

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

DIPARTIMENTO DI DI FISICA E ASTRONOMIA

Corso di Laurea in Astronomia

**Righe spettrali:
formazione, shift, allargamento**

Tesi di laurea

Candidato:

Massimiliano Zago

Relatore:

Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno Accademico 2019-2020
Sessione II

Indice

1	Formazione delle righe spettrali	1
1.1	Spettro energetico degli atomi: la formazione delle righe spettrali	1
1.2	Funzioni d'onda degli atomi idrogenoidi: gli stati energetici stazionari . . .	1
1.3	Transizioni permesse e proibite: le regole di selezione	3
1.3.1	Emissione Spontanea	3
1.3.2	Transizioni discrete: assorbimento ed emissione stimolata	5
1.3.3	Dal discreto al continuo: i coefficienti di Einstein	7
1.4	Il ruolo dell'equazione del trasporto radiativo nella formazione delle righe spettrali	9
2	Shift delle righe spettrali	11
2.1	Effetto Doppler	11
2.2	Redshift cosmologico	12
3	Allargamento delle righe spettrali	13
3.1	Allargamento Naturale o di Lorentz	13
3.2	Allargamento doppler	14
3.3	Allargamento collisionale	15
3.4	Profilo di Voigt	15
Appendice 0	Un esempio di spettro in riga: la Nebulosa Anello NGC 6720	16
Appendice 1	Elementi di matrice dell'operatore \vec{x}	18
	Riferimenti bibliografici	20

Sommario

La quasi totalità delle informazioni che possiamo ricavare da un determinato oggetto celeste lo dobbiamo all'analisi della radiazione elettromagnetica che quest'ultimo emette o assorbe, infatti, a volte, è proprio ciò che non vediamo che ci dà informazioni sull'oggetto in questione.

Un oggetto può produrre radiazione elettromagnetica in due differenti modi; può infatti emettere ad ogni lunghezza d'onda, e in questo caso parleremo di processi d'emissione del continuo, o può emettere interessando lunghezze d'onda specifiche dello spettro elettromagnetico, e in questo caso parleremo di processi d'emissione in riga.

L'obiettivo di questo breve elaborato consiste nell'analisi delle caratteristiche generali che concernono le righe spettrali atomiche, altrimenti note come processi di emissioni in riga, un modo più semplice per definire quei fenomeni elettromagnetici di natura quanto-meccanica sopracitati, che riguardano lunghezze d'onda ben specifiche dello spettro elettromagnetico.

L'elaborato è suddiviso in tre sezioni principali, come suggerisce il titolo.

La prima sezione si occupa di spiegare, sulla base della meccanica quantistica, come hanno origine le righe spettrali, siano esse in assorbimento o in emissione.

Le ultime due sezioni si concentrano, invece, sull'analisi degli aspetti principali dei fenomeni che concernono le righe spettrali. La seconda sezione tratta brevemente lo "*shift*", ovvero lo spostamento delle righe spettrali, quel effetto che consiste nella modifica della lunghezza d'onda delle stesse; dunque, si occupa di descrivere le cause di questo fenomeno, come l'effetto doppler.

Le righe spettrali non sono infinitamente strette. È compito della terza sezione spiegare perchè non sono tali, caratterizzando i fenomeni che ne provocano l'allargamento.

Capitolo 1

Formazione delle righe spettrali

1.1 Spettro energetico degli atomi: la formazione delle righe spettrali

Tutti gli atomi hanno una serie discreta di stati stazionari con energia quantizzata, caratteristici dell'atomo stesso; ovvero, ogni atomo possiede un certo numero di livelli di energia, $1, 2, \dots, n$ con $n \in \mathbb{N}$ e con energia quantizzata E_1, E_2, \dots, E_n con $n \in \mathbb{N}$.

Le righe spettrali vanno interpretate come l'emissione o l'assorbimento di quanti di energia ben definita, quantizzata, ovvero i fotoni, che costituiscono la radiazione elettromagnetica. Questi processi di emissione e assorbimento sono provocati da transizioni atomiche tra stati in differenti livelli energetici. I fotoni che vengono emessi o assorbiti hanno un'energia pari alla differenza tra i livelli energetici.

Ciascun atomo e ciascuna molecola ha il proprio spettro energetico, diverso da quello di qualsiasi altro, questo implica che lo spettro elettromagnetico porta traccia della sua unicità, ed è dunque possibile la separazione e il riconoscimento delle specie atomiche.

1.2 Funzioni d'onda degli atomi idrogenoidi: gli stati energetici stazionari

La seguente trattazione viene costruita basandosi sulla classe degli atomi idrogenoidi, ovvero atomi che possiedono numero atomico Z , ma con un solo elettrone che orbita attorno al nucleo; classe di cui ovviamente fa parte anche l'idrogeno.

Dunque, la funzione d'onda più generale per descrivere l'elettrone in un atomo idrogenoide fa uso di un vettore bidimensionale appartenente a \mathbb{C}^2 , noto come *spinore*:

$$\begin{aligned}\Psi(\vec{x}, t, s) &= \chi(s)\psi(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \psi(\vec{x}, t) = (a\chi_+ + b\chi_-)\psi(\vec{x}, t) \\ &= \chi_+\psi_+(\vec{x}, t) + \chi_-\psi_-(\vec{x}, t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

dove

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

I vettori χ_+ e χ_- sono le autofunzioni degli operatori di spin S^2 e S_z , rispettivamente con autovalori $\frac{3}{4}\hbar^2$ e $\pm\frac{\hbar}{2}$. La funzione $\psi(\vec{x}, t)$ è, invece, la soluzione dell'equazione di Schrödinger per l'atomo idrogenoide. La parte stazionaria di quest'ultima, dunque quella non dipendente dal tempo, rappresenta l'insieme delle autofunzioni dell'hamiltoniana del sistema, i cui autovalori corrispondono alle energie degli stati stazionari.

L'atomo idrogenoide è un esempio di problema a due corpi, che interagiscono tramite un potenziale di tipo coulombiano, grazie alla riduzione al centro di massa è possibile ricondurre a potenziali centrali tutti i problemi a due corpi. Quest'ultimi sono agevolmente trattabili in coordinate polari.

Le autofunzioni stazionarie degli atomi idrogenoidi, soluzione dell'equazione agli autovalori per l'hamiltoniana, sono perciò fattorizzabili in una parte radiale ed in una angolare nel seguente modo:

$$\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.2)$$

Le funzioni $Y_l^m(\theta, \phi)$ sono le armoniche sferiche, che soddisfano le equazioni agli autovalori per gli operatori L^2 e L_z e che identificano i numeri quantici l ed m .

La parte radiale delle autofunzioni, invece, dipende da n , detto *numero quantico principale*, e da l .

Le funzioni d'onda spaziali sono dunque contrassegnate da tre numeri quantici, n, l, m , che sono in stretta dipendenza fra di loro; infatti, fissato il livello, ovvero definito il numero quantico $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$0 \leq l \leq n - 1$$

$$|m| \leq l \quad .$$

È il numero quantico n a fissare il livello energetico, ovvero gli autovalori di H dipendono esclusivamente da n :

$$E_n = -\frac{\mu Z^2 e^4}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad (1.3)$$

dove e è la carica elementare ($4.80 \cdot 10^{-10}$ e.s.u) e $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27}$ erg · s .

