

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Astronomia

# Cenni al modello del Big Bang, Inflazione e Materia Oscura

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa

Presentata da:  
Federica Mauro

Anno Accademico  
2019-2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Evidenze osservative del Big Bang</b>	<b>2</b>
1.1	Redshift . . . . .	2
1.2	Legge di Hubble - Lemaître . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Il Modello del Big Bang</b>	<b>5</b>
2.1	Cronologia del Big Bang . . . . .	5
2.2	Nucleosintesi primordiale . . . . .	6
2.3	CMB . . . . .	8
2.4	Inflazione . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Modello Cosmologico <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>10</b>
3.1	Cosmologia Newtoniana . . . . .	10
3.2	Cosmologia relativistica . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Materia oscura</b>	<b>14</b>
4.1	Materia oscura nelle galassie . . . . .	14
4.2	Materia oscura negli ammassi di galassie . . . . .	16
4.3	Lensing gravitazionale . . . . .	16

# Introduzione

La cosmologia è la branca dell'astronomia teorica che si occupa della struttura e dell'evoluzione del cosmo, cercando di risalirne alle origini attraverso l'uso di leggi fisiche conosciute. Si è cominciata ad affermare come scienza solo nel secolo scorso, quando le prove sull'espansione dell'universo e la teoria del Big Bang hanno preso il sopravvento. Il capitolo iniziale presenta una panoramica dei concetti base della cosmologia moderna e dell'interpretazione delle osservazioni astronomiche. Si parla inizialmente di redshift, per poi esaminare i lavori di Edwin Hubble e Georges Lemaître nei primi decenni del secolo scorso. Tali lavori hanno portato all'elaborazione della legge di Hubble-Lemaître che mette in relazione lineare velocità di recessione e distanza delle galassie attraverso una costante  $H_0$ . Sono queste le nozioni principali che hanno portato a parlare di espansione dell'universo e hanno aperto la strada alle teorie circa la sua origine.

Nel capitolo 2 viene esposta la teoria del Big Bang andando ad esaminare dettagliatamente i primi istanti di vita dell'universo, mettendo in evidenza la formazione delle particelle elementari fino ad arrivare ai primi atomi semplici con la nucleosintesi primordiale. Vengono poi considerate le evidenze osservative che hanno portato alla completa assunzione della teoria del Big Bang, quali il problema dell'elio con la nucleosintesi primordiale, la scoperta della radiazione cosmica di fondo CMB e la teoria dell'inflazione come risoluzione alle incongruenze del modello standard del Big Bang.

Il penultimo capitolo si occupa dei modelli cosmologici possibili, attraverso lo studio della geometria dell'universo con le equazioni di Newton, e delle componenti dominanti di materia e densità durante le varie epoche, con le equazioni di Friedmann. Il modello attualmente adottato è quello *Lambda Cold Dark Matter*  $\Lambda$ CDM per il quale i contributi principali sono quelli di un'energia e di una materia oscura che ad oggi rappresentano uno degli interrogativi più grandi legati al nostro universo.

Sulla materia oscura si concentra l'ultima parte dell'elaborato, cercando di fornire delle informazioni generali circa la storia e i calcoli che hanno portato alla sua ipotesi, per poi analizzare in dettaglio la sua interazione gravitazionale con la materia e le tecniche di rilevazione che ne confermano la presenza. Curve di rotazione delle galassie a spirale, ammassi di galassie e lensing gravitazionale riportano effetti riconducibili alla presenza della materia oscura, seppur essa non sia ancora stata rilevata in quanto le domande sulla sua composizione e sulla sua origine rimangono aperte.

# Capitolo 1

## Evidenze osservative del Big Bang

Nella prima decade del ventunesimo secolo, ancor prima che la natura extragalattica delle nebulose a spirale fosse compresa, gli astronomi cominciarono osservazioni sempre più sistematiche delle velocità radiali delle galassie misurando lo “spostamento Doppler” (Doppler-shift) delle righe spettrali. Si sperava di trovare che i moti di questi oggetti fossero random in modo che il moto del Sole nella Via Lattea fosse legato al vettore somma delle velocità radiali delle nebulose.

Fu Vesto Slipher, all’osservatorio di Lowell, a capire per primo che purtroppo le cose erano ben diverse: le velocità delle nebulose non erano random. La maggior parte degli spettri presentava delle righe con **redshift**. Nel 1914 Slipher annunciò che quasi tutte le 12 galassie da lui osservate si stavano rapidamente *allontanando* dalla Terra ad eccezione di Andromeda che invece presentava un **blueshift** e quindi in *avvicinamento* con una velocità di  $300\text{ km/s}$ . Slipher portò avanti la sua indagine sulle galassie (arrivò ad esaminarne più di 40 fino al 1925) e confermò che la maggior parte di esse presentava uno spettro con redshift [3]. Si scoprì rapidamente che tali galassie non solo si stavano allontanando dalla Terra ma anche l’una dall’altra. Fu questo il momento in cui gli astronomi cominciarono a parlare dei moti galattici in termini di *espansione*.

