

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Processi di scattering in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:
Riccardo Zangarelli

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Anno accademico 2019-2020
Sessione II

La stirpe degli uccelli, che possiedono piume anziché peli, deriva dalla trasformazione di quegli uomini, non certo malvagi ma un po' sciocchi, che si ritengono esperti delle cose celesti e credono, nella loro semplicità, che la sola vista sia sufficiente per dimostrarle con certezza.

PLATONE, "Timeo", par. 91d

Indice

| | |
|--|-----------|
| Abstract | vi |
| 1 Processi di scattering | 1 |
| 1.1 Scattering Thomson | 2 |
| 1.1.1 Caso generale di un'onda non polarizzata | 3 |
| 1.2 Scattering Compton | 4 |
| 1.3 Inverse Compton | 6 |
| 1.3.1 Potenza emessa per inverse Compton | 7 |
| 1.3.2 Synchrotron self-Compton | 8 |
| 1.4 Comptonizzazione | 9 |
| 1.5 Scattering della polvere | 10 |
| 2 Principali applicazioni astrofisiche | 12 |
| 2.1 Scattering Thomson negli AGN | 12 |
| 2.2 Effetto Sunyaev-Zel'dovich | 13 |
| Bibliografia | 16 |

Abstract

Con questo elaborato si intende fornire una trattazione generale dei principali processi di scattering di rilevanza astrofisica; ci si concentra, in particolare, sui processi che coinvolgono fotoni ed elettroni, a partire dal più semplice, lo *scattering Thomson*, che non prevede trasferimento di energia a seguito dell'interazione e può essere discusso classicamente. Gli effetti quantistici intervengono invece nello *scattering Compton*, in cui il fotone perde energia a beneficio dell'elettrone; se avviene il viceversa, si parla di *inverse Compton*, che necessita di fotoni poco energetici e di elettroni relativistici, e pertanto riveste un ruolo importante nelle radiosorgenti compatte, dove può dar luogo a *synchrotron self-Compton*. Più in generale, una modifica di uno spettro ad opera dello scattering Compton e inverse Compton si definisce *Comptonizzazione*. Anche la presenza di *polvere* lungo la linea di vista produce degli effetti sullo spettro: l'azione combinata di assorbimento e scattering nell'ottico, infatti, dà luogo a una riduzione dell'intensità. Per giustificare l'importanza astrofisica di questi processi, vengono riportate delle applicazioni, in particolare di *scattering Thomson negli AGN* e di inverse Compton dei fotoni della radiazione cosmica di fondo, a seguito di interazioni con il gas caldo degli ammassi di galassie (*effetto Sunyaev-Zel'dovich*).

1 | Processi di scattering

Con il termine *scattering* (letteralmente “diffusione”, “dispersione”) ci si riferisce a una serie di fenomeni in cui una particella subisce una deviazione dalla propria traiettoria iniziale a causa di altre particelle o di campi esterni. Questa definizione risulta molto più generale di quella solitamente utilizzata in astrofisica: in quest’ultimo caso, infatti, le particelle deviate sono generalmente fotoni che interagiscono con gli elettroni di un plasma¹, anche se esistono interazioni degne di nota che coinvolgono altri corpi (come ad esempio lo scattering dei fotoni da parte della polvere).

A livello fisico, i fenomeni di scattering vengono trattati come *urti dinamici* (ovvero collisioni); si potrebbe ritenere, dunque, che la teoria classica degli urti macroscopici sia sufficiente per descrivere adeguatamente interazioni di questo genere. È opportuno precisare, tuttavia, che in un urto tra due corpi macroscopici l’energia iniziale influenza solo il *tipo* di urto (ad esempio elastico o anelastico), mentre la probabilità di collisione rimane costante; nel caso microscopico questo non è più vero, in quanto intervengono effetti più complessi che possono dare luogo a varie tipologie di collisioni elastiche e anelastiche. La probabilità di ciascun tipo di interazione può essere misurata attraverso una grandezza detta *sezione d’urto* (indicata con σ), che verrà introdotta in forma differenziale nella **sezione 1.1**; in particolare, la sezione d’urto totale, costituita dalla somma dei contributi dovuti ai vari tipi di urti, risulta estremamente importante in quanto, senza entrare nei dettagli, può variare fortemente con l’energia delle particelle coinvolte, rendendo più o meno probabile l’interazione stessa.

La maggior parte dei fenomeni di scattering rilevanti in astrofisica, inoltre, prevede un *trasferimento di energia* tra la radiazione e le particelle interagenti con essa (scattering cosiddetto anelastico); ciò implica che la luce non possa avere soltanto carattere ondulatorio, ma debba essere formata anche da corpuscoli discreti dotati di una *propria quantità di moto*. La dimostrazione definitiva di questo asserto venne fornita nel 1923 dal fisico statunitense Arthur Compton, che rilevò un aumento nella lunghezza d’onda di raggi X diffusi da elettroni stazionari, confermando così le osservazioni di Einstein sulla natura quantistica della luce.² L’analisi dinamica dello *scattering Compton* e del processo inverso verrà discussa nella **sezione 1.2** e **1.3**; per il momento, tuttavia, verrà esposto il caso più semplice, lo *scattering Thomson*, che coinvolge un’onda elettromagnetica poco energetica e non prevede trasferimento di energia (scattering elastico).

¹Nonostante i plasmi astrofisici siano composti da elettroni e ioni, l’interazione dei fotoni con questi ultimi viene trascurata in quanto la probabilità di interazione dei fotoni con le particelle dipende da $1/m^2$, con m massa della particella. [3]

²Nell’*annus mirabilis* 1905, Albert Einstein diede una rivoluzionaria interpretazione dell’*effetto fotoelettrico*, il fenomeno per cui un metallo illuminato emette elettroni; poiché i risultati empirici non rispondevano alle ipotesi dell’elettromagnetismo classico, Einstein concluse che la luce dovesse essere costituita da “quanti” discreti di energia (dotati dunque di impulso). [4]

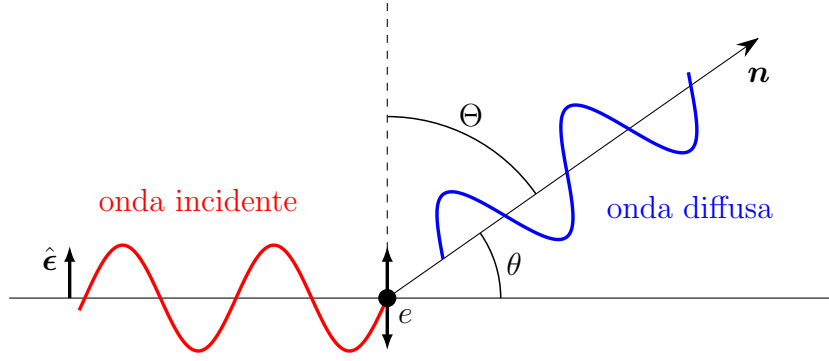


Fig. 1.1: Scattering Thomson di un'onda elettromagnetica ad opera di un elettrone oscillante lungo la direzione \hat{e} del campo elettrico dell'onda incidente. (Riproduzione di fig. 3.6 da RYBICKI E LIGHTMAN)

