

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Astronomia

# FISICA DELL'ACCRESIMENTO

Presentata da:  
Bartalesi Tommaso

Relatore:  
Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa

Sessione II  
Anno Accademico 2019/2020

## Sommario

In fisica l'accrescimento é un fenomeno che porta ad aumentare (per questo motivo si fa riferimento al verbo "accrescere") la massa di un oggetto. Di questo fenomeno esistono due tipi: gravitazionale ed elettrostatico; il secondo ha importanza nelle atmosfere terrestre e planetarie, mentre il primo sará quello che presenteró in modo specifico e dettagliato. In astrofisica, esso ha vaste applicazioni, ma quelle che verranno studiate in questo elaborato sono: accrescimento intorno a buchi neri supermassicci e tra le Binarie X.

# Indice

1	Introduzione	4
2	Evidenze empiriche dell'accrescimento: i QUASAR	5
3	Luminositá di Eddington	7
4	Accrescimento di Bondi	10
5	Binarie X	12
6	Trattazioni piú sofisticate	15
7	Appendice	18
7.1	Problema dei tre corpi circolare ristretto: Integrale di Jacobi . . . . .	18

# 1 Introduzione

La fisica dell'accrescimento studia l'aumento di massa, che si verifica nelle vicinanze di un corpo che esercita una grande attrazione gravitazionale, e, in astrofisica, essa ha vaste applicazioni. Infatti, inizialmente gli studi, che riguardavano questo ambito, erano relegati alla descrizione dei processi di formazione di stelle e pianeti a partire da nebulose solari (o piú generalmente stellari) o protoplanetarie. Il processo di formazione di questi oggetti avviene attraverso il cosiddetto **disco di accrescimento**, la trattazione fisica del quale verrà soltanto accennata nella sezione 6. In questi contesti, gli studi hanno mostrato che un ruolo chiave viene svolto dalla viscosità e dal trasporto di momento angolare (concetti spiegati nella sezione 6).

Presenterò una carrellata di applicazioni seguendo un passaggio dalla scale piú piccole a quelle via via piú grandi: per masse dell'ordine di poche masse solari e lunghezze di poche unità astronomiche é presente una serie di fenomeni dell'Astrofisica delle Alte energie, che si presentano quando avviene dell'accrescimento intorno ad oggetti compatti (come nane bianche e stelle di neutroni) e buchi neri di massa stellare. Di solito, questi fenomeni sono presenti in sistemi binari, dove il materiale, proveniente da una stella di sequenza principale o già nella fase di gigante, viene catturato da un oggetto molto piú denso. Questo processo verrà analizzato nella sezione 5. Invece, nella scala dei nuclei galattici attivi (AGNs), che sono per massa dell'ordine di milioni o, addirittura, miliardi di masse solari e lunghezze di  $1pc$  o meno, l'accrescimento diventa importante per le regioni limitrofe ai buchi neri supermassicci (SMBHs).

All'interno di questo elaborato studierò in modo piú approfondito quest'ultimo caso e per iniziare metterò in luce quali siano state le evidenze empiriche ed osservative, che hanno portato gli astrofisici a considerare l'accrescimento gravitazionale come il processo dominante negli AGNs, all'interno della sezione 2. Un'importante domanda riguarda l'evoluzione a lungo termine dei SMBHs (approfondita nella sezione 3): probabilmente essi si sono originati da buchi neri di massa molto piú piccola, per cui gli astrofisici stanno cercando di capire come sia cresciuto fino a tali dimensioni, osservate nelle epoche piú recenti dell'Universo. In verità, gli studiosi stanno considerando anche la possibilità di accrescimento intorno a buchi neri di massa intermedia ( $10^3 - 10^6 M_0$ , con  $M_0$  massa del Sole), ma l'evidenza della loro esistenza (forse al centro di alcuni ammassi globulari) é ancora in discussione.

A livello delle galassie, gli studi recenti sulle riga a  $21cm$  dell'idrogeno neutro hanno evidenziato la presenza di un disco gassoso, che circonda alcune galassie ellittiche e che può essere interpretato come il risultato dell'accrescimento di mezzo intergalattico (secondo quanto affermato nel libro [1] in bibliografia).

In tutti gli esempi appena citati, ha una grande rilevanza l'autogravitá del disco di accrescimento che, però, non verrà minimamente considerata in questo elaborato (trattata, invece, in [1]), poiché studieremo l'accrescimento considerando unicamente il potenziale gravitazionale dell'oggetto compatto centrale (come avviene nelle sezioni 3 e 4). Infatti, cercherò di mettere in luce qualche esempio di applicazione astrofisica della fisica dell'accrescimento senza addentrarmi troppo nei particolari, ma cercando soltanto di illustrare in casi molto semplici i processi, che portano all'accrescimento. Ma, in ogni situazione cercherò di fare emergere in modo chiaro quali siano le approssimazioni, che ho fatto, ma soprattutto quali siano quelle corrette e quelle che semplificano enormemente il mio modello, anche se sono costretto a tralasciare dettagli fisici non trascurabili.

## 2 Evidenze empiriche dell'accrescimento: i QUASAR

É necessario, prima di tutto ricordare, che, dagli studi sulla dinamica delle stelle al centro delle galassie, gli astronomi hanno notato la presenza di un SMBH al centro di ogni galassia (sia ellittica che spirale), che ha massa tra  $10^6 M_0$  e  $10^9 M_0$ .

A cavallo tra gli anni '50 e '60 del secolo scorso gli astronomi hanno osservato nel cielo oggetti, i cui spettri in emissione non rientravano in alcuna classificazione perché presentavano le seguenti caratteristiche:

- grande e caotica variabilità, cioè la possibilità di cambiare in pochissimi giorni la forma spettrale in modo irregolare;
- spettri fortemente redshiftati, tali che gli oggetti si trovano a grande distanza ( $z \simeq 0.1$ );
- coincidenza degli stessi con la posizione di alcune radiogalassie (da qui il nome QUASi stellar radio source, ossia QUASAR);
- bassa magnitudine apparente ( $mag \simeq 14$ ) per oggetti, che si presentano ad una tale distanza.

Proprio quest'ultimo punto é stato quello che piú ha incuriosito gli astronomi, cosí Lynden-Bell pensó che questi oggetti misteriosi avrebbero dovuto avere delle dimensioni molto grandi per avere una luminosità di  $10^{44} \text{erg/s}$  (dell'ordine di quella di una galassia) e ritenne possibile trovare un limite superiore alle dimensioni dell'oggetto usando il tempo di variabilità della luminosità: un oggetto fisico non potrà variare piú velocemente del tempo impiegato dalla velocità caratteristica del sistema (solitamente si prende la velocità con cui si muovono le perturbazioni in un fluido) ad attraversare completamente l'oggetto. Perciò, il limite superiore per la grandezza della sorgente sará dato dalla velocità caratteristica per il tempo in cui la sua luminosità varia. Il risultato é che questi QUASARs hanno dimensioni dell'ordine del Sistema Solare e, dunque, saranno enormemente piú grandi di una stella, ma mostruosamente piú piccoli di una galassia.

