elemento omogeneo di grado positivo, allora $V(I) \subset V(F)$ se e solo se $\exists m > 0$ tale che $F^m \in I$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 3.24. □

Possiamo a questo punto enunciare l'analogo del teorema 1.4.17.

Teorema 1.5.4.

Sia S un anello graduato e sia $X = \text{Proj}(S)$. Allora:

- L'assegnazione $D(F) \rightarrow S_{(F)}$ definisce un fascio su X indicato con \mathcal{O}_X .
- $\forall \mathfrak{p} \in X$ la spiga $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ è isomorfa a $S_{(\mathfrak{p})}$ mediante il seguente isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} S_{(\mathfrak{p})} & \rightarrow & \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \\ \frac{F}{G} & \rightarrow & [(D(G), \frac{F}{G})] \end{array}$$

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 3.24. □

Osservazione 1.5.5.

Analogamente al caso affine, dato un anello graduato S ed indicato con $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}$ il fascio costruito nel teorema precedente, detto anche in questo caso fascio strutturale, si ha che $(\text{Proj}(S), \mathcal{O}_{\text{Proj}(S)})$ è uno spazio localmente anulato. Ancora una volta, se non diversamente specificato, quando parleremo del Proj di un anello graduato lo intenderemo sempre munito del suo fascio strutturale.

Definizione 1.5.6.

Uno schema proiettivo è uno spazio localmente anulato isomorfo, come spazio localmente anulato, al Proj di un anello graduato.

Così come lo spazio proiettivo ha un ricoprimento aperto di carte affini, allo stesso modo uno schema proiettivo ha un ricoprimento di schemi affini, come mostrato dalla seguente proposizione.

Proposizione 1.5.7.

Siano S un anello graduato, $X = \text{Proj}(S)$ e $F \in S$ omogeneo di grado positivo. Allora $(\mathcal{D}(F), \mathcal{O}_{X|\mathcal{D}(F)}) \cong \text{Spec } S_{(F)}$ come spazi localmente anulati.

Dimostrazione.

Si veda [12] Proposizione II.2.5. □

Osservazione 1.5.8.

Quanto detto nell'osservazione 1.4.25 per gli insiemi algebrici affini vale anche, con poche modifiche, anche per gli insiemi algebrici proiettivi. In particolare quindi dato un insieme algebrico proiettivo X si ha che $\text{Proj}(S(X))$ può vedersi come X con l'aggiunta dei punti che corrispondono alle sottovarietà irriducibili di X munito del fascio strutturale.

Analogamente al caso affine si definiscono gli intorni infinitesimali di un punto del piano proiettivo.

Definizione 1.5.9.

Sia $P \in \mathbb{P}^2$. Si chiama n -esimo intorno infinitesimale di P lo schema $\text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/\mathcal{I}(P)^{n+1})$.

1.6 Schemi

Nelle sezioni 1.4 e 1.5 abbiamo definito gli schemi affini e proiettivi. Diamo ora la definizione generale di schema.

Definizione 1.6.1.

Uno schema è uno spazio localmente anulato (X, \mathcal{O}_X) tale che esista un ricoprimento di aperti $X = \bigcup_i U_i$ tale che $\forall i \exists A_i$ anello per cui $(U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}) \cong \text{Spec}(A_i)$ (come spazi localmente anulati). Diciamo che X è il supporto dello schema e che \mathcal{O}_X è il suo fascio strutturale.

Poichè gli schemi sono particolari spazi localmente anulati, i morfismi tra essi possono definirsi come particolari morfismi di spazi localmente anulati.

Definizione 1.6.2.

Siano X e Y due schemi. Un morfismo di schemi tra X e Y è un morfismo tra X e Y come spazi localmente anulati. Ugualmente un isomorfismo di schemi tra X e Y è un isomorfismo tra X e Y come spazi localmente anulati.

Osservazione 1.6.3.

Gli spettri di anelli, e quindi gli schemi affini, sono banalmente schemi, prendendo come ricoprimento quello banale. Ma anche i Proj di anelli graduati, e quindi gli schemi proiettivi, lo sono. Infatti, dati S anello graduato e $X = \text{Proj}(S)$, gli insiemi della forma $\mathcal{D}(F)$ formano una base per la topologia di Zariski di X , al variare di F tra gli elementi omogenei di grado > 0 di S e, per la proposizione 1.5.7, si ha $(\mathcal{D}(F), \mathcal{O}_{X|\mathcal{D}(F)}) \cong \text{Spec } S_{(F)}$.

Definizione 1.6.4.

Un sottoschema chiuso di uno schema X è uno schema Y , insieme a un morfismo $i : Y \rightarrow X$, tale che lo spazio topologico supporto di Y è un chiuso dello spazio topologico supporto di X , e i , che denota l'inclusione, induce su X un morfismo di fasci $\mathcal{O}_X \rightarrow i_*\mathcal{O}_Y$ che è suriettivo.

Osservazione 1.6.5.

Nel seguito utilizzeremo la corrispondenza biunivoca (si veda [12], II.3.2.3.):

$$\{\text{Ideali di } \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]\} \longleftrightarrow \{\text{Sottoschemi chiusi di } \mathbb{A}^n\}$$

data dalla mappa che a $I \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ associa $\text{Spec}(\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/I)$. Inoltre c'è una applicazione suriettiva:

$$\{\text{ideali omogenei di } \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]\} \rightarrow \{\text{sottoschemi chiusi di } \mathbb{P}^n\}$$

Questa applicazione associa ad un ideale omogeneo I lo schema $\text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I)$. Si può vedere che se I e J sono ideali omogenei di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$, $\text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I) = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/J)$ se e solo se $\text{sat}(I) = \text{sat}(J)$ (si veda [12] esercizio II.3.12.).

Diamo ora una definizione che utilizzeremo nel seguito.

Definizione 1.6.6.

Sia X uno schema e sia $p \in X$. Detto \mathfrak{M}_p l'ideale massimale di $\mathcal{O}_{X,p}$, si chiama campo residuo del punto p il quoziente $\mathcal{K}(p) := \mathcal{O}_{X,p}/\mathfrak{M}_p$.

Poichè lavoreremo principalmente con gli schemi affini enunciamo la seguente proposizione.

Proposizione 1.6.7.

Dato un omomorfismo di anelli $\psi: A \rightarrow B$ esiste un morfismo naturale di schemi $\varphi: \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$, e ogni morfismo di schemi $\text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ è indotto da un unico isomorfismo di anelli $A \rightarrow B$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Proposizione 4.17. □

Corollario 1.6.8.

Due anelli A e B sono isomorfi se e solo se sono isomorfi $\text{Spec}(A)$ e $\text{Spec}(B)$.

Vogliamo infine definire la dimensione di uno schema e vedere alcuni risultati su di essa.

Definizione 1.6.9.

Si chiama dimensione topologica di uno spazio topologico X , e si denota con $\dim(X)$, l'estremo superiore di tutti gli interi r tale che esista una catena $Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_r$ di chiusi irriducibili di X .

Definizione 1.6.10.

Si definisce *dimensione* di un insieme algebrico la sua *dimensione topologica* come spazio topologico dotato della topologia di Zariski. Si definisce *dimensione* di uno schema la *dimensione topologica* del suo supporto.

È possibile calcolare la dimensione in maniera puramente algebrica. A tal fine introduciamo un utile strumento: il polinomio di Hilbert.

Definizione 1.6.11.

Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo. Si chiama *funzione di Hilbert* dell'anello graduato $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I$ la funzione:

$$\begin{aligned} h_S: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ d &\mapsto \dim \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]_d / I_d \end{aligned}$$

Dato un insieme algebrico proiettivo $X \subset \mathbb{P}^n$, si chiama *funzione di Hilbert* di X e si denota con h_X , la funzione di Hilbert di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$. Detto $Y = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I)$ lo schema proiettivo associato all'ideale omogeneo I si chiama *funzione di Hilbert* di Y , e si indica con h_Y , la funzione di Hilbert di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I$.

Esempio 1.6.12.

Siano $P = [0, 0, 1] \in \mathbb{P}^2$, $X = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/(x_0, x_1))$ l'insieme algebrico costituito da P e $Y = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2, x_0x_1, x_1^2))$ il suo primo intorno infinitesimale. Si trova facilmente che:

$$h_X(t) = 1 \quad \forall t \in \mathbb{N} \quad h_Y(0) = 1, h_Y(t) = 3 \quad \forall t \geq 1$$

Infatti:

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/(x_0, x_1) \cong \mathbb{K}[x_2] = \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}x_2 \oplus \mathbb{K}x_2^2 \oplus \dots$$

mentre:

$$\mathbb{K}[x_0, x_1, x_2]/(x_0^2, x_0x_1, x_1^2) \cong \underbrace{\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}x_0 \oplus \mathbb{K}x_1 \oplus \mathbb{K}x_2}_{S_1} \oplus \underbrace{\mathbb{K}x_2^2 \oplus \mathbb{K}x_0x_2 \oplus \mathbb{K}x_1x_2}_{S_2} \oplus \dots$$

Sebbene sia X che Y siano supportati sul solo punto P la loro funzione di Hilbert è quindi diversa. In particolare essa è maggiore quando consideriamo non solo il punto, ma il suo primo intorno infinitesimale e ciò è dovuto al fatto che così facendo si sta considerando P con una struttura aggiuntiva che lo rende più "grasso".

Teorema 1.6.13.

Sia $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ un ideale omogeneo e sia $S = \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I$. Allora esistono $P_S(t) \in \mathbb{Q}[t]$ e $t_0 \in \mathbb{N}$ tali che $h_S(t) = P_S(t)$ se $t \geq t_0$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Teorema 2.17. □

Definizione 1.6.14.

Dato un insieme algebrico proiettivo $X \subset \mathbb{P}^n$ si chiama polinomio di Hilbert di X , e si denota con P_X , il polinomio di Hilbert di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\mathcal{I}(X)$. Dato uno schema proiettivo $Y = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I)$, dove I è un ideale omogeneo, si chiama polinomio di Hilbert di Y , e si denota con P_Y , il polinomio di Hilbert di $\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I$.

Proposizione 1.6.15.

Se X è un insieme algebrico proiettivo oppure uno schema proiettivo, allora la sua dimensione è uguale al grado del suo polinomio di Hilbert.

Dimostrazione.

Si veda [12], Teorema I.7.5. □

Enunciamo ora alcune proposizioni sulla dimensione degli insiemi algebrici che saranno utili nel seguito:

Proposizione 1.6.16.

Siano X ed Y due insiemi algebrici affini o proiettivi. Allora:

1. Se $X = X_1 \cup \dots \cup X_s$, con tutti gli X_i chiusi, allora $\dim(X) = \max\{\dim(X_1), \dots, \dim(X_s)\}$.
2. Se X è irriducibile, allora ogni sottoinsieme proprio chiuso $Y \subset X$ ha dimensione strettamente minore di $\dim(X)$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Esercizio 6.3. e Osservazione 6.15. □

Proposizione 1.6.17.

Sia $X \subset \mathbb{A}^n$ una varietà di dimensione r . Allora se $f \notin \mathcal{I}(X)$ è un polinomio non costante, o $X \cap \mathcal{V}(f)$ è vuoto oppure ogni sua componente irriducibile ha dimensione $r - 1$.

Dimostrazione.

Si veda [1] Corollario 6.14 (ii). \square

Definizione 1.6.18.

Siano X uno schema e sia a il coefficiente direttore di P_X . Si chiama grado di X il numero $\deg(P_X)!$ a . Se X è uno schema 0-dimensionale, il grado di X si chiama anche lunghezza di X , e si denota con $\ell(X)$.

Vediamo infine alcune osservazioni nel caso in cui lo schema X sia 0-dimensionale.

Osservazione 1.6.19.

Consideriamo un ideale omogeneo $I \subset \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$ e lo schema ad esso associato $X = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I)$. Supponiamo che X sia 0-dimensionale con supporto sui punti P_1, \dots, P_n , e data una decomposizione primaria minimale di I :

$$I = I_1 \cap \dots \cap I_m$$

poniamo $X_i = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I_i)$. Per le proprietà delle decomposizioni primarie minimali, si ha:

1. $I_i \neq \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n] \forall i = 1, \dots, m$ (poichè sono primari) e quindi $\mathcal{V}(I_i) = \emptyset \Leftrightarrow \sqrt{I_i} = \mathfrak{M}$.
2. $\sqrt{I_i} \neq \sqrt{I_j} \forall i, j = 1, \dots, m$, dunque può esserci al più un $\bar{i} \in \{1, \dots, m\}$ tale che $\sqrt{I_{\bar{i}}} = \mathfrak{M}$.

Da 1. e 2. segue che può esserci al più un $\bar{i} \in \{1, \dots, m\}$ tale che $\mathcal{V}(I_i) = \emptyset$, cioè che o $m = n$ o $m = n + 1$. Distinguiamo a questo punto due casi:

- Esiste \bar{i} come in 2.

In tal caso possiamo supporre $\bar{i} = m$ e, per la proposizione 1.2.33, si ha che $\text{sat}(I) = I_1 \cap \dots \cap I_{m-1}$. Dunque, poichè per l'osservazione 1.6.5 si ha $\text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/I) = \text{Proj}(\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]/\text{sat}(I))$, se ne deduce che quando la componente irrilevante è presente possiamo anche non considerarla.

- Non esiste \bar{i} come in 2.

In questo caso da 1. segue che $\mathcal{V}(I_i) \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, m$. Per la proposizione 1.6.16 si ha $\dim(\mathcal{V}(I_i)) \leq 0 \forall i = 1, \dots, m$ e quindi

$\dim(\mathcal{V}(I_i)) = 0 \forall i = 1, \dots, m$. Si ha dunque che tutti gli X_i sono in questo caso supportati su un punto.

Da quanto osservato segue che o ciascun X_i è supportato su un punto, ed in tal caso $m = n$, oppure un unico X_i è lo schema vuoto e tutti gli altri sono supportati su un punto, ed in tal caso $m = n + 1$. Dalla proposizione 1.2.33 si ha quindi che I è saturo se e solo $m = n$.

Capitolo 2

Curve algebriche piane

Vogliamo adesso trattare un particolare tipo di schemi, le curve algebriche, utilizzando gli strumenti descritti nel Capitolo 1. In particolare vogliamo definire il concetto di molteplicità di un punto di una curva e di molteplicità d'intersezione di due curve per poter successivamente trattare dell'ideale Jacobiano. Inoltre d'ora in poi lavoreremo con $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, anche se molte delle cose nel seguito esposte valgono per un qualunque campo algebricamente chiuso.

2.1 Il fascio strutturale sullo spazio affine

In questa sezione vediamo meglio com'è fatto il fascio strutturale nel caso in cui lo schema in questione sia \mathbb{A}^n .

Osservazione 2.1.1.

Consideriamo $X \subset \mathbb{A}^n$ un insieme algebrico affine e sia \mathcal{O}_X il suo fascio strutturale che, per quanto visto, è il fascio delle funzioni regolari. Per il teorema 1.3.9, prendendo $\Gamma(X) \ni \bar{f} = \bar{1}$, si ha:

$$\Gamma(X) \cong \Gamma(X)_{\bar{1}} \cong \mathcal{O}_X(\mathcal{D}_X(\bar{1})) = \mathcal{O}_X(X)$$

Dunque le funzioni regolari su tutto X sono le funzioni polinomiali su X cioè, con un piccolo abuso di notazione, si ha $\mathcal{O}_X(X) = \Gamma(X)$. Inoltre, preso $p \in X$, per il teorema 1.3.11 la spiga di \mathcal{O} in p è:

$$\mathcal{O}_{X,p} \cong \Gamma(X)_{\mathcal{I}_X(p)} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in \Gamma(X), g \notin \mathcal{I}_X(p) \right\} = \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \Gamma(X), g(p) \neq 0 \right\}$$

Si noti che, per non appesantire eccessivamente la notazione, le classi $\bar{f}, \bar{g} \in \Gamma(X)$ sono state indicate semplicemente con f, g . Inoltre, sempre per il teorema 1.3.11 $\mathcal{O}_{X,p}$ è un anello locale il cui ideale massimale è:

$$\mathfrak{m}_p = \left\{ \frac{f}{g} \in \mathcal{O}_{X,p} \mid f(p) = 0 \right\}$$

ed è possibile mostrare che $\mathcal{O}_{X,p}$ è un dominio noetheriano.

Notazione 2.1.2.

Nel seguito, se non diversamente specificato, indicheremo il fascio $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}$ con il simbolo \mathcal{O} e la spiga $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n,p}$ con \mathcal{O}_p . Inoltre, dato $p \in X \subset \mathbb{A}^n$ chiameremo la spiga $\mathcal{O}_{X,p}$ **anello locale di X in p** . Se $X = \mathbb{A}^n$ chiameremo \mathcal{O}_p **anello locale di p** .

Enunciamo a questo punto una proposizione i cui corollari saranno molto utili nella definizione di molteplicità d'intersezione.

Definizione 2.1.3.

Dati un anello R , un suo sottoanello S ed un ideale I di S indichiamo con IR l'ideale di R generato da I . Si può mostrare che $(IR)^n = I^n R$.

Proposizione 2.1.4.

Sia I un ideale di $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ e si supponga che $\mathcal{V}(I) = \{p_1, \dots, p_N\}$. Posto $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{p_i}$, si ha che esiste un isomorfismo tra $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ e $\prod_{i=1}^N \mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i$.

Dimostrazione.

Si veda [11] Cap. 2 Proposizione 6. □

Corollario 2.1.5.

$$\dim(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I) = \sum_{i=1}^N \dim(\mathcal{O}_i/I\mathcal{O}_i).$$

Dimostrazione.

Si veda [11] Cap. 2 Corollario 1. □

Corollario 2.1.6.

Se $\mathcal{V}(I) = p$, allora $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/I$ è isomorfo a $\mathcal{O}_p/I\mathcal{O}_p$.

Dimostrazione.

Si veda [11] Cap. 2 Corollario 2. □

2.2 Moltiplicità di intersezione per curve affini

Vogliamo ora fornire la definizione di molteplicità di intersezione tra curve algebriche piane affini mediante l'anello locale definito nella sezione precedente.