### 1.1 Redshift

La radiazione emessa da un corpo celeste può essere scomposta nelle sue varie componenti, andando così a generare lo *spettro elettromagnetico* del corpo, dove compaiono righe di assorbimento o di emissione, la cui natura dipende dalla composizione chimica del corpo in esame. Per effetto Doppler si intende il cambiamento in lunghezza d’onda (o in frequenza) della radiazione emessa da una sorgente, dovuta alla velocità radiale delle sorgente stessa. Questo si manifesta negli spettri dei corpi celesti con uno spostamento delle righe spettrali verso il rosso **redshift** o verso il blu **blueshift**, sinonimo che si stanno rispettivamente allontanando o avvicinando all’osservatore. Ne deriva

che la lunghezza d'onda emessa dalla sorgente e quella rilevata non sono le stesse. Si consideri il calcolo per la *velocità di recessione*  $v_r$ , misurata dalla differenza tra la lunghezza d'onda emessa da una sorgente  $\lambda_e$  e quella osservata  $\lambda_{oss}$  in un regime non relativistico, quindi con  $v \ll c$ .

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\lambda_{oss} - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \implies z \equiv \frac{\lambda_{oss} - \lambda_e}{\lambda_e} \quad (1.1)$$

Si definisce  $z$  come il redshift; se si considera l'epoca attuale  $z = 1$ . In astrofisica e in cosmologia il caso più frequente è quello con  $\Delta\lambda > 0$ , il sistema si sta allontanando e quindi c'è redshift. Se il sistema fosse in avvicinamento (come nel caso di Andromeda), allora ci sarebbe blueshift.

## 1.2 Legge di Hubble - Lemaître

Nel 1925 Edwin Hubble studiò le galassie vicine alla Via Lattea, riuscendone a ricavare velocità e distanza grazie all'uso delle Cefeidi come candele standard. Egli confrontò i dati ottenuti con quelli di Slipher, scoprendo che la velocità di recessione delle galassie  $v_r$  era proporzionale alla loro distanza  $D$  e che quindi maggiore era  $D$ , maggiore sarebbe stato il redshift  $z$ . Anche Georges Lemaître, nello stesso periodo, aveva dedotto in maniera teorica l'esistenza di una legge che mettesse in relazione strettamente lineare velocità di recessione e distanza. Nel 1929 i risultati delle osservazioni di Hubble furono presentati ad un incontro della National Academy of Science, in un articolo dal titolo "A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae" [3]. La relazione esprimibile con

$$v_r = H_0 D \implies z = \frac{H_0 D}{c} \quad (1.2)$$

è ad oggi chiamata *Legge di Hubble-Lemaître*. Essa fissa una retta sul piano  $v - D$  dove  $H_0$  è la pendenza della retta ed è chiamata **costante di Hubble**. Di solito  $v$  è espressa in  $km/s$  mentre  $D$  in  $Mpc$  quindi  $H_0$  ha come unità di misura  $km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}$ . Con il passare del tempo e con l'evoluzione delle tecniche osservative, Hubble insieme al suo assistente Humanson, riuscì a compiere osservazioni sempre più profonde (fino a 40 Mpc) rendendosi però conto che più si andava lontano, più aumentava l'incertezza sulla retta del piano  $v - D$ .

$$H_0 \approx 70 \frac{km/s}{Mpc} \quad (1.3)$$

$H_0$  rappresenta il valore odierno della costante di Hubble. Da esso è possibile ricavare il "tempo di Hubble"  $\tau_0 = 1/H_0$  che è una stima dell'età dell'universo e corrisponde a circa 13,8 miliardi di anni.

Attualmente si è arrivati ad una profondità delle osservazioni fino a  $\sim 600 Mpc$  utilizzando come candele standard le Supernovae di tipo Ia.

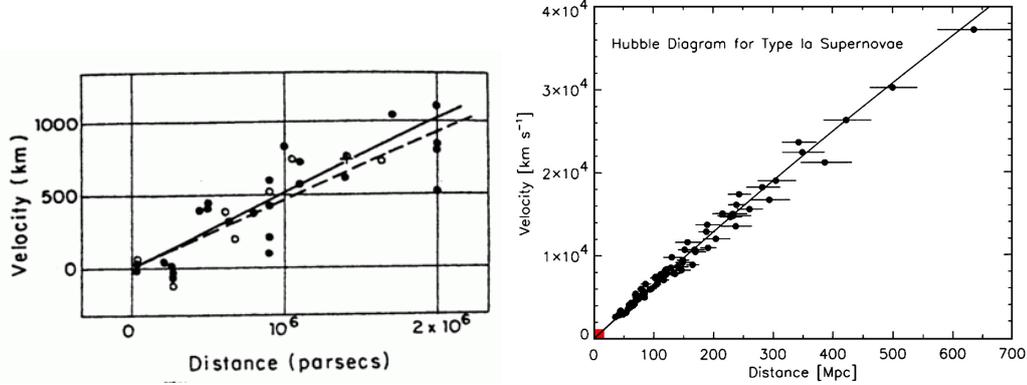


Figura 1.1: A destra i dati di Hubble fino al 1929, a sinistra di dati del 2003 di Kirshner. I primi arrivano ad una profondità di  $2 Mpc$  mentre i secondi a più di  $600 Mpc$ .

La costante di Hubble non ha un valore fisso, infatti storicamente la stima ha oscillato tra  $10$  e  $100 km s^{-1} Mpc^{-1}$  fino a stabilizzarsi attorno al valore di  $H_0$ , ciò nonostante essa ha una dipendenza dal redshift  $H(z)$  che implica un diverso valore della costante per diverse epoche della storia evolutiva dell'universo [8]. Uno dei problemi aperti che riguardano  $H_0$  è la “tensione” tra le stime, che cambiano notevolmente a seconda del metodo utilizzato e soprattutto in base a quale redshift viene misurata.

