

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

**PARAMETRI COSMOLOGICI E LORO  
DETERMINAZIONE**

Tesi di laurea

Presentata da:  
Lorenzo Palmucci

Relatore:  
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

---

Sessione II

Anno accademico 2019/2020



# Indice

<b>Indice</b>	<b>1</b>
<b>1 I parametri cosmologici</b>	<b>1</b>
1.1 Parametro di Hubble . . . . .	2
1.2 Parametro di densità . . . . .	3
1.3 Parametro di decelerazione . . . . .	5
<b>2 Determinazione parametri cosmologici</b>	<b>7</b>
2.1 Misure tramite candele standart . . . . .	7
2.1.1 Distanza di luminosità . . . . .	7
2.1.2 Misure sei parametri di densità e $q_0$ . . . . .	8
2.1.3 Misura di $H_0$ . . . . .	9
2.2 Misure tramite CMB . . . . .	9
2.2.1 Dipendenza dai parametri cosmologici . . . . .	10
2.2.2 Influenza dei parametri di densità . . . . .	11
2.2.3 Influenza del parametro di Hubble . . . . .	11
<b>3 Modello <math>\Lambda</math>CDM</b>	<b>13</b>
3.1 Evoluzione dei parametri . . . . .	13
3.2 Considerazioni finali . . . . .	14
<b>A</b>	<b>16</b>
<b>Bibliografia</b>	<b>17</b>

## Sommario

La seguente tesi è incentrata sulla descrizione dei parametri cosmologici fondamentali dell'universo e di come sia possibile stimarli tramite le osservazioni.

In particolare nel primo capitolo parleremo di come essi influiscano sulle proprietà dinamiche e geometriche dell'universo enunciando inoltre le relazioni che li legano tra loro.

Successivamente mostreremo i metodi di misurazione principali effettuati per la determinazione del valore dei parametri di Hubble, decelerazione e dei parametri di densità per le componenti di materia ed energia oscura, nello specifico tratteremo le misure con candele standart e, senza entrare nel dettaglio, mostremo la loro influenza sullo spettro della radiazione cosmica di fondo che funge da osservabile per la determinazione dei parametri.

Tali valori infine saranno elencati nel terzo capitolo dove tratteremo il modello  $\Lambda$ CDM, attualmente usato in cosmologia, elencandone brevemente le principali caratteristiche e mostrando come i parametri si evolvono all'interno del modello.

# Capitolo 1

## I parametri cosmologici

L'ambito scientifico in cui esprimiamo tali parametri è la cosmologia, branca che si occupa della descrizione dell'universo nelle sue proprietà dinamiche e geometriche. Alla base di qualsiasi modello atto a descriverlo vi è il *principio cosmologico* che assume l'universo come omogeneo ed isotropo e dunque privo di una posizione o direzione osservativa privilegiata; tali ipotesi non sembrano rispettate se si osserva l'universo localmente<sup>1</sup>, tuttavia le osservazioni su grandi scale, come ad esempio il conteggio di galassie (Fig.1.1), o le osservazioni della CMB confermano le due ipotesi espresse precedentemente. Tale principio permette di descrivere le proprietà geometriche dello



Figura 1.1: Le posizioni delle radiosorgenti  $N \sim 4 \cdot 10^4$  più forti di  $S = 2,5mJy$  a 1,4 GHz sono indicate dai punti su questo diagramma ad area uguale che copre il cielo entro 15 gradi dal polo nord celeste. Quasi tutte queste fonti sono extragalattiche e così distanti (redshift medio  $\langle z \rangle \sim 1$ ) che la loro distribuzione è piuttosto isotropa (Condon 2018).

spazio-tempo tramite la metrica di Robertson - Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - \frac{a^2(t)}{(1 + kr^2/4)^2} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>basti pensare alle stelle raccolte in una galassia

in cui  $k$  è il **parametro di curvatura** che fornisce la geometria dell'universo e nella metrica di Robertson-Wolker risulta essere una costante che assume valori  $(0,+1,-1)^2$ ,  $a(t)$  descrive l'espansione dell'universo nel tempo ed è detto *fattore di scala* e  $r, \theta, \phi$  sono le coordinate sferiche. Tale metrica combinata con le equazioni di campo di Einstein<sup>3</sup>:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\frac{8\pi}{c^4}GT_{ij} \quad (1.2)$$

che mettono in relazione le proprietà geometriche con il contenuto di energia-materia dell'universo, permette di ricavare le **equazioni di Friedman** che regolano la dinamica dell'universo.

$$\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2} \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\frac{8\pi Gp}{c^2} - \frac{k}{a^2} \end{cases} \quad (1.3)$$

Da tali equazioni, con l'ausilio di una opportuna equazione di stato tra pressione e densità espressa come  $P = w\rho c^2$ , forniscono la base da cui partire per ottenere le informazioni sulle proprietà dell'universo e dei parametri che lo descrivono.

## 1.1 Parametro di Hubble

Dato il principio cosmologico, consideriamo l'universo come una sfera omogenea che si espande radialmente, se ora prendiamo un punto generico all'interno della sfera (ad esempio una galassia), la sua posizione rispetto a un osservatore posto al centro di tale sfera si esprime mediante la relazione:

$$r(t) = a(t) * r_0 \quad (1.4)$$

dove  $r_0$  rappresenta la distanza comovente ovvero una distanza misurata tramite un metro che si espande insieme all'universo e che ne risulta quindi indipendente,  $a(t)$  invece è come abbiamo visto il parametro di espansione che vale 1 a  $t = t_0$  ovvero oggi e diventa minore di 1 a tempi passati. Per ricavare la velocità di tale punto all'interno della sfera si effettua la derivata della sua posizione nel tempo:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{da}{dt}r_0 + a\frac{dr_0}{dt} = \frac{\dot{a}}{a}r + av_{pec} = H_0r \quad (1.5)$$

nell'ultimo passaggio abbiamo eliminato il secondo termine della derivata in quanto rappresenta il moto peculiare del punto non legato all'espansione dell'universo, tale termine è indipendente dalla distanza dal centro della sfera e osservativamente, a grandi distanze, risulta essere trascurabile rispetto al primo. Ciò che otteniamo è la famosa legge di Hubble-Lemaitre (Fig.1.2) che esprime la velocità di recessione delle galassie in

