

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

**DINAMICA DEI FLUIDI: ASPETTI  
MATEMATICI E ANALISI DI VORTICITÀ**

**Relatore:**  
Prof. Alexandr Kamenchtchik

**Presentata da:**  
Stefano Lusoli

Anno Accademico 2019/2020

# Abstract

In questa trattazione s'intende presentare un approccio matematico allo studio della fluidodinamica classica basato sul concetto di vorticità.

Dopo un breve esame delle equazioni fondamentali per la descrizione dei fluidi, si espone la teoria relativa alla vorticità per flussi regolati dalle equazioni di Eulero. Quindi, si utilizzano i risultati ottenuti al fine di condurre uno studio dei *vortex filaments*, distribuzioni filiformi di vorticità le cui applicazioni si possono trovare in diversi campi della fisica. Si sviluppano le leggi del moto dei *vortex filaments* nelle condizioni di LIA (*linearized induction approximation*) e si presenta la classe di soluzioni stabili dei *vortex knots*, nodi (toroidali) di vorticità.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Fluidi classici e vorticità</b>	<b>5</b>
1.1 Modello classico dei fluidi	5
1.1.1 Equazioni fondamentali	5
1.1.2 Flussi irrotazionali e solenoidali	8
1.2 Vorticità	11
1.2.1 Definizione di vorticità e relazione fra vorticità e velocità	11
1.2.2 Leggi del moto	17
1.2.3 Invarianti del moto	23
1.2.4 Distribuzioni singolari di vorticità	27
<b>2 Dinamica dei <i>vortex filaments</i></b>	<b>35</b>
2.1 Filetti vorticosi ( <i>vortex filaments</i> )	35
2.1.1 Definizione di <i>vortex filament</i>	35
2.1.2 Invarianti del moto per un <i>vortex filament</i>	36
2.2 LIA	39
<b>3 Dinamica dei <i>vortex knots</i></b>	<b>46</b>
3.1 Descrizione matematica dei nodi	46
3.1.1 Definizione di nodo e caratteristiche fondamentali	46
3.1.2 Nodi toroidali	50
3.2 Nodi di vorticità ( <i>vortex knots</i> )	52
3.2.1 Nodi triviali di vorticità: <i>circular vortex knots</i>	52
3.2.2 Nodi non triviali di vorticità: <i>toroidal vortex knots</i>	54
<b>A Risoluzione dell'equazione di Poisson per il potenziale vettore del campo di velocità (metodo alternativo)</b>	<b>59</b>
<b>B Triedro di Frenet</b>	<b>61</b>

# Introduzione

L'interesse per gli aspetti matematici della dinamica dei fluidi scaturisce dalla vasta applicabilità che questi trovano nella descrizione di diversi fenomeni fisici, anche apparentemente molto distanti dall'ambito fluidodinamico.

La descrizione matematica dei fluidi classici muove, infatti, dalla modellizzazione del sistema sotto l'ipotesi del continuo, per la quale si possono analizzare in modo consistente le caratteristiche macroscopiche del fluido senza considerare le particolarità delle componenti microscopiche che lo compongono. Ogni elemento di fluido è inteso come contenente un numero elevato di particelle così che le strutture più fini possano essere trascurate e le proprietà termodinamiche locali siano considerabili uniformi all'interno dell'elemento. In questo modo il modello di fluido continuo risulta applicabile a una grande varietà di sistemi: materia liquida, materia gassosa, ma anche plasma, ammassi di galassie, flussi delle folle e molti altri ancora.

Fondamentale è, inoltre, il concetto di campo, attraverso il quale viene descritto il moto del fluido. Solitamente si studia il campo di velocità, la cui interpretazione fisica è più facilmente comprensibile, ma particolarmente interessante (e centrale per questa esposizione) è il campo di vorticità del fluido. Quest'ultimo permette frequentemente una maggiore semplicità di trattazione ed è sorprendente il numero di analogie che, dal punto di vista matematico, connettono il campo di vorticità del fluido ad altri campi fisici (primo fra tutti il campo magnetico, come si osserva talvolta nel corso dell'esposizione).

D'altro canto, se la descrizione matematica dei fluidi permette di comprendere una grande varietà di fenomeni fisici, è vero anche che la fisica dei fluidi ha da sempre stimolato nuovi progressi nell'ambito puramente matematico: lo studio delle equazioni differenziali alle derivate parziali, la teoria delle onde, il calcolo numerico e l'analisi complessa ne sono solamente alcuni esempi.

Non sono nemmeno da trascurare i problemi della fluidodinamica ancora aperti e di forte interesse matematico. Prima fra tutti la risoluzione delle equazioni di Navier-Stokes (una delle quali è presentata nel paragrafo §1.1.1), ma anche la teoria della turbolenza.

Lo scopo di questa trattazione è quello di presentare alcuni dei numerosi risultati ottenuti nello studio di questa affascinante branca della fisica, concentrandosi su quelli riguardanti il campo di vorticità e seguendo un approccio matematico, senza il quale gli

argomenti sarebbero svuotati di buona parte del loro significato.

Nel primo capitolo si presenta il modello classico di fluido, esaminandone le equazioni fondamentali e descrivendo come prima applicazione i casi di flusso irrotazionale e/o solenoidale. Quindi, si presenta il campo di vorticità del fluido studiandone la relazione con il campo di velocità, le leggi e gli invarianti del moto e alcune distribuzioni singolari che si presentano soventemente nella descrizione dei flussi. In questo capitolo come nei successivi, la trattazione è di tipo classico, senza considerare effetti quantistici o relativistici, per i quali un intero studio a parte sarebbe necessario: non si considera, dunque, il fenomeno quantistico della superfluidità (anche se le applicazioni allo studio della vorticità in questo campo presentano molte affinità con il caso classico, quando si suppone una viscosità nulla o al più trascurabile) e la metrica considerata è quella Euclidea (non sono presenti campi di gravità molto intensi), con velocità, sia del fluido nel complesso, sia dei suoi elementi costituenti, di molto inferiori a quelle della luce. D'altra parte, è possibile sviluppare la trattazione di questi casi generalizzando i concetti esaminati nel caso classico e, viceversa, ottenere nuovamente una descrizione classica procedendo attraverso casi limite della teoria quantistica o relativistica. Si considera, inoltre, per semplicità un fluido costituito da un'unica specie chimica (non avvengono reazioni all'interno del fluido ed è presente un'unica fase), elettricamente neutro e termicamente isolato dall'esterno.

Nel secondo capitolo si applicano le conoscenze sviluppate ai *vortex filaments*, distribuzioni filiformi di vorticità circondate da flusso irrotazionale. Sono strutture che si presentano in diversi fenomeni fisici (basti pensare alle trombe d'aria nell'atmosfera terrestre o alle intense attività della corona solare) e che sono studiate nelle condizioni di *linearized induction approximation* o, più semplicemente, LIA.

Infine, nel terzo capitolo si presentano i *toroidal vortex knots* come classe di soluzioni alle equazioni della dinamica dei *vortex filaments* in condizioni di LIA, ottenute in modo perturbativo a partire dalla soluzione circolare. Si tratta di distribuzioni di vorticità sempre filiformi, ma giacenti sulla superficie di un toro e chiuse su loro stesse formando un nodo. L'esistenza dei *vortex knots* fu congetturata già nella seconda metà dell'Ottocento, ma solo di recente è stato possibile realizzarli in laboratorio [11] e la ricerca per la completa descrizione del fenomeno è ancora aperta.

# Capitolo 1

## Fluidi classici e vorticità

### 1.1 Modello classico dei fluidi

Dal punto di vista classico, un fluido è un continuo che non ha forma propria e non sopporta sforzi di taglio, cioè si deforma indefinitamente sotto l'azione di una forza tangente alla superficie del fluido, anche se di piccola intensità [16].

Scopo di questa sezione è quello di riassumere i principali risultati che permettono di descrivere il moto di un fluido. Si esamineranno, poi, i casi particolari di flusso irrotazionale e di flusso solenoidale.

#### 1.1.1 Equazioni fondamentali

La descrizione matematica del moto di un fluido in uno spazio  $N$ -dimensionale prevede la conoscenza di  $N+2$  campi, cioè delle funzioni che descrivono il campo di velocità del fluido (nel caso tridimensionale  $N=3$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u(\mathbf{x}, t), v(\mathbf{x}, t), w(\mathbf{x}, t))$ , con  $\mathbf{x} = (x, y, z)$ , oppure una qualunque funzione  $\boldsymbol{\omega}$  dipendente dal campo di velocità  $\mathbf{u}$  e a partire dalla quale  $\mathbf{u}$  sia univocamente determinabile) e due qualunque grandezze termodinamiche del fluido come la pressione  $p$  e la densità  $\rho$  [14, §1].

#### L'equazione di continuità

Una delle equazioni fondamentali per la descrizione dei fluidi è l'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

che rappresenta la legge di conservazione della massa per il fluido e può essere scritta anche nella forma

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

In Eq.(1.2) il simbolo  $\frac{d}{dt}$  indica la derivata Lagrangiana, definita per una qualunque grandezza (scalare o vettoriale) riferita al fluido  $\alpha$  come  $d\alpha/dt = \partial\alpha/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\alpha$ .

*Dimostrazione.* Si ha, infatti, che, dato un qualunque ipervolume (varietà  $N$ -dimensionale)  $\mathcal{O}$ , cioè un qualunque sottoinsieme aperto limitato di  $\mathbb{R}^N$ , la variazione di massa all'interno di  $\mathcal{O}$  ( $\int_{\mathcal{O}} d^N x \partial\rho/\partial t$ ) deve essere pari al flusso di massa attraverso l'ipersuperficie (varietà  $N-1$ -dimensionale)  $\partial\mathcal{O}$ . Indicando con  $\mathbf{n}$  il versore normale a  $\partial\mathcal{O}$  e diretto esternamente ad  $\mathcal{O}$ , il flusso precedentemente descritto è pari a  $-\int_{\partial\mathcal{O}} dS \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . Dunque,

$$\int_{\mathcal{O}} d^N x \frac{\partial\rho}{\partial t} = - \int_{\partial\mathcal{O}} dS \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$$

e, applicando al secondo membro dell'uguaglianza il teorema di Gauss, si ottiene che

$$\int_{\mathcal{O}} d^N x \left[ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) \right] = 0.$$

Dall'arbitrarietà del dominio di integrazione segue la Eq.(1.1). □

### Legge di bilancio della quantità di moto: equazioni di Navier-Stokes, di Eulero e di Helmholtz

Altrettanto fondamentale è l'equazione di Navier-Stokes, la cui dimostrazione discende dall'applicazione del principio di conservazione della quantità di moto del fluido. Per fluidi Newtoniani isotropi, è nella forma

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \eta \left[ \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \nabla p = \rho \mathbf{f}, \quad (1.3)$$

nella quale il simbolo  $\frac{d}{dt}$  è utilizzato sempre per indicare la derivata Lagrangiana, mentre  $\eta$  rappresenta la viscosità dinamica del fluido.

*Dimostrazione.* Utilizzando una simbologia analoga a quella adottata nella dimostrazione precedente ed applicando il principio di conservazione della quantità di moto, si ottiene che

$$\int_{\mathcal{O}} d^N x \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} = - \int_{\partial\mathcal{O}} dS \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) + \int_{\mathcal{O}} d^N x \rho \mathbf{f} + \int_{\partial\mathcal{O}} dS \mathbf{f} \cdot \mathbf{n},$$

dove gli ultimi due termini rappresentano le forze agenti sul fluido, nella forma di forze di volume esercitate esternamente ( $\mathbf{f}$  indica una forza per unità di massa) e di forze di superficie esercitate tramite contatto.  $\mathbf{f}$  è una grandezza tensoriale pari all'opposto del noto tensore di sforzo:  $-\mathbf{f} = \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij}$ , con  $p$  pressione e  $\sigma_{ij}$  tensore legato agli sforzi originati dal moto del fluido. Applicando il teorema di Gauss nell'equazione precedente, si ottiene, dunque che, in una base ortonormale data,

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho u_i u_j) - \partial_j(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) = \rho f_i,$$

dove, per semplicità di scrittura, si è utilizzata la notazione  $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}$ . Applicando, poi, l'equazione di continuità (Eq.(1.1)), si può osservare che, per i primi due termini della precedente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \partial_j(\rho u_i u_j) &= u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i u_j (\partial_j \rho) + u_i \rho (\partial_j u_j) + \rho u_j (\partial_j u_i) = \\ &= \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i + u_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i, \end{aligned}$$

dunque

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i - \partial_j (\sigma_{ij} - p \delta_{ij}) = \rho f_i.$$

Nel caso di fluidi isotropi, si ha che  $\sigma_{ij} = \lambda \partial_k u_k \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$  dove  $\lambda$  e  $\mu$  sono i coefficienti di Lamé e  $e_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_j u_i + \partial_i u_j)$  è il tensore relativo al tasso di deformazione, detto *strain rate*. Inoltre, per i fluidi newtoniani, si assume una dipendenza semplice fra  $\sigma_{ij}$  e la componente antisimmetrica di  $e_{ij}$  ( $e'_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij}$ ) nella forma  $\sigma_{ij} = 2\eta e'_{ij}$  (dove  $\eta$  è detta viscosità dinamica del fluido), di modo che  $-\mathbf{f} = \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{kk}\delta_{ij})$ . Si ha, allora, che

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i - \partial_i (\lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) + \partial_j [\mu (\partial_j u_i + \partial_i u_j)] + \partial_i p = \rho f_i.$$

Per fluidi newtoniani la precedente assume, quindi, la forma

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) u_i - \eta \left[ \nabla^2 u_i + \frac{1}{3} \partial_i (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \partial_i p = \rho f_i,$$

che, una volta adottata la notazione vettoriale, corrisponde perfettamente alla Eq.(1.3).  $\square$

Se il fluido ha viscosità trascurabile (caso ideale di fluido inviscido), la precedente Eq.(1.3) assume la forma più semplice

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}, \quad (1.4)$$

chiamata equazione di Eulero.

Nel caso di flusso barotropico (cioè nel caso in cui la densità sia funzione unicamente della pressione) dove siano presenti unicamente forze conservative ( $\text{curl } \mathbf{f} = \text{curl}(\text{grad } U) = \mathbf{0}$ ), si può, poi, ottenere un'altra forma della precedente Eq.(1.4) che dipende unicamente dal campo di velocità del fluido. Considerando l'identità vettoriale

$$\frac{1}{2} \text{grad } u^2 = \mathbf{u} \wedge \text{curl } \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.5)$$

e osservando che per un flusso barotropico si può scrivere che

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left( \int \frac{dp}{\rho} \right), \quad (1.6)$$

si ha l'equazione

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{1}{2} u^2 + U + \int \frac{dp}{\rho} \right) = \mathbf{u} \wedge \text{curl} \mathbf{u}, \quad (1.7)$$

nota come equazione di Bernoulli. Considerando, quindi, il rotore di entrambi i membri della precedente, si ottiene l'equazione di Helmholtz:

$$\frac{\partial(\text{curl} \mathbf{u})}{\partial t} = \text{curl}(\mathbf{u} \wedge \text{curl} \mathbf{u}). \quad (1.8)$$

Dalla precedente Eq.(1.8) segue immediatamente che, per un fluido barotropico sul quale agiscono unicamente forze conservative, se il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  ha rotore nullo in un dato istante temporale  $t = \bar{t}$ , allora si avrà che  $\text{curl} \mathbf{u} = 0$  anche per ogni istante temporale successivo,  $t > \bar{t}$ .

Infine, per completare il sistema di equazioni, è sufficiente introdurre relazioni di bilancio energetico. Queste differiscono tra di loro a seconda del problema trattato e consentono di ottenere informazioni sulle variabili termodinamiche  $p$  e  $\rho$ , indicate in precedenza come fondamentali per la descrizione del fluido. In seguito si assumerà implicitamente (dove non altrimenti specificato) che il fluido costituisca un sistema termicamente isolato, di modo che le interazioni energetiche con l'ambiente circostante il fluido possano essere unicamente di carattere meccanico. In questo caso, la pressione  $p$ , dipendendo unicamente dall'azione delle forze esterne e dalle caratteristiche del moto del fluido, si considererà determinata direttamente dal problema considerato. Nel caso, poi, di fluido a densità omogenea, si può porre  $\rho = 1$  senza perdita di generalità e studiare il fluido a partire dalle equazioni precedentemente presentate.

### 1.1.2 Flussi irrotazionali e solenoidali

I fluidi caratterizzati da un campo di velocità irrotazionale e/o solenoidale presentano alcune peculiarità che rendono il loro studio interessante dal punto di vista matematico. Le grandezze  $\nabla \wedge \mathbf{u}$  e  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  sono strettamente legate alla presenza di, rispettivamente, vortici e sorgenti/pozzi all'interno del fluido e, quando risultano nulle, è possibile introdurre alcune semplificazioni della trattazione.

Il campo di velocità del fluido  $N$ -dimensionale è detto irrotazionale quando, in ogni punto della regione considerata, è soddisfatta la condizione

$$\text{curl} \mathbf{u} \equiv \nabla \wedge \mathbf{u} = 0. \quad (1.9)$$

Quando questa è verificata, è possibile definire uno scalare  $\phi(\mathbf{x}, t)$  tale che

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi \quad (1.10)$$

e che, dunque, agisce come un potenziale per il campo di velocità. Se la regione occupata dal fluido è semplicemente connessa, allora il potenziale assume un singolo valore in ogni punto  $\mathbf{x}$ , ottenibile attraverso l'integrale

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} \quad (1.11)$$

lungo una qualunque curva che connetta il punto  $\mathbf{x}_0$  con  $\mathbf{x}$ . Ne risulta evidentemente che il potenziale di velocità è definito a meno di una costante additiva, dipendente dalla scelta del punto iniziale arbitrario  $\mathbf{x}_0$ .

Nel caso in cui la regione del fluido non fosse semplicemente connessa, si potrebbe sempre immaginare di introdurre dei diaframmi in modo tale da rispettare tale condizione: si formano, allora, ipersuperfici  $N - 1$ -dimensionali di discontinuità di prima specie (cioè di tipo salto) del potenziale, ma il campo di velocità risulta comunque ben definito considerando opportune operazioni di limite.

Il campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  si dice, invece, solenoidale se è soddisfatta la seguente:

$$\text{div } \mathbf{u} \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.12)$$

Si può osservare che tale condizione risulta identicamente soddisfatta se si introduce un nuovo campo  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  detto potenziale vettore e tale che

$$\mathbf{u} = \text{curl } \mathbf{A}. \quad (1.13)$$

Nella scelta del potenziale vettore vi è una certa libertà, dal momento che  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$  risulta definito a meno del gradiente di una funzione scalare  $\alpha$  (cioè  $\mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{A} = \text{curl}(\mathbf{A}' + \nabla\alpha)$ ).

Nel caso di fluido bidimensionale ( $N = 2$ ) si può procedere anche definendo una funzione scalare  $\psi(\mathbf{x}, t)$  continua con derivate seconde spaziali continue e tale che

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \quad v(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x}, \quad (1.14)$$

cioè

$$\mathbf{A} = (0, 0, \psi), \quad (1.15)$$

con  $\mathbf{A}$  ortogonale al piano del fluido. Questa funzione prende il nome di *stream function*. Si possono, poi, definire le linee di flusso (*stream lines*): curve tangenti al campo di velocità in ogni punto e definite dall'equazione

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (1.16)$$

(per fluidi  $N$ -dimensionali, la precedente si generalizza attraverso il sistema di equazioni nella forma  $dx_i/u_i = dx_j/u_j$ , con  $i, j = 1 \dots N$ ,  $i \neq j$ ) o, equivalentemente,

$$v dx - u dy = 0. \quad (1.17)$$

In questo caso, si può osservare chiaramente come la *stream function* sia una funzione costante lungo le linee di flusso, dal momento che, sostituendo nella precedente equazione l'espressione della velocità in termini di *stream function*, si ottiene che

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy = d\psi. \quad (1.18)$$

Se, poi, è valida l'equazione di Helmholtz nella forma in Eq.(1.8), applicando la definizione in Eq.(1.14), si ottiene immediatamente un'equazione in  $\psi(\mathbf{x}, t)$  [13, §1.10]

$$\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial t} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x} = 0, \quad (1.19)$$

a partire dalla quale è possibile dedurre la forma delle *stream lines* nel caso di flussi statici (moto del fluido indipendente dal tempo).

