

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Meccanismi di produzione dell'energia in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Cecilia Degli Agosti

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2019/2020

"[...] se posso basare il mio giudizio su di voi, mia cara signorina
Cannon, un'astronoma resta sempre giovane."
Le stelle dimenticate, Dava Sobel

Sommario

Nel presente elaborato ci si propone di ripercorrere i meccanismi di produzione dell'energia che intervengono durante l'evoluzione stellare, in particolare la fusione nucleare. Si descrive inoltre l'accrescimento gravitazionale, che è il più efficiente processo noto.

Nel Capitolo 1 si descrive il teorema del viriale, quindi l'equilibrio tra energia termica e gravitazionale, e le scale temporali con cui possono procedere gli stadi evolutivi. Nel Capitolo 2 ci si occupa delle reazioni termonucleari che durante la sequenza principale e negli stadi successivi compensano la forza di gravità impedendo il collasso del sistema. Vengono descritti nel dettaglio la fusione dell'idrogeno, con la catena protone-protone e il ciclo carbonio-azoto-ossigeno, e il processo 3α per la fusione dell'elio. Nel Capitolo 3 si tratta brevemente il fenomeno delle supernovae e la loro classificazione.

Nell'ultimo Capitolo si studia il caso dei quasar, la cui emissione deriva dall'accrescimento gravitazionale su un buco nero: questo è il meccanismo di produzione di energia più efficiente noto. Infine si ricava la definizione di luminosità di Eddington, un limite all'energia che un corpo celeste può emettere.

Indice

1	Introduzione	1
1.1	Il teorema del viriale	1
1.2	I tempi scala	2
2	Le reazioni termonucleari	4
2.1	La fusione dell'idrogeno	5
2.1.1	La catena protone-protone	5
2.1.2	Ciclo CNO	7
2.2	Processo 3α	9
2.3	Dipendenza dalla temperatura del parametro ε	9
2.4	Le reazioni successive alla 3α	11
3	Le supernovae	14
4	L'accrescimento e la luminosità di Eddington	15
A	Il tasso di produzione di energia	17
	Riferimenti bibliografici	20

1 Introduzione

L'esempio più evidente e più anticamente noto di produzione di energia in ambito astrofisico sono senza dubbio le stelle, che i processi di fusione termonucleare rendono visibili da Terra. La trattazione di tali reazioni caratterizzanti gli interni stellari necessita di un'introduzione ai concetti di teorema del viriale e tempi scala, che vengono affrontati nel seguito del Capitolo. Il primo è fondamentale per comprendere come la fredda nube di gas¹ in cui nascono le stelle possa raggiungere le temperature necessarie alla produzione di energia e come queste si innalzino ulteriormente nelle fasi di contrazione. Il secondo permette di avere un'idea dei tempi con cui avvengono le fasi di collasso, accensione delle reazioni nucleari e bruciamento degli elementi.

1.1 Il teorema del viriale

Il teorema del viriale nella sua forma completa è costituito da un insieme infinito di identità tensoriali. Dalla più semplice di queste si ricava la nota relazione scalare che vale per i sistemi autogravitanti all'equilibrio

$$2T = -U \quad (1)$$

dove T e U sono rispettivamente l'energia cinetica e l'energia potenziale gravitazionale, che è negativa. Il simbolo meno che compare è dovuto all'andamento di quest'ultima come $\frac{1}{r}$, ovvero al fatto che si tratta di una funzione omogenea di grado -1.

Si noti che la forza di gravità è conservativa e tali sono i sistemi che si considerano, per i quali vale quindi

$$E = T + U \quad (2)$$

dove E è l'energia totale conservata.

Per rendere più chiaro il significato di questo teorema si utilizzi il grafico in Figura 1, dove in ascissa compare il modulo dell'energia potenziale gravitazionale e in ordinata l'energia cinetica. L'Equazione 2 è il fascio improprio di rette $T = |U| + E$ e nel caso particolare per $E = 0$ si ha la bisettrice, rappresentata in blu in Figura 1. Sistemi in cui l'energia totale è positiva non possono essere all'equilibrio poiché non vi è intersezione tra il teorema del viriale (retta arancione) e le rette con $E > 0$ (come quella in giallo). Al contrario i sistemi con energia totale negativa (retta verde) possono essere all'equilibrio.

¹Le stelle si formano nelle nubi molecolari giganti (*Giant Molecular Cloud*, GMC), ovvero regioni del mezzo interstellare con densità di $10^3 - 10^6$ *particelle/cm*³ e temperature di $10 - 100$ K.

Di seguito la Figura di riferimento.

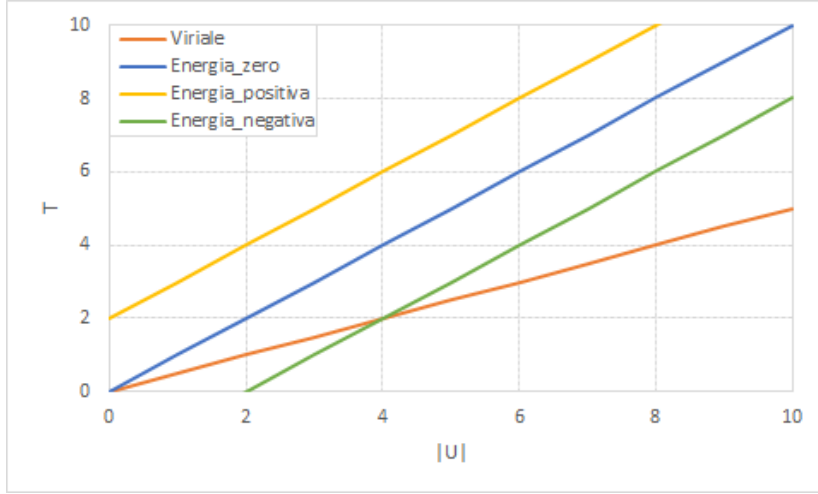


Figura 1: Piano del viriale

Mettendo a sistema le Equazioni 1 e 2 e derivando rispetto al tempo si può ottenere

$$T = -E \implies \frac{dT}{dt} = -\frac{dE}{dt} \quad (3)$$

$$|U| = -2E \implies \frac{d|U|}{dt} = -2\frac{dE}{dt} \quad (4)$$

Diventa chiaro che a seguito del raffreddamento della GMC dovuto allo scambio di calore con l'ambiente esterno (diminuzione dell'energia totale), l'energia cinetica aumenta dello stesso quantitativo che è stato perso mentre l'energia potenziale gravitazionale diminuisce del doppio, ovvero aumenta in valore assoluto. Così la nube si scalda e si contrae.