Definizione 2.2.1.

Si chiama curva algebrica piana affine il sottoschema di \mathbb{A}^2 associato ad un ideale principale $I \subset \mathbb{C}[x, y]$. Si chiama inoltre grado della curva il grado di uno qualunque dei generatori di I .

Notazione 2.2.2.

Consideriamo una curva algebrica piana affine associata all'ideale $I = (f) \subset \mathbb{C}[x, y]$. Indicheremo con \mathcal{C} il suo supporto e diremo che $\lambda f = 0$ è un'equazione della curva $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Spesso indicheremo la curva con una scrittura compatta della forma:

$$\mathcal{C} : f = 0 \tag{2.1}$$

Inoltre, come abbiamo già visto, è equivalente considerare un sottoschema chiuso di \mathbb{A}^2 o l'ideale ad esso associato poichè tra le due classi vi è una corrispondenza biunivoca. Nel caso specifico delle curve algebriche piane affini inoltre tale ideale è, per definizione, principale e dunque generato da un unico polinomio della forma λf , $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Pertanto nel seguito indicheremo una curva algebrica piana affine, con abuso di notazione, o con una scrittura del tipo 2.1, o con il suo supporto \mathcal{C} .

Osservazione 2.2.3.

La definizione di curva algebrica piana affine appena data, come vedremo meglio nel seguito, tiene in considerazione non solo il supporto della curva ma anche quante volte i suoi punti "vengono contati". Essa distingue cioè, ad esempio, tra una retta semplice ed una retta doppia.

Notazione 2.2.4.

Dato $f \in \mathbb{C}[x, y]$ indicheremo con f_x e f_y le derivate parziali rispettivamente rispetto ad x e rispetto ad y . Inoltre nel seguito, quando non ci sarà ragione di equivoco, chiameremo una curva algebrica piana affine semplicemente "curva".

Osservazione 2.2.5.

Consideriamo una curva $\mathcal{C} : f = 0$ e sia $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$ la decomposizione in irriducibili di f . Osserviamo che:

$$\mathcal{V}(f) = \mathcal{V}\left(\prod_{i=1}^r f_i^{e_i}\right) = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{V}(f_i^{e_i}) = \bigcup_{i=1}^r \mathcal{V}(f_i) \quad (2.2)$$

Inoltre gli $\mathcal{V}(f_i)$ sono irriducibili, poichè gli ideali (f_i) sono primi e, per la proposizione 1.6.17, $\dim(\mathcal{V}(f_i)) = 1$. Per la proposizione 1.6.16 possiamo dire anche che $\mathcal{V}(f_i) \not\subset \mathcal{V}(f_j) \forall i, j = 1, \dots, r$ poichè sono tutti irriducibili e di dimensione 1. Dunque la 2.2 è la decomposizione in irriducibili di $\mathcal{V}(f)$. Quanto osservato giustifica la seguente definizione.

Definizione 2.2.6.

Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una curva e sia $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$ la decomposizione in irriducibili di f . Diremo che $\mathcal{C}_i : f_i = 0$ sono le componenti irriducibili della curva \mathcal{C} e che gli e_i sono le molteplicità delle \mathcal{C}_i . Una componente irriducibile \mathcal{C}_i tale che $e_i = 1$ si dice semplice. Una componente irriducibile \mathcal{C}_i tale che $e_i > 1$ si dice multipla.

Passiamo ora a definire la molteplicità di un punto per una curva e le tangenti principali ad una curva in un punto.

Definizione 2.2.7.

Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una curva e $p = (0, 0)$. Sia poi $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$ con f_i omogeneo di grado i e $f_m, f_n \neq 0$. Definiamo $m_p(\mathcal{C}) := m$ e chiamiamo $m_p(\mathcal{C})$ molteplicità di \mathcal{C} in p . Diciamo inoltre che p è un punto semplice per \mathcal{C} se $m_p(\mathcal{C}) = 1$ e che p è un punto m -plo per \mathcal{C} se $m_p(\mathcal{C}) = m > 1$.

Definizione 2.2.8.

Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una curva e sia $p = (0, 0) \in \mathcal{C}$. Sia poi $f = f_m + f_{m+1} + \dots + f_n$ con f_i omogeneo di grado i e $f_m, f_n \neq 0$. Poichè f_m è un polinomio omogeneo di grado m in due variabili, esso si scompone in un prodotto di m fattori lineari contati con molteplicità, cioè $\exists a_j, b_j \in \mathbb{C} \mid f_m = \prod_{j=1}^m \underbrace{(a_j x - b_j y)}_{l_j}^{c_j}$

con $\sum_{j=1}^m c_j = m$. Le rette l_j sono dette tangenti principali a f in p e c_j è detta molteplicità di l_j .

Osservazione 2.2.9.

Siano $\mathcal{C} : f = 0$ una curva, $f = \prod_{i=1}^r f_i^{e_i}$ la decomposizione in irriducibili di f , $\mathcal{C}_i : f_i = 0$ le componenti irriducibili di \mathcal{C} e sia $p = (0, 0)$. Osservando che il termine omogeneo di grado più basso di f è il prodotto dei termini omogenei di minor grado degli f_i si dimostra che:

- $m_p(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^r e_i m_p(\mathcal{C}_i)$.
- Se l è tangente principale a \mathcal{C}_i in p con molteplicità s_i allora l è tangente principale a \mathcal{C} in p con molteplicità $\sum_{i=1}^r e_i s_i$.
- p è un punto semplice di \mathcal{C} se e solo se $\exists! i \mid p \in \mathcal{C}_i \wedge e_i = 1 \wedge m_p(\mathcal{C}_i) = 1$.

Osservazione 2.2.10.

Finora abbiamo dato la definizione di molteplicità di un punto e di tangente in un punto solo per $(0, 0)$. Per estendere tali definizioni ad un generico $p = (a, b)$ consideriamo la traslazione T che manda $(0, 0)$ in (a, b) , cioè $T(x, y) = (x + a, y + b)$. Data una curva $\mathcal{C} : f = 0$ definiamo allora la molteplicità di \mathcal{C} in p come $m_p(\mathcal{C}) := m_{(0,0)}(T^{-1}(\mathcal{C}))$. Con analogo procedimento si definiscono le tangenti principali ad \mathcal{C} in p e le loro molteplicità.

Definizione 2.2.11.

Date due curve $\mathcal{C} : f = 0$ e $\mathcal{D} : g = 0$ diciamo che esse si intersecano strettamente in p se non possiedono nessuna componente comune che passa per p . Diremo inoltre che esse si incontrano trasversalmente in p se p è un punto semplice per entrambe e la retta tangente a \mathcal{C} in p è distinta dalla retta tangente a \mathcal{D} in p .

Un modo molto comodo per calcolare la molteplicità di una curva in un punto è dato dal seguente teorema.

Teorema 2.2.12.

Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una curva e sia $p \in \mathcal{C}$. Allora $m_p(\mathcal{C}) = m$ se e solo se si annullano tutte le derivate parziali di ordine $m - 1$ di f e ne esiste almeno una di ordine m che non si annulla.

Dimostrazione.

Si veda [17] Proposizione 34.6 punto 1). \square

Per i punti semplici è possibile trovare la tangente principale mediante la seguente proposizione.

Proposizione 2.2.13.

Sia $C : f = 0$ una curva e sia $p = (a, b) \in C$ un punto semplice per C . Allora l'unica tangente principale a C in p ha equazione:

$$f_x(p)(x - a) + f_y(p)(y - b) = 0$$

Dimostrazione.

Si veda [17] pag. 409. \square

Riportiamo a questo punto tre lemmi che ci saranno utili successivamente:

Lemma 2.2.14.

Se A è un anello locale con unico ideale massimale \mathfrak{M} allora esiste una successione esatta di A -moduli

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1} \xrightarrow{i} A / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow A / \mathfrak{M}^n \rightarrow 0$$

dove i è indotta dall'inclusione $\mathfrak{M}^n \hookrightarrow A$.

Dimostrazione.

Basta osservare che:

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow A / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow (A / \mathfrak{M}^{n+1}) / (\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1}) \rightarrow 0$$

è esatta, e che $(A / \mathfrak{M}^{n+1}) / (\mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1}) \cong A / \mathfrak{M}^n$ ([4] Prop. 2.1). \square

Lemma 2.2.15.

Sia $p = (0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n$. Posto $I = (x_1, \dots, x_n) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ si ha che $I\mathcal{O}_p = \mathfrak{M}$ e conseguentemente $I^r\mathcal{O}_p = \mathfrak{M}^r \quad \forall r \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

Poichè $\mathcal{O}_p = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ la tesi segue da [4] Prop. 3.11 iv) e v). \square

Lemma 2.2.16.

Siano V una varietà di \mathbb{A}^n , $I = \mathcal{I}(V) \subset \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, $p \in V$ e J un ideale di $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ che contenga I e sia J' l'immagine di J in $\Gamma(V)$ tramite la proiezione canonica. Allora esiste un isomorfismo naturale:

$$\varphi : \mathcal{O}_p/J\mathcal{O}_p \rightarrow \mathcal{O}_{V,p}/J'\mathcal{O}_{V,p}$$

Dimostrazione.

Poniamo $A := \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ e $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_p$. Allora da [4] Cor. 3.4 iii) e Prop. 2.1. si ha:

$$A_{\mathfrak{M}}/JA_{\mathfrak{M}} \cong (A/J)_{\mathfrak{M}_{A/J}} \cong ((A/I)/(J/I))_{\mathfrak{M}_{A/J}} \cong \left((A/I)_{\mathfrak{M}_{A/J}} \right) / \left(J(A/I)_{\mathfrak{M}_{A/J}} \right)$$

□

Vediamo a questo punto un altro modo utile per calcolare la molteplicità di una curva irriducibile in un punto è dato dal seguente teorema.

Teorema 2.2.17.

Sia p un punto di una curva irriducibile $\mathcal{C} : f = 0$. Allora:

$$m_p(\mathcal{C}) = \dim \left(\mathfrak{M}_{\mathcal{C},p}^n / \mathfrak{M}_{\mathcal{C},p}^{n+1} \right) \quad (2.3)$$

per n abbastanza grande. In particolare $m_p(\mathcal{C})$ dipende solo dall'anello locale $\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}$.

Dimostrazione.

Per semplicità di notazione scriveremo \mathcal{O} al posto di $\mathcal{O}_{\mathcal{C},p}$, \mathfrak{M} al posto di $\mathfrak{M}_{\mathcal{C},p}$ e m al posto di $m_p(\mathcal{C})$. Per 2.2.14 sappiamo che esiste la successione esatta:

$$0 \rightarrow \mathfrak{M}^n / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O} / \mathfrak{M}^{n+1} \rightarrow \mathcal{O} / \mathfrak{M}^n \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

Possiamo supporre che $p = (0, 0)$ e quindi posto $I = (x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$ si ha per 2.2.15 che $\mathfrak{M}^n = I^n \mathcal{O}$. Inoltre, per il corollario 2.1.6 e per 2.2.16 si ha

$$\mathbb{C}[x, y]/(I^n, f) \cong \mathcal{O}_p/(I^n, f)\mathcal{O}_p \cong \mathcal{O}/I^n\mathcal{O} \cong \mathcal{O}/\mathfrak{M}^n$$

Passiamo quindi a calcolare la dimensione di $\mathbb{C}[x, y]/(I^n, f)$. Poichè m è il grado del termine di grado più basso di f (essendo $p = (0, 0)$) prendendo

$g \in \mathbb{C}[x, y]$ si ha che $fg \in I^n \Leftrightarrow g \in I^{n-m}$. Possiamo quindi considerare l'applicazione lineare:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}[x, y]/I^{n-m} &\rightarrow \mathbb{C}[x, y]/I^n \\ [g] &\rightarrow [fg] \end{aligned}$$

ed essa è ben definita per quanto detto. Abbiamo inoltre l'omomorfismo $\varphi : \mathbb{C}[x, y]/I^n \rightarrow \mathbb{C}[x, y]/(I^n, f)$ ed è facile verificare che, per $n \geq m$, la successione:

$$0 \rightarrow \mathbb{C}[x, y]/I^{n-m} \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}[x, y]/I^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[x, y]/(I^n, f) \rightarrow 0$$

è esatta (di spazi vettoriali).

Dunque, poichè $\dim \mathbb{C}[x, y]/I^n = \frac{n(n+1)}{2}$, si ha:

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{C}[x, y]/(I^n, f) &= \dim \mathbb{C}[x, y]/I^n - \dim \mathbb{C}[x, y]/I^{n-m} = \\ &= \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-m)(n-m+1)}{2} = nm - \frac{m(m+1)}{2} \quad \forall n \geq m \end{aligned}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O}/\mathfrak{M}^n &= nm - \frac{m(m+1)}{2} \xrightarrow{2,4} \\ \Rightarrow \dim \mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1} &= \dim \mathcal{O}/\mathfrak{M}^{n+1} - \dim \mathcal{O}/\mathfrak{M}^n = \\ &= (n+1)m - \frac{m(m+1)}{2} - nm + \frac{m(m+1)}{2} = m \quad \forall n \geq m \end{aligned}$$

□

Possiamo a questo punto dare la definizione di molteplicità di intersezione tra due curve.

Teorema 2.2.18.

Esiste un'unica applicazione:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} : \mathbb{A}^2 \times \{\text{Curve affini}\} \times \{\text{Curve affini}\} &\rightarrow \mathbb{N} \cup \infty \\ (p, \mathcal{C}, \mathcal{D}) &\rightarrow \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ è un intero non negativo $\forall \mathcal{C}, \mathcal{D}, p$ quando \mathcal{C} e \mathcal{D} si incontrano strettamente in p e $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \infty$ se \mathcal{C} e \mathcal{D} si incontrano ma non strettamente in p .

2. $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ dipende solo dalle componenti di \mathcal{C} e \mathcal{D} che passano per p .
Inoltre $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 0 \Leftrightarrow p \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$.
3. Se T è un cambio di coordinate affini di \mathbb{A}^2 e $T(q) = p$, allora
 $\mathfrak{I}(q, T^{-1}(\mathcal{C}) \cap T^{-1}(\mathcal{D})) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$.
4. $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{D} \cap \mathcal{C})$.
5. $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq m_p(\mathcal{C})m_p(\mathcal{D})$ e l'uguaglianza vale se e solo se \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno tangenti in comune in p .
6. Detti f, g i polinomi associati a \mathcal{C} e \mathcal{D} con decomposizioni in irriducibili
 $f = \prod_i f_i^{r_i}$, $g = \prod_j g_j^{s_j}$, e posti $\mathcal{C}_i : f_i = 0$ e $\mathcal{D}_j : g_j = 0$ allora
$$\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \sum_{i,j} r_i s_j \mathfrak{I}(p, \mathcal{C}_i \cap \mathcal{D}_j).$$
7. Detti f, g i polinomi associati rispettivamente a \mathcal{C} e \mathcal{D} e data una curva
 $\mathcal{E} : g + fh = 0$ per un qualunque $h \in \mathbb{C}[x, y]$ si ha $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{E})$. Ossia $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ dipende solo dall'immagine di g in $\Gamma(\mathcal{C})$.

Inoltre, date due curve $\mathcal{C} : f = 0$ e $\mathcal{D} : g = 0$ tale funzione è data da
 $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \dim \mathcal{O}_p / (f, g)$.

Dimostrazione.

Dobbiamo mostrare l'esistenza e l'unicità.

!) Fissiamo due curve $\mathcal{C} : f = 0$ e $\mathcal{D} : g = 0$. Per mostrare l'unicità è sufficiente far vedere che utilizzando le sette proprietà del teorema è possibile calcolare univocamente $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$, dunque basta fornire un procedimento per calcolare $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ mediante 1-7.

Per 3 possiamo supporre che $p = (0, 0)$, per 1 possiamo supporre che $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) < \infty$ (poichè quando $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \infty$ sappiamo dirlo immediatamente e quindi il procedimento termina subito) e per 2 possiamo supporre che $p \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ (altrimenti $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 0$ ed il procedimento è già terminato), cioè che $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = n > 0$.

Applichiamo ora l'induzione totale, supponiamo quindi di saper calcolare $\mathfrak{I}(p, \mathcal{A} \cap \mathcal{B})$ qualunque siano \mathcal{A}, \mathcal{B} e per ogni $p \in \mathbb{A}^2$ se $\mathfrak{I}(p, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) < n$ e calcoliamo $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$. Si noti che il caso base $\mathfrak{I}(p, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 0$ è banale.

Posto $\deg f(x, 0) = r$ e $\deg g(x, 0) = s$, per 4 possiamo supporre che $r \leq s$.
Distinguiamo due casi:

i) $r = 0$

$$r = 0 \Rightarrow y \mid f \Rightarrow \exists h \in \mathbb{C}[x, y] \mid f = yh$$

Posto $\mathcal{Y} : y = 0$ e $\mathcal{H} : h = 0$ si ha:

$$f = yh \stackrel{6}{\Rightarrow} \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}) + \mathfrak{I}(p, \mathcal{H} \cap \mathcal{D})$$

Sia $g(x, 0) = x^m(a_0 + a_1x + \dots)$ con $a_0 \neq 0$. Allora, posto $\mathcal{X} : x^m = 0$ e $\mathcal{D}' : g(x, 0) = 0$ si ha:

$$\mathfrak{I}(p, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}) \stackrel{7}{=} \mathfrak{I}(p, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}') \stackrel{2}{=} \mathfrak{I}(p, \mathcal{Y} \cap \mathcal{X}) \stackrel{5+6}{=} m > 0$$

Quindi $\mathfrak{I}(p, \mathcal{H} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) - \mathfrak{I}(p, \mathcal{Y} \cap \mathcal{D}) < n$ è calcolabile e questo conclude la dimostrazione in questo caso.

ii) $r > 0$

Possiamo moltiplicare f e g per opportune costanti così da supporre che $f(x, 0)$ e $g(x, 0)$ siano monici. Poniamo allora $h = g - x^{s-r}f$ e $\mathcal{H} : h = 0$ ed avremo:

$$\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{H}), \quad \deg h(x, 0) = t < s$$

poichè si cancellano i termini di grado s di g e $x^{s-r}f$. Ripetendo questo processo, e scambiando eventualmente f e h qualora fosse $t < r$, si arriva, in un numero finito di passi, ad ottenere due curve \mathcal{A} e \mathcal{B} che ricadono nel caso *i)* e tale che $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{A} \cap \mathcal{B})$. Questo conclude la dimostrazione del caso *ii)*.