Il numero quantico l fissa $2l + 1$ stati degeneri distinti per il numero m . Tutti questi stati hanno la stessa energia E_n e dunque un livello energetico contrassegnato da n ha una degenerazione pari a n^2 . Se poi si considera anche il numero quantico di spin e il principio di esclusione di Pauli, si ha che ogni livello stazionario di energia E_n è $2n^2$ volte degenero. In realtà questa degenerazione viene rimossa dagli effetti di *struttura fine* e *struttura iperfine* dell'atomo, che sono alla base di importanti processi di transizione, ma che non saranno oggetto di questo elaborato.

L'equazione (1.3) quantifica quanto accennato nella sezione 1.1, ovvero che ogni specie atomica (idrogenoide) ha un proprio spettro energetico, differente da quello di qualsiasi altra.

1.3 Transizioni permesse e proibite: le regole di selezione

Come precedentemente detto, le righe spettrali sono dovute alle transizioni compiute dagli elettroni tra due stati energetici n e n' differenti.

Tuttavia, come riportato nella sezione 1.2, i livelli energetici sono degeneri, bisogna quindi verificare se le transizioni possano avvenire indisturbatamente tra tutti gli $2n^2$ e $2n'^2$ stati o se ci siano delle restrizioni sui numeri quantici l, m, m_s .

1.3.1 Emissione Spontanea

Le righe d'emissione sono dovute all'emissione di radiazione elettromagnetica, sotto forma di fotoni, da parte degli elettroni accelerati nelle transizioni tra vari orbitali atomici. L'intensità della radiazione emessa dalla transizione di un singolo elettrone è data da una formula che generalmente tiene in conto lo sviluppo in multipoli di una data distribuzione di carica. La formula che seguirà, che quantifica l'intensità della radiazione emessa durante una transizione atomica, tiene invece in considerazione solo la potenza emessa dal termine di dipolo. Questo è dovuto al fatto che la potenza emessa da termine di quadrupolo, termine successivo al dipolo nello sviluppo in multipoli, è un milione di volte più debole di quella del dipolo stesso. SI ha perciò:

$$I = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left(\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right)^2 + O((ka)^2) \quad (1.4)$$

Dove $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda della radiazione emessa dall'elettrone accelerato, mentre a corrisponde alle dimensioni della regione dove si muove l'elettrone. La formula (1.4) vale ovviamente se $ka \ll 1$, ma è giustificata dal fatto che per situazioni atomiche si ha $a \approx 10^{-8}$ cm e le lunghezze d'onda sono tipicamente nel visibile o nell'immediato UV, perciò $ka \approx 10^{-3}$. Si possono dunque trascurare i termini più deboli del dipolo.

L'intensità della radiazione di dipolo è data dalle probabilità di transizione tra i livelli atomici dovute all'operatore $\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}$, che sono fornite dagli elementi di matrice di quest'ultimo sugli autostati dell'atomo idrogenoide.

Dato un generico autostato, comprensivo anche della dipendenza temporale, $|n, l, m, s, (t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} |n, l, m, s\rangle$, si ha:

$$\begin{aligned} I_{n,l,m,s,n',l',m',s'} &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \left| \frac{d^2}{dt^2} \langle n', l', m', s', (t) | \vec{x} | n, l, m, s, (t) \rangle \right|^2 + O(10^{-6}) \\ &= \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{E_{n'} - E_n}{\hbar} \left| \langle n', l', m', s' | \vec{x} | n, l, m, s \rangle \right|^2 + O(10^{-6}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Dunque, vengono definite *transizioni permesse*, in approssimazione di dipolo, quelle per cui gli elementi di matrice $\langle n', l', m', s' | \vec{x} | n, l, m, s \rangle$ sono diversi da zero. Questo non significa che le altre transizioni non sono permesse, ma semplicemente che la loro intensità è un milione di volte più debole, perchè, per poter considerare proprio quelle transizioni, è necessario introdurre gli altri termini dello sviluppo nella formula (1.4), come per esempio il termine di quadrupolo, che però ha un'intensità $O(10^{-6})$ rispetto al

termine di dipolo. Si definisco *regole di selezione* i vincoli sulle transizioni fra gli stati ¹, che rendono non nulli gli elementi di matrice di transizione ². Per i primi due termini il risultato è il seguente:

	Δn	Δl	Δm	Δs
<i>Transizioni di dipolo elettrico</i>	qualsiasi, ma non 0	± 1	$0, \pm 1$	0
<i>Transizioni di quadrupolo</i>	qualsiasi	$0, \pm 2$	$0, \pm 1, \pm 2$	0

L'operatore \vec{x} non agisce sulle autofunzioni dello spin, ed è questo il motivo per cui non vi è variazione nel numero quantico di spin.

Oltre alle transizioni dovute ai termini dello sviluppo in multipoli di cariche, ci sono altri tipi di transizione elettromagnetiche da tenere in conto, ovvero quelle dovute allo sviluppo in multipoli magnetici. Di seguito si terrà conto del primo termine dello sviluppo, il dipolo magnetico, il più rilevante in termini di potenza emessa. Questo tipo di transizione è legato alla *struttura iperfine degli atomi*, ovvero a quell'interazione tra i momenti magnetici dell'elettrone e del protone, che rimuove la degenerazione residua della struttura fine degli stati energetici. Sebbene, in termini di potenza emessa, questa transizione sia molto più debole di quella di quadrupolo ($\frac{P_{dm}}{P_{quad}} \approx \frac{1}{\alpha_{Em}^2} = 5 \cdot 10^{-5}$, [1, J.D.Classical Electrodynamics], "*multipole radiation in atomic and nuclear system*")³, è di fondamentale importanza in astrofisica. Per esempio, a questo fenomeno è dovuta la riga a 21 cm dell'idrogeno atomico, che ne permette la rilevazione nel mezzo interstellare e intergalattico.

Anche le transizioni di dipolo magnetico obbediscono a delle regole di selezione, tuttavia, in questo caso si considerano gli elementi non nulli della matrice di transizione dell'operatore momento di dipolo magnetico. Si ha il seguente risultato:

	Δn	Δl	Δm	Δs
<i>Transizioni di dipolo magnetico</i>	0	0	0	$0, \pm 1$

¹I conti per quanto riguarda il primo termine dello sviluppo sono in appendice 1.

²Definizione in generale valida anche per gli altri termini dello sviluppo sopracitato, sebbene in questo elaborato non verranno riportate le dimostrazioni per i termini successivi al dipolo.

³ $\alpha_{Em} \approx \frac{1}{137}$ è la costante di struttura fine, nota anche come costante d'accoppiamento elettromagnetica.

1.3.2 Transizioni discrete: assorbimento ed emissione stimolata

Le righe spettrali in assorbimento, così come quelle dovute al fenomeno dell'emissione stimolata, sono una conseguenza dell'interazione tra radiazione e materia ⁴. Prima di procedere è necessario introdurre brevemente il concetto di perturbazione dipendente dal tempo [3, p.402-421] e le relative probabilità di transizione ; poichè, in accezione classica, il campo elettrico e magnetico sono proprio questo.

Dunque, dato un set completo di autofunzioni, $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$, relative ad un'hamiltoniana indipendente dal tempo, una generica funzione d'onda, dipendente dal tempo, può essere espressa come combinazione lineare di questi due autofunzioni, moltiplicate ciascuna per il relativo coefficiente esponenziale di evoluzione temporale. Per esempio, supponendo per semplicità due stati, si ha:

$$\Psi(t) = c_a \psi_a e^{-\frac{i}{\hbar} E_a t} + c_b \psi_b e^{-\frac{i}{\hbar} E_b t} \quad (1.6)$$

dove $|c_a|^2$ e $|c_b|^2$, indipendenti dal tempo, esprimono la probabilità che la particella abbia energia rispettivamente E_a o E_b , che si trovi dunque nello stato ψ_a o ψ_b .