- La stima fatta in un universo locale tramite candele standard, quindi con redshift basso, riporta  $H_{local} \approx 74.03 \pm 1.42 km s^{-1} Mpc^{-1}$
- La stima fatta utilizzando le fluttuazioni della CMB ad alto redshift ( $z \sim 1000$ ) riporta  $H_{CMB} \approx 67.4 \pm 0.5 km s^{-1} Mpc^{-1}$

Per risolvere tale problema in modo che i dati non vengano persi in un futuro prossimo con stime sempre più accurate di  $H_0$ , si è deciso di normalizzare tale valore con una certa  $h$  in modo che nonostante diversi metodi di misura abbiano diverse dipendenze da  $h$ , i risultati possano essere riutilizzati e perfezionati anche a distanza di anni.

$$h = \frac{H_0}{100 km s^{-1} Mpc^{-1}} \quad (1.4)$$

# Capitolo 2

## Il Modello del Big Bang

Partendo dalle osservazioni dell'effetto Doppler sulle righe spettrali e dai risultati di Hubble - Lemaître, l'idea di un universo in espansione si era ormai fatta strada nella comunità scientifica. Dopo la seconda guerra mondiale si andarono a sviluppare due teorie cosmologiche diverse circa la natura dell'universo stesso. Una era la *teoria del Big Bang* di Georges Lemaître, l'altra la *teoria dello Stato Stazionario (Steady-State)* di Fred Hoyle, in base alla quale c'era una costante creazione di materia per poter sostenere l'espansione dell'universo. Questo implicava che l'universo mantenesse le stesse proprietà nello spazio e nel tempo, non avesse né inizio, né fine.

### 2.1 Cronologia del Big Bang

La constatazione che l'Universo si espande ha posto un problema nuovo: quello della sua nascita. Georges Lemaître ipotizzò che dal momento che l'universo è in espansione, in passato debba essere stato più piccolo di adesso, convergendo in un unico punto detto **singularità primordiale**. Questa considerazione ha condotto alla teoria evolutiva del Big Bang, cioè di un'enorme "esplosione" iniziale che diede origine all'Universo e che ne causò l'espansione che ancora oggi osserviamo. Tale espansione è generale ed interessa l'intero spazio-tempo, quindi non è associabile ad un unico punto: ogni punto dello spazio-tempo è esso stesso centro di espansione.

Fino a circa 200 secondi dopo il Big bang, quando iniziò la formazione degli atomi, si parla di *Era della radiazione*, successivamente avrà inizio l'*Era della Materia*.

- $t = 0$  avviene il Big Bang, la singularità ha  $T \rightarrow \infty$  e dimensioni nulle. La fisica che conosciamo non è in grado di spiegare cosa sia successo in questo istante.
- $t = 10^{-43} s$  e  $T \sim 10^{32} K$  **tempo di Planck**, è da questo istante che comincia la nostra conoscenza dell'Universo. Le quattro forze fondamentali: elettromagnetica, nucleare debole, nucleare forte e gravità sono unite in una sola.

- $t = 10^{-36} s$  e  $T \sim 10^{30} K$  finisce la grande unificazione delle forze. La forza di gravità si separa mentre le altre rimangono unite.
- da  $t = 10^{-35} s$  a  $t = 10^{-32} s$  e  $T \sim 10^{27} K$  **era dell'Inflazione**. L'interazione forte si separa e dà vita alla nascita di *quark* e *leptoni*, cioè le prime particelle elementari e le relative antiparticelle. Nell'era dell'inflazione avviene una rapida e drastica espansione dell'Universo.
- $t = 10^{-12} s$  e  $T = 10^{15} K$  tutte le interazioni fondamentali si separano e da questo momento seguiranno strade indipendenti. La forza di gravità domina e comincia a controllare l'espansione.
- $t = 1 s$  e  $T \sim 10^{13} K$  si formano gli **adroni**, le prime particelle composite, tra cui protoni e neutroni, a partire da quark e antiquark.
- $t = 100 s$  e  $T \sim 10^{10} K$  la componente dominante di massa è costituita da leptoni ed anti-leptoni. La temperatura scende fino ad un valore in cui è possibile che sopravviva un piccolo residuo di leptoni, ovvero *elettroni*, *positroni*, *neutrini* ed *antineutrini*.
- l'ultima fase dell'era della radiazione è la **Nucleosintesi** tra  $t = 100 s$  e  $t = 200 s$  ad una  $T \sim 10^9 K$ .

## 2.2 Nucleosintesi primordiale

L'abbondanza di  $He^4$  che si misura nell'universo  $Y \sim 0.24/0.28$ , deducibile grazie allo studio delle atmosfere delle stelle più vecchie, è troppo alta per essere spiegata solo tramite il bruciamento di  $H^2$  negli interni stellari. Per dare una spiegazione a tali abbondanze, la teoria della nucleosintesi primordiale, a sostegno del modello del Big Bang, ipotizza che deve esserci stato un evento estremamente efficiente da permettere la sintesi di moltissimo elio, in tempi scala molto brevi.