\exists) Definiamo:

$$\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \dim(\mathcal{O}_p/(f, g))$$

e mostriamo che soddisfa le proprietà 1-7. Poichè $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ dipende solo dall'ideale (f, g) di \mathcal{O}_p le proprietà 2, 4 e 7 sono immediate. 3 segue invece dal fatto che un cambio di coordinate affini induce un isomorfismo tra anelli locali.

Per quanto detto possiamo quindi supporre che $p = (0, 0)$ e che tutte le componenti di \mathcal{C} e \mathcal{D} passino per p e provare i rimanenti punti.

1)

Per come è definito, $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ può essere solo un intero non negativo oppure

∞ , dobbiamo quindi mostrare che è ∞ se e solo se \mathcal{C} e \mathcal{D} si incontrano ma non strettamente in p ossia, per come abbiamo preso p, \mathcal{C} e \mathcal{D} , se e solo se \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune. Per il corollario 2.1.5 se \mathcal{C} e \mathcal{D} non hanno componenti in comune allora $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ è finito. Viceversa se f e g hanno una componente comune $\mathcal{H} : h = 0$, allora $(f, g) \subset (h)$ e quindi $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \dim \mathcal{O}_p/(f, g) \geq \dim \mathcal{O}_p/(h)$. Ma, per 2.2.16, $\mathcal{O}_p/(h)$ è isomorfo a $\mathcal{O}_{\mathcal{H}, p} \supset \Gamma(\mathcal{H})$ e poichè $\#(\mathcal{H}) = \infty$, per un corollario del teorema degli zeri di Hilbert, si ha $\dim \Gamma(\mathcal{H}) = \infty$, da cui $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{H}, p} = \infty$ e questo prova il viceversa.

5)

Poniamo $m = m_p(\mathcal{C})$, $n = m_p(\mathcal{D})$ e sia $I = (x, y) \subset \mathbb{C}[x, y]$. Consideriamo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}[x, y]/I^m \times \mathbb{C}[x, y]/I^m & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{C}[x, y]/I^{n+m} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}[x, y]/(I^{n+m}, f, g) & \rightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \alpha & & \\ & & \mathcal{O}_p/(f, g) & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{O}_p/(I^{n+m}, f, g) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

dove φ, π e α sono le proiezioni canoniche e ψ si definisce come $\psi([a], [b]) = [af + bg]$ (è facile vedere che è ben definita). Si ha che:

- φ e π sono suriettive poichè sono proiezioni.
- α è un isomorfismo poichè $\mathcal{V}(I^{n+m}, f, g) = p$ e per il corollario 2.1.6.

Poichè la prima fila è banalmente esatta si ha:

- $\dim \text{Im} \psi = \dim \ker \varphi \Rightarrow \dim \mathbb{C}[x, y]/I^n \times \mathbb{C}[x, y]/I^m \geq \dim \ker \varphi \Rightarrow \dim \mathbb{C}[x, y]/I^n + \dim \mathbb{C}[x, y]/I^m \geq \dim \ker \varphi$ e vale l'uguaglianza se e solo φ è 1-1
- $\dim \mathbb{C}[x, y]/(I^{n+m}, f, g) = \dim \mathbb{C}[x, y]/I^{n+m} - \dim \ker \varphi$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) &= \dim \mathcal{O}_p/(f, g) \stackrel{*}{\geq} \dim \mathcal{O}_p/(I^{n+m}, f, g) \stackrel{\alpha \text{ isomorfismo}}{=} \\ &= \dim \mathbb{C}[x, y]/(I^{n+m}, f, g) = \dim \mathbb{C}[x, y]/I^{n+m} - \dim \ker \varphi \stackrel{\oplus}{\geq} \\ &\geq \dim \mathbb{C}[x, y]/I^{n+m} - \dim \mathbb{C}[x, y]/I^n - \dim \mathbb{C}[x, y]/I^m = \\ &= \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = mn \end{aligned}$$

Dunque $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) \geq mn$ e vale l'uguaglianza se e solo se $*$ e \oplus sono uguaglianza.

$*$ è un'uguaglianza $\Leftrightarrow \pi$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow I^{n+m} \subset (f, g)\mathcal{O}_p$

\oplus è un'uguaglianza $\Leftrightarrow \psi$ è 1-1

Per terminare la dimostrazione ci serve il seguente lemma.

Lemma 2.2.19.

a) Se \mathcal{C} e \mathcal{D} hanno tutte le tangenti distinte in p , allora

$I^t \subset (f, g)\mathcal{O}_p \forall t \geq n + m - 1$.

b) ψ è 1-1 $\Leftrightarrow \mathcal{C}$ e \mathcal{D} hanno tutte le tangenti distinte

Dimostrazione.

Si veda [11] Cap. 3, Teorema 3, Lemma. □

Si ha quindi, in virtù del lemma precedente, $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = mn \Leftrightarrow \mathcal{C}$ e \mathcal{D} non hanno tangenti in comune in p .

6)

Siano $h \in \mathbb{C}[x, y]$, $\mathcal{H} : h = 0$ e $\mathcal{E} : gh = 0$. Ci basta mostrare che:

$$\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{E}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) + \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{H})$$

Distinguiamo due casi:

i) f e gh hanno un fattore in comune

In tal caso $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{E}) = \infty$. Inoltre se f e gh hanno un fattore in comune, vuol dire che almeno uno tra g ed h ha un fattore in comune con f e che quindi almeno uno tra $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ e $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{H})$ è ∞ , da cui l'uguaglianza cercata.

ii) f e gh non hanno un fattore in comune

Consideriamo la seguente successione:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_p/(f, h) \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_p/(f, gh) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}_p/(f, g) \rightarrow 0$$

dove φ è l'omomorfismo naturale, che è ben definito poichè $(f, gh) \subset (f, g)$, e $\psi([z]) = \overline{g}z \quad \forall z \in \mathcal{O}_p$, dove $[\]$ indica le classi di equivalenza di $\mathcal{O}_p/(f, h)$ e \overline{z} indica le classi di equivalenza di $\mathcal{O}_p/(f, gh)$. Mostriamo che questa successione è esatta.

i) ψ è 1-1

$\psi([z]) = 0 \Rightarrow \overline{gz} = 0 \Rightarrow gz \in (f, gh) \Rightarrow \exists u, v \in \mathcal{O}_p \mid gz = uf + vgh$. Scegliamo $s \in \mathbb{C}[x, y] \mid s(p) \neq 0, su = a, sv = b, sz = c$ con $a, b, c \in \mathbb{C}[x, y]$ (cioè stiamo prendendo s che semplifica tutti i denominatori di u, v, z). Allora $g(c - bh) = af$ in $\mathbb{C}[x, y]$ e, poichè g e f non hanno fattori in comune (altrimenti li avrebbero f e gh), da questa uguaglianza segue che $f \mid c - bh$ e quindi $\exists d \in \mathbb{C}[x, y] \mid c - bh = df$. Abbiamo dunque:

$$c - bh = df \Rightarrow sz = bh + df \Rightarrow z = \frac{b}{s}h + \frac{d}{s}f \Rightarrow [z] = 0$$

e questo prova che ψ è 1-1.

ii) φ è su

Questo è banale poichè φ è una proiezione al quoziente.

iii) $\text{Im}\psi = \ker \varphi$

Mostriamo che $\text{Im}\psi \subset \ker \varphi$. $\bar{a} \in \text{Im}\psi \Rightarrow \exists [z] \in \mathcal{O}_p/(f, h) \mid \overline{gz} = \bar{a} \Rightarrow a \in (f, g) \subset \mathcal{O}_p \Rightarrow \varphi(\bar{a}) = 0 \Rightarrow a \in \ker \varphi$ e questo prova che $\text{Im}\psi \subset \ker \varphi$. Mostriamo ora l'inclusione inversa. $\bar{a} \in \ker \varphi \Rightarrow a \in (f, g) \subset \mathcal{O}_p \Rightarrow \exists a_1, a_2 \in \mathcal{O}_p \mid a = a_1f + a_2g \Rightarrow \psi([a_2]) = \overline{ga_2} = \overline{a - a_1f} = \bar{a} \Rightarrow \bar{a} \in \text{Im}\psi$. Questo prova l'inclusione inversa e conclude la dimostrazione dell'esattezza della successione.

Si ha quindi $\dim \mathcal{O}_p/(f, gh) = \dim \mathcal{O}_p/(f, h) + \dim \mathcal{O}_p/(f, g)$, ossia $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{E}) = \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{H}) + \mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$. Questo termina la prova di δ e del teorema. \square

Definizione 2.2.20.

Date due curve \mathcal{C}, \mathcal{D} ed un punto $p \in \mathbb{A}^2$ si chiama molteplicità d'intersezione tra \mathcal{C} e \mathcal{D} in p la quantità $\mathfrak{I}(p, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$.

Esempio 2.2.21.

Molto spesso per calcolare la molteplicità d'intersezione tra due curve in un punto conviene utilizzare le proprietà 1-7 piuttosto che calcolare direttamente $\dim \mathcal{O}_p/(f, g)$.

2.3 Molteplicità d'intersezione per curve proiettive

Vogliamo a questo punto definire il concetto di molteplicità d'intersezione anche per curve proiettive, in particolare forniremo due definizioni differenti

e mostreremo che esse sono equivalenti. Questo ci consentirà di calcolare successivamente, quando necessario, la molteplicità d'intersezione in maniera più agevole.

Definizione 2.3.1.

Si chiama curva algebrica piana proiettiva il sottoschema di \mathbb{P}^2 associato ad un ideale principale omogeneo $I \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$. Si chiama inoltre grado della curva il grado di uno qualunque dei generatori di I .

Notazione 2.3.2.

Utilizzeremo per le curve proiettive notazioni ed abusi di notazione analoghi a quelli introdotti per le curve affini. Inoltre indicheremo con F_0, F_1, F_2 le derivate parziali rispettivamente rispetto ad x_0, x_1, x_2 .

Diamo ora delle definizioni analoghe a quelle date per le curve algebriche affini.

Definizione 2.3.3.

Sia $\mathcal{C} : F = 0$ una curva proiettiva e sia $F = \prod_{i=1}^r F_i^{e_i}$ la decomposizione in irriducibili di F . Diremo che $\mathcal{C}_i : F_i = 0$ sono le componenti irriducibili della curva \mathcal{C} e che gli e_i sono le molteplicità delle \mathcal{C}_i . Una componente \mathcal{C}_i tale che $e_i = 1$ si dice semplice. Una componente \mathcal{C}_i tale che $e_i > 1$ si dice multipla.

Definizione 2.3.4.

Sia $\mathcal{C} : F = 0$ una curva proiettiva e sia $P \in F$. Allora \mathcal{C} ha molteplicità m in P se in esso si annullano tutte le derivate parziali di ordine $m - 1$ di F e ne esiste almeno una di ordine m che non si annulla. In tal caso scriviamo $m_P(\mathcal{C}) = m$.

Osservazione 2.3.5.

Questa definizione è ispirata al teorema che consentiva di calcolare la molteplicità di una curva affine in un punto. Notiamo però che non sarebbe stato possibile dare una definizione analoga a quella affine poichè, essendo le curve omogenee rappresentate da polinomi omogenei, esse non si possono scrivere come somma di polinomi omogenei se non in maniera banale.

Diamo a questo punto la definizione di molteplicità d'intersezione di due curve proiettive.

Definizione 2.3.6.

Siano $\mathcal{C} : F = 0$ e $\mathcal{D} : G = 0$ due curve proiettive, $\mathcal{H}_i : h_i = 0$, $i = 1, \dots, r$ le loro componenti comuni e P_1, \dots, P_n i punti in cui esse si intersecano strettamente. Posto $I = (F, G)$ sia $I = \bigcap_{i=1}^{n+r} I_i$ una decomposizione primaria minimale di I con gli I_i ordinati tali che $\mathcal{V}(I_i) = P_i \forall i = 1, \dots, n$ e $\mathcal{V}(I_i) = \mathcal{H}_{i-n} \forall i = n+1, \dots, n+r$ (a priori nella decomposizione primaria potrebbe esistere una componente che definisca l'insieme vuoto, ma ciò non può accadere per [3], Prop. 2.15). Definiamo allora la molteplicità d'intersezione di \mathcal{C} e \mathcal{D} in $P \in \mathbb{P}^2$ come la quantità:

$$\mathfrak{A}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) := \begin{cases} P_{I_i}(d) & \text{se } P = P_i \\ 0 & \text{se } P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D} \\ \infty & \text{se } P \in \mathcal{H}_i \end{cases}$$

Osservazione 2.3.7.

Date due curve proiettive $\mathcal{C} : F = 0$ e $\mathcal{D} : G = 0$ ed un punto $P \in \mathbb{P}^2$ definiamo ora un'altra quantità. Fissiamo $i \in 0, 1, 2$ tale che $P \notin \mathcal{V}(x_i)$; possiamo supporre che $i = 0$ e vedremo con il teorema successivo che questo non genera una perdita di generalità. Siano $I = (F, G)$ e J il deomogeneizzato di I rispetto a x_0 , cioè $J = (f, g)$ dove f e g sono i deomogeneizzati di F e G rispetto a x_0 . Per come abbiamo definito la deomogeneizzazione, avremmo $f = F(1, x, y)$ e $g = G(1, x, y)$. Tuttavia in questo contesto è più comodo vedere i deomogeneizzati come $f = \frac{F}{x_0^{\deg F}} \in \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]$ e $g = \frac{G}{x_0^{\deg G}} \in \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]$: è chiaro che le due cose sono equivalenti semplicemente ponendo $\frac{x_1}{x_0} = x$ e $\frac{x_2}{x_0} = y$. Posti p il corrispondente punto di P nella carta affine $\{x_0 \neq 0\}$, $\mathcal{C}' : f = 0$ e $\mathcal{D}' : g = 0$ definiamo la quantità $\mathfrak{B}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) := \mathfrak{I}(p, \mathcal{C}' \cap \mathcal{D}')$. Il seguente teorema mostrerà che la definizione data non dipende dalla i rispetto a cui si deomogeneizza, purchè $P \notin \mathcal{V}(x_i)$, e che $\mathfrak{A}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{B}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$.

Teorema 2.3.8.

Siano $\mathcal{C} : F = 0$ e $\mathcal{D} : G = 0$ curve proiettive e sia $P \in \mathbb{P}^2$. Allora $\mathfrak{A}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{B}(P, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$.

Dimostrazione.

I casi in cui $P \notin \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ o P appartiene ad una componente comune di F e

G sono immediati. Possiamo quindi supporre che $P \in \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ e che F e G non abbiano componenti in comune. Poniamo $\mathcal{V}(F, G) = \{P_1, \dots, P_m\}$. Sia $I = (F, G)$ e sia $I = \bigcap_{i=1}^m I_i$ una sua decomposizione primaria minimale con gli I_i ordinati in modo che $\mathcal{V}(I_i) = P_i$. Fissiamo P_i e possiamo supporre che $P_i \notin \mathcal{V}(x_0)$. Siano poi $f, g \in \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]$ i deomogeneizzati rispettivamente di F e G rispetto a x_0 , $J = (f, g)$, $\mathcal{C}' : f = 0$, $\mathcal{D}' : g = 0$ e p_i il corrispondente punto di P_i nella carta affine $x_0 \neq 0$. Per dimostrare che $\mathfrak{A}(P_i, \mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = \mathfrak{B}(P_i, \mathcal{C} \cap \mathcal{D})$ dobbiamo dimostrare che, per $d \gg 0$ si ha:

$$\frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d}{I_d} \cong \frac{\mathcal{O}_{p_i}}{(f, g)}$$

Poichè $\mathcal{O}_{p_i} \cong \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]_{I(p_i)}$ possiamo mostrare che:

$$\varphi : \frac{\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d}{I_d} \longrightarrow \frac{\mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]}{J}$$

$$\frac{H}{H} \longrightarrow \left[\frac{H}{x_0^d} \right]$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali per $d \gg 0$.

Dobbiamo mostrare che φ è ben definita, è un omomorfismo, è 1-1 ed è su.

i) φ è ben definita

$$\overline{H_1} = \overline{H_2} \Rightarrow H_1 - H_2 \in I_d \Rightarrow \frac{H_1 - H_2}{x_0^d} \in J \Rightarrow \frac{H_1}{x_0^d} - \frac{H_2}{x_0^d} \in J \Rightarrow \left[\frac{H_1}{x_0^d} \right] = \left[\frac{H_2}{x_0^d} \right] \Rightarrow \varphi(\overline{H_1}) = \varphi(\overline{H_2})$$

e questo prova che φ è ben definita.

ii) φ è un omomorfismo

È banale.

iii) φ è 1-1

$$\varphi(\overline{H_1}) = 0 \Rightarrow \left[\frac{H_1}{x_0^d} \right] = 0 \Rightarrow \frac{H_1}{x_0^d} \in J \Rightarrow H_1 \in I_d \Rightarrow \overline{H_1} = 0$$

e questo prova che φ è 1-1.

iv) φ è su

Sia $[h] \in \mathbb{C}[\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}]/J$. Per semplicità di notazione poniamo $\frac{x_1}{x_0} = x$ e $\frac{x_2}{x_0} = y$.