1.1. Scattering Thomson

Il processo di scattering rappresentato in **fig. 1.1**, che prende il nome dal fisico inglese Joseph John Thomson, consiste nella diffusione di un'onda elettromagnetica poco energetica ($h\nu \ll m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$) da parte di una particella libera dotata di carica elettrica e in condizioni non relativistiche; essa viene accelerata dal campo elettrico e dal campo magnetico dell'onda, ed emette radiazione a sua volta.³ Si nota, inoltre, che se la velocità di oscillazione v della particella è tale che $v \ll c$ (garantito dall'ipotesi di condizioni non relativistiche), è possibile trascurare la forza magnetica; se poi si considera per semplicità un'onda polarizzata linearmente, la forza applicata alla carica (che d'ora in avanti verrà considerata un elettrone) è la seguente:

$$\mathbf{F} = m_e \ddot{\mathbf{r}} = e \hat{e} E_0 \sin(\omega_0 t) \quad (1.1)$$

dove \hat{e} è il versore parallelo alla direzione del campo elettrico $\mathbf{E}(t)$. Questo risultato può essere scritto in termini del momento di dipolo elettrico $\mathbf{d} = e\mathbf{r}$:

$$\ddot{\mathbf{d}} = e \ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2 E_0}{m_e} \hat{e} \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \mathbf{d} = - \left(\frac{e^2 E_0}{m_e \omega_0^2} \right) \hat{e} \sin(\omega_0 t) \quad (1.2)$$

La distribuzione della potenza emessa dal dipolo sull'angolo solido Ω è ricavabile dall'analisi dell'emissione di radiazione da parte di cariche in moto³ applicata al caso particolare di un dipolo:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\ddot{d}^2}{4\pi c^3} \sin^2 \Theta \quad (1.3)$$

Avendo a che fare con un dipolo oscillante, se ne utilizza il valor medio (si ricorda che $\langle \sin^2(\omega_0 t) \rangle = 1/2$); si ottiene:

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \Theta \quad (1.4)$$

³L'emissione di radiazione da parte di cariche in moto accelerato è ben descritta dai *potenziali di Liénard-Wiechert* per una carica in moto: derivandoli, infatti, si può ottenere il campo elettrico di radiazione E_{rad} , dal quale si ricava la potenza emessa dalla carica per accelerazione (*formula di Larmor*). [1], [12]

dove Θ è l'angolo tra la direzione di oscillazione della particella e la direzione di propagazione dell'onda diffusa, rappresentato in **fig. 1.1**. La dipendenza da $\sin^2 \Theta$ rende la distribuzione anisotropa (**fig. 1.2**) e in particolare, per un singolo fotone, rende più probabile avere un angolo Θ elevato.

A questo punto, nota la distribuzione di radiazione, è possibile metterla in relazione con il flusso incidente S , dato dal vettore di Poynting,⁴ attraverso la *sezione d'urto differenziale* $d\sigma/d\Omega$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} S \quad (1.5)$$

Sostituendo la **eq. 1.4**, si ha:

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \Rightarrow \frac{e^4 E_0^2}{8\pi m_e^2 c^3} \sin^2 \Theta = \frac{c}{8\pi} E_0^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \Rightarrow \quad (1.6)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{pol} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sin^2 \Theta = r_e^2 \sin^2 \Theta \quad (1.7)$$

dove $r_e = e^2/(m_e c^2) = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$ è il raggio classico dell'elettrone (più in generale, $r_0 = q^2/(m c^2)$ rappresenta una misura della grandezza di una carica). La sezione d'urto totale Thomson σ_T segue immediatamente dall'integrazione della **eq. 1.7** sull'angolo solido:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2 \quad (1.8)$$

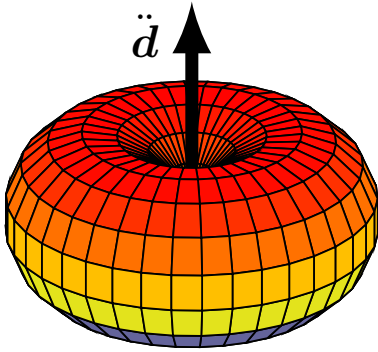


Fig. 1.2: Distribuzione della potenza emessa da un dipolo.

Si nota immediatamente che né la sezione d'urto totale né quella differenziale dipendono dalla frequenza: ciò significa che lo scattering Thomson è il medesimo a tutte le frequenze, purché siano valide le ipotesi enunciate in precedenza: se l'onda incidente è troppo energetica (in particolare se supera l'energia a riposo dell'elettrone $h\nu \gtrsim m_e c^2$) si richiede l'uso della sezione d'urto quantistica; se il campo è talmente intenso da far muovere l'elettrone a velocità relativistiche, inoltre, l'approssimazione di dipolo non è più valida.

1.1.1. Caso generale di un'onda non polarizzata

Il caso appena esaminato riguarda un'onda polarizzata linearmente, che quindi causa oscillazioni di dipolo unicamente nella direzione $\hat{\epsilon}$ del campo elettrico dell'onda; per questo motivo anche l'onda diffusa è polarizzata linearmente nel piano comprendente $\hat{\epsilon}$ e \mathbf{n} . L'estensione dello scattering Thomson a radiazione incidente *non polarizzata* può essere effettuata considerando quest'ultima come la sovrapposizione di due fasci polarizzati, con vettori $\hat{\epsilon}_1$ e $\hat{\epsilon}_2$ perpendicolari tra loro. In particolare, si pone $\hat{\epsilon}_1$ parallelo a $\hat{\epsilon}$ del caso precedente, in modo che l'angolo tra $\hat{\epsilon}_1$ e \mathbf{n} sia Θ , mentre quello

⁴Il vettore di Poynting $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})\mu_0$, di modulo $\|\mathbf{S}\| = c\epsilon_0 E^2 =$ (nel sistema CGS) $cE^2/(4\pi)$, rappresenta l'energia che un'onda elettromagnetica trasporta nell'unità di tempo per unità di superficie; il suo modulo, dunque, equivale al flusso astrofisico della radiazione.

tra $\hat{\mathbf{e}}_2$ e \mathbf{n} è uguale a $\pi/2$. La sezione d'urto differenziale sarà quindi la media dei contributi dei due fasci:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nopol} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d\sigma(\Theta)}{d\Omega}\right)_{pol} + \left(\frac{d\sigma(\pi/2)}{d\Omega}\right)_{pol} \right] \quad (1.9)$$

da cui, per la [eq. 1.7](#), si ha:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{nopol} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \sin^2 \Theta) = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta) \quad (1.10)$$

dove è stato introdotto l'angolo $\theta = \pi/2 - \Theta$. Integrando questa equazione si ricava lo stesso risultato ottenuto nella [eq. 1.8](#): questo perché l'elettrone colpito, essendo inizialmente a riposo, non possiede nessuna direzione preferenziale di oscillazione. I due termini che compaiono nella [eq. 1.10](#), inoltre, sono collegati alle intensità I_1 e I_2 dell'onda diffusa nelle due direzioni perpendicolari giacenti sul piano normale a \mathbf{n} ; in particolare, la componente nel piano di $\hat{\mathbf{e}}_1$ e \mathbf{n} e quella ad esso perpendicolare sono legate da una proporzionalità $\cos^2 \theta : 1$. Se ora si definisce il grado di polarizzazione come:

$$\Pi = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} \quad (1.11)$$

si ricava, nel caso specifico:

$$\Pi = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \quad (1.12)$$

Lo scattering Thomson di radiazione incidente non polarizzata, dunque, produce un'onda con un certo grado di polarizzazione ($\Pi \geq 0 \forall \theta$) che dipende dall'angolo θ da cui si osserva la radiazione diffusa: se $\theta = 0$, infatti, ovvero se ci si pone lungo la direzione incidente, non si registra alcuna polarizzazione ($\Pi = 0$), mentre se $\theta = \pi/2$ allora $\Pi = 1$ e la radiazione è completamente polarizzata, in quanto il moto dell'elettrone è confinato nel piano normale alla direzione dell'onda incidente, dove in questo caso si trova anche l'osservatore.