Se i concetti di sistema virializzato e di sistema all'equilibrio sono equivalenti, quando la condizione nell'Equazione 1 non è soddisfatta si avrà un'espansione ($2T > |U|$) o una contrazione ($2T < |U|$). Si è così ottenuta la condizione fondamentale per l'innesco della collasso della GMC verso la formazione stellare.

1.2 I tempi scala

Come già accennato, diversi momenti della vita di una stella corrispondono a diversi tempi evolutivi necessari perché il sistema si trasformi. Schematicamente se ne riconoscono tre:

Dinamici Tempi scala molto rapidi caratteristici delle fasi di collasso, sia della nube iniziale che della stella nel passaggio dal bruciamento di un elemento a quello del

successivo. Sono così definiti perché tipici di sistemi in cui la forza gravitazionale non è controbilanciata dalla pressione di radiazione (non vi è attività nel nucleo) e che non sono pertanto statici.

Consideriamo un elemento di volume ad una certa distanza dal *core*. Nel regime dinamico questo si muove secondo l'equazione del moto $s = \frac{1}{2}gt^2$, dove g è l'accelerazione di gravità. Se s è il raggio solare che misura $7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$, invertendo la relazione per calcolare il tempo scala e sostituendo $2.7 \cdot 10^4 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$ a g nel caso del Sole² si ottiene che sarebbero necessari circa 38 minuti perché il sistema collassi completamente una volta spenta la fusione nucleare.

Termodinamici Regime successivo a quello dinamico. L'aumento di temperatura provocato dal collasso conduce, in un ambiente opaco, ad un aumento della pressione del gas che rallenta gli strati esterni in caduta verso il centro.

Il tempo scala termico è la durata del periodo in cui una stella potrebbe mantenere la propria luminosità solo trasformando energia potenziale gravitazionale in energia termica secondo il teorema del viriale. Richiamando l'Equazione 4, si può scrivere

$$L = -\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d|U|}{dt} \quad (5)$$

integrando rispetto al tempo e sostituendo luminosità ($4 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$), massa e raggio solare si ottiene

$$t = \frac{|U|}{2L} = \frac{1}{2} \frac{GM^2}{RL} = 1.5 \cdot 10^7 \text{ K} \quad (6)$$

La durata di questi tempi scala è quindi dell'ordine di milioni di anni.

Termonucleari Quando le temperature sono sufficientemente elevate perché si innescino le prime reazioni di fusione nucleare, l'energia prodotta nel *core* rallenta ulteriormente il collasso determinando l'entrata del sistema nel nuovo regime di evoluzione che durerà miliardi di anni.

²Un elemento di volume di massa m che si trova sulla superficie di una stella è soggetto ad una forza di gravità $F = mg = \frac{GMm}{R^2}$, dove $G = 6.67 \cdot 10^{-13} \frac{\text{N} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}^2}$ è la costante di gravitazione universale, $M = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ la massa totale per il Sole ed R il suo raggio. Invertendo la definizione di forza di gravità e semplificando si ottiene il valore dell'accelerazione di gravità superficiale g .

2 Le reazioni termonucleari

Quella delle stelle è una storia di collasso interrotto dall'innesco di reazioni di fusione nucleare che compensano la forza di gravità. Prima di dare una descrizione esaustiva di quanto avviene nel *core* una volta che sono state raggiunte temperature sufficientemente alte, si presentano alcuni tipi di processi coinvolti. Di seguito i principali:

Decadimento β^- : $n \longrightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}$

Decadimento β^+ : $p^+ \longrightarrow n + e^+ + \nu$

Cattura elettronica: $p^+ + e^- \longrightarrow n + \nu$

Cattura protonica (p, γ): $Z^A + p^+ \longrightarrow (Z + 1)^{A+1} + \gamma$

Cattura alpha (α, γ): $Z^A + \alpha \longrightarrow (Z + 2)^{A+4} + \gamma$

Fotodisintegrazione (γ, α): $Z^A + \gamma \longrightarrow x\alpha + n$

Cattura neutronica (n, γ): $Z^A + n \longrightarrow Z^{A+1} \longrightarrow (Z + 1)^{A+1} + e^- + \bar{\nu}$

Dove n , p ed e sono rispettivamente neutrone, protone ed elettrone (o positrone), ν è un neutrino, γ è un fotone e la particella α è un nucleo di elio. Z e A sono invece numero atomico e numero di massa.

Quando nel *core* si raggiungono temperature di circa 10^6 K le prime reazioni termonucleari ad innescarsi sono quelle di fusione dell'idrogeno, che producono l'energia sufficiente ad equilibrare la forza gravitazionale durante tutta la fase di sequenza principale, che è la più duratura.

Una volta che tutto l'idrogeno nel nucleo è stato trasformato in elio la stella non è più in equilibrio. Avviene quindi un contrazione e, secondo quanto detto nel Capitolo 1.1, un aumento della temperatura. Questo permette l'innesco della fusione dell'idrogeno in una *shell* circostante al nucleo, dove invece ha inizio quella dell'elio in carbonio. A questo punto la stella è uscita dalla sequenza principale.

Quando anche l'elio nel *core* è stato esaurito si ha una seconda fase di collasso frenata dall'accensione di reazioni successive che coinvolgono nuclei via via più pesanti. Il susseguirsi di collassi e inneschi prosegue fino alla produzione di ferro in corrispondenza del quale c'è un picco del valore dell'energia di legame per nucleone. Ciò significa che è l'elemento con il nucleo più legato e la cui formazione per fusione rilascia il maggior quantitativo di energia. Tale parametro diminuisce per numeri atomici superiori e le uniche reazioni che li coinvolgono da cui ricavare energia sono quelle di fissione, mentre quelle di fusione sono endoenergetiche e quindi inutili a sostenere la stella contro la forza di gravità.

Si studiano ora più nel dettaglio i processi di fusione nucleare che avvengono negli interni stellari. Alla base della produzione di energia da parte di questi fenomeni vi è

la famosissima equazione di Einstein $E = mc^2$ che illustra la corrispondenza tra una differenza di massa e un quantitativo di energia liberata. L'insieme iniziale di particelle è infatti sempre più massiccio di quello finale e per quanto tale differenza sia minima (nel caso della trasformazione da idrogeno ad elio si tratta di circa $0.035 \cdot 10^{-24} g$), gli enormi quantitativi consumati fanno brillare gli astri.