Se si introduce una perturbazione dipendente dal tempo $H'(t)$, poichè ψ_a e ψ_b sono un set completo di autovettori, la funzione d'onda $\Psi(t)$ può ancora essere espressa come una loro combinazione lineare. I coefficienti c_a e c_b esprimono sempre la probabilità che la particella abbia energia rispettivamente E_a o E_b , tuttavia sono ora funzioni dipendenti dal tempo:

$$\Psi(t) = c_a(t) \psi_a e^{-\frac{i}{\hbar} E_a t} + c_b(t) \psi_b e^{-\frac{i}{\hbar} E_b t} \quad (1.7)$$

Si prende in esame il caso di una perturbazione temporale sinusoidale della forma

$$H'(\vec{r}, t) = V(\vec{r}) \cos(\omega t) \quad (1.8)$$

Al primo ordine perturbativo, prendendo in considerazione la (1.8) e utilizzando la (11.21) e la (11.30) [3], i coefficienti dipendenti dal tempo sono (11.34)[3]:

$$\begin{aligned} c_a &\approx -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)} \sin \left[\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] e^{-i \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}} \\ c_b &\approx -i \frac{V_{ba}}{\hbar} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)} \sin \left[\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] e^{i \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2}} \end{aligned} \quad (1.9)$$

dove $\omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$ è detta *frequenza naturale* e $V_{ab} = V_{ba} = \langle \psi_a | V(\vec{r}) | \psi_b \rangle$ ⁵ sono gli elementi di matrice dell'operatore $V(\vec{r})$. La probabilità di transizione, ovvero la probabilità che la particella transiti da uno stato iniziale ψ_a ad uno finale ψ_b al tempo t , al primo ordine perturbativo (11.35)[3] è

$$P_{a \rightarrow b}(t) = |c_b|^2 \approx \frac{|V_{ba}|^2}{\hbar^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \left[\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \quad (1.10)$$

⁴In questa trattazione si presuppone una definizione classica del campo elettromagnetico e non una sua eventuale quantizzazione.

⁵Poichè la matrice hamiltoniana è hermitiana.

che, sulla base della (1.9), risulta identica a $P_{a \leftarrow b}(t)$, ovvero alla probabilità che la particella transiti dallo stato ψ_b allo stato ψ_a .

Dunque, un atomo esposto ad un campo elettromagnetico subisce una perturbazione sinusoidale dipendente dal tempo. In presenza di un'onda elettromagnetica, risponde primariamente alla componente elettrica ed inoltre, se la lunghezza d'onda è lunga comparata alle dimensioni dell'atomo, si può ignorare la variazione spaziale del campo stesso⁶.

Nel caso di interazione radiazione-materia, l'atomo subisce l'influenza di un campo elettrico $E(t)$: $\vec{E}(t) = E_0 \cos(\omega t) \hat{n}$, dove \hat{n} è un versore 3D.

In generale sarebbe necessario considerare lo sviluppo in multipoli della carica e come i vari termini si accoppino al campo elettrico. Di seguito si terrà in considerazione solamente l'interazione tra dipolo e campo elettrico, studiata al primo ordine perturbativo. In questo caso si ha che l'operatore di transizione $V(\vec{r}) = E_0 q \vec{r} \cdot \hat{n}$, dove $q \vec{r}$ è il *dipolo elettrico*; perciò si ha

$$V_{ab} = E_0 P \cdot \hat{n} = E_0 q \langle \psi_a | \vec{r} | \psi_b \rangle \cdot \hat{n} \quad (1.11)$$

dove $P = q \langle \psi_a | \vec{r} | \psi_b \rangle$ sono gli elementi di matrice dell'operatore dipolo elettrico .

L'obiettivo consiste nel calcolare la (1.10) prendendo in considerazione la (1.11). Tuttavia, poiché si considera che l'atomo venga investito dalla radiazione proveniente da ogni direzione, quello che va inserito al posto di $|V_{ab}|^2$ nella (1.10) è la media della quantità $|P \cdot \hat{n}|^2$. Utilizzando la (11.53)[3], si ha $|P \cdot \hat{n}|^2 = \frac{1}{3}|P|^2$ ⁷.

Dunque, la probabilità di transizione, secondo la (1.10), è

$$P_{a \rightarrow b}(t) \approx \frac{|P|^2 E_0}{3 \hbar^2} \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \left[\frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \quad (1.12)$$

Le regole di selezione, che rendono non nullo P , sono le stesse che si ottengono dall'equazione (1.5), poiché gli operatori sono identici, a meno dello scalare q (carica).

Anzitutto, dalla (1.12), si può osservare che la transizione non richiede che l'onda abbia frequenza ω_0 ; infatti, come mostrato in figura 1.1, la probabilità è fortemente piccata in ω_0 , tuttavia, attorno a quest'ultima, c'è un certo intervallo di frequenze che possono provocare la transizione. Questo, come si vedrà nel capitolo 3, varrà anche per l'emissione spontanea.

L'altro aspetto interessante è connesso al fatto che $P_{a \rightarrow b}(t) = P_{a \leftarrow b}(t)$. Ciò significa che esiste anche un altro processo oltre all'*emissione spontanea* e all'*assorbimento*. Infatti, se la particella si trova in uno stato eccitato ed interagisce con la radiazione elettromagnetica, può transitare in uno stato con energia inferiore e

⁶Questo genere di approssimazione è ragionevole finché la radiazione elettromagnetica ha lunghezze d'onda nel vicino ultravioletto ($\geq 2 \cdot 10^{-6}$ cm), poiché il diametro di un atomo è approssimativamente di 10^{-8} cm. Questo non è più vero se si considerano lunghezze d'onda minori di $2 \cdot 10^{-6}$ cm, come accade nel caso dei raggi X.

⁷Infatti, definendo θ l'angolo tra \hat{n} e P , si ha $|P \cdot \hat{n}|^2 = |P \cos(\theta)|^2$. Per radiazione isotropa non polarizzata, l'orientazione di \hat{n} è random e $\cos^2(\theta)$ può essere rimpiazzato con la sua media sull'angolo solido.

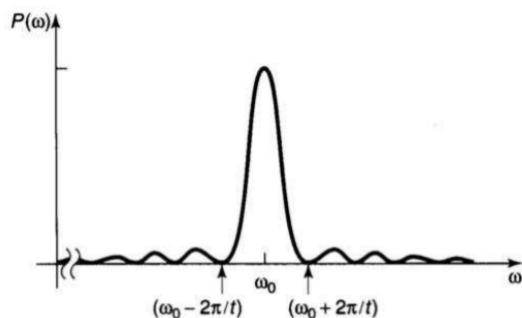


Figura 1.1: Probabilità di transizione in funzione di ω

la probabilità che questo avvenga è la stessa per la transizione dallo stato inferiore a quello superiore. Questo processo fu predetto per la prima volta da Einstein e prende il nome di *emissione stimolata*. Nel caso questo processo si verifichi, il campo EM incidente guadagna un quanto di energia pari, in media, alla differenza tra i due livelli energetici.

