

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

DIPARTIMENTO DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Astronomia

**Dinamica delle galassie a spirale
e delle galassie ellittiche**

Tesi di laurea triennale

Presentata da:

Antonino Nunnari

Matricola 0000825409

Relatore:

Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno Accademico 2019–2020

Indice

1	Morfologia delle galassie	1
1.1	Classificazione di Hubble	1
1.1.1	Galassie ellittiche	1
1.1.2	Galassie a spirale	2
1.1.3	Galassie lenticolari	2
2	Dinamica delle galassie	3
2.1	Sistemi non collisionali	3
2.1.1	Tempo di rilassamento a 2 corpi (t_{2b})	4
2.1.2	Equazione di Boltzmann non collisionale	7
2.1.3	Equazioni di Jeans	8
2.1.4	Cenno al Teorema del Viriale	9
2.1.5	Cenno alla frizione dinamica	9
2.2	Dinamica delle galassie ellittiche	10
2.2.1	Schiacciamento degli sferoidi	10
2.2.2	Il piano fondamentale	10
2.3	Dinamica delle galassie a spirale	11
2.3.1	Costanti di Oort	11
2.3.2	Curva di rotazione dei dischi	13
2.3.3	Legge di Tully-Fischer	14
2.3.4	Cenno agli epicicli e alle onde dense	15

Sommario

Che cosa sono le galassie? Che differenza c'è tra quelle a spirale e quelle ellittiche? Perché hanno forme diverse? La dinamica stellare è uno strumento che dà delle risposte a questi interrogativi. Tale disciplina è la protagonista nel determinare la struttura e l'evoluzione dei sistemi stellari.

Il presente elaborato è volto a introdurre i modelli teorici e le tecniche utilizzate per analizzare i moti delle stelle, cioè a introdurre l'ampio campo della *dinamica stellare*. I tentativi di analizzare la dinamica delle galassie hanno inizio nel secolo scorso, dopo che l'astronomo Hubble scoprì dei sistemi stellari molto lontani, rivoluzionando la visione che si aveva dell'intero Universo. Questa scoperta spianò la strada verso un nuovo modello di Universo, in cui le galassie giocano il ruolo di mattoni costituenti dell'intero cosmo.

Dopo aver introdotto i tipi di galassie osservate da Hubble, in queste pagine si vedrà come le stelle in una galassia costituiscano un *sistema non collisionale*, introducendo il concetto di *tempo di rilassamento a 2 corpi*. In seguito, servirà trovare un set di equazioni che siano in grado di descrivere tali sistemi, in particolare un'equazione del moto e un'equazione di continuità. Queste equazioni sono dette *equazioni di Jeans*. In conclusione, si farà un approfondimento sulla dinamica delle galassie **ellittiche**, concentrandosi sullo *schacciamento degli sferoidi* e sul *piano fondamentale*, e sulla dinamica del disco delle galassie **a spirale**, chiarendo il ruolo delle *costanti di Oort* e della *curva di rotazione*.

Capitolo 1

Morfologia delle galassie

L'Universo è costituito da centinaia di miliardi di galassie, ognuna contiene centinaia di miliardi di stelle. Grazie a tutte le osservazioni fatte fino a oggi, sono state ricavate alcune caratteristiche riportate di seguito:

- Massa delle galassie $10^6 M_{\odot} \leq M \leq 10^{12} M_{\odot}$ ($M_{\odot} = 1.98 \cdot 10^{33} g$)
- Dimensioni delle galassie $100 pc \leq R \leq 100 kpc$ ($1 pc = 3.08 \cdot 10^{18} cm$)
- Velocità delle stelle nelle galassie $50 \frac{km}{s} \leq \sigma \leq 400 \frac{km}{s}$

La Galassia — il termine con la prima lettera maiuscola indica la Via Lattea — rientra tra le più grandi, infatti ha un diametro stimato di $32600 pc$ e una massa di $3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$.

1.1 Classificazione di Hubble

Nel secolo scorso un'evidenza osservativa mostrò come l'universo creasse pochi tipi morfologici di galassie, nonostante il gran numero di galassie esistenti. Il protagonista di tale scoperta fu l'astronomo *Edwin Hubble*: egli suddivise le galassie in due tipi, *Early Type* e *Late Type*. Il nome datogli deriva da una teoria — a oggi scartata — che consisteva nel considerare le galassie come strutture che nascono *Early Type* e che, evolvendo, diventano *Late Type*. Proprio per questo, inizialmente, si credeva che la **sequenza di Hubble** (figura 1.1) fosse uno schema evolutivo delle galassie. Tuttavia, tutti gli studi successivi, che portarono a grandi progressi in "Evoluzione stellare" e in "Dinamica stellare", rivelarono che questa teoria non può essere valida.

Le galassie *Early Type* possono essere *ellittiche* o *lenticolari*, mentre le galassie *Late Type* sono le galassie *a Spirale*. Tutte le galassie non riconducibili a uno di questi modelli vengono dette galassie *irregolari*.

1.1.1 Galassie ellittiche

Le galassie ellittiche hanno una forma ellissoidale e presentano una percentuale di gas e polveri molto bassa. Tipicamente, si tratta di galassie rosse, cioè la maggior parte delle stelle sono vecchie e di piccola massa. Indicate con la lettera "E", esse sono

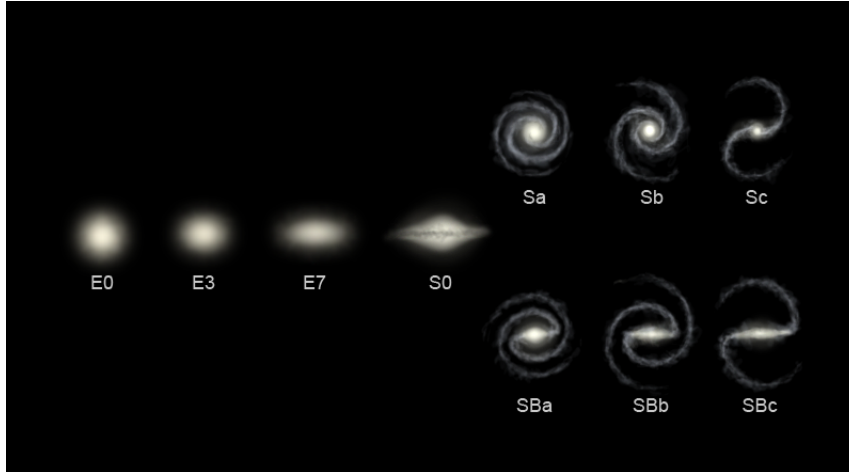


Figura 1.1: *Sequenza di Hubble. Fonte: Wikipedia*

ulteriormente suddivise in sottoclassi (dalla 0 alla 7) a seconda di quanto si presentino schiacciate: una galassia E0 è una galassia di forma sferoidale, mentre una galassia E7 assume una forma fortemente schiacciata e allungata.