1.2. Scattering Compton

Lo scattering Compton, come già accennato, consiste nella diminuzione di energia di radiazione altamente energetica (raggi X o γ) ad opera di interazioni con elettroni liberi⁵. Di fatto, il fenomeno è l'estensione dello scattering Thomson alle alte energie, dove l'elettrone non oscilla più attorno a una posizione di equilibrio ma viene "lanciato via" a causa dell'energia acquisita ([fig. 1.3](#)). Per analizzare il caso dell'interazione di un singolo fotone, ci si pone nel sistema di riferimento in cui l'elettrone è inizialmente fermo, e si sfrutta la conservazione dell'energia e della quantità di moto prima e dopo l'urto:

$$\mathbf{p}_{\gamma,i} = \mathbf{p}_{\gamma,f} + \mathbf{p}_{e,f} \quad \text{quantità di moto} \quad (1.13)$$

$$h\nu_i + m_e c^2 = h\nu_f + \sqrt{p_{e,f}^2 c^2 + m_e^2 c^4} \quad \text{energia} \quad (1.14)$$

⁵Si precisa che esiste anche lo scattering Compton ad opera di nucleoni, ma con questo termine ci si riferisce solitamente al caso elettronico.

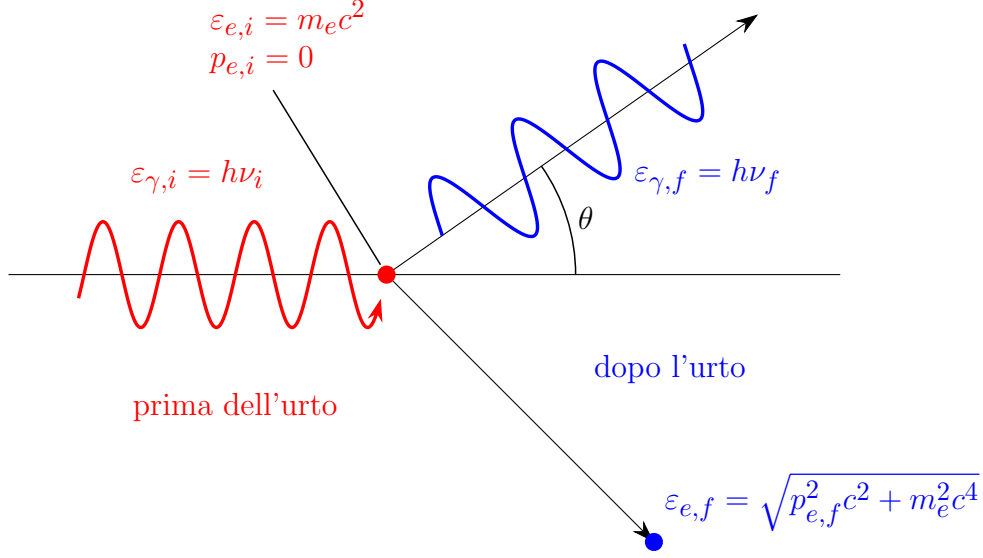


Fig. 1.3: *Scattering Compton di un fotone ad opera di un elettrone stazionario.* (Riproduzione di fig. 7.1 da RYBICKI E LIGHTMAN)

dove si è assunto che, data l'elevata energia del fotone, l'elettrone dopo l'urto si muova a velocità relativistiche. Isolando $\mathbf{p}_{e,f}$ nella eq. 1.13 e sostituendo $p_{e,f}^2 c^2$ nella eq. 1.14, si elimina la dipendenza dalla quantità di moto finale dell'elettrone e si ha:

$$\begin{aligned} -2h^2\nu_i\nu_f + 2h\nu_i m_e c^2 - 2h\nu_f m_e c^2 &= -2h^2\nu_i\nu_f \cos \theta \Rightarrow \\ h\nu_i\nu_f(1 - \cos \theta) &= m_e c^2(\nu_i - \nu_f) \end{aligned} \quad (1.15)$$

dove θ è l'angolo tra la direzione di propagazione del fotone incidente e di quello diffuso, riportato in fig. 1.3, ed è stato esplicitato l'impulso del fotone.⁶ Isolando le frequenze rispetto agli altri termini, si ricava:

$$\frac{1}{\nu_f} - \frac{1}{\nu_i} = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos \theta) \Rightarrow \lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos \theta) = \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (1.16)$$

dove $\lambda_c = h/(m_e c)$ è detta *lunghezza d'onda Compton* ed equivale, per l'elettrone, a $2,426 \cdot 10^{-10}$ cm. Dalla eq. 1.16, inoltre, è possibile ricavare l'energia finale del fotone:

$$\varepsilon_{\gamma,f} = h\nu_f = \frac{h\nu_i m_e c^2}{m_e c^2 + h\nu_i(1 - \cos \theta)} = \frac{\varepsilon_{\gamma,i}}{1 + \frac{\varepsilon_{\gamma,i}}{m_e c^2}(1 - \cos \theta)} \quad (1.17)$$

L'energia finale del fotone, dunque, dipende da quella iniziale e dall'angolo di scattering θ , ma diminuisce in ogni caso, coerentemente con un aumento di lunghezza d'onda dell'ordine di λ_c . Si nota immediatamente che il denominatore della eq. 1.17 è massimo per $\theta = \pi$ e minimo per $\theta = 0$, quando non si ha alcuna variazione di energia e lunghezza d'onda; questa eventualità, come già detto, si verifica anche quando il fotone incidente non è sufficientemente energetico ($h\nu_i \ll m_e c^2$) e lo scattering è di tipo Thomson.

⁶La quantità di moto di un fotone è ricavabile direttamente dalla generale definizione di energia in relatività ristretta $E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ nel caso di massa a riposo $m = 0$; il legame tra E e ν segue immediatamente dalla relazione di Planck $E = h\nu$. [4]

Alle energie richieste per avere scattering Compton, inoltre, intervengono effetti quantistici che riducono la sezione d'urto Thomson; si dovrà utilizzare, in questo caso, la *formula di Klein-Nishina*.⁷

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{\varepsilon_{\gamma,f}^2}{\varepsilon_{\gamma,i}^2} \left(\frac{\varepsilon_{\gamma,i}}{\varepsilon_{\gamma,f}} + \frac{\varepsilon_{\gamma,f}}{\varepsilon_{\gamma,i}} - \sin^2 \theta \right) \quad (1.18)$$

che nel caso di scattering elastico ($\varepsilon_{\gamma,f} = \varepsilon_{\gamma,i}$) si riduce all'espressione classica della [eq. 1.10](#). La sezione d'urto totale risulta essere:

$$\sigma_{K-N} = \sigma_T \frac{3}{4} \left[\frac{1+x}{x^3} \left(\frac{2x(1+x)}{1+2x} - \ln(1+2x) \right) + \frac{1}{2x} \ln(1+2x) - \frac{1+3x}{(1+2x)^2} \right] \quad (1.19)$$

dove $x = h\nu/(m_e c^2)$; per $x \ll 1$, la sezione d'urto di Klein-Nishina è circa equivalente a quella Thomson, ma per alte energie ($x \gg 1$) si ha $\sigma_{K-N} \propto x^{-1}$ e l'efficienza dello scattering Compton viene ridotta.