1.3.3 Dal discreto al continuo: i coefficienti di Einstein

Le relazioni della sezione 1.3.2 funzionano per transizioni discrete, ovvero il singolo atomo interagisce con un campo elettrico che ha una frequenza singola: $E(t) \propto \cos(\omega t)$. Se invece si vuole considerare in intero range di frequenze e ed un numero elevato di atomi, è necessario introdurre ulteriori strumenti, che si rivelano di estrema utilità per trattare l'*interazione radiazione-materia*. Questi sono i cosiddetti coefficienti di Einstein, che vengono utilizzati per descrivere le transizioni "*bound-bound*" degli elettroni tra i vari livelli energetici atomici, a seguito dell'interazione con la radiazione elettromagnetica; basandosi, ovviamente, sulla meccanica quantistica.

Esistono tre differenti coefficienti, ciascuno riferito ad uno processi precedentemente descritti. Infatti, dati due differenti e generici livelli energetici, U ("upper") e L ("lower"), con $E_U > E_L$, si ha:

- Emissione Spontanea
 A_{UL} = probabilità di transizione, per unità di tempo, tra i livelli U e L , a seguito dell'emissione di un fotone.
- Assorbimento
 $B_{LU} \cdot \bar{J}$ = probabilità di transizione, per unità di tempo, tra i livelli U e L , a seguito dell'assorbimento di un fotone.
- Emissione Stimolata
 $B_{UL} \cdot \bar{J}$ = probabilità di transizione, per unità di tempo, tra i livelli U e L , a seguito dell'interazione con la radiazione EM e alla conseguente emissione di un fotone.

\bar{J} rappresenta la densità di energia con frequenza media ν_{UL} , cosicché $h\nu_{UL}$ corrisponde alla differenza di energia tra i livelli U e L .

$A_{UL} \in [s^{-1}]$ e dunque $\frac{1}{A_{UL}} \in [s]$ è il tempo di vita medio di uno stato eccitato. Perciò, riprendendo quanto detto precedentemente, si definiscono proibite le transizioni per cui A_{UL} è basso, al contrario si definiscono permesse quelle con A_{UL} elevato ⁸.

Come riportato nel capitolo 1.3.2, i fotoni che provocano le transizioni coprono un determinato *range* di frequenze, o per meglio dire *non sono monocromatici*. Ciò significa che la porzione dello spettro per la transizione non è infinitamente stretta, ma copre un range di frequenze. Per definire questo range di frequenze utili, si utilizza la *Line Profile Function (LPF)* $\phi(\nu)$, una distribuzione di probabilità la cui variabile è la frequenza, centrata sul valore ν_{UL} e ivi fortemente piccata, che rappresenta l'efficacia con cui i fotoni con frequenza attorno a ν_{UL} possano causare la transizione. La forma è all'incirca quella della campana centrale in figura 1.1, tuttavia, la $\phi(\nu)$ non è univocamente determinata, ma è data dalla sovrapposizione di vari effetti ⁹. Dunque, la porzione dello spettro efficace è data da ¹⁰:

$$\bar{J} = \int_0^{\infty} J(\nu)\phi(\nu)d\nu \quad (1.13)$$

I valori dei singoli coefficienti sono invece dati dalle seguenti relazioni: se si indica con $a = L$ il livello inferiore e con $b = U$ quello superiore si ottiene [(11.62),(11.63)][3]

$$B_{ab} = B_{ba} = \frac{4\pi^3}{3h^2}|P|^2 \quad A_{ba} = \frac{4h\nu_{ba}^3}{c^3}B_{ba} = \frac{16\pi^3\nu_{ba}^3}{3hc^3}|P|^2 \quad (1.14)$$

dove P , dato dall'equazione (1.12), è il $P_{a,b}$ elemento di matrice dell'operatore momento di dipolo.

È proprio grazie a questi coefficienti che è possibile definire la statistica che sta alla base di ciò che noi osserviamo, ovvero le righe spettrali; quest'ultime, infatti, non sono il risultato di una singola transizione, che sarebbe impercettibile, bensì di una moltitudine di esse.

Per esempio, grazie ai coefficienti di Einstein è possibile mettere in relazione l'energia emessa/assorbita durante le transizioni e il numero di atomi che compiono quest'ultime.

$$\epsilon_{emitted} = \int_{riga} j(\nu)\rho \, d\nu = \frac{n_U A_{UL} h\nu}{4\pi} \in \left[\frac{erg}{s \cdot cm^3 \cdot sterad} \right] \quad (1.15)$$

mentre, in presenza di un campo di radiazione $J(\nu)$, l'energia totale assorbita, che provoca la transizione dallo stato L ad uno U è

$$\begin{aligned} \epsilon_{absorbed} &= \int_{riga} I(\nu)k \, \rho \, d\nu \\ &= \frac{h\nu J(\nu_{UL})}{4\pi} [n_L B_{LU} - n_U B_{UL}] \in \left[\frac{erg}{s \cdot cm^3 \cdot sterad} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

⁸Per quanto riguarda le transizioni di permesse dal dipolo elettrico si ha $A_{UL} \approx 10^4 - 10^8 [s^{-1}] \rightarrow$ *permesse*, mentre, per quanto riguarda transizioni che violano le regole di selezione del dipolo si ha $A_{UL} \approx 1 - 10^{-4} [s^{-1}] \rightarrow$ *proibite*.

⁹Questo sarà argomento del terzo capitolo.

¹⁰ $J(\nu_{UL}) \in [erg \cdot (s \cdot Hz \cdot cm^3)^{-1}]$ è l'*emissività specifica*.

dove l'emissione stimolata viene considerata nel termine d'assorbimento, anche se non lo è affatto, poichè il campo di radiazione non perde energia, bensì la guadagna.

Per quanto riguarda i termini che compaiono nelle equazioni, si ha: $j(\nu) \in [\text{erg} \cdot (\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{sterad} \cdot \text{gr})^{-1}]$ è il *coefficiente d'emissione*, $k(\nu) \in [\text{cm}^2 \text{gr}^{-1}]$ è l'*opacità*, $\rho \in [\text{gr} \cdot \text{cm}^{-3}]$ è la *densità del mezzo*, $J(\nu_{UL}) \in [\text{erg} \cdot (\text{s} \cdot \text{Hz} \cdot \text{cm}^3)^{-1}]$ è l'*emissività specifica* e, infine, n_U e $n_L \in [\text{cm}^{-3}]$ sono rispettivamente il numero di atomi nello stato eccitato U e nello stato L per unità di volume.

1.4 Il ruolo dell'equazione del trasporto radiativo nella formazione delle righe spettrali

Fin'ora si è parlato di come si formano a livello microscopico, sulla base della meccanica quantistica, le righe spettrali. Ora, però, la domanda che ci si pone è: quando si forma una riga in assorbimento piuttosto che una in emissione?

Questo è un discorso che non è più di carattere strettamente microscopico e legato alla MQ, ma che concerne il mondo macroscopico ed uno strumento noto come *equazione del trasporto radiativo*.

Nella forma più generale si ha:

$$\frac{dI(\nu)}{d\tau(\nu)} = \frac{j(\nu)}{k(\nu)} - I(\nu) \quad (1.17)$$

la cui soluzione è

$$I(\tau(\nu)) = S(\nu)(1 - e^{-\tau(\nu)}) + I(0)e^{-\tau(\nu)} \quad (1.18)$$

dove si è posto $S(\nu) = \frac{j(\nu)}{k(\nu)}$ ¹¹ (funzione sorgente), mentre $I(0)$ è l'intensità della sorgente in background.