---

<sup>2</sup> $k$  dipende dall'energia totale dell'universo e da una separazione comovente ciò la rende costante in spazio e in tempo

<sup>3</sup>a tali equazioni andrebbe aggiunto il contributo della costante cosmologica ( $\Lambda g_{ij}$ ) che per il momento omettiamo per non appesantire inutilmente la trattazione dei parametri

funzione della loro distanza dall'osservatore.  $H$  ha le dimensioni di un inverso del tempo, ma viene tuttavia espressa in  $(km/s * Mpc)$  essendo misurata tramite una velocità di recessione riferita ad una certa distanza; poichè le osservazioni hanno mostrato che l'universo è in espansione la (1.5) implica  $H > 0$ .

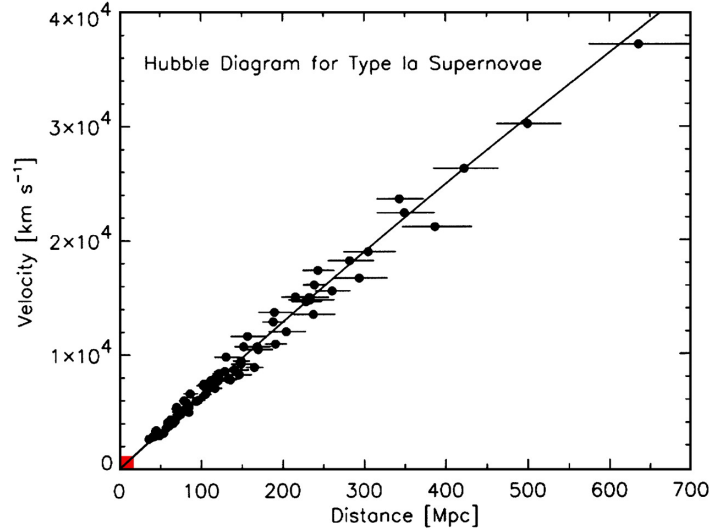


Figura 1.2: Il diagramma di Hubble per le supernovae di tipo Ia (*Kirshner 2004*). La dispersione attorno alla linea corrisponde a errori statistici di distanza  $< 10\%$  per oggetto.

Notiamo che la parola costante è un po' fuorviante. Sebbene sia certamente costante nello spazio a causa del principio cosmologico, non vi è motivo per cui sia costante nel tempo. In effetti possiamo scrivere l'equazione di Friedmann come equazione di evoluzione per  $H$  (t).

$$H^2(t) = \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3}G\rho(t) - \frac{k}{a^2} \quad (1.6)$$

Per questo motivo si preferisce generalmente parlare di parametro di Hubble anzichè costante.

## 1.2 Parametro di densità

Il parametro di densità è utilizzato per studiare la composizione e la geometria dell'universo. Per cominciare ripartiamo dalla prima delle equazioni di Friedmann dove sostituiamo  $\frac{\dot{a}}{a}$  con  $H$  parametro di Hubble:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho - \frac{k}{a^2} \quad (1.7)$$

Per ogni  $H$  notiamo che esiste un valore tipico di densità tale da rendere la geometria dell'universo piatta ( $k=0$ ), tale densità viene definita densità critica ed è data da:

$$\rho_{cr} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \quad (1.8)$$

E' bene far notare che tale densità varia nel tempo per via di H e che essa non rappresenta la densità vera dell'universo poichè esso non deve necessariamente essere piatto. Dunque tale densità rappresenta una scala naturale dell'universo, risulta utile allora definire una quantità adimensionale chiamata **parametro di densità** data dal rapporto della densità vera dell'universo con quella critica:

$$\Omega(t) = \frac{\rho}{\rho_{cr}} \quad (1.9)$$

Partendo da questa relazione possiamo riscrivere l'equazione di Friedmann come:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_{cr} \Omega - \frac{k}{a^2} = H^2 \Omega - \frac{k}{a^2} \quad (1.10)$$

che riarangiata mi da:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \quad (1.11)$$

Da qui notiamo subito come il valore di omega influisca su k, infatti per:

- $\Omega = 1$  avremo  $k = 0$  ovvero un universo piatto: sono rispettati gli assiomi della geometria di Euclide (due rette parallele mantengono distanza fissa e non si incontrano mai). In tal caso l'universo deve avere una estensione infinita, perché se arrivasse a un limite definito, allora sarebbe violato il principio secondo cui l'universo dovrebbe apparire uguale da tutti i punti di vista.
- $\Omega < 1$  avremo  $k < 0$  ovvero un universo aperto; tale universo segue una geometria iperbolica: le linee parallele non si incontrano mai, ma spezzano l'assioma di Euclide divergendo l'una dall'altra. Tale universo deve avere una estensione infinita, proprio come nel caso piatto.
- $\Omega > 1$  avremo  $k > 0$  ovvero un universo chiuso: tale universo è associabile, nel caso bidimensionale, alla superficie di una sfera, a differenza del caso di una geometria piatta, la superficie sferica ha un'estensione perfettamente finita, la cui area è data da  $4\pi r^2$ ; eppure non vi è alcun confine, nessun "bordo" sulla superficie della sfera, quindi è perfettamente possibile avere una superficie finita che tuttavia non ha confini. In tale universo non valgono gli assiomi euclidei (due rette parallele ad esempio finiscono per incontrarsi).