Le galassie ellittiche sono caratterizzate da stelle che orbitano attorno al centro galattico seguendo orbite dettate dal problema degli N corpi. Non è possibile integrare questo problema, cioè non è possibile calcolare le traiettorie delle stelle. Nel prossimo capitolo si vedrà come ottenere delle informazioni globali sui moti delle stelle, con riferimento particolare al *tensore di dispersione di velocità*.

1.1.2 Galassie a spirale

Le galassie a spirale presentano una parte luminosa composta da un nucleo centrale, detto *buldge*, e da un disco. Dal buldge, in cui si trovano un grande affollamento di stelle e il *SMBH* (Super Massive Black Hole), si dipartono i bracci della spirale. I bracci sono composti da stelle, polveri e gas. Tipicamente, le galassie a spirale sono blu, cioè ospitano stelle grandi, calde e massicce, e al loro interno è in atto un'alta formazione stellare. Indicate con la lettera "S", esse sono ulteriormente suddivise in sottoclassi (dalla "a" alla "c") a seconda di quanto i bracci della spirale si presentino chiusi e ben definiti: una galassia *Sa* presenta un grosso nucleo e bracci molto aperti e poco ben definiti, una galassia *Sc* presenta un nucleo relativamente ridotto e bracci molto ben definiti e avvolti attorno a esso. Infine, il buldge può manifestarsi "allungato", dando luogo alle cosiddette spirali *barrate*, individuate dalle lettere "SB". La Via Lattea, stando alle teorie più recenti, è una galassia *SBb*.

Dinamicamente, i moti nel buldge sono simili a quelli di una galassia ellittica, mentre nel disco i moti delle stelle sono quasi circolari.

1.1.3 Galassie lenticolari

Le galassie lenticolari, indicate con "S0", sono galassie la cui morfologia si presenta come una via di mezzo tra le ellittiche e le spirali. Esse presentano infatti un nucleo e un piccolo disco, ma in quest'ultimo non sono visibili i bracci di spirale. Infine, queste galassie presentano una notevole quantità di polvere.

Capitolo 2

Dinamica delle galassie

Come si muovono le stelle nelle galassie? Quali caratteristiche hanno? Come evolvono nel tempo?

Lo strumento principale per rispondere a queste domande è la dinamica stellare, ovvero lo studio dei moti di un gran numero di corpi massicci che orbitano insieme in un sistema autogravitante. In una galassia ci sono dalle 10^{10} alle 10^{12} stelle circa. Per studiare questo modello si fa uso della meccanica classica: leggi di Newton e legge di gravità di Newton. Infatti non ci sono particolari evidenze del fatto che la relatività generale possa influire sui calcoli, fatta eccezione per quando si va a studiare il centro di una galassia o sistemi stellari nelle regioni centrali.

Una galassia è formata, essenzialmente, da due componenti: stelle e gas. Per esempio, la Via Lattea contiene 10^{11} stelle e 10^{10} masse solari di gas distribuito in migliaia di nubi. Dato che il gas occupa solo una piccola frazione della massa totale, esso ha un basso impatto sulla dinamica. Ciononostante, le nubi di gas giocano un ruolo fondamentale nell'evoluzione di una galassia, poiché danno vita alle nuove stelle.

L'insieme di tutte le stelle in una galassia può essere considerato come un sistema di N corpi in cui è fondamentale andare a studiare se, tra di loro, i corpi urtano geometricamente o no. Quando due stelle interagiscono gravitazionalmente fanno un *urto gravitazionale*, cioè modificano le loro traiettorie. Nei prossimi paragrafi sarà necessario capire perché nei sistemi stellari le stelle non collidono e ci sarà il bisogno di trovare un set di equazioni che dia una descrizione formale e globale dei moti delle stelle.

2.1 Sistemi non collisionali

La dinamica delle stelle nelle galassie è completamente diversa rispetto ai tipici sistemi studiati in meccanica statistica, come ad esempio un insieme di molecole in una scatola. La differenza principale sta nelle forze di interazione.

Si consideri un sistema di N corpi sferici di raggio R_{\odot} all'interno di una regione limitata di spazio di dimensione R . Un primo approccio per studiare la collisionalità del sistema è calcolare il *Liberio Cammino Medio* λ , rozzamente definibile come la distanza media percorsa dalle stelle senza urtarsi:

$$\lambda \propto \frac{R^3}{NR_{\odot}^2}$$

Inserendo i valori tipici di una galassia si ottiene qualitativamente $\frac{\lambda}{R} \simeq 10^{12}$, cioè il

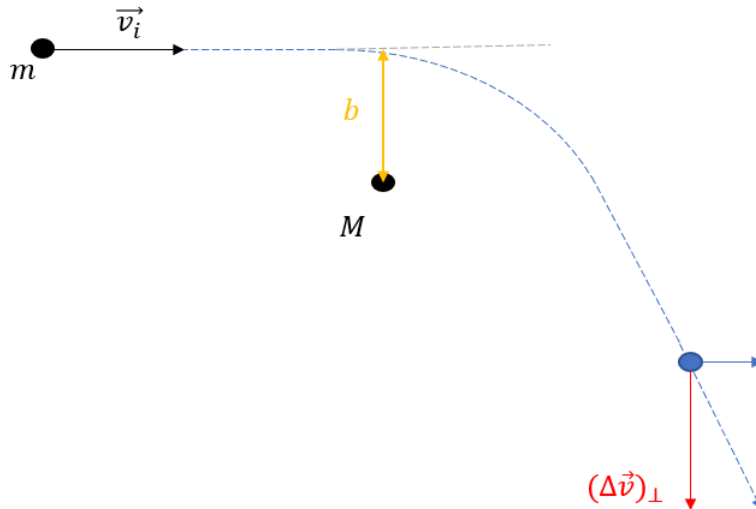


Figura 2.1: *Urto gravitazionale tra due stelle nel sistema di riferimento dell'orbita relativa. Rispetto alla direzione di provenienza della stella di massa m , dopo l'interazione, quest'ultima acquista energia cinetica lungo la direzione perpendicolare. In realtà le stelle sono molto distanti fra loro e l'effetto è estremamente più debole di quanto riportato in figura. Tecnicamente, infatti, le stelle interagiscono a parametri d'impatto b molto grandi e per singoli urti la deflessione dalla direzione di provenienza è molto piccola.*

sistema contiene dei corpi che collidono tra di loro dopo aver percorso mediamente una lunghezza di $10^{12}R$. Da quando è nato l'Universo, le stelle non possono aver percorso minimamente questa lunghezza, per questo tali sistemi stellari sono *non collisionali*. Elaborando un'analisi più formale, la non collisionalità di un sistema è determinata a partire dalla definizione di *tempo di rilassamento a 2 corpi*.