2.1 La fusione dell'idrogeno

La fusione dell'idrogeno può avvenire attraverso due strade accomunate dalla trasformazione di quattro nuclei di idrogeno in uno di elio: la catena protone-protone e il ciclo CNO. La linea di demarcazione tra i due processi è data dalla temperatura a cui avvengono, in particolare la catena PP domina in ambienti con temperature inferiori a $2 \cdot 10^7 K$.

2.1.1 La catena protone-protone

Esistono tre varianti della catena protone-protone e ancora una volta l'efficienza di ciascuna rispetto alle altre dipende dalla temperatura, come illustrato nella seguente Figura.

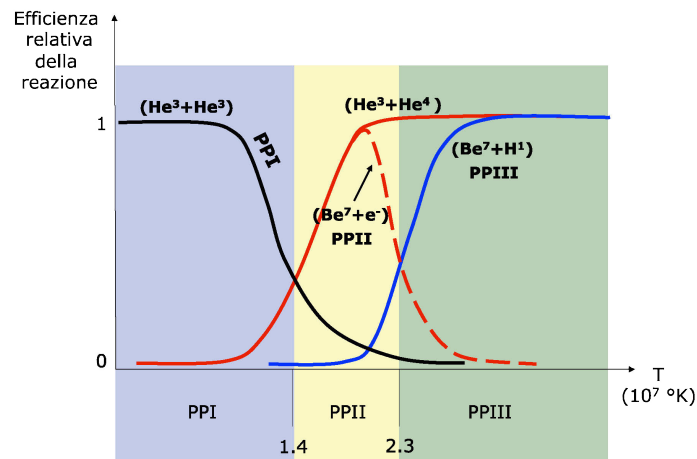


Figura 2: Le catene PP in funzione della temperatura

Catena PP I Di seguito la tabella riassuntiva delle singole reazioni, dell'energia coinvolta in ciascuna e del tempo con cui avvengono.

		E (MeV)	t
$H^1 + H^1$	$\longrightarrow H^2 + e^+ + \nu$	+1.44, -0.26	$10^9 yr$
$H^2 + H^1$	$\longrightarrow He^3 + \gamma$	+5.49	6 s
$He^3 + He^3$	$\longrightarrow He^4 + H^1 + H^1$	+12.85	$10^6 yr$

Tabella 1: Catena PP I

Il bilancio energetico complessivo della catena PP I risulta essere

$$E_{PP I} = 2(1.44 - 0.26 + 5.49) + 12.85 = 26.2 MeV \approx 4.2 \cdot 10^{-5} erg \quad (7)$$

dove la moltiplicazione per 2 è dovuta alla produzione tramite due sequenze separate degli He^3 . Tenendo conto di questo si verifica quanto detto in precedenza: ciascuna catena utilizza tre H^1 ma al termine ne vengono rilasciati due, per un totale di quattro. L'addendo negativo dipende dai neutrini, particelle che interagiscono molto scarsamente con la materia e sfuggono rapidamente sottraendo energia al sistema. Qui la perdita è circa del 2%.

L'efficacia dei decadimenti β^- che in pochi minuti disgregano i neutroni rende impossibile la reazione $p + n \longrightarrow H^2 + \gamma$, che è sostituita da quella molto meno efficace nella prima riga della Tabella 1. Tale processo è il più lento, ovvero il meno probabile, e dunque quello che determina il tempo dell'intera catena. Questo perché si tratta di un decadimento β^+ che necessita di energia per avvenire.

Catena PP II L'efficacia di questa sequenza di reazioni cresce man mano che la catena PP I produce He^4 .

		E (MeV)	t
$H^1 + H^1$	$\longrightarrow H^2 + e^+ + \nu$	+1.44, -0.26	$10^9 yr$
$H^2 + H^1$	$\longrightarrow He^3 + \gamma$	+5.49	6 s
$He^3 + He^4$	$\longrightarrow Be^7 + \gamma$	+1.59	$10^6 yr$
$Be^7 + e^-$	$\longrightarrow Li^7 + \nu$	+0.86, -0.80	0.4 yr
$Li^7 + H^1$	$\longrightarrow Be^8 + \gamma$	+17.35	6 min
	$\longrightarrow He^4 + He^4 + \gamma$		

Tabella 2: Catena PP II

Come fatto in precedenza si calcola il bilancio complessivo della catena PP II, che risulta essere

$$E_{PP II} = 25.67 MeV \approx 4.1 \cdot 10^{-5} erg \quad (8)$$

con una perdita di energia in neutrini di circa 1 MeV, ovvero il 4%.

Catena PP III Si differenzia dalla precedente perché Be^7 interagisce con H^1 anziché con un elettrone.

Tra i tre è il processo che avviene a temperature più elevate e come per la catena PP II la sua efficienza aumenta con la produzione di He^4 da parte della catena PP I.

Il bilancio energetico complessivo in questo caso è $E_{PPIII} = 19.3 \text{ MeV}$ di cui le perdite per neutrini sono di circa 7.5 MeV ovvero il 28%, come illustrato nella seguente Tabella.

		E (MeV)	t
$\text{H}^1 + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{H}^2 + \text{e}^+ + \nu$	+1.44, -0.26	10^9 yr
$\text{H}^2 + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{He}^3 + \gamma$	+5.49	6 s
$\text{He}^3 + \text{He}^4$	$\longrightarrow \text{Be}^7 + \gamma$	+1.59	10^6 yr
$\text{Be}^7 + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{B}^8 + \gamma$	+0.135	66 yr
B^8	$\longrightarrow \text{Be}^8 + \text{e}^+ + \nu$	+18.07, -7.20	1 s
	$\longrightarrow \text{He}^4 + \text{He}^4 + \gamma$		

Tabella 3: Catena PP III

2.1.2 Ciclo CNO

Il ciclo CNO rappresenta la seconda modalità con cui può avvenire la fusione dell'idrogeno. Anche in questo caso vi è un anello principale di reazioni a partire dal quale la catena si può sviluppare in base alla temperatura coinvolgendo elementi sempre più pesanti. Di seguito la tabella che riassume il ciclo principale e le sue caratteristiche.