Si può stimare quanto He può essere stato prodotto dalle stelle dal momento in cui si è formato l'universo  $t_{H_0} \approx 13 Gyr$  e fare il conto per la Via Lattea.

$$\begin{aligned} L_{MW} &\approx 10^{11} L_{Sun} \\ M_{MW} &\approx 10^{12} M_{Sun} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si suppone che tutta la luminosità della galassia venga dal bruciamento di  $H \rightarrow He$  e che sia rimasta sempre costante; si può dunque calcolare l'energia totale prodotta dal bruciamento di H in He da quando la galassia si è formata.

$$\begin{aligned} L_{MW} &\approx 10^{11} L_{Sun} = 4 \cdot 10^{33} \cdot 10^{11} = 4 \cdot 10^{44} \text{ erg s}^{-1} \\ t_{H_0} &\sim 13 \cdot 10^9 \text{ yr} = 13 \cdot 10^9 \cdot \pi \cdot 10^7 = 4 \cdot 10^{17} \text{ s} \end{aligned} \quad (2.2)$$

↓

$$E_{TOT} = 4 \cdot 10^{44} \cdot 4 \cdot 10^{17} = 1.6 \cdot 10^{62} \text{ erg} \quad (2.3)$$

L'energia che viene prodotta dal bruciamento di 4 nuclei di H in un nucleo di He, energia di legame del nucleo di He, è:

$$E_{b,He} \approx 4.5 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$$

Quindi il numero di atomi di He<sup>4</sup> formati in 13 Gyr è

$$N_{He} = \frac{E_{TOT}}{E_{b,He}} = \frac{1.6 \cdot 10^{62}}{4.5 \cdot 10^{-5}} = 3.5 \cdot 10^{66} \quad (2.4)$$

Considerando che la massa di un atomo di He è  $m_{He} \sim 6.64 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ , la massa totale di elio prodotta nel tempo di Hubble è

$$M_{He} = N_{He} \cdot m_{He} \sim 3.5 \cdot 10^{66} \cdot 6.64 \cdot 10^{-24} = 2.4 \cdot 10^{43} \text{ g} \quad (2.5)$$

Confrontandola con la massa della galassia

$$M_{MW} \approx 2 \cdot 10^{33} \cdot 10^{12} = 2 \cdot 10^{45} \text{ g}$$

si ricava la frazione in massa di elio prodotta da quando l'universo si è formato

$$Y = \frac{M_{He}}{M_{MW}} = \frac{2.4 \cdot 10^{43}}{2 \cdot 10^{45}} \approx 10^{-2} = 0.01 \quad (2.6)$$

L'abbondanza di elio misurata  $Y \sim 0.24/0.28$  è circa 20 volte maggiore. Appena prima della nucleosintesi, durante la formazione degli androni i *protoni*  $p$  reagiscono con gli *elettroni*  $e^-$  e con i *neutrini*  $\nu_e$ , producendo un gran numero di *neutroni* il cui tempo di decadimento (10 minuti) risulta molto lungo. C'è quindi una fase dell'universo in cui ci sono molti neutroni liberi con

$$\frac{n_p}{n_n} \sim 1.2$$

A  $T \sim 10^9 \text{ K}$  la temperatura è tale da far diventare stabili i primi nuclei composti: il Deuterio H<sup>2</sup>, insieme al Trizio H<sup>3</sup>, He<sup>3</sup>, He<sup>4</sup> con tracce di Litio e Berillio. Questo perché non ci sono isotopi stabili con numero atomico  $A = 5$  e  $A = 8$ , impedendo così la formazione di elementi più pesanti [5].

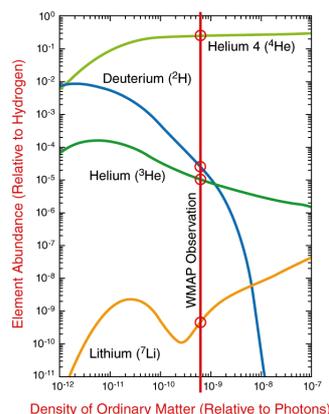


Figura 2.1: Le osservazioni delle attuali abbondanze degli elementi chimici effettuate con il *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP satellite) sono in accordo con quello che la teoria della nucleosintesi primordiale prevede.

## 2.3 CMB

Secondo la teoria del Big Bang, per i primi  $\sim 300.000$  anni di vita dell'universo, le temperature erano talmente alte da non consentire l'esistenza di atomi complessi. La materia era principalmente distribuita in un plasma ionizzato che intrappolava la radiazione in una "nebbia" impenetrabile, rendendo impossibile ottenere informazioni antecedenti a quell'epoca. Con l'espansione dell'universo però, sia la temperatura che la densità sono diminuite in modo tale da consentire l'aggregazione di nuclei atomici ed elettroni, i fotoni hanno così cominciato a viaggiare liberamente. La **CMB** *Cosmic Microwave Background* è la testimonianza di questi fotoni, al momento della loro fuga. Nel 1965 Arno Penzias e Robert Wilson, lavorando ad una antenna per comunicazioni satellitari, si imbattono in un disturbo di fondo del segnale che proveniva da tutte le direzioni. Sapevano che la loro interferenza era causata da una sorgente di corpo nero ad una temperatura di  $3\text{ K}$ , ma non ne riuscivano ad individuare l'origine dal momento che a quei tempi, nonostante si cercasse la prova dell'esistenza della CMB per rafforzare il modello di Big Bang, le stime riportavano una temperatura di  $\sim 10\text{ K}$ . Dopo ulteriori rilevazioni e con calcoli più accurati, si è potuto però confermare che fosse proprio quello il segnale che si stava cercando: una radiazione di corpo nero che permea l'intero universo con un massimo a  $\lambda_{max} = 1.06\text{ mm}$  nella regione delle microonde dello spettro elettromagnetico. Questa scoperta rafforzava enormemente la teoria del Big Bang mentre mandava alla deriva quella di un universo stazionario. Nel 1991 una misura accurata della CMB fu ottenuta con il satellite COBE, riportando una  $T_{CMB} = 2.725 \pm 0.002\text{ K}$ .