E' bene notare che se consideriamo dimensioni piccole rispetto alla scala dell'universo, le leggi euclidee iniziano a diventare una buona approssimazione della realtà qualunque sia la geometria generale, ciò rende piuttosto difficile misurare la geometria del nostro universo, perché la regione vicina che possiamo misurare con precisione è solo una piccola frazione delle sue dimensioni. La curvatura dello spazio-tempo, espressa dal parametro k, è strettamente legata all'energia totale dell'universo:

$$k \propto E = U_{grav} - T \quad (1.12)$$

che determina l'evoluzione temporale del parametro di scala  $a(t)$  (Fig.1.3).



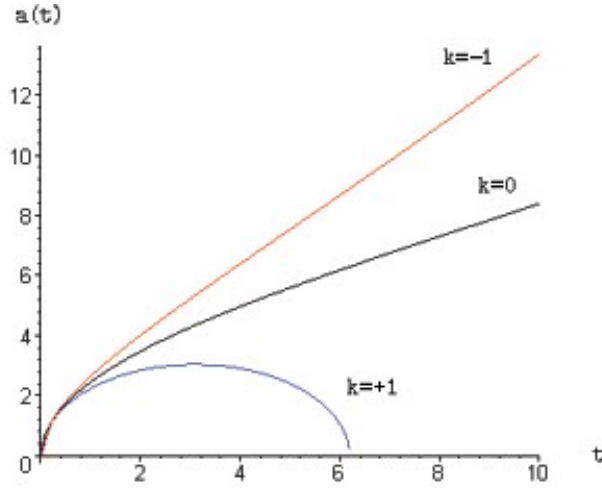


Figura 1.3: Evoluzione delle dimensioni dell'universo (fattore di scala) rispetto alle tre diverse geometrie dell'universo, notare che l'universo chiuso è l'unico che non prevede una espansione infinita, infatti dopo aver raggiunto un raggio massimo esso si rincontrerà per effetto dell'energia potenziale gravitazionale, essendo dominante sulla energia cinetica (*Big Crunch*).

### 1.3 Parametro di decelerazione

Come abbiamo scoperto, non solo l'universo si sta espandendo, ma anche la velocità con cui si espande, data dal parametro Hubble, sta cambiando nel tempo. Il parametro di decelerazione è un modo per quantificarlo. Consideriamo un'espansione di Taylor del fattore di scala al tempo presente. La forma generale di tale espansione risulta:

$$a(t) = a(t_0) + \dot{a}(t_0)[t - t_0] + \frac{1}{2}\ddot{a}(t_0)[t - t_0]^2 + \dots \quad (1.13)$$

Se ora la dividiamo per  $a(t_0)$ , il coefficiente davanti a  $[t - t_0]$  sarà semplicemente il parametro di Hubble attuale:

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = 1 + H_0[t - t_0] - \frac{q_0}{2}H_0^2[t - t_0]^2 + \dots \quad (1.14)$$

che definisce il parametro di decelerazione  $q_0$  come:

$$q_0 = -\frac{a(t)}{a(t_0)} \frac{1}{H_0} = -\frac{a(t_0)\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} \quad (1.15)$$

Maggiore è il valore di  $q_0$ , più rapida è la decelerazione. Sfruttando le equazioni di Friedman è possibile esprimere  $q_0$  in termini di  $H_0$  o  $\Omega_0$ : utilizzando l'equazione (1.8) per la densità critica otteniamo:

$$q_0 = \frac{4\pi G\rho}{3H_0^2} = \frac{\Omega_0}{2} \quad (1.16)$$

equazione valida se l'universo fosse composto dalla sola materia. Se conosciamo le proprietà della materia nell'universo, allora  $q_0$  non è indipendente dai primi due parametri che abbiamo discusso,  $H_0$  e  $\Omega_0$ ; questi due sono sufficienti per descrivere tutte le possibilità. Tuttavia, non sappiamo tutto del materiale che costituisce l'universo, quindi il  $q_0$  può fornire un nuovo modo di studiarlo. La (1.15) ammette solo valori positivi del parametro e dunque prevede solo modelli di universo in decelerazione, rallentato dalla forza gravitazionale delle componenti che lo costituiscono. Tuttavia come vedremo nel capitolo 2 il valore del parametro risulta essere negativo ( $q_0 < 0$ ); ciò porta a introdurre un termine di tensione negativa nelle equazioni di Einstein ( $\Lambda$ ). Tale termine si indentifica nell'energia oscura (e in una densità  $\Omega_\Lambda$ ) che esercit  una forza repulsiva che si oppone all'attrazione gravitazionale delle altre componenti dell'universo. Con l'introduzione di tale termine il parametro  $q_0$  si pu  scrivere come:

$$q_0 = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda \quad (1.17)$$

Dove sono distinte le componenti di materia ( $\Omega_M$ ) e di energia oscura ( $\Omega_\Lambda$ ) che causa il valore negativo di  $q_0$ .

# Capitolo 2

## Determinazione parametri cosmologici

Ci occuperemo ora dei metodi osserativi utili a stimare i valori dei parametri enunciati; in particolare ci concentreremo sul parametro di Hubble e sul parametro di densità sufficienti a fornire una descrizione base dei modelli cosmologici. In particolare analizzeremo i valori ottenuti tramite l'osservazione di candele standart con quelli ottenuti tramite l'osservazione della radiazione cosmica di fondo (CMB).