Dunque per determinare in termini del trasporto radiativo se c'è assorbimento oppure emissione si procede come segue:

$$\begin{aligned} I(\tau(\nu)) - I(0) &= [S(\nu)(1 - e^{-\tau(\nu)}) + I(0)e^{-\tau(\nu)}] - I(0) \\ &= [S(\nu) - I(0)](1 - e^{-\tau(\nu)}) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Perciò, in dipendenza dalla profondità ottica $\tau(\nu)$ si ha:

$$\begin{cases} S(\nu) < I(0) = & \text{assorbimento} \\ S(\nu) > I(0) = & \text{emissione} \end{cases} \quad (1.20)$$

Ovviamente, bisogna tenere conto del fatto che il mezzo attraversato dalla radiazione risponde in modo differente alle diverse frequenze, infatti si ha $\tau(\nu)$.

¹¹ $d\tau(\nu) = k(\nu)\rho ds \geq 0$ [adim.] è la profondità ottica infinitesima, $k(\nu)$ l'opacità e $j(\nu)$ il coefficiente d'emissione.

In generale, in termini di temperatura, si ha assorbimento se il mezzo frapposto tra l'osservatore e la sorgente in background è più freddo di quest'ultima, altrimenti, nel caso sia più caldo, si ha emissione.

Un altro aspetto che spesso viene sottovalutato, ma che è fondamentale per comprendere perchè si abbia assorbimento piuttosto che emissione, è la geometria. Spesso, nei casi in cui la profondità ottica è piccola, ma l'intensità $I(0)$ della sorgente è elevata, succede che l'assorbimento venga misurato, ma l'emissione no. Questo concetto è molto importante, soprattutto per quanto riguarda la termodinamica dei corpi all'equilibrio termico, come le stelle; anche se, in questo caso, sarebbe più corretto parlare di equilibrio termico locale. Se si applica quanto ricavato dalla (1.18) e dalla (1.19) alle atmosfere stellari si ottiene che l'intensità iniziale $I(0)$, che corrisponde alla radiazione di corpo nero emessa dalla fotosfera, viene in parte assorbita, e si assiste alla cosiddetta depressione del continuo. Infatti $I(0)$ risulta maggiore della $S(\nu)$ dell'atmosfera e si ha l'assorbimento. Tuttavia, le atmosfere si trovano nello stato di equilibrio termico locale (LTE), dunque ottemperano alla legge di Kirchoff: ciò che viene assorbito, viene anche riemesso in eguale quantità. Dunque, sorge spontanea una domanda: perchè, osservando in maniera diretta la stella, si misura esclusivamente l'assorbimento, se i fotoni assorbiti vengono poi riemessi? La risposta è in questo caso di carattere puramente geometrico. Infatti, i fotoni che vengono assorbiti lungo la linea di vista vengono effettivamente riemessi, ma non tutti nella stessa direzione, bensì isotropicamente, quindi i fotoni lungo la linea di vista sono meno di quelli che erano originariamente nella $I(0)$ ed è per questo motivo che si osserva l'assorbimento. Un osservatore che guardi all'atmosfera con un'angolazione differente, per esempio con una linea di vista ortogonale alla congiungente tra sorgente in background e atmosfera, osserva l'emissione dovuta al diseccitamento degli atomi; in realtà, per una stella, a causa della simmetria pressochè sferica, è difficile identificare una linea di vista, con diversa angolazione, che isoli il mezzo frapposto dalla sorgente in background.

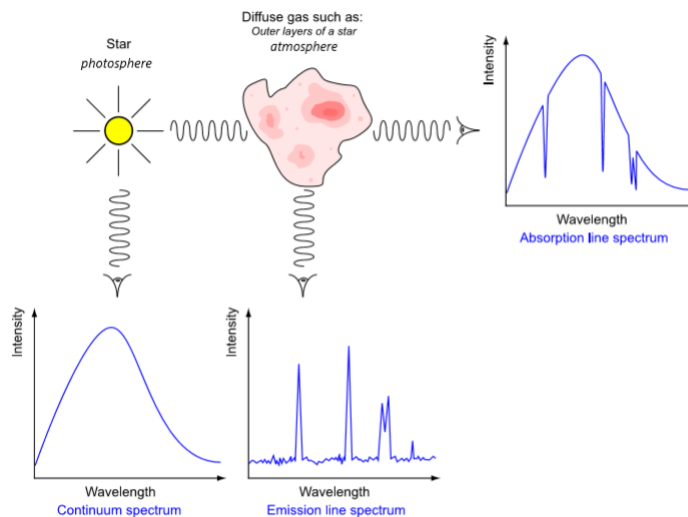


Figura 1.2: La linea di vista e la formazione delle righe spettrali, [9].

Capitolo 2

Shift delle righe spettrali

Le righe spettrali incorrono in alcuni processi che provocano il cambiamento della lunghezza d'onda, o della frequenza, delle stesse. Di seguito verranno brevemente analizzati due fenomeni che sono di fondamentale importanza in astrofisica: l'*effetto doppler* e il *redshift cosmologico*.

2.1 Effetto Doppler

L'effetto doppler consiste nella variazione apparente della lunghezza d'onda della radiazione emessa a causa dei moti relativi della sorgente e dell'osservatore. Nella trattazione classica si hanno due sistemi di riferimento inerziali, S e S' , in moto relativo lungo la direzione che congiunge gli stessi con velocità v , usualmente nota come velocità radiale, infatti, classicamente, l'effetto sussiste solo se la direzione d'osservazione è quella del moto relativo. Nel sistema di riferimento S' viene emessa della radiazione con lunghezza d'onda $\lambda_{S'}$, dovuta ad una transizione atomica di una qualche specie chimica, la stessa che si potrebbe osservare in un laboratorio studiando quel dato atomo. L'osservatore che si trova nel sistema S non osserva questa radiazione alla lunghezza d'onda $\lambda_{S'}$, bensì a $\lambda_S \neq \lambda_{S'}$. In termini quantitativi, non relativistici, si ha:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{S'}} = \frac{\lambda_S - \lambda_{S'}}{\lambda_{S'}} = \frac{v}{c} \quad (2.1)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

I casi possibili sono due, la sorgente S' si avvicina e la lunghezza d'onda diminuisce, o la sorgente S' si allontana e la lunghezza d'onda aumenta; nel primo caso si parla di *blueshift* ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{S'}} < 0$), poichè la lunghezza d'onda percepita in S è inferiore a quella in S' , mentre nel secondo caso di *redshift* ($\frac{\Delta\lambda}{\lambda_{S'}} > 0$), poichè la lunghezza d'onda percepita in S è superiore a quella in S' . L'intensità dell'effetto dipende ovviamente dal valore della velocità relativa dei due sistemi. Va da sè, che una delle applicazioni più importanti in

astrofisica è quella di poter ricavare informazioni riguardanti il moto dei corpi celesti, infatti, nota la λ d'emissione-da esperimenti in laboratorio- e misurata la lunghezza d'onda apparente, si può ricavare la velocità.

Per quanto riguarda la trattazione relativistica, l'espressione che definisce in modo quantitativo il fenomeno è:

$$\nu_S = \frac{\nu_{S'} \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos(\theta)} \quad (2.2)$$

dove $\beta = \frac{v}{c}$ e θ l'angolo che identifica la direzione d'osservazione nel sistema S rispetto a quella del moto relativo.

È molto interessante che la formula relativistica predica un effetto doppler trasversale, che è puramente relativistico, cioè è percepibile qualora v si avvicini a c .

2.2 Redshift cosmologico

Il *redshift cosmologico* z è lo spostamento relativo verso il rosso della lunghezza d'onda della radiazione a causa dell'espansione dell'universo.