Nel caso di fluido tridimensionale ( $N = 3$ ) è possibile definire la *stream function* per un flusso simmetrico per rotazioni attorno ad un asse fisso (*axisymmetric flow*) [2, §2.2]. Indicando con  $\vartheta$  la coordinata angolare rispetto alla quale il flusso risulta invariante, si ha che, in coordinate spaziali sferiche  $(r, \vartheta, \varphi)$  ( $\psi \equiv \psi(r, \vartheta, t)$ ),

$$u_r = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta}, \quad u_\vartheta = -\frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad A_\varphi = \frac{\psi}{r \sin \vartheta}, \quad (1.20)$$

mentre in coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$  ( $\psi \equiv \psi(r, z, t)$ ),

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad A_\varphi = \frac{\psi}{r}. \quad (1.21)$$

Definita attraverso le equazioni Eq.(1.20) ed Eq.(1.21) la *stream function* conserva la proprietà caratterizzante di essere costante lungo le *stream lines* nei piani a  $\varphi$  costante.

Si può presentare, inoltre, il caso in cui il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  è sia irrotazionale, sia solenoidale, cioè entrambe le condizioni in Eq.(1.9) ed Eq.(1.12) sono soddisfatte in ogni punto della regione del fluido e in ogni istante. Si ottiene allora che, applicando la relazione in Eq.(1.12) alla Eq.(1.10),

$$\nabla^2\phi = 0. \quad (1.22)$$

La precedente Eq.(1.22), è nota come equazione di Laplace: note le condizioni al contorno (spesso nella forma di condizioni al contorno di Dirichlet o di Neumann), è risolvibile e permette di descrivere il flusso in esame.

Interessante è il caso bidimensionale ( $N = 2$ ), per il quale è possibile definire simultaneamente il potenziale  $\phi(\mathbf{x}, t)$  e la *stream function*  $\psi(\mathbf{x}, t)$  per un campo di velocità che soddisfi entrambe le condizioni in Eq.(1.9) ed Eq.(1.12). Le due funzioni precedenti possono essere legate in un'unica funzione complessa [13, §1.10]

$$\Pi = \phi + i\psi, \quad (1.23)$$

che è una funzione olomorfa, poichè soddisfa le condizioni di olomorfismo di Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Re(\Pi)}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Im(\Pi)}{\partial y} \\ \frac{\partial \Re(\Pi)}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Im(\Pi)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Si può, inoltre, utilizzare l'isomorfismo fra  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}$  per definire un unico campo scalare complesso  $\varpi$ , nella forma

$$\varpi = u - iv, \quad (1.25)$$

in modo tale che le componenti del campo di velocità del fluido siano date rispettivamente da  $u_x \equiv u = \Re(\varpi)$  e  $u_y \equiv v = -\Im(\varpi)$ . Appare, allora, evidente che la funzione in Eq.(1.23) è interpretabile come un potenziale complesso, in quanto, per l'olomorfismo di  $\Pi(z, t)$ ,  $z = x + iy$ ,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u - iv = \varpi. \quad (1.26)$$

Ciò consente di trattare analiticamente un'unica funzione scalare attraverso la quale ottenere diverse importanti caratteristiche del fluido.

## 1.2 Vorticità

La vorticità costituisce un elemento di fondamentale importanza nella descrizione del flusso dei fluidi ed è un argomento centrale per questa trattazione.

In questa sezione si intende evidenziarne le caratteristiche principali e fornire gli elementi necessari allo sviluppo degli argomenti seguenti.

### 1.2.1 Definizione di vorticità e relazione fra vorticità e velocità

Si definisce vorticità  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  il rotore del campo di velocità del fluido  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , dunque, in  $\mathbb{R}^3$ ,

$$\omega_i(\mathbf{x}, t) \equiv (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t))_i = (\text{curl } \mathbf{u})_i \equiv (\nabla \wedge \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \quad (1.27)$$

e, ovviamente, in  $\mathbb{R}^2$ <sup>1</sup>,

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = (0, 0, \omega(\mathbf{x}, t)) = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right). \quad (1.28)$$

Risulta immediatamente dalla definizione che si tratta di un campo solenoidale, cioè

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0, \quad (1.29)$$

e, come si vedrà, presenta diverse peculiarità che lo rendono molto utile nella descrizione del flusso di un fluido.

Quando la vorticità non è identicamente nulla (nel caso lo sia, l'analisi del moto del fluido si riduce sostanzialmente allo studio dell'Eq.(1.22)), si può osservare come a partire dalla sua forma analitica sia possibile ottenere quella del campo di velocità attraverso un'operazione di integrazione. In questo modo, si può descrivere il moto di un fluido più convenientemente attraverso la sua vorticità. Affinché sia possibile la precedente operazione in  $\mathbb{R}^3$ , è sufficiente (ma non necessario) che siano rispettate le seguenti condizioni [24, §1.1]:

1. Il campo di velocità  $\mathbf{u}$  è un campo solenoidale (cioè è valida la condizione in Eq.(1.12)) o, equivalentemente, il fluido è incomprimibile (cioè la derivata Lagrangiana della densità è nulla:  $d\rho/dt = 0$ ).
2. La regione occupata dal fluido è un dominio semplicemente connesso (cioè, se  $\mathcal{O}$  indica tale regione,  $\partial\mathcal{O}$  è un insieme connesso).
3. Al contorno, la componente normale della velocità  $u_n$  ha forma nota lungo tutta la superficie  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} = \partial\mathcal{O}$ , con  $\mathcal{O}$  dominio limitato). Oppure, se il fluido non è limitato, il campo di velocità si annulla all'infinito, cioè

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.30)$$

4. Al contorno, la componente normale della vorticità  $\omega_n$  si annulla su  $\mathcal{S}$ . Oppure, se il fluido non è limitato, la vorticità si annulla al di fuori di una regione finita del fluido o decresce esponenzialmente fino ad annullarsi all'infinito, cioè

$$|\boldsymbol{\omega}| \sim \mathcal{O}(e^{-|\mathbf{x}|}). \quad (1.31)$$

---

<sup>1</sup>I casi di fluido bidimensionale e, in particolare, di fluido tridimensionale saranno quelli analizzati in modo più approfondito nel corso dell'esposizione come casi esemplificativi, in quanto più facilmente trattabili matematicamente e più intuitivi, oltre che maggiormente d'interesse per gli argomenti che seguiranno. Le generalizzazioni a più dimensioni sono spesso possibili in modo ovvio.

Analoghe condizioni valgono nel caso bidimensionale.

Per esplicitare il campo di velocità del fluido è possibile seguire diverse procedure a seconda della convenienza.

Ad esempio, per flussi solenoidali si può utilizzare la condizione 1 (Eq.(1.12)) per scrivere in modo univoco il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  come somma di un campo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  a divergenza nulla e di un campo  $\text{grad } \phi(\mathbf{x}, t)$  irrotazionale e solenoidale:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \nabla\phi. \quad (1.32)$$

La grandezza  $\phi(\mathbf{x}, t)$  che compare nella precedente è ottenibile risolvendo il classico problema del potenziale in una forma del tutto analoga a quella in Eq.(1.22) con condizioni al contorno di Neumann, che si suppongono note per la condizione 3.

Per ottenere, invece, il campo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ , si può procedere definendo un potenziale vettore  $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ , in modo tale che

$$\mathbf{v} = \text{curl } \mathbf{A}. \quad (1.33)$$

Si può scegliere  $\mathbf{A}$  in modo tale che risulti solenoidale, per cui, per le note identità vettoriali,

$$\boldsymbol{\omega} = \text{curl } \text{curl } \mathbf{A} = \nabla(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}, \quad (1.34)$$

ottenendo l'equazione di Poisson

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega}. \quad (1.35)$$

Se valgono le condizioni precedentemente elencate, l'equazione di Poisson Eq.(1.35) ha soluzione, nel caso tridimensionale, nella forma [24, §1.1]

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \equiv \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{r} \quad (1.36)$$

(dove  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$  indica la regione, anche illimitata, nella quale è presente il fluido) e, nel caso bidimensionale,

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \ln(r). \quad (1.37)$$

(dove  $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^2$ , con notazione analoga alla precedente)<sup>2</sup>.

*Dimostrazione.* Si consideri, in primo luogo, il problema in Eq.(1.35) nelle tre dimensioni spaziali ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ). Si ha che il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  può essere scritto nella forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) = - \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' \chi_{\mathcal{O}}(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t),$$

---

<sup>2</sup>L'equazione di Poisson in Eq.(1.35) può essere risolta attraverso la funzione di Green, come in questo paragrafo. Tuttavia, si può procedere anche in modo differente, come mostrato in App.(A).

dove  $\chi_{\mathcal{O}}$  è la funzione caratteristica relativa al dominio  $\mathcal{O}$ , mentre  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  è la distribuzione chiamata funzione di Green e soddisfa l'equazione

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Dal momento che  $\mathbf{A}$  è un potenziale vettore, per la simmetria del problema è possibile supporre che la funzione di Green sia funzione unicamente della grandezza  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \equiv \boldsymbol{\xi}$ . In questo modo, la precedente equazione assume la forma

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\boldsymbol{\xi}) = \delta(\boldsymbol{\xi}).$$

Applicando la trasformata di Fourier a entrambi i membri della precedente si ottiene che

$$\mathcal{F}(\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa}) = -\kappa^2 \mathcal{F}(G(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa})$$

$$\mathcal{F}(\delta(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\xi} e^{-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}} \delta(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}},$$

dunque

$$-(2\pi)^{\frac{3}{2}} \kappa^2 \mathcal{F}(G(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa}) = 1,$$

avente soluzione generale (in senso distribuzionale) nella forma

$$\mathcal{F}(G(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa}) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right) + \frac{C}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \delta(\boldsymbol{\kappa}),$$

dove il simbolo  $\mathcal{P}$  denota la parte principale e  $C$  è una costante da determinare in base alle condizioni al contorno.

Si ha, allora, che

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') &= G(\boldsymbol{\xi}) = \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(G(\boldsymbol{\xi}))(\boldsymbol{\kappa}))(\boldsymbol{\xi}) = \\ &= \overline{\mathcal{F}}\left(-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{\kappa^2}\right)\right)(\boldsymbol{\xi}) + \overline{\mathcal{F}}\left(\frac{C}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \delta(\boldsymbol{\kappa})\right)(\boldsymbol{\xi}) = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}}}{\kappa^2} + \frac{C}{(2\pi)^3} \end{aligned}$$

e, passando alle coordinate polari sferiche  $(\kappa, \vartheta, \varphi)$  in modo tale che  $\boldsymbol{\xi}$  sia diretto lungo l'asse  $\kappa_3$  dello spazio del vettore tridimensionale  $\boldsymbol{\kappa}$  di integrazione, si ha che

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int_{\mathbb{R}^3} d\boldsymbol{\kappa} \frac{e^{i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}}}{\kappa^2} = \\
& = -\frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\kappa \int_0^\pi d\vartheta \kappa^2 \sin \vartheta \frac{\exp(i\kappa|\boldsymbol{\xi}|\cos \vartheta)}{\kappa^2} = \\
& = -\frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\kappa \int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \exp(i\kappa|\boldsymbol{\xi}|\cos \vartheta) = \\
& = -\frac{1}{(2\pi)^2} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\kappa \left[ -\frac{\exp(i\kappa\xi \cos \vartheta)}{i\kappa\xi} \right]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} = \\
& = -\frac{1}{2\pi^2\xi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} d\kappa \frac{\sin(\kappa\xi)}{\kappa} = -\frac{1}{4\pi^2\xi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{\sin(\kappa\xi)}{\kappa} = \\
& = -\frac{1}{4\pi^2\xi} \mathfrak{Im} \left( \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa \frac{e^{i\kappa\xi}}{\kappa} \right) = -\frac{1}{4\pi^2\xi} \mathfrak{Im} \left( \pi i \operatorname{Res} \left( \frac{e^{iz\xi}}{z} \right) \Big|_{z=0} \right) = \\
& = -\frac{1}{4\pi^2\xi} \mathfrak{Im}(\pi i) = -\frac{1}{4\pi\xi} = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}.
\end{aligned}$$

Pertanto,

$$G(\boldsymbol{\xi}) = -\frac{1}{4\pi\xi} + \frac{C}{(2\pi)^3}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' \chi_{\mathcal{O}}(\mathbf{x}') \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{C}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x}' \chi_{\mathcal{O}}(\mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) = \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{C}{(2\pi)^3} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t).
\end{aligned}$$

Si può osservare che il secondo addendo che figura nell'espressione del potenziale vettore rappresenta una costante in  $\mathbf{x}$  e, pertanto, non contiene alcuna informazione riguardante il campo di velocità  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla_{\mathbf{x}} \wedge \mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ . Quindi si può porre  $C = 0$  senza perdita di generalità, ottenendo che

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|},$$

risultato coincidente con quello in Eq.(1.36).

Si può anche verificare facilmente che il campo vettoriale ottenuto è solenoidale, in modo concorde a quanto inizialmente supposto, dal momento che

$$\operatorname{div} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \left( \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\mathcal{O}} dS \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = 0$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore ortogonale a  $\partial\mathcal{O}$  e l'ultima uguaglianza è valida se è verificata la quarta delle condizioni precedentemente elencate. Si tratta, pertanto, di una soluzione accettabile.

Si consideri, ora, la stessa equazione differenziale in Eq.(1.35) nelle due dimensioni spaziali ( $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ). Si può procedere come nel caso precedente per ottenere le seguenti

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = - \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) = - \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}' \chi_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t),$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \equiv \nabla^2 G(r) = \delta(r),$$

dove si assume, in analogia con il caso tridimensionale, che la funzione di Green dipenda unicamente da  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ , indicato dalla coordinata radiale  $r$ . Ricordando l'espressione del Laplaciano in coordinate polari piane, per  $r > 0$  si ottiene l'equazione differenziale

$$\frac{d^2 G}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dG}{dr} = 0$$

di soluzione

$$G(r) = C' \ln(r) + C''.$$

Si può supporre  $C'' = 0$  senza perdita di generalità e per determinare la costante  $C'$  si può osservare che, definendo  $\mathcal{A}_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$ ,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\mathbb{R}^2} dS \delta(r) = \int_{\mathcal{A}_R} dS \delta(r) = \int_{\mathcal{A}_R} dS \operatorname{div}(\nabla G(r)) = \int_{\partial\mathcal{A}_R} dl \mathbf{n} \cdot \nabla G(r) = \\ &= \int_{\partial\mathcal{A}_R} dl \left. \frac{dG}{dr} \right|_{r=R} = \int_{\partial\mathcal{A}_R} dl \frac{C'}{R} = C' 2\pi, \end{aligned}$$

dove si è definito  $\mathbf{n}$  il versore ortogonale alla circonferenza  $\partial\mathcal{A}$ , diretto in verso uscente (e pertanto parallelo al gradiente della funzione di Green calcolata su tale sottovarietà). Dunque  $C' = 1/2\pi$  e

$$\begin{aligned} G(r) &= \frac{1}{2\pi} \ln(r) = \frac{1}{2\pi} \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}' \chi_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \ln(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|), \end{aligned}$$

verificando in questo modo l'Eq.(1.37).

Con metodi analoghi a quelli adottati in precedenza, è possibile anche dimostrare che il precedente campo vettoriale è solenoidale, in accordo con i passaggi inizialmente svolti.  $\square$

E' sufficiente, allora, considerare il rotore delle Eq.(1.36) ed Eq.(1.37) per ottenere il campo  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  nel caso di fluido tridimensionale e bidimensionale rispettivamente:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (1.38)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2, \quad (1.39)$$

da cui discendono direttamente le espressioni per il campo  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} + \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3, \quad (1.40)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^2. \quad (1.41)$$

Le precedenti Eq.(1.40) ed Eq.(1.41) dimostrano, dunque, che è possibile descrivere un fluido attraverso il relativo campo di vorticità, eventualmente ricercando in un secondo momento la forma del campo di velocità.

## 1.2.2 Leggi del moto

Un possibile approccio per ottenere le leggi del moto della vorticità è quello che muove dal teorema di Kelvin sulla circolazione, al fine di dimostrare le leggi di Helmholtz. Queste ultime, tuttavia, possono essere dimostrate anche in modo indipendente ricorrendo a una descrizione Lagrangiana del moto delle particelle di fluido. In questo paragrafo si proseguirà seguendo il primo metodo, studiando in particolare il caso di fluido tridimensionale ( $N = 3$ ), di interesse per il seguito della trattazione.

In primo luogo, è necessario definire il concetto di circolazione e il suo legame con il campo di vorticità del fluido.

Sia  $\gamma$  una curva chiusa interamente contenuta nella regione occupata dal fluido. Si definisce circolazione lungo  $\gamma$  la circuitazione del campo di velocità del fluido lungo tale curva, cioè

$$\Gamma = \oint_{\gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.42)$$

Inoltre, se  $\gamma$  è anche riducibile, detta  $\mathcal{S}$  la superficie delimitata dalla curva ( $\partial\mathcal{S} = \gamma$ ), la circolazione può essere espressa in termini della vorticità nella forma

$$\Gamma = \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.43)$$

cioè come flusso del campo di vorticità attraverso la superficie  $\mathcal{S}$ .

## Il teorema di Kelvin sulla circolazione

**Teorema 1** (Teorema di Kelvin sulla circolazione). *Si consideri un fluido inviscido con flusso barotropico. Se agiscono unicamente forze conservative, allora la circuitazione del campo di velocità lungo una qualunque curva materiale (cioè formata dagli stessi elementi di fluido al variare del tempo) chiusa  $\gamma(t)$  è un invariante del moto, cioè*

$$\frac{d\Gamma_{\gamma(t)}}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.44)$$

dove  $\frac{d}{dt}$  indica la derivata Lagrangiana.

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{S}(t)$  la superficie materiale racchiusa dalla curva materiale chiusa  $\gamma(t)$  dell'enunciato. Siano, poi,  $S_1 = \mathcal{S}(\bar{t})$  e  $S_2 = \mathcal{S}(\bar{t} + dt)$ . La variazione nel tempo del flusso della vorticità  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  attraverso la superficie materiale  $\mathcal{S}(t)$  è, allora, ottenibile come

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{\mathcal{S}(t)}(\boldsymbol{\omega})}{dt} &= \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \int_{S_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \left( \boldsymbol{\omega} + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} dt \right) - \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \right] = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \int_{S_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{1}{dt} \left[ \int_{S_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \right] = \\ &= \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \oint_{\Sigma} d\Sigma \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \right], \end{aligned}$$

dove  $S_l$  indica la superficie laterale (di versore normale  $\mathbf{n}_l$ ) del solido di basi  $S_1$  e  $S_2$ , e si è definita la superficie  $\Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_l$ . Il versore  $\mathbf{n}_{\Sigma}$  normale alla superficie  $\Sigma$  coincide con  $\mathbf{n}_1$  su  $S_1$  e con  $-\mathbf{n}_2$  su  $S_2$ , mentre, per quanto riguarda la grandezza  $dS_l \mathbf{n}_l$ , essa può essere scritta nella forma  $\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l} dt$ , con  $d\mathbf{l}$  elemento di linea lungo la curva  $C = \gamma(\bar{t}) = \partial S_1$ . Applicando il teorema di Gauss, poiché la vorticità è un campo solenoidale (Eq.(1.29)), l'integrale sulla superficie chiusa  $\Sigma$  risulta nullo e, per la ciclicità del prodotto misto, si può osservare che

$$(\mathbf{u} \wedge d\mathbf{l}) \cdot \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Applicando, poi, il teorema di Stokes, si ottiene che

$$\frac{d\Phi_{\mathcal{S}(t)}(\boldsymbol{\omega})}{dt} = \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \oint_C d\mathbf{l} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{u}) = \int_{S_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \text{curl}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) \right] = 0$$

dal momento che, essendo il fluido inviscido con flusso barotropico ed essendo presenti unicamente forze conservative, vale l'equazione in Eq.(1.8). Si è ottenuto, pertanto, che

$$\frac{d}{dt} \oint_{\gamma(t)} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}(t)} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = \frac{d\Phi_{\mathcal{S}(t)}(\boldsymbol{\omega})}{dt} = 0,$$

per cui il teorema risulta dimostrato.  $\square$

Si è, ora, in grado di enunciare e dimostrare quelle note come leggi di Helmholtz [24, §§1.5,1.6]. Si premettono, tuttavia, alcune definizioni.