### 2.1 Misure tramite candele standart

In questa parte tratteremo i metodi che stimano i valori dei parametri cosmologici tramite l'osservazione di oggetti astrofisici la cui luminosità assoluta è nota, tali oggetti sono definiti **candele standart** e rivestono un ruolo fondamentale in astrofisica per la loro funzione di indicatori di distanza. Le candele più utilizzate sono le supernove di tipo Ia e le stelle variabili cefeidi, le prime di queste hanno origine dall'esplosione di nane bianche che hanno superato il limite di massa di Chandrasekhar; durante l'esplosione la luminosità al picco raggiunge valori di  $10^9 - 10^{10} L_{\odot}$  rimanendo visibile, in molti casi, per parecchi mesi. Tali eventi hanno circa la stessa luminosità perchè il processo fisico che porta all'esplosione è lo stesso per ogni stella indipendentemente dalla distanza in cui si trova. Le cefeidi invece sono stelle variabili la cui luminosità assoluta dipende dal periodo di pulsazione tramite la relazione:

$$M = A + B \log_{10}(P) \tag{2.1}$$

con A, B costanti e P ed M rispettivamente periodo e magnitudine assoluta della cefeide, tale relazione viene calibrata sulle Cefeidi di distanza (e quindi di magnitudine assoluta) nota.

#### 2.1.1 Distanza di luminosità

La distanza di luminosità è la distanza alla quale una sorgente di luminosità (L) è vista con un certo flusso (F) ed è un osservabile fondamentale in cosmologia; il suo utilizzo permette di misurare i valori dei parametri cosmologici. In termini fisici essa è legata

alla misura del flusso di una sorgente che cala come il quadrato della distanza:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2} = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2} \quad (2.2)$$

dove  $a_0 r$  è la distanza fisica vera della sorgente a cui va aggiunta una correzione cosmologica pari a  $(1+z)^2$ , dovuta a due effetti legati all'espansione dello spazio-tempo:

- L'energia dei fotoni cala di un fattore  $(1+z)$  a causa del redshift dovuto all'espansione dello spazio in cui viaggia il fotone.
- A causa della dilatazione dei tempi i fotoni arrivano con frequenza minore rispetto a quando sono stati emessi; tale fenomeno è proporzionale a  $(1+z)$ .

In questa trattazione  $L$  ed  $F$  sono quantità bolometriche in quanto si riferiscono al totale dell'energia radiante emessa; nella realtà i rivelatori sono sensibili solo ad un determinato intervallo dello spettro quindi, per le quantità espresse in unità di frequenza, bisogna applicare una correzione  $K$  dipendente dallo spettro e dal redshift della sorgente. Tale correzione ha  $K = 0$  per le quantità bolometriche in quanto l'energia totale si conserva. La distanza di luminosità si può esprimere in termini dei parametri cosmologici  $H_0$ ,  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  (si veda l'Appendice A):

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 |\Omega_k|^{1/2}} \sin n \left\{ |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z [(1+z)^2 (1 + \Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{1/2} dz \right\} \quad (2.3)$$

in cui  $\Omega_k = 1 - \Omega_m - \Omega_\Lambda$  e  $\sin n$  è  $\sin$  per  $\Omega_k < 0$  e  $\sinh$  per  $\Omega_k > 0$  mentre per  $\Omega_k = 0$  (universo piatto) abbiamo che il seno scompare ( $\sin(x) = x$ ) e conseguentemente gli  $\Omega_k$  si semplificano (*Sean M. Carrol et al. 1992*).

## 2.1.2 Misure sei parametri di densità e $q_0$

Per misurare i parametri di densità si sfrutta la relazione magnitudine-redshift che risulta sensibile al modello cosmologico:

$$m(z) = M + 5 \log d_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda, H_0) + 25 = M + 5 \log D_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda) - 5 \log H_0 + 25 \quad (2.4)$$

con  $D_L = H_0 d_L$ . Nel limite di basso redshift la precedente equazione si riduce alla classica relazione lineare:

$$m(z) = M + 5 \log cz - 5 \log H_0 + 25 = X + 5 \log cz \quad (2.5)$$

dove  $X = M - 5 \log H_0 + 25$  è un parametro libero che può essere misurato grazie alla magnitudine apparente e il redshift, il tutto senza conoscere il valore di  $H_0$ . Tali supernove infatti non sono sensibili ai parametri di densità (Fig.2.1). Per ricavare i valori di  $\Omega$  si utilizzano le supernove ad alto redshift, determinando prima il valore di  $X$  con quelle a piccolo redshift, in modo da trovare il best fit della relazione:

$$m(z) - X = 5 \log D_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda) \quad (2.6)$$

I risultati ottenuti per i due parametri sono  $\Omega_m = 0.32 \pm 0.10$  e  $\Omega_\Lambda = 0.68 \pm 0.10$  (*Riess et al. 1998*). Da questi due valori è possibile anche stabilire il valore di  $q_0$  tramite la (1.16) che fornisce un valore pari a  $q_0 = -0,52 \pm 0.15^1$ .

<sup>1</sup>l'errore su  $q_0$  è ricavato tramite la propagazione degli errori applicata alla (1.16)

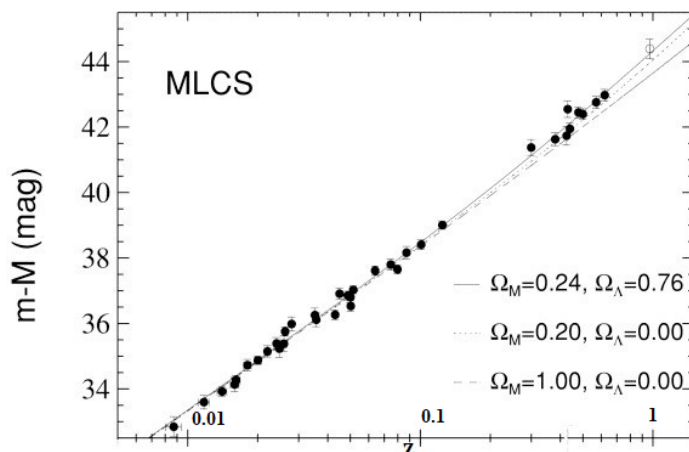


Figura 2.1: Diagramma di Hubble per SNe Ia ad alto redshift e a basso redshift; sono inoltre plottate tre curve riferite a tre set di parametri di  $\Omega$  differenti (*Riess et al. 1998*).