In cosmologia l'espansione dell'universo è parametrizzata tramite il parametro di scala $a(t)$ e la lunghezza d'onda della radiazione è strettamente connessa a quest'ultimo, infatti:

$$\lambda(t_0) = \lambda(t_e) \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.3)$$

dove t_0 è il tempo al quale l'osservatore riceve la radiazione, mentre $t_e < t_0$ è il tempo al quale la radiazione è stata emessa.¹

Il redshift di una sorgente è definito come:

$$z = \frac{\lambda_{osservata} - \lambda_{laboratorio}}{\lambda_{laboratorio}} = \frac{\lambda(t_0) - \lambda(t_e)}{\lambda(t_e)} \quad (2.4)$$

combinando la (2.3) e la (2.4) si ottiene

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} \quad (2.5)$$

La quantità $(1+z)$, oltre ad indicare di quanto si espanso l'universo nell'intervallo di tempo $t_0 - t_e$, è un'osservabile cosmologica fondamentale, ricavabile dallo studio degli spettri in riga dei corpi celesti, che rientra come correzione in innumerevoli equazioni dell'astrofisica e della cosmologia. Ne è un esempio la correzione che viene apportata alla nozione di flusso e conseguentemente alla distanza euclidea di luminosità:

$$F = \frac{L}{4\pi D^2} \rightarrow F = \frac{L}{4\pi D^2} \left(\frac{1}{1+z} \right)^2 \quad (2.6)$$

¹Si ha che $a(t_e) < a(t_0)$, perciò $\lambda(t_e) < \lambda(t_0)$

Capitolo 3

Allargamento delle righe spettrali

Come già accennato nei capitoli precedenti, la radiazione emessa o assorbita durante una transizione non è mai monocromatica. Infatti, nella sezione 1.3.3 è stata introdotta la *Line Profile Function*, il cui scopo, una volta considerati tutti gli effetti che concorrono ad allargare le righe spettrali, è di decretare per ogni processo in riga qual è il range di frequenze efficace attorno alla frequenza di picco.

3.1 Allargamento Naturale o di Lorentz

È dovuto al principio di indeterminazione di Heisenberg relativo al tempo e all'energia: $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$.

Infatti, un atomo, in uno stato eccitato, ha un tempo di vita finito, perciò incorrerà in un decadimento; tuttavia, non è possibile conoscere l'energia dello stato finale con precisione assoluta, a causa proprio del principio di indeterminazione.

$$\begin{aligned}\Delta t &\approx \frac{1}{A_{UL}} & \Delta E &= h\Delta\nu \\ \Delta E \Delta t &= h\Delta\nu \frac{1}{A_{UL}} \geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta\nu &\geq \frac{A_{UL}}{4\pi}\end{aligned}\tag{3.1}$$

Dunque, più la probabilità di transizione A_{UL} è elevata, maggiore sarà la larghezza intrinseca della riga.

La *LPF* è descritta da

$$\phi(\nu) = \frac{\frac{\gamma}{4\pi^2}}{(\nu - \nu_{UL})^2 + (\frac{\gamma}{4\pi})^2}\tag{3.2}$$

dove $\gamma = \sum_L A_{UL}$, ovvero su tutti i possibili stati del livello $n = L$ accessibili all'elettrone; oppure, nel caso in cui ci siano transizioni dovute all'assorbimento, quindi tenendo in conto B_{LU} , si ha $\gamma = \gamma_L + \gamma_U$.

3.2 Allargamento doppler

É un effetto dovuto all'agitazione termica degli atomi. Se il moto dei singoli ha una componente lungo la direzione radiale, le frequenze della radiazione emessa da quest'ultimi possono incorrere nel *red-* o *blue-* shift. In condizioni di non degenerazione e di equilibrio termico, gli atomi seguiranno la distribuzione di velocità di Maxwell-Boltzmann. Il *centroide*¹ non viene intaccato da questo processo, a meno che la nube che contiene gli atomi non abbia un moto proprio, in tal caso anche quest'ultimo subisce il doppler-shift.

$$\Delta\nu = \nu - \nu_{UL} = \nu_{UL} \frac{v}{c} \quad \rightarrow \quad v = c \frac{\nu - \nu_{UL}}{\nu_{UL}}$$

La distribuzione di M.-B. dà il numero di atomi con velocità compresa tra v e $v + dv$ lungo la direzione della linea di vista :

$$N(v)dv = \sqrt{\frac{m_a}{2\pi kT}} e^{-\frac{m_a v^2}{2kT}} dv$$

dove m_a è la massa dell'atomo, T la temperatura e k la costante di Boltzmann. La corrispondente distribuzione in funzione di ν è

$$N(\nu)d\nu = \sqrt{\frac{m_a c^2}{2\pi kT \nu_{UL}}} e^{-\frac{m_a c^2}{2kT} \frac{(\nu - \nu_{UL})^2}{\nu^2}} d\nu \quad (3.3)$$

che è un profilo gaussiano con

$$\sigma_{Dopp} = \sqrt{\frac{m_a \nu_{UL}}{kT c^2}} \quad (3.4)$$

anche definita *Doppler width*.

Dunque, in questo caso, usando la (3.3), la *LPF* ha un profilo gaussiano:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\sigma_{Dopp} \sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\nu - \nu_{UL})^2}{\sigma_{Dopp}^2}} \quad (3.5)$$

La precedente espressione vale anche nel caso di moti turbolenti all'interno del gas, a patto di modificare l'espressione della *Doppler width*. Si assume, infatti, che la distribuzione di velocità che governa quest'ultime sia di tipo gaussiano. Dunque:

$$\sigma_{Dopp} = \frac{\nu_{UL}}{c^2} \sqrt{\frac{m_a}{kT} + v_{turb}^2} \quad (3.6)$$

¹La frequenza ν_{UL} .

3.3 Allargamento collisionale

L'allargamento collisionale è un processo che ha luogo quando gli atomi collidono gli uni con gli altri o interagiscono con i campi elettrici di ioni liberi nel mezzo. Infatti, le interazioni, siano esse di tipo fisico o elettrico, inducono dei cambiamenti nei livelli energetici degli orbitali atomici. L'effetto dipende strettamente dalla densità del mezzo, più alta è quest'ultima infatti, più evidente sarà lo stesso. La *LPF* è descritta da un profilo di Lorentz, come quello della (3.2), a cui vanno però apportate delle correzioni:

$$\phi(\nu) = \frac{\frac{\Gamma}{4\pi^2}}{(\nu - \nu_{UL})^2 + (\frac{\Gamma}{4\pi})^2} \quad (3.7)$$

dove $\Gamma = \gamma + 2\nu_{coll}$ e γ segue la descrizione della sezione (3.2), mentre ν_{coll} è la frequenza delle interazioni in cui incorre l'atomo.

Le interazioni dominano in ambienti densi, dunque questo processo va tenuto in conto, per esempio, nello studio delle atmosfere stellari, in particolar modo di quelle che presentano una maggior densità superficiale, come le nane bianche.

3.4 Profilo di Voigt

Tutti i processi di allargamento coesistono; la combinazione dell'allargamento doppler (termico) con quello naturale e collisionale restituisce il cosiddetto profilo di Voigt. Quest'ultimo, di cui non esiste espressione analitica semplice, si ottiene dalla convoluzione del "*damping profile*" (allargamento intrinseco+ allargamento collisionale) di Lorentz e del profilo doppler gaussiano. Il core della riga (la regione attorno a ν_{UL} , $x \leq |2|$ in figura 3.1) è dominato dal profilo gaussiano, mentre le ali ($x \geq |2|$ in figura (3.1)) dal profilo di Lorentz.