2.1.1 Tempo di rilassamento a 2 corpi (t2b)

Si consideri una singola stella di massa m e la si faccia interagire con un sistema di N stelle. Si tratta di un problema a N corpi, naturalmente non integrabile. Il metodo risolutivo che segue è un metodo *qualitativo* che conduce a un risultato esatto. La tecnica utilizzata per risolvere questo problema è scomporlo in N problemi a 2 corpi, ovvero in N problemi integrabili. In figura 2.1, è mostrato un *urto gravitazionale*, nonché l'interazione della stella di massa m con una stella di massa M del sistema.

Un t2b è *il tempo necessario affinché, dopo n interazioni gravitazionali tra due corpi, la somma dei guadagni energetici, perpendicolari alla direzione di provenienza della stella in ciascuna orbita relativa per ciascuna interazione, sia uguale all'energia cinetica iniziale della stella.*

Per ottenere un'espressione del t2b, è necessario considerare due sistemi di riferimento:

- Sistema laboratorio O , cioè il sistema di riferimento di un osservatore esterno al sistema;
- Sistema dell'orbita relativa O' (figura 2.1) in cui ci si posiziona sulla stella di massa M .

Nel sistema di riferimento O' , l'interazione gravitazionale si traduce in una variazione dell'impulso della stella di massa m . La variazione dell'impulso nell'orbita relativa è data dall'approssimazione di Born:

$$\mu \|\Delta \vec{v}_\perp\| \sim \frac{2GmM}{b\|\vec{v}_i\|} \quad b \rightarrow \infty \quad (2.1)$$

dove $\mu = \frac{mM}{m+M}$ è la massa ridotta e b è il parametro d'impatto, definito come la distanza minima tra le due stelle in assenza di interazioni.

Per ricavare il valore della velocità v nel sistema di riferimento O in funzione di quantità definite nel sistema di riferimento O' , bisogna utilizzare la seguente relazione:

$$\vec{v} = \vec{v}_{CM} + \frac{\mu}{m} \vec{v}'$$

in cui \vec{v}_{CM} è la velocità del centro di massa nel sistema O .

Dato che il centro di massa in un problema a due corpi si muove di moto rettilineo uniforme, la variazione di velocità sarà uguale a:

$$\Delta \vec{v} = \frac{\mu}{m} \Delta \vec{v}'$$

La lunghezza del vettore velocità è dunque:

$$\|\Delta \vec{v}\| = \frac{\mu}{m} \|\Delta \vec{v}'\| \quad (2.2)$$

Unendo le equazioni (2.1) e (2.2) si ricava la seguente espressione:

$$\|(\Delta \vec{v})_\perp\|^2 = \frac{1}{m^2} [\mu (\Delta v)_\perp]^2 \sim \frac{4G^2 M^2}{b^2 \|\vec{v}_i\|^2} + O\left(\frac{1}{b}\right) \quad (2.3)$$

L'equazione (2.3) indica l'espressione del riscaldamento perpendicolare della stella di massa m nel sistema di laboratorio per interazione con una stella di massa M a parametro d'impatto b e con velocità relativa iniziale \vec{v}_i . Si osservi che nel sistema di riferimento del laboratorio, la stella di massa M ha una velocità \vec{v}_f , il pedice f sta per "field", cioè si riferisce alle stelle di campo.

Bisogna sommare questo contributo a tutte le interazioni successive con gli N corpi per conoscere gli scambi di energia. Per farlo, si usa la *funzione di distribuzione* — uno strumento che sarà compreso meglio nel paragrafo successivo — che contiene le informazioni di posizione e velocità degli N corpi. Sotto ipotesi di sistema omogeneo e isotropo, essa è definita come:

$$f(\vec{x}_f, \vec{v}_f) = n_f g(\|\vec{v}_f\|)$$

in cui n_f è la densità uniforme per unità di volume delle stelle di campo e $g(\|\vec{v}_f\|)$ è la distribuzione di velocità del sistema.

Per sommare i contributi di varie interazioni bisogna conoscere il numero di stelle N che si incontrano nell'unità di tempo e con b che è compreso tra b e $b + db$. Si ha:

$$N = 2\pi b db \Delta t \|\vec{v}_i\| n_f g(\|\vec{v}_f\|) d^3 v_f$$

L'energia trasferita dopo N interazioni è:

$$(\Delta T)_\perp = \frac{m}{2} \|(\Delta \vec{v})_\perp\|^2 N = \frac{4\pi G^2 m M^2}{bv} n_f g(\|\vec{v}_f\|) d^3 v_f \Delta t db \quad (2.4)$$

Integrando l'equazione (2.4) si ha:

$$\frac{(\Delta T)_\perp}{\Delta t} = \int_0^\infty \frac{4\pi G^2 m M^2}{b} n_f \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\vec{v}_f\|) d^3 v_f}{\|\vec{v}_i - \vec{v}_f\|} db \quad (2.5)$$

in cui l'integrale in $d^3 v_f$ prende il nome di *potenziale di Rosenbrouth* $\psi(\|\vec{v}_i\|)$.