1.3. Inverse Compton

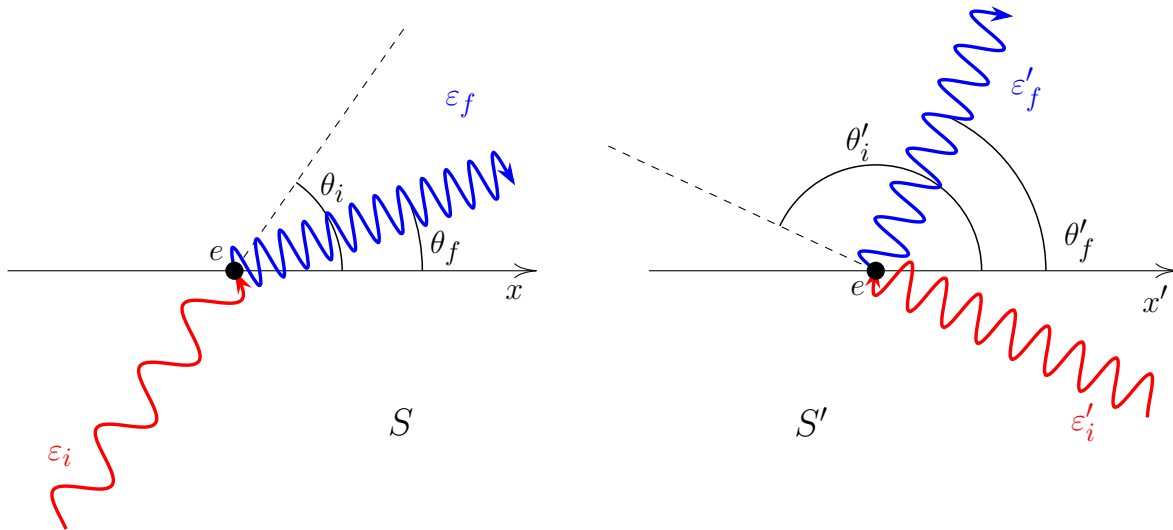


Fig. 1.4: Scattering Compton inverso tra un fotone e un elettrone relativistico nel sistema di riferimento dell'osservatore S e dell'elettrone S' . (Riproduzione di fig. 7.2 da RYBICKI E LIGHTMAN)

Di particolare rilevanza astrofisica è il processo inverso a quello appena descritto, che avviene quando un elettrone in moto a velocità relativistiche possiede una grande quantità di energia cinetica rispetto a quella del fotone incidente; in una situazione del genere, parte dell'energia cinetica dell'elettrone può essere trasferita al fotone. Poiché in questo caso l'elettrone non è più inizialmente a riposo, è opportuno analizzare il fenomeno tenendo conto anche del sistema di riferimento S' solidale con l'elettrone

⁷La descrizione formale della formula di Klein-Nishina, che esula dalla presente trattazione, deriva dall'elettrodinamica quantistica ed è reperibile ad esempio in "The quantum theory of radiation" (HEITLER, 1954).

(rappresentato in **fig. 1.4**), in cui si può considerare l'interazione come uno scattering Thomson ($\varepsilon'_i = \varepsilon'_f$, purché valga $\varepsilon'_i \ll m_e c^2$). Le relazioni tra le energie derivano dall'effetto Doppler relativistico:

$$\begin{aligned}\varepsilon'_i &= \gamma \varepsilon_i (1 - \beta \cos \theta_i) \\ \varepsilon_f &= \gamma \varepsilon'_f (1 + \beta \cos \theta'_f)\end{aligned}\tag{1.20}$$

dove $\beta = v/c$, con v velocità dell'elettrone in S , e γ fattore di Lorentz. Si osserva che l'energia del fotone diffuso dipende dagli angoli θ_i e θ'_f : il massimo guadagno, in particolare, si ha per $\theta_i = \pi$ e $\theta'_f = 0$ (urto frontale), che sostituiti nelle **eq. 1.20**, con $\beta \approx 1$, forniscono $\varepsilon_f \approx 4\gamma^2 \varepsilon_i$. Poiché caratteristicamente gli angoli θ_i e θ'_f sono dell'ordine di $\pi/2$, ad ogni trasformazione tra sistemi di riferimento il fotone guadagna un fattore γ di energia; la radiazione diffusa, che viene emessa in S entro un cono di semiapertura $1/\gamma$ orientato lungo la direzione di \mathbf{v} (*beaming relativistico*), sarà dunque circa γ^2 volte più energetica di quella incidente.

1.3.1. Potenza emessa per inverse Compton

Dopo aver analizzato una singola interazione tra un fotone e un elettrone, ci si chiede quale sia la potenza emessa a seguito di scattering Compton inverso tra una certa distribuzione di fotoni e una di elettroni, entrambe isotrope. Sia $d\varepsilon_{out}/dt$ la potenza emessa dai fotoni diffusi: si può dimostrare che essa è un *invariante di Lorentz*, ovvero non viene modificata da trasformazioni tra S e S' ; è possibile, dunque, calcolarla in S' , sotto l'ipotesi di scattering Thomson, con un'integrazione della **eq. 1.5** e passaggi analoghi a quelli effettuati nella **sezione 1.1**. Il flusso incidente viene esplicitato, in questo caso, come cu'_{rad} , con u'_{rad} densità di energia elettromagnetica (in S'); quest'ultima differisce da u_{rad} di un fattore $[\gamma(1 - \beta \cos \theta)]^2$, che mediato su tutti gli angoli porta alla seguente:

$$u'_{rad} = \gamma^2 \langle (1 - \beta \cos \theta)^2 \rangle u_{rad} = \gamma^2 u_{rad} (1 + \frac{1}{3} \beta^2)\tag{1.21}$$

Con questo risultato è possibile esprimere la potenza emessa dai fotoni diffusi in termini di quantità relative al sistema S :

$$\frac{d\varepsilon'_{out}}{dt'} = \frac{d\varepsilon_{out}}{dt} = c\sigma_T u'_{rad} = c\sigma_T u_{rad} \gamma^2 (1 + \frac{1}{3} \beta^2)\tag{1.22}$$

A questo punto, nota la potenza legata alla radiazione incidente $d\varepsilon_{in}/dt = -c\sigma_T u_{rad}$, l'energia netta persa dagli elettroni e di conseguenza guadagnata dai fotoni nell'unità di tempo risulta essere:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{IC} = \frac{4}{3} c\sigma_T \gamma^2 \beta^2 u_{rad}\tag{1.23}$$

in cui si evidenzia la presenza del fattore γ^2 , a riprova dell'elevata efficienza dello scattering inverse Compton nel trasferire energia da elettroni relativistici a fotoni poco energetici.