		E (MeV)	t
$\text{C}^{12} + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{N}^{13} + \gamma$	+1.94	10^7 yr
N^{13}	$\longrightarrow \text{C}^{13} + \text{e}^+ + \nu$	+2.2, -0.7	7 min
$\text{C}^{13} + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{N}^{14} + \gamma$	+7.55	10^6 yr
$\text{N}^{14} + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{O}^{15} + \gamma$	+7.29	10^8 yr
O^{15}	$\longrightarrow \text{N}^{15} + \text{e}^+ + \nu$	+2.7, -1.0	82 s
$\text{N}^{15} + \text{H}^1$	$\longrightarrow \text{C}^{12} + \text{He}^4$	+4.96	10^5 yr

Tabella 4: Ciclo CNO principale

Anche qui i valori negativi dell'energia rappresentano perdite per neutrini e in questo caso il bilancio energetico complessivo è di circa $E_{CNO} = 24.94 \text{ MeV} \approx 4 \cdot 10^{-5} \text{ erg}$.

In questo processo sono coinvolti carbonio, azoto e ossigeno che svolgono un ruolo di catalizzatori delle reazioni. Devono quindi essere presenti nell'ambiente in cui queste avvengono così da poter essere consumati e poi nuovamente prodotti durante il ciclo. Ciò che viene modificato sono le loro abbondanze relative, che dipendono dai tempi delle singole reazioni: la trasformazione di N^{14} in O^{15} è il passaggio più lento, pertanto si avrà un aumento di N^{14} a scapito del C^{12} , e naturalmente una crescita di He^4 che è l'obiettivo finale. Questo determina inoltre la distinzione all'interno dell'anello di un ramo veloce (fino alla produzione di N^{14} , in blu nella Figura che segue) e uno lento (in arancione).

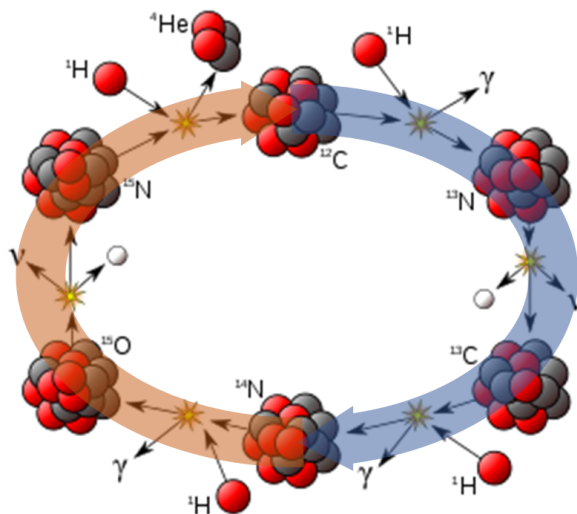


Figura 3: Ramo veloce e ramo lento del ciclo CNO

Come detto in precedenza, al ciclo principale finora studiato se ne aggiungono diversi secondari tutti aventi origine da catture protoniche, il primo dei quali è riassunto nella Tabella che segue.

			E (MeV)	t
C^{12}	$+ H^1$	$\longrightarrow N^{13} + \gamma$	+1.94	$10^7 yr$
N^{13}		$\longrightarrow C^{13} + e^+ + \nu$	+2.2, -0.7	7 min
C^{13}	$+ H^1$	$\longrightarrow N^{14} + \gamma$	+7.55	$10^6 yr$
N^{14}	$+ H^1$	$\longrightarrow O^{15} + \gamma$	+7.29	$10^8 yr$
O^{15}		$\longrightarrow N^{15} + e^+ + \nu$	+2.7, -1.0	82 s
N^{15}	$+ H^1$	$\longrightarrow O^{16} + \gamma$	+1.2	
O^{16}	$+ H^1$	$\longrightarrow F^{17} + \gamma$	+0.6	

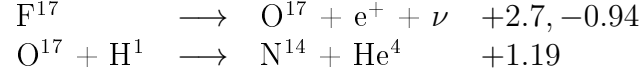


Tabella 5: Primo ciclo CNO secondario

Il bilancio energetico totale è simile a quello del ciclo primario ma vengono coinvolti elementi più pesanti.

2.2 Processo 3α

Questo processo di fusione dell'elio in carbonio prende il nome dal numero di nuclei di He^3 (ovvero particelle α) coinvolti. Trattandosi di particelle più pesanti dell'idrogeno le temperature necessarie all'innesco sono di circa $1.5 \cdot 10^8 K$.

Di seguito il riassunto delle singole reazioni.

		E (MeV)
$He^4 + He^4$	\longleftrightarrow	Be^8
		-0.1
$Be^8 + He^4$	\longrightarrow	$C^{12} + \gamma$
		$+7.4$

Tabella 6: Processo 3α

Anzitutto si può calcolare il bilancio energetico complessivo, che risulta essere di $E_{3\alpha} = 7.3 MeV \approx 1.2 \cdot 10^{-5} erg$. Si noti poi che la prima reazione è endoenergetica, infatti Be^8 è molto instabile e tenderebbe a scomporsi nelle due particelle iniziali. In un ambiente come gli interni stellari con una concentrazione di elio che è 10^{10} volte quella di berillio, però, questo riesce ad interagire con la terza particella α e si ha la reazione di fusione.

2.3 Dipendenza dalla temperatura del parametro ε

Si fa ora riferimento all'Appendice A in cui è stato ricavato il tasso di produzione di energia, per specificarne la dipendenza dalla temperatura nei processi fin qui caratterizzati. Si utilizza la temperatura in unità di $10^6 K$ (T_6) e si introduce la grandezza $\phi(T)$ che tiene conto della schermatura dovuta agli elettroni, che diminuisce l'effetto repulsivo tra i nuclei. Seguono i valori del tasso di produzione di energia

$$\varepsilon_{PP} = 2.36 \cdot 10^6 \rho X^2 T_6^{-2/3} e^{-\frac{33.81}{T_6^{1/3}}} \phi(T) erg s^{-1} g^{-1} \quad (9)$$

$$\varepsilon_{CNO} = 7.21 \cdot 10^{27} \rho X Z_{CN} T_6^{-2/3} e^{-\frac{153.31}{T_6^{1/3}}} \phi(T) erg s^{-1} g^{-1} \quad (10)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = 3.5 \cdot 10^{17} \rho^2 Y^3 \frac{e^{-\frac{4320}{T_6}}}{T_6^3} \phi(T) \text{ erg s}^{-1} \text{ g}^{-1} \quad (11)$$

dove X, Y e Z_{CN} sono rispettivamente le abbondanze di idrogeno, elio e carbonio e azoto (l'ossigeno viene prodotto durante il ciclo quindi non rientra nel calcolo). Per comodità si vorrebbe riscrivere tali equazioni come semplici leggi di potenza della temperatura, ma la complessa dipendenza da T_6 non lo permette. In questo senso il miglior risultato a cui si può giungere sono espressioni valide solo per piccoli intervalli di temperatura del tipo