In una regione di fluido in cui la vorticità non è identicamente nulla, si indicherà con il nome di linee di vorticità (*vortex lines*) le curve definite dalle equazioni (in  $N = 3$  dimensioni)

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (1.45)$$

cioè tali che la vorticità  $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x}, t)$  sia tangente in ogni punto della curva.

Si chiamerà, poi, *vortex tube* il volume delimitato dalle linee di vorticità passanti per una curva riducibile tracciata all'interno del fluido. Direttamente dalla definizione, si ha che la vorticità è sempre tangente alla superficie del *vortex tube* in ogni punto e si può osservare che il flusso di vorticità che attraversa una qualunque sezione del *vortex tube* rimane costante per tutta la sua lunghezza. Si ha, infatti, che, dette  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  due sezioni trasversali del *vortex tube*,  $\mathcal{S}_3$  la superficie di *vortex tube* da esse limitata e  $\Sigma = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 \cup \mathcal{S}_3 = \partial\mathcal{V}$ ,

$$\int_{\mathcal{S}_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{\mathcal{S}_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{\Sigma} dS_{\Sigma} \mathbf{n}_{\Sigma} \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{\mathcal{S}_3} dS_3 \mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathcal{V}} dV \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (1.46)$$

Dal momento che il flusso di vorticità precedentemente citato coincide con la circolazione lungo una qualunque curva chiusa che racchiuda il *vortex tube* e tracciata sulla sua superficie (senza avvolgimenti multipli)

$$\int_{\mathcal{S}} dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = \oint_{\partial\mathcal{S}} d\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{u}, \quad (1.47)$$

si può notare che anche quest'ultima grandezza rimane costante lungo tutto il *vortex tube*: essa è chiamata intensità (*strength*) del *vortex tube*. Ne consegue che i *vortex tubes* possono unicamente essere chiusi su sé stessi, estendersi all'infinito oppure iniziare o interrompersi sulla frontiera del fluido.

Infine, si utilizzerà il termine "vortice" per indicare una regione limitata di fluido a vorticità non nulla immersa in un flusso irrotazionale.

## Le leggi di Helmholtz

**Teorema 2** (1<sup>a</sup> legge di Helmholtz). *Si consideri un fluido inviscido con flusso barotropico. Se agiscono unicamente forze conservative, allora l'intensità di un vortex tube rimane costante nel tempo seguendo il moto del fluido.*

*Dimostrazione.* Per definizione, il campo di vorticità è tangente in ogni punto alla superficie del *vortex tube*, cioè

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

con  $\mathbf{n}$  versore normale alla superficie del *vortex tube*. Si consideri, dunque, la superficie materiale  $\mathcal{S}_v$  formata dagli elementi di fluido che si trovano sulla superficie di un *vortex tube* in un dato istante iniziale  $t_0$ . Data una qualunque curva chiusa riducibile  $\gamma$  tracciata su tale superficie e che non racchiuda il *vortex tube*, si ha, allora, che la circolazione attraverso di essa è nulla, dal momento che

$$\oint_{\gamma} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathcal{S}_{\gamma} \subset \mathcal{S}_v} dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0,$$

dove si intende che  $\partial\mathcal{S}_{\gamma} = \gamma$ . Utilizzando le ipotesi di fluido inviscido con flusso barotropico e soggetto unicamente a campi di forza conservativi, si può applicare il teorema di Kelvin sulla circolazione (Th.(1)), giungendo alla conclusione che la grandezza precedentemente calcolata rimane nulla per ogni istante temporale considerato. Ciò significa che la vorticità rimane sempre tangente alla superficie materiale  $\mathcal{S}_v$ , che, pertanto, definisce un *vortex tube* per ogni istante temporale considerato. Dunque i *vortex tube* "si muovono con il fluido" e, sempre applicando il Th.(1), si ottiene che l'intensità del *vortex tube* (costante per tutta la sua lunghezza, per quanto già osservato in precedenza) è una costante del moto.  $\square$

**Teorema 3** (2<sup>a</sup> legge di Helmholtz). *A parità di ipotesi formulate nella legge precedente (Th.(2)), si ha che gli elementi di fluido, che in un dato istante temporale si trovano su una linea di vorticità, si troveranno su una linea di vorticità anche per ogni istante temporale successivo.*

*Dimostrazione.* Si è ottenuto nella precedente dimostrazione che le superfici dei *vortex tube* sono superfici materiali (se sono valide le ipotesi del teorema di Kelvin sulla circolazione). Le linee di vorticità possono essere ottenute come intersezione di tali superfici e, pertanto, si tratta di curve materiali, cioè costituite sempre dagli stessi elementi di fluido. Il teorema risulta, pertanto, dimostrato.  $\square$

**Teorema 4** (3<sup>a</sup> legge di Helmholtz). *Gli elementi di fluido che presentano inizialmente vorticità nulla rimangono liberi dalla vorticità anche per ogni istante temporale successivo (se sono valide le ipotesi già formulate per Th.(2) e Th.(3)).*

*Dimostrazione.* Si consideri una regione semplicemente connessa di fluido, caratterizzata dalla proprietà di avere inizialmente vorticità nulla. Si ha, allora, che il flusso di vorticità attraverso una qualunque superficie materiale è inizialmente nullo ed è nullo anche per ogni istante successivo (sempre per il teorema di Kelvin sulla circolazione, per considerazioni analoghe a quelle svolte nelle dimostrazioni precedenti). Pertanto la vorticità nella regione considerata rimane nulla anche in ogni istante temporale successivo a quello iniziale. Il ragionamento si può estendere in modo ovvio a tutto il volume occupato dal fluido.  $\square$

I precedenti teoremi sono usati frequentemente nella descrizione del flusso dei fluidi, insieme con le equazioni generali già discusse in precedenza (§1.1.1). Queste ultime, in particolare, possono essere esplicitate in funzione della vorticità [24, §1.5]. Si consideri, ad esempio, l'equazione di Eulero riportata in Eq.(1.4). Applicando il rotore a entrambi i membri dell'equazione e ricordando l'identità vettoriale in Eq.(1.5), si ottiene un'equazione di evoluzione temporale del campo di vorticità (per un fluido inviscido), nota come equazione di Fridman:

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{\nabla\rho}{\rho^2} \wedge \nabla p + \operatorname{curl} \mathbf{f}. \quad (1.48)$$

Nel caso particolare di flusso barotropico, le superfici a densità costante sono parallele alle superfici a pressione costante, per cui  $\nabla\rho \wedge \nabla p = 0$ . Se, inoltre, agiscono unicamente forze conservative, si ha che  $\operatorname{curl} \mathbf{f} = 0$  e si ottiene l'equazione di Helmholtz

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (1.49)$$

che può essere scritta anche nella forma già vista in precedenza (Eq.(1.8))

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}). \quad (1.50)$$

Si osservi, infine, che, considerando la forma in Eq.(1.49), è possibile esplicitare il termine  $\operatorname{div} \mathbf{u}$  attraverso l'equazione di continuità in Eq.(1.2), ottenendo che

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} = \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (1.51)$$

### L'equazione di Cauchy

L'Eq.(1.51) può essere integrata e ammette una soluzione formale in termini dell'equazione di Cauchy [15]:

$$\frac{\omega_i(\mathbf{x}, t)}{\rho} = \frac{\omega_j(\mathbf{x}_0, 0)}{\rho_0} \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}, \quad (1.52)$$

che, nel caso di densità uniforme e costante (si può porre  $\rho = 1$ ), può essere scritta semplicemente nella forma

$$\omega_i(\mathbf{x}, t) = \omega_j(\mathbf{x}_0, 0) \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}}. \quad (1.53)$$

*Dimostrazione.* L'Eq.(1.52) può essere ottenuta rigorosamente a partire da una descrizione Lagrangiana del flusso del fluido. Si preferisce, tuttavia, fornirne una giustificazione

valutandone l'esattezza attraverso la sostituzione nell'Eq.(1.51). Infatti, differenziando rispetto al tempo la soluzione in Eq.(1.52), si può osservare che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_i(\mathbf{x}, t)}{\rho} \right) &= \frac{\omega_j(\mathbf{x}_0, 0)}{\rho_0} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_{0j}} \right) = \frac{\omega_j(\mathbf{x}_0, 0)}{\rho_0} \frac{\partial u_i}{\partial x_{0j}} = \\ &= \frac{\omega_j(\mathbf{x}_0, 0)}{\rho_0} \frac{\partial x_k}{\partial x_{0j}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \left( \frac{\omega_k}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) u_i \end{aligned}$$

e pertanto l'equazione di Cauchy verifica l'equazione di Helmholtz.  $\square$

L'importanza dell'equazione di Cauchy (Eq.(1.53)) risiede nel fatto che stabilisce che è possibile mappare in modo continuo il campo di vorticità dal suo stato iniziale  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0, 0)$  al suo stato  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  attraverso lo Jacobiano  $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0$ . Ne risulta, dunque, che la topologia della vorticità è conservata nel moto, cioè che la configurazione finale delle linee di vorticità è ottenibile come deformazione continua (omeomorfismo) delle linee di vorticità nella configurazione iniziale.

La precedente forma dell'equazione di Helmholtz (Eq.(1.51)) ha anche applicazioni interessanti nei casi di fluido bidimensionale e di fluido tridimensionale con *axisymmetric flow* e componente azimutale della velocità nulla [24, §1.5].

Nella prima situazione, si ha che il prodotto  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  è identicamente nullo, dal momento che, per la definizione in Eq.(1.28) la vorticità risulta ortogonale al piano in cui è definito il campo di velocità. Di conseguenza l'equazione precedente assume la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = 0. \quad (1.54)$$

Dunque la grandezza  $\boldsymbol{\omega} / \rho$  rimane costante seguendo il moto di un elemento di fluido e, per un fluido incomprimibile (cioè tale per cui  $d\rho / dt = 0$ ) oppure omogeneo ( $\rho = \text{costante}$ ), si ottiene l'equazione di conservazione della vorticità

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = 0. \quad (1.55)$$

Nel secondo caso, si può osservare che le linee di flusso giacciono interamente su superfici piane passanti per l'asse di simmetria del flusso. Utilizzando, allora, coordinate cilindriche  $(r, \varphi, z)$ , si ha che  $\mathbf{u} = u_r \mathbf{r} + u_z \mathbf{z}$  (poiché si è supposto  $u_\varphi = 0$ ),  $\boldsymbol{\omega} = \omega_\varphi \boldsymbol{\varphi}$  e pertanto

$$\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d\omega_\varphi \boldsymbol{\varphi}}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\omega_\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u_r \mathbf{r} + u_z \mathbf{z}) = \frac{\omega_\varphi u_r \boldsymbol{\varphi}}{\rho r} = \frac{\omega_\varphi \boldsymbol{\varphi}}{\rho r} \frac{dr}{dt}, \quad (1.56)$$

dunque

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\omega_\varphi}{\rho r} \right) = 0. \quad (1.57)$$

Dalla precedente discende direttamente che, se il fluido è a densità costante, allora la vorticità risulta essere proporzionale alla distanza  $r$  dall'asse di simmetria del flusso.

### 1.2.3 Invarianti del moto

Le leggi di Helmholtz esposte nel paragrafo precedente forniscono importanti relazioni di conservazione per il moto di un fluido inviscido, ma è possibile ottenere ulteriori informazioni sul flusso (sempre con  $N = 3$ ) studiando le simmetrie che può presentare l'equazione di Eulero (nella forma in Eq.(1.4) o, equivalentemente, in quella in Eq.(1.48)). Infatti, all'invarianza di tale equazione per traslazione temporale è associato un invariante del moto, così come accade anche in conseguenza dell'invarianza dell'equazione di Eulero per traslazione spaziale e riflessione: questi invarianti sono, rispettivamente, l'energia cinetica del fluido, l'impulso idrodinamico e l'elicità [24, §§3.2,3.5,3.11,3.12]. Tuttavia, affinché le grandezze precedenti siano effettivamente invarianti del moto, è necessario che il fluido sia illimitato e incomprimibile (si considererà la densità come uniforme e costante, ponendola per semplicità pari all'unità<sup>3</sup>) e che agiscano unicamente forze conservative. Pertanto, tali ipotesi si supporranno verificate in quanto segue, ove non altrimenti specificato.

Per un fluido tridimensionale in una regione  $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^3$  (che può anche essere infinitamente estesa se è valida la condizione 3 del paragrafo §1.2.1) si definisce l'**energia cinetica** attraverso il seguente integrale di volume ( $dV \equiv d^3x$ ):

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} dV \rho u^2. \quad (1.58)$$

Se il fluido ha densità uniforme e costante ( $\rho = 1$ ), si può osservare che, applicando l'identità vettoriale in Eq.(1.5) e il teorema della divergenza, si ha che

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} dV u^2 = \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega} - \int_{\partial\mathcal{O}} dS \left[ (\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) - \frac{1}{2} u^2 (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}) \right], \quad (1.59)$$

dove  $\mathbf{n}$  indica il versore normale alla superficie  $\partial\mathcal{O}$ . L'integrale di superficie nella precedente si annulla nel caso di fluido illimitato, ottenendo che l'energia cinetica può essere calcolata come integrale sulle sole regioni di fluido a vorticità non nulla:

$$K = \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}. \quad (1.60)$$

Un'altra espressione ancora per l'energia cinetica può essere ottenuta ricorrendo al potenziale vettore  $\mathbf{A}$  definito in Eq.(1.33). Si ha che

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} dV u^2 = \frac{1}{2} \left( \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{\partial\mathcal{O}} dS \mathbf{A} \wedge \mathbf{u} \right), \quad (1.61)$$

---

<sup>3</sup>Si osservi che assumere una densità uniforme e costante implica che, per l'equazione di continuità (Eq.(1.1)), il campo di velocità sia solenoidale, cioè che sia valida l'Eq.(1.12) in ogni punto del fluido.

dove per un fluido illimitato l'integrale di superficie si annulla. Dunque, ricordando l'espressione di  $\mathbf{A}$  ottenuta in Eq.(1.36),

$$K = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{8\pi} \int_{\mathcal{O}} dV \int_{\mathcal{O}} dV' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (1.62)$$

L'energia cinetica è un invariante del moto per un qualunque fluido inviscido, incomprimibile e illimitato (o limitato, con frontiera fissa) sul quale agiscono unicamente forze conservative.

*Dimostrazione.* Sia  $U$  il potenziale che descrive il campo di forze conservativo esterno ( $\mathbf{f} = -\nabla U$ ). Si ha, allora, che la derivata dell'energia cinetica è nulla, dal momento che, per la definizione in Eq.(1.58), per l'equazione di Eulero (Eq.(1.4)) nel caso incomprimibile e per l'ipotesi di fluido incomprimibile (dalla quale discende che  $\text{div } \mathbf{u} = 0$ ),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{O}} dV u^2 = \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \int_{\mathcal{O}} dV (-\mathbf{u} \cdot \nabla p + \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}) = - \int_{\partial\mathcal{O}} dS \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}(p + U),$$

nella quale l'ultimo integrale è nullo se il dominio  $\mathcal{O}$  è illimitato (e, dunque, la superficie  $\partial\mathcal{O}$  si trova all'infinito dove, per la condizione 3 del paragrafo §1.2.1, la velocità si annulla) oppure se  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  su  $\partial\mathcal{O}$  (cioè il fluido è limitato da una superficie fissa).<sup>4</sup>  $\square$

L'invariante del moto associato alla simmetria dell'equazione di Eulero per traslazione spaziale è chiamato **impulso idrodinamico** ed è definito (per unità di densità del fluido tridimensionale) come

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{x} \wedge \boldsymbol{\omega}. \quad (1.63)$$

Si può verificare che questa grandezza svolge per il fluido un ruolo simile a quello della quantità di moto nella dinamica di un punto materiale, dal momento che

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \tilde{\mathbf{f}}, \quad (1.64)$$

nella quale si indicano con  $\tilde{\mathbf{f}}$  le eventuali forze non conservative (per unità di densità) agenti in una regione limitata  $\mathcal{V} \subset \mathcal{O}$  del fluido o, comunque, decrescenti esponenzialmente all'infinito (altrimenti si avrebbe un campo di vorticità non nullo all'infinito,

---

<sup>4</sup>Si noti nella precedente equazione la differenza fra le notazioni  $d/dt$  e  $d/dt$ : la prima indica la derivata in senso ordinario fatta rispetto alla variabile temporale, la sola dalla quale potrebbe dipendere l'energia cinetica  $K$ , essendo una caratteristica globale del flusso del fluido; la seconda, invece, indica la derivata Lagrangiana, coerentemente con le notazioni già utilizzate.

contrariamente a quanto richiesto dalla condizione 4 del paragrafo §1.2.1). Si ottiene in modo evidente dalla precedente che, se sono presenti unicamente forze conservative, allora l'impulso idrodinamico è un invariante del moto ( $d\mathbf{I}/dt = 0$ ).

*Dimostrazione.* Sempre nell'ipotesi di fluido incomprimibile già fatta in precedenza, l'equazione di Fridman (Eq.(1.48)) assume la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \operatorname{div} \mathbf{u} + \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{f}},$$

cioè

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \operatorname{curl}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}) + \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{f}}.$$

Si ha, dunque, che, differenziando rispetto al tempo l'espressione in Eq.(1.63),

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{x} \wedge \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{x} \wedge \operatorname{curl} \tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{x} \wedge \operatorname{curl}(\mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}).$$

Si può, poi, applicare l'identità vettoriale

$$\int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{x} \wedge \operatorname{curl} \boldsymbol{\alpha} = 2 \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \boldsymbol{\alpha} + \int_{\partial \mathcal{O}} dS \mathbf{x} \wedge (\mathbf{n} \wedge \boldsymbol{\alpha}) \quad (1.65)$$

con  $\boldsymbol{\alpha} = \tilde{\mathbf{f}}$  e con  $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega}$ , ottenendo che

$$\frac{d\mathbf{I}}{dt} = \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \tilde{\mathbf{f}} + \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega},$$

valida per un fluido tridimensionale illimitato per il quale entrambi i campi  $\tilde{\mathbf{f}}$  e  $\boldsymbol{\omega}$  si annullano all'infinito. Nella precedente, il secondo termine si può scrivere come un integrale di superficie della velocità nella forma

$$\int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \mathbf{u} \wedge \boldsymbol{\omega} = \int_{\mathcal{O}} d\mathbf{x} \left[ \frac{1}{2} \nabla u^2 - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \int_{\partial \mathcal{O}} dS \left[ \frac{1}{2} u^2 \mathbf{n} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u} \right],$$

il quale risulta nullo, dal momento che la superficie  $\partial \mathcal{O}$  si trova all'infinito e la funzione integranda è di ordine  $\mathcal{O}(|\mathbf{x}|^{-6})$  per  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  (Eq.(1.38)).  $\square$

Analogamente, per un fluido illimitato risulta possibile definire l'impulso idrodinamico angolare

$$\mathcal{I} = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{O}} dV \boldsymbol{\omega} |\mathbf{x}|^2, \quad (1.66)$$

per il quale

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = \int_{\mathcal{O}} dV \mathbf{x} \wedge \tilde{\mathbf{f}}, \quad (1.67)$$

con ovvio significato delle notazioni. Dunque, la variazione nel tempo dell'impulso idrodinamico angolare è pari al momento delle forze non conservative agenti (sempre limitate in una regione finita di fluido o decrescenti esponenzialmente all'infinito) e, se quest'ultimo risulta nullo, l'impulso idrodinamico angolare è un invariante del moto.