1.3.2. Synchrotron self-Compton

La forma della [eq. 1.23](#) è molto simile all'analoga equazione per la perdita energetica degli elettroni ultra-relativistici che emettono per sincrotrone;⁸ si ha infatti:

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{syn} = \frac{4}{3}c\sigma_T\gamma^2\beta^2u_H \quad (1.24)$$

dove u_H rappresenta la densità di energia del campo magnetico responsabile dell'accelerazione degli elettroni. La somiglianza tra le due equazioni suggerisce la possibilità che gli stessi elettroni che emettono per sincrotrone effettuino inverse Compton con i fotoni emessi, in un processo detto *synchrotron self-Compton*. Questo fenomeno si verifica in regioni compatte e luminose, dove la radiazione poco energetica di sincrotrone produce comunque una u_{rad} sufficiente per avere inverse Compton; di particolare importanza è il rapporto tra le perdite energetiche dei due processi:

$$\eta = \frac{(d\varepsilon/dt)_{IC}}{(d\varepsilon/dt)_{syn}} = \frac{u_{rad}}{u_H} \quad (1.25)$$

Esplicitando le densità di energia di radiazione e del campo magnetico, è possibile ricavare le condizioni fisiche in cui un processo prevale sull'altro. A questo scopo, si consideri una sorgente compatta e dunque autoassorbita, a simmetria sferica di raggio r e a distanza d dall'osservatore; il flusso S_ν viene espresso attraverso la temperatura di brillantezza⁹ nell'approssimazione di Rayleigh-Jeans:

$$S_\nu = \frac{2kT_B\nu^2}{c^2}\Omega \quad (1.26)$$

dove $\Omega \approx \theta^2 = r^2/d^2$ è l'angolo solido sotteso dalla sorgente. Dal flusso si ricava immediatamente la luminosità $L_\nu = 4\pi d^2 S_\nu$, e approssimando la luminosità bolometrica $L \approx \nu L_\nu$ è possibile ricavare la densità di energia di radiazione:

$$L_\nu \approx \frac{8\pi kT_B\nu^2}{c^2}r^2 \Rightarrow u_{rad} \sim \frac{\nu L_\nu}{4\pi r^2 c} = \frac{2kT_B\nu^3}{c^3} \quad (1.27)$$

A questo punto, sapendo che $u_H = H^2/(8\pi)$, rimane da esplicitare il campo magnetico H ; esso è legato all'energia degli elettroni $\varepsilon = \gamma m_e c^2 \approx 3kT_B$ da una proporzionalità $\varepsilon \propto \nu^{1/2}H^{-1/2}$, che implica $H \propto \nu/T_B^2$; introducendo queste relazioni nella [eq. 1.25](#), si ottiene $\eta \propto \nu T_B^5$.

Di particolare interesse è il caso in cui $\eta = 1$; imponendo questo valore, infatti, e risolvendo per T_B la [eq. 1.25](#), si ottiene:

$$T_B = 10^{12} \left(\frac{1 \text{ GHz}}{\nu} \right)^{1/5} \text{ K} \quad (1.28)$$

⁸La *radiazione di sincrotrone* deriva dall'accelerazione di elettroni in moto ultra-relativistico da parte di un campo magnetico. [1], [12]

⁹La temperatura di brillantezza T_B , definita come la temperatura che avrebbe, all'equilibrio termico, un corpo nero con la stessa brillantezza $B(\nu)$ dell'oggetto che emette, rappresenta un limite inferiore alla temperatura T di quest'ultimo. Nel caso specifico del sincrotrone, è possibile che a frequenze sufficientemente basse gli elettroni che emettono abbiano $T_e \approx T_B$; in questo caso, l'autoassorbimento mantiene T_B al di sotto di T_e . [11]

Se una sorgente ha temperatura di brillanza maggiore di $T_B \approx 10^{12}$ K, dunque, l'inversa Compton rappresenta la perdita energetica maggiore per gli elettroni; la diffusione di fotoni radio in banda X comporta un aumento di u_{rad} e dell'efficienza dello scattering dei medesimi fotoni X ad energie γ . La cosiddetta *catastrofe Compton*, ovvero l'iterazione di questo processo, si traduce in perdite energetiche sempre più elevate per gli elettroni e in una forte emissione di raggi X e γ .¹⁰

1.4. Comptonizzazione

Si parla di *Comptonizzazione* quando l'evoluzione spettrale di una sorgente è dominata dallo scattering Compton e inversa Compton; ci si limita al caso di elettroni non relativistici ($\gamma \approx 1$) e in equilibrio termico ($m_e \langle v^2 \rangle = 3kT$); nel caso di scattering Compton, l'energia relativa media persa da un fotone si ricava dalla [eq. 1.17](#) mediata su tutti gli angoli e assumendo $h\nu \ll m_e c^2$:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle = -\frac{h\nu}{m_e c^2} \quad (1.29)$$

Per quanto riguarda l'inversa Compton, il guadagno di energia medio si ricava dalla [eq. 1.23](#) divisa per $c\sigma_T u_{rad}/\varepsilon$ numero di fotoni diffusi nell'unità di tempo:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle = \frac{4}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^2 = \frac{4kT}{m_e c^2} \quad (1.30)$$

Il cambiamento medio di energia del fotone a seguito della combinazione dei due processi sarà dunque:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle = \frac{4kT - h\nu}{m_e c^2} \quad (1.31)$$

Se $4kT > h\nu$, dunque, i fotoni acquistano energia, se $h\nu > 4kT$ ne perdono e infine se $4kT = h\nu$ i due processi di scattering si equilibrano e non c'è trasferimento netto di energia.

Ci si concentra in particolare sul caso in cui $4kT \gg h\nu$, in cui la [eq. 1.31](#) si riduce a $\langle \Delta\varepsilon/\varepsilon \rangle \approx 4kT/(m_e c^2)$; poiché questa equazione riguarda una singola collisione, il guadagno totale di energia di ciascun fotone deve tener conto del numero N di interazioni che esso ha con gli elettroni prima di uscire dalla regione di scattering, di densità elettronica n_e e dimensione d . Sapendo che la profondità ottica Thomson è $\tau_e = n_e \sigma_T d = d/l_e$, con $l_e = (n_e \sigma_T)^{-1}$ libero cammino medio dei fotoni, si ha che essi percorrono, nel limite $\tau_e \gg 1$ necessario per significative variazioni di energia, una distanza $d = N^{1/2} l_e$, che implica $N = (d/l_e)^2 = \tau_e^2$. Il guadagno totale di energia di ogni fotone, dunque, risulta essere:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \right\rangle_{tot} \approx \frac{4kT}{m_e c^2} N = \frac{4kT}{m_e c^2} \tau_e^2 \quad (1.32)$$

¹⁰Osservazioni interferometriche delle radiosorgenti più compatte hanno rilevato temperature di brillanza non superiori a $T_B \approx 10^{11}$ K, al di sotto del limite inferiore richiesto dalla catastrofe Compton. Se le dimensioni delle medesime sorgenti vengono stimate attraverso il *tempo scala di variabilità*, tuttavia, esse risultano molto più compatte e di conseguenza si ha $T_B > 10^{12}$ K; ciò nonostante, questa temperatura non è accompagnata dall'elevata emissione X e γ che ci si aspetterebbe, e pertanto si ritiene che sia una sovrastima imputabile a un effetto di beaming relativistico. [11]