Visto che la causa della loro grande luminosità non puó essere la loro grandezza, l'unica spiegazione plausibile era che fosse in moto al loro interno il processo piú efficiente per trasformare massa in energia. A livello piú concreto quello piú efficiente é la **reazione p-p** (responsabile della nucleosintesi stellare), che aveva un'efficienza dell'ordine di  $10^{-3}$ , cioè, se ho  $1g$  di idrogeno (H),  $10^{-3}g$  vengono liberati sotto forma di energia. Lynden-Bell calcoló la massa necessaria per avere  $L \simeq 10^{44} \text{erg/s}$  ed ottenne che fosse necessario "impacchettare" una massa corrispondente a quella di un'intera galassia ( $10^{11} M_0$ ) in una regione pari al Sistema Solare. Questo é impossibile (ossia, non esiste alcun processo fisico conosciuto che crei un oggetto simile) e, nel caso fosse possibile, genererebbe un buco nero (BH), che non permetterebbe ai fotoni di fuggire dal suo orizzonte degli eventi e, dunque, non sarebbe possibile osservare alcuna radiazione. Una volta appurato che un bruciamento nucleare non puó rilasciare questa energia, l'unico processo conosciuto in grado di spiegare questa grande luminosità osservata é l'**accrescimento gravitazionale** intorno ad un oggetto molto denso e compatto (dimensioni relativamente piccole), che attrarrá il

materiale limitrofo verso se stesso, che emetterá un gran numero di fotoni.

I SMBHs attraggono *solo* il materiale che si trova nelle zone limitrofe, perché la loro massa é molto inferiore a quella della galassia ( $10^9 M_0 \ll 10^{12} M_0$ ); oggi i QUASARs si sono tutti spenti perché i SMBHs hanno fagocitato tutto il materiale nelle zone circostanti e, considerando che le galassie sono un sistema non collisionale, non esiste alcun fenomeno dinamico che permette di ripopolare di stelle la loro zona centrale. In realtà, il gas emesso per vento stellare può popolare la loro parte centrale, infatti i SMBHs non sono del tutto spenti, ma l'età d'oro dei QUASARs é osservabile a redshift  $z \simeq 2$ .

Posso pensare che il fluido in caduta si stabilizzi seguendo delle orbite circolari (una semplice spiegazione di ciò é presente nella sezione 6), ma si può dimostrare con la *teoria epicyclica* che l'ultima orbita circolare stabile (ISCO) sia per  $3R_S$  (con  $R_S$  definito Raggio di Schwarzschild) e, dunque, una volta raggiunto la distanza dal SMBH  $r < R_S$ , esso può soltanto cadere nel SMBH (questa previsione é confermata anche dalla Relatività Generale). Il lettore può domandarsi lecitamente perché una particella di fluido su un'orbita circolare stabile dovrebbe cadere verso il centro: infatti, ho trascurato completamente gli effetti di attrito, che dissipano energia cinetica cosí che l'elemento infinitesimo di fluido tende, quindi, a cadere verso un "livello energetico" piú basso (una trattazione piú specifica di come agisca la viscosità é presente nella sezione 6). Visto che un'orbita circolare é un'orbita di equilibrio, essa rispetta il **teorema del viriale**: considero che la viscosità agisca *soltanto in un primo istante* diminuendo la sua energia cinetica, cosí esso raggiungerá  $r < R_S$ . A questo punto, ipotizzo che esso abbia energia cinetica sufficiente per stabilirsi in un moto circolare intorno al SMBH, ma tra  $3R_S$  e  $R_S$  l'elemento infinitesimo di fluido può solo cadere verso l'oggetto centrale (e non stabilizzarsi in un'orbita circolare, benché possieda velocità sufficiente), cosí da raggiungere  $r < R_S$ , da cui neanche i fotoni potranno piú uscire.

A questo punto, posso andare a calcolare la differenza di energia su unità di massa dell'elemento di fluido che viene emessa durante la caduta. Infatti, l'energia su unità di massa é  $E' = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM_{BH}}{3R_S}$ , mentre la forza centripeta, coincidente con quella gravitazionale, per unità di massa  $\frac{v^2}{3R_S} = \frac{GM_{BH}}{(3R_S)^2}$ , dove  $M_{BH}$  rappresenta la massa del SMBH.

Allora, ricavando  $v^2$  dalla seconda e sostituendolo nella prima, ottengo

$$E' = -\frac{GM_{BH}}{3R_S} + \frac{1}{2} \frac{GM_{BH}}{3R_S} = -\frac{1}{2} \frac{GM_{BH}}{3R_S} \quad (1)$$

L'eq.1 rappresenta l'energia totale conservata nell'orbita circolare ad una data distanza  $r$  dal SMBH (in questo caso,  $r = R_S$ ), che é sempre negativa, poiché il sistema é gravitazionalmente legato.

La perdita di energia cinetica per viscosità fa sí che, se l'elemento torni all'equilibrio (ossia, raggiunga un'energia, maggiormente negativa, corrispondente ad un'altra orbita circolare), quella totale sia minore, mentre aumenti sia quella cinetica sia, in valore assoluto, quella potenziale gravitazionale ( $U$ ), ovvero il **teorema del viriale** e la **conservazione dell'energia** implicano che, se ho una perdita di energia cinetica  $T$  ( $\rightarrow \Delta E' < 0$ ),  $\Delta T = -\Delta E' (> 0)$  e  $\Delta U = 2\Delta E' (< 0)$ , *solo se* torno all'equilibrio. (Le relazioni appena usate sono state derivate a lezione e sono presenti in [2] in bibliografia.) Allora, l'energia, che viene rilasciata, rappresenta la metà di quella gravitazionale ( $\Delta E' = \frac{1}{2}\Delta U \rightarrow \Delta E'_{emessa} = -\frac{1}{2}\Delta U > 0$ ).