Dobbiamo mostrare che per d abbastanza grande $\exists \overline{H} \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_d/I_d$ tale che $\left[\frac{H}{x_0^d} \right] = [h]$. A tal fine basta prendere un polinomio H il cui deomogeneizzato rispetto a x_0 sia proprio h . L'unica cosa che bisogna mostrare quindi è che $\exists d \gg 0$ che vada bene $\forall [h] \in \mathbb{C}[x, y]/J$; possiamo quindi mostrare che $\exists d$ tale che ogni elemento $[h]$ abbia un rappresentante di grado minore o uguale a d . Questo è a sua volta equivalente a mostrare che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{C}[x, y]$ con $\deg a < \alpha$ e $\deg b < \beta$ tale che $[x^\alpha] = [a]$ e

$$[y^\beta] = [b].$$

Osserviamo che poichè F e G non hanno componenti in comune, neanche f e g le hanno e dunque nè x nè y possono dividere sia f che g . Distinguiamo a questo punto i diversi casi possibili imponendo che nè x nè y dividano sia f che g :

- i. f contiene solo termini del tipo $x^i y^j$.
In tal caso $x, y \mid f$ e quindi affinchè $x, y \nmid g$, g deve contenere almeno un monomio del tipo x^a ed almeno uno del tipo y^b .
- ii. f contiene termini del tipo $x^i y^j$ e ne contiene almeno uno del tipo x^a .
In tal caso distinguiamo due sottocasi:
 - i. f contiene anche un y^b
In tal caso nè x nè y dividono f e quindi non abbiamo ulteriori condizioni su g
 - ii. f non contiene termini del tipo y^b .
In tal caso $x \mid f$ e quindi, affinchè $x \nmid g$, g deve contenere almeno un y^b .
- iii. f contiene termini del tipo $x^i y^j$ e ne contiene almeno uno del tipo y^b .
La discussione di questo caso è analoga e simmetrica al precedente.
- iv. f non contiene termini del tipo $x^i y^j$
Anche in questo caso distinguiamo dei sottocasi:
 - i. f contiene solo termini del tipo x^a
In tal caso $x \mid f$ e quindi g deve contenere almeno un termine del tipo y^b .
 - ii. f contiene solo termini del tipo y^b
Analogo e simmetrico al precedente sottocaso.
 - iii. f contiene sia termini del tipo x^a che del tipo y^b
In tal caso nè x nè y dividono f quindi non ci sono ulteriori condizioni su g .

In ogni caso si ha comunque che compaiono almeno un x^a ed un y^b in f o in g . Pertanto detti $x^{\alpha_1}, y^{\beta_1}, x^{\alpha_2}, y^{\beta_2}$ i termini puri di grado massimo

rispettivamente di f e g , poichè $[f] = [g] = [0]$ si ha che è possibile prendere $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$. Possiamo supporre senza perdere di generalità $\alpha = \alpha_1$ e $\beta = \beta_2$ e prendere quindi $a = -f + x^\alpha$ e $b = -g + y^\beta$. In questo modo abbiamo trovato α, β, a e b cercati. Si ha quindi che $\forall [h] \exists h' \in \mathbb{C}[x, y]$ con $\deg h \leq \max\{\alpha, \beta\} := \delta$ tale che $[h] = [h']$. Possiamo quindi prendere $d = \delta$ e supporre che $\deg h \leq \delta$. Detto H l'omogeneizzato di h rispetto a x_0 avremo che $\varphi\left(\overline{x_0^{\delta - \deg H} H}\right) = [h]$. Questo prova che φ è su e conclude la dimostrazione del teorema.

□

Capitolo 3

Lo schema Jacobiano di una curva piana

In questo capitolo definiamo ed analizziamo lo schema Jacobiano di una curva algebrica piana. Come di consueto sarà utile lavorare a volte nell'affine ed a volte nel proiettivo ed anche in questo caso ci saranno alcune differenze. Lo studio dello schema Jacobiano ci permetterà, lavorando sul campo complesso, di ricavare informazioni sui punti singolari della curva. Quindi, anche in questo capitolo, assumiamo che il campo base sia \mathbb{C} .

3.1 Il caso proiettivo

Iniziamo ad analizzare il caso proiettivo.

Definizione 3.1.1.

Sia $\mathcal{C} : F = 0$ una curva proiettiva. Si chiama ideale Jacobiano di \mathcal{C} l'ideale:

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}) = (F_0, F_1, F_2) \subset \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$

Osservazione 3.1.2.

Data una curva proiettiva $\mathcal{C} : F = 0$ di grado d si ha che, $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ è un ideale omogeneo generato da polinomi omogenei di grado $d - 1$. Inoltre segue immediatamente dalla definizione che il sottoschema chiuso di \mathbb{P}^2 associato all'ideale $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ ha supporto sui punti singolari della curva. Questo perchè, per la relazione di Eulero, se $p = [p_0, p_1, p_2]$ è un punto tale che

$F_0(p) = F_1(p) = F_2(p) = 0$, si ha $F(p) = p_0F_0(p) + p_1F_1(p) + p_2F_2(p) = 0$. Se inoltre la curva è ridotta, cioè non ha componenti multiple, tale sottoschema è di dimensione 0.

Definizione 3.1.3.

Data una curva proiettiva $\mathcal{C} : F = 0$ lo schema $\text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/\mathcal{J}(\mathcal{C}))$ è detto schema Jacobiano di \mathcal{C} .

Esempio 3.1.4.

Consideriamo le due curve proiettive:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_0x_1^2 - x_2^3}_F = 0 \quad \mathcal{D} : \underbrace{x_0x_1x_2 + x_1^3 - x_2^3}_G = 0$$

Si ha:

$$I := \mathcal{J}(\mathcal{C}) = (x_1^2, 2x_0x_1, 3x_2^2) \quad J := \mathcal{J}(\mathcal{D}) = (x_1x_2, x_0x_2 + 3x_1^2, x_0x_1 - 3x_2^2)$$

Sia \mathcal{C} che \mathcal{D} hanno un unico punto singolare in $[1, 0, 0]$ e di conseguenza si ha $\mathcal{V}(I) = \mathcal{V}(J) = \{[1, 0, 0]\}$. Tuttavia le singolarità di \mathcal{C} e di \mathcal{D} sono di tipo differente: nel primo caso infatti $[1, 0, 0]$ è una cuspidi di prima specie mentre nel secondo è un nodo ordinario. Considerando dunque semplicemente l'insieme algebrico associato all'ideale Jacobiano di una curva non si riesce a distinguere tra singolarità di diverso tipo: è per questo che utilizzeremo lo schema associato all'ideale piuttosto che la varietà. Gli esempi 3.1.9 e 3.1.10 mostrano che in questo caso lo schema Jacobiano è in grado di distinguere tra nodo e cuspidi di prima specie.

Proposizione 3.1.5.

Sia $\varphi : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$ una proiettività e sia $\mathcal{C} : F = 0$ una curva proiettiva. Allora φ^{-1} induce un automorfismo di \mathbb{C} -algebre $\psi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \mapsto \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ tale che $\mathcal{J}(\varphi(\mathcal{C})) = \psi(\mathcal{J}(\mathcal{C}))$

Dimostrazione.

Consideriamo la proiettività φ^{-1} . Essa si scrive come:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{P}^2 \mapsto \mathbb{P}^2$$

$$[x_0, x_1, x_2] \mapsto \left[\underbrace{ax_0 + bx_1 + cx_2}_{\eta_0(x_0, x_1, x_2)}, \underbrace{a'x_0 + b'x_1 + c'x_2}_{\eta_1(x_0, x_1, x_2)}, \underbrace{a''x_0 + b''x_1 + c''x_2}_{\eta_2(x_0, x_1, x_2)} \right]$$

dove i coefficienti di η_0, η_1, η_2 sono tali che il determinante della matrice associata sia non nullo. Consideriamo il seguente morfismo di \mathbb{C} -algebre:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] &\mapsto \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2] \\ x_0 &\mapsto \eta_0 \\ x_1 &\mapsto \eta_1 \\ x_2 &\mapsto \eta_2 \end{aligned}$$

Si ha che $\psi(a) = a$ per ogni $a \in \mathbb{C}$ e, se $p \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, $\psi(p) = p(\eta_0, \eta_1, \eta_2)$. Si mostra facilmente che ψ è un automorfismo, dunque possiamo procedere a far vedere che $\mathcal{J}(\varphi(\mathcal{C})) = \psi(\mathcal{J}(\mathcal{C}))$.

La curva $\varphi(\mathcal{C})$ ha equazione $F \circ \varphi^{-1} = 0$, dunque per calcolare $\mathcal{J}(\varphi(\mathcal{C}))$ dobbiamo calcolare le derivate parziali di $F \circ \varphi^{-1}$. Per alleggerire la notazione scriveremo $F_0(\dots)$ invece di $F_0(\eta_0(x_0, x_1, x_2), \eta_1(x_0, x_1, x_2), \eta_2(x_0, x_1, x_2))$, e similmente per F_1 ed F_2 . Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_0} &= F_0(\dots) \frac{\partial \eta_0}{x_0} + F_1(\dots) \frac{\partial \eta_1}{x_0} + F_2(\dots) \frac{\partial \eta_2}{x_0} \\ \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1} &= F_0(\dots) \frac{\partial \eta_0}{x_1} + F_1(\dots) \frac{\partial \eta_1}{x_1} + F_2(\dots) \frac{\partial \eta_2}{x_1} \\ \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2} &= F_0(\dots) \frac{\partial \eta_0}{x_2} + F_1(\dots) \frac{\partial \eta_1}{x_2} + F_2(\dots) \frac{\partial \eta_2}{x_2} \end{aligned}$$

Osservando a questo punto che η_0, η_1, η_2 sono polinomi di primo grado si ha che $\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} \in \mathbb{C} \forall i, j = 0, 1, 2$. Quindi:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_0} \\ \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(F \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0(\dots) \\ F_1(\dots) \\ F_2(\dots) \end{pmatrix}$$

e si ha dunque:

$$\mathcal{J}(\varphi(\mathcal{C})) = \left(\frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial x_0}, \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial x_1}, \frac{\partial(F \circ \varphi)}{\partial x_2} \right) = \underbrace{(F_0(\dots), F_1(\dots), F_2(\dots))}_J$$

Ma $J = (F_0 \circ \varphi, F_1 \circ \varphi, F_2 \circ \varphi) = (\psi(F_0), \psi(F_1), \psi(F_2)) = \psi((F_0, F_1, F_2)) = \psi(\mathcal{J}(\mathcal{C}))$ e questo conclude la dimostrazione \square

Vediamo ora alcuni esempi di schemi Jacobiani sfruttando quanto visto nell'osservazione 1.6.19.

Esempio 3.1.6 (Tre rette che si intersecano a due a due).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_0x_1x_2}_F = 0$$

\mathcal{C} ha tre nodi, che sono $P_1 = [1, 0, 0]$, $P_2 = [0, 1, 0]$ e $P_3 = [0, 0, 1]$. Le derivate parziali di F e $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ sono rispettivamente:

$$F_0 = x_1x_2 \quad F_1 = x_0x_2 \quad F_2 = x_0x_1 \quad J = \mathcal{J}(\mathcal{C}) = (x_1x_2, x_0x_2, x_0x_1)$$

Con CoCoA si trova che una decomposizione primaria minimale di J è:

$$J = \underbrace{(x_1, x_2)}_{J_1} \cap \underbrace{(x_0, x_2)}_{J_2} \cap \underbrace{(x_0, x_1)}_{J_3}$$

Chiaramente si ha $\mathcal{V}(J) = \{P_1, P_2, P_3\}$ e $\mathcal{V}(J_i) = P_i \forall i = 1, 2, 3$. Osserviamo che in questo caso J non ha alcuna componente primaria il cui radicale è \mathfrak{M} , dunque è saturo, e che inoltre i J_i non sono solo primari ma anche primi. Negli esempi successivi vedremo che, in generale, nessuna delle due cose è vera. Posto $X = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J)$ e $X_i = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J_i)$ calcolandone le funzioni (ed i polinomi) di Hilbert con CoCoA si trova che:

$$h_{X_i}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

quindi $P_{X_i}(t) = 1, i = 1, 2, 3$. Dunque X ha dimensione 0 e lunghezza globale 3, mentre ciascun X_i ha dimensione 0 e lunghezza 1.

Esempio 3.1.7 (Tre rette che si intersecano nello stesso punto).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_1x_2(x_1 - x_2)}_F = 0$$

\mathcal{C} ha un punto triplo ordinario, che è $P = [1, 0, 0]$. Le derivate parziali di F e $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ sono rispettivamente:

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 2x_1x_2 - x_2^2 \quad F_2 = x_1^2 - 2x_1x_2 \quad J = \mathcal{J}(\mathcal{C}) = (2x_1x_2 - x_2^2, x_1^2 - 2x_1x_2)$$

Con Singular si trova che J è primario, con radicale $\sqrt{J} = (x_1, x_2)$ e chiaramente si ha $\mathcal{V}(J) = \{P\}$. Vediamo quindi che in generale le componenti

primarie dello Jacobiano non sono anche prime: ciò contribuisce a consentire di ricavare maggiori informazioni sulla natura del punto singolare. Posto $X = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J)$ calcolandone la funzione (ed il polinomio) di Hilbert con CoCoA si trova che:

$$h_X(0) = 1, h_X(1) = 3, h_X(t) = 4 \quad \forall t \geq 0$$

quindi $P_X(t) = 4$. Dunque X ha dimensione 0 e lunghezza 4.

Esempio 3.1.8 (Una retta doppia ed una retta che si intersecano).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_1^2 x_2}_F = 0$$

\mathcal{C} possiede una retta di punti doppi, $r : x_1 = 0$, ed un punto triplo non ordinario (poichè possiede una tangente doppia ed una tangente semplice) in $P = [1, 0, 0]$. Le derivate parziali di F e $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ sono rispettivamente

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 2x_1x_2 \quad F_2 = x_1^2 \quad J = \mathcal{J}(\mathcal{C}) = (2x_1x_2, x_1^2)$$

Una decomposizione primaria minimale di J è:

$$J = \underbrace{(x_1^2, x_2)}_{J_1} \cap \underbrace{(x_1)}_{J_2}$$

Chiaramente si ha $\mathcal{V}(J) = r \cup P = r$, $\mathcal{V}(J_1) = P$ e $\mathcal{V}(J_2) = r$. Osserviamo che poichè $P \in r$ si ha $\mathcal{I}(r) \subset \mathcal{I}(P)$, quindi $\mathcal{I}(\mathcal{V}(J)) = \mathcal{I}(r) = (x_1)$, cioè l'ideale associato al luogo dei punti singolari di \mathcal{C} non tiene in considerazione il fatto che il punto P , sebbene appartenente alla retta r , sia una singolarità di tipo differente. L'ideale Jacobiano e la sua decomposizione primaria invece tengono conto di ciò e difatti si hanno due componenti primarie distinte: J_2 per le singolarità della retta r e J_1 per il punto P . Osserviamo che in questo caso J non ha alcuna componente primaria il cui radicale è \mathfrak{M} , poichè $\sqrt{J_1} = (x_1, x_2)$ e $\sqrt{J_2} = J_2$, dunque è saturo. Posto $X = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J)$ e $X_i = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J_i)$ calcolandone le funzioni (ed i polinomi) di Hilbert con CoCoA si trova che:

$$h_{X_1}(0) = 1, h_{X_1}(t) = 2 \quad \forall t \geq 0 \quad h_{X_2}(t) = t + 1 \quad \forall t \geq 0$$

quindi $P_{X_1}(t) = 2$ e $P_{X_2}(t) = t + 1$. Dunque X_1 ha dimensione 0 e lunghezza 2, X_2 ha dimensione 1 (come ci si aspettava, visto che corrisponde alla retta di punti doppi) e X ha anch'esso dimensione 1.

Esempio 3.1.9 (Una cubica irriducibile con una cuspidi di prima specie).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_0x_1^2 - x_2^3}_F = 0$$

\mathcal{C} possiede una cuspidi di prima specie in $P = [1, 0, 0]$. Le derivate parziali di F e $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ sono rispettivamente

$$F_0 = x_1^2 \quad F_1 = 2x_0x_1 \quad F_2 = -3x_2^2 \quad J = \mathcal{J}(\mathcal{C}) = (x_1^2, 2x_0x_1, -3x_2^2)$$

Con CoCoA si trova che una decomposizione primaria minimale di J è

$$J = \underbrace{(x_1, x_2^2)}_{J_1} \cap \underbrace{(x_0, x_1^2, x_2^2)}_{J_2}$$

La curva \mathcal{C} possiede un unico punto singolare in quanto $\mathcal{V}(J) = \{P\}$ mentre la decomposizione primaria di J ha due componenti primarie quindi possiamo subito dire, grazie all'osservazione 1.6.19, che J non è saturo e che il radicale di una delle sue componenti è l'ideale irrilevante: in effetti si vede subito che $x_0, x_1, x_2 \in \sqrt{J_2}$ e quindi $\sqrt{J_2} = \mathfrak{M}$, dunque possiamo anche non considerare tale componente e quindi concentrarci solo su $X_1 = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J_1)$. Calcolando la funzione (ed il polinomio) di Hilbert di X_1 con CoCoA si trova che:

$$h_{X_1}(0) = 1, h_{X_1}(t) = 2 \quad \forall t \geq 1$$

quindi $P_{X_1}(t) = 2$. Dunque X_1 ha dimensione 0 e lunghezza 2.

Esempio 3.1.10 (Una cubica irriducibile con un nodo ordinario).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_0x_1x_2 + x_1^3 - x_2^3}_F = 0$$

\mathcal{C} possiede un nodo ordinario in $P = [1, 0, 0]$. Le derivate parziali di F sono:

$$F_0 = x_1x_2 \quad F_1 = x_0x_2 + 3x_1^2 \quad F_2 = x_0x_1 - 3x_2^2$$

Posto $J = \mathcal{J}(\mathcal{C})$, con Singular si trova che una decomposizione primaria minimale di J è:

$$J = \underbrace{(x_1, x_2)}_{J_1} \cap \underbrace{(x_0^2, x_1^3, x_2^3, x_1x_2, 3x_1^2 + x_0x_2, x_0x_1 - 3x_2^2)}_{J_2}$$

Analogamente a quanto fatto nell'esempio precedente, possiamo subito dire che J non è saturo e che il radicale di una delle sue componenti è l'ideale irrilevante: in effetti si vede subito che $x_0, x_1, x_2 \in \sqrt{J_2}$ e quindi $\sqrt{J_2} = \mathfrak{M}$, dunque possiamo anche non considerare tale componente. Ci concentriamo quindi solo su $X_1 = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J_1)$. Calcolando la funzione (ed il polinomio) di Hilbert di X_1 con CoCoA si trova che:

$$h_{X_1}(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$$

quindi $P_{X_1}(t) = 1$. Dunque X_1 ha dimensione 0 e lunghezza 1. Osserviamo che la lunghezza è la stessa ottenuta per ciascun nodo nell'esempio delle tre rette che si incontrano a due a due, cioè tutti gli schemi Jacobiani associati ai nodi finora hanno lunghezza 1.