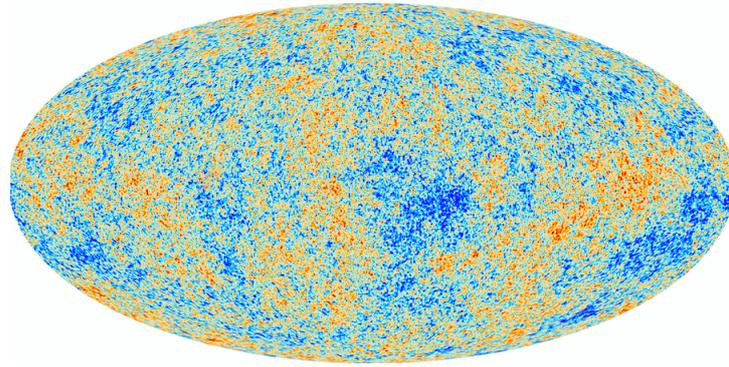


Figura 2.2: Immagine della CMB presa dal satellite dell'ESA Planck nel 2013. I punti di colore più scuro mostrano le fluttuazioni di temperatura, corrispondenti a zone con densità diversa che rappresentano i semi di tutte le strutture future: le stelle e le galassie di oggi.

## 2.4 Inflazione

Nonostante la teoria standard del Big Bang fosse fortemente sostenuta dai dati sperimentali, con la scoperta della CMB c'erano ancora osservazioni che non trovavano spiegazione. Nel 1981 Alan Guth propose una modifica al modello standard del Big Bang, ipotizzando che l'universo abbia sperimentato un'espansione accelerata tra  $t = 10^{-35} s$  e  $t = 10^{-32} s$  in cui si è dilatato esponenzialmente fino a raggiungere un volume  $10^{50}$  volte maggiore di quello iniziale [2]. Tra gli interrogativi ai quali l'ipotesi di inflazione ha dato risposta si trovano:

- *L'Uniformità della radiazione cosmica.* La velocità di espansione durante l'inflazione ha fatto sì che l'universo oggi osservabile abbia raggiunto le dimensioni attuali partendo da un volume molto minore rispetto a quello previsto dal Big Bang standard. Questo ha permesso alla luce di attraversare interamente il volume prima dell'inizio dell'inflazione, omogeneizzando così i valori della densità cosmica e dell'intensità della radiazione di fondo. L'inflazione ha poi trascinato regioni diverse di questo volume a distanze tali da non renderle più visibili dato che la loro velocità di allontanamento era diventata superiore a quella della luce.
- *La Densità critica.* L'evoluzione temporale dell'universo risulta possibile per una certa densità critica della materia. Se la densità è superiore alla densità critica, la gravità prevale e l'universo è destinato a collassare su se stesso. In caso contrario, l'espansione continuerà per un tempo indefinito. L'universo espandendosi rende lo spazio sempre meno curvo, è dunque giustificabile come a seguito dell'inflazione, la regione di esso accessibile alle osservazioni appaia piatta e che quindi la densità abbia raggiunto proprio il valore critico.

# Capitolo 3

## Modello Cosmologico $\Lambda$ CDM

Il modello cosmologico ad oggi utilizzato per descrivere al meglio l'universo in cui ci troviamo è il modello  $\Lambda$ CDM, *Lambda Cold Dark Matter*. Secondo questo modello oltre alla materia ordinaria e alla radiazione ci sono altre due componenti da considerare ovvero la costante cosmologica  $\Lambda$ , che si riferisce all'energia oscura, e la materia oscura. Esso permette di comprendere l'espansione accelerata misurata dalle supernovae, le fluttuazioni della CMB, la formazione delle strutture cosmiche e il problema della densità critica. Il maggior contributo al parametro di densità è quello dell'energia oscura che ne costituisce circa il 74%, c'è poi il 22% della materia oscura e il 4% di quella ordinaria, mentre il contributo della radiazione è trascurabile.

### 3.1 Cosmologia Newtoniana

L'intera cosmologia moderna si basa sul così detto **principio cosmologico** che assume un universo *isotropo* e *omogeneo*, ovvero che le sue proprietà e la distribuzione di materia siano sempre le stesse in qualsiasi punto di osservazione. La cosmologia Newtoniana studia la geometria dell'universo, assumendolo come una nube di gas, non infinitamente grande. Una volta fissato un centro dell'universo, si può considerare la velocità di un punto ad una certa distanza  $r$ .

$$\mathbf{r} = R(t)\mathbf{r}_0 \quad (3.1)$$

$$\mathbf{v} = f(t)\mathbf{r} = H_0\mathbf{r} \quad (3.2)$$

Dove  $H_0 = \frac{\dot{R}}{R}$  è una funzione uniforme nello spazio ma non costante nel tempo.  $R(t)$  è il *fattore di scala* e varia se l'universo si espande,  $R = R_0 = 1$  al tempo attuale e  $0 < R < 1$  nel passato;  $\mathbf{r}_0$  è la *distanza comovente*, ovvero una distanza misurata con un metro che si espande insieme all'universo;  $\mathbf{r}$  è la *distanza fisica*, quella misurata con

le osservazioni.