### 2.1.3 Misura di $H_0$

Per il calcolo di  $H_0$  si può sfruttare la relazione (2.5) rimanendo nell'universo locale. Le recenti stime della costante di Hubble sono state fatte sfruttando le stelle variabili Cefeidi; il vantaggio di usare questa categoria di candele standard sta nel fatto che esse emettono luce in maniera continua e se ne possono trovare in quantità maggiori rispetto alle supernove Ia che invece sono eventi rari e di durata finita. I principali problemi che causano incertezza sulla stima dei valori di distanze per le Cefeidi sono dovute all'abbondanza degli elementi pesanti, che causano una variazione nella relazione periodo luminosità (2.1), e l'incertezza sulla distanza dalla vicina galassia fiduciale rispetto alla quale vengono misurate tutte le Cefeidi. Una delle stime più recenti del parametro di Hubble ottenuta tramite l'osservazione di tali stelle è  $H_0 = 74,03 \pm 1,42 [km/s * Mpc]$  (*Riess A.G. 2019*), in questo caso la galassia che ha fornito le candele di prova è stata la **Grande Nube di Magellano** osservata con la *Wide Field Camera 3 (WFC3)* montata sul telescopio spaziale Hubble.

## 2.2 Misure tramite CMB

Una ricca fonte di indagine per i parametri cosmologici è data dalla radiazione cosmica di fondo; essa è una radiazione elettromagnetica termica che permea l'universo, proveniente dall'epoca della ricombinazione. Tale passaggio è legato alla transizione da un universo opaco a un universo trasparente: con l'espandersi dell'universo la densità di energia cala diminuendo il grado di ionizzazione del gas di cui è costituito; così le interazioni tra elettroni e fotoni, sotto forma di scattering, diminuiscono permettendo agli ultimi di diffondersi nell'universo. Ogni osservatore nell'universo è così circondato dalla cosiddetta superficie di ultimo scattering, dalla quale i fotoni della CMB hanno viaggiato fino a giungere all'osservatore stesso. E' per questo motivo che la CMB

è considerata la più antica immagine dell'universo ottenibile: prima dell'ultimo scattering esso era opaco. Dunque non è possibile ricevere alcun fotone da un periodo antecedente a tale evento cosmologico, a cui corrisponde un redshift  $z \sim 1000$ . Ciò che a noi interessa è il fatto che tale radiazione risulta quasi perfettamente isotropa, con variazioni di temperatura dell'ordine di  $\frac{\delta T}{T} = 10^{-4}$ ; sono proprio queste fluttuazioni che ci permettono di ricavare i valori dei parametri cosmologici tramite lo studio dello spettro di potenza angolare della CMB (Fig.2.2).

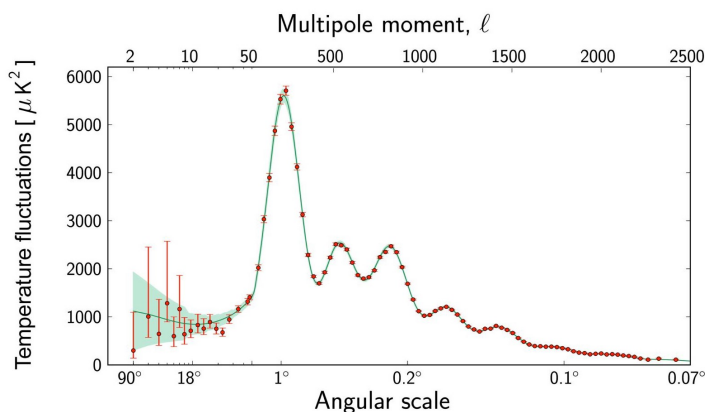


Figura 2.2: Spettro angolare di potenza della CMB

### 2.2.1 Dipendenza dai parametri cosmologici

Le grandezze che influenzano la "temperatura" dei fotoni della CMB sono: la gravità, la densità e la velocità delle componenti che costituiscono il plasma primordiale. Senza entrare nel dettaglio elenchiamo i principali meccanismi fisici che danno origine alle anisotropie:

- L'effetto **Sachs-Wolfe** che lega le fluttuazioni di temperatura con le perturbazioni del campo gravitazionale al tempo dell'ultimo scattering: il principio alla base del fenomeno è che se un fotone esce da una buca di potenziale al momento dell'ultimo scattering, perde energia (redshift), mentre se un altro fotone, nello stesso momento, scivola dentro la buca, guadagna energia (blushift).
- Le **Oscillazioni acustiche**: un fluido che risente di un campo gravitazionale tende ad addensarsi, ma successivamente la sua elevata densità genera una pressione che tende a respingerlo fuori dalla buca di potenziale in cui era scivolato; questo processo genera un moto oscillatorio che influenza l'alternarsi dei picchi dello spettro di potenza.

Detto ciò, la tecnica che si utilizza per ricavare i parametri cosmologici è un confronto tra la curva relativa allo spettro della CMB misurato e una teorica che viene fatta adattare a quella sperimentale mediante la variazione di tali parametri.