A questo punto è possibile ricavare l'energia finale ε_f del fotone:

$$\varepsilon_f = \varepsilon e^{4NkT/(m_e c^2)} = \varepsilon e^{4y} \quad (1.33)$$

dove si è introdotto il *parametro Compton* $y = NkT/(m_e c^2) = \tau_e^2 kT/(m_e c^2)$. Per osservare modifiche significative dello spettro è sufficiente avere $y \geq 1/4$; in particolare, se la Comptonizzazione è molto forte ($y \gg 1$) l'energia dei fotoni satura a $\varepsilon_f = 4kT$ (equilibrio termico), come ci si aspetta dalla [eq. 1.31](#); il numero N_{eq} di urti necessari per raggiungere l'equilibrio termico si può ricavare dalla [eq. 1.33](#):

$$4kT = \varepsilon e^{4N_{eq}kT/(m_e c^2)} \Rightarrow N_{eq} = \frac{m_e c^2}{4kT} \ln \left(\frac{4kT}{\varepsilon} \right) \quad (1.34)$$

Poiché i fotoni sono bosoni, la loro distribuzione all'equilibrio è quella di Bose-Einstein:

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left[\exp \left(\frac{h\nu}{kT} + \mu \right) - 1 \right]^{-1} d\nu \quad (1.35)$$

dove si è introdotto il potenziale chimico¹¹ μ , senza il quale l'ultima equazione corrisponderebbe alla distribuzione di Planck. Poiché i fotoni, nel processo di Comptonizzazione, vengono ripetutamente diffusi alle alte energie, in quella porzione dello spettro la sorgente presenterà un andamento riconducibile all'approssimazione della [eq. 1.35](#) per $h\nu/kT + \mu \gg 1$, ovvero $u(\nu) \propto \nu^3 e^{-h\nu/(kT) - \mu}$ (corrispondente all'approssimazione di Wien modificata dalla presenza di μ).

È opportuno sottolineare che la distribuzione di Bose-Einstein non descrive la variazione dell'energia dei fotoni durante la Comptonizzazione, ma soltanto lo spettro finale all'equilibrio termico. L'evoluzione di $u(\nu)$, espressa attraverso il parametro di occupazione $n = u(\nu)c^3/(8\pi h\nu^3)$, è invece ben descritta, per elettroni non relativistici, dalla seguente *equazione di Kompaneets*, dal nome del fisico sovietico che la pubblicò nel 1956:

$$\frac{\partial n}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[x^4 \left(n + n^2 + \frac{\partial n}{\partial x} \right) \right] \quad (1.36)$$

dove $x = h\nu/(kT)$ e y è il parametro Compton definito in precedenza; i tre addendi tra parentesi tonde sono dovuti rispettivamente alla diminuzione di energia dei fotoni nello scattering Compton, all'emissione stimolata e alla variazione di ν per effetto Doppler.

1.5. Scattering della polvere

La presenza di polvere in ambienti astronomici è ben evidenziata dalle interazioni che essa ha con la luce: nell'ottico, essa comporta una diminuzione dell'intensità della radiazione ricevuta ad esempio da stelle lontane, il cui spettro viene attenuato maggiormente nel blu in quanto la ridotta dimensione dei granelli di polvere ($< 1 \mu\text{m}$) implica effetti estremamente dipendenti dalla lunghezza d'onda. Questa attenuazione

¹¹In termodinamica, il potenziale chimico rappresenta la quantità di energia che deve essere fornita o sottratta a un sistema per inserirvi un nuovo sotto-sistema, mantenendo l'entropia S e il volume V costanti; a livello matematico, ciò si esprime attraverso una versione modificata del *primo principio della termodinamica* ($dE = TdS - PdV + \mu dN$). [2]

della luce, detta *estinzione*, avviene sia per *assorbimento*, con conseguente riemissione termica nel lontano infrarosso (la temperatura dei granelli è tipicamente di poche decine di gradi Kelvin), sia per *scattering*; quest'ultimo fenomeno, in particolare, può portare alla formazione di *nebulose a riflessione*, ovvero nubi di polvere che diffondono la luce emessa da stelle vicine.

L'intensità della radiazione diffusa che effettivamente giunge all'osservatore dipende fortemente dalla geometria dello scattering, pertanto, in pratica, la caratterizzazione del fenomeno è data dal valore medio di $\cos \theta$, con θ angolo di scattering. La distribuzione angolare di scattering $S(\theta)$ è data dalla sezione d'urto differenziale normalizzata all'unità:

$$S(\theta) = \frac{1}{\sigma_{sca}} \frac{d\sigma_{sca}}{d\Omega} \quad \Rightarrow \quad \int S(\theta) d\Omega = 1 \quad (1.37)$$

Questa distribuzione rappresenta, come del resto la sezione d'urto differenziale, una misura dell'anisotropia dello scattering; nel caso isotropo si avrebbe $S = 1/(4\pi)$. Nota $S(\theta)$, il valore medio di $\cos \theta$, detto anche *parametro di asimmetria* g , risulta essere:

$$g = \langle \cos \theta \rangle = \int S(\theta) \cos \theta d\Omega \quad (1.38)$$

Il parametro g viene utilizzato ad esempio nella formulazione di modelli per la distribuzione angolare¹² $S(\theta)$; esso, tuttavia, non è l'unico fattore che caratterizza il fenomeno: ricordando, infatti, che l'azione della polvere consiste anche nell'assorbimento, ci si chiede quale frazione dell'effetto complessivo di estinzione sia dovuta allo scattering; questo parametro, detto *albedo*, è definito come il rapporto tra la sezione d'urto di scattering σ_{sca} e quella totale $\sigma_{ext} = \sigma_{abs} + \sigma_{sca}$.

Oltre che in termini di σ , è conveniente analizzare lo scattering da parte della polvere anche attraverso il cosiddetto *efficiency factor* $Q_{sca} = \sigma_{sca}/(\pi a^2)$, dove πa^2 rappresenta la sezione d'urto geometrica dei granelli di polvere, supposti sferici di raggio a . Il calcolo di Q_{sca} deriva dalla teoria dello scattering di Mie, in cui un'onda elettromagnetica piana è diffusa da una sfera omogenea; nell'utile limite $a \ll \lambda$, il granello di polvere si può ritenere immerso in un campo elettrico E dipendente dal tempo, che induce un momento di dipolo $p = \alpha E$, dove α è la *polarizzabilità*;¹³ in questo limite, l'efficienza dello scattering risulta essere:

$$Q_{sca} = \frac{8\pi}{3} k^4 |\alpha|^2 \frac{2}{\pi a^2} \quad (1.39)$$

dove $k = 2\pi/\lambda$ è il numero d'onda. Poiché la polarizzabilità non dipende particolarmente dalla lunghezza d'onda se il materiale non è troppo assorbente, si può affermare che $Q_{sca} \propto \lambda^{-4}$; questa dipendenza, se confrontata con quella dell'assorbimento ($Q_{abs} \propto \lambda^{-1}$ se $a \ll \lambda$), dimostra che lo scattering, nell'ottico, è più efficiente alle alte frequenze, mentre per λ sufficientemente elevati domina l'assorbimento.