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 R_0^3$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{R_0}{R}\right)^3 \quad R_0 = 1 \Rightarrow \rho = \frac{\rho_0}{R^3} \quad (3.3)$$

$\rho$  è la densità ad una certa epoca. Con le equazioni di Newton si vuole descrivere come la shell di materia di raggio  $R$  sta accelerando:

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{4}{3}\pi G\rho \frac{R^3}{R^2} = -\frac{4}{3}\pi G \frac{\rho_0}{R^2}$$

$$R^2 \ddot{R} + \frac{4\pi}{3}G\rho(t_0) = 0 \quad (3.4)$$

Integrando si ottiene

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G \frac{\rho}{R} - K = \frac{\text{costante}}{R} - K \quad (3.5)$$

Si legano dinamicamente  $\dot{R}$  e  $R$ , con  $K$  energia totale  $U - T$ .

Cercando le soluzioni dinamiche di  $R(t)$ , si presentano tre possibili scenari:

- $K = 0$  Modello di universo *Einstein-De Sitter*, universo **piatto**.  
 $R \propto t^{2/3}$  la velocità di espansione tende a zero per  $t$  infinito seppur ci sia ancora espansione. È il modello attualmente più accreditato. In tutti gli universi possibili ci sarà sempre un'epoca in cui il  $K$  è trascurabile, i modelli hanno quindi lo stesso andamento iniziale in prossimità di  $R \rightarrow 0$ , per poi far subentrare altri andamenti.
- $K > 0$  Modello di universo **chiuso**. L'energia potenziale domina su quella cinetica. Si può calcolare il raggio massimo di espansione  $R_{max} = \frac{8\pi}{3} \frac{G\rho_0}{K}$  che rappresenta anche la simmetria tra il Big Bang e il Big Crunch che chiude il modello.
- $K < 0$  Modello di universo **aperto**. L'energia cinetica domina su quella potenziale. Inizialmente l'andamento va come  $R \propto t^{2/3}$ , poi con  $R \rightarrow \infty \Rightarrow R \propto t$ . Da un certo punto in poi l'espansione è inerziale e a velocità costante.

Affinché  $K = 0$ , ovvero che l'universo sia piatto, c'è bisogno di una certa *densità critica*, come affrontato nella sezione 2.4.

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G \frac{\rho_0}{R} = H_0^2 R^2 \longrightarrow \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2 = H_0^2 R^2$$

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Rightarrow \Omega = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (3.6)$$

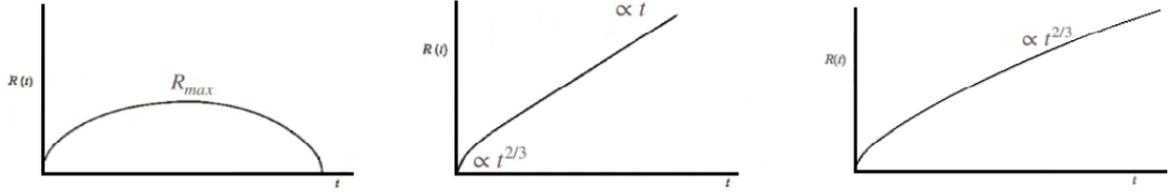


Figura 3.1: Confronto tra gli andamenti dei vari modelli cosmologici al variare di  $K$ . A sinistra  $K > 0$  universo chiuso, al centro  $K < 0$  universo aperto, a destra  $K = 0$  universo piatto di Einstein-De Sitter.

Perché l'universo sia piatto  $\rho = \rho_{cr}$  e  $\Omega = 1$ .  $\Omega$  dipende da varie componenti che portano ad una stima di  $\Omega_M$  (matter)

$$\Omega_M \{ \Omega_{\text{radiazione}}, \Omega_{\text{galassie}}, \Omega_{\text{barioni}}, \Omega_{\text{materia oscura}} \} \approx 0.3 \quad (3.7)$$

La stima di  $\Omega_M$  porta con sé dei valori contrastanti  $\Omega \sim 0.3$  se calcolato tramite gli ammassi di galassie a redshift basso, mentre è vicino al valore critico  $\Omega \sim 1$  se calcolato con le fluttuazioni della CMB a redshift molto alto. È qui che interviene il modello  $\Lambda$ CDM, ipotizzando la presenza di una componente di energia priva di massa che appiattisce l'universo  $\Omega_\Lambda \sim 0.7$ .

Il parametro di decelerazione  $q$  è espresso come

$$q = -\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2} \quad (3.8)$$

Considerando i modelli Newtoniani, sono tutti decelerati con  $q = 1/2$  per  $K = 0$ ,  $q > 1/2$  per  $K > 0$  e  $0 < q < 1/2$  per  $K < 0$ . Il modello  $\Lambda$ CDM è l'unico per cui  $q < 0$  che implica una accelerazione, così come è osservato sperimentalmente nella relazione magnitudine-redshift delle supernovae di tipo Ia. La pendenza della retta di fit è funzione di  $q$ , essa ha una curvatura verso l'altro che richiede necessariamente  $q < 0$  [8].