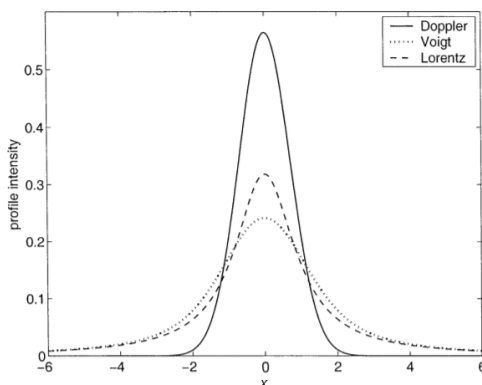


Figura 3.1: Profilo di Voigt, [7]

Appendice 0

Un esempio di spettro in riga: la Nebulosa Anello NGC 6720

La Nebulosa Anello NGC 6720 è una nebulosa planetaria situata nella costellazione della Lyra, a 1.13 kpc dal Sole. A dispetto di quanto possa suggerire il nome, la nebulosa planetaria non ha nulla a che fare con i pianeti, bensì, è ciò che resta al termine della vita di stelle di piccola massa, all'incirca $1-8 M_{\odot}$. Si tratta infatti di strati di gas, espulsi dalla stella nella sua ultima fase evolutiva, che circondano quest'ultima, ormai divenuta una nana bianca. Il gas è costituito da una miscela di diversi elementi chimici in diversi stati di ionizzazione, nel caso di NGC 6720 si osserva maggiormente la presenza di idrogeno (*serie di Balmer*), elio, azoto e ossigeno. La temperatura, molto elevata nelle regioni centrali, diminuisce via via che ci si allontana dalla stella centrale¹, ma la capacità di ionizzazione della radiazione UV emessa da quest'ultima riesce a raggiungere anche le regioni più esterne. Infatti, nelle regione più interna si osserva la presenza copiosa di He II ²(468.6 nm), che restituisce quel colore blu intenso; si tratta in questo caso di una riga dovuta ad una transizione di dipolo fra i livelli $m = 4$ e $n = 3$ dell'atomo idrogenoide He II, caratterizzata dal coefficiente di Einstein $A \sim 10^8 s^{-1}$. Nell'anello centrale, in cui domina il colore ciano, si osserva la presenza di righe dovute all'idrogeno (H_{β} (486.1 nm) e H_{γ} (434.0 nm)) e all'[O III]³ (436.3, 495.9 e 500.7 nm). L'intensità dell' H_{γ} è all'incirca un ordine di grandezza inferiore all' H_{β} ; così come l'intensità della riga a 436.3 nm dell'[O III] lo è rispetto alle altre righe dello stesso elemento. È questo il motivo per il quale domina il ciano ($\lambda \sim 480-520$ nm) in questa regione. Infine, il colore rossastro, con un leggero accenno di giallo, che contraddistingue l'anello più esterno, è dovuto alla marcata presenza di idrogeno (H_{α} , 656.3 nm) e [N II]⁴(575.5, 654.8 e 658.4 nm) .

¹La stella ha una temperatura superficiale di circa $1.2 \cdot 10^5$ K.

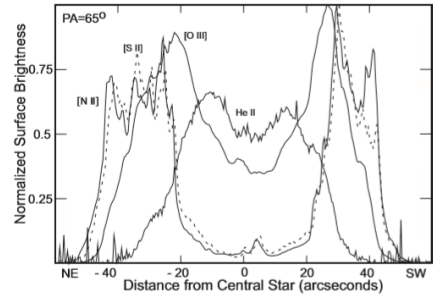
²L'He II richiede 24.6 eV ($\lambda \sim 50$ nm) per la prima ionizzazione, ed è presente in quantità abbondanti quando la temperatura raggiunge i 70.000K.

³Le parentesi quadre segnalano che è una linea dovuta ad una transizione proibita. Infatti, in termini di coefficiente A di Einstein [5], si ha per l'[O III]: $A_{436.3} = 1.17 s^{-1}$, $A_{495.9} = 6.21 \cdot 10^{-3} s^{-1}$, $A_{500.7} = 1.81 \cdot 10^{-2} s^{-1}$.

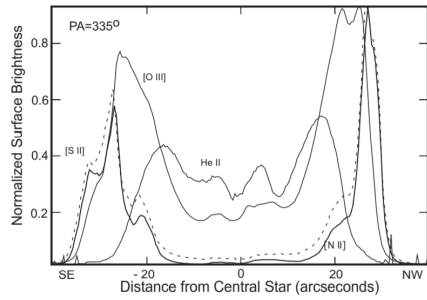
⁴Per quanto riguarda l'[N II] [5], si ha: $A_{575.5} = 1.17 s^{-1}$, $A_{654.8} = 9.20 \cdot 10^{-4} s^{-1}$, $A_{658.3} = 2.73 \cdot 10^{-3} s^{-1}$.



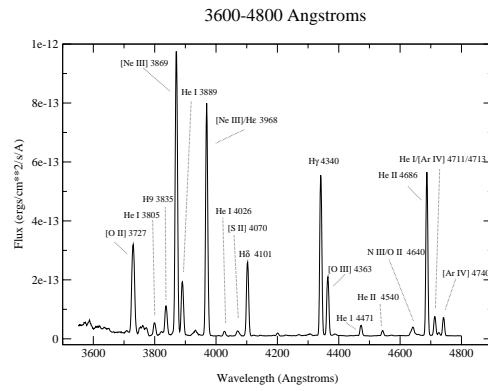
(a) *Nebulosa Anello*



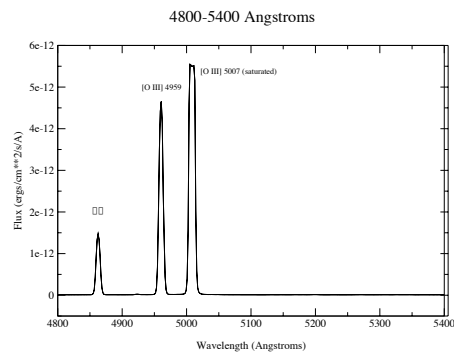
(b) *Distribuzione spaziale degli elementi (direzione NE-SW,[8])*



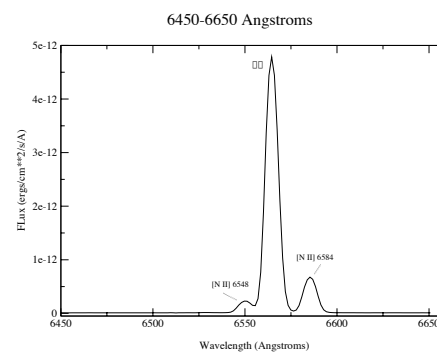
(c) *Distribuzione spaziale degli elementi (direzione SE-NW,[8])*