## 2.2.2 Influenza dei parametri di densità

Una delle prime informazioni utili ricavabile dallo spettro della CMB è la geometria dell'universo; essa si determina tramite la posizione del primo picco, che essendo circa a  $l_p = 200$  ( $\Theta_p \sim 180/l_p \sim 1^\circ$ ), stabilisce che il nostro universo è prossimo alla geometria euclidea ( $l_p \sim 200 \Omega_0^{-1/2}$ ). Ciò ci dice che le geodetiche percorse dai fotoni tra la superficie di ultimo scattering e un osservatore sono delle linee rette, se invece l'universo seguisse un altro tipo di geometria, ad esempio quella iperbolica (universo aperto), le linee fotoniche, partendo dall'osservatore, non sarebbero più delle rette ma divergerebbero tra loro e le fluttuazioni sulla superficie di ultimo scattering sarebbero osservate sotto scale angolari più piccole. L'altezza del picco invece dipende da  $\Omega_m$ ; l'effetto fisico alla base del processo è l'Early ISW (Integrated-Sachs-Wolfe) che occorre subito dopo la ricombinazione. Per quanto riguarda tale fenomeno, più la densità di materia è bassa più risulta importante il contributo dato dalla componente di radiazione, che tende ad aumentare l'ampiezza dello spettro di potenza. Il motivo è da ricercare nella incapacità della luce di raggrupparsi per via della sua forte pressione di radiazione che tende ad "abbattere" il potenziale gravitazionale. Per quanto riguarda gli effetti della costante cosmologica ( $\Omega_\Lambda$ ), essa risulta rilevante per alte scale angolari quando il suo contributo in energia inizia ad essere paragonabile a quello della materia ( $z < z_{CMB}$ ). All'aumentare di  $\Omega_\Lambda$  si osserva un aumento delle anisotropie per l'effetto Late ISW: l'energia oscura espandendo lo spazio-tempo causa una evoluzione significativa delle buche di potenziale attraversate dai fotoni della CMB che di conseguenza subiscono una variazione di energia per effetto gravitazionale<sup>2</sup>. Riportiamo dunque i valori dei parametri di densità ottenuti dalle osservazioni della CMB tramite la missione (*Planck 2018*).

- $\Omega_k = 1 - \Omega_0 = 0,001 \pm 0,002$
- $\Omega_m = 0,315 \pm 0,007 \implies \Omega_\Lambda = 0,685 \pm 0,007$

## 2.2.3 Influenza del parametro di Hubble

La grandezza che permette di calcolare il valore di  $H_0$  tramite la CMB è la distanza angolare relativa alla superficie di ultimo scattering:

$$d_A(z) = \frac{l}{\Theta} \quad (2.7)$$

dove  $\Theta$  è l'angolo sotto cui un oggetto cosmico viene osservato<sup>3</sup> e  $l$  è la dimensione intrinseca nota dell'oggetto ("standart ruler") associata, nel caso della CMB, al "*sound horizon*" ovvero la distanza che le onde sonore possono aver percorso nel tempo prima della ricombinazione, tale quantità può essere determinata conoscendo la velocità del suono nel plasma primordiale e dal tempo ( $t_r$ ) in cui avviene la ricombinazione.

<sup>2</sup>ricorda che per l'effetto SW  $\frac{\Delta T}{T} \propto \Delta \Phi \propto \frac{\Delta \rho}{\rho}$

<sup>3</sup>nel nostro caso corrisponde alla posizione del primo picco nello spettro di potenza (2.2)

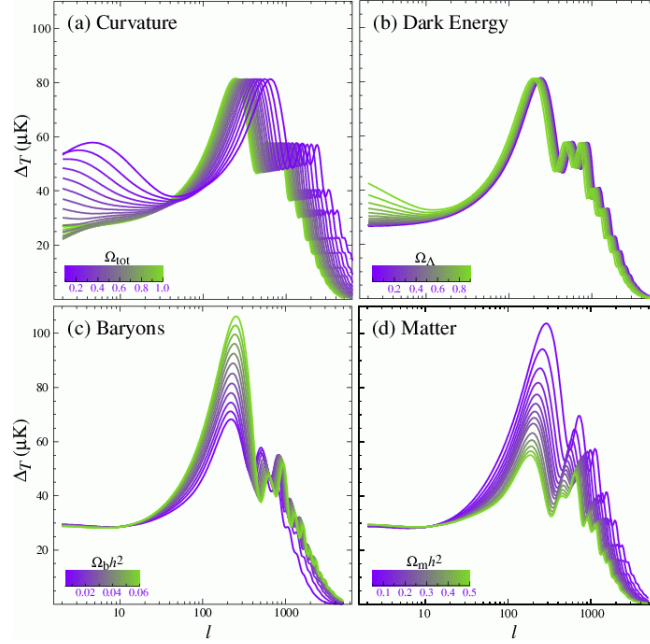


Figura 2.3: Variazione dello spettro di potenza dovuto a diversi valori dei singoli parametri di densità.

La distanza angolare tuttavia dipende anche da  $H_0$  tramite la relazione di Matting (*Cambridge 1999*):

$$d_A = \frac{r}{1+z} = \frac{1}{1+z} \sin n \left\{ \frac{c}{H_0} \int_0^{z_{sc}} \frac{1}{(1+z)[(1+z)^3 \Omega_m + \Omega_k(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2}} dz \right\} \quad (2.8)$$

dove  $\sin n$  ha lo stesso comportamento descritto nella sezione (2.1.1) per la  $d_L$ . A questo punto è chiaro che conoscendo  $d_A$  si può ottenere il valore di  $H_0$ . Variando il valore di  $H_0$  e dunque variando il valore della distanza angolare i picchi dello spettro si spostano rispettivamente a scale angolari più piccole (per  $H_0$  minori) o più grandi (per  $H_0$  maggiori). In base alle osservazioni della missione (*Planck 2018*) il valore stimato per  $H_0$  risulta essere:

$$H_0 = 67,4 \pm 0,5 [km/s Mpc] \quad (2.9)$$

Tale valore si discosta di circa  $4\sigma$  dal valore calcolato mediante candele standard, evidenziando una tensione tra i valori che è tuttora frutto di discussione tra gli studiosi di cosmologia.