Rimane, dunque, da definire l'**elicità**, grandezza particolarmente utile nel caso in cui il flusso sia nella forma di un vortice (cioè, come definito nel paragrafo §1.2.2, sia presente una regione di fluido limitata avente vorticità non nulla e immersa in un flusso irrotazionale). L'elicità è, in generale, esprimibile nella forma

$$J = \int_{\mathcal{O}_V} dV \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (1.68)$$

nella quale  $\mathcal{O}_V$  indica il volume materiale di definizione del vortice. Si noti che, per la condizione 4 del paragrafo §1.2.1 applicata alla frontiera del vortice, la precedente definizione è invariante per trasformazioni di gauge del campo di velocità: posto

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \nabla\phi, \quad (1.69)$$

si ha che

$$J' = \int_{\mathcal{O}_V} dV \mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega} = J + \int_{\partial\mathcal{O}_V} dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \phi = J, \quad (1.70)$$

dal momento che  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  sulla frontiera del vortice. Ne consegue che l'elicità dipende unicamente dalla velocità indotta dal vortice e non dall'eventuale presenza di altri potenziali (che, di fatto, agirebbero semplicemente come trasformazioni di gauge della velocità).

Dato un vortice isolato in un fluido inviscido e incomprimibile, l'elicità è un invariante del moto se agiscono unicamente forze conservative ( $\mathbf{f} = -\nabla U + \tilde{\mathbf{f}}$ , con  $\tilde{\mathbf{f}} = 0$ ).

*Dimostrazione.* Considerando sempre valida la relazione  $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$  sulla superficie materiale  $\partial\mathcal{O}_V$ , si ha che

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \int_{\mathcal{O}_V} dV \left( \frac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \boldsymbol{\omega} + \mathbf{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \right) = \\ &= \int_{\partial\mathcal{O}_V} dS \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega} \left( \frac{1}{2}u^2 - p - U \right) + 2 \int_{\mathcal{O}_V} dV \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{f}} + \int_{\partial\mathcal{O}_V} dS \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u} = \\ &= 2 \int_{\mathcal{O}_V} dV \boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{\mathbf{f}} + \int_{\partial\mathcal{O}_V} dS \mathbf{n} \wedge \tilde{\mathbf{f}} \cdot \mathbf{u}, \end{aligned}$$

la quale si annulla se  $\tilde{\mathbf{f}} = 0$ . In questo modo risulta verificato che l'elicità è un invariante del moto se le precedenti condizioni sono rispettate.  $\square$

Mentre le interpretazioni fisiche dell'energia cinetica ( $K$ ) e dell'impulso idrodinamico ( $\mathbf{I}$ ) sono facilmente intuibili sulla base delle nozioni di meccanica classica di base e dei risultati precedentemente ottenuti, più attenzione è necessaria nel caso dell'elicità ( $J$ ). Si consideri il caso in cui il flusso sia nella forma di *vortex filaments* ("filetti vorticosi", cioè *vortex tubes* immersi in un flusso irrotazionale, dunque vortici dalla forma capillare) chiusi su loro stessi. L'elicità, allora, può essere considerata come una misura della complessità dei nodi presenti nella configurazione di tali *vortex filaments* [17]. Questo concetto sarà chiarito in seguito (§2.1.2).

### 1.2.4 Distribuzioni singolari di vorticità

Fino ad ora si è trattato dei campi di velocità e vorticità come se fossero campi regolari, cioè campi continui aventi derivata continua. Questo rappresenta il caso che si verifica più facilmente per fluidi viscosi (reali) nei quali eventuali singolarità, presenti al più negli istanti iniziali, vengono ridotte ed eliminate per effetto dell'attrito viscoso. Tuttavia, specialmente per fluidi inviscidi (ideali) per i quali risulti valida l'equazione di Helmholtz (Eq.(1.50)), esistono distribuzioni singolari di vorticità che sono permesse dalle equazioni fondamentali (§1.1) e presentano una certa stabilità per le leggi del moto (§1.2.2) [24, §2].

Per studiare tali singolarità, si considererà in questa sezione un fluido tridimensionale inviscido sul quale agiscono unicamente forze conservative e avente densità uniforme e costante, posta per semplicità pari all'unità.

Il campo di vorticità del fluido può presentare una discontinuità di prima specie in corrispondenza di una superficie all'interno del fluido, cioè può verificarsi che, detta  $\mathcal{S}_J$  tale superficie,

$$[\boldsymbol{\omega}]_1^2 \equiv \boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 = \mathcal{J} \neq \mathbf{0}, \quad (1.71)$$

dove si sono utilizzati i pedici 1 e 2 per distinguere le due facce della superficie ( $\boldsymbol{\omega}_2$  indica, dunque, il valore limite del campo di vorticità avvicinandosi ad  $\mathcal{S}_J$  da un lato, mentre  $\boldsymbol{\omega}_1$  avvicinandosi dall'altro lato). Quando ciò accade, si parla di *vortex jump*.

Più precisamente, si può dimostrare che il campo di vorticità può subire una discontinuità di prima specie unicamente nella sua componente tangenziale alle superficie  $\mathcal{S}_J$  mentre la sua componente normale si conserva:

$$\boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{t}_2 - \boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{t}_1 = \mathcal{J} \quad (1.72)$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = \boldsymbol{\omega}_2 \cdot \mathbf{n}_2, \quad (1.73)$$

dove  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$  indicano rispettivamente i versori tangente e normale alla superficie  $\mathcal{S}_J$ .

*Dimostrazione.* La precedente osservazione discende direttamente dal fatto che il campo di vorticità è un campo solenoidale (Eq.(1.29)). Infatti, si consideri un volume cilindrico

$\mathcal{V}$  la cui superficie laterale  $\mathcal{S}_l$  intersechi la superficie di discontinuità  $\mathcal{S}_J$ . Siano, poi,  $\delta h$  la sua altezza infinitesima e  $\mathcal{S}_2$  e  $\mathcal{S}_1$  le superfici delle due basi. Si ha che, per l'Eq.(1.29),

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\delta h \rightarrow 0} \int_{\mathcal{V}} dV \operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = \\ &= \lim_{\delta h \rightarrow 0} \left( \int_{\mathcal{S}_l} dS_l \mathbf{n}_l \cdot \boldsymbol{\omega} + \int_{\mathcal{S}_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\omega} - \int_{\mathcal{S}_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega} \right) = \\ &= \int_{\mathcal{S}_2} dS_2 \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - \int_{\mathcal{S}_1} dS_1 \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}_1 \end{aligned}$$

e, vista l'arbitrarietà della scelta del volume  $\mathcal{V}$ , si ottiene subito la conservazione della componente normale della vorticità attraverso la superficie  $\mathcal{S}_J$ .

Pertanto, se il campo di vorticità presenta una discontinuità lungo la superficie  $\mathcal{S}_J$ , tale discontinuità può manifestarsi unicamente nella componente tangente alla superficie.  $\square$

Si può osservare anche che il campo di velocità risulta continuo attraverso la superficie di discontinuità della vorticità  $\mathcal{S}_J$ , cioè

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad (1.74)$$

dal momento che risulta continuo l'integrale in Eq.(1.40) per discontinuità di prima specie della vorticità. Di conseguenza, a meno di discontinuità dei campi di forza esterni, anche la pressione del fluido rimane costante attraverso la superficie:

$$p_1 = p_2. \quad (1.75)$$

*Dimostrazione.* Si consideri l'equazione di Eulero in Eq.(1.4). Se il campo di forze esterno è sufficientemente regolare, è possibile definire una funzione continua  $\tilde{p}$  tale che

$$\mathbf{f} = -\nabla \tilde{p},$$

così che l'equazione di partenza assuma la forma

$$\nabla P = -\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right),$$

con  $P = p + \tilde{p}$ , sottintendendo sempre che  $\rho = 1$ .<sup>5</sup>

Il membro di destra della precedente equazione contiene termini che presentano al più

---

<sup>5</sup>Si può osservare che, se i campi in esame sono sufficientemente regolari, considerando la divergenza di entrambi i membri dell'equazione e ricordando che  $\operatorname{div} \mathbf{u} = \partial_i u_i = 0$  nel caso di densità omogenea e costante, si può ottenere un'equazione di Poisson per il campo scalare di pressione  $P$ :

$$\nabla^2 P = -\left( \frac{\partial}{\partial t} (\partial_i u_i) + \partial_i (u_j \partial_j u_i) \right) = -\partial_i (u_j \partial_j u_i + u_i \partial_j u_j) = -\partial_i \partial_j (u_i u_j).$$

discontinuità di tipo salto attraverso la superficie  $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$  e, dunque, lo stesso si può dire anche di  $\nabla P$ . Ne consegue che il campo scalare  $P$  è continuo attraverso  $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$  e, vista la continuità di  $\tilde{p}$ , anche  $p$  deve essere continuo.  $\square$

Infine si può notare come la superficie  $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$  sia una superficie materiale, cioè tale per cui sia soddisfatta un'equazione nella forma

$$\frac{d\mathcal{S}_{\mathcal{J}}}{dt} = \frac{\partial\mathcal{S}_{\mathcal{J}}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathcal{S}_{\mathcal{J}} = 0, \quad (1.76)$$

dove si intende che la superficie del *vortex jump* sia descritta dall'equazione  $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}(\mathbf{x}, t) = 0$ .

*Dimostrazione.* Se il campo di velocità del flusso è solenoidale, allora si può scrivere l'equazione di Helmholtz (Eq.(1.49)) nella forma seguente:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Si può osservare che, almeno in prossimità della superficie del *vortex jump*, il campo di vorticità è dato da, ricorrendo alla definizione in Eq.(1.71),

$$\boldsymbol{\omega} = \mathcal{J} \Theta(\mathcal{S}_{\mathcal{J}}) + \tilde{\boldsymbol{\omega}},$$

nella quale  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  racchiude i termini meno singolari del campo di vorticità e  $\Theta(\mathbf{x})$  indica la funzione  $\theta$  di Heaviside generalizzata a tre dimensioni:

$$\Theta(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^3 \theta(x_i), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Sostituendo l'espressione del campo di vorticità nell'equazione di Helmholtz ottenuta e ricordando che il campo di velocità è continuo attraverso la superficie  $\mathcal{S}_{\mathcal{J}}$ , si ha che

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) (\mathcal{J} \Theta(\mathcal{S}_{\mathcal{J}})) + \dots = \\ &= \mathcal{J} D(\Theta(\boldsymbol{\xi}))|_{\boldsymbol{\xi}=\mathcal{S}_{\mathcal{J}}} \left( \frac{\partial\mathcal{S}_{\mathcal{J}}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathcal{S}_{\mathcal{J}} \right) + \dots = \\ &= \mathcal{J} \delta(\mathcal{S}_{\mathcal{J}}) \left( \frac{\partial\mathcal{S}_{\mathcal{J}}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathcal{S}_{\mathcal{J}} \right) + \dots, \end{aligned}$$

dalla quale, imponendo l'annullamento del coefficiente del termine singolare, si ottiene esattamente l'Eq.(1.76). Ciò dimostra che la superficie del *vortex jump* è una superficie materiale.  $\square$

Si possono presentare anche distribuzioni di vorticità singolari nelle quali si ha un valore infinito di  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)$  (discontinuità di seconda specie) lungo una superficie  $\mathcal{S}$ : si parla, allora, di *vortex sheet*, distribuzione caratterizzata da una vorticità nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \mathcal{S} \delta(n) + \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (1.77)$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale alla superficie,  $n$  indica la distanza dalla superficie lungo tale versore,  $\delta(x)$  è la funzione  $\delta$  di Dirac e il vettore  $\mathcal{S}$  (il cui modulo  $\mathcal{S}$  è in generale una funzione della posizione lungo la superficie) è tale per cui  $\mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = 0$ , mentre il termine  $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$  permette di considerare altri termini meno singolari e l'eventuale presenza di un flusso non irrotazionale al di fuori della superficie del *vortex sheet*.

Quando la vorticità è non nulla al di fuori di  $\mathcal{S}$ , si possono avere delle linee di vorticità che attraversano la superficie del *vortex sheet*. Si ottiene, allora, che

$$\operatorname{div} \mathcal{S} = [\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n}]_1^2, \quad (1.78)$$

con notazione del tutto analoga a quella già utilizzata in precedenza. Si consideri, per semplicità, il caso in cui  $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = 0$ , cioè il caso in cui sia presente un flusso irrotazionale al di fuori della superficie del *vortex sheet*. Dalla Eq.(1.29) discende, allora, la condizione sulla divergenza del vettore  $\mathcal{S}$  nella forma

$$\operatorname{div} \mathcal{S} = 0, \quad (1.79)$$

nella quale il calcolo può essere eseguito sulla superficie  $\mathcal{S}$ , dal momento che le linee di vorticità risultano interamente contenute al suo interno.

Si può osservare che, sostituendo l'espressione in Eq.(1.77) nella Eq.(1.38), è possibile ottenere l'espressione del campo di velocità indotto dal *vortex sheet* (sempre nell'ipotesi di flusso irrotazionale circostante):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} dS \frac{\mathcal{S}(\mathbf{x}(S), t) \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}(S))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}(S)|^3}, \quad (1.80)$$

nella quale l'integrazione è effettuata lungo la superficie del *vortex sheet* ( $\mathbf{x}(S)$  è il vettore che indica la posizione di un punto  $S$  sulla superficie  $\mathcal{S}$  e  $dS$  è l'elemento infinitesimo di area). La precedente risulta ben definita quando calcolata per un punto  $P$  tale che  $\mathbf{x}(P) \notin \mathcal{S}$ , tuttavia, considerandone il limite per  $P \rightarrow Q$ , dove  $Q$  è un punto sulla superficie del *vortex sheet*, si ottengono valori differenti a seconda che ci si avvicini dal lato 2 o dal lato 1. Infatti, indicando con  $\mathbf{n}$  il versore normale a  $\mathcal{S}$  con verso da 1 a 2, si ottiene che

$$\lim_{P \rightarrow Q} \mathbf{v}(\mathbf{x}(P), t) = \pm \frac{1}{2} \mathcal{S}(\mathbf{x}(Q), t) \wedge \mathbf{n}(\mathbf{x}(Q), t) + \mathbf{v}_0(\mathbf{x}(Q), t), \quad (1.81)$$

dove il segno + si riferisce al caso in cui  $P$  è inizialmente nel lato 2, mentre il segno  $-$  a quello in cui  $P$  è inizialmente nel lato 1 e con

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}(Q), t) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{P} \int_{\mathcal{S}} dS (\mathcal{S}(\mathbf{x}(S), t) - \mathcal{S}(\mathbf{x}(Q), t)) \wedge \frac{\mathbf{x}(Q) - \mathbf{x}(S)}{|\mathbf{x}(Q) - \mathbf{x}(S)|^3}, \quad (1.82)$$

nella quale il simbolo  $\mathcal{P}$  denota la parte principale dell'integrale.

*Dimostrazione.* Si può osservare che l'espressione in Eq.(1.80) calcolata per il punto  $P$  può essere scritta nella forma

$$\mathbf{v}(P) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{S}(Q) \wedge \int_{\mathcal{S}} dS \frac{\mathbf{r}_{PS}}{r_{PS}^3} + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{S}} dS (\mathcal{S}(S) - \mathcal{S}(Q)) \wedge \frac{\mathbf{r}_{PS}}{r_{PS}^3},$$

dove si è utilizzata la notazione  $\mathbf{r}_{PS} \equiv \mathbf{x}(P) - \mathbf{x}(S)$  e si sono trascurate, per semplicità di scrittura, le dipendenze temporali. E' possibile dimostrare che il secondo termine della precedente espressione ha un limite ben definito per  $P \rightarrow Q$ , mentre per il primo termine si ha che, per il teorema di Gauss (la funzione integranda dipende inversamente dalla distanza  $\overline{PS}$  al quadrato),

$$\lim_{P_2 \rightarrow Q} \int_{\mathcal{S}} dS \frac{\mathbf{r}_{PS}}{r_{PS}^3} - \lim_{P_1 \rightarrow Q} \int_{\mathcal{S}} dS \frac{\mathbf{r}_{PS}}{r_{PS}^3} = 4\pi \mathbf{n}(Q),$$

nella quale  $\mathbf{n}$  è normale alla superficie del *vortex sheet* ed è diretto verso il semispazio 2. Da queste considerazioni discende direttamente la Eq.(1.81).  $\square$

Dunque, la velocità presenta in  $\mathcal{S}$  una discontinuità di prima specie data da

$$[\mathbf{u}]_1^2 = \mathcal{S} \wedge \mathbf{n}, \quad (1.83)$$

dove è la componente tangenziale alla superficie del *vortex sheet* che subisce un salto, mentre la componente normale risulta continua

$$\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1. \quad (1.84)$$

*Dimostrazione.* La prima delle due equazioni precedenti discende in modo ovvio dalla Eq.(1.81).

Per verificare la seconda, invece, è possibile procedere in modo del tutto analogo a quanto fatto per dimostrare la relazione in Eq.(1.73) con  $\mathbf{u}$  al posto di  $\boldsymbol{\omega}$ , dal momento che, per l'equazione di continuità (Eq.(1.1)),  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  (nel caso considerato di fluido omogeneo a densità costante).  $\square$

Pertanto un *vortex sheet* può essere caratterizzato attraverso la definizione in Eq.(1.77) come distribuzione limite di un campo di vorticità concentrato in una regione di fluido di spessore  $\epsilon$  per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow +\infty$  in modo tale che  $\epsilon|\boldsymbol{\omega}| \rightarrow |\mathcal{S}| < +\infty$ ; tuttavia, con le

considerazioni precedenti, può essere definito anche come luogo di discontinuità di prima specie del campo di velocità (Eq.(1.83) ed Eq.(1.80)).

Infine, si può verificare che la superficie  $\mathcal{S}_S$  è una superficie materiale, dal momento che, per la 2<sup>a</sup> legge di Helmholtz, le linee di vorticità si muovono con il fluido e il *vortex sheet* è formato da linee di vorticità. La dimostrazione muove, in realtà, da considerazioni di tipo differente rispetto a quelle sommariamente esposte (per dimostrare il Th.(3) si è implicitamente considerato il campo di velocità continuo, mentre in questo caso presenta una discontinuità di prima specie) ed esula dagli scopi di questo paragrafo.

Si analizzano, infine, le distribuzioni singolari di vorticità chiamate *line vortices*, di fondamentale importanza nella modellizzazione di svariati fenomeni fisici (da quelli atmosferici, a quelli recentemente scoperti nel campo dei superfluidi) e centrali per la presente trattazione. Si tratta di distribuzioni nelle quali una vorticità infinita è concentrata lungo una curva nello spazio, in modo tale che la circolazione  $\Gamma$  calcolata per un circuito che racchiuda il *line vortex* (senza avvolgimenti multipli) sia finita. Si può, pertanto, immaginare che un *line vortex* sia il risultato del processo di limite in cui il raggio di un *vortex tube* (o *vortex filament*) tende ad annullarsi, mantenendo finita la sua intensità.