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \rho T^\nu \quad \text{dove} \quad \nu = \left(\frac{d \ln \varepsilon}{d \ln T} \right)_\rho \quad (12)$$

ottenute dalla relazione generale Equazione 38 passando ai logaritmi e derivando. Nei tre casi specifici si ha

$$\varepsilon_{PP} = \varepsilon_1 \rho X^2 T_6^{\nu_{PP}} \quad \text{con} \quad \nu_{PP} = [3.5 - 6] \quad (13)$$

$$\varepsilon_{CNO} = \varepsilon_2 \rho X Z_{\text{CN}} T_6^{\nu_{CNO}} \quad \text{con} \quad \nu_{CNO} = [13 - 20] \quad (14)$$

$$\varepsilon_{3\alpha} = \varepsilon_3 \rho^2 Y^3 T_8^{\nu_{3\alpha}} \quad \text{con} \quad \nu_{3\alpha} = [20 - 30] \quad (15)$$

che vengono schematizzati nel seguente grafico.

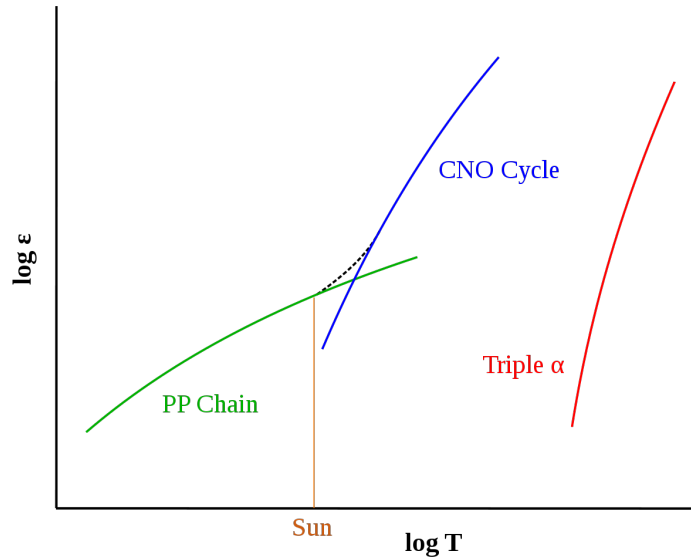


Figura 4: Catena PP, ciclo CNO e processo 3α in funzione dalla temperatura

Anzitutto si osserva che anche quando si raggiungono le temperature utili all'attivazione del ciclo CNO, la catena PP procede. Si nota poi che passando dalle reazioni rappresentate in verde, a quelle in blu a quelle in rosso cresce la sensibilità alla temperatura.

Avendo calcolato di volta in volta l'energia totale prodotta dai fenomeni di bruciamento è possibile dedurne l'efficacia, ovvero l'energia liberata per unità di massa formata:

$$E_{PP}^* = \frac{E_{PP}}{4m_H} = 6.3 \cdot 10^{18} \text{ erg } g^{-1} \quad (16)$$

$$E_{CNO}^* = \frac{E_{CNO}}{4m_H} = 6.0 \cdot 10^{18} \text{ erg } g^{-1} \quad (17)$$

$$E_{3\alpha}^* = \frac{E_{3\alpha}}{12m_H} = 5.9 \cdot 10^{17} \text{ erg } g^{-1} \quad (18)$$

L'energia per unità di massa del processo 3α è di un ordine di grandezza inferiore a quella della fusione dell'idrogeno, per questo il primo è attivo per meno tempo della seconda.

2.4 Le reazioni successive alla 3α

Come già detto nel Capitolo 2 il bruciamento degli elementi procede ben oltre quello dell'elio, ma se ne farà qui solo un breve accenno. Tali reazioni formano particelle α che vengono subito riutilizzate per la produzione di elementi più pesanti con numero atomico multiplo di 4, detti elementi α . Nelle Tabelle 7 e 8 alcuni esempi di reazioni che si innescano a temperature sempre maggiori, nella Tabella 9 ulteriori esempi di catture α .

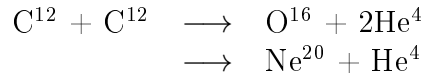


Tabella 7: Bruciamento del carbonio a $5\text{-}6 \cdot 10^8 \text{ K}$

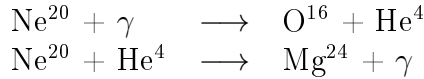


Tabella 8: Bruciamento del neon a $1.2\text{-}1.9 \cdot 10^9 \text{ K}$

		E (MeV)
$\text{C}^{12} + \text{He}^4$	$\longrightarrow \text{O}^{16} + \gamma$	+7.6
$\text{O}^{16} + \text{He}^4$	$\longrightarrow \text{Ne}^{20} + \gamma$	+4.7

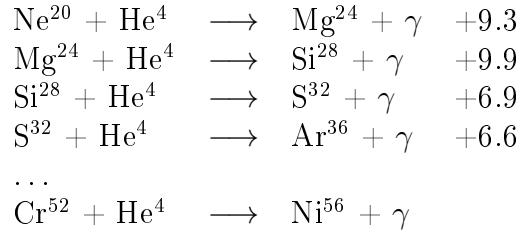


Tabella 9: Catture α che producono elementi fino al Ni^{56} , che decade in Fe^{56}

Gli elementi più pesanti del ferro vengono invece prodotti per cattura neutronica che si verifica in diversi stadi dell'evoluzione stellare, come il ramo asintotico delle giganti e l'esplosione di supernova. Perché questa avvenga sono necessari neutroni liberi, prodotti sia dalle catture α che dalla fotodisintegrazione presentati nelle Tabelle seguenti.