# Capitolo 3

## Modello $\Lambda$ CDM

Il  $\Lambda$ CDM, che assume come origine dell'universo il Big Bang, è il modello attualmente adottato in cosmologia in quanto riproduce in modo soddisfacente le osservazioni della radiazione cosmica di fondo (CMB) e delle supernove che indicano un universo in espansione accelerata dovuta alla esistenza della energia oscura. Il modello fornisce anche una spiegazione alla formazione delle strutture cosmiche: si pensa che ciò sia possibile solo in presenza di *Cold Dark Matter* ovvero materia oscura senza agitazione termica (non collisionale) in cui agisce solo la gravità. Esso assume per i parametri trattati i seguenti valori:

- $H_0 \sim 70 \text{ km/s Mpc}$
- $\Omega_0 = 1^1$
- $\Omega_m \sim 0,3$
- $\Omega_\Lambda \sim 0,7$
- $\Omega_{r,\nu} \sim 10^{-5}$
- $q_0 \sim -0.55$

Tali parametri sono soggetti a continue revisioni che tuttavia tendono a variare i valori assoluti di quantità non eccessivamente rilevanti per la struttura stessa del modello.

### 3.1 Evoluzione dei parametri

I valori dei parametri sono riferiti al tempo presente ( $a(t_0) = 1$ ), essi dunque, ad eccezione di  $\Omega_0^2$ , avranno una evoluzione temporale dovuta al fattore di scala ( $a(t)$ ) che può essere descritta da una funzione dipendente dal redshift ( $z$ ).

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c} = \frac{r \dot{a}}{c a} = \Delta t \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{a} - 1 \quad (3.1)$$

---

<sup>1</sup>l'universo segue la geometria euclidea

<sup>2</sup>la geometria dell'universo resta la stessa in ogni epoca, le singole componenti possono tuttavia cambiare tra loro

Partendo dalle componenti di densità e ricordando che ci troviamo in un universo piatto otteniamo i seguenti andamenti:

- $\rho_m \propto a^{-3} \propto (1+z)^3$
- $\rho_{r,\nu} \propto a^{-4} \propto (1+z)^4$
- $\rho_\Lambda \propto a^0 \propto \text{cost.}$

L'andamento al cubo della  $\rho_m$  è dovuto alla conservazione della massa in una sfera in espansione. Nel caso della radiazione va aggiunto il contributo dovuto all'aumento di lunghezza d'onda proporzionale ad  $(a^{-1})$  causato dal redshift legato all'espansione; ciò deriva intrinsecamente dalla equivalenza tra massa e energia relativistica che porta a considerare le densità cosmologiche come densità di materia ed energia. Per quanto riguarda l'energia oscura, essa sembra crearsi man mano che l'universo si espande: ciò viene dal fatto che il  $w$  che compare nella equazione di stato ( $P = w\rho c^2$ ) assume valore  $w \sim -1$  (*Planck 2018*) per tale componente; non è chiaro come mai tale energia si mantiene costante<sup>3</sup>. Dalle relazioni possiamo comunque notare che l'universo ha attraversato diverse epoche cosmologiche dove una componente era dominante rispetto alle altre, per esempio la radiazione ha dominato per un periodo estremamente breve dall'inizio dell'universo, per poi essere sorpassata dalla densità di materia ( $z \sim 3500$ ). Ottenute le dipendenze per le densità, utilizzando l'equazione (1.6) per un universo piatto ( $k = 0$ ), otteniamo l'equazione per  $H(z)$ :

$$H(z) = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho(z)} = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{r,\nu}(1+z)^4 + \Omega_\Lambda} \quad (3.2)$$

È interessante notare che a  $t$  che tende a infinito ( $\Omega_m \rightarrow 0, \Omega_{r,\nu} \rightarrow 0$ ) la costante di Hubble tenderà a saturare al valore  $H_\infty = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2} \sim 59$  [km/s Mpc] tale parametro corrisponde ad un universo completamente dominato dalla energia oscura in cui gli effetti attrattivi della materia e radiazione risultano trascurabili (Fig.3.1).

## 3.2 Considerazioni finali

Il  $\Lambda$ CDM pur essendo il modello universalmente accettato in cosmologia presenta dei problemi ancora aperti:

- Incertezza sul valore di  $H_0$ , dovuto alla tensione tra il valore stimato con candelle standart (universo locale) e quello legato allo spettro della CMB.
- Le osservazioni legate alla materia ed energia oscura<sup>4</sup> che restano tuttora delle ipotesi in quanto non sono ancora stati osservati.

---

<sup>3</sup>si ipotizza che essa sia una energia fittizia legata al vuoto

<sup>4</sup>queste due componenti costituiscono circa il 95% del budget energetico dell'universo!