Quindi, l'equazione (2.5) si scrive:

$$\frac{(\Delta T)_\perp}{\Delta t} = 4\pi G^2 m M^2 n_f \int_0^\infty \frac{\psi(\|\vec{v}_i\|)}{b} db \quad (2.6)$$

L'integrale presenta due divergenze: a $+\infty$ si ha la divergenza *infrarossa* che fa riferimento a tantissimi urti lontani; a 0 si ha la divergenza *ultravioletta* che fa riferimento a urti geometrici (fisicamente questa divergenza non esiste). L'integrale è equivalente a $\ln \Lambda$, detto *logaritmo di Coulomb*. Pertanto, per tempi infinitesimi, l'equazione (2.6) si esprime come:

$$\frac{(dT)_\perp}{dt} = 4\pi G^2 m M^2 n_f \psi(\|\vec{v}_i\|) \ln \Lambda$$

Dalla definizione di $t2b$, deve essere valida la seguente equazione:

$$\frac{(dT)_\perp}{dt} t2b = \frac{m}{2} \|\vec{v}_i\|^2$$

Quindi l'espressione finale del $t2b$ è la seguente:

$$t2b = \frac{\|\vec{v}_i\|^2}{8\pi G^2 M^2 n_f \ln \Lambda \psi(\|\vec{v}_i\|)} \quad (2.7)$$

Per vedere esplicitamente da che cosa dipende il $t2b$ è opportuno considerare una galassia sferica di raggio R , con N stelle di massa $m = M$ e all'equilibrio. Per questo sistema, la validità del teorema del viriale rende vera la seguente equazione:

$$\sigma^2 = \frac{GM}{R} \quad (2.8)$$

in cui σ gioca il ruolo di velocità media delle stelle di campo.

Se si considerano velocità grandi, allora vale che $\psi = 1/\sigma$, per cui l'equazione (2.7) si scrive:

$$t2b = \frac{\sigma^3 R^3}{6G^2 m^2 N \ln \Lambda}$$

Come mezzo di confronto, si definisce $t_{cross} = \frac{2R}{\sigma}$ come il tempo di attraversamento del sistema. Quindi, sfruttando l'equazione (2.8), si normalizza il t2b al tempo di attraversamento ottenendo:

$$\frac{t2b}{t_{cross}} \simeq \frac{0.1N}{\ln N} \quad (2.9)$$

L'equazione (2.9) dà un risultato controintuitivo perchè ci si aspetta che più stelle ci siano, più urti gravitazionali ci sono e più il t2b è piccolo. In realtà, il t2b dipende dalla somma dei trasferimenti di energia. Pertanto l'equazione (2.9) rivela che più stelle ci sono, meno sono efficienti i trasferimenti di energia.

Se l'età del sistema è molto maggiore del suo t2b allora il sistema è collisionale. Nel caso delle galassie si ottiene che il t2b supera di gran lunga l'età dell'universo (tipicamente di 6 ordini di grandezza). Pertanto, l'insieme delle stelle all'interno delle galassie costituisce un sistema non collisionale!

Questi sistemi non possono essere descritti con le equazioni della meccanica statistica, pertanto serve introdurre un approccio diverso che conduca verso una descrizione globale dei sistemi stellari.

2.1.2 Equazione di Boltzmann non collisionale

Un oggetto molto potente che permette di studiare i moti delle stelle all'interno di strutture stellari è la funzione di distribuzione $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Si consideri un insieme di stelle che si muove a causa di un potenziale regolare $\phi(\vec{x}, t)$. Il numero di stelle con posizione nel cubetto d^3x centrato in \vec{x} e velocità in d^3v centrato in \vec{v} è dato da $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3x d^3v$. A partire da uno stato iniziale con $f(\vec{x}, \vec{v}, t_0)$ e conoscendo il potenziale di interazione, deve essere possibile ricavare il valore di $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$. Sia $\vec{w} = (\vec{x}, \vec{v}) = (w_1, \dots, w_6)$ e $\dot{\vec{w}} = (\dot{\vec{x}}, \dot{\vec{v}}) = (\vec{v}, -\nabla\phi)$. La densità di stelle $f(\vec{w}, t)$ soddisfa un'equazione di continuità in cui la quantità conservata è il numero di punti nello spazio delle fasi $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0$$

Dato che le v_i non dipendono dalle x_i e $\nabla\phi$ non dipende dalle v_i , la precedente equazione è equivalente alla seguente, detta *Equazione di Boltzmann non collisionale*:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f - \nabla\phi \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

Il flusso dei punti nello spazio delle fasi è incompressibile! La densità f attorno al punto che individua le coordinate di una stella nello spazio delle fasi è costante.

Risolvere l'equazione di Boltzmann non collisionale permette di ottenere delle equazioni che danno informazioni sulla dinamica del modello.

2.1.3 Equazioni di Jeans

Per trovare le soluzioni dell'equazione di Boltzmann bisogna integrarla nelle velocità ottenendo le equazioni dei *momenti* della f :

$$\frac{\partial}{\partial t}\nu + \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu\bar{v}_i) = 0 \quad (2.10)$$

dove $\nu = \int f d^3v$ è la densità spaziale delle stelle, mentre $\bar{v}_i = \frac{1}{\nu} \int f v_i d^3v$ è la velocità media delle stelle.

L'equazione (2.10) è l'analogo dell'equazione di continuità per i fluidi. Mentre in fluidodinamica si conserva la densità di massa, nel caso di un sistema non collisionale come le stelle in una galassia si conserva la densità spaziale, cioè il numero di punti nello spazio delle fasi.

Se si moltiplica per una velocità v_j l'equazione di Boltzmann e la si integra su tutte le velocità si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f v_j d^3v + \int v_i v_j \frac{\partial f}{\partial x_i} d^3v - \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial f}{\partial v_i} d^3v = 0 \quad (2.11)$$

L'ultimo termine del membro di sinistra può essere modificato applicando il teorema della divergenza e sfruttando il fatto che f si annulla per grandi v :

$$\int v_j \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3v = - \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f d^3v = - \int \delta_{ij} f d^3v = -\delta_{ij}\nu$$

Così, l'equazione (2.11) si riscrive:

$$\frac{\partial(\nu\bar{v}_j)}{\partial t} + \frac{\partial(\nu\bar{v}_i\bar{v}_j)}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0 \quad (2.12)$$

in cui $\bar{v}_i\bar{v}_j \equiv \sigma_{ij} = \frac{1}{\nu} \int v_i v_j f d^3v$ è il *tensore di dispersione delle velocità*.