	E (MeV)
$\text{C}^{13} + \text{He}^4 \longrightarrow \text{O}^{16} + \text{n}$	+2.2
$\text{O}^{18} + \text{He}^4 \longrightarrow \text{Ne}^{21} + \text{n}$	-0.69
$\text{Ne}^{22} + \text{He}^4 \longrightarrow \text{Mg}^{25} + \text{n}$	

Tabella 10: Esempi di catture α che producono neutroni

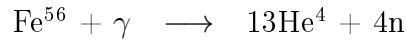
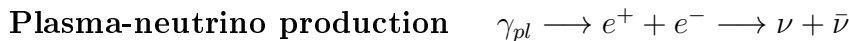
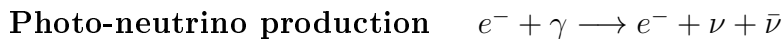
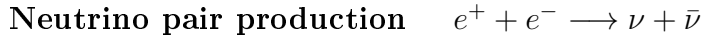


Tabella 11: Fotodisintegrazione del ferro

Esistono due tipi di catture neutroniche che si distinguono per il rapporto tra il tempo di cattura, appunto, e quello di decadimento in un atomo stabile. Se questo valore è grande l'atomo di partenza riesce a raccogliere più neutroni e si ha un aumento più rapido del numero atomico: sono i processi r (*rapid*). Se invece è piccolo viene catturata una particella per volta e si ha una crescita lenta: sono i processi s (*slow*).

Se questi sono processi di produzione energetica, d'altra parte raggiunto il miliardo di gradi i neutrini non vengono più prodotti solo dalle reazioni di fusione, ma anche dal plasma stesso e le perdite energetiche diventano importanti. Di seguito alcune possibili strade per la produzione di neutrini da parte dell'ambiente stellare:



Per il secondo processo sono sufficienti temperature inferiori a quelle del primo, mentre per il terzo la densità del nucleo deve essere tale che anche i fotoni si comportino come un plasma.

3 Le supernovae

L'evoluzione di stelle con massa maggiore di $8 M_{\odot}$ si conclude in modo violento con l'esplosione di supernovae dette *core collapse*, divise in tre tipi in base agli elementi presenti nei loro spettri:

- SN II mostrano la presenza di H;
- SN Ib mostrano la mancanza di H e di Si, ma presentano He;
- SN Ic mostrano la mancanza di H e di Si, e anche di He.

Durante tale evento non solo vengono liberati nel mezzo interstellare gli elementi prodotti all'interno del corpo celeste, ma vengono anche sintetizzati gli elementi più pesanti del ferro (nucleosintesi esplosiva).

All'interno di stelle tanto massicce si innescano tutti i possibili processi di fusione e si sviluppa un nucleo di ferro degenerato, che è sostenuto dalla pressione degli elettroni. Quando la massa del *core* supera le $1.4 M_{\odot}$, detto limite di Chandrasekhar, gli elettroni non sono più sufficienti a sostenere la struttura stellare contro la forza di gravità e ha inizio il processo URCA. Neutroni e neutrini vengono prodotti dalla combinazione di protoni ed elettroni³, questi ultimi vengono quindi sottratti al sistema che inizia a collassare. Alla rapida caduta verso il centro, fermata dalla degenerazione dei neutroni, corrisponde un'onda d'urto che spazza via gli strati esterni senza modificarne la composizione, ad eccezione dello strato di silicio che viene trasformato in ferro. Ciò che rimane dopo l'esplosione è una stella di neutroni oppure un buco nero.

Un'altra categoria di supernovae è detta *thermonuclear* o di tipo Ia e ha origine da un sistema binario stretto che può presentare due scenari: *single degenerate* se formato da una nana bianca e una compagna non degenerata a scapito della quale la prima stella accresce materia; *double degenerate* nel caso di due nane bianche la cui orbita relativa si stringerà fino ad arrivare al *merging*. Quando viene superato il limite di Chandrasekhar avviene l'esplosione, per questo motivo le SN Ia hanno sempre la stessa luminosità e possono essere usate come candele standard nel calcolo delle distanze. Inoltre esse non hanno *remnant* poiché l'innesco esplosivo di CO distrugge interamente la struttura stellare. Tutto il carbonio viene trasformato in ferro durante l'evento e per questo le supernovae di tipo *thermonuclear* sono i principali iniettori di tale elemento nel mezzo interstellare.

In entrambi i casi si tratta di un fenomeno tanto energetico da poter raggiungere dieci miliardi di volte la luminosità del Sole, diventando così più brillante dell'intera galassia ospite.

³Schematicamente si ha $p + e^{-} \rightarrow n + \nu$

4 L'accrescimento e la luminosità di Eddington

La fusione nucleare fin qui studiata non è il meccanismo di produzione di energia più efficiente. Negli anni '50 vennero scoperte particolari stelle blu i cui spettri erano diversi da quelli noti, presentando righe in emissione. Studi successivi portarono a ipotizzare che tali spettri avessero subito un forte *redshift* e corrispondessero a corpi celesti in allontanamento a circa $\frac{1}{10}$ della velocità della luce. Questi QUASAR, ovvero *QUAsi Stellar objects* avrebbero dovuto essere più luminosi di intere galassie perché la loro luce proveniente da $z=0.1$ giungesse con magnitudine 15. La scoperta della rapida variabilità di questi oggetti, ovvero le loro piccole dimensioni, escluse l'ipotesi che tanta energia fosse prodotta dalla fusione di idrogeno perché la quantità necessaria di tale elemento avrebbe generato un buco nero, dal quale per definizione non sarebbe emersa alcuna radiazione.

Ulteriore ipotesi avanzata sulla natura dell'energia emessa dai QUASAR fu l'accrescimento gravitazionale su un buco nero. Si considera quindi una massa di prova che cade da $3R_S$ ad $1R_S$ (dove R_S è il raggio di Schwarzschild⁴) e si calcola l'energia che possiede prima e dopo:

$$E_3 = -\frac{Gm_{BH}m_t}{3R_S} + \frac{1}{2}m_tv^2 = -\frac{1}{2}\frac{Gm_{BH}}{3R_S} \quad (19)$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\frac{Gm_{BH}}{R_S} \quad (20)$$

dove la seconda uguaglianza nell'Equazione 19 discende dal teorema del viriale per cui $\frac{v^2}{3R_S} = \frac{Gm_{BH}m_t}{(3R_S)^2}$. La differenza di energia tra le due orbite è

$$\Delta E = \frac{1}{2}\left(\frac{Gm_{BH}}{R_S} - \frac{Gm_{BH}}{3R_S}\right)m_t = \frac{Gm_{BH}m_t}{3R_S} = \frac{1}{6}\left(\frac{2Gm_{BH}}{R_S}\right)m_t = \frac{1}{6}mc^2 \approx 0.2mc^2 \quad (21)$$

ovvero un'efficienza del 20% che può arrivare anche al 40% se si studia un buco nero rotante, da confrontarsi con il 6% della reazione di fusione più efficace ovvero la catena protone-protone.