## 3.2 Cosmologia relativistica

Nella cosmologia relativistica si va a considerare una  $v \approx c$  e la teoria della relatività generale di Einstein. Grazie alla metrica di Robertson-Walker si mettono in relazione la geometria dell'universo e l'energia totale  $K$  che in questo caso comincia a determinare la curvatura dell'universo. Per  $K = 0$  si ha uno spazio euclideo, la distanza tra due punti è in coordinate sferiche; per  $K > 0$  lo spazio è a curvatura sferica mentre per  $K < 0$  lo spazio è a curvatura iperbolica. Le equazioni di Einstein mettono in relazione la metrica spazio-tempo, esprimibile con il tensore spazio-tempo  $g_{ij}$ , con il tensore

energia-impulso della materia (o dell'energia)  $T_{ij}$ :

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi}{c^4}GT_{ij} \quad (3.9)$$

L'equazione di campo di Einstein si può però ridurre ad un set di equazioni più semplici nel caso di omogeneità, isotropia e fluido perfetto: le equazioni di Friedmann.

$$\begin{cases} \dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho R^2 = K \\ 2\frac{\ddot{R}}{R}\frac{\dot{R}^2}{R^2} = -\frac{8\pi GP}{c^2} - \frac{K}{R^2} \end{cases} \quad (3.10)$$

$\rho$  non ha più solo significato di densità di materia, ma anche di densità di energia.  $P$  è la pressione del fluido e viene utilizzata per vedere come l'universo accelera o decelera. Per risolvere il sistema è necessaria un'equazione di stato che leghi  $P$  e  $\rho$

$$P = w\rho c^2 \quad (3.11)$$

$w$  è una costante e  $c = 1$  per semplicità di calcoli. Si considera un certo volume di universo che si espande adiabaticamente, caratterizzato da una certa energia.

$$\begin{aligned} E = \rho V &\Rightarrow dE = -PdV + TdS \text{ con } dS \approx 0 \\ dE = -PdV = \rho dV + Vd\rho &\Rightarrow \rho dV + Vd\rho = -PdV = -w\rho dV \\ Vd\rho = -(1+w)\rho dV &\Rightarrow \rho \propto V^{-(1+w)} \propto R^{-3(1+w)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Questa relazione ci permette di capire come varia la densità di energia alla variazione di espansione dell'universo.

- $w = 0$   $\rho \propto R^{-3}$  *Universo di materia ordinaria* (polvere)  
La componente di energia ha una massa ma è sostanzialmente ferma con una temperatura  $T$  molto bassa.
- $w = 1/3$   $\rho \propto R^{-4}$  *Universo di radiazione* (fotoni)  
Per un fotone che si espande, oltre che venire diluito spazialmente, anche la sua lunghezza d'onda subisce un allungamento. L'universo di radiazione descrive le fasi iniziali del nostro universo, con un redshift molto grande  $z > 3500$ .
- $w = -1$   $\rho \propto R^0$  (*costante*) *Universo di energia oscura*  $\Lambda$   
Con una pressione negativa e una densità di energia costante, un universo in espansione richiede che ci sia una creazione costante di energia. La pressione fa espandere lo spazio-tempo e ne accelera l'espansione con un effetto repulsivo gravitazionale.  $\Lambda$  dominerà quando  $z < 0.33$ .

# Capitolo 4

## Materia oscura

La materia oscura gioca un ruolo centrale nella comprensione del nostro universo. Già dai tempi più remoti, gli astronomi osservando il cielo e il moto dei corpi celesti avevano notato delle anomalie nelle loro orbite, attribuendole alla presenza di “pianeti oscuri” o “nubi oscure”. Nel 1906 Henri Poincaré rimase stupito dall’idea di Lord Kelvin del 1884 di applicare la teoria dei gas ai sistemi stellari presenti nella Via Lattea, nel tentativo di misurare la quantità di materia oscura presente in essa. Nell’occasione fu il primo a coniare il termine *materia oscura*. Lord Kelvin sosteneva che nella Via Lattea vi fossero delle stelle troppo deboli da poter osservare dalla Terra e altri corpi che non emettevano luce, di cui però si risentiva l’effetto gravitazionale. Dalle misure della dispersione di velocità delle stelle e dalla trattazione della Via Lattea come un gas di oggetti puntiformi, egli stimò il numero totale di stelle, incluse quelle oscure [4].

Negli scorsi decenni la definizione di materia oscura si è evoluta notevolmente; essa è definita come la componente dell’universo non barionica, ovvero non composta dalle particelle del modello standard, che non assorbe, emette o riflette luce ad alcuna lunghezza d’onda [7]. Sebbene le prove sull’esistenza della materia oscura siano schiacciati, non c’è accordo sulla sua natura in quanto essa può essere rilevata solo osservando i suoi effetti gravitazionali sulla materia ordinaria. Un interrogativo ancora aperto è quello della distribuzione della materia oscura, essa si raggruppa in aloni la cui distribuzione riproduce fedelmente quella statistica delle galassie nell’universo [1].

### 4.1 Materia oscura nelle galassie

Le curve di rotazione delle galassie a spirale rappresentano una delle maggiori evidenze sperimentali dell’esistenza della materia oscura. L’idea generale è quella di osservare il moto di diversi corpi celesti e valutare se la materia visibile è sufficiente a fornire la forza gravitazionale rilevata. In caso contrario, l’attrazione gravitazionale in eccesso deve essere dovuta ad una massa non osservabile: la materia oscura. La curva di

rotazione delle galassie mostra l'andamento della velocità di stelle e gas che si muovono sul disco a spirale della galassia, in funzione della distanza dal centro [6]. Si considera la velocità di rotazione  $v$  di una stella in una galassia che contiene una massa  $M(R)$  ad una certa distanza  $R$  dal centro galattico, l'equilibrio tra accelerazione centrifuga e attrazione gravitazionale richiede che essa sia:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{GM(R)}{R^2} \quad (4.1)$$

da cui

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}} \quad (4.2)$$

$v \propto 1/\sqrt{R}$  per valori elevati di  $R$  e considerando una massa costante; si ha una curva di rotazione kepleriana con conseguente caduta kepleriana mano a mano che ci si allontana dalla massa centrale.