Ora, vado a calcolare l'energia, che viene emessa tra  $3R_S$  e  $1R_S$ , su unità di massa ( $\Delta E'_{\text{emessa}} := -\Delta E'$ ):

$$\Delta E'_{\text{emessa}} = -\frac{1}{2} \frac{GM_{\text{BH}}}{3R_S} + \frac{1}{2} \frac{GM_{\text{BH}}}{R_S} = \frac{GM_{\text{BH}}}{3R_S} \quad (2)$$

Il collasso del disco di accrescimento rappresenta un processo continuo, che é il risultato dell'interazione tra viscosità ed equipartizione dell'energia secondo quanto suddetto. É cruciale notare l'ipotesi di conservazione dell'energia, per il calcolo appena effettuato, nonostante la presenza della viscosità (che é il motore, che permette di innescare il processo) che fa sí che questa assunzione non sia rigorosamente rispettata.

L'energia emessa per un elemento infinitesimo di fluido di massa  $m$  é, usando la definizione di Raggio di Schwarzschild  $R_S = \frac{2GM_{\text{BH}}}{c^2}$  dove  $c$  é la velocità della luce nel vuoto,

$$\Delta E_{\text{emessa}} = \frac{GM_{\text{BH}}m}{3R_S} = \frac{1}{6}mc^2 \simeq 0.2mc^2$$

Allora, l'elemento di fluido di massa  $m$ , cadendo da  $3R_S$  a  $1R_S$ , emette circa il **20%** della propria energia a riposo: questo processo é centinaia di volte piú efficiente della reazione p-p! Questa stima rappresenta un minimo dell'energia emessa perché anche prima di  $3R_S$  si assiste alla conservazione dell'energia e, dunque, alla sua emissione sottoforma di fotoni.

Questo modello può essere applicato solo a BHs non ruotanti, perché altrimenti é necessario considerare effetti di trascinamento dello spazio-tempo che aumentano la quantità di energia emessa. La formazione di un'orbita stabile é possibile solo se considero il momento angolare, che impone alla materia di ruotare in un disco intorno al SMBH, ma successivamente sarà necessario ipotizzare la simmetria sferica, ossia nullo il momento angolare del fluido in caduta.

É importante notare che la luce non sarà emessa dal SMBH, ma dalla materia in caduta. Quindi, questi fotoni andranno a scontrarsi con quella, che sta cadendo e che si trova ad una distanza maggiore dal SMBH, esercitando così una pressione che tenderá ad allontanare il fluido in caduta. Quindi, non può giungervi una quantità arbitraria di materia, poiché esiste un limite massimo, che calcoleró nella sezione successiva.

### 3 Luminosità di Eddington

La luminosità di Eddington ( $L_{\text{Edd}}$ ) é un valore teorico al di sopra del quale la pressione di radiazione, esercitata dai fotoni che sfuggono dal disco di accrescimento del SMBH, é maggiore della sua attrazione gravitazionale. La pressione di radiazione é, di fatto, uno scontro tra un'onda elettromagnetica e una particella carica, che viene spiegato dall'elettromagnetismo classico nel seguente modo:

- l'onda elettromagnetica vede l'elettrone come un disco piccolissimo, che ha una superficie, detta **sezione d'urto Thomson** ( $\sigma_T$ ), pari a circa  $6,65 \times 10^{-25} \text{cm}^2$  (valida *solo* per  $h\nu \ll m_e c^2$ );
- le dimensioni della sezione d'urto Thomson non dipendono dalla frequenza, a cui viaggia l'onda;

- l'onda elettromagnetica vede i protoni come un disco molto piú piccolo di quello degli elettroni, di sezione d'urto pari a  $\frac{\sigma_T}{m_p^2}$  con  $m_p$  massa del protone.

Il lettore potrebbe erroneamente ipotizzare che, dato che la sezione d'urto degli elettroni é molto maggiore di quella dei protoni, i primi verranno allontanati maggiormente dal BH rispetto ai secondi e, quindi, avrei la formazione di BH carichi positivamente, ma devo ricordare che in un gas, anche ionizzato, la forza elettromagnetica domina sempre su quella gravitazionale (anche in condizioni estreme come queste). Allora, non può esistere un BH elettricamente carico, ma la sua carica complessiva é nulla, come la materia che lo ha formato e che vi cade dentro.

Adesso, procedo con il calcolo della  $L_{\text{Edd}}$  sotto due ipotesi estremamente stringenti:

1. simmetria sferica (considero nullo il momento angolare della materia in caduta);
2. gas otticamente sottile (il gas in caduta é cosí rarefatto che assorbe solo una parte trascurabile di fotoni).

L'accrescimento sul SMBH produce una luminosità spettrale (ossia, per unità di frequenza)  $L(\nu) = f(\nu)L$  dove  $L$  é la luminosità bolometrica e  $f(\nu)$  la "forma spettrale", cioè la Spectral Energy Distribution (SED). Su un elemento infinitesimo di un guscio sferico ad una data distanza  $r$  dal SMBH, la quantità di energia che attraversa questa porzione di superficie nell'unità di tempo e di frequenza é  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2}$ .

Ricordo che l'energia di un fotone é  $h\nu$ , allora il numero di fotoni che attraversano l'unità di superficie del guscio sferico a distanza  $r$  nell'unità di tempo e di frequenza é  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 h\nu}$ .

Dalla relatività ristretta  $E = h\nu = pc \rightarrow p = \frac{h\nu}{c}$  che rappresenta l'impulso trasportato da un fotone di frequenza  $\nu$ ; l'impulso trasportato da un'onda elettromagnetica attraverso l'unità di superficie nell'unità di tempo e di frequenza é  $\frac{L(\nu)}{4\pi r^2 c}$ .

Quello che ho trovato rappresenta un impulso nell'unità di tempo, ossia una variazione di impulso rispetto al tempo e, dunque, una forza prodotta dai fotoni. Ma di questa forza quanta effettivamente viene sentita dai protoni ed elettroni (considerando il gas fatto unicamente di idrogeno)?

Per rispondere a questa domanda é necessario calcolare quanta superficie sul guscio sferico a distanza  $r$  dal SMBH sia effettivamente occupata dagli elettroni (considero, infatti, trascurabile la superficie occupata dai protoni perché la sezione d'urto degli elettroni é molto piú grande di quella dei protoni). In verità, la  $\sigma_T$  é valida solo per  $h\nu \ll m_e c^2$  (con  $m_e$  massa dell'elettrone), mentre per  $h\nu \sim m_e c^2$  ho bisogno della correzione data dalla Quantum Electrodynamics (QED) che introduce la **sezione d'urto Klein-Nishina**, uguale a

$$\sigma_{\text{KN}}(\nu) = \sigma_T \times g\left(\frac{\nu}{\frac{m_e c^2}{h}}\right)$$

con  $g(\nu)$  una funzione della frequenza dei fotoni, dove  $\frac{m_e c^2}{h}$  rappresenta quella di un fotone che ha la stessa energia a riposo dell'elettrone.