Tutta questa energia emessa risulta in un flusso di fotoni che irradia verso l'esterno e si scontra con la materia in caduta verso la singolarità. Quando le onde elettromagnetiche interagiscono con le particelle costituenti il disco di accrescimento incontrano delle sezioni d'urto, il cui valore è inversamente proporzionale al quadrato della massa. Poiché la massa dei protoni è circa 2000 volte quella degli elettroni, la loro σ_p è circa altrettanto più piccola e questo ci permette di ottenere una buona approssimazione anche considerando che la materia sia composta solamente da elettroni. La definizione

⁴Classicamente, la distanza dal buco nero alla quale la velocità di fuga è pari alla velocità della luce.

relativisticamente corretta della sezione d'urto, detta di Klein-Nishina, prevede inoltre una dipendenza dalla frequenza dell'onda elettromagnetica coinvolta. L'interazione tra fotoni ed elettroni può rallentare o addirittura bloccare la caduta del disco sulla singolarità spegnendo così il buco nero. In conclusione a questo elaborato si ricava l'espressione per la luminosità di Eddington, ovvero il limite all'energia che un corpo celeste può emettere. Nel caso dei buchi neri la pressione di radiazione impedirebbe al disco di accrescimento di cadere sulla singolarità e il corpo smetterebbe di produrre radiazione, mentre una stella verrebbe distrutta dal vento causato dal superamento di questo limite. Per questo non si osservano stelle più massicce di $100 M_\odot$ e gli astri più pesanti sono caratterizzati da violenti flussi di materia stellare.

Per la trattazione che segue sono necessarie due assunzioni non sempre vere, ma che semplificano i calcoli senza intaccare la validità del risultato: si ipotizza di avere a che fare con un problema a simmetria sferica e che il disco di accrescimento sia otticamente sottile. Ad una distanza r dalla singolarità l'energia che attraversa l'unità di superficie per unità di tempo e di frequenza è $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2}$ con $L(\nu) = f(\nu)L$ dove L è luminosità bolometrica mentre $f(\nu)$ è la distribuzione dell'emissione in frequenza (SED). Ricordando che l'impulso trasportato da un fotone è $\frac{h\nu}{c}$, quello uscente dall'unità di superficie sopra considerata nell'unità di tempo e frequenza è $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c}$. Si suppone che alla distanza r vi sia una densità di elettroni e protoni data rispettivamente da n_e e n_p , che sono uguali poiché il disco di accrescimento è costituito da plasma elettricamente neutro. L'area elettromagnetica totale delle particelle è

$$n_e \sigma_e + n_p \sigma_p \approx n_e \sigma_e \quad (22)$$

o più correttamente $n_e(r) \sigma_{KN}(\nu)$. Moltiplicando per l'impulso e integrando su tutte le possibili frequenze si ottiene

$$\int_0^\infty \frac{L(\nu) n_e(r) \sigma_{KN}(\nu)}{4\pi r^2 c} d\nu = \frac{L n_e(r) \sigma_T}{4\pi r^2 c} \int_0^\infty f(\nu) \tilde{\sigma}(\nu) d\nu \quad (23)$$

dove σ_{KN} degli elettroni è stata scritta come prodotto della sezione d'urto Thomson⁵ σ_T per il termine dipendente dalla frequenza $\tilde{\sigma}(\nu)$. Il risultato dell'integrale è $\mathbb{C} = 0.5-0.6$, allora la forza totale sentita dall'unità di volume del plasma alla distanza r è

$$\frac{F_{tot}}{V} = -\frac{G m_{BH} \rho(r)}{r^2} + \frac{L n_e(r) \sigma_T \mathbb{C}}{4\pi r^2 c} = \frac{G m_{BH} \rho(r)}{r^2} \left(\frac{L \sigma_T \mathbb{C}}{4\pi c G m_{BH} m_p} - 1 \right) \quad (24)$$

dove $\rho(r) = n_e(r) m_e + n_p(r) m_p \approx n_p(r) m_p = n_e(r) m_p$ (per un gas di solo idrogeno). La seconda uguaglianza dipende dal fatto che $m_e \ll m_p$. Uguagliando la forza di gravità e la pressione di radiazione ponendo $\frac{F_{TOT}}{V} = 0$ si ricava la luminosità di Eddington

$$L_{Edd} = \frac{4\pi c G m_{BH} m_p}{\sigma_T \mathbb{C}} \quad (25)$$

⁵La sezione d'urto Thomson è la sezione d'urto classica dell'elettrone e il suo valore è di circa $6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2$.

A Il tasso di produzione di energia

Perché la fusione nucleare avvenga, due particelle devono avvicinarsi abbastanza da attrarsi reciprocamente per via della forza nucleare forte. Tale condizione è contrastata dall'interazione coulombiana $E_C = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}$ che costituisce una barriera energetica da superare. Classicamente ciò è possibile solo se esse hanno un'energia termica $E_T = \frac{3}{2}kT$ maggiore di quella repulsiva, ma la meccanica quantistica predice una probabilità non nulla anche in caso contrario: è l'effetto tunnel. Le temperature tipiche degli interni stellari sono circa di 10^7 K pertanto le particelle hanno un'energia termica di 1 keV, d'altra parte la minima barriera di potenziale (quella tra due protoni) è di 1 MeV e servirebbero quindi 10^9 K secondo la meccanica classica perché la fusione avvenga. . . eppure si osservano le stelle brillare.

È possibile riassumere l'energia prodotta nelle stelle in tre contributi:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + \varepsilon_g - \varepsilon_\nu \quad (26)$$

dove ε_n rappresenta le reazioni termonucleari, ε_g è un termine gravitazionale, trascurabile quando è presente attività nel nucleo, e ε_ν è un termine associato ai neutrini.