Il campo di vorticità di un *line vortex* può essere scritto nella forma

$$\boldsymbol{\omega} = \Gamma \delta(n) \delta(b) \mathbf{t}, \quad (1.85)$$

dove  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$  e  $\mathbf{b}(s)$  sono, rispettivamente, i versori tangente, normale e binormale alla curva  $\gamma$  del *line vortex* e formano il sistema di riferimento intrinseco noto come triedro di Frenet, con  $(t, n, b)$  coordinate lungo tali direzioni ed  $s$  parametro di lunghezza d'arco (App.(B)).

Si può immediatamente osservare che un *line vortex* può essere visto come l'intersezione di due *vortex sheets* e, pertanto, risulta essere una curva materiale.

Se, poi,  $\gamma$  è una curva chiusa (cioè è rispettata la condizione 4 esposta nel paragrafo §1.2.1 e, dunque, è valida la Eq.(1.38)), è possibile sostituire la precedente Eq.(1.85) nella Eq.(1.38) per ottenere il campo di velocità indotto da tale distribuzione di vorticità. Si ha la relazione nota come legge di Biot-Savart (dal momento che è formalmente analoga all'espressione del campo magnetico generato da un filo conduttore attraversato da corrente elettrica):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{\gamma} ds \frac{\mathbf{t}(s, t) \wedge (\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}(s, t))}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}(s, t)|^3}, \quad (1.86)$$

nella quale s'intende che tutti i punti  $\mathbf{x} \in \gamma$ , in un dato istante temporale  $t$ , siano esprimibili nella forma  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(s, t)$  per un qualche valore del parametro  $s$ . Pertanto, ogni elemento  $ds$  della curva del *line vortex* induce una velocità di modulo  $\Gamma \sin \vartheta ds / 4\pi r^2$  in un punto  $P$  a distanza  $r$  dall'elemento di curva considerato, con  $\vartheta$  angolo formato

dalla normale alla curva con la congiungente  $P$  con  $ds$ , nel piano contenente  $P$  e il versore tangente (la direzione della velocità indotta è normale a quest'ultimo piano e verso stabilito in modo convenzionale).

Se, poi, la curva  $\gamma$  è anche riducibile, si può ricondurre l'integrale in Eq.(1.86) ad un integrale di superficie ( $\partial\mathcal{S} = \gamma$ ) nella forma

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \nabla\Omega(\mathbf{x}, t), \quad (1.87)$$

con

$$\Omega(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathcal{S}} d\mathbf{S} \cdot \frac{\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\sigma}|^3}, \quad (1.88)$$

dove  $\boldsymbol{\sigma}$  indica il vettore posizione di un punto sulla superficie  $\mathcal{S}$  ( $\Omega(\mathbf{x}, t)$  assume il significato di angolo solido di vertice  $\mathbf{x}$  sotteso dalla curva  $\gamma$  del *line vortex*). Dalla forma in Eq.(1.87) si deduce facilmente che il potenziale del flusso indotto dal *line vortex* è dato da

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \Omega(\mathbf{x}, t) \quad (1.89)$$

e risulta ben definito quando si introduce un diaframma coincidente con la superficie  $\mathcal{S}$  attraversando la quale il potenziale  $\phi$  subisce una discontinuità di prima specie con salto pari a  $-\Gamma$ . Si può osservare che la forma del potenziale ottenuto è del tutto analoga a quella di una distribuzione di dipoli, tutti allineati normalmente alla superficie  $\mathcal{S}$  racchiusa dal *line vortex* e disposti con una densità uniforme  $\Gamma/4\pi$ .

Ritornando all'analisi della legge di Biot-Savart (Eq.(1.86)), si può osservare come essa descriva un campo di velocità che presenta una singolarità di seconda specie quando valutato per un punto  $\mathbf{x}$  che si avvicina al *line vortex*. Per questa ragione, queste particolari distribuzioni di vorticità sono utilizzate, in generale, come modello approssimato per la descrizione di alcuni flussi: si può, ad esempio, descrivere la dinamica dei *vortex filaments* (analizzata nel capitolo seguente) ipotizzando che il campo di velocità da essi generato sia nella forma in Eq.(1.86), anche se hanno una sezione trasversale piccola, ma non nulla. In tal caso, i *vortex filaments* si muoveranno nel fluido con una velocità normale alla curva tanto maggiore quanto minore è la loro sezione (fino al limite teorico di velocità infinita per sezione nulla). Un'eccezione si verifica, tuttavia, nel caso di *line vortex* rettilineo, per il quale la singolarità della legge di Biot-Savart risulta rimossa.

*Dimostrazione.* Si vuole studiare la singolarità dell'espressione in Eq.(1.86) nel limite in cui  $\mathbf{x}$  si avvicina ad un punto sulla curva  $\gamma$  del *line vortex*, analiticamente ottenibile, in un dato istante, come luogo dei punti  $\boldsymbol{\lambda}(s)$  al variare di  $s$  ascissa curvilinea. Si consideri, quindi, come origine del sistema di riferimento il punto sulla curva al quale  $\mathbf{x}$  si avvicina, per semplicità, in modo normale alla curva ( $\mathbf{x} = (x, y, 0)$ , dove l'asse  $z$  coincide con la direzione del versore tangente, l'asse  $x$  con quella del versore normale e l'asse  $y$  con quella

del versore binormale). In un intorno dell'origine si ha, allora, che, utilizzando le note formule di Frenet-Serret (riportate per comodità in Eq.(B.8))

$$\boldsymbol{\lambda}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left( \frac{d^n \boldsymbol{\lambda}}{ds^n} \right)_0 \sim s \mathbf{t}_0 + \frac{1}{2} \frac{s^2}{\varrho_0} \mathbf{n}_0 + \mathcal{O}\left(\frac{s^3}{\varrho_0^2}\right),$$

nella quale  $\varrho$  indica il raggio di curvatura. Si può, quindi, osservare che la funzione che compare sotto il segno di integrale nella Eq.(1.86) ha andamento, in un intorno dell'origine, dato da [24, §2.3]

$$\frac{\mathbf{t}_0 \wedge (\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}(s))}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\lambda}(s)|^3} \sim \frac{x \mathbf{b}_0 - y \mathbf{n}_0}{(r^2 + s^2)^{\frac{3}{2}}} \left[ 1 + \frac{3xs^2}{2(r^2 + s^2)\varrho_0} \right] + \frac{yst_0 + \frac{1}{2}s^2 \mathbf{b}_0}{(r^2 + s^2)^{\frac{3}{2}} \varrho_0} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varrho_0^2}\right),$$

dove si è posto  $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ . Sostituendo la precedente in Eq.(1.86) e valutando l'integrale per  $-\epsilon < s < \epsilon$ , si ottiene che, nel limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ ,  $\epsilon/r \rightarrow \infty$ , [24, §2.3]

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0 \sim & \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{x}{r^2} \mathbf{b}_0 - \frac{y}{r^2} \mathbf{n}_0 \right) - \frac{\Gamma \ln r}{4\pi \varrho_0} \mathbf{b}_0 - \frac{\Gamma}{4\pi \varrho_0} \left( \frac{y^2}{r^2} \mathbf{b}_0 + \frac{xy}{r^2} \mathbf{n}_0 \right) + \frac{\Gamma \ln \epsilon}{4\pi \varrho_0} \mathbf{b}_0 + \\ & + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{4\pi} \oint_{|s| > \epsilon} ds \frac{\mathbf{t} \wedge (\boldsymbol{\lambda}(s_0) - \boldsymbol{\lambda}(s))}{|\boldsymbol{\lambda}(s_0) - \boldsymbol{\lambda}(s)|^3} + \mathcal{O}\left(\frac{\Gamma r}{\varrho_0^2}\right). \end{aligned}$$

Il primo termine nella precedente espressione asintotica indica una componente del campo di velocità che descrive moti circolari intorno alla tangente al *line vortex*, come, d'altro canto, si poteva prevedere in modo intuitivo. Tuttavia compare anche un termine, il secondo, che dipende dal raggio di curvatura ed è divergente come  $\ln r$  per  $r \rightarrow \infty$  nella direzione della binormale. I restanti termini non mostrano particolari singolarità: il terzo termine, seppur discontinuo in  $r = 0$ , apporta un contributo limitato alla velocità e il quarto termine permette di rimuovere la singolarità che comporta il quinto ed ultimo termine integrale nel limite per  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Si può osservare come la singolarità che presenta la legge di Biot-Savart sia dovuta unicamente al secondo termine del precedente sviluppo asintotico, termine che si annulla nel limite per  $\varrho \rightarrow \infty$ . Questo limite corrisponde a considerare un *line vortex* rettilineo (avente, appunto, raggio di curvatura infinito).  $\square$

# Capitolo 2

## Dinamica dei *vortex filaments*

### 2.1 Filetti vorticosi (*vortex filaments*)

Ci si propone di applicare le conoscenze sviluppate nel capitolo precedente allo studio dei *vortex filaments*, rigorosamente definiti nel paragrafo §2.1.1. Nella sezione seguente (§2.2), si introdurranno, poi, gli strumenti principali che ne consentono l'analisi dinamica. Si considereranno valide le ipotesi di fluido tridimensionale inviscido e illimitato, avente densità uniforme e costante ( $\rho = 1$ ) e soggetto unicamente a forze conservative.

#### 2.1.1 Definizione di *vortex filament*

Come già anticipato in precedenza (§1.2.3), si può pensare ad un *vortex filament* ("filetto vorticoso") come ad un vortice dalla forma tubolare con sezione infinitesima o comunque di molto inferiore rispetto alla sua lunghezza. Se ne può dare una definizione più rigorosa nel modo seguente:

**Definizione 1** (*Vortex filament* o filetto vorticoso). *Si definisce vortex filament una distribuzione di vorticità in cui tutte le linee di vorticità siano confinate all'interno di un vortex tube di sezione infinitesima e circondato da flusso irrotazionale.*

Poiché la sezione del *vortex filament* è da intendersi come infinitesima, si è soliti descrivere tale distribuzione attraverso una curva  $\gamma$  chiusa su se stessa o infinita, coincidente con la linea di vorticità più interna al *vortex filament* o asse del *vortex filament*. In questo modo assume caratteristiche simili a quelle di un *line vortex* di pari intensità e la sua dinamica può essere studiata sulla base della legge di Biot-Savart (Eq.(1.86), indicata in quanto segue con la notazione "BS").

Inoltre, per le ipotesi formulate all'inizio del capitolo, sono valide le considerazioni e i teoremi esposti nel paragrafo §1.2.2. Pertanto l'intensità di un *vortex filament* è costante nel tempo, si tratta di una curva materiale e nel moto si deforma in modo continuo preservando la sua topologia (per l'equazione di Cauchy, Eq.(1.53)).

## 2.1.2 Invarianti del moto per un *vortex filament*

Le espressioni degli invarianti del moto studiati nel paragrafo §1.2.3 possono essere semplificate nel caso di *vortex filament* attraverso la sua approssimazione a *line vortex*.

Si consideri, in primo luogo, l'energia cinetica (Eq.(1.58)). Si è già visto che tale invariante del moto può essere valutato anche solo considerando le regioni di fluido a vorticità non nulla attraverso l'espressione in Eq.(1.60). Sia, dunque,  $\gamma$  la curva (immaginata come curva chiusa) che descrive il *vortex filament*, individuata nello spazio dai vettori  $\boldsymbol{\lambda}(s, t)$ , con  $s$  parametro di lunghezza d'arco. Sostituendo in Eq.(1.60) l'espressione della vorticità del *line vortex* che approssima il *vortex filament* (Eq.(1.85)), si ottiene l'energia cinetica nella forma

$$K = \Gamma \oint_{\gamma} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} \wedge dt, \quad (2.1)$$

dove  $\Gamma$  è l'intensità del *vortex filament* e  $\mathbf{t}$  indica sempre il versore tangente alla curva in un dato punto individuato dall'ascissa curvilinea  $s$  (dunque  $dt$  costituisce l'elemento infinitesimo di linea lungo la curva  $\gamma$ , già indicato in precedenza con la notazione  $d\mathbf{l}$ ).

Procedendo in modo del tutto analogo, è possibile esplicitare per il caso di *vortex filament* anche le espressioni dell'impulso idrodinamico e dell'impulso idrodinamico angolare [24, §3.8]. Infatti, direttamente dall'Eq.(1.63) discende che

$$\mathbf{I} = \frac{\Gamma}{2} \oint_{\gamma} \boldsymbol{\lambda} \wedge dt, \quad (2.2)$$

mentre dall'Eq.(1.66) si ottiene che

$$\mathcal{I} = -\frac{\Gamma}{2} \oint_{\gamma} dt |\boldsymbol{\lambda}|^2. \quad (2.3)$$

Evidente è il vantaggio di queste espressioni nelle quali compaiono integrali curvilinei al posto di quelli di volume visti in precedenza.

Per quanto riguarda l'elicità, come già accennato, può essere evidenziato il suo legame con la complessità della configurazione geometrica che assumono uno o più *vortex filaments* nello spazio [17][18].

Si consideri, inizialmente, il caso semplice di due *vortex filaments*, ciascuno chiuso su sé stesso senza formare nodi<sup>1</sup>. Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  le curve sulle quali sono definiti e siano

---

<sup>1</sup>Si veda la seguente sezione (§3.1) per una trattazione più rigorosa del concetto di nodo. Per affrontare la presente discussione sarà, tuttavia, sufficiente basarsi sul concetto intuitivo di nodo ed immaginare quest'ultimo come una curva chiusa dalla configurazione spaziale "complicata" e non riconducibile ad una circonferenza attraverso deformazioni continue (ma solo, eventualmente, "spezzando" la curva e "ricomponendo" il tratto separato in un secondo momento).

$\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  le due superfici delimitate da tali curve (ciascuna non autointersecantesi dal momento che si suppone non siano presenti nodi). Siano, infine,  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  le intensità dei due *vortex filaments*. Si può, allora, valutare la circolazione lungo la curva  $\gamma_1$  del primo *vortex filament* applicando il teorema di Stokes, ottenendo che

$$\mathcal{C}_1 = \oint_{\gamma_1} dl \cdot \mathbf{u} = \int_{\mathcal{S}_1} dS_1 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.4)$$

Per definizione di *vortex filament*, la vorticità è nulla al di fuori delle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e, pertanto, l'unico contributo al flusso di vorticità attraverso la superficie  $\mathcal{S}_1$  può derivare unicamente dal secondo *vortex filament*, nel caso in cui la curva  $\gamma_2$  intersechi la superficie  $\mathcal{S}_1$ , cioè nel caso in cui i due *vortex filaments* siano concatenati (formano un *link*). Si avrà, pertanto, che

$$\mathcal{C}_1 = \begin{cases} 0, & \text{se } \gamma_1, \gamma_2 \text{ unlinked} \\ \pm\Gamma_2, & \text{se } \gamma_1, \gamma_2 \text{ (singly) linked} \end{cases}, \quad (2.5)$$

dove il simbolo  $\pm$  indica la possibilità di avere segni differenti in base alla orientazione relativa della vorticità all'interno dei due *vortex filaments*. Più in generale si può scrivere che

$$\mathcal{C}_1 = \alpha_{12}\Gamma_2, \quad (2.6)$$

dove  $\alpha_{12}$  ( $= \alpha_{21}$ ) è un numero intero positivo o negativo che indica il numero di avvolgimenti (indice di avvolgimento) delle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

Si consideri, ora, il caso di un singolo *vortex filament* chiuso su sé stesso a formare un nodo nella forma "a trifoglio" (*trefoil knot*, Fig.(2.1)), definito sulla curva  $\gamma$  e avente intensità  $\Gamma$ . Si può, allora, osservare che la circolazione  $\mathcal{C}$  lungo  $\gamma$  può essere calcolata come nel caso precedente, aggiungendo due segmenti di vorticità che separino il nodo in due diverse curve singolarmente concatenate, ottenendo che

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} dl \cdot \mathbf{u} = \oint_{\gamma_1} dl \cdot \mathbf{u} + \oint_{\gamma_2} dl \cdot \mathbf{u} = 2\Gamma. \quad (2.7)$$

Ancora una volta la precedente può essere generalizzata per nodi più complicati introducendo un numero  $\alpha$  intero positivo o negativo che esprima il numero di avvolgimenti della curva del *vortex filament* su se stessa (indice di autoavvolgimento):

$$\mathcal{C} = 2\alpha\Gamma. \quad (2.8)$$

Quindi, riassumendo i risultati precedenti, si può affermare che, per  $n$  *vortex filaments* giacenti su curve chiuse  $\gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , non formanti nodi (o derivanti dalla semplificazione di nodi in concatenazioni di curve più semplici) e di intensità  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , si ha che

$$\mathcal{C}_i = \oint_{\gamma_i} dl \cdot \mathbf{u} = \sum_j \alpha_{ij}\Gamma_j, \quad (2.9)$$

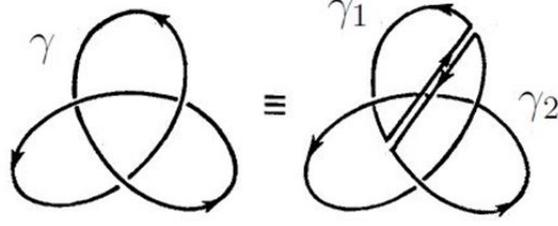


Figura 2.1: Sulla sinistra è rappresentata una proiezione nel piano della curva  $\gamma$  nella forma di un trefoil knot, con orientazione stabilita. Sulla destra, invece, è rappresentata la scomposizione del nodo in due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  fra di loro concatenate, tramite l'inserimento di due segmenti di orientazione opposta in punti opportuni della curva originale [17]. Topologicamente si tratta di strutture distinte e non riconducibili l'una all'altra attraverso deformazioni continue, ma, ai fini del calcolo della circolazione, si tratta di costruzioni equivalenti.

dove  $\alpha_{ij}$  indica l'indice di avvolgimento per le curve  $\gamma_i$  e  $\gamma_j$ .

La grandezza in Eq.(2.9) è strettamente collegata all'elicità dell' $i$ -esimo *vortex filament*. Infatti, dal momento che l'elemento infinitesimo di linea  $d\mathbf{l}$  lungo la curva  $\gamma_i$  è sempre parallelo alla vorticità  $\boldsymbol{\omega}$  per definizione di *vortex filament*, si può osservare l'equivalenza

$$d\mathbf{l} \Gamma_i = dV \boldsymbol{\omega}, \quad (2.10)$$

per la quale

$$J_i = \int_{\mathcal{O}_{V_i}} dV \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = \oint_{\gamma_i} d\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} \Gamma_i = \Gamma_i \mathcal{C}_i = \Gamma_i \sum_j \alpha_{ij} \Gamma_j. \quad (2.11)$$

Sommando su tutti i *vortex filaments* presenti, si ottiene, dunque, l'elicità nella forma

$$J = \int_{\mathcal{O}_V} dV \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_i \Gamma_i \mathcal{C}_i = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \Gamma_i \Gamma_j, \quad (2.12)$$

dalla quale, per la dipendenza di  $J$  dall'indice  $\alpha_{ij}$ , si deduce il legame fra elicità e complessità di nodi e avvolgimenti presenti nella configurazione geometrica dei *vortex filaments*.

Applicando l'equivalenza in Eq.(2.10) e BS (Eq.(1.86)) è possibile anche ottenere le seguenti espressioni per l'elicità  $J$  del fluido e per l'indice di avvolgimento  $\alpha_{ij}$ :

$$J = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{O}_V} dV \int_{\mathcal{O}_V} dV' \frac{\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}) \wedge \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{R}|^3} \quad (2.13)$$

$$\alpha_{ij} = \oint_{\gamma_i} \oint_{\gamma_j} \frac{\mathbf{R} \cdot d\mathbf{l}_i \wedge d\mathbf{l}_j}{|\mathbf{R}|^3}, \quad (2.14)$$

con  $\mathbf{R} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ ,  $\mathbf{x}_i \in \gamma_i$ ,  $\mathbf{x}_j \in \gamma_j$ .