Allora, l'impulso trasferito nell'unità di tempo alla quantità di gas che si trova sul guscio sferico alla distanza  $r$  é

$$\frac{L(\nu)\sigma_{\text{KN}}(\nu)n_e(r)}{4\pi r^2 c} = \frac{L\sigma_T n_e(r)f(\nu)g(\nu)}{4\pi r^2 c}$$



con  $n_e$  densit  numerica (volumetrica) degli elettroni. Integrando su tutte le frequenze, ottengo l'impulso totale nell'unit  di tempo, ovvero la forza con cui la radiazione spinge il gas radialmente verso r maggiori, su unit  di volume:

$$\int_0^\infty \frac{L(\nu)\sigma_{\text{KN}}(\nu)n_e(r)d\nu}{4\pi r^2 c} = \frac{L\sigma_{\text{T}}n_e(r)}{4\pi r^2 c} \int_0^\infty f(\nu)g(\nu)d\nu$$

Definisco l'ultimo integrale uguale ad una costante  $K$ , che dipende dalla forma spettrale e da  $\sigma_{\text{KN}}$ ; considero come uniche particelle a dare contributo in massa al fluido i protoni (sempre nell'ipotesi di gas fatto unicamente da idrogeno, ovvero  $n_e = n_p$ ). Allora, la forza per unit  di volume, che il gas sente alla distanza  $r$  dal SMBH,  

$$\frac{F_{\text{tot}}}{Vol} = -\frac{GM_{\text{BH}}\rho_p(r)}{r^2} + \frac{KL\sigma_{\text{T}}n_e(r)}{4\pi r^2 c} = \frac{GM_{\text{BH}}\rho_p(r)}{r^2} \left( \frac{KL\sigma_{\text{T}}}{4\pi cGM_{\text{BH}}m_p} - 1 \right) \quad (3)$$

La  $L_{\text{Edd}}$    definita come la luminosit  necessaria affinche la pressione di radiazione dei fotoni equilibri la forza di gravit  del SMBH, cio 

$$\frac{F_{\text{tot}}}{Vol} = 0 \rightarrow \mathbf{L}_{\text{Edd}} := \frac{4\pi cGM_{\text{BH}}m_p}{K\sigma_{\text{T}}} \quad (4)$$

Infatti, se la luminosit  supera questo limite, il gas tende ad allontanarsi dal SMBH, mentre se  $L < L_{\text{Edd}}$  la gravit  domina e il materiale cade verso il buco nero centrale. La  $L_{\text{Edd}}$  non   un valore che viene effettivamente emesso, ma   un valore teorico, una caratteristica fondamentale della fisica, diverso per ogni oggetto astrofisico.

  fondamentale notare che la  $L_{\text{Edd}}$  (nell'espressione 4) non dipende dalla distanza  $r$  dal SMBH: infatti, la pressione di radiazione abbassa il campo di gravit  della stessa quantit  a qualunque  $r$ . Ci    dovuto al fatto che sia la forza generata dalla pressione di radiazione che la gravit  dipendono da  $\frac{1}{r^2}$  e che ho ipotizzato gas otticamente sottile. Quindi, se cade la seconda ipotesi, il SMBH pu  accrescere pi  di quanto permesso dalla  $L_{\text{Edd}}$ , perch  la pressione di radiazione agisce solo nelle zone molto vicine all'oggetto, ma questa grande quantit  di gas in caduta fa aumentare molto la luminosit  creando un "vento" di fotoni tale da allontanare il gas dal SMBH.   importante specificare che nel momento, in cui avviene l'inversione del campo di forze ( $L > L_{\text{Edd}}$ ), la direzione della velocit  di caduta del fluido non si invertir  istantaneamente, ma sar  necessario attendere del tempo affinche l'impulso trasferito al gas dai fotoni lo decelerino nella caduta e, solo una volta che ha raggiunto velocit  nulla, lo spinga ad allontanarsi dal SMBH. Infatti, se  $L = L_{\text{Edd}}$ , la materia   sempre in caduta, ma si muove di moto rettilineo uniforme.

Posso osservare che  $L_{\text{Edd}}$  cresce linearmente con la massa del BH, quindi quelli pi  grandi possono "inghiottire" molta pi  materia di quelli piccoli, ed   inversamente proporzionale alla sezione d'urto, ossia maggiore superficie occupa un elettrone e minore sar  la loro caduta al centro.

La prima ipotesi (problema a simmetria sferica) potrebbe non essere rispettata rigorosamente negli oggetti reali, perch  nella maggioranza dei casi il gas in caduta possiede momento angolare cos  che inizia a ruotare in un disco di accrescimento. In questo caso, i fotoni, emessi dalla materia in caduta nel BH, non vengono pi  assorbiti dal disco di accrescimento, ma danno vita a fenomeni di **Back-scattering**, mentre si allontanano verso l'infinito. Allora, questi fotoni, urtando la materia, vengono assorbiti, cos  che essa, riscaldandosi, si gonfia fino ad assumere una forma molto

simile ad una sfera. A questo punto, il meccanismo della  $L_{\text{Edd}}$  si mette di nuovo in moto: anche se cadono le due ipotesi (come ho anche già visto precedentemente) ed esistono, quindi, circostanze nelle quali un oggetto può essere **Super-Eddington**, sul lungo periodo esso non potrà accrescere più di quanto sia permesso da  $L_{\text{Edd}}$ .

Una questione, che era rimasta sospesa dalla trattazione nella sezione 2, sugli spettri dei QUASARs era la sua grande variabilità: ciò può essere spiegato unicamente dalla continua interazione tra pressione di radiazione e forza di gravità; infatti, una volta che si è raggiunta la  $L_{\text{Edd}}$ , diminuisce la quantità di gas, che cade nel SMBH, così che la luminosità diminuisce e la forza di gravità di nuovo domina. A questo punto, è come se il sistema fisico fosse tornato al punto di partenza e si riinnesca il meccanismo che permette di ottenere la  $L_{\text{Edd}}$ .