Ci si concentra ora sul primo addendo. Poiché quelle che sono state chiamate reazioni nucleari non sono in realtà processi singoli ma catene, ε_n è una sommatoria:

$$\varepsilon_n = \sum \frac{\text{energia prodotta}}{\text{reazione}} \cdot \frac{N \text{ reazioni}}{\text{cm}^3 \cdot s} \cdot \frac{\text{cm}^3}{g} \quad (27)$$

dove il primo fattore è l'energia prodotta da un singolo processo della catena, il secondo è il *rate* con cui esso avviene e il terzo è l'inverso della densità. Data la generica trasformazione



il *rate* dipende dalla sezione d'urto della reazione, dalla velocità relativa v delle due particelle interagenti e dalla densità numerica di A e B. Considerando che la distribuzione delle velocità delle particelle è la maxwelliana

$$n(v)dv = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv \quad (29)$$

che può essere riscritta in termini di energia grazie alla relazione $v = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ come

$$\Pi(E) dE = 2\pi \left(\frac{1}{\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{1}{2}} dE \quad (30)$$

dove k è la costante di Boltzmann.

Integrando su tutte le possibili velocità o energie delle particelle, il *rate* con cui avviene una singola reazione è il seguente

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N_A N_B \int_0^v v \sigma(v) n(v) dv \approx N_A N_B \int_0^\infty E^{\frac{1}{2}} \sigma(E) e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{1}{2}} dE \\ &= N_A N_B \int_0^\infty E \sigma(E) e^{-\frac{E}{kT}} dE \quad (31) \end{aligned}$$

La sezione d'urto $\sigma(E)$ dipende a sua volta da tre fattori:

1. la sezione d'urto vera e propria, che si assume ora essere dell'ordine della lunghezza d'onda di de Broglie⁶ delle particelle

$$\sigma'(E) = \pi \lambda^2 = \pi \frac{h^2}{2mE} \quad (32)$$

dove h è la costante di Planck;

2. la probabilità che venga superata la barriera di potenziale coulombiana, data dal fattore di Gamow

$$\Pi'(E) = e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (33)$$

dove $E_0 = 1,6 \cdot 10^{-6} \frac{A_A A_B}{A_A + A_B} Z_A^2 Z_B^2$. È evidente che quanto più le particelle sono energetiche, tanto più è probabile che interagiscano;

3. la probabilità $\Pi''(E)$ che il risultato della reazione sia un nucleo stabile.

Sostituendo questa definizione nell'espressione per il *rate* si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N_A N_B \int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} \sigma'(E) \Pi'(E) \Pi''(E) dE \\ &= N_A N_B \int_0^\infty E e^{-\frac{E}{kT}} \frac{\pi h^2}{2ME} e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}} \Pi''(E) dE \\ &\approx N_A N_B \int_0^\infty e^{-\frac{E}{kT}} e^{-\left(\frac{E_0}{E}\right)^{\frac{1}{2}}} \Pi''(E) dE \quad (34) \end{aligned}$$

La funzione integranda è data dal prodotto di un termine decrescente (la distribuzione in energia delle particelle) e uno crescente (l'effetto tunnel) nell'energia, così che complessivamente il risultato sia diverso da zero solo attorno al picco di Gamow, che è un picco di probabilità.

⁶La lunghezza d'onda di de Broglie è una grandezza associata alle particelle nell'ipotesi della loro natura duale di onde e corpuscoli. Essa è definita come $\lambda = \frac{h}{p}$, dove p l'impulso della particella.

Di seguito una rappresentazione grafica in cui l'energia è data in unità di kT .

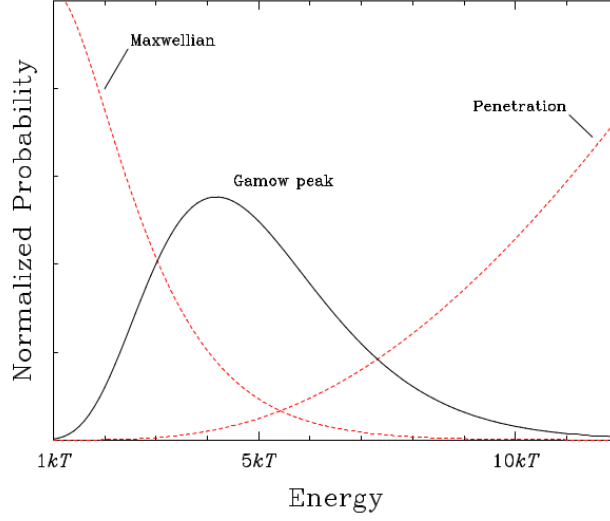


Figura 5: Picco di Gamow

In conclusione si ottiene

$$\frac{dN}{dt} = c_i N_A N_B \rho^2 T^{-\frac{2}{3}} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (35)$$

che inserito nell'espressione per il coefficiente di produzione energetica dà

$$\varepsilon_n = \sum_i E_i c_i N_A N_B \rho^2 T^{-\frac{2}{3}} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{\rho} \quad (36)$$

dove E_i è l'energia coinvolta nei singoli processi di ogni catena di reazioni e

$$c_i = E_0^{\frac{1}{6}} \Pi'' \frac{4h^2}{k^{\frac{2}{3}} m_H^{\frac{7}{2}}} \frac{(A_1 + A_2)^{\frac{3}{2}}}{(A_1 A_2)^{\frac{5}{2}}} \quad (37)$$

A determinare il coefficiente ε_n sono quindi in parte l'ambiente esterno e in parte gli elementi che interagiscono:

$$\varepsilon_n = \sum_i \underbrace{E_i c_i N_A N_B}_{\text{elementi}} \underbrace{\rho T^{-\frac{2}{3}} e^{-1.89 \left(\frac{E_0}{kT}\right)^{\frac{1}{3}}}}_{\text{ambiente}} \quad (38)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie, *An introduction to modern astrophysics. 2^a ed.*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017
- [2] Luca Ciotti, Dispense del corso di Astrofisica extragalattica, A.A.2019/2020
- [3] Francesco R. Ferraro, Dispense del corso di Astrofisica stellare, A.A.2019/2020
- [4] Hannu Karttunen et al., *Fundamental astronomy. 5^a ed.*, Springer-Verlag, Berlino, 1987
- [5] Maurizio Salaris, Santi Cassisi, *Evolution of stars and stellar populations*, Wiley, Chichester, 2005