(d) *Spettro tra 360 e 480 nm*



(e) *Spettro tra 480 e 540 nm*



(f) *Spettro tra 645 e 665 nm*

Figura 0.1: NGC 6720

Appendice 1

Elementi di matrice dell'operatore \vec{x}

Per valutare gli elementi di matrice $\langle n', l', m', s' | \vec{x} | n, l, m, s \rangle$ è necessario risolvere alcuni integrali. Per poterli trattare bisogna esprimere l'operatore vettoriale \vec{x} nella *base sferica*:

$$\vec{x} = \vec{r} = r_x \hat{e}_x + r_y \hat{e}_y + r_z \hat{e}_z \quad (1.1)$$

$$= r \cos(\phi) \sin(\theta) \hat{e}_x + r \sin(\phi) \sin(\theta) \hat{e}_y + r \cos(\theta) \hat{e}_z \quad (1.2)$$

usando i versori della base sferica ($\hat{e}_-, \hat{e}_+, \hat{e}_0$) e le armoniche sferiche, si ha

$$\hat{e}_\pm = \mp \frac{\hat{e}_x \pm i \hat{e}_y}{\sqrt{2}} \quad \hat{e}_0 = \hat{e}_z$$

$$\vec{r} = -\frac{r}{\sqrt{2}} \sin(\theta) e^{i\phi} \hat{e}_+ + \frac{r}{\sqrt{2}} \sin(\theta) e^{-i\phi} \hat{e}_- + r \cos(\theta) \hat{e}_0 \quad (1.3)$$

$$= r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left(Y_1^1(\theta, \phi) \hat{e}_+ + Y_1^{-1}(\theta, \phi) \hat{e}_- + Y_1^0(\theta, \phi) \hat{e}_0 \right) \quad (1.4)$$

$$r_{\tilde{m}} = r \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_1^{\tilde{m}}(\theta, \phi) \quad (1.5)$$

Sulla base delle autofunzioni stazionarie dell'atomo idrogenoide (capitolo 1), gli elementi di matrice dell'operatore vettoriale sono:

$$X_{\tilde{m}} = \text{cost} \int_0^\infty r^3 R_{n', l'} R_{n, l} dr \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} Y_l^{m'*}(\theta, \phi) Y_1^{\tilde{m}}(\theta, \phi) Y_l^m(\theta, \phi) \quad (1.6)$$

La parte radiale è sempre diversa da zero. Per la parte angolare conviene considerare separatamente la parte in ϕ e in θ delle armoniche sferiche.

La parte in ϕ fornisce come risultato:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+\tilde{m}-m')} d\phi = 2\pi \delta_{\Delta m, \tilde{m}} \quad \text{con } \tilde{m} = 0, \pm 1 \rightarrow \Delta m = 0, \pm 1 \quad (1.7)$$

La parte in θ , che porta restrizioni sul numero l , è leggermente più laboriosa. Dunque, le autofunzioni degli atomi idrogenoidi sono autostati dell'operatore di parità P (che non agisce sullo spin): $P\psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) = (-1)^l \psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi)$. L'interesse verte sulle *regole di selezione per la parità*, in particolar modo quelle che riguardano l'operatore posizione \vec{r} . Quest'ultimo è dispari per applicazione di parità: $P^\dagger \vec{r} P = -\vec{r}$. Se ora si considerano gli elementi di matrice dell'operatore posizione tra due stati dell'atomo idrogenoide si ha:

$$\langle n', l', m', s' | \vec{r} | n, l, m, s \rangle = \langle n', l', m', s' | P^\dagger \vec{r} P | n, l, m, s \rangle \quad (1.8)$$

$$= \langle n', l', m', s' | (-1)^l \vec{r} (-1)^l | n, l, m, s \rangle \quad (1.9)$$

$$= (-1)^{l+l'+1} \langle n', l', m', s' | \vec{r} | n, l, m, s \rangle \quad (1.10)$$

Da cui si ottiene la *Regola di Laporte* per operatori dispari sotto parità:

$$\langle n', l', m', s' | \vec{r} | n, l, m, s \rangle = \vec{0} \quad \text{se } l + l' = \text{pari} \quad (1.11)$$

cioè gli elementi di matrice dell'operatore posizione sono nulli tra stati con la stessa parità. Perciò, poichè l'operatore momento di dipolo connette stati di diversa parità, per questo operatore non si potrà mai avere $\Delta l = 0$. Per ottenere i valori di l' accessibili bisogna risolvere:

$$\int_0^\pi \sin(\theta) P_l^{m+\tilde{m}}(\cos(\theta)) P_1^{\tilde{m}}(\cos(\theta)) P_l^m(\cos(\theta)) d\theta = \int_{-1}^1 P_l^{m+\tilde{m}}(\xi) P_1^{\tilde{m}}(\xi) P_l^m(\xi) d\xi \quad (1.12)$$

I polinomi di Legendre di grado $l = 1$ sono $P_1^0 = \cos(\theta)$, $P_1^{-1} = \frac{1}{2} \sin(\theta)$, $P_1^1 = \sin(\theta)$. Mediante le relazioni di ricorrenza delle funzioni associate di Legendre

$$\sin(\theta) P_l^m(\xi) = \frac{1}{2l+1} [P_{l+1}^{m+1}(\xi) + P_{l-1}^{m+1}(\xi)] \quad (1.13)$$

$$\cos(\theta) P_l^m(\xi) = \frac{1}{2l+1} [(l-m+1) P_{l+1}^m(\xi) + (l+m) P_{l-1}^m(\xi)] \quad (1.14)$$

si possono esprimere questi integrali di tre funzioni come integrali di due funzioni, per i quali si può usare la relazione di ortogonalità

$$\int_{-1}^1 P_{k'}^{h'}(\xi) P_k^h(\xi) d\xi = \text{cost}_{k,k'}^{h,h'} \delta_{k,k'} \delta_{h,h'} \quad (1.15)$$

In questo caso $k = l \pm 1$ e $h = m, m+1$; perciò, gli integrali non sono nulli se $k' = l \pm 1$ e $h' = m, m+1$ (A.7). Ovvero $\Delta k = \Delta l = \pm 1$, che rispetta la regola di Laporte.

Bibliografia

- [1] Jhon David Jackson, *Classical Electrodynamics*, Jhon Wiley & Sons, 1999.
- [2] Jonathan Tennyson, *Astronomical Spectroscopy*, Imperial College Press, 2005.
- [3] David J. Griffiths, Darrell F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 2018.
- [4] B.H.Bransden,C.J.Joachain, *Physics of Atoms and Molecules*, Longman Scientific & Technical, 1990.
- [5] Arthur N. Cox *Allen's Astrophysical Quantities*, Springer, 4° edizione.
- [6] Barton Zwiebach, *Time Dependent Perturbation Theory*, MIT course N. 8.06, primavera 2018.
- [7] Xianglei H., Yuk L. Y., *A common misunderstanding about the Voigt Line Profile*, in "Journal of the Atmospheric Sciences", Pasadena, California, maggio-dicembre 2003.
- [8] C. R. O'Dell, G. J. Ferland, W. J. Henney, M. Peimbert, *Studies of NGC 6720 with Calibrated HST WFC3 Emission-Line Filter Images-I: Structure and Evolution*, in "Astronomical Journal" , febbraio 2013.
- [9] Magnus Gålfalk, *Stellar and Emission Line Spectra*, Stockholm Observatory, 2007.
- [10] Ben Baragiola, "*Notes: Tensor Operators*".
- [11] Francesco Ravanini, *Dispense di Meccanica Quantistica per il corso di Istituzioni di Fisica Teorica*, 2019.
- [12] F. R. Ferraro, *Dispense per il corso di Astrofisica Stellare*, 2019.
- [13] Daniele Dallacasa, *Dispense per il corso di Processi di Radiazione e MHD*, 2019.
- [14] Spettro di NGC 6720: <https://apps.williams.edu/nebulae/spectra.php?neb=NGC%206720>