Come ho già affermato nella sezione 1, lo studio dei SMBHs ha posto dei quesiti sul processo di formazione degli stessi: l'unico modo per formare un BH sono le esplosioni di **supernovae di tipo II**, quindi è plausibile che all'inizio dell'Universo l'evoluzione stellare abbia creato stelle di massa  $50 - 60M_0$ . Allora, il lettore può chiedersi come sia possibile che un BH di  $60M_0$  (considero trascurabile la perdita di massa durante l'evoluzione della stella) pesi  $10^6M_0$  se più è piccolo meno accresce? Mi metto nella condizione migliore possibile: suppongo che ad ogni istante la materia cada nel BH sempre quanto la  $L_{\text{Edd}}$  permette. Indico con  $\epsilon$  l'efficienza del processo di accrescimento; la massa in funzione del tempo sarà descritta dal seguente andamento esponenziale:

$$L = \epsilon \frac{dM}{dt} c^2 = L_{\text{Edd}} \propto M \rightarrow M(t) \propto M(0)e^{t/\tau}$$

dove  $\tau$  rappresenta un tempo caratteristico, detto *tempo di Salpeter* ( $\simeq 2 \times 10^8 \text{yr}$ ). Esistono delle evidenze osservative dell'esistenza di BH di massa  $10^9M_0$  a  $z \simeq 5$ , ma ciò avrebbe una spiegazione se i BH avessero avuto una massa di  $10^3M_0$ , e non di  $60M_0$ , all'inizio dell'Universo. Allora, lo studio di questi oggetti permette di capire qualcosa di più sui processi di formazione delle galassie e dei SMBHs ospiti e di come quest'ultimi influenzino l'evoluzione della stessa galassia.

## 4 Accrescimento di Bondi

L'Accrescimento di Bondi è il modello più semplice dell'accrescimento gravitazionale: considero un gas, privo di discontinuità, di densità e temperatura costante  $\rho_0$  e  $T_0$ , all'interno di cui inserisco un corpo a simmetria sferica di massa  $M_{\text{BH}}$  (che, grazie ai *teoremi di Newton* viene considerata tutta concentrata nel suo centro di massa, che diviene l'origine del mio sistema di riferimento). Il gas, che si troverà a distanza infinita (cioè, a distanza tale che il campo gravitazionale esercitato da  $M_{\text{BH}}$  può essere considerato nullo), possiederà pressione e densità del gas iniziale, rispettivamente uguali a  $p_\infty$  e  $\rho_\infty$ .

Considero le seguenti ipotesi:

- il gas abbia solo componente radiale della velocità  $u = u(r) = u \cdot \mathbf{e}_r$ , ossia l'unica velocità che possiede il fluido sia quella di caduta verso il centro, quindi il problema è unicamente a simmetria sferica (cioè, ha momento angolare nullo);
- il problema sia stazionario, quindi  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , massa in caduta è la stessa ad ogni tempo, e  $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0$ , le linee di corrente non cambiano nel tempo;

- il fluido in caduta sia perfetto (ovvero, trascuro gli effetti causati dalla viscosità) e le uniche trasformazioni permesse siano le **politropiche**, dove l'equazione di stato del fluido é  $p \propto \rho^\gamma$ , in cui  $\gamma$  rappresenta il rapporto tra i calori specifici a pressione costante ed a volume costante;
- l'autogravitá del gas sia trascurabile, infatti considero che l'unico campo gravitazionale presente sia quello generato da  $M_{\text{BH}}$ ;
- l'effetto della pressione di radiazione dovuto allo scattering tra fotoni ed elettroni sia nullo;
- assenza di campo magnetico e di tutti gli altri fenomeni legati all'elettromagnetismo, che rende la soluzione puramente idrodinamica.

Sotto tali condizioni le equazioni, che descrivono il moto dell'elemento infinitesimo di fluido in esame sono l'*equazione di continuitá della massa* (5) e l'*equazione del moto di Eulero* (6):

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (5)$$

$$\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p(\rho) - \rho \nabla \Phi \quad (6)$$

con potenziale gravitazionale  $\Phi = -\frac{GM}{r}$  e equazione di stato politropica. Le due incognite saranno  $\rho$  e  $\mathbf{u}$  (quindi, esistono soluzioni analitiche).

Da (5) noto che  $\rho \mathbf{u} = \text{cost}$  su un guscio sferico centrato in  $M_{\text{BH}}$ , allora a qualunque distanza dall'oggetto centrale la relativa superficie sferica sará attraversata dalla stessa quantitá di fluido. Un fluido non viscoso stazionario ed irrotazionale rispetta l'**equazione di Bernoulli** radiale:

$$\frac{u^2}{2} + h(r) + \Phi(r) = \text{cost}$$

Definisco l'entalpia per trasformazioni adiabatiche (le politropiche ne sono un caso particolare) come

$$h(r) - h(\infty) = \int_{\rho_\infty}^{\rho(r)} \frac{dp(\rho)}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} \quad (7)$$

Ricordando le condizioni del fluido all'infinito e che  $\Phi(r = \infty) = 0$ , posso riscrivere la (6) come l'equazione di Bernoulli tra  $r = \infty$  e un  $r$  generico:

$$\frac{u^2(r)}{2} + (h(r) - h_\infty) - \frac{GM}{r} = 0 \quad (8)$$

(Queste relazioni vengono derivate e spiegate in [3] e [4] in bibliografia.)

Prima di procedere al calcolo, definisco due quantitá molto importanti:

1. il **Raggio di Bondi** (o **sonico**) come  $\mathbf{r}_B := \frac{GM}{c_s(\infty)}$  (dove  $c_s(\infty) = \sqrt{\gamma \frac{p_\infty}{\rho_\infty}}$ , dimostrata in [3], rappresenta la velocitá delle perturbazioni in un fluido a distanza infinita) e rappresenta la distanza dall'oggetto centrale alla quale il gas cade esattamente alla velocitá del suono;
2. il **numero di Mach** come  $M := \frac{\mathbf{u}}{c_s}$  che assume i seguenti valori:
  - $M < 1$ , se sono in *regime subsonico*, cioé la velocitá di movimento del fluido é minore di quella con cui si propagano le perturbazioni;
  - $M > 1$ , se sono in *regime supersonico*, ovvero la velocitá del fluido é maggiore di quella di propagazione delle perturbazioni.

Per trovare le soluzioni accettabili del problema é conveniente adimensionalizzare le variabili (per esempio,  $x := \frac{r}{r_B}$ ), ma in questo elaborato tralascio i calcoli algebrici (che vengono svolti in [5]). Invece, mi dedico all'interpretazione fisica dell'Accrescimento di Bondi: il gas parte in quiete all'infinito e viene attirato dall'oggetto centrale (sempre di piú man mano che la distanza dal centro diminuisce). Una parte del lavoro, compiuto dal campo gravitazionale di  $M_{BH}$ , aumenta l'energia cinetica del gas, mentre l'altra si trasforma in entalpia finché  $M < 1$ . Questa é una semplice applicazione dell'equazione di Bernoulli (8), perché la diminuzione del potenziale gravitazionale (ossia, diventa sempre piú negativo) corrisponde ad un aumento dell'energia cinetica del fluido e dell'entalpia (se mi metto nell'ipotesi di *fluido incompressibile* ho un semplice aumento della pressione). Ma, una volta che  $M > 1$  (per  $x \simeq 1$ ), il gas diventa fortemente comprimibile e, quindi, l'entalpia viene rilasciata sottoforma di energia cinetica, cosí che la crescita della velocità non si arresterá mai. Il risultato sará quello della caduta nel SMBH, ma con un andamento diverso rispetto a quello di un oggetto in caduta libera, poiché il rilascio maggiore di entalpia avviene per  $M \sim 1$ .