## 2.2 LIA

Come è già stato affermato in precedenza, è possibile approssimare il comportamento di un *vortex filament* a quello di un *line vortex* la cui curva di definizione coincida con l'asse del *vortex filament*. In tal modo, è possibile utilizzare BS (Eq.(1.86)) per descrivere il campo di velocità indotto dalla distribuzione di vorticità e studiare, di conseguenza, la dinamica dei *vortex filament*. Tuttavia, le soluzioni analitiche che soddisfano BS sono difficili da ottenere (sono stati studiati in modo approfondito principalmente *vortex filaments* a geometria circolare ed elicoidale) e, impiegando approcci numerici per la risoluzione del problema, si incorre, comunque, in complicazioni: per BS è necessario valutare i contributi di ogni elemento della curva  $\gamma$  di definizione del *vortex filament*, anche quelli più distanti. Si preferisce, pertanto, cercare di superare queste difficoltà applicando un metodo asintotico, che permetta di approssimare BS.

In questa direzione, è fondamentale l'approccio basato sulla *localized induction approximation* (in breve, "LIA") [5], che permette di descrivere il moto di ogni elemento del *vortex filament* in relazione ai soli elementi più prossimi, trascurando effetti a lungo raggio. Trattandosi di un'approssimazione al primo ordine del moto del *vortex filament*, questa descrizione presenta ancora una singolarità di seconda specie (come BS, §1.2.4) per punti vicini alla curva  $\gamma$  e il campo di applicabilità delle equazioni ottenute attraverso questo approccio rimane limitato. Risulta spesso conveniente applicare LIA in un intorno sufficientemente piccolo e recuperare BS per valutare i contributi a lungo raggio, in modo tale da alleggerire il calcolo numerico, ma esistono contesti nei quali è possibile ottenere descrizioni piuttosto accurate anche semplicemente attraverso LIA.

### Equazioni del *vortex filament* in condizioni di LIA

Si consideri, sotto le ipotesi formulate all'inizio della precedente sezione (§2.1), un *vortex filament* di intensità  $\Gamma$  la cui distribuzione di vorticità si concentra attorno ad un asse costituito dalla curva  $\gamma$  regolare e non autointersecantesi, individuata nello spazio dai vettori  $\boldsymbol{\lambda}(s, t)$ , con  $s$  parametro di lunghezza d'arco. Considerando il triedro di Frenet (App.(B)) come sistema di riferimento intrinseco lungo la curva, si dimostra che il campo di velocità che descrive il moto del *vortex filament* in condizioni di LIA è nella forma

$$\mathbf{u} = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \frac{\Gamma(-\ln \varepsilon)}{4\pi} \frac{\mathbf{b}}{\varrho}, \quad (2.15)$$

nella quale  $\varrho$  è il raggio di curvatura al variare dell'ascissa curvilinea lungo la curva  $\gamma$ ,  $\mathbf{b}$  è il versore binormale alla curva ed  $\varepsilon$  indica il raggio della sezione del *vortex filament* (idealmente  $\varepsilon = \text{costante} \ll 1$ , dunque  $\mathbf{u}$  è diretto come la binormale alla curva).

*Dimostrazione.* Sia  $O$  un generico punto della curva  $\gamma$ , origine del sistema di riferimento cartesiano ottenuto attraverso il triedro di Frenet  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  nel punto  $O$ , dove si

identificano gli assi  $x$ ,  $y$  e  $z$  con le direzioni dei versori tangente, normale e binormale rispettivamente. Si considerino, poi, un punto  $Q = (\xi, \eta, \zeta) \in \gamma$  sufficientemente vicino ad  $O$  sulla curva e un punto  $P = (x, y, z) \notin \gamma$  generico. Per BS (Eq.(1.86)), la velocità indotta dalla distribuzione di vorticità in  $P$  è nella forma

$$\mathbf{u}_P = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} ds \frac{\mathbf{t}_Q \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\gamma} ds \frac{\left(\frac{d\xi}{ds}, \frac{d\eta}{ds}, \frac{d\zeta}{ds}\right) \wedge (\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q)}{|\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^3},$$

nella quale si è utilizzata la prima delle Eq.(B.8). Si è interessati a valutare la forma di  $\mathbf{u}_P$  quando il punto  $P$  si avvicina alla curva  $\gamma$ .

Facendo riferimento sempre alle equazioni di Frenet-Serret, si può osservare che, valutando i versori tangente e normale nell'origine  $O$ ,

$$\frac{d\xi}{ds} = 1, \quad \frac{d\eta}{ds} = 0, \quad \frac{d\zeta}{ds} = 0, \quad \varrho \frac{d^2\xi}{ds^2} = 0, \quad \varrho \frac{d^2\eta}{ds^2} = 1, \quad \varrho \frac{d^2\zeta}{ds^2} = 0$$

e, applicando alle funzioni  $\xi(s)$ ,  $\eta(s)$  e  $\zeta(s)$  (supposte sufficientemente regolari in  $s$ ) uno sviluppo di Taylor arrestato al terzo ordine, si ha che

$$\xi(s) \approx s + s^3\Phi_1, \quad \eta(s) \approx \frac{1}{\varrho} \frac{s^2}{2} + s^3\Phi_2, \quad \zeta(s) \approx s^3\Phi_3,$$

con  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  e  $\Phi_3$  funzioni di  $s$  limitate e continue in un intorno di  $s = 0$  ( $O$ ).

Si indichi, poi, con  $r$  la distanza fra i punti  $P$  e  $Q$

$$r^2 = |\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_Q|^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

e sia  $\varepsilon$  il modulo del vettore  $\mathbf{x}_P$  ( $\varepsilon \equiv \overline{PO}$ ), in modo tale che, indicando con  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\delta$  i coseni direttori di  $\mathbf{x}_P$ ,

$$x = \varepsilon\alpha, \quad y = \varepsilon\beta, \quad z = \varepsilon\delta.$$

Inserendo i precedenti sviluppi di Taylor e l'espressione delle coordinate del punto  $P$  appena ottenute nell'espressione di  $r^2$  e definendo

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \left(1 - \frac{1}{\varrho} \varepsilon\beta\right) s^2 - 2\varepsilon\alpha s + \varepsilon^2 \\ \Xi &= \left(2\Phi_1 + \Phi_1^2 s^2 + \frac{1}{4\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \Phi_2 s + \Phi_2^2 s^2 + \Phi_3^2 s^2\right) s - 2\varepsilon(\alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 + \delta\Phi_3), \end{aligned}$$

si ha, allora, che

$$r^2 = \Delta^2 + \Xi s^3.$$

Si possono, quindi, studiare le grandezze  $1/\Delta$ ,  $1/r$  e  $1/r^3 - 1/\Delta^3$  al decrescere di  $s$  ed  $\varepsilon$ . A tal scopo, siano  $\varsigma$  e  $\vartheta$  tali che

$$|s| = \varsigma \cos \vartheta, \quad \varepsilon = \varsigma \sin \vartheta,$$

da cui

$$\Delta^2 = \varsigma^2 \left( 1 \mp \alpha \sin 2\vartheta - \frac{1}{\varrho} \varepsilon \beta \cos^2 \vartheta \right),$$

dove il segno  $\mp$  è scelto in base al fatto che  $s$  sia positivo o negativo. Si può, allora, verificare la validità delle seguenti disuguaglianze quando il punto  $P$  si avvicina all'origine  $O$  in modo non assiale (cioè rimanendo all'esterno una superficie cilindrica di vertice  $O$  e apertura angolare piccola a piacere, ma finita) [5, §3]:

$$\frac{1}{r} < \frac{k_1}{\varsigma}, \quad \left| \frac{1}{r^3} - \frac{1}{\Delta^3} \right| < \frac{k_2}{\varsigma},$$

con  $k_1$  e  $k_2$  costanti positive arbitrarie. Queste disuguaglianze possono essere utilizzate per ottenere la stima di  $\mathbf{u}_P$  ricercata.

Si può immediatamente osservare che, data una costante  $l$  positiva, i contributi alla velocità nel punto  $P$  dati dai punti della curva  $\gamma$  di ascissa curvilinea  $s > l$  e  $s < -l$  sono contributi finiti quando  $P \rightarrow O$  per BS, e, dunque, risultano trascurabili rispetto a quelli dovuti ai punti di ascissa curvilinea  $-l < s < l$ . Considerando unicamente questi ultimi (contributi locali) ed osservando che, per quanto detto in precedenza,

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds}(z - \zeta) - \frac{d\zeta}{ds}(y - \eta) &= \frac{1}{\varrho} \varepsilon \delta s + \varsigma^3 \Psi_1, \\ \frac{d\zeta}{ds}(x - \xi) - \frac{d\xi}{ds}(z - \zeta) &= -\varepsilon \delta + \varsigma^3 \Psi_2, \\ \frac{d\xi}{ds}(y - \eta) - \frac{d\eta}{ds}(x - \xi) &= \frac{1}{\varrho} \frac{s^2}{2} - \frac{1}{\varrho} \varepsilon \alpha s + \varepsilon \beta + \varsigma^3 \Psi_3, \end{aligned}$$

con  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  e  $\Psi_3$  finite per  $\varepsilon \rightarrow 0$ , si ha che, per BS e per le precedenti disuguaglianze, [5, §4]

$$u_P = \frac{\Gamma}{4\pi} A + U, \quad v_P = \frac{\Gamma}{4\pi} B + V, \quad w_P = \frac{\Gamma}{4\pi} C + W,$$

dove  $\mathbf{u}_P = (u_P, v_P, w_P)$ ,  $U$ ,  $V$ , e  $W$  sono ancora una volta finiti per  $\varepsilon \rightarrow 0$  (e dunque trascurabili rispetto agli altri termini) e

$$A = \int_{-l}^l ds \frac{\varepsilon \delta s}{\varrho \Delta^3}, \quad B = -\varepsilon \delta \int_{-l}^l ds \frac{1}{\Delta^3}, \quad C = \int_{-l}^l ds \frac{s^2 - 2\varepsilon \alpha s + 2\varrho \varepsilon \beta}{2\varrho \Delta^3}.$$

Trattando analiticamente le precedenti, e identificando il punto  $P$  con un punto della superficie esterna del *vortex filament* vicinissimo alla curva  $\gamma$  (asse del *vortex filament*), si ottiene, infine, che [5, §§5,6,7,8] <sup>2</sup>

$$u_P = 0, \quad v_P = 0, \quad w_P = -\frac{\Gamma}{4\pi\varrho} \ln \varepsilon. \quad \square$$

---

<sup>2</sup>Più semplicemente, si sarebbe potuto anche valutare lo sviluppo asintotico presentato nel corso della dimostrazione della legge di BS per  $x = 0$  e  $y = 0$ , giungendo a una conclusione del tutto analoga [24, 11.1]. Si è preferito, tuttavia, il presente approccio per evidenziare le approssimazioni fatte.

Per l'Eq.(2.15), dunque, il *vortex filament* si muove (almeno in prima approssimazione) nella direzione della binormale con velocità inversamente proporzionale al raggio di curvatura. Ne consegue, ad esempio, che i *vortex filaments* rettilinei sono statici in assenza di eventuali potenziali esterni e che i *vortex filaments* circolari (*circular vortex knots*, §3.2.1) si muovono in direzione normale al piano della circonferenza, rimanendo indeformati.

In condizioni di LIA, inoltre, la lunghezza del *vortex filament* risulta essere costante nel moto [11.1][24].

*Dimostrazione.* Si supponga per assurdo che il *vortex filament* abbia una lunghezza che non è costante. Ciò significa che due punti  $O$  e  $P$  lungo la curva  $\gamma$  si allontanano o si avvicinano fra di loro nel tempo, causando uno stiramento o un accorciamento del *vortex filament* lungo la direzione tangente. Questo accade quando  $\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{t} \neq \mathbf{u}_P \cdot \mathbf{t}$ . Si consideri, dunque, il punto  $O$  come origine ( $s = 0$  in  $O$ ) e sia  $\alpha(s)$  una funzione tale che per un qualunque punto  $P$  della curva si possa scrivere

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \alpha \mathbf{t} + k \mathbf{t},$$

con  $\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t} = 0$  e  $k$  sia costante al variare dell'ascissa curvilinea  $s$  lungo  $\gamma$  e scelta in modo tale che

$$\mathbf{u}_O \cdot \mathbf{t} = 0,$$

cioè  $\alpha(0) = -k$ . Allora, poiché la lunghezza del *vortex filament* è stata supposta non costante nel tempo, si deve avere che, per quanto osservato,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} \cdot \mathbf{t} = \left( \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial s} + \alpha \frac{\mathbf{n}}{\rho} + \frac{\partial \alpha}{\partial s} \mathbf{t} \right) \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial(\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{t})}{\partial s} - \frac{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}}{\rho} + \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{\partial \alpha}{\partial s} - \frac{\tilde{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}}{\rho} \neq 0.$$

Tuttavia, in condizioni di LIA, per l'Eq.(2.15) la velocità dei punti del *vortex filament* è diretta lungo la binormale,  $\mathbf{u} = \beta \mathbf{b}$ , e, dunque, si ha che  $\alpha(s) = 0 \forall s$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} = \beta \mathbf{b}$  e la precedente grandezza risulta identicamente nulla, contrariamente a quanto supposto. Pertanto il *vortex filament* preserva la sua lunghezza nel moto in condizioni di LIA.  $\square$

Applicando, poi, le formule di Frenet-Serret (Eq.(B.8)), si può osservare che la precedente Eq.(2.15) può essere scritta anche nella forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \frac{\Gamma(-\ln \varepsilon)}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial s} \wedge \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial s^2} \quad (2.16)$$

o, più semplicemente, effettuando un riscalamento della variabile temporale  $t \rightarrow 4\pi t / (\Gamma(-\ln \varepsilon))$ ,

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial s} \wedge \frac{\partial^2 \boldsymbol{\lambda}}{\partial s^2}. \quad (2.17)$$

E' possibile ottenere anche una forma intrinseca dell'equazione del moto (in condizioni di LIA) di un *vortex filament* in termini di derivate di torsione  $\tau$  e curvatura  $c = 1/\varrho$  della curva  $\gamma$ , asse del *vortex filament*. Partendo da un approccio del tutto generale per cui  $\partial\boldsymbol{\lambda}/\partial t = u_t\mathbf{t} + u_n\mathbf{n} + u_b\mathbf{b}$ , si ha che<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( u_t c + \frac{\partial u_n}{\partial s} - u_b \tau \right) - \left( u_n \tau + \frac{\partial u_b}{\partial s} \right) \tau, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \frac{1}{c} \left[ \left( u_t c + \frac{\partial u_n}{\partial s} - u_b \tau \right) \tau + \frac{\partial}{\partial s} \left( u_n \tau + \frac{\partial u_b}{\partial s} \right) \right] \right\} + \left( u_n \tau + \frac{\partial u_b}{\partial s} \right) c,\end{aligned}\quad (2.18)$$

dalle quali, ricordando che in condizioni di LIA (Eq.(2.17))  $u_t = u_n = 0$  e  $u_b = 1/\varrho = c$ ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial c}{\partial t} &= -c \frac{\partial \tau}{\partial s} - 2 \frac{\partial c}{\partial s} \tau, \\ \frac{\partial \tau}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial^2 c}{\partial s^2} - \tau^2 \right) + c \frac{\partial c}{\partial s}.\end{aligned}\quad (2.19)$$

### Equazione non lineare di Schrödinger

Per completezza, si cita anche il risultato noto come equazione non lineare (o cubica) di Schrödinger.

Introducendo la funzione

$$\psi(s, t) = c(s, t) \exp\left(i \int_0^s ds' \tau(s', t)\right), \quad (2.20)$$

dalle equazioni del moto in condizioni di LIA (Eq.(2.17)) discende l'equazione [8]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \psi |\psi|^2 \right). \quad (2.21)$$

Le soluzioni di questa equazione sono collegate a quelle del corrispondente problema lineare e, fra le soluzioni esatte note, figurano anche quelle nella forma di solitoni che si propagano lungo il *vortex filament*. L'equazione non lineare di Schrödinger, inoltre, si rappresenta anche negli ambiti della fisica del plasma e nell'ottica non lineare.

*Dimostrazione.* Si consideri un *vortex filament* la cui configurazione spaziale è descrivibile attraverso la curva  $\gamma$  individuata dai vettori  $\boldsymbol{\lambda}$  e tale che la sua dinamica sia regolata dall'equazione del moto in condizioni di LIA Eq.(2.17) (la variabile temporale considerata risulta riscalata secondo quanto già affermato in precedenza). Si può considerare

---

<sup>3</sup>La prova delle Eq.(2.18) è ottenibile a partire dalla commutatività delle operazioni di derivazione rispetto a  $t$  e ad  $s$  e applicando le formule di Frenet-Serret (Eq.(B.8)) [21, §4].

come sistema di riferimento il triedro di Frenet (App.(B))  $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$  e dalle equazioni di Frenet-Serret (le ultime due riportate in Eq.(B.8)) discende direttamente che

$$\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n} + i\mathbf{b}) = -i\tau(\mathbf{n} + i\mathbf{b}) - c\mathbf{t},$$

dove  $c = 1/\rho$  indica la curvatura lungo la curva  $\gamma$ . È possibile, dunque, definire le variabili

$$\mathbf{N} = (\mathbf{n} + i\mathbf{b}) \exp\left(i \int_0^s ds \tau\right), \quad \psi = c \exp\left(i \int_0^s ds \tau\right),$$

in modo tale che, per il precedente risultato e sempre per le equazioni di Frenet-Serret (la seconda nel sistema in Eq.(B.8)),

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = -\psi \mathbf{t}$$

e anche

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial s} = \Re \mathfrak{e}(\psi \overline{\mathbf{N}}) = \frac{1}{2}(\psi \overline{\mathbf{N}} + \overline{\psi} \mathbf{N}),$$

nella quale la barra sopraelevata indica l'operazione di coniugazione complessa. Utilizzando, poi, l'Eq.(2.17) e supponendo che la funzione  $\lambda(s, t)$  sia sufficientemente regolare, si ha che

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t \partial s} = \frac{\partial}{\partial s}(c\mathbf{b}) = \frac{\partial c}{\partial s} \mathbf{b} - c\tau \mathbf{n} = \Re \left[ \left( \frac{\partial c}{\partial s} + ic\tau \right) (\mathbf{b} + i\mathbf{N}) \right] = \\ &= \Re \left( i \frac{\partial \psi}{\partial s} \overline{\mathbf{N}} \right) = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \overline{\mathbf{N}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \mathbf{N} \right). \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione può essere utilizzata per valutare  $\partial \mathbf{N} / \partial t$ . Si può, infatti, osservare che, per le precedenti definizioni,

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = 1, \quad \mathbf{N} \cdot \overline{\mathbf{N}} = 2, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{t} = 0,$$

per cui si può scrivere che

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = A\mathbf{N} + B\overline{\mathbf{N}} + C\mathbf{t},$$

dove

$$\begin{aligned} A + \overline{A} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \cdot \overline{\mathbf{N}} + \frac{\partial \overline{\mathbf{N}}}{\partial t} \cdot \mathbf{N} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{N} \cdot \overline{\mathbf{N}})}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad A = iR, \quad R(s, t) \in \mathbb{R}, \\ B &= \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{4} \frac{\partial (\mathbf{N} \cdot \mathbf{N})}{\partial t} = 0, \\ C &= \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial (\mathbf{N} \cdot \mathbf{t})}{\partial t} - \mathbf{N} \cdot \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = -\frac{i}{2} \mathbf{N} \cdot \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \overline{\mathbf{N}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \mathbf{N} \right) = -i \frac{\partial \psi}{\partial s}, \end{aligned}$$

dunque

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = i \left( R \mathbf{N} - \frac{\partial \psi}{\partial s} \mathbf{t} \right).$$

Derivando rispetto al tempo l'espressione di  $\partial \mathbf{N} / \partial s$  e derivando rispetto al parametro di lunghezza d'arco la precedente si ottiene che

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial t \partial s} &= -\frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{t} - \psi \frac{\partial \mathbf{t}}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \mathbf{t} - \frac{i\psi}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \overline{\mathbf{N}} - \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} \mathbf{N} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial s \partial t} &= i \left[ \frac{\partial R}{\partial s} \mathbf{N} - R \psi \mathbf{t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} \mathbf{t} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} (\psi \overline{\mathbf{N}} + \overline{\psi} \mathbf{N}) \right], \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= i \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + R \psi \right), \\ \frac{1}{2} \psi \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial s} &= \frac{\partial R}{\partial s} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial s} \overline{\psi}. \end{aligned}$$

La seconda può essere risolta per ottenere l'espressione seguente per  $R$

$$R = \frac{1}{2} (\psi \overline{\psi} + D),$$

( $D(t)$  funzione reale dipendente unicamente dalla variabile temporale) che, sostituita nella prima, permette di ottenere l'equazione

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = i \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \psi (|\psi|^2 + D) \right].$$

Si può, infine, osservare che la funzione  $D$  può essere rimossa dall'equazione applicando la trasformazione  $\psi \rightarrow \psi \exp(-i/2 \int_0^t dt' D(t'))$ . Ciò corrisponde a una traslazione dell'origine nell'integrazione di definizione di  $\psi$  ed  $\mathbf{N}$  e, pertanto, si può porre  $D = 0$  senza perdita di generalità. L'equazione risultante coincide, in questo modo, con l'Eq.(2.21).  $\square$

Una interessante classe di soluzioni che ammettono le equazioni del moto in condizioni di LIA è quella dei nodi toroidali di vorticità (*toroidal vortex knots*). Queste soluzioni saranno ottenute e analizzate nel capitolo seguente, dopo una breve introduzione sul concetto matematico di nodo.