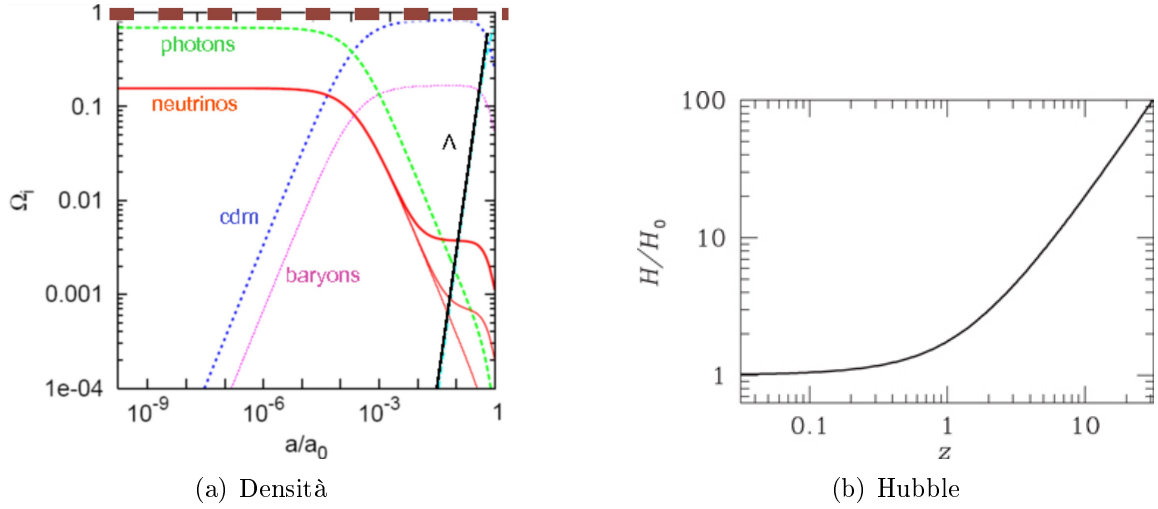


Figura 3.1: Le figure mostrano gli andamenti dei parametri di densità (a) e del parametro di Hubble riferito ad  $H_0$  (b)

Il primo punto ha portato per comodità a esprimere spesso le misure in unita di "h":

$$h = \frac{H_0}{100[km/s Mpc]} \quad (3.3)$$

includendo h nelle misure rimane possibile "aggiustare" i valori calcolati anche in tempi futuri con nuove stime del valore di  $H_0$ . Per quanto riguarda il secondo punto non vi è ancora chiarezza su di cosa siano costituite materia ed energia oscura; e in particolare di come la seconda assuma un vero e proprio ruolo di costante cosmologia mantenendo la sua densità invariante per l'espansione dell'universo ( $w = -1 \rightarrow \rho_{\Lambda} = \text{costante}$ ). Lo sviluppo di nuove teorie permetterà ai cosmologi di definire un modello di universo quanto più possibile accurato, il raggiungimento di tale obiettivo tuttavia avrà bisogno di tecniche e strumenti di misurazione in grado di ottenere, con elevata precisione, i valori dei parametri cosmologici trattati, in quanto fondamentali per la comprensione dell'origine ed evoluzione del nostro universo.

# Appendice A

Si vuole ricavare l'espressione della distanza di luminosità in funzione dei parametri cosmologici. Definiamo per prima cosa due quantità adimensionali:

$$R = \frac{a}{a_0} = \frac{1}{1+z}; \quad \tau = H_0 t \quad (\text{A.1})$$

Dove  $a$  è il fattore di scala, di cui  $a_0$  è il valore al tempo presente, e  $z$  è il redshift. Tali quantità permettono di scrivere la prima equazione di Friedmann (1.3) come:

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = 1 + \Omega_m \left(\frac{1}{R} - 1\right) + \Omega_\Lambda (R^2 - 1) \quad (\text{A.2})$$

Mediante un cambio di variabile nella equazione precedente: passando da  $R$  a  $z$  e da  $\tau$  a  $t$ , è possibile ottenere l'equazione che lega il tempo trascorso da un  $t_1$  generico al tempo attuale  $t_0$  con il redshift  $z$  e i parametri di densità:

$$t_0 - t_1 = \frac{1}{H_0} \int_0^{z_1} (1+z)^{-1} [(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{-1/2} dz \quad (\text{A.3})$$

Si consideri la (1.1), per un raggio di luce che si propaga radialmente da  $r = 0$  ad  $r = r_0$ , con  $d\theta = 0$  e  $d\phi = 0$ :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)} \quad (\text{A.4})$$

Moltiplicando ora la (A.4) per  $a_0$  e usando l'equazione (A.3) con l'ausilio delle seguenti relazioni:

$$(1+z) = \frac{a_0}{a_1} \quad d_L = \frac{a_0^2 r_1}{a_1} \quad (\text{A.5})$$

si ottiene l'espressione della distanza di luminosità in funzione del redshift e dei parametri di densità:

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0 |\Omega_k|^{1/2}} \sin n \{ |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z [(1+z)^2(1+\Omega_m z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{1/2} dz \} \quad (\text{A.6})$$

# Bibliografia

- [1] Francesco Vazza, *Appunti di Astrofisica extragalattica*, 2020
- [2] J.J.Condon and A.M.Matthews,  *$\Lambda$ CDM cosmology for astronomers*, arXiv:1804.10047v1 [astro-ph.CO] 26 Apr 2018,
- [3] Andrew Liddle, *"An Introduction to Modern Cosmology"*, Second edition, University of Sussex, UK, Wiley, pp. 45-48, April 2003.
- [4] Robert P.Kirshner, *Hubble's diagram and cosmic expansion*, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, PNAS January 2004.
- [5] Riess, A. G. et al., *Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant* arXiv:astro-ph/9805201, pp. 1009-1037, September 1998.
- [6] Riess, A. G. et al., *Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics Beyond LambdaCDM*, arXiv:1903.07603 [astro-ph.CO], March 2019.
- [7] Perlmutter, S. et al., *Measurements of the Cosmological Parameters  $\Omega$  and  $\Lambda$  from the First Seven Supernovae*, The Astrophysical Journal, 483:565-581, July 1997.
- [8] O. Lahav (University College London) and A.R. Liddle (University of Edinburgh), *"THE COSMOLOGICAL PARAMETERS"*, arXiv:1401.1389 [astro-ph.CO], January 2014.
- [9] *Observations in Cosmology* CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS 1999, Cap.3.4
- [10] <http://background.uchicago.edu/~whu/araa/node15.html>
- [11] Plank Collaboratin, *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters*, Astronomy & Astrophysics manuscript no. ms September 2019.
- [12] ,Sean M. Carrol; William H. Press; Edwin L.Turner, *THE COSMOLOGICAL CONSTANT*, Annual Rev. Astron. Astrophys., Vol. 30, p. 499-542 (1992).