Se studio la soluzione muovendomi nel verso opposto, cioè dalla superficie dell'oggetto verso l'esterno, essa risulta accettabile perché non esiste alcuna motivazione fisica per la quale non posso cambiare il verso con cui si percorre questo andamento. Questa é chiamata **soluzione di Parker** e rappresenta fenomeni di vento stellare; questa materia espulsa puó essere catturata da un'altra stella, che si trova legata in un sistema binario, e, quindi, accrescerne la massa. Nella sezione 5 presento ciò che avviene tra stelle legate, nelle quali la loro mutua interazione produce accrescimento.

## 5 Binarie X

Un altro caso molto importante di accrescimento gravitazionale é quello che avviene in stelle binarie di masse e dimensioni molto diverse l'una dall'altra: considero una di piccole dimensioni e di grande massa (alta densità volumetrica in massa), come una nana bianca o una stella di neutroni, e l'altra di grandi dimensioni e di piccola massa, come una stella di sequenza principale o una gigante. In questa situazione, esistono due diversi processi, che generano accrescimento:

- la stella meno densa ha dei fenomeni di vento stellare (spiegato nella sezione 4 dedicata all'Accrescimento di Parker), i cui getti si allontanano a tal punto dalla superficie della stella iniziale da essere catturati dalla grande attrazione gravitazionale della compagna (di solito, in un'atmosfera, che si trova alla *temperatura viriale*, ossia quella di "equilibrio" con la stella sottostante, la velocità, con cui si muovono le perturbazioni in un fluido, é molto vicina a quella necessaria a fuggire dal sistema. Quindi, anche una piccola perturbazione nell'atmosfera stellare puó generare un fenomeno di vento stellare, come evidenziato in [6]);
- l'enorme campo mareale della stella molto densa "strappa" l'atmosfera stellare o gli strati esterni della compagna creando due lobi di materia (chiamati **lobo di Roche**), ognuno dei quali circonda una delle due binarie.

É importante sottolineare che l'accrescimento avviene solo attraverso scambi di massa tra le due compagne e non con la galassia all'interno di cui si trovano (a differenza del caso dei SMBHs) e che i processi di emissione associati non sono di tipo stellare (uno su tutti, il *corpo nero*), ma propri del gas in caduta. In entrambi i casi, il

fluido, che proviene dalla stella meno densa, possiede momento angolare rispetto all'altra, presa come polo, cosí che posso applicare un calcolo simile a quello fatto precedentemente per i SMBHs e trovare che la conversione di massa in energia é anche qui piuttosto alta. Se trascuro il momento angolare, posso notare che la temperatura viriale, associata alla velocità di caduta libera verso una stella di neutroni, é dell'ordine di  $10^{12}K$ , che corrisponde a un campo di radiazione molto denso ed intenso, come viene calcolato nell'articolo [6] in bibliografia. In verità, non si raggiungono mai queste temperature, perché vengono innescati fenomeni di altro tipo; ma, escluse alcune eccezioni (che non vengono trattate in questo elaborato, invece presenti in [6]), le binarie di questo tipo hanno processi di emissione ad altissima energia e per questo sono state chiamate **X**.

Una domanda molto lecita, che il lettore si può porre, é la seguente: come avviene il trasferimento di massa da una stella ad un'altra nel caso di lobo di Roche? Una binaria molto *dura* (tale che il campo mareale abbia un influsso molto forte) può essere considerata in termini del **problema dei tre corpi circolare ristretto** (che viene introdotto nell'appendice 7.1), dove le due stelle sono i due primari (in moto circolare uniforme intorno al centro di massa del sistema) e la particella di test é un volume infinitesimo di materia in orbita intorno alle due stelle. Le approssimazioni sono l'assunzione di orbite circolari delle binarie ed il fatto che le stelle rispettino rigorosamente i primi due *teoremi di Newton*; tuttavia é molto importante sottolineare come abbia trascurato qualsiasi effetto di attrito tra elementi infinitesimi diversi di fluido in rotazione. Nell'impossibilitá di poter risolvere in termini di *integrali del moto* il movimento del corpo secondario, introduco il concetto di **superficie di zero velocità** come la zona di spazio che separa le *regioni permesse* da quelle *proibite* per il moto dell'elemento di fluido. Nonostante questa superficie (in due dimensioni, una curva) dipenda dal valore dell'**Integrale di Jacobi** ( $C_J$ ), é rappresentata da solo tre forme: due lobi separati che circondano ognuna delle due compagne, una curva a forma di "otto" (che sono, di fatto, due lobi congiunti nel punto lagrangiano collineare  $L_1$ ) o una singola curva intorno ad entrambe. Posso pensare che *il trasferimento di massa avvenga con il minimo di energia cinetica possibile, ossia lungo quella curva di zero velocità corrispondente al valore massimo di  $C_J$*  e congiungente entrambi i due lobi (come si vede nella figura sottostante); posso facilmente notare che essa corrisponde esattamente a quella ad "otto". Infatti, gli elementi di fluido che orbitano all'interno di tale superficie non possono passare da una stella all'altra, ma *solo* quelli, che si muovono esattamente sulla superficie di zero velocità (e *non* in tutta la regione permessa), possono attraversare  $L_1$  e, quindi, accrescere la piú densa. Formalmente anche quelli che stanno fuori tale superficie, cioè che presentano un valore  $C_J$  minore, possono passare dall'una all'altra, ma é naturale pensare che abbiano già subito accrescimento quando si trovavano sulla superficie del lobo di Roche in un tempo precedente.