Come si può osservare in figura 4.1, i dati sperimentali non riportano un andamento kepleriano. La parte iniziale della curva di rotazione in cui i valori salgono è da attribuire al *bulge*, ovvero alla parte centrale della galassia che può essere schematizzata come una sfera omogenea in cui  $v \propto R$ . La parte piatta è dovuta al contributo di stelle e gas nel disco della galassia, quello che la teoria prevede è che si verifichi una caduta kepleriana oltre la fine del disco stellare, dove continua ad esserci molto gas freddo e nubi di idrogeno ionizzato HI [1]. Tale andamento ha fatto supporre l'esistenza della materia oscura che continua a produrre effetti gravitazionali; non c'è alcuna galassia a spirale in cui non si sia osservato una simile curva di rotazione.

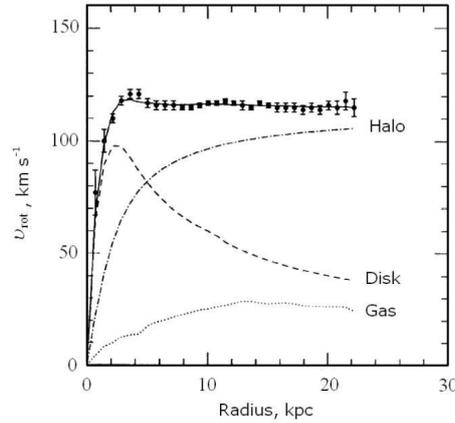


Figura 4.1: *Curva di rotazione delle galassia NGC 6503. I dati con barre di errore sono le velocità osservate. La linea tratteggiata rappresenta il contributo delle stelle, mentre quella punteggiata il contributo del gas.*

## 4.2 Materia oscura negli ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono gli oggetti gravitazionalmente legati più grandi dell'universo e come tali sono un campione ideale per i diversi tipi di materia. Le componenti principali degli ammassi sono le stelle contenute nelle singole galassie e il gas caldo diffuso visibile nei raggi X, riscaldato dal potenziale gravitazionale dell'ammasso. La massa del gas è dalle cinque alle dieci volte maggiore di quella delle stelle, costituendo dunque la maggior componente della materia ordinaria.

Il gas caldo può anche essere utilizzato per stimare la quantità di materia oscura presente. La sua alta temperatura gli conferisce una notevole pressione che lo porta ad espandersi mentre l'attrazione gravitazionale tra le particelle del gas stesso non è sufficiente per contrastarla; ciò nonostante il gas rimane legato gravitazionalmente all'ammasso. Si deduce quindi che la restante attrazione gravitazionale che confina il gas nell'ammasso sia data dalla materia oscura, la cui densità risulta essere dieci volte maggiore quella della materia barionica prodotta dalla nucleosintesi [6], ciò implica che la materia oscura deve essere non-barionica.

## 4.3 Lensing gravitazionale

La presenza di materia oscura può essere rilevata sia grazie agli effetti gravitazionali sulla materia ordinaria, che dal modo in cui essa influenza la traiettoria sia della materia che dei fotoni, deviando e reindirizzando la luce come una *lente gravitazionale*.

Si considera l'alone di materia che circonda la Via Lattea dove si suppone che ci siano degli oggetti oscuri compatti e massivi quali buchi neri, nane brune e stelle di neutroni detti MACHOs (MASSive Compact Halo Objects). Se un fotone passa vicino a uno di tali oggetti di massa  $M$  con un certo parametro di impatto  $b$ , la curvatura locale dello spazio-tempo comporterà una deviazione del fotone di un angolo

$$\alpha = \frac{4GM}{c^2 b} \quad (4.3)$$

Se un MACHO si trova esattamente sulla direzione tra l'osservatore e la sorgente, l'immagine della sorgente verrà distorta producendo un anello con raggio angolare detto *raggio di Einstein*  $\theta_E$ ; se invece non è esattamente lungo la linea di vista dell'osservatore la figura prodotta consisterà in due archi. La probabilità che un MACHO passi esattamente lungo la direzione di una stella visibile è molto piccola, tuttavia è possibile rilevare un aumento del flusso luminoso della stella quando la distanza tra essa e il MACHO è comparabile al raggio di Einstein. Nonostante  $\theta_E$  sia molto piccolo e i corpi celesti presentino moti relativi, è stato comunque possibile rilevare diversi lensing dovuti a MACHOs, che suggeriscono che nell'alone della nostra galassia non ci sia una forte presenza di tali oggetti, in cui non può esserci più dell'8% di massa oscura della galassia. Il resto deve essere distribuita più o meno omogeneamente nell'alone [7].

# Bibliografia

- [1] L. Ciotti. *Appunti di Astrofisica del corso di Astrofisica Extragalattica*. Università di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2020.
- [2] A. D’Ercole. Inflazione: due indizi che fanno (forse) una prova. *Giornale di astronomia, Osservatorio Astronomico di Bologna*, pages 46–48, 2013.
- [3] Bradley W. Carroll e Dale A. Ostlie. *An Introduction to Modern Astrophysics*. Pearson New International Edition, 1996.
- [4] G. Bertone e D.Hooper. A history of dark matter. *Rev. Mod. Phys.* 90, 2018.
- [5] F.R. Ferraro. *Appunti del corso di Astrofisica Stellare*. Università di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2020.
- [6] A. Liddle. *An Introduction to Modern Cosmology*. Wiley, 1998.
- [7] B. Ryden. *Introduction to Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [8] F. Vazza. *Appunti di Cosmologia del corso di Astrofisica Extragalattica*. Università di Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2020.