Esempio 3.1.11 (Una quartica irriducibile con tre cuspidi di prima specie).

Consideriamo la curva proiettiva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x_0^2x_1^2 + x_0^2x_2^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_0^2x_1x_2 - 2x_0x_1^2x_2 - 2x_0x_1x_2^2}_{F} = 0$$

Con CoCoA si dimostra che F è irriducibile, inoltre le derivate parziali di F sono:

$$F_0 = 2x_0x_1^2 + 2x_0x_2^2 - 4x_0x_1x_2 - 2x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2$$

$$F_1 = 2x_0^2x_1 + 2x_1x_2^2 - 2x_0^2x_2 - 4x_0x_1x_2 - 2x_0x_2^2$$

$$F_2 = 2x_0^2x_2 + 2x_1^2x_2 - 2x_0^2x_1 - 2x_0x_1^2 - 4x_0x_1x_2$$

Con Singular si trova che una decomposizione primaria minimale di $J = \mathcal{J}(\mathcal{C})$ è:

$$J = \underbrace{(x_2^2, x_1 - x_2)}_{J_1} \cap \underbrace{(x_2^2, x_0 - x_2)}_{J_2} \cap \underbrace{(x_1^2, x_0 - x_1)}_{J_3} \cap J_4 \quad \text{dove}$$

$$J_4 = (G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8)$$

$$G_1 = x_2^3 \quad G_2 = x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2^3 \quad G_3 = x_1^3 \quad G_4 = x_0^2 x_2^2 + x_0 x_2^3 - x_1 x_2^3$$

$$G_5 = x_0^2 x_1 - x_0^2 x_2 - x_0 x_2^2 + x_1 x_2^2 \quad G_6 = x_0 x_1^2 - x_1^2 x_2 + x_0 x_2^2 - x_1 x_2^2$$

$$G_7 = x_0 x_1 x_2 \quad G_8 = x_0^3$$

Anche in questo caso possiamo subito dire che J non è saturo e che il radicale di una delle sue componenti è l'ideale irrilevante: in effetti anche qui si vede subito che $\sqrt{J_4} = \mathfrak{M}$, dunque possiamo non considerare tale componente. Posto $X = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J)$ e $X_i = \text{Proj}(\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]/J_i)$ calcolandone le funzioni (ed i polinomi) di Hilbert con CoCoA si trova che:

$$h_{X_i}(0) = 1, h_{X_i}(t) = 2 \quad \forall t \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

quindi $P_{X_i}(t) = 2, i = 1, 2, 3$. Dunque ciascun X_i ha dimensione 0 e lunghezza 2.

Dalla decomposizione primaria di J si vede che \mathcal{C} ha esattamente tre punti singolari e studiando la curva localmente intorno a questi punti si vede che sono delle cuspidi di prima specie. Osserviamo quindi che, analogamente a quanto accaduto con i nodi, anche tutte le cuspidi di prima specie incontrate finora, ossia le tre di quest'esempio e quella dell'esempio su una cubica irriducibile con una cuspide, hanno la stessa lunghezza. Vedremo che questo non è un caso.

3.2 Il caso affine

Vogliamo ora definire lo schema Jacobiano per le curve algebriche affini in modo che come per il caso proiettivo il suo supporto sia l'insieme dei punti singolari della curva. In questo caso tuttavia non è sufficiente chiedere che si annullino le derivate parziali di un generatore della curva poichè per i polinomi qualunque non vale l'identità di Eulero e dunque bisogna anche imporre l'appartenenza alla curva.

Definizione 3.2.1.

Sia $\mathcal{C} : f = 0$ una curva affine. Si chiama ideale Jacobiano di \mathcal{C} l'ideale

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}) = (f, f_x, f_y) \subset \mathbb{C}[x, y]$$

dove f_x, f_y denotano come al solito le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Definizione 3.2.2.

Data una curva affine $\mathcal{C} : f = 0$ lo schema $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{C}))$ è detto schema Jacobiano di \mathcal{C} .

Proposizione 3.2.3.

Sia $\bar{\mathcal{C}} : F = 0$ una curva proiettiva tale che $\text{Sing } \bar{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\} = \emptyset$. Sia poi $\mathcal{C} : f = 0$ l'affinizzata di $\bar{\mathcal{C}}$ rispetto a x_0 . Allora lo schema Jacobiano di $\bar{\mathcal{C}}$ è isomorfo allo schema Jacobiano di \mathcal{C} .

Dimostrazione.

Poniamo $S = \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, $J = \mathcal{J}(\bar{\mathcal{C}})$ e $d = \deg F$. Dato che $S_{(x_0)}$ è una \mathbb{C} -algebra finitamente generata su \mathbb{C} da $\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}$ possiamo considerare la mappa di \mathbb{C} -algebre:

$$\begin{aligned} \alpha : S_{(x_0)} &\rightarrow \mathbb{C}[x, y] \\ \frac{x_1}{x_0} &\rightarrow x \\ \frac{x_2}{x_0} &\rightarrow y \end{aligned}$$

che è un isomorfismo di \mathbb{C} -algebre e quindi di anelli. Dunque, per la proposizione 1.6.7, α induce un isomorfismo di schemi $\text{Spec } S_{(x_0)} \cong \mathbb{A}^2$. In particolare, osservando che:

$$\alpha \left(\underbrace{\left(\frac{F}{x_0^d}, \frac{F_1}{x_0^{d-1}}, \frac{F_2}{x_0^{d-1}} \right)}_I \right) = (f, f_x, f_y) = \mathcal{J}(\mathcal{C})$$

si ha che $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{C})) \cong \text{Spec}(S_{(x_0)}/I)$, dunque per dimostrare la proposizione possiamo dimostrare che lo schema Jacobiano di $\bar{\mathcal{C}}$ è isomorfo a $\text{Spec}(S_{(x_0)}/I)$.

Osserviamo che, per [12] Proposizione II.2.5. (vedi anche 1.5.7), si ha:

$$(\mathcal{D}(x_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2|\mathcal{D}(x_0)}) \cong \text{Spec } S_{(x_0)} \quad (3.1)$$

e che, poichè $\text{Sing}(\bar{\mathcal{C}}) \cap \{x_0 = 0\} = \emptyset$ si ha che $\text{Proj}(S/J)$ è un sottoschema chiuso di $(\mathcal{D}(x_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2|\mathcal{D}(x_0)})$. Dalla dimostrazione della proposizione II.2.5. in [12] sappiamo che l'omeomorfismo dell'isomorfismo di schemi 3.1 è

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{D}(x_0) &\rightarrow \text{Spec } S_{(x_0)} \\ \mathfrak{p} &\rightarrow (\mathfrak{p}S_{x_0}) \cap S_{(x_0)} \end{aligned}$$

Osserviamo che, applicando l'identità di Eulero, si ha in $S_{(x_0)}$:

$$x_0F_0 + x_1F_1 + x_2F_2 = dF \Rightarrow \frac{x_0F_0 + x_1F_1 + x_2F_2}{x_0^d} = d\frac{F}{x_0^d}$$

da cui

$$\frac{F_0}{x_0^{d-1}} = d\frac{F}{x_0^d} - \frac{x_1}{x_0} \frac{F_1}{x_0^{d-1}} - \frac{x_2}{x_0} \frac{F_2}{x_0^{d-1}} \quad \frac{F}{x_0^d} = \frac{1}{d} \left(\frac{F_0}{x_0^{d-1}} + \frac{x_1}{x_0} \frac{F_1}{x_0^{d-1}} + \frac{x_2}{x_0} \frac{F_2}{x_0^{d-1}} \right)$$

e quindi in I il generatore $\frac{F}{x_0^d}$ può essere sostituito con $\frac{F_0}{x_0^{d-1}}$, cioè:

$$I = \left(\frac{F_0}{x_0^{d-1}}, \frac{F_1}{x_0^{d-1}}, \frac{F_2}{x_0^{d-1}} \right)$$

Si ha $JS_{x_0} = \left(\frac{F_0}{1}, \frac{F_1}{1}, \frac{F_2}{1} \right) \subset S_{x_0}$ da cui concludiamo che:

$$JS_{x_0} \cap S_{(x_0)} = \left(\frac{F_0}{x_0^{d-1}}, \frac{F_1}{x_0^{d-1}}, \frac{F_2}{x_0^{d-1}} \right) = I \quad (*)$$

Da ciò segue che un ideale primo omogeneo $\tilde{\mathfrak{p}}$ di S/J (che non contiene mai $(x_0)S/J$), cioè un ideale \mathfrak{p} primo omogeneo di S che contiene J , viene mandato in $(\mathfrak{p}S_{x_0}) \cap S_{(x_0)}$ da φ , e $(\mathfrak{p}S_{x_0}) \supset JS_{x_0}$, quindi $(\mathfrak{p}S_{x_0}) \cap S_{(x_0)} \supset (JS_{x_0}) \cap S_{(x_0)} = I$. Quindi $\varphi(\text{Proj}(S/J)) = \text{Spec}(S_{(x_0)}/I)$. Inoltre (*) permette di dire che anche i fasci $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S/J)}$ e $\mathcal{O}_{\text{Spec}(S_{(x_0)}/I)}$ sono isomorfi. Dunque $\text{Proj}(S/J) \cong \text{Spec}(S_{(x_0)}/I)$ e questo prova la tesi. \square

Osservazione 3.2.4.

Dalle proposizioni 3.1.5 e 3.2.3 segue che possiamo studiare indifferentemente lo schema Jacobiano proiettivo oppure affine se le curve sono ridotte, cioè quando il luogo singolare della curva è supportato su punti. Infatti, se \mathcal{D} è una curva proiettiva con punti singolari P_1, \dots, P_n , è sempre possibile portare con una proiettività la curva \mathcal{D} in una curva $\bar{\mathcal{C}}$ che non ha punti singolari su $x_0 = 0$, e poi studiare lo schema Jacobiano della curva affine $\mathcal{C} = \bar{\mathcal{C}} \cap \{x_0 = 0\}$

3.3 Il teorema di Mather-Yau

Consideriamo in \mathbb{A}^2 la curva:

$$\mathcal{C} : \underbrace{x^2 - y^2 - y^3}_f = 0$$

Tale curva è irriducibile ed ha un nodo in $O = (0, 0)$. Consideriamo a questo punto un intorno aperto U di O e mostriamo che $\mathcal{C} \cap U$ è ancora irriducibile. Per farlo osserviamo che, poichè stiamo utilizzando la topologia di Zariski, gli aperti non banali di $\mathcal{C} \cap U$ sono della forma $\mathcal{C} \cap U$ meno un numero finito di punti. Di conseguenza, poichè $\mathcal{C} \cap U$ ha un numero infinito di punti, due suoi aperti non vuoti si intersecano sempre e segue quindi dal Lemma 1.1.8. che $\mathcal{C} \cap U$ è irriducibile. Osserviamo quindi che, nonostante \mathcal{C} abbia due tangenti principali, e quindi due rami distinti in O , comunque si scelga un intorno U nella topologia di Zariski di O si ha che $\mathcal{C} \cap U$ rimane irriducibile. Se invece consideriamo \mathcal{C} come un insieme analitico di \mathbb{C}^2 , ed usiamo quindi la topologia euclidea di \mathbb{C}^2 anzichè quella di Zariski, vediamo che esiste un intorno aperto U di O tale che $\mathcal{C} \cap U$ si scrive come unione di due insiemi analitici distinti. Infatti:

$$x^2 - y^2 - y^3 = x^2 - y^2(1 + y) = (x - y\sqrt{1 + y})(x + y\sqrt{1 + y})$$

dove con la scrittura $\sqrt{1 + y}$ intendiamo una determinazione della radice quadrata di $1 + y$, che esiste in $|y| < 1$. Pertanto $x - y\sqrt{1 + y} = 0$ e $x + y\sqrt{1 + y} = 0$ sono due insiemi analitici in $|y| < 1$ e dunque localmente intorno ad O la curva \mathcal{C} è unione di questi due insiemi analitici. Questo esempio ci fa capire che per studiare le singolarità di una curva piana può essere molto utile passare dalla geometria algebrica alla geometria analitica complessa.

Osservazione 3.3.1.

Vogliamo a questo punto studiare più in generale lo schema Jacobiano di una curva $\mathcal{C} : f = 0$ che possiamo supporre essere affine per l'osservazione 3.2.4. Se il polinomio f è complicato $\mathcal{J}(\mathcal{C})$ e, di conseguenza, lo schema Jacobiano di \mathcal{C} possono essere particolarmente complessi da gestire. Consideriamo ad esempio la curva:

$$\mathcal{D} : x^2 - 21y^3 - 178x^2y^2 + 27xy^3 - 19y^4 + 12x^5 = 0$$

Essa ha come unico punto singolare una cuspidi di prima specie in $(0, 0)$ e si ha:

$$\mathcal{J}(\mathcal{D}) = (x^2 - 21y^3 + 17x^4 - 178x^2y^2 + 27xy^3 - 19y^4 + 12x^5, 2x - 356xy^2 + 27y^3 + 60x^4, -36y^2 - 356x^2y + 81xy^2 - 76y^3)$$

Lo schema Jacobiano di \mathcal{D} è chiaramente molto complicato da studiare nonostante sia presente soltanto una singolarità di tipo molto semplice. Consideriamo invece la curva:

$$\mathcal{D}' : y^2 - x^3 = 0$$

Anche essa ha come unico punto singolare una cuspidi di prima specie in $(0, 0)$ e si ha:

$$\mathcal{J}(\mathcal{D}') := (y^2 - x^3, -3x^2, 2y) = (x^2, y)$$

Dunque lo schema Jacobiano di \mathcal{D}' , pur essendo associato anch'esso ad una cuspidi di prima specie, è molto più semplice da studiare rispetto a quello di \mathcal{D} . Tuttavia, poichè i due schemi Jacobiani sono associati allo stesso tipo di singolarità, ci si potrebbe chiedere se:

$$\underbrace{\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{D}))}_X \cong \underbrace{\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{D}'))}_{X'}$$

Fortunatamente si può dare una risposta affermativa a tale domanda grazie al teorema di Mather-Yau tradotto algebricamente, come spiegato nell'osservazione 3.3.4 . Come vedremo tutto ciò è valido per qualunque curva piana e per qualunque tipo di singolarità isolata e ci consentirà dunque di studiare alcune singolarità riconducendoci a curve molto più semplici, come ad esempio nel caso di \mathcal{D} e di \mathcal{D}' .

In questa sezione per tutto quanto ha attinenza all'analisi complessa in più variabili ed alla teoria degli insiemi analitici complessi facciamo riferimento a [7],[9], [13] e [15]. Nell'enunciato del Teorema di Mather-Yau $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ denota la \mathbb{C} -algebra dei germi delle funzioni olomorfe in 0 , e se $(V, 0)$ è un germe di una ipersuperficie di \mathbb{C}^n in 0 , $\mathcal{I}(V)$ è l'ideale di $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ dei germi di funzioni che si annullano su V .

Teorema 3.3.2 (Mather-Yau).

Siano $(V, 0)$ e $(W, 0)$ germi di ipersuperfici in \mathbb{C}^n con $V \setminus \{0\}$ non singolare. Allora, posto $\mathcal{I}(V) = (f), \mathcal{I}(W) = (g) \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, le seguenti due condizioni sono equivalenti:

1. $(V, 0)$ è biolomorficamente equivalente a $(W, 0)$
2. Esiste un isomorfismo di \mathbb{C} -algebre tale che

$$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} / \left(g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$$

Osservazione 3.3.3.

La dimostrazione del fatto che 1. \Rightarrow 2. è abbastanza semplice. Infatti: sia $h : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ un germe di biolomorfia nell'origine tale che $h(V) = W$. Allora esiste $u \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ tale che $f = u(g \circ h)$ con $u(0) \neq 0$. Posto $h = (h_1, \dots, h_n)$, con $h_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}(g \circ h) + u \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \circ h \right) \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \left(g \circ h, \frac{\partial g}{\partial x_1} \circ h, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \circ h \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Analogamente si mostra che $\frac{\partial g}{\partial x_i} \in \left(f \circ h^{-1}, \frac{\partial f}{\partial x_1} \circ h^{-1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \circ h^{-1} \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Indicato con $h^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$ l'isomorfismo di \mathbb{C} -algebre tale che $h^*u = u \circ h$ si ha, per quanto appena visto, che:

$$h^* \left(g, \frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0} = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$$

Quindi h^* induce l'isomorfismo di \mathbb{C} -algebre di 2.

Per dimostrare invece l'implicazione inversa è necessario utilizzare strumenti più sofisticati e si rimanda pertanto a [14].

Osservazione 3.3.4.

Il teorema di Mather-Yau ci dice in particolare che se $\mathcal{C} : f = 0$ e $\mathcal{D} : g = 0$

sono curve algebriche piane ridotte singolari in 0, allora i germi delle due curve in 0 sono biolomorficamente equivalenti se e solo se:

$$\mathbb{C}\{x, y\}/(f, f_x, f_y)\mathbb{C}\{x, y\} \cong \mathbb{C}\{x, y\}/(g, g_x, g_y)\mathbb{C}\{x, y\} \quad (*)$$

Sia ora $X(\mathcal{C})$, rispettivamente $X(\mathcal{D})$, la componente supportata su 0 dello schema Jacobiano di \mathcal{C} , rispettivamente di \mathcal{D} . In [6] si dimostra che la condizione (*) equivale alla condizione:

$$X(\mathcal{C}) \cong X(\mathcal{D})$$

Riassumendo, schemi Jacobiani associati a punti singolari sono isomorfi se e solo se le singolarità sono analiticamente equivalenti; questo in particolare spiega perchè negli esempi visti i punti singolari dello stesso tipo avessero la stessa lunghezza. Nel seguito useremo questo criterio per descrivere lo schema Jacobiano in alcuni tipi di singolarità.