# Capitolo 3

## Dinamica dei *vortex knots*

### 3.1 Descrizione matematica dei nodi

Prima di proseguire nello studio dei *vortex filaments* in condizioni di LIA, si espongono in questa sezione alcune nozioni di base relative alla teoria matematica dei nodi. Queste sono, infatti, necessarie per analizzare i *vortex knots*, nodi di vorticità che costituiscono delle soluzioni delle equazioni presentate nel capitolo precedente.

#### 3.1.1 Definizione di nodo e caratteristiche fondamentali

In generale, per nodo [1] s'intende una curva<sup>1</sup> chiusa e non autointersecantesi immersa nello spazio tridimensionale.

Più precisamente:

**Definizione 2** (Nodo in  $\mathbb{R}^3$ ). *Si definisce nodo un sottoinsieme di punti  $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^3$  omeomorfo a una circonferenza  $\mathcal{C}$ , cioè, per definizione di omeomorfismo,  $\exists f : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{C}$  tale che  $f$  è continua e biunivoca e la sua inversa  $f^{-1}$  è anch'essa continua.*

L'esempio più semplice di nodo è costituito dalla circonferenza stessa (cioè una curva nello spazio la cui equazione, in un opportuno sistema cartesiano, può essere scritta come  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $z = 0$ , con  $r > 0$  raggio della circonferenza), anche detta "*unknot*" o "nodo triviale" (Fig.(3.1a)), ma esistono anche nodi più complicati come il *trefoil knot* (Fig.(3.1b)).

I nodi sono organizzati in classi di equivalenza attraverso l'operazione nota come isotopia ambiente. Quest'ultima coincide intuitivamente con un'operazione di "deformazione continua" della curva  $\gamma$  che costituisce il nodo, in modo tale da modificarne la

---

<sup>1</sup>Si veda l'App.(B) per una definizione di curva.

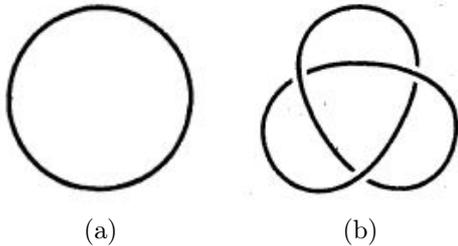


Figura 3.1: A lato sono raffigurati (attraverso le loro proiezioni bidimensionali) due esempi di nodo: il nodo triviale o unknot sulla sinistra (a) e un nodo "a trifoglio" o trefoil knot sulla destra (b) [1].

configurazione spaziale senza mai "interrompere e ricollegare" la curva oppure "stringere" alcune parti del nodo fino a ridurle a un punto della curva: in questo modo la struttura fondamentale del nodo non ne risulta modificata. Tuttavia, è necessaria una migliore caratterizzazione di questo concetto.

**Definizione 3** (Omotopia). *Siano  $A$  e  $B$  due spazi topologici e siano  $f$  e  $g$  due funzioni continue da  $A$  a  $B$ . Si definisce omotopia una funzione continua  $\mathcal{H} : A \times [0, 1] \rightarrow B$  tale che,  $\forall x \in A$ ,  $\mathcal{H}(x, 0) = f(x)$  e  $\mathcal{H}(x, 1) = g(x)$ .*

**Definizione 4** (Isotopia). *Siano  $A$  e  $B$  due spazi topologici. Si definisce isotopia un'omotopia  $\mathcal{H} : A \times [0, 1] \rightarrow B$  tale che, per ogni  $\bar{t} \in [0, 1]$  fissato,  $\mathcal{H}(x, \bar{t})$  sia un omeomorfismo sull'immagine (cioè  $\mathcal{H}_{\bar{t}} : A \rightarrow \mathcal{H}_{\bar{t}}(A)$  è un omeomorfismo).*

**Definizione 5** (Isotopia ambiente). *Sia  $A$  uno spazio topologico e  $f : A \rightarrow A$  un qualunque omeomorfismo diverso dall'identità  $1 : A \rightarrow A$ ,  $1(x) = x \quad \forall x \in A$ . Si definisce, allora, isotopia ambiente di  $A$  un'isotopia fra  $1$  ed  $f$ .*

Pertanto, dati due nodi  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  in  $\mathbb{R}^3$ , essi sono equivalenti se esiste un'isotopia ambiente fra  $1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , dove  $1(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_1$  e  $f(\mathcal{K}_1) = \mathcal{K}_2$ .

Si noti che né un'omotopia né un'isotopia sarebbero stati sufficienti a descrivere un'operazione di equivalenza fra le diverse topologie di nodo. Infatti, l'omotopia non esclude che la curva del nodo passi attraverso se stessa nelle operazioni di deformazione, mentre l'isotopia non previene la riduzione di una porzione di curva a un punto: entrambi questi tipi di operazione avrebbero reso tutti i nodi equivalenti al nodo triviale. Pertanto, affinché i nodi  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  siano fra loro equivalenti, non solo devono essere legati fra di loro attraverso una funzione continua e biunivoca con inversa continua, ma deve essere possibile ottenere tale funzione a partire dalla funzione identità, passando attraverso funzioni anch'esse continue e invertibili con inversa continua al variare in modo continuo di un parametro di deformazione  $t \in [0, 1]$ .

Una rappresentazione frequentemente utilizzata per i nodi è quella che fa uso delle loro proiezioni bidimensionali: in esse si possono osservare l'orientazione stabilita sul nodo ed eventuali intersezioni o, più precisamente, *crossings*.

Per orientazione di un nodo si intende il verso di percorrenza della curva tridimensionale

$\gamma$  che costituisce il nodo, spesso scelto seguendo l'orientazione fissata dalla parametrizzazione di  $\gamma$ . Nelle proiezioni, l'orientazione di un nodo si indica con frecce il cui verso coincide con quello scelto e il nodo si dice, allora, orientato. Si può, poi, osservare che alcuni nodi (come il *trefoil knot*, ad esempio) possono essere collegati con un'isotopia ambiente ad una configurazione in cui l'orientazione sia opposta a quella di partenza: tali nodi sono chiamati nodi invertibili.

Si ha, invece, un *crossing* in corrispondenza dei punti del piano di proiezione del nodo in cui la curva si autointerseca. Per evidenziare che  $\gamma$  non ha in realtà autointersezioni nello spazio, si è soliti interrompere il tratto continuo di una delle due porzioni di curva che formano il *crossing*, intendendo con ciò che la sezione interrotta è sottostante (*undercrossing*) a quella continua (*overcrossing*). Se il nodo è orientato, è anche possibile attribuire un segno ad ogni *crossing* della proiezione: per convenzione, esso è positivo quando il ramo soprastante deve essere ruotato in senso antiorario affinché coincida (verso compreso) con il ramo sottostante; viceversa è negativo se necessita di una rotazione oraria.

Le proiezioni, tuttavia, non formano una corrispondenza biunivoca con il nodo che rappresentano: ad uno stesso nodo possono corrispondere, attraverso isotopie ambiente, più configurazioni spaziali, ciascuna delle quali ha una diversa proiezione. E', infatti, sufficiente deformare la proiezione seguendo una delle azioni in Fig.(3.2) per ottenere una proiezione differente, ma che, di fatto, corrisponde alla stessa struttura nodale. Queste azioni sono chiamate *Reidemeister moves* e sono tutti esempi di isotopie ambiente. Quindi, due proiezioni sono equivalenti (dunque corrispondono a nodi equivalenti) se sono ottenibili l'una dall'altra attraverso una serie di *Reidemeister moves* e isotopie ambiente nel piano (esempio in Fig.(3.3)).

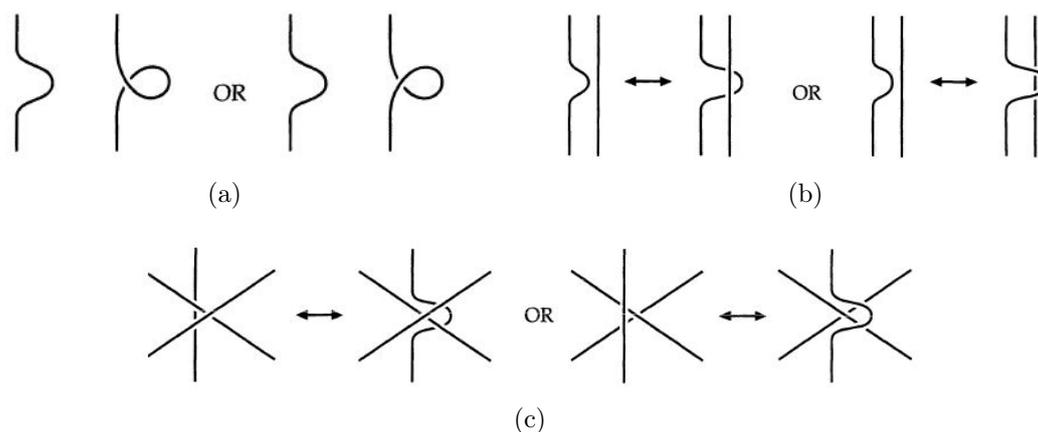


Figura 3.2: Reidemeister move di prima (a), seconda (b) e terza specie (c) [1].



Figura 3.3: Applicando le Reidemeister moves rappresentate nella precedente Fig.(3.2) e le isotopie ambiente nel piano, è facile dimostrare che il nodo rappresentato a lato è equivalente al nodo triviale [1].

Non banale è il risultato secondo il quale non tutti i nodi sono equivalenti al nodo triviale. Per dimostrare questa affermazione è necessario introdurre un altro concetto importante nella teoria dei nodi: la tricolorabilità. Indicando con il termine *strand* la porzione di curva della proiezione di un nodo che si estende da un *undercrossing* a un altro *undercrossing* con al più *overcrossing* di mezzo, è possibile dare la seguente definizione di nodo tricolorabile:

**Definizione 6** (Nodo tricolorabile). *Un nodo si dice tricolorabile se a ciascuno strand della sua proiezione può essere assegnato uno di tre differenti colori in modo tale che:*

1. *in corrispondenza di ogni crossing i tre strand incidenti abbiano tutti colori differenti oppure tutti lo stesso colore;*
2. *siano utilizzati almeno due colori per colorare gli strand della proiezione.*

Si può verificare che le *Reidemeister moves* preservano la tricolorabilità dei nodi sui quali agiscono e, di conseguenza, tutte le proiezioni di uno stesso nodo sono tricolorabili o non tricolorabili. Poiché il nodo triviale è non tricolorabile, tutti i nodi tricolorabili non possono essere equivalenti al nodo triviale. Quindi, ad esempio, poiché il *trefoil knot* è tricolorabile (Fig.(3.4)), certamente non può essere ricondotto ad un nodo triviale.



Figura 3.4: Il trefoil knot è un nodo tricolorabile e, quindi, distinto da un nodo triviale (appartengono a classi di equivalenza diverse, cioè non sono legati da un'isotopia ambiente) [1].

Sono stati, poi, studiati altri sistemi che permettono di distinguere fra di loro i nodi a partire dalle proiezioni. La tricolorabilità, infatti, è sufficiente a distinguere tutti i nodi tricolorabili dal nodo triviale, ma non permette di distinguere un nodo non tricolorabile da un nodo triviale (non tutti i nodi non tricolorabili sono nodi triviali, anche se tutti i nodi triviali sono non tricolorabili).

Un esempio è costituito dal sistema dei polinomi di Alexander: ad ogni nodo è possibile assegnare un polinomio in modo tale che polinomi diversi indichino tipologie differenti di nodo. Una spiegazione approfondita di questo argomento, tuttavia, esula dagli scopi della presente trattazione.

### 3.1.2 Nodi toroidali

Di particolare interesse per questa trattazione sono i nodi toroidali: si tratta di nodi che giacciono sulla superficie di un toro senza formare *crossings* su tale superficie.

Per superficie toroidale si intende la superficie di un toro standard, cioè la superficie di rotazione generata, in un opportuno sistema cartesiano, dalla rotazione attorno all'asse  $z$  di una circonferenza di raggio  $a$  situata sul piano  $xz$  e avente centro sull'asse  $x$  a distanza  $R$  ( $R > a$ ) dall'origine degli assi. Parametrizzando la circonferenza con un angolo  $\vartheta \in [0, 2\pi]$  e la rotazione con un angolo  $\varphi \in [0, 2\pi]$ , le coordinate dei punti della superficie toroidale sono esprimibili in termini degli angoli  $\vartheta$  e  $\varphi$  come segue:

$$\begin{pmatrix} (R + a \cos \vartheta) \cos \varphi \\ (R + a \cos \vartheta) \sin \varphi \\ a \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + a \cos \vartheta \\ 0 \\ a \sin \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

La superficie in esame, dunque, può essere vista come il risultato del prodotto cartesiano di una circonferenza di raggio  $a$  e di una circonferenza di raggio  $R$ :

$$\mathcal{T}_{(a,R)} = \mathcal{C}_R \times \mathcal{C}_a, \quad R > a. \quad (3.2)$$

Un nodo toroidale sarà, pertanto, esprimibile in generale come una curva parametrica  $\gamma = \{\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{T}_{(a,R)} : \boldsymbol{\lambda} = (\vartheta(t), \varphi(t))\}$ , dove  $t$  è un parametro appartenente ad un intervallo reale chiuso e limitato (dal momento che i nodi sono formati da curve chiuse) e  $\vartheta$  e  $\varphi$  sono le variabili angolari definite in precedenza. Il *trefoil knot*, ad esempio, è un nodo toroidale che può essere ottenuto come insieme dei punti ( $\vartheta = 3t, \varphi = 2t$ ),  $t \in [0, 2\pi]$ , cioè è una curva che si attorciglia alla superficie toroidale tre volte lungo la direzione dei meridiani e due volte longitudinalmente. Un nodo triviale è invece ottenibile come luogo di punti di coordinate ( $\vartheta = nt, \varphi = mt$ ),  $t \in [0, 2\pi]$ , con  $n, m \in \mathbb{N}$  non primi fra loro (ammettono un comune divisore) oppure con  $n = 1$  o  $m = 1$  (Fig.(3.5)).

Si può osservare che, in generale, un nodo toroidale è caratterizzato da due numeri naturali che esprimono come si attorciglia la curva alla superficie toroidale: un numero  $p \in \mathbb{N}$  relativo al numero di volte in cui la curva del nodo interseca il "parallelo" ( $\vartheta = 0, \varphi = t$ ),  $t \in [0, 2\pi]$  (che, dunque, descrive il numero di avvolgimenti attorno alla cavità interna della superficie toroidale) e un numero  $q \in \mathbb{N}$  relativo al numero di intersezioni con il "meridiano" ( $\vartheta = t, \varphi = 0$ ),  $t \in [0, 2\pi]$  (che, dunque, descrive il numero di avvolgimenti attorno a un ipotetico cilindro di raggio  $R$  inserito nel mezzo del toro). Se i numeri  $p$  e  $q$  sono primi tra loro ed entrambi non unitari, allora il nodo non è triviale e si può dimostrare che il rapporto  $w = p/q$ , chiamato *winding number*, è un invariante topologico del nodo (in generale, per una generica curva non necessariamente chiusa  $(\vartheta(t), \varphi(t))$  giacente su una superficie toroidale, si definisce *winding number* il numero  $\lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta(t)/\varphi(t)$ ).

Dunque,

**Definizione 7** (Nodo toroidale). *Un nodo toroidale non triviale  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(p, q)$  è una curva chiusa, non autointersecantesi e giacente su una superficie toroidale  $\mathcal{T}_{(a,R)}$ , con winding number  $w = p/q \in \mathbb{Q}$  tale che  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $p > 1$ ,  $q > 1$  e  $p$  e  $q$  siano primi tra loro. Si parla, invece, di nodo toroidale triviale per indicare una curva analoga a quella già descritta, ma con winding number  $w = p/q \in \mathbb{Q}$  tale che  $p$  e  $q$  non siano primi tra loro oppure si abbia che  $p = 1$  o  $q = 1$ .*

Infine è possibile dimostrare che i nodi toroidali  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(p, q)$  e  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(q, p)$  sono nodi equivalenti, in quanto connessi da un'isotopia ambiente. Per verificare tale affermazione è possibile deformare la superficie toroidale e il nodo sopra di essa seguendo i passaggi illustrati in Fig.(3.6).

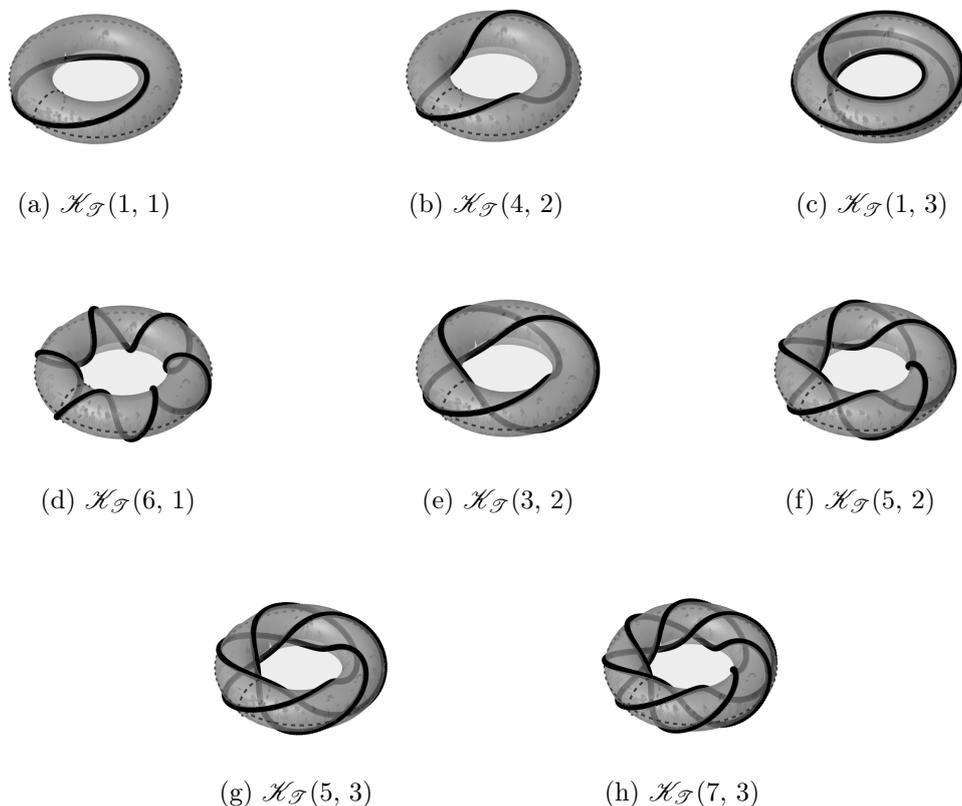


Figura 3.5: Nelle immagini soprastanti sono rappresentati esempi di nodi toroidali, ciascuno identificato attraverso la notazione  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(p, q)$ . I nodi nelle figure dalla (a) alla (d) sono triviali, mentre dalla (e) alla (f) sono non triviali. Il nodo in (e) è il trefoil knot, la cui proiezione è già stata rappresentata in figure precedenti.