¹²Si cita, ad esempio, il modello di HEYNEY e GREENSTEIN (1941), che seppur avendo il vantaggio di dipendere soltanto da g (oltre che da θ), non riproduce in modo soddisfacente, sotto alcuni regimi, l'effettivo andamento angolare dello scattering. [7]

¹³Per una sfera omogenea, la polarizzabilità dipende dall'indice di rifrazione complesso m , che tiene conto anche dell'attenuazione subita dalla luce quando attraversa un mezzo. [10]

2 | Principali applicazioni astrofisiche

Lo scattering inverse Compton, come già accennato nel precedente capitolo, è un processo particolarmente rilevante in ambito astrofisico: osservando dell'emissione X in una radiosorgente, ad esempio, è possibile ipotizzare che sia dovuta a synchrotron self-Compton e calcolarne il campo magnetico attraverso la [eq. 1.25](#); l'azione dell'inverse Compton sui fotoni poco energetici della radiazione cosmica di fondo, inoltre, dà luogo all'effetto Sunyaev-Zel'dovich, molto utile in cosmologia in quanto permette di effettuare osservazioni ad alti redshift. Anche lo scattering Thomson, sebbene in modo molto più limitato, presenta delle applicazioni, ad esempio nell'osservazione degli spettri di nuclei galattici attivi.

2.1. Scattering Thomson negli AGN

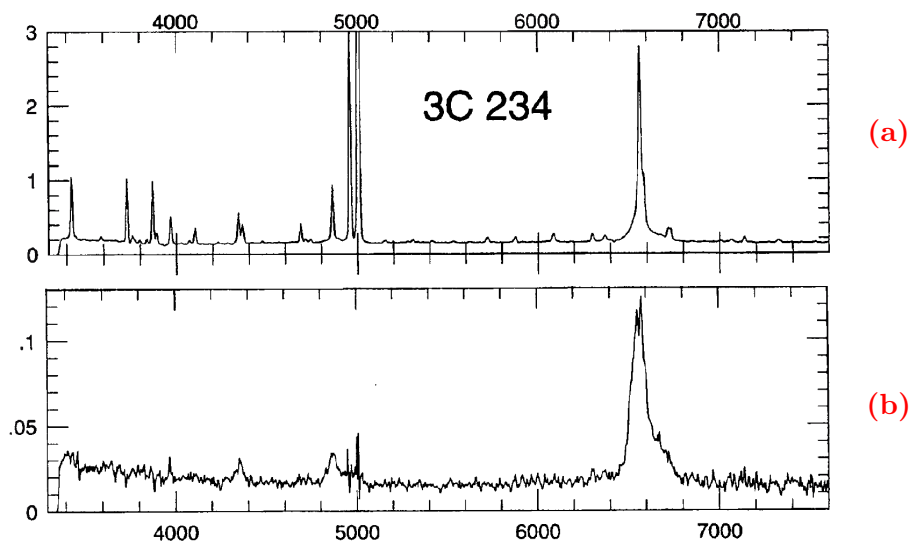


Fig. 2.1: *Flusso della radiogalassia 3C 234 (a) e flusso di radiazione polarizzata (b); si notino le righe di H_α e H_β , strette in (a) e larghe in (b).* (Fig. 3 da TRAN ET AL.)

Lo scattering Thomson risulta utile per l'osservazione di oggetti oscurati, lungo la linea di vista, da regioni di materiale otticamente spesso; nel caso dei nuclei galattici attivi (AGN), ad esempio, questa regione è una toroide di polvere che circonda il disco di accrescimento del buco nero centrale. Se la struttura è osservata *edge on*, ovvero “di taglio”, l'elevato spessore del toro impedisce l'osservazione di ciò che si trova all'interno; la presenza di elettroni liberi sopra o sotto l'AGN, tuttavia, può portare a fenomeni

di scattering Thomson, che non modificano l'energia dei fotoni e quindi preservano la distribuzione spettrale. Ricordando che questo fenomeno produce radiazione con un certo grado di polarizzazione, si può rimuovere dallo spettro la componente principale non polarizzata per osservare soltanto quella dovuta allo scattering (fig. 2.1); quest'ultima presenta delle righe di emissione più larghe, in quanto la radiazione diffusa proviene da regioni interne molto vicine al buco nero e quindi con dispersione di velocità più elevata rispetto a zone più esterne che non vengono oscurate dalla polvere. Lo spettro in fig. 2.1b, inoltre, risulta molto simile, eventualmente dopo opportune correzioni, a quello di un quasar; l'osservazione di somiglianze del genere ha portato a ritenere che radiogalassie e quasar siano sostanzialmente lo stesso oggetto, ma visto sotto angolazioni diverse.

2.2. Effetto Sunyaev-Zel'dovich

L'effetto *Sunyaev-Zel'dovich*, dal nome dei due fisici che lo introdussero alla fine degli anni '60, consiste in una modifica dello spettro della *radiazione cosmica di fondo* (CMB) dovuta allo scattering inverse Compton dei fotoni di CMB da parte di elettroni molto energetici, come ad esempio quelli presenti nell'*intracluster medium* (ICM) degli ammassi di galassie; la probabilità di interazione, in questo caso, è molto bassa ($\approx 1\%$), pertanto il guadagno di energia si traduce in una variazione estremamente piccola ($\lesssim 1 \text{ mK}$) della temperatura T_{CMB} della radiazione. L'effetto SZ si manifesta con una traslazione dello spettro di CMB a frequenze leggermente maggiori: in particolare, si ha una riduzione del flusso per ν minore di una certa *frequenza di crossover* $\nu_c \approx 217 \text{ GHz}$, mentre per $\nu \gtrsim \nu_c$ il flusso è maggiore di quello non modificato (fig. 2.2a).

L'azione complessiva dell'effetto Sunyaev-Zel'dovich può essere ricondotta a due fenomeni distinti: un effetto cosiddetto *termico* dovuto alla distribuzione di equilibrio termico degli elettroni dell'ICM, e uno *cinetico*, attribuibile all'effetto Doppler presente in caso di moti d'insieme dell'ammasso; come si può notare in fig. 2.2b, la modifica cinetica dello spettro è molto minore di quella dovuta all'effetto termico; quest'ultimo, in particolare, può essere espresso come una variazione relativa della temperatura di CMB nel seguente modo:

$$\frac{\Delta T_{SZ}}{T_{CMB}} = f(x)y \quad \text{con} \quad f(x) = x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \quad (2.1)$$

dove y è il parametro Compton, $x = h\nu/(kT_{CMB})$. Data la bassa probabilità di collisione, si ha $\tau_e \ll 1$ e pertanto la dipendenza di y da τ_e non è quadratica come nella **sezione 1.4**, ma lineare: $y = kT/(m_e c^2)\tau_e$; sono stati inoltre trascurati gli effetti relativistici che modificano $f(x)$.