L'equazione (2.12) si può riportare a una forma più familiare se le si sottrae l'equazione di continuità (2.10) moltiplicata per v_j , ottenendo:

$$\nu \frac{\partial}{\partial t} \bar{v}_j + \nu \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} = -\nu \frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}(\nu \sigma_{ij}^2) \quad (2.13)$$

L'equazione (2.13) è l'analogo dell'equazione di Eulero per i fluidi, cioè è l'equazione del moto per un sistema non collisionale di N corpi. Infatti, la quantità $-\nu \sigma_{ij}^2$ è il tensore stress che descrive una pressione anisotropa.

Le equazioni (2.10) e (2.13) descrivono rispettivamente il momento d'ordine 1 e il momento d'ordine 2 di f . È possibile naturalmente andare a studiare i momenti agli ordini successivi ottenendo un set infinito di equazioni, dette *Equazioni di Jeans*. Tuttavia, mentre per i fluidi si trovava un'equazione di stato in grado di "chiudere" il sistema, in tal caso il sistema non si chiude: in un sistema dettato dall'equazione di Boltzmann non collisionale non discende un'equazione di stato. È necessario fare delle ipotesi sulla forma del tensore di dispersione delle velocità $\bar{v}_i\bar{v}_j$.

Il tensore di dispersione delle velocità dà informazioni sulle "diverse temperature" in una galassia. Osservando una galassia, per ciascuna linea di vista è definibile una dispersione di velocità attorno a un valor medio. In analogia con la termodinamica, nonostante essa tratti sistemi collisionali, per un insieme di corpi che hanno una velocità media e una dispersione di velocità è possibile definire una temperatura. Osservativamente, si ottiene che il tensore di dispersione delle velocità di una galassia è *anisotropo*. Questo è dovuto al fatto che le stelle costituiscono un sistema non collisionale.

2.1.4 Cenno al Teorema del Viriale

L'analisi formale introdotta con l'equazione di Boltzmann non collisionale, conduce a una serie di identità che sono le equazioni di Jeans, ottenute facendo delle medie su v . A partire dalle equazioni di Jeans, se si calcolano delle medie su x , si ottiene un insieme di identità tensoriali che corrispondono al *teorema del viriale*. La traccia del tensore "più semplice" porta a un'identità scalare che per un sistema autogravitante e gravitazionale indica che l'equilibrio è dato dall'equazione:

$$2T = -U$$

dove T è l'energia cinetica totale e U è l'energia potenziale del sistema.

I sistemi autogravitanti hanno calore specifico negativo, cioè più energia gli viene data e più il sistema si raffredda tornando all'equilibrio. Se il sistema perde energia allora per tornare all'equilibrio si contrarrà e riscalderà.

2.1.5 Cenno alla frizione dinamica

Osservando la figura 2.1, lungo la direzione di provenienza della stella di massa m , l'urto gravitazionale frena la stella. Questo risultato, sommato a tante interazioni, dà vita alla *frizione dinamica*. Essa è responsabile del fatto che, mediamente, i corpi più massicci si trovano nelle regioni centrali di un sistema, mentre i corpi meno massicci si trovano nelle regioni esterne.

La frizione dinamica non è altro che energia perduta lungo la direzione di provenienza della stella di massa m in ciascuna orbita relativa. Per ottenere un'espressione di questa energia perduta si segue un'analisi simile a quella fatta per il calcolo del t2b.

Si dimostra che la stella di massa m è frenata solamente dalle stelle che sono meno veloci di lei e che l'espressione della frizione dinamica è la seguente:

$$\frac{(\Delta \vec{v}_i)_\parallel}{\Delta t} = -4\pi G^2 M n_f (m + M) \ln \Lambda \chi(\|\vec{v}_i\|) \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^3}$$

in cui sono state riprese le notazioni del paragrafo *tempo di rilassamento a 2 corpi* e dove è stata introdotta la funzione $\chi(\|\vec{v}_i\|)$, tale che:

$$\chi(\|\vec{v}_i\|) \frac{\vec{v}_i}{\|\vec{v}_i\|^3} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{g(\|\vec{v}_f\|)(\vec{v}_i - \vec{v}_f)}{\|\vec{v}_i - \vec{v}_f\|^3} d^3 v_f$$

2.2 Dinamica delle galassie ellittiche

Le stelle all'interno delle galassie ellittiche compiono delle orbite attorno al centro della galassia. Si tratta di un problema a N corpi in cui la frizione dinamica tende a trattenere i corpi più massicci nelle regioni centrali, mentre i corpi meno massicci orbitano attorno al centro nelle regioni esterne. Il moto delle stelle è, naturalmente, il responsabile della forma ellissoidale delle galassie ellittiche.

2.2.1 Schiacciamento degli sferoidi

Le galassie ellittiche possono essere pensate come delle "sfere schiacciate". Cosa causa lo schiacciamento? La prima riposta logica potrebbe essere la rotazione, dato che un fluido di forma sferica che ruota si appiattisce ai "poli", così come fa il nostro pianeta. Infatti, esiste una teoria fisica, chiamata "fisica dei sistemi autogravitanti in rotazione", che tenta di spiegare proprio questo effetto. Tale teoria funziona bene se il sistema presenta un tensore di dispersione delle velocità isotropo. Negli anni 70, l'introduzione del CCD portò a un'inconsistenza. A seguito del fatto che il CCD permise di osservare molto meglio le galassie ellittiche e di ottenere dei risultati più fini e accurati, fu rivelato che: il tensore di dispersione delle velocità nelle galassie ellittiche è anisotropo; di conseguenza, la teoria non poteva essere applicata alle galassie ellittiche; questo approccio non giustifica una struttura in rotazione.

Il responsabile dello schiacciamento degli sferoidi è l'anisotropia del tensore di dispersione delle velocità. Infatti, se si schematizza una galassia ellittica con meridiani e paralleli, qualitativamente come si fa con il nostro pianeta, le galassie ellittiche sono "più calde" lungo piani paralleli e sono "più fredde" lungo i meridiani (il concetto di caldo e freddo si associa alla misura delle velocità medie delle stelle lungo quelle direzioni).

2.2.2 Il piano fondamentale

Nei paragrafi precedenti è stata sottolineata la validità del teorema del viriale per sistemi autogravitanti, che fa sì che per un sistema all'equilibrio valga $2T = -U$.