3.4 Ideali monomiali

Osservazione 3.4.1.

Consideriamo $I \subset \mathbb{C}[x, y]$ e supponiamo che I sia monomiale, ossia che ammetta un sistema di generatori formato da monomi. In tal caso allora esiste $A \subset \mathbb{N}^2$, tale che:

$$I = (x^i y^j)_{(i,j) \in A}$$

e, poichè lavoriamo sempre con ideali di anelli Noetheriani, possiamo supporre che A sia finito, diciamo $A = \{(i_1, j_1) \dots, (i_n, j_n)\}$. Inoltre è chiaro che se $(\bar{i}, \bar{j}) \in A$ ogni generatore della forma $x^i y^j$ con $i \geq \bar{i}$ e $j \geq \bar{j}$ è ridondante e dunque può essere eliminato e così facendo si arriva ad avere $i_s \neq i_t$ e $j_s \neq j_t \forall s, t = 1, \dots, n, s \neq t$. A questo punto ordiniamo A in modo che $i_1 < i_2 < \dots < i_n$ (di conseguenza $j_1 > j_2 > \dots > j_n$) e, per quanto detto, posizionando su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tutte le coppie $(i, j) \in A$ non avremo mai due punti con almeno una coordinata uguale, cioè nessuna delle rette che unisce due punti sarà verticale o orizzontale. Infine $\forall s = 1, \dots, n-1$ tracciamo il segmento che congiunge (i_s, j_s) con (i_{s+1}, j_s) e quello che congiunge (i_{s+1}, j_s) con (i_{s+1}, j_{s+1}) . Così facendo otteniamo una figura simile ad una "scaletta"

che ha un significato algebrico e geometrico molto importante: i monomi corrispondenti ai punti racchiusi dalla figura sono tutti e soli quelli non contenuti in I e, se $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$ è 0-dimensionale, il numero di quadratini contenuti nella scaletta è finito ed uguale alla lunghezza di $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$. Si osservi che $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$ è 0-dimensionale se e solo se $i_1 = 0$ e $j_n = 0$.

Esempio 3.4.2.

Consideriamo ad esempio l'ideale monomiale $I = (x^2y^3, x^5, y^4, x^3y^2)$. Riordinando come detto sopra, troviamo in A le coppie: $(0, 4) < (2, 3) < (3, 2) < (5, 0)$. Il disegno associato è il seguente:

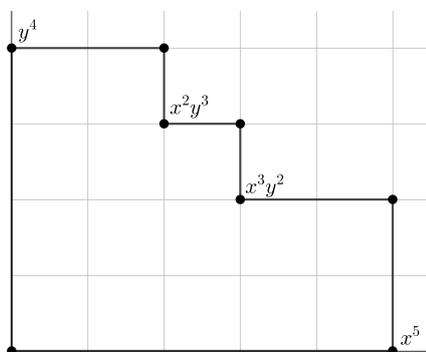


Figura 3.1: Rappresentazione grafica di $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$

Il numero di quadratini inclusi nella scaletta è 15, dunque $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/I)$ ha lunghezza 15.

Usiamo a questo punto l'osservazione 3.4.1 per analizzare gli schemi Jacobiani di alcuni punti singolari.

3.5 I punti m-poli ordinari

Vogliamo studiare lo schema Jacobiano associato ad un punto m -plo ordinario. Da 3.3.4 sappiamo che per tutti gli schemi Jacobiani delle curve che possiedono un punto singolare P che è m -plo ordinario si ha che le componenti dello schema supportate su P sono tra loro isomorfe. Dunque possiamo scegliere una curva che ci è comoda per svolgere i calcoli. Scegliamo allora la curva:

$$\mathcal{C} : x^m - y^m = 0$$

che ha un punto m -plo ordinario in $(0, 0)$ poichè $x^m - y^m = \prod_{i=1}^m (x - \xi_i y)$, dove le ξ_i sono le radici m -esime dell'unità e di conseguenza il cono tangente di \mathcal{C} in O è formato da m rette semplici. Il suo ideale Jacobiano è:

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}) = (x^m - y^m, mx^{m-1}, -my^{m-1}) = (x^{m-1}, y^{m-1})$$

che graficamente corrisponde a:

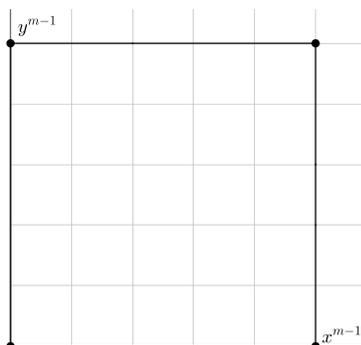


Figura 3.2: Rappresentazione grafica di $\text{Spec}(\mathbb{C}[x, y]/\mathcal{J}(\mathcal{C}))$

Dalla rappresentazione grafica si vede subito che la lunghezza dello schema Jacobiano in un punto m -plo ordinario è $(m - 1)^2$. Questo risultato è in accordo con quanto visto negli esempi 3.1.7 e 3.1.10. Nel primo caso infatti si aveva un punto triplo ordinario e si era visto che la sua lunghezza era 4, ed in effetti $4 = (3 - 1)^2$. Nel secondo invece si aveva un punto doppio ordinario, di lunghezza 1, ed in effetti $1 = (2 - 1)^2$.

3.6 I punti doppi

Vogliamo ora studiare lo schema Jacobiano associato ad un punto doppio. Per farlo vediamo come classificare i punti doppi di una curva ridotta: $\forall n \geq 1$ consideriamo le curve:

$$\mathcal{C}_n : y^2 = x^{n+1}$$

Ogni \mathcal{C}_n ha un unico punto singolare di molteplicità 2, in $(0, 0)$, detto di tipo A_n : se n è pari il punto è detto di tipo cuspidale, mentre se n è dispari il punto è detto di tipo nodale. Ad esempio A_1 è un nodo ordinario, A_2 è una cuspidale di prima specie, A_3 è un tacnodo, A_4 è una cuspidale di seconda specie, A_5 è

un oscnodo e così via. È possibile dimostrare che qualunque punto doppio di una curva ridotta è analiticamente equivalente ad un A_n e così facendo abbiamo una classificazione dei punti doppi a meno di equivalenza analitica. Vediamo quindi com'è fatto lo schema Jacobiano di una generica \mathcal{C}_n . L'ideale Jacobiano di \mathcal{C}_n è:

$$\mathcal{J}(\mathcal{C}_n) = (y^2 - x^{n+1}, -(n+1)x^n, y) = (x^n, y)$$

e di conseguenza lo schema Jacobiano di \mathcal{C}_n si rappresenta graficamente nel seguente modo:

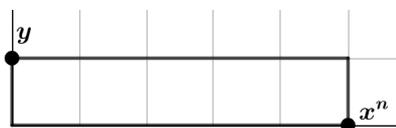


Figura 3.3: Rappresentazione grafica dello schema Jacobiano del punto A_n .

Dalla rappresentazione grafica si vede subito che la lunghezza dello schema Jacobiano in un punto doppio di tipo A_n è esattamente n . Anche questo risultato è in accordo con quanto visto in precedenza poiché ad esempio tutte le cuspidi di prima specie avevano lunghezza 2 ed in effetti sono degli A_2 .

Capitolo 4

I punti tripli

Vogliamo ora studiare i punti tripli di curve algebriche piane ridotte. Presa quindi \mathcal{C} una curva come appena detto ed O un suo punto, gli strumenti che utilizzeremo sono l'approssimazione ai rami di \mathcal{C} in O mediante curve razionali, analogamente a quanto si fa per i punti doppi, ed il poligono di Newton-Puiseux. Per tutto quanto concerne quest'ultimo ed i rami di una curva in un punto, si rimanda a [2] e [10], ma richiamiamo comunque alcuni risultati ed alcune definizioni che saranno molto utili nel seguito.

Definizione 4.0.1.

Siano $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ e $\mathcal{D} : g(x, y) = 0$ due curve algebriche affini passanti per un punto $P = (a, b) \in \mathbb{A}^2$. Si chiama molteplicità d'intersezione tra un ramo di \mathcal{C} e la curva \mathcal{D} in P l'ordine di $g(p, q)$ dove (p, q) è un rappresentante del ramo.

Definizione 4.0.2.

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva affine e siano (a, b) un suo punto ed R un ramo di \mathcal{C} in (a, b) . Si chiama molteplicità di R il minimo r delle molteplicità d'intersezione tra R e le rette passanti per (a, b) . Un ramo di molteplicità r è detto r -ramo. Si chiama inoltre tangente ad R l'unica retta la cui molteplicità d'intersezione con R è maggiore di r .

Osservazione 4.0.3.

Siano $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva algebrica piana affine, P un suo punto e R un ramo di \mathcal{C} in P . Preso un rappresentante $(p(T), q(T))$ di R si dimostra

(si veda ad esempio Lemma 7.1 di [2]) che la molteplicità di R è il minimo degli ordini di $p(T)$ e $q(T)$.

Il seguente risultato sarà fondamentale.

Teorema 4.0.4.

Sia $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ una curva affine. Allora l'equazione del cono tangente a \mathcal{C} in un suo punto p è il prodotto delle distinte rette tangenti ai distinti rami di \mathcal{C} in p , ciascuna di esse elevata alla molteplicità del ramo. In particolare, esiste un numero finito di rami in p e la somma delle loro molteplicità è la molteplicità di \mathcal{C} in p .

Dimostrazione.

Si veda [2] Teorema 7.2. □

Osservazione 4.0.5.

Dal teorema 4.0.4 segue immediatamente che una curva algebrica piana ridotta \mathcal{C} con un punto triplo in p avrà in p tre rami contati con molteplicità, cioè potrà avere o tre 1-rami, o un 2-ramo ed un 1-ramo o un 3-ramo.

Possiamo a questo punto iniziare con la nostra analisi. Consideriamo quindi una curva algebrica piana affine ridotta $\mathcal{C} : f(x, y) = 0$ con un punto triplo che, vista l'invarianza per traslazioni, possiamo supporre essere $O = (0, 0)$.

Le possibili configurazioni delle tangenti principali sono:

1. \mathcal{C} possiede in O tre tangenti principali distinte. In questo caso il punto è triplo ordinario e su di esso sappiamo già tutto per quanto visto in 3.5 e dunque non c'è altro da dire.
2. \mathcal{C} possiede in O una tangente principale doppia ed una tangente principale semplice, che possiamo supporre essere rispettivamente $y = 0$ e $x = 0$. Dunque \mathcal{C} ha in O un 1-ramo con tangente $x = 0$ e due rami contati con molteplicità (quindi o due 1-rami o un 2-ramo) con tangente principale $y = 0$. Questi ultimi sono, per quanto visto nel caso dei punti doppi, analiticamente equivalenti nell'origine ad una curva del tipo $y^2 - x^{n+1}$ per $n \geq 1$. Di conseguenza il punto triplo di \mathcal{C} è analiticamente equivalente a quello che la curva di equazione $x(y^2 - x^{n+1}) = 0$ presenta nell'origine per un certo $n \geq 1$.

3. \mathcal{C} possiede in O un'unica tangente principale tripla. Questo è il caso più "nuovo" rispetto ai due precedenti e va pertanto indagato in maniera più approfondita, cosa che verrà fatta nella successiva sezione.

4.0.1 Analisi dei punti tripli con una tangente tripla

Possiamo innanzitutto supporre che la tangente principale tripla sia la retta $r : y = 0$ e pertanto, f sarà della seguente forma:

$$f = y^3 + \sum_{i+j=4}^{\deg f} a_{ij}x^i y^j$$

Inoltre la tangente principale r si parametrizza come:

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}$$

e dunque $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r)$ è uguale alla potenza più bassa di t che compare nella risolvente:

$$f(t, 0) = a_{40}t^4 + a_{50}t^5 + a_{60}t^6 + a_{70}t^7 + a_{80}t^8 + a_{90}t^9 + \dots \quad (4.1)$$

cioè $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = \min \{a_{j0} \neq 0\}$. Analizziamo ora i seguenti casi:

1. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 4 \Leftrightarrow a_{40} \neq 0$
2. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 5 \Leftrightarrow a_{40} = 0, a_{50} \neq 0$
3. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 6 \Leftrightarrow a_{40} = a_{50} = 0, a_{60} \neq 0$

Caso 1. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 4 \Leftrightarrow a_{40} \neq 0$.

Per capire il comportamento locale di \mathcal{C} nell'origine utilizziamo il poligono di Newton-Puiseux per trovare le radici $p(x)$ di $f(x, y)$. L'ipotesi $a_{40} \neq 0$ implica che, indipendente dalla presenza o meno di altri termini, in questo caso il poligono di Newton-Puiseux è il seguente:

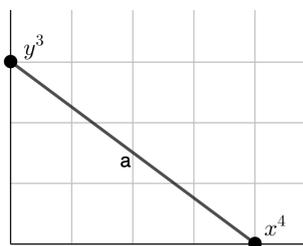


Figura 4.1: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 1

Infatti, gli unici termini che modificherebbero la forma del poligono sono quelli associati ai punti che stanno sotto all'unico lato \mathbf{a} , cioè $(1,0), (2,0), (3,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)$ e $(2,1)$, rispettivamente corrispondenti ai monomi $x, x^2, x^3, y, y^2, xy, xy^2$ e x^2y , che però non possono essere presenti per le ipotesi fatte su f .

A priori all'unico lato presente potrebbero essere associati tre 1-rami, un 1-ramo ed un 2-ramo oppure un 3-ramo; per capirlo iniziamo ad analizzare il lato. I monomi corrispondenti ad esso sono y^3 e $a_{40}x^4$, dunque bisogna cercare le radici di $y^3 + a_{40}x^4$ rispetto a y . Si ha:

$$y^3 + a_{40}x^4 = 0 \Leftrightarrow y = cx^{\frac{4}{3}}, \quad c^3 = -a_{40} \quad (4.2)$$

Scegliamo per ora una qualunque radice cubica di $-a_{40}$, che per semplicità indichiamo con c . Da (4.2) segue che le radici di $f(x, y)$ saranno della forma $p(x) = x^{\frac{4}{3}}(c + p_1(x))$, con $p_1(x)$ serie di Puiseux tale che $p_1(0) = 0$. Indipendentemente dal fatto che a questa scelta di c siano associati uno, due o tre rami, ciascuno di essi sarà della forma:

$$(T^3, cT^4 + \dots) \quad (4.3)$$

differendo eventualmente, da un certo punto in poi, per la serie della seconda coordinata. Dall'osservazione 4.0.3 si vede che, poichè alcuni termini successivi della serie di Puiseux nella seconda coordinata potrebbero avere esponente non intero, un ramo di questa forma ha almeno molteplicità 3. Tuttavia, per l'osservazione 4.0.5, si ha che la sua molteplicità non può essere più di 3 e quindi è esattamente 3. Ancora per l'osservazione 4.0.5, si deduce quindi che \mathcal{C} ha un unico 3-ramo e che le tre possibili scelte di c danno origine a 3 parametrizzazioni equivalenti dello stesso ramo. A questo

punto l'analisi di tale caso è già conclusa poichè abbiamo individuato tutti i rami di \mathcal{C} in O e conosciamo dunque il suo comportamento locale.

Tuttavia, possiamo anche sfruttare il discorso fatto per vedere cosa accade procedendo in maniera analoga a quella utilizzata per i punti doppi, ossia tentando di approssimare \mathcal{C} in O mediante curve razionali e lisce in O di equazioni parametriche e cartesiane rispettivamente, per un opportuno r :

$$\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r : \begin{cases} x = t \\ y = \sum_{i=2}^r \lambda_i t^i \end{cases} \quad t \in \mathbb{C}, \quad y = \sum_{i=2}^r \lambda_i x^i \quad \left(\prod_{i=2}^r \lambda_i \neq 0 \right) \quad (4.4)$$

Quanto appena detto ci dice che percorrendo tale strada non troveremo alcuna curva osculatrice poichè curve del genere, essendo lisce, possono approssimare solo 1-rami. A conferma di ciò si osservi che la risolvente è:

$$f(t, \sum_{i=2}^r \lambda_i t^i) = a_{40}t^4 + (a_{50} + a_{31}\lambda_2)t^5 + (\lambda_2^3 + a_{22}\lambda_2^2 + a_{41}\lambda_2 + a_{31}\lambda_3)t^6 + \dots \quad (4.5)$$

dunque, poichè nelle nostre ipotesi $a_{40} \neq 0$, nessuna $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ interseca \mathcal{C} con molteplicità maggiore di 4 e quindi non si ha alcuna curva osculatrice.

Tuttavia, il fatto che un rappresentante del ramo sia $(T^3, cT^4 + \dots)$ ci suggerisce di utilizzare la seguente famiglia:

$$\Gamma_\lambda : \begin{cases} x = t^3 \\ y = \lambda t^4 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^3 = \lambda^3 x^4 \quad (\lambda \neq 0) \quad (4.6)$$

In questo caso infatti la risolvente è:

$$f(t^3, \lambda t^4) = (\lambda^3 + a_{40})t^{12} + (\dots)t^{13} + \dots \quad (4.7)$$

dunque, indicate con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le tre soluzioni di $\lambda^3 + a_{40} = 0$, si ha che $\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2}, \Gamma_{\lambda_3}$ intersecano \mathcal{C} in O con molteplicità almeno 13, ossia più di qualunque altra Γ_λ e sono dunque delle curve osculatrici. Osserviamo però che in realtà, poichè nell'equazione cartesiana di Γ_λ il coefficiente λ compare solo al cubo, si ha che $\Gamma_{\lambda_1}, \Gamma_{\lambda_2}, \Gamma_{\lambda_3}$ sono in realtà la stessa curva, precisamente quella di equazione $y^3 = -a_{40}x^4$. In questo caso abbiamo dunque un unico ramo approssimato dalla curva osculatrice Γ_{λ_1} .