É importante ricordare che il lobo di Roche si riempie, nella maggior parte dei casi, in seguito all'espansione dell'*envelope* di una stella, che, di solito, é causata dall'uscita dalla *sequenza principale*. Infatti, posso studiare questo fenomeno come un processo continuo (rappresentato nella figura 2): man mano che le dimensioni della stella meno densa aumentano, il campo mareale della compagna "strappa" l'atmosfera e gli strati piú esterni che acquisiranno sempre piú energia cinetica fino a raggiungere il valore di  $C_J$ , tale da permettere di attraversare  $L_1$ . Cosí, il materiale, che é stato "strappato" da una stella, accresce la sua compagna; anche, in questo

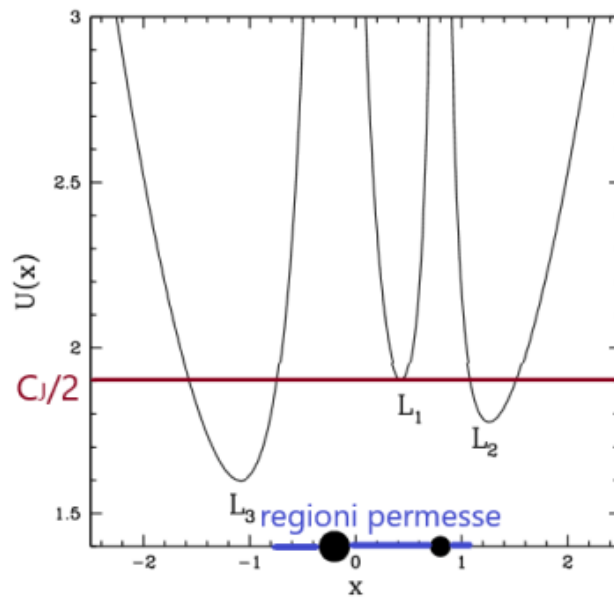


Figura 1: L'immagine rappresenta il massimo valore dell'Integrale di Jacobi (minima energia cinetica), per cui avviene trasferimento di massa tra le due stelle binarie, e le zone permesse associate (in blu). In verità, esistono altre zone permesse esterne alle blu, ma non sono fisicamente accettabili.

caso, si assiste ad un fenomeno di accrescimento, che si distingue in modo sensibile da quelli precedentemente trattati, ma la caratteristica principale è che, una volta attraversato  $L_1$ , la materia comincia a ruotare in un disco.

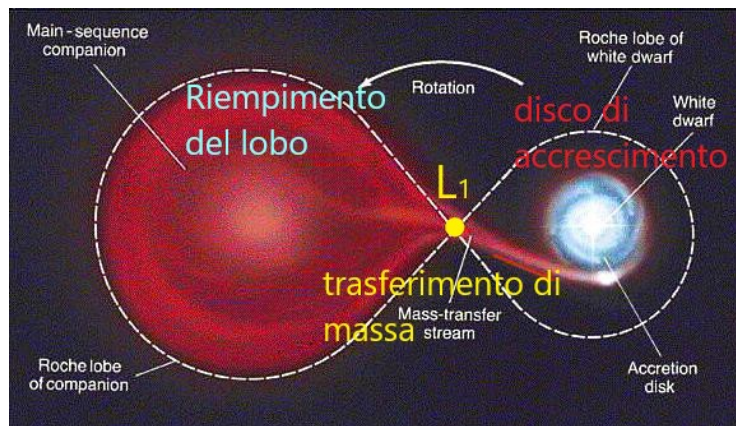


Figura 2: L'immagine in alto rappresenta un esempio di lobo di Roche, dove si può apprezzare come il trasferimento di massa avvenga solo attraverso  $L_1$ .

Anche in questo caso, il meccanismo che porta alla  $L_{Edd}$  viene messo in moto e, quindi, sarà presente una quantità massima di materia, che può accrescere la massa della stella.

In tutti i casi messi in luce (Accrescimento di Bondi e di Parker nella sezione 4 o accrescimento tramite lobo di Roche in quest'ultima) sono stati trascurati gli effetti della *viscosità*, caratteristica essenziale dei fluidi, che spiega il lento collasso

di un disco di accrescimento (accennato nell'ultima sezione 6); per questo motivo, ho sempre considerato la simmetria sferica e l'assenza del momento angolare del fluido in caduta (nelle sezioni 3 e 4).

## 6 Trattazioni piú sofisticate

A questo punto, ho tutti gli elementi per descrivere i due fenomeni illustrati in questo elaborato (QUASAR e Binarie X): il gas dall'infinito cade verso il SMBH con andamento descritto dall'Accrescimento di Bondi (sezione 4) oppure sopraggiunge ad una nana per trasferimento tramite Lobo di Roche (sezione 5), nel cadere emette fotoni che, scontrandosi con il fluido, rallentano la caduta dello stesso (sezione 3). Il risultato, in entrambi i casi, é l'aumento (ossia, accrescimento) della massa degli oggetti maggiormente massivi e compatti.

Sia le nane che i SMBHs creano un enorme campo gravitazionale che non può essere completamente descritto usando la *legge di attrazione gravitazionale di Newton*, ma sarebbe necessario usare la **Relatività generale**, che rende questi studi enormemente piú complessi.

In quest'ultima sezione, esamino le descrizioni dei fenomeni della fisica dell'accrescimento (elencati nella 1) in modo piú profondo ed evidenzio come condizione necessaria per considerare il disco di accrescimento sia tener conto della viscosità del fluido (come ho già messo in luce nella sezione 2).

I flussi di gas in rotazione sono creati in modo diverso a seconda di come é evoluto il sistema fisico: per esempio, nel caso di accrescimento nelle nebulose stellari il momento angolare é quello residuo della lenta rotazione della nube primordiale; mentre, per quello vicino ad un SMBH l'origine del gas (e del relativo momento angolare) é dibattuta, ma i tre fenomeni principali sono la perdita di gas per vento stellare e da esplosioni di supernovae (il quale gas, perdendo energia per **bremsstrahlung**, cade al centro delle galassie), la "distruzione" mareale delle stelle nelle zone limítrofe o di alcune galassie nane satellite. Ma, la caratteristica che contraddistingue qualsiasi tipo di fenomeno di accrescimento é la presenza di momento angolare non nullo rispetto all'oggetto centrale. Qualunque sia l'origine del materiale e la traiettoria iniziale dell'orbita, esso si muove in un piano identificato dal vettore momento angolare e il moto residuo lungo le altre direzioni é smorzato da collisioni tra elementi diversi dello stesso fluido. Ma, una volta che il gas si é disposto in un'orbita circolare, la condizione di stabilità di quest'ultima (la forza centripeta coincide con l'unica in gioco: quella gravitazionale) impedisce il suo collasso radiale in tempi relativamente brevi. Allora, se considero un disco di gas nel quale la forza gravitazionale dell'oggetto centrale é dominante, l'effetto netto é che il gas si dispone in una configurazione ad anello. La viscosità causa due effetti molto importanti (come evidenziato all'interno di [4]):

- il **trasporto di momento angolare**, ossia quest'ultimo viene trasferito dalle regioni piú interne e piú veloci a quelle piú esterne e piú lente del disco, tale che gli anelli interni di gas tendino lentamente a cadere verso l'oggetto centrale;
- la **dissipazione del momento angolare**, ossia il fluido perde velocità a causa dell'attrito interno cosí che si muoverá in orbite a spirale verso il centro del moto e  $\frac{dE}{dr} \neq 0$  (come é già stato analizzato nella sezione 2).