Inoltre, le galassie ellittiche seguono tutte lo stesso modello, ovvero sono omologhe tra di loro. Questa scoperta è stata fatta dall'astronomo De Vaucouleurs: egli introdusse il *raggio effettivo* R_e , definito come il raggio al quale si misura una luminosità L pari alla luminosità totale L_{tot} diviso 2, cioè $L(R_e) = L_{tot}/2$. In questo modo, osservando centinaia di galassie ellittiche, fece i grafici dei loro profili di brillantezza mettendo in ascissa R/R_e e in ordinata $I(R)/I(0)$, con I intensità della radiazione osservata. Il risultato è che tutte le galassie ellittiche soddisfano una legge, la *legge di De Vaucouleurs*:

$$I(R) = I(0)e^{-7.67(R/R_e)^{1/4}}$$

Si dimostra che se vale il teorema del viriale e se le galassie ellittiche sono sistemi omologhi tra di loro allora esiste il piano fondamentale. Il piano fondamentale è un piano nello spazio $(\log L, \log \sigma, \log R_e)$:

$$\alpha \log L + \beta \log \sigma + \gamma \log R_e = c$$

Per le galassie ellittiche, i due requisiti affinché ci sia il piano fondamentale sono soddisfatti, di conseguenza tutte le galassie ellittiche stanno sul piano fondamentale.

Proiettando il piano fondamentale sul piano $\log L - \log \sigma$, si ottiene la *Legge di Feber-Jackson*:

$$L \propto \sigma^4$$

Questa legge è un buon metodo per stimare la distanza D di una galassia, poiché la luminosità è uguale al flusso F diviso $4\pi D^2$. Misurando σ tramite l'allargamento Doppler delle righe spettrali e misurando F , si ricava D .

Proiettando il piano fondamentale sul piano $\log L - \log R_e$, si ottiene la *Legge di Kormendy*:

$$L \propto R_e$$

2.3 Dinamica delle galassie a spirale

La dinamica che sta alla base della struttura delle galassie a spirale è stata studiata durante tutto il 20esimo secolo. In quest'ultima parte, si discuteranno tre punti:

1) La scoperta dell'astronomo Oort fu fondamentale per capire in che modo si muovessero le stelle all'interno di una galassia a spirale. Egli elaborò un modello volto a studiare i moti di stelle vicine al Sole, nella Via Lattea, scoprendo che le stelle nel disco effettuano dei moti quasi circolari attorno al centro della galassia.

2) Per capire come si muove il disco, è necessario misurare le velocità di rotazione delle stelle a differenti distanze dal centro della galassia, ottenendo la *curva di rotazione*.

3) Negli anni 60, ci fu un punto di svolta nella comprensione della struttura a spirale. L'astronomo Lindblad formulò l'ipotesi di una struttura a spirale globalmente quasi stazionaria nonostante la rotazione differenziale, facendo uso delle *onde di densità*.

2.3.1 Costanti di Oort

Come si muovono le stelle all'interno dei dischi delle galassie a spirale? Il modello di Oort, per rispondere a questo interrogativo, tiene conto di due ipotesi fondamentali: la prima è l'approssimazione di disco galattico perfettamente piatto, cioè tutti i moti avvengono sullo stesso piano; la seconda è l'assunzione di orbite delle stelle perfettamente circolari, cioè tali da avere velocità tangenziale $v(x) = x\omega(x)$, con x distanza dal centro e ω velocità angolare.

Tramite osservazioni, si è in grado di misurare le componenti di velocità radiale e tangenziale delle stelle abbastanza vicine al Sole. In figura 2.2, si schematizza il piano del disco e si possono osservare proprio le due direzioni sopracitate, \hat{e}_\parallel e \hat{e}_\perp .

Sia $\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ la velocità relativa tra una stella e il Sole — quantità misurabile —. Si ha che:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{x} - \vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0 = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{x} - \vec{\omega}_0 \times \vec{x}_0 + \vec{\omega} \times \vec{x}_0 - \vec{\omega} \times \vec{x}_0 = \\ &= \vec{\omega} \times (\vec{x} - \vec{x}_0) + (\vec{\omega} - \vec{\omega}_0) \times \vec{x}_0 = \\ &= \vec{\omega} \times \vec{l} + \Delta\vec{\omega} \times \vec{x}_0 \end{aligned} \tag{2.14}$$

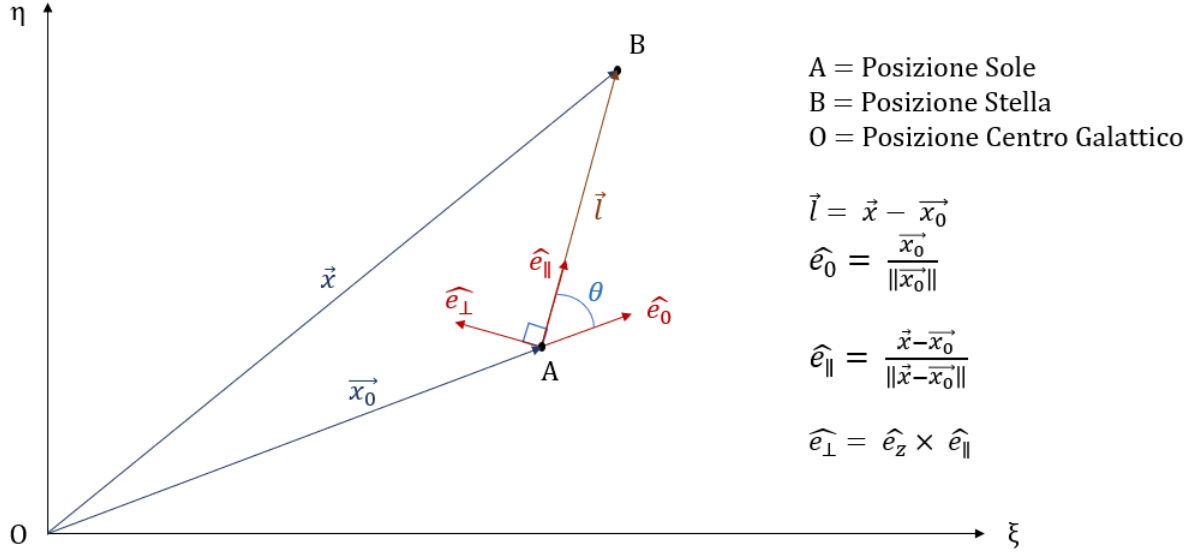


Figura 2.2: *Piano del disco.*

Dalla (2.14), diventa possibile calcolare l'espressione delle componenti radiale e tangenziale di velocità relativa della stella rispetto al Sole:

$$v_{\parallel} = \vec{v} \cdot \hat{e}_{\parallel} = (\vec{\omega} \times \vec{l} + \Delta\vec{\omega} \times \vec{x}_0) \cdot \hat{e}_{\parallel} = \Delta\omega x_0 \sin \theta \quad (2.15)$$

$$v_{\perp} = \vec{v} \cdot \hat{e}_{\perp} = (\vec{\omega} \times \vec{l} + \Delta\vec{\omega} \times \vec{x}_0) \cdot \hat{e}_{\perp} = \omega l + \Delta\omega x_0 \cos \theta \quad (2.16)$$