Caso 2. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 5 \Leftrightarrow a_{40} = 0, a_{50} \neq 0$.

In questo caso dobbiamo distinguere due sottocasi:

• **Caso 2.1** $a_{31} \neq 0$.

Usiamo nuovamente il poligono di Newton-Puiseux per capire meglio il comportamento di \mathcal{C} in O . Sotto le ipotesi di questo caso il poligono è il seguente:

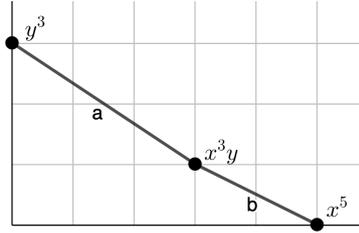


Figura 4.2: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 2.1

Il lato **a** ha altezza due, dunque ad esso potrebbero essere associati due 1-rami o un 2-ramo, analizziamo quindi il lato per capire cosa accade. I monomi ad esso associati sono y^3 e $a_{31}x^3y$ dunque bisogna cercare le radici di $y^2 + a_{31}x^3$. Procedendo come nel caso precedente si trova che entrambi i rami, eventualmente coincidenti, sono della forma:

$$(T^2, cT^3 + \dots) \quad (4.8)$$

con $c^2 = -a_{31}$. Analogamente al caso 1 si deduce che si ha un unico 2-ramo associato a tale lato.

Il lato **b** è invece un lato di altezza 1 quindi ad esso non può che essere associato un unico 1-ramo. Poichè i monomi corrispondenti a **b** sono $a_{31}x^3y$ e $a_{50}x^5$ dobbiamo cercare le radici di $a_{31}y + a_{50}x^2$ e, procedendo come già visto, si trova che il ramo in questione è:

$$(T, -\frac{a_{50}}{a_{31}}T^2 + \dots) \quad (4.9)$$

Come nel caso 1 l'analisi a questo punto è già conclusa, perchè abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità, ma vediamo comunque cosa accade approssimando con le $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$.

In questo caso nella risolvente (4.5) il termine di grado 4 è assente e si trova

quindi che, affinché una $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ sia osculatrice, deve essere $\lambda_2 = -\frac{a_{50}}{a_{31}}$. Chiaramente esistono infinite $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ osculatrici ma poichè già un'opportuna scelta di λ_2 consente di trovarne una, analogamente a quanto si fa con i punti doppi possiamo fermarci al grado due ed approssimare quindi un ramo della curva con la parabola osculatrice $\Omega_{-\frac{a_{50}}{a_{31}}}^2 : y = -\frac{a_{50}}{a_{31}}x^2$. Tuttavia, nessuna delle infinite $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ osculatrici, essendo esse lisce in O , può approssimare il 2-ramo. Poichè sappiamo però che tale ramo è $(T^2, cT^3 + \dots)$, possiamo provare ad utilizzare la seguente famiglia di curve:

$$\Delta_\lambda : \begin{cases} x = t^2 \\ y = \lambda t^3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^2 = \lambda^2 x^3 \quad (\lambda \neq 0) \quad (4.10)$$

La risolvente è:

$$f(t^2, \lambda t^3) = \cancel{a_{40}t^8} + (\lambda^3 + a_{31}\lambda)t^9 + (\dots)t^{10} + \dots \quad (4.11)$$

Il coefficiente di t^9 in (4.11) si scrive come $\lambda(\lambda^2 + a_{31})$ dunque ha una radice nulla, che quindi non va considerata, e due radici $\lambda_{1,2}$ che sono le due radici quadrate di $-a_{31}$ e che però, analogamente a quanto visto nel caso 1, individuano la stessa curva osculatrice $\Delta_{\lambda_1} : y^2 = -a_{31}x^3$. In questo caso quindi \mathcal{C} ha in O un 1-ramo approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{-\frac{a_{50}}{a_{31}}}^2$ ed un 2-ramo approssimato dalla curva osculatrice Δ_{λ_1} e poichè abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità l'analisi termina.

- **Caso 2.2** $a_{31} = 0$.

Sotto le ipotesi di questo caso il poligono di Newton-Puiseux è il seguente:

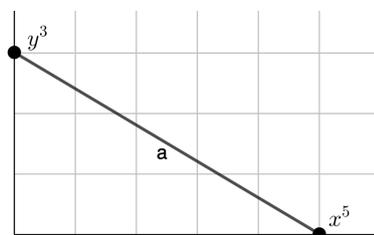


Figura 4.3: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 2.2

L'unico lato \mathbf{a} potrebbe corrispondere a tre 1-rami, oppure ad un 1-ramo ed un 2-ramo, oppure ad un solo 3-ramo. I monomi associati a tale lato sono y^3 e $a_{50}x^5$, quindi bisogna cercare le radici di $y^3 + a_{50}x^5$. Utilizzando il solito procedimento si trova che si ha un unico 3-ramo:

$$(T^3, cT^5 + \dots) \quad (4.12)$$

con $c^3 = -a_{50}$, dove le possibili scelte di c danno origine a tre parametrizzazioni equivalenti. A questo punto l'analisi è già terminata, poiché abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità ma, come per i casi precedenti vediamo cosa accade usando le $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$.

La presenza di un 3-ramo indica che non possono esserci $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ osculatrici, ed in effetti sotto le ipotesi di questo caso nella risultante (4.5) il termine di grado 5 non può mai annullarsi. La parametrizzazione trovata del ramo suggerisce di usare la seguente famiglia di curve:

$$\Pi_\lambda : \begin{cases} x = t^3 \\ y = \lambda t^5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^3 = \lambda^3 x^5 \quad (\lambda \neq 0) \quad (4.13)$$

La risolvente è:

$$f(t^3, \lambda t^5) = a_{40}t^{12} + a_{31}\lambda t^{14} + (\lambda^3 + a_{50})t^{15} + (\dots)t^{16} + \dots \quad (4.14)$$

dunque, dette $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le radici di $\lambda^3 + a_{50}$ si ha che le tre curve $\Pi_{\lambda_1}, \Pi_{\lambda_2}, \Pi_{\lambda_3}$ osculatrici sono uguali, cioè si ha un'unica Π_λ osculatrice che è $\Pi_{\lambda_1} : y^3 = -a_{50}x^5$. In questo caso dunque abbiamo un unico 3-ramo approssimato dalla curva osculatrice Π_{λ_1} .

Caso 3. $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 6 \Leftrightarrow a_{40} = a_{50} = 0, a_{60} \neq 0$.

Dobbiamo qua distinguere due sottocasi:

- **Caso 3.1** $a_{31} \neq 0$.

In questo caso il poligono di Newton-Puiseux è il seguente:

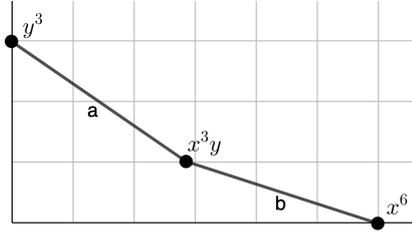


Figura 4.4: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.1

Al lato **a** possono essere associati due 1-rami o un 2-ramo, mentre al lato **b** sarà sicuramente associato un 1-ramo. Ripetendo i passaggi visti nel caso 2.1 si trova che al lato **a** è associato un unico 2-ramo come in (4.8) e che questo è approssimato dalla curva osculatrice Δ_{λ_1} , con $\lambda_1^2 = -a_{31}$. Per il lato **b**, essendo ad esso associati i monomi $a_{31}x^3y$ e $a_{60}x^6$, bisogna cercare le radici di $a_{31}y + a_{60}x^3$. Con il solito procedimento si trova che il ramo corrispondente è:

$$(T, -\frac{a_{60}}{a_{31}}T^3 + \dots) \quad (4.15)$$

e, in maniera analoga a quanto fatto per l'1-ramo del caso 2.1, si trova che esso è approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{0, -\frac{a_{60}}{a_{31}}}^3 : y = -\frac{a_{60}}{a_{31}}x^3$. Ricapitolando dunque in questo caso abbiamo un 2-ramo approssimato dalla curva osculatrice Δ_{λ_1} ed un 1-ramo approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{0, -\frac{a_{60}}{a_{31}}}^3$.

• **Caso 3.2** $a_{31} = 0$.

Prima di procedere definiamo, al fine di semplificare la successiva trattazione, i seguenti polinomi in una variabile:

$$\begin{aligned} \varphi_6(\lambda) &= \lambda^3 + a_{22}\lambda^2 + a_{41}\lambda + a_{60} \\ \varphi_7(\lambda) &= a_{13}\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{51}\lambda + a_{70} \\ \varphi_8(\lambda) &= a_{04}\lambda^4 + a_{23}\lambda^3 + a_{42}\lambda^2 + a_{61}\lambda + a_{80} \\ \varphi_9(\lambda) &= a_{14}\lambda^4 + a_{33}\lambda^3 + a_{52}\lambda^2 + a_{71}\lambda + a_{90} \end{aligned}$$

Iniziamo ora l'analisi di questo caso. Sotto le nostre ipotesi il poligono di Newton-Puiseux è il seguente:

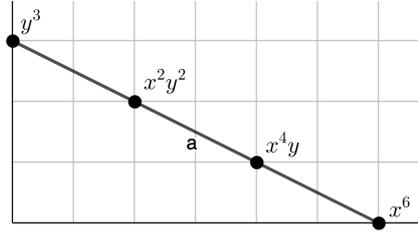


Figura 4.5: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3

Abbiamo quindi un unico lato \mathbf{a} , che come al solito potrebbe corrispondere a tre 1-rami, oppure ad un 2-ramo ed un 1-ramo oppure ad un solo 3-ramo. Poichè i monomi associati ad \mathbf{a} sono y^3 , $a_{22}x^2y^2$, $a_{41}x^4y$ e $a_{60}x^6$, dobbiamo cercare le radici di $y^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{41}x^4y + a_{60}x^6$. Si vede facilmente che, dette $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ le radici di $\varphi_6(\lambda)$ (non necessariamente tutte distinte), si ha:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -a_{22}$$

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3 = a_{41}$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -a_{60}$$

da cui:

$$y^3 + a_{22}x^2y^2 + a_{41}x^4y + a_{60}x^6 = (y - \lambda_1x^2)(y - \lambda_2x^2)(y - \lambda_3x^2) \quad (4.16)$$

Convieni a questo punto distinguere tre sottocasi a seconda delle molteplicità delle radici di $\varphi_6(\lambda)$:

– **Caso 3.2.1** φ_6 ha tre radici distinte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Iniziamo ad analizzare la radice λ_1 . Una radice ad essa associata sarà della forma $p(x) = x^2(\lambda_1 + p_1(x))$ con $p_1(x)$ serie di Puiseux tale che $p(0) = 0$. Per trovare $p_1(x)$ possiamo procedere per ricorrenza. Si ha:

$$\begin{aligned} f(x, x^2(\lambda_1 + y_1)) &= x^6 \left(\cancel{\varphi_6(\lambda_1)} + \varphi_6'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_6''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_6'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 \right) + \\ &\quad x^7 \left(\varphi_7(\lambda_1) + \varphi_7'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_7''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_7'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 \right) + \\ &\quad x^8 \left(\varphi_8(\lambda_1) + \varphi_8'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_8''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_8'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_8^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 \right) + \\ &\quad x^9 \left(\varphi_9(\lambda_1) + \varphi_9'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_9''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_9'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_9^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 + \frac{\varphi_9^{(5)}(\lambda_1)}{5!}y_1^5 \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

e, dividendo $f(x, x^2(\lambda_1 + y_1))$ per x_6 (e sfruttando il fatto che $\frac{\varphi_6'''}{3!} = 1$), otteniamo un polinomio che nel seguito denotiamo $f_1(x, y_1)$:

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) = & \varphi_6'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_6''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + y_1^3 + \\ & x \left(\varphi_7(\lambda_1) + \varphi_7'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_7''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_7'''}{3!}y_1^3 \right) + \\ & x^2 \left(\varphi_8(\lambda_1) + \varphi_8'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_8''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_8'''}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_8^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 \right) + \\ & x^3 \left(\varphi_9(\lambda_1) + \varphi_9'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_9''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_9'''}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_9^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 + \frac{\varphi_9^{(5)}(\lambda_1)}{5!}y_1^5 \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.18)$$

Poichè λ_1 è una radice semplice di $\varphi_6(\lambda)$, si ha $\varphi_6'(\lambda_1) \neq 0$. Dunque, per la generalizzazione del Teorema delle Funzioni Implicite alle serie di Puiseux (si veda [2] Lemma 6.16), si ha che $p_1(x)$, e quindi anche $p(x)$, è unica e possiamo dunque fermarci con l'analisi dei rami dati dalla radice λ_1 . Ripetendo lo stesso ragionamento anche con le radici λ_2 e λ_3 si trova che \mathcal{C} ha in O i seguenti tre 1-rami:

$$(T, \lambda_1 T^2 + \dots) \quad (T, \lambda_2 T^2 + \dots) \quad (T, \lambda_3 T^2 + \dots) \quad (4.19)$$

che si vede, con ragionamenti analoghi a quelli già visti, essere approssimati dalle tre seguenti parabole osculatrici distinte:

$$\Omega_{\lambda_1}^2 : y = \lambda_1 x^2 \quad \Omega_{\lambda_2}^2 : y = \lambda_2 x^2 \quad \Omega_{\lambda_3}^2 : y = \lambda_3 x^2$$

Abbiamo dunque individuato tutti i rami di \mathcal{C} in O e possiamo terminare l'analisi di questo caso.

– **Caso 3.2.2** φ_6 ha una radice doppia λ_1 ed una radice semplice λ_2 .

Procedendo come nel caso 3.2.1 si trova che alla radice semplice λ_2 è associato il seguente 1-ramo:

$$(T, \lambda_2 T^2 + \dots) \quad (4.20)$$

approssimato dalla parabola osculatrice $\Omega_{\lambda_1}^2$. Per quanto riguarda la radice doppia invece, a priori non si può sapere se ad essa saranno associati due 1-rami o un 2-ramo, ma poichè abbiamo solo due rami contati con molteplicità da analizzare l'analisi procede in modo analogo a quello dei punti doppi. Dunque anche questo caso è esaurito.

– **Caso 3.2.3** φ_6 ha un'unica radice tripla λ_1 .

Iniziamo osservando che, poichè λ_1 è radice tripla di φ_6 , vale quanto segue:

$$\varphi_6(\lambda_1) = \varphi_6'(\lambda_1) = \varphi_6''(\lambda_1) = 0 \quad (4.21)$$

Procedendo come nei due casi precedenti, si trova che qualunque radice di $f(x, y)$ è della forma $p(x) = x^2(\lambda_1 + p_1(x))$, con $p_1(x)$ che si può ricavare a partire dal poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$. Dunque qualunque ramo di \mathcal{C} in O deve essere della forma:

$$(T, \lambda_1 T^2 + \dots) \quad (4.22)$$

Per continuare l'analisi bisogna quindi distinguere degli ulteriori sotto-casi a seconda delle diverse forme che il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ può assumere. Per farlo iniziamo osservando che, per (4.21), il polinomio $f_1(x, y_1)$ diventa:

$$\begin{aligned} f_1(x, y_1) = & y_1^3 + x \left(\varphi_7(\lambda_1) + \varphi_7'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_7''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_7'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 \right) + \\ & x^2 \left(\varphi_8(\lambda_1) + \varphi_8'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_8''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_8'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_8^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 \right) + \dots \\ & x^3 \left(\varphi_9(\lambda_1) + \varphi_9'(\lambda_1)y_1 + \frac{\varphi_9''(\lambda_1)}{2}y_1^2 + \frac{\varphi_9'''(\lambda_1)}{3!}y_1^3 + \frac{\varphi_9^{(4)}(\lambda_1)}{4!}y_1^4 + \frac{\varphi_9^{(5)}(\lambda_1)}{5!}y_1^5 \right) + \dots \end{aligned} \quad (4.23)$$

Chiaramente in generale il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ può assumere infinite configurazioni ma noi ci limiteremo a considerare soltanto i casi in cui la potenza più bassa di x che compare con coefficiente non nullo in $f_1(x, y_1)$ è ≤ 3 . I poligoni di Newton-Puiseux che si possono ottenere sono i seguenti:

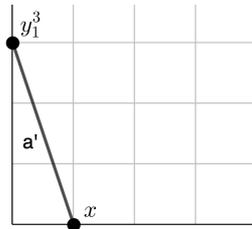


Figura 4.6: Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1) \neq 0$

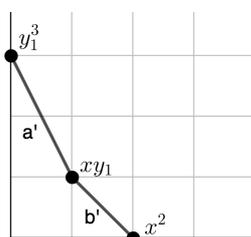


Figura 4.7: Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_7'(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) \neq 0$

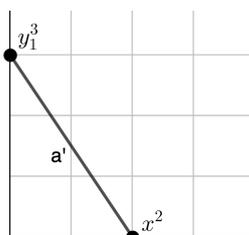


Figura 4.8: Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_7'(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_8(\lambda_1) \neq 0$

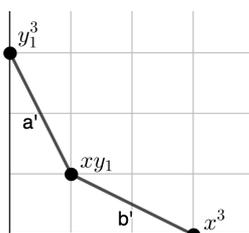


Figura 4.9: Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_7'(\lambda_1), \varphi_9(\lambda_1) \neq 0$

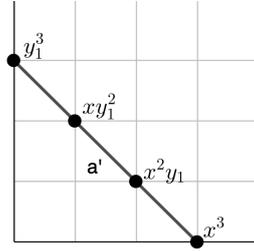


Figura 4.10: Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ se $\varphi_7(\lambda_1), \varphi_7'(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_9(\lambda_1) \neq 0$

Prima di iniziare ad analizzare i vari casi osserviamo che il fatto che tutti i rami siano come in (4.22), ossia che siano tutti uguali fino al secondo ordine, ci suggerisce che in questo caso ci sia un'unica parabola osculatrice $\Omega_{\lambda_1}^2 : y = \lambda_1 x^2$. In effetti la risolvete tra una generica $\Omega_\lambda^2 : y = \lambda x^2$ e \mathcal{C} è:

$$f(t, \lambda t^2) = \cancel{a_{40}t^4} + (\cancel{a_{31}\lambda + a_{50}})t^5 + \varphi_6(\lambda)t^6 + \varphi_7(\lambda)t^7 + \varphi_8(\lambda)t^8 + \varphi_9(\lambda)t^9 + \dots \quad (4.24)$$

quindi tutte e sole le parabole osculatrici sono quelle che si ottengono in corrispondenza dei λ che annullano φ_6 , cioè solo per $\lambda = \lambda_1$. Inoltre osserviamo che da (4.24) seguono le seguenti equivalenze:

- * $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 7 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1) \neq 0$.
- * $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 8 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_8(\lambda_1) \neq 0$.
- * $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 9 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1), \varphi_8(\lambda_1) = 0$ e $\varphi_9(\lambda_1) \neq 0$.