Allora, é la viscosità che determina la perdita di energia sottoforma di radiazione e il lento collasso del disco. Come ho già fatto notare nella sezione 2, senza la viscosità niente di ciò accadrebbe e l'elemento di disco continuerebbe a muoversi lungo la sua orbita circolare stabile.



## Riferimenti bibliografici

- [1] G. Bertin, *Dynamics of Galaxies*, 2014.
- [2] L. Ciotti, “Dispense fornite dal docente a lezione,” 2020.
- [3] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic dynamics*, 1987.
- [4] C. Clarke and B. Carswell, *Principles of Astrophysical Fluid Dynamics*, 2014.
- [5] J. Frank, A. King, and D. J. Raine, *Accretion Power in Astrophysics: Third Edition*, 2002.
- [6] H. C. Spruit, “Accretion disks,” *arXiv e-prints*, p. arXiv:1005.5279, May 2010.
- [7] C. Nipoti, “Dispense fornite dal docente a lezione,” 2020.

## 7 Appendice

### 7.1 Problema dei tre corpi circolare ristretto: Integrale di Jacobi

Nell'appendice seguente, illustro brevemente come nel problema dei tre corpi circolare ristretto posso introdurre il concetto di curva di zero velocità e di regioni permesse o proibite, senza addentrarmi troppo né nel significato dei punti lagrangiani, né nella discussione della loro stabilità e neppure nelle equazioni del moto della particella di test.

Il **problema dei tre corpi circolare ristretto** (due corpi, detti primari, che si muovono di moto circolare uniforme intorno al loro centro di massa e una particella di test, che orbita intorno ai primari) non può essere risolto in modo semplice (sotto forma di integrali del moto). Ma è possibile trovare delle soluzioni analitiche che ne descrivono il moto nel sistema di riferimento non inerziale, che si muove di moto circolare uniforme con i primari. Ai fini di questo elaborato, è importante solo sapere che posso trovare le equazioni che governano il moto della particella di fluido, nel caso delle Binarie X. Tutto lo studio di questo problema si basa su due sistemi di riferimento:

- inerziale, di un osservatore esterno;
- non inerziale, di un osservatore che si muove (di moto circolare uniforme) con i primari, con origine il centro di massa.

Per semplificare la scrittura delle equazioni, mi pongo in un sistema di misura tale che:

- l'unità di massa sia uguale alla somma di quelle dei due primari;
- la costante di gravitazione universale  $G$  sia uguale ad 1;
- l'unità di lunghezza sia uguale al semiasse dell'orbita dei due primari;
- chiamo  $n$  la velocità angolare costante di rotazione dei primari.

L'energia totale del sistema non è conservata nel problema dei tre corpi circolare ristretto perché l'effetto gravitazionale della particella di test sui primari è considerato trascurabile (ciò può essere anche notato perché l'Hamiltoniana del sistema dipende esplicitamente dal tempo nel sistema di riferimento inerziale). Ma, esiste un altro importante integrale del moto: il cosiddetto **Integrale di Jacobi  $C_J$**  (Poincaré ha dimostrato che è l'unico *integrale del moto* presente nel problema dei tre corpi circolare ristretto).

Considero l'Hamiltoniana normalizzata su unità di massa per il moto della particella di test nel sistema di riferimento non inerziale  $(x, y, z)$ :

$$H' = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U \quad (9)$$

con  $U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}$  (che rappresenta l'energia potenziale corretta dalla presenza del momento angolare), dove  $\mu$  rappresenta la massa del primario meno massivo e  $r_1$  e  $r_2$  sono le distanze dal centro di massa rispettivamente del primario più massivo e dell'altro.

Definisco l'**Integrale di Jacobi** come  $C_J := -2H' = 2U - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \text{costante}$ .

Il valore di  $C_J$  ha un'importantissima applicazione: permette di limitare le regioni nelle quali la particella di test si muove, perché la conservazione di  $C_J$  implica regioni permesse e proibite; infatti, posso riscrivere

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_J \geq 0 \rightarrow U \geq \frac{C_J}{2} \quad (10)$$

Posso osservare dalla (10) che avrò minore energia cinetica per  $C_J$  maggiori. Allora, lo spazio sarà suddiviso in tre sottospazi diversi:

- per  $U \leq \frac{C_J}{2}$ , ho le **regioni proibite**, perché la particella di test non ha abbastanza energia cinetica per attraversarle;
- per  $U \geq \frac{C_J}{2}$ , ottengo le **regioni permesse**;
- per  $U = \frac{C_J}{2}$  (ossia,  $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 0$ ), posso costruire le **superfici di zero velocità**, che separano le regioni permesse da quelle proibite.

Se costruisco un grafico del potenziale lungo l'asse  $x$  (nel sistema di riferimento non inerziale), dove sono posizionati i primari, noto tre punti di minimo del potenziale  $U$ , che sono tre punti di equilibrio, noti alla Meccanica Celeste, chiamati **punti lagrangiani collineari** ( $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ ), come è visibile nella figura sottostante. In realtà, esistono altri due punti di minimo del potenziale nello spazio tridimensionale (ma, sempre sul piano, in cui si svolge il moto dei primari, identificato dal vettore momento angolare conservato), chiamati **punti lagrangiani triangolari** ( $L_4$  e  $L_5$ ), che, però, non hanno alcun interesse nel mio elaborato.

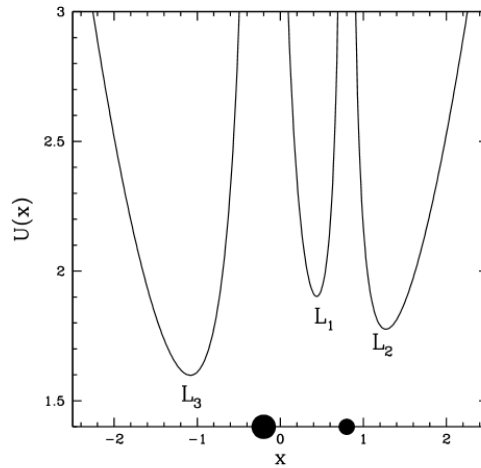


Figura 3: Questo grafico (preso dalle dispense [7]) permette di tracciare le regioni permesse e proibite, nonché le curve di zero velocità, in funzione di tutti i possibili valori di  $C_J$ .