Questo modello si applica alle stelle che si collocano "vicino" al Sole, cioè tali che valga $\|\vec{l}\| \ll \|\vec{x}_0\|$. La ragione di ciò sta nel considerare che osservare i moti propri delle stelle, nonché le loro velocità tangenziali, è fattibile solo per piccole distanze. Se questa approssimazione è valida, allora è possibile espandere ω in serie in due dimensioni per piccoli valori di l al primo ordine:

$$\begin{aligned}
 \omega(x) = \omega(\|\vec{x}_0 + \vec{l}\|) &\sim \omega(x_0) + (\nabla\omega|_{\vec{x}_0}) \cdot \vec{l} + O(l^2) = \\
 &\omega_0 + \frac{d\omega}{dx}|_{x_0} \hat{e}_0 \cdot \vec{l} + O(l^2) = \\
 &\omega_0 + \omega'_0 l \cos \theta + O(l^2)
 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Utilizzando la (2.15) e la (2.17) si ha:

$$v_{\parallel} = \omega'_0 l \cos \theta x_0 \sin \theta = \frac{1}{2} \omega'_0 x_0 l \sin(2\theta) = Al \sin(2\theta)$$

in cui $A \equiv \frac{1}{2} \omega'_0 x_0$ è la *prima costante di Oort*.

Utilizzando la (2.16) e la (2.17) si ha:

$$v_{\perp} = \omega_0 l + \omega'_0 l x_0 \cos^2 \theta = l(\omega_0 + \frac{1}{2} \omega'_0 x_0) + \frac{1}{2} \omega'_0 x_0 l \cos(2\theta) = Al \cos(2\theta) + Bl$$

dove $B \equiv \omega_0 + \frac{1}{2}\omega'_0 x_0$ è la *seconda costante di Oort*.

Le costanti di Oort dipendono da quantità legate solo al Sole. Osservando le stelle vicino al Sole è possibile ricavare le componenti delle velocità, v_{\parallel} e v_{\perp} , in funzione dell'angolo θ . Per ipotesi, questo modello prevede che le orbite delle stelle siano circolari. Le osservazioni danno riscontro positivo, di conseguenza le ipotesi di partenza sono corrette e, in particolare, i moti delle stelle nel disco sono quasi circolari!

Dedotto ciò, è possibile calcolare le costanti di Oort e, in particolare, ω_0 che è legata al periodo di rivoluzione del Sole attorno al centro della galassia.

Le costanti di Oort si possono esprimere in funzione delle velocità lineari, come segue:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x} \right) \Big|_{x_0} \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} \right) \Big|_{x_0}$$

2.3.2 Curva di rotazione dei dischi

In che modo ruotano i dischi delle galassie a spirale?

La curva di rotazione è una caratteristica fondamentale delle galassie a spirale. Si tratta di un grafico che mostra la velocità di rotazione delle stelle in funzione della loro distanza dal centro della galassia. Per analizzare una curva di rotazione è necessario introdurre tre modelli teorici.

- **Massa centrale**

Si consideri una massa centrale, com'è fatta la curva di rotazione di questo sistema?

Se si uguagliano l'accelerazione centripeta e l'accelerazione gravitazionale, si ricava il seguente risultato:

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{GM(r)}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v \propto \sqrt{\frac{M(r)}{r}}$$

Questa dipendenza viene detta *caduta kepleriana*.

- **Sfera omogenea**

Per una sfera omogenea la distribuzione di massa è $M(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0$. Quindi si ha:

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r} \quad \Rightarrow \quad v(r) \propto r$$

Questo risultato indica una rotazione rigida.

- **Distribuzione** $\rho(r) = \frac{1}{r^2}$

Per tale distribuzione si ha $M(r) = 4\pi \int_0^r r'^2 \rho(r') dr' = 4\pi r$. Pertanto:

$$v^2(r) = \frac{GM(r)}{r} = 4\pi G \quad \Rightarrow \quad v(r) = \text{cost}$$

Il risultato è una curva di rotazione piatta che produce la cosiddetta *rotazione differenziale*.

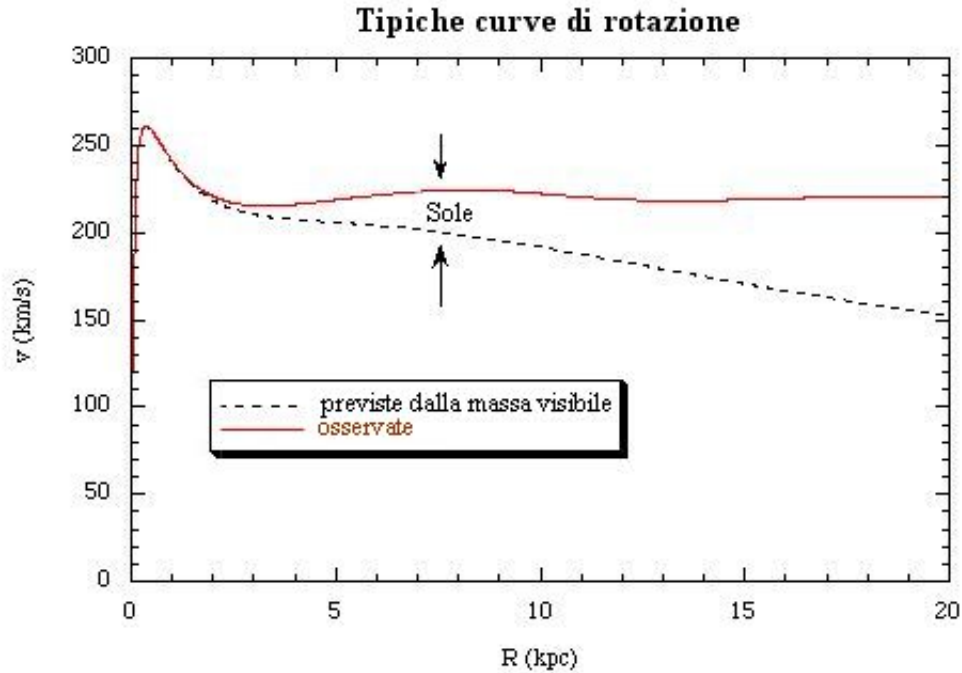


Figura 2.3: Curva di rotazione della Via Lattea.