Nella ricerca di ammassi di galassie attraverso l'effetto SZ è particolarmente rilevante l'integrazione di ΔT_{SZ} sull'angolo solido $d\Omega = dA/D_A^2$ sotteso dalla sorgente:

$$\int \Delta T_{SZ} d\Omega \propto \frac{N_e \langle T \rangle}{D_A^2} \propto \frac{M \langle T \rangle}{D_A^2} \quad (2.2)$$

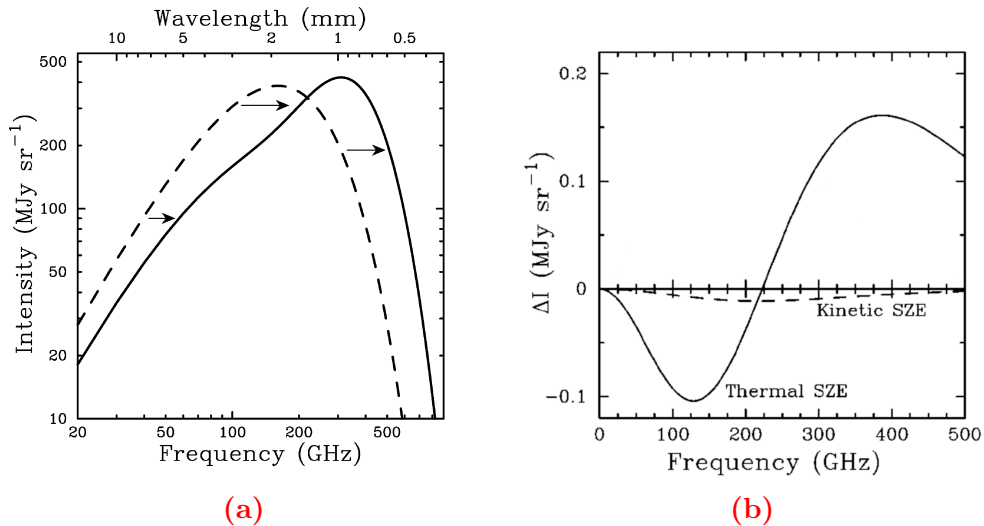


Fig. 2.2: In (a): spettro di CMB modificato dall'effetto SZ (continuo) a confronto con quello non modificato (tratteggiato); si noti l'intersezione tra le due curve, corrispondente alla frequenza di cross-over ν_c . In (b): deviazioni dallo spettro di CMB causate dall'effetto termico (continuo) e da quello cinetico (tratteggiato). (Fig. 1 e 2 da CARLSTROM ET AL.)

dove $\langle T \rangle$ è la temperatura media degli elettroni, M è la massa totale dell'ammasso (o dell'ICM) e D_A è la sua distanza angolare;¹ quest'ultima, espressa in funzione del redshift z , ha un andamento ragionevolmente piatto per z elevati; poiché la densità di materia nell'universo dipende da $(1+z)^3$, inoltre, un ammasso di una certa massa sarà più denso e conseguentemente più caldo ad elevati redshift. Ci si aspetta, dunque, che osservazioni relative all'effetto Sunyaev-Zel'dovich rilevino tutti gli ammassi di galassie al di sopra di una certa massa limite quasi indipendente dal redshift; per questo motivo, l'effetto SZ rappresenta un metodo efficiente per misurare la densità di ammassi in funzione di z , in modo da studiare la crescita delle strutture e vincolare la densità di materia dell'universo Ω_M .

Al fenomeno termico, come già accennato, si aggiunge l'effetto Doppler sui fotoni diffusi, dovuto ad un'eventuale componente lungo la linea di vista della velocità peculiare v_{pec} dell'ammasso. La modifica dello spettro, espressa come nel caso termico in termini di temperatura e in condizioni non relativistiche, è la seguente:

$$\frac{\Delta T_{SZ}}{T_{CMB}} = -\tau_e \frac{v_{pec,r}}{c} \quad (2.3)$$

dove $v_{pec,r}$ è misurata appunto lungo la linea di vista. L'effetto risultante è uno spostamento dello spettro di Planck a temperatura minore ($v_{pec,r} > 0$) o maggiore ($v_{pec,r} < 0$). Se si effettuano osservazioni a varie frequenze (in particolare nelle vicinanze di ν_c) con strumenti abbastanza sensibili da poter separare il contributo termico da quello cinetico, quest'ultimo può essere utilizzato per stimare i moti propri degli ammassi; questo metodo, tuttavia, non è esente da contaminazioni dovute ad altre sor-

¹Nel modello cosmologico Λ CDM l'universo è piatto e a geometria euclidea, quindi vale la relazione $D_A = l_T/\theta$, dove θ rappresenta le dimensioni angolari di un oggetto, l_T è la sua lunghezza trasversa e D_A è la distanza cosiddetta angolare dell'oggetto; il pedice A è necessario in quanto in cosmologia il concetto di distanza non è univocamente definito, ma dipende dall'osservabile a cui si riferisce. [6]

genti o ad altre fluttuazioni della temperatura di CMB, specie se si tenta di applicarlo ad un singolo ammasso.

Un'ulteriore applicazione dell'effetto SZ a livello cosmologico consiste nella determinazione della distanza D_A di un ammasso attraverso il confronto tra la sua emissione di *Bremsstrahlung termica*² in banda X e la misura del suo effetto SZ; sfruttando le diverse dipendenze dalla densità elettronica dei due fenomeni ($S_{br} \propto n_e^2$ per un gas di idrogeno), è possibile eliminare n_e e ricavare D_A . Applicando questo metodo a vari ammassi e confrontando la relazione distanza angolare-redshift osservata con quella teorica, è possibile ottenere una stima della costante di Hubble H_0 .

²La *Bremsstrahlung* (lett. “radiazione da frenamento”) è il fenomeno per cui una carica accelerata dal campo coulombiano di un'altra carica perde energia sotto forma di radiazione. [1], [12]

Bibliografia

Appunti, dispense e slides

- [1] D. DALLACASA. *Slides del corso di Processi di Radiazione*. A.A. 2019/2020.
- [2] L. FERRARI. *Elementi di Termodinamica Statistica*. Mar. 2020.
- [3] A. MANCINO. *Appunti del corso di Astrofisica Extragalattica*. A.A. 2014/2015.
- [4] F. RAVANINI. *Dispense di Istituzioni di Fisica Teorica - Meccanica Quantistica*. Ott. 2019.

Articoli

- [5] J. E. CARLSTROM, G. P. HOLDER e E. D. REESE. “Cosmology with the Sunyaev-Zel’dovich Effect”. In: *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* 40 (gen. 2002), pp. 643–680. DOI: 10.1146/annurev.astro.40.060401.093803. arXiv: astro-ph/0208192 [astro-ph].
- [6] J. J. CONDON e A. M. MATTHEWS. “ Λ CDM Cosmology for Astronomers”. In: *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 130.989 (lug. 2018), p. 073001. DOI: 10.1088/1538-3873/aac1b2. arXiv: 1804.10047 [astro-ph.CO].
- [7] B. T. DRAINE. “Scattering by Interstellar Dust Grains. I. Optical and Ultraviolet”. In: *The Astrophysical Journal* 598.2 (dic. 2003), pp. 1017–1025. DOI: 10.1086/379118. arXiv: astro-ph/0304060 [astro-ph].
- [8] H. D. TRAN, M. H. COHEN e R. W. GOODRICH. “Keck Spectropolarimetry of the Radio Galaxy 3C 234”. In: *Astronomical Journal* 110 (dic. 1995), p. 2597. DOI: 10.1086/117716.

Libri

- [9] S. BRAIBANT, G. GIACOMELLI e M. SPURIO. *Particelle e interazioni fondamentali*. 2^a ed. Springer, 2012.
- [10] M. A. DOPITA e R. S. SUTHERLAND. *Astrophysics of the Diffuse Universe*. 1^a ed. Springer, 2003.
- [11] M. S. LONGAIR. *High Energy Astrophysics*. 3^a ed. Cambridge University Press, 2011.
- [12] G. B. RYBICKI e A. P. LIGHTMAN. *Radiative processes in astrophysics*. 1^a ed. Wiley, 1985.