Quindi, così come all'inizio avevamo distinto tre casi a seconda della molteplicità $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r)$, distinguiamo a questo punto tre sotto casi a seconda della molteplicità $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2)$. Così facendo i casi corrispondenti alle figure 4.6, risp. 4.7 e 4.8, risp. 4.9 e 4.10, sono i casi 3.2.3.1, che corrisponde a $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 7$, risp. i 2 sottocasi di 3.2.3.2, che corrisponde a $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 8$, risp. i due sottocasi di 3.2.3.3, che corrisponde a $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 9$.

- * **Caso 3.2.3.1** $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 7 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1) \neq 0$

In questo caso il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ è il seguente:

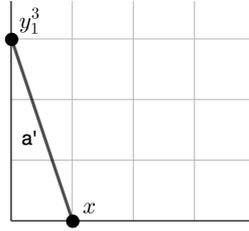


Figura 4.11: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3.1

Anche in questo caso non sappiamo se all'unico lato \mathbf{a}' di altezza tre saranno associati tre 1-rami, un 2-ramo ed un 1-ramo o un 3-ramo e, come al solito, per capirlo iniziamo ad analizzarlo.

I monomi ad esso corrispondenti sono y_1^3 e $\varphi_7(\lambda_1)x$, quindi dobbiamo cercare le radici di $y_1^3 + \varphi_7(\lambda_1)x$ rispetto ad y_1 . Si ha:

$$y_1^3 + \varphi_7(\lambda_1)x = 0 \Leftrightarrow y = cx^{\frac{1}{3}}, \quad c^3 = -\varphi_7(\lambda_1) \quad (4.25)$$

Scegliamo per ora una qualunque radice cubica di $-\varphi_7(\lambda_1)$, che per semplicità chiamiamo c . Si ha allora che una radice di $f_1(x, y_1)$ sarà della forma $p_1(x) = c(x^{\frac{1}{3}} + p_2(x))$ e di conseguenza la corrispondente radice di $f(x, y)$ sarà $p(x) = x^2(\lambda_1 + p_1(x)) = x^2(\lambda_1 + cx^{\frac{1}{3}} + \dots)$. Da ciò segue che il ramo che si ottiene per questa scelta di c è:

$$(T^3, \lambda_1 T^6 + cT^7 + \dots) \quad (4.26)$$

Con ragionamenti analoghi a quelli visti si deduce che tale ramo è un 3-ramo e che di conseguenza le tre possibili scelte di c danno origine a tre parametrizzazioni equivalenti. Anche in questo caso l'analisi termina poiché abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità. Poiché il ramo è un 3-ramo possiamo subito dire che non esistono $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ osculatrici. La (4.26) suggerisce di utilizzare la seguente famiglia per approssimare il ramo:

$$\Phi_\mu : \begin{cases} x = t^3 \\ y = \lambda_1 t^6 + \mu t^7 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^3 = 3\lambda_1 x^2 y^2 - 3\lambda_1^2 x^4 y + \lambda_1^3 x^6 + \mu^3 x^7 \quad (\mu \neq 0) \quad (4.27)$$

Intersecando Φ_μ e \mathcal{C} si ottiene in effetti la risolvente:

$$f(t^3, \lambda_1 t^6 + \mu t^7) = \cancel{a_{40} t^{12}} + (\cancel{a_{31} \lambda_1 + a_{50}}) t^{15} + \cancel{a_{31} \mu} t^{16} + \cancel{\varphi_6(\lambda_1)} t^{18} + \frac{\cancel{\varphi_6'(\lambda_1)} \mu t^{19}}{2} + \frac{\varphi_6''(\lambda_1)}{2} \mu^2 t^{20} + (\mu^3 + \varphi_7(\lambda_1)) t^{21} + \dots \quad (4.28)$$

Dunque, indicate con μ_1, μ_2, μ_3 le tre radici di $\mu^3 + \varphi_7(\lambda_1)$ si ha che le tre curve osculatrici $\Phi_{\mu_1}, \Phi_{\mu_2}, \Phi_{\mu_3}$ sono uguali, ossia si ha un'unica Φ_μ osculatrice che è

$$\Phi_{\mu_1} : y^3 = 3\lambda_1 x^2 y^2 - 3\lambda_1^2 x^4 y + \lambda_1^3 x^6 - \varphi_7(\lambda_1) x^7$$

In questo caso dunque abbiamo trovato un unico 3-ramo approssimato dalla curva osculatrice Φ_{μ_1} .

* **Caso 3.2.3.2** $\mathcal{J}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 8 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1) = 0, \varphi_8(\lambda_1) \neq 0$

Come anticipato dobbiamo distinguere due sottocasi:

· **Caso 3.2.3.2.1** $\varphi_7'(\lambda_1) \neq 0$

In questo caso il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ è il seguente:

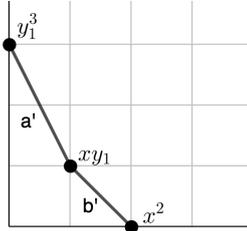


Figura 4.12: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3.2.1

Poichè il lato \mathbf{b}' ha altezza 1, possiamo subito dire che darà origine ad un 1-ramo e, ripetendo il solito procedimento, si trova che il ramo ad esso associato è:

$$(T, \lambda_1 T^2 - \frac{\varphi_8(\lambda_1)}{\varphi_7'(\lambda_1)} T^3 + \dots) \quad (4.29)$$

Riguardo al lato \mathbf{a}' , non sappiamo se darà origine a due 1-rami o ad un 2-ramo. I monomi ad esso associato sono y_1^3 e $\varphi_7'(\lambda_1)xy_1$, dunque bisogna cercare le radici di $y_1^2 + \varphi_7'(\lambda_1)x$, che sono $y = cx^{\frac{1}{2}}$ con $c^2 = -\varphi_7'(\lambda_1)$. Con ragionamento analogo a quello del caso

3.2.3.1 si trova che le due possibili scelte di c danno origine a due parametrizzazioni equivalenti del seguente 2-ramo:

$$(T^2, \lambda_1 T^4 + cT^5 + \dots) \quad (4.30)$$

A questo punto l'analisi è terminata poichè abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità.

Volendo comunque cercare le curve osculatrici ai due rami, si ha che il 2-ramo non potrà essere approssimato da nessuna $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$, ma (4.30) suggerisce di utilizzare la seguente famiglia di curve:

$$\Psi_\mu : \begin{cases} x = t^2 \\ y = \lambda_1 t^4 + \mu t^5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^2 = 2\lambda_1 x^2 y - \lambda_1^2 x^4 + \mu^2 x^5 \quad (\mu \neq 0) \quad (4.31)$$

Intersecando Ψ_μ con \mathcal{C} si ottiene la seguente risolvente:

$$f(t^2, \lambda_1 t^4 + \mu t^5) = \cancel{a_{40} t^8} + \cancel{(a_{31} \lambda_1 + a_{50}) t^{10}} + \cancel{a_{31} \mu t^{11}} + \cancel{\varphi_6(\lambda_1) t^{12}} + \cancel{\varphi_6'(\lambda_1) \mu t^{13}} + \frac{\varphi_6''(\lambda_1)}{2} \mu^2 + \varphi_7(\lambda_1) t^{14} + (\mu^3 + \varphi_7'(\lambda_1) \mu) t^{15} + \dots \quad (4.32)$$

Il coefficiente di t^{15} si scrive come $\mu(\mu^2 + \varphi_7'(\lambda_1))$ dunque, dette μ_1, μ_2 le radici di $\mu^2 + \varphi_7'(\lambda_1)$ si ha che le due curve osculatrici Ψ_{μ_1} e Ψ_{μ_2} sono uguali e dunque abbiamo un'unica Ψ_μ osculatrice che è:

$$\Psi_{\mu_1} : y^2 = 2\lambda_1 x^2 y - \lambda_1^2 x^4 - \varphi_7'(\lambda_1) x^5$$

L' 1-ramo in (4.29) si può invece approssimare utilizzando le $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ e svolgendo i calcoli si trova che esso è approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{\lambda_1, -\frac{\varphi_8(\lambda_1)}{\varphi_7'(\lambda_1)}}^3 : y = \lambda_1 x^2 - \frac{\varphi_8(\lambda_1)}{\varphi_7'(\lambda_1)} x^3$. In questo caso abbiamo quindi un 1-ramo approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{\lambda_1, -\frac{\varphi_8(\lambda_1)}{\varphi_7'(\lambda_1)}}^3$ ed un 2-ramo approssimato dalla curva osculatrice Ψ_{μ_1} .

Caso 3.2.3.2.2

In questo caso il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ è il seguente:

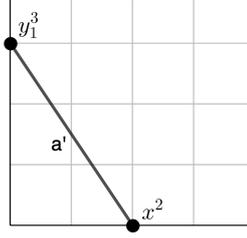


Figura 4.13: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3.2.2

Con un procedimento del tutto analogo a quello utilizzato nel caso 3.2.3.1 si trovano tre parametrizzazioni equivalenti dello stesso 3-ramo:

$$(T^3, \lambda_1 T^6 + cT^8 + \dots) \quad (4.33)$$

con $c^3 = -\varphi_8(\lambda_1)$. L'analisi a questo punto è terminata poichè abbiamo individuato tre rami contati con molteplicità ma procediamo come al solito con la ricerca delle curve osculatrici.

Essendo il ramo un 3-ramo non esiste alcuna $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$ che lo approssima, ma (4.33) suggerisce di utilizzare la seguente famiglia di curve:

$$A_\mu : \begin{cases} x = t^3 \\ y = \lambda_1 t^6 + \mu t^8 \end{cases} \quad t \in \mathbb{C} \quad y^3 = 3\lambda_1 x^2 y^2 - 3\lambda_1^2 x^4 y + \lambda_1^3 x^6 + \mu^3 x^8 \quad (\mu \neq 0) \quad (4.34)$$

Intersecando \mathcal{C} e A_μ si ottiene la seguente risolvente:

$$f(t^3, \lambda_1 t^6 + \mu t^8) = \cancel{a_{40} t^{12}} + \cancel{(a_{31} \lambda_1 + a_{50}) t^{15}} + \cancel{a_{31} \mu t^{17}} + \cancel{\varphi_6(\lambda_1) t^{18}} + \cancel{\varphi_6'(\lambda_1) \mu t^{20}} + \cancel{\varphi_7(\lambda_1) t^{21}} + \frac{\varphi_6''(\lambda_1)}{2} \mu^2 t^{22} + \cancel{\varphi_7'(\lambda_1) \mu t^{23}} + (\mu^3 + \varphi_8(\lambda_1)) t^{24} + \dots \quad (4.35)$$

Abbiamo dunque un'unica A_μ osculatrice di equazione:

$$A_{\bar{\mu}} : y^3 = 3\lambda_1 x^2 y^2 - 3\lambda_1^2 x^4 y + \lambda_1^3 x^6 - \varphi_8(\lambda_1) x^8$$

che approssima l'unico ramo della curva.

- * **Caso 3.2.3.3** $\mathcal{I}(O, \mathcal{C} \cap \Omega_{\lambda_1}^2) = 9 \Leftrightarrow \varphi_7(\lambda_1) = \varphi_8(\lambda_1) = 0, \varphi_9(\lambda_1) \neq 0$
Anche in questo caso, come anticipato, dobbiamo distinguere due sottocasi:

• **Caso 3.2.3.3.1** $\varphi'_7(\lambda_1) \neq 0$

In questo caso il poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ è il seguente:

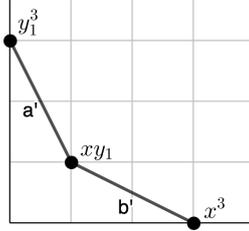


Figura 4.14: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3.3.1

Il lato **b'** ha altezza uno, dunque darà origine ad un unico 1-ramo e, procedendo nel solito modo, si trova che tale ramo è:

$$(T, \lambda_1 T^2 - \frac{\varphi_9(\lambda_1)}{\varphi'_7(\lambda_1)} T^4 + \dots) \quad (4.36)$$

Il lato **a'** invece potrebbe dare origine a due 1-rami o ad un 2-ramo. Ripetendo quanto visto per il lato **a'** del caso 3.2.3.2.1 si ritrovano due parametrizzazioni equivalenti del seguente 2-ramo:

$$(T^2, \lambda_1 T^4 + c T^5 + \dots) \quad (4.37)$$

dove $c^2 = -\varphi'_7(\lambda_1)$. A questo punto l'analisi è terminata, ma cerchiamo come al solito le curve osculatrici.

Il ramo in (4.36) è un 1-ramo e può dunque essere approssimato utilizzando le curve $\Omega_{\lambda_2, \dots, \lambda_r}^r$; in effetti svolgendo i calcoli si trova che esso è approssimato dalla curva $\Omega_{\lambda_1, 0, -\frac{\varphi_9(\lambda_1)}{\varphi'_7(\lambda_1)}}^4 : y = \lambda_1 x^2 - \frac{\varphi_9(\lambda_1)}{\varphi'_7(\lambda_1)} x^4$.

Il 2-ramo invece, essendo uguale a quello in (4.30) sarà approssimato dalla curva osculatrice Ψ_{μ_1} , con $\mu_1^2 = -\varphi_7(\lambda_1)$. Ricapitolando abbiamo quindi trovato un 1-ramo approssimato dalla curva osculatrice $\Omega_{\lambda_1, 0, -\frac{\varphi_9(\lambda_1)}{\varphi'_7(\lambda_1)}}^4$ ed un 2-ramo approssimato dalla curva osculatrice Ψ_{μ_1} .

• **Caso 3.2.3.3.2** $\varphi'_7(\lambda_1) = 0$

In questo caso il Poligono di Newton-Puiseux di $f_1(x, y_1)$ è il seguente:

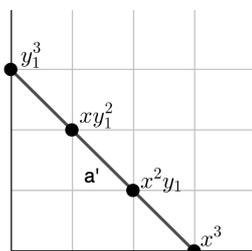


Figura 4.15: Poligono di Newton-Puiseux nel caso 3.2.3.3.2

Questa volta abbiamo un unico lato di altezza 3 e bisogna continuare l'analisi distinguendo dei sottocasi in maniera analoga a quanto fatto nel caso 3.2, ma basandosi questa volta sulle radici μ_1, μ_2, μ_3 del polinomio:

$$\mu^3 + \frac{\varphi_7''(\lambda_1)}{2}\mu^2 + \varphi_8'(\lambda_1)\mu + \varphi_9(\lambda_1)$$

Se le tre radici sono distinte l'analisi termina, altrimenti bisognerà distinguere il caso di una radice doppia ed una singola ed il caso di una radice tripla e procedere in maniera analoga a quanto visto finora. In ogni caso, poichè f ha un numero finito di termini, l'analisi termina dopo un numero finito di passi.

Osservazione 4.0.6.

In questo capitolo abbiamo analizzato esplicitamente soltanto i casi $\mathfrak{I}(O, \mathcal{C} \cap r) = 4, 5, 6$ con la restrizione vista a p. 86 ma in realtà qualunque altro caso, analogamente a quello che succede con i punti doppi, si può studiare con le stesse tecniche. Quindi la discussione precedente ci indica la strada per costruire un algoritmo che consenta di classificare i punti tripli di curve ridotte.

Bibliografia

- [1] E. Arrondo, *An informal introduction to algebraic geometry*, <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/schemes.pdf> (2019).
- [2] E. Arrondo, *Apuntes de Curvas Algebraicas*, <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/curvas.pdf> (2019)
- [3] E. Arrondo *Introduction to projective varieties*, <http://www.mat.ucm.es/~arrondo/projvar.pdf> (2017)
- [4] M.F. Atiyah, I.G. MacDonald, *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1969)
- [5] L. Campedelli, *Lezioni di Geometria*, Cedam (1970)
- [6] S. Canino, A. Gimigliano, M. Idà, *On the Jacobian scheme of a plane curve*, Work in Progress (2020)
- [7] H. Cartan, *Elementary Theory of Analytic Functions of One or Several Complex Variables*, Dover Pubns (1995)
- [8] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer (2007)
- [9] G. Fischer, *Complex Analytic Geometry*, LNM 538, Springer (1976)
- [10] G. Fischer, *Plane Algebraic Curves*, AMS volume 15 (2001)
- [11] W. Fulton, *Algebraic curves*, Ed. Revertè (1971)
- [12] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, Grad. Texts in Math. 52, Berlin, Heidelberg, New York (1977).

-
- [13] L. Hormander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Elsevier (1990)
- [14] J. N. Mather, S. S. -T. Yau, *Classification of Isolated Hypersurface Singularities by Their Moduli Algebras*, Invent. math. 69, 243-251 (1982)
- [15] R. Narasimhan, *Introduction to the Theory of Analytic Spaces*, LNM 25, Springer (1966)
- [16] K.H. Paranjape, *Projective schemes*, <https://www.imsc.res.in/kapil/geometry/caag/proj.html>
- [17] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri (2000)