Fonte: "NASA, <https://pwg.gsfc.nasa.gov/stargaze/Isun4Adop3.htm>"

• Interpretazione della curva di rotazione

Nelle zone più dense a r piccolo, si ha una distribuzione quasi omogenea, questo si traduce in una crescita lineare nel grafico della curva di rotazione (figura 2.3). La presenza delle stelle nel disco galattico le rende responsabili di rendere piatta la curva di rotazione, ciò si giustifica analizzando dettagliatamente la distribuzione di massa di un disco: in un disco la curva di rotazione dipende anche dalla materia che c'è fuori dal raggio r . Nelle regioni più esterne, in cui la presenza di stelle scarseggia e dove invece c'è idrogeno neutro, la massa delle regioni centrali dovrebbe dominare e la curva dovrebbe mostrare una caduta kepleriana. In realtà, osservando l'idrogeno neutro a 21 cm, la curva di rotazione si mantiene circa costante anche dove non ci sono stelle. La spiegazione teorica alla base di queste osservazioni mette in gioco un nuovo tipo di materia, detta *materia oscura*, che interagisce gravitazionalmente con la materia ordinaria. Questo tipo di materia viene detta oscura perché sembra che non assorba né emetta fotoni. Questo la rende parecchio difficile da osservare con la tecnologia attuale.

La curva di rotazione piatta rivela che il disco delle galassie a spirale è in rotazione differenziale!

2.3.3 Legge di Tully-Fischer

Per le galassie a spirale, come per le galassie ellittiche, esiste una relazione tra la luminosità totale della galassia e la velocità delle stelle al suo interno. Mentre nelle galassie ellittiche i moti delle stelle introducono il tensore di dispersione delle velocità, nel caso delle galassie a spirale è sufficiente considerare un solo valore della velocità,

ovvero il valore costante che si misura sulla curva di rotazione. Infatti, empiricamente, è stata ricavata la seguente relazione:

$$L \propto v^4$$

Come per la legge di Feber-Jackson per le galassie ellittiche, anche in questo caso si ha a disposizione uno strumento utile per stimare la distanza della galassia che si sta osservando. È sufficiente ricordare che la luminosità è proporzionale al flusso diviso la distanza al quadrato. Misurando flusso e velocità nella curva di rotazione piatta, è possibile ottenere una stima per la distanza.

2.3.4 Cenno agli epicicli e alle onde dense

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come le stelle nel disco di una galassia a spirale seguano moti quasi circolari. Un moto quasi circolare si può scomporre in due moti: un moto circolare e una deviazione dal moto circolare. Quest'ultima prende il nome di *epiciclo*. Gli epicicli, in prima approssimazione, sono come degli oscillatori armonici nella direzione radiale caratterizzati dalla frequenza di epiciclo K , come mostrato in figura 2.4.

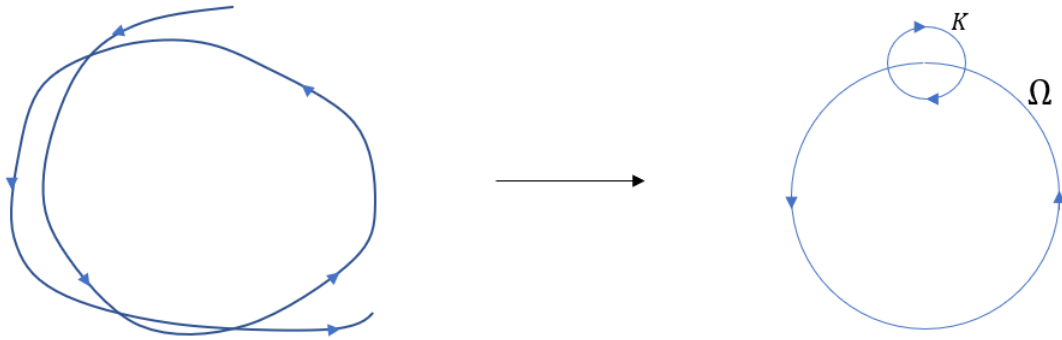


Figura 2.4: *Orbita quasi circolare scomposta in un moto epiciclico.*

La dinamica del disco di una galassia a spirale è ancora più complicata. In particolare, la dinamica dei bracci di spirale viene studiata tramite le *onde di densità*. Esse sono perturbazioni prodotte naturalmente da un disco di materia e mantengono inalterata la simmetria del disco. Queste perturbazioni provocano degli accrescimenti e degli svuotamenti che, tecnicamente, quasi sempre rompono la "assimmetria dello stato base". Esiste una classe di onde di densità per le quali questo effetto non si manifesta.

Ma come agiscono onde di densità e rotazione differenziale insieme?

Di per sé la rotazione differenziale renderebbe impossibile la resistenza di "agglomerati" di materia. Tuttavia, le onde di densità provocano un effetto: le concentrazioni di materia che definiscono i bracci delle spirali, si muovono nel disco in maniera tale da venire globalmente disaccoppiate a causa del moto dei singoli oggetti (stelle o nubi di gas). La struttura a spirale in rotazione differenziale e il fenomeno ondulatorio vengono ammessi in un modello quasi stazionario. Questa interpretazione ha avuto un riscontro empirico positivo.

Bibliografia

1. Ciotti L., *Appunti del corso di Astrofisica extragalattica*, Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2020.
2. Binney J. & Tremaine S., *Galactic Dynamics*, Princeton University Press, 1987.
3. Bertin G., *Dynamics of galaxies*, Cambridge University Press, 2000.
4. Ciotti L. *Appunti del corso di Dinamica stellare*, Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2006, "<http://www.bo.astro.it/>".
5. D. Dallacasa, *Appunti del corso di Processi di radiazione e MHD*, Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2019.
6. Cimatti A., *Appunti del corso di Astronomia*, Bologna, Dipartimento di Fisica e Astronomia, 2018.
7. Karttunen H., Kroger P., Oja H., Poutanen M. & Donner K. J., *Fundamental Astronomy*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2007.