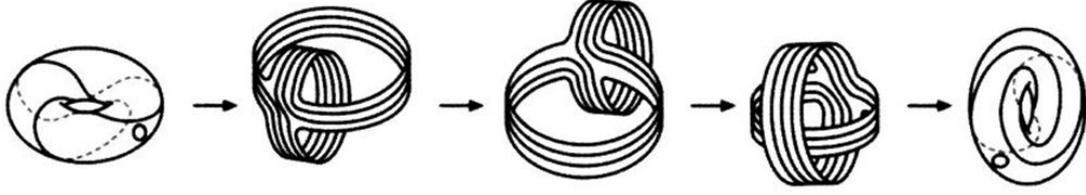


Figura 3.6: I nodi toroidali  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(p, q)$  e  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(q, p)$  sono equivalenti. Intuitivamente, si possono seguire i passaggi illustrati per verificare tale affermazione [1].

Si può, infatti, aprire un foro sulla superficie toroidale (che non intersechi la curva del nodo) e deformare la superficie ottenuta, insieme con il nodo, fino ad ottenere due bande in prossimità del meridiano e del parallelo principali. Quindi, si possono rivoltare entrambe le bande ottenute e riportare la superficie ad una forma toroidale. Quello ottenuto è un nodo toroidale con i valori di  $p$  e di  $q$  scambiati, agendo attraverso azioni che costituiscono un'isotopia ambiente per la curva del nodo: si tratta dello stesso nodo.

## 3.2 Nodi di vorticità (*vortex knots*)

Come anticipato, una classe particolarmente interessante di soluzioni stabili (nelle condizioni ipotizzate all'inizio della sezione §2.1) delle equazioni del moto dei *vortex filaments* in condizioni di LIA è quella dei *vortex knots*, cioè dei nodi di vorticità (Fig.(3.7)). Si tratta, di fatto, di *vortex filaments* chiusi su loro stessi a formare dei nodi: per semplicità di trattazione, si considerano nodi toroidali.

In questa sezione ci si propone di studiare la dinamica in condizioni di LIA dei *circular vortex knots*, *vortex filaments* dalla forma circolare che, dunque, possono essere visti come caso particolare di *vortex knot* nella forma di nodo triviale (§3.2.1). Quindi, si ampliano i risultati ottenuti al caso di un qualunque *toroidal vortex knot* di piccola ampiezza, ottenuto come perturbazione lineare a partire dal modello del *circular vortex knot* (§3.2.2).

### 3.2.1 Nodi triviali di vorticità: *circular vortex knots*

Si consideri, in primo luogo, il caso di *circular vortex knot*. Come anticipato, si tratta di una particolare distribuzione di vorticità formata da un *vortex filament* chiuso su sé stesso a formare una circonferenza  $\mathcal{C}_0$ .

Si può subito osservare che, per quanto esposto nella sezione precedente, questa configurazione è collegabile attraverso isotopie ambiente a un qualunque *vortex knot* descritto da una curva  $\mathcal{K}_{\mathcal{C}}$  che forma un nodo triviale. Pertanto, il flusso generato dai *vortex knots* triviali può essere studiato costruendo una mappa  $\mathcal{K}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{f} \mathcal{C}_0$ , con  $f$  isotopia ambiente: ciò rende il caso di *circular vortex knot* interessante da studiare.

Sia, dunque,  $r_0$  il raggio della circonferenza  $\mathcal{C}_0$  che descrive il *circular vortex knot* in esame e si consideri valida l'equazione della dinamica in Eq.(2.17), coincidente con il sistema di equazioni scalari nella forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} - \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2},\end{aligned}\tag{3.3}$$

dove s'intende che i vettori  $\boldsymbol{\lambda} = (x(s, t), y(s, t), z(s, t))$  siano quelli che individuano i punti della curva  $\mathcal{C}_0$  in un sistema di riferimento cartesiano assegnato. Il sistema è simmetrico per rotazioni attorno all'asse ortogonale al piano di  $\mathcal{C}_0$  e passante per il suo centro: risulta, pertanto, naturale formulare il problema in coordinate cilindriche

$$x(s, t) = r(s, t) \cos(\varphi(s, t)) \quad y(s, t) = r(s, t) \sin(\varphi(s, t)) \quad z(s, t).\tag{3.4}$$

Differenziando rispetto al tempo le Eq.(3.4), dal sistema in Eq.(3.4) si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= \left( \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) \cos \varphi + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \sin \varphi, \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= - \left( \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} \right) \sin \varphi + \left( \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} \right) \cos \varphi, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2},\end{aligned}\tag{3.5}$$

e, differenziando le Eq.(3.4) rispetto al parametro di lunghezza d'arco  $s$  ed inserendo il risultato in Eq.(3.5), si hanno le equazioni della dinamica in condizioni di LIA del *vortex filament* in coordinate cilindriche [19]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= r \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} - 2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial s} \frac{\partial z}{\partial s} - r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \frac{\partial z}{\partial s}, \\ r \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= - \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \frac{\partial z}{\partial s} - r \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial s}, \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= 2 \left( \frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} - r \frac{\partial^2 r}{\partial s^2} \frac{\partial \varphi}{\partial s} + r^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)^3.\end{aligned}\tag{3.6}$$

La circonferenza  $\mathcal{C}_0$  in coordinate cilindriche è descrivibile attraverso le semplici equazioni  $r = r_0$ ,  $\varphi = s/r_0$ , dalle quali discendono le equazioni del *circular vortex knot* in condizioni di LIA:

$$\begin{aligned}r(s, t) &= r_0, \quad \varphi(s, t) = \frac{s}{r_0}, \quad z(s, t) = \frac{t}{r_0}, \\ \frac{\partial r(s, t)}{\partial t} &= 0, \quad \frac{\partial \varphi(s, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{r_0},\end{aligned}\tag{3.7}$$

nelle quali si ricorda che il parametro temporale  $t$  risulta riscalato secondo quanto osservato nel capitolo precedente (§2.2).

Dalle Eq.(3.7) ottenute si evince che il *circular vortex knot* è una soluzione stabile per le equazioni del *vortex filament* in condizioni di LIA, dal momento che, almeno in prima approssimazione, la distribuzione di vorticità esaminata si muove nel fluido traslando in direzione ortogonale al piano di  $\mathcal{C}_0$ , con velocità inversamente proporzionale al raggio  $r_0$  e senza deformazioni (come già anticipato in §2.2).

A riprova dei risultati ottenuti (che saranno utilizzati come base nell'esposizione del paragrafo seguente) è possibile anche considerare le particolari distribuzioni di vorticità stabili e a simmetria assiale note come *vortex rings*. Queste possono essere interpretate come un insieme di *circular vortex knots* concentrate in un volume anulare attorno ad uno stesso asse di simmetria: utilizzando, anche in questo caso, coordinate cilindriche è possibile studiare il flusso generato attraverso la *stream function* in Eq.(1.21), applicando l'Eq.(1.57) e considerando le condizioni che derivano dalla presenza di una discontinuità del campo di vorticità sulla superficie del *vortex ring* (nella forma di *vortex jump*, Eq.(1.71), o di *vortex sheet*, Eq.(1.77), a seconda che sia presente o meno vorticità nel *core* del *vortex ring*). Si rimanda ai diversi studi presenti in letteratura [6] [7] [12, §§161,162] [24, §10] per una descrizione più accurata del fenomeno che qui si è unicamente menzionato.

### 3.2.2 Nodi non triviali di vorticità: *toroidal vortex knots*

Soluzioni stabili nella forma di *toroidal vortex knot* alle equazioni del moto in condizioni di LIA possono essere ottenute in termini di integrali ellittici, corrispondenti a onde progressive ( $\psi(s, t) = f(s - at) \exp\{i[g(s - at) + bs + ct]\}$ , con  $a, b, c \in \mathbb{R}$  costanti,  $a > 0$ , e  $f(s - at), g(s - at)$  funzioni reali positive) o regressive ( $a < 0$ ) per il problema di Schrödinger non lineare [10]. Tuttavia, in tale forma, sebbene esatte, risultano piuttosto complicate da trattare.

Si preferisce, dunque, ottenere questa classe di soluzioni attraverso perturbazioni lineari della soluzione circolare esaminata nel paragrafo precedente (§3.2.1) e utilizzando la simmetria assiale del problema [19] [20]. I risultati che discendono da questo procedimento coincidono asintoticamente con quelli espressi in termini di integrali ellittici.

Si considerino, dunque, perturbazioni lineari della soluzione circolare (in coordinate cilindriche, Eq.(3.7)) nella forma

$$r = r_0 + \varepsilon r_1, \quad \varphi = \frac{s}{r_0} + \varepsilon \varphi_1, \quad z = \frac{t}{r_0} + \varepsilon z_1, \quad (3.8)$$

dove  $\varepsilon$  indica l'ordine perturbativo. Sostituendo le precedenti nelle Eq.(3.6) e considerando i termini perturbativi lineari ( $\mathcal{O}(\varepsilon)$ ) si ottengono le equazioni

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 z_1}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{r_0^2} \frac{\partial z_1}{\partial s}, \\ \frac{\partial z_1}{\partial t} &= -\frac{\partial^2 r_1}{\partial s^2} + \frac{2}{r_0^2} r_1 + 3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial s}.\end{aligned}\tag{3.9}$$

I *toroidal vortex knots* di piccola ampiezza possono, dunque, essere ottenuti come soluzioni particolari delle precedenti nella forma [20]

$$\begin{aligned}r_1(s, t) &= R(t) \cos\left(\frac{w}{r_0} s\right), \\ \varphi_1(s, t) &= \Phi(t) \sin\left(\frac{w}{r_0} s\right), \\ z_1(s, t) &= Z(t) \cos\left(\frac{w}{r_0} s\right),\end{aligned}\tag{3.10}$$

dove  $w = p/q$  indica il *winding number* del *toroidal vortex knots*, che, essendo legato all'indice di avvolgimento (§2.1.2) e, dunque, all'elicità del *vortex filament*, è costante. Sostituendo le Eq.(3.10) nelle Eq.(3.9), si ottiene il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}\dot{R} &= -\left(\frac{w}{r_0}\right)^2 Z, \\ \dot{\Phi} &= \frac{1}{r_0^2} \frac{w}{r_0} Z, \\ \dot{Z} &= \left[\frac{2}{r_0^2} + \left(\frac{w}{r_0}\right)^2\right] R + 3 \frac{w}{r_0} \Phi,\end{aligned}\tag{3.11}$$

che può essere risolto in modo standard. Si può osservare che, se  $R$ ,  $\Phi$  e  $Z$  dipendono da un termine esponenziale nella forma  $\exp(\alpha t)$ , allora le precedenti Eq.(3.11) possono essere ulteriormente ridotte al sistema

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \left(\frac{w}{r_0}\right)^2 \\ 0 & \alpha & -\frac{w}{r_0^3} \\ \frac{2}{r_0^2} + \left(\frac{w}{r_0}\right)^2 & \frac{3w}{r_0} & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ \Phi \\ Z \end{pmatrix} = 0,\tag{3.12}$$

di equazione caratteristica

$$\alpha^3 + \alpha \left(\frac{w}{r_0}\right)^2 \left[\left(\frac{w}{r_0}\right)^2 - \frac{1}{r_0^2}\right] = 0.\tag{3.13}$$

Quest'ultima ammette soluzioni nella forma  $\alpha = 0$  oppure nella forma (esplicitando il *winding number*  $w$ ),

$$\alpha^2 = -\frac{1}{r_0^4} \left(\frac{p}{q}\right)^2 \left[\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1\right]. \quad (3.14)$$

Si ha, quindi, che se  $w = p/q > 1$ , allora  $\alpha^2 < 0$  e si ottengono soluzioni stabili nella forma di *toroidal vortex knots*, mentre se  $w = p/q < 1$ , allora  $\alpha^2 > 0$  e le perturbazioni presentano una crescita esponenziale, cioè si tratta di soluzioni instabili. In condizioni di LIA, pertanto, nonostante i nodi toroidali  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(p, q)$  e  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(q, p)$  siano topologicamente equivalenti, i *toroidal vortex knots* corrispondenti sono uno stabile ( $w > 1$ ) e l'altro instabile ( $w < 1$ ). Questo comportamento, d'altro canto, è stato ottenuto considerando unicamente effetti locali e, pertanto, alcune configurazioni instabili per LIA potrebbero rivelarsi stabili nel tenere conto della formulazione secondo BS (così avviene, ad esempio, per il *trefoil knot*  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(2, 3)$  [22]).

Tuttavia, la soluzione più generale di *toroidal vortex knot* può essere ottenuta nella forma di onda progressiva (o regressiva) lungo il *circular vortex knot*, come soluzione analitica delle Eq.(3.9) [19]. Infatti, a partire da queste ultime, si possono ricercare soluzioni ondulatorie per le quali  $r_1 = r_1(\xi)$ ,  $\varphi_1 = \varphi_1(\xi)$  e  $z_1 = z_1(\xi)$ , con  $\xi = s - vt$  e  $v$  costante reale (velocità di propagazione dell'onda lungo la curva). Si può osservare che  $\partial_s = \partial_\xi$  e che  $\partial_t = -v \partial_\xi$  e, pertanto, si hanno le equazioni differenziali ordinarie

$$\begin{aligned} -v \frac{dr_1}{d\xi} &= \frac{d^2 z_1}{d\xi^2}, \\ -v \frac{d\varphi_1}{d\xi} &= -\frac{1}{r_0^2} \frac{dz_1}{d\xi}, \\ -v \frac{dz_1}{d\xi} &= -\frac{d^2 r_1}{d\xi^2} - \frac{r_1}{r_0^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Dalla prima e dall'ultima delle precedenti si ha che

$$\frac{d^2 r_1}{d\xi^2} + \left(v^2 + \frac{1}{r_0^2}\right) r_1 = C, \quad (3.16)$$

con  $C$  costante di integrazione. La condizione di curva chiusa è ottenibile imponendo che  $r_1(s) = r_1(s+L)$  (con  $L$  lunghezza della curva perturbata) e la periodicità della funzione si ha per  $C = 0$ . Dunque,

$$r_1 = k_r \sin\left(\frac{2p\pi}{L} \xi + k_\vartheta\right), \quad (3.17)$$

con  $p$  numero di avvolgimenti attorno alla superficie toroidale in direzione dei meridiani (in modo concorde con le notazioni precedenti),  $k_r$  e  $k_\vartheta$  costanti dalle dimensioni rispettivamente di una lunghezza e di una fase e

$$v^2 = -\frac{1}{r_0^2} + \left(\frac{2p\pi}{L}\right)^2. \quad (3.18)$$

Sostituendo l'Eq.(3.17) nel sistema di partenza (Eq.(3.15)), si ottengono le espressioni per  $\varphi_1$  e  $z_1$

$$\varphi_1 = k_r \frac{L}{2p\pi r_0^2} \cos\left(\frac{2p\pi}{L} \xi + k_\vartheta\right), \quad (3.19)$$

$$z_1 = k_r \frac{vL}{2p\pi} \cos\left(\frac{2p\pi}{L} \xi + k_\vartheta\right). \quad (3.20)$$

Si ha, poi, la relazione  $\varphi_1(s+L) = \varphi_1(s) + 2q\pi$ , con  $q$  numero di avvolgimenti attorno alla superficie toroidale in direzione longitudinale, che, insieme con la relazione  $L/r_0 = 2q\pi$ , permette di scrivere l'Eq.(3.18) nella forma

$$v^2 = \frac{1}{r_0^2} \left( \left(\frac{p}{q}\right)^2 - 1 \right) = \frac{1}{r_0^2} (w^2 - 1). \quad (3.21)$$

Infine, sostituendo la precedente nelle Eq.(3.17), Eq.(3.19) ed Eq.(3.20) si ottengono le equazioni generali del *toroidal vortex knot* in condizioni di LIA

$$\begin{aligned} r &= r_0 + \varepsilon k_r \sin\left(\frac{w}{r_0}(s - vt) + k_\vartheta\right), \\ \varphi &= \frac{s}{r_0} + \varepsilon \frac{k_r}{wr_0} \cos\left(\frac{w}{r_0}(s - vt) + k_\vartheta\right), \\ z &= \frac{t}{r_0} + \varepsilon k_r \left(1 - \frac{1}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{w}{r_0}(s - vt) + k_\vartheta\right), \end{aligned} \quad (3.22)$$

dove si ricorda che  $k_r$  è un fattore di scala,  $k_\vartheta$  una fase costante,  $v \in \mathbb{R}$  velocità di propagazione delle onde di perturbazione,  $w = p/q$  *winding number* ed  $s/r_0 \in [0, 2q\pi]$ . Queste equazioni, come anticipato, coincidono con il limite asintotico delle soluzioni alle equazioni del moto in condizioni di LIA ottenute in termini di integrali ellittici [10]. Inoltre, attraverso studi numerici delle precedenti Eq.(3.22), è possibile giungere a conclusioni relative alla stabilità dei *toroidal vortex knots* del tutto coincidenti con quelle già effettuate [23].

Le applicazioni di questa teoria si possono trovare in diversi campi della fisica: strutture filiformi topologicamente complesse e annodate si presentano nella teoria quantistica dei superfluidi (dove si hanno dei veri e propri *vortex knots* e *line vortices* quantizzati), ma anche nella teoria classica della turbolenza e nella magnetoidrodinamica della corona solare.



Figura 3.7: *Esempio di vortex knot nella forma di trefoil knot. Questa distribuzione di vorticità è stata ottenuta in laboratorio attraverso l'accelerazione all'interno del fluido di particolari alette idrodinamiche, visibili sullo sfondo [11]. Delle bolle di idrogeno e ossigeno ottenute per ionizzazione dell'acqua rendono possibile distinguere anche a vista la configurazione spaziale del vortice.*

# Appendice A

## Risoluzione dell'equazione di Poisson per il potenziale vettore del campo di velocità (metodo alternativo)

L'equazione di Poisson che figura in Eq.(1.35) può essere risolta facendo uso della funzione di Green, come mostrato in precedenza per fluidi tridimensionali e bidimensionali. Tuttavia, si può anche procedere attraverso le soluzioni di equazioni di Laplace e Poisson scalari (con opportune condizioni al contorno), che, in determinati casi, possono essere più facilmente risolvibili rispetto agli integrali in Eq.(1.36) ed Eq.(1.37) [24, §1.1]. In questo modo, inoltre, si ottiene un metodo risolutivo che può essere applicato più semplicemente per ipotetici fluidi a dimensionalità maggiore.

Infatti, in generale per un fluido  $N$ -dimensionale, si può considerare il potenziale vettore  $\mathbf{A}$  come somma dei due campi vettoriali  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$ , tali che

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = -\boldsymbol{\omega} \quad \text{div } \mathbf{B} = g, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla^2 \mathbf{C} = 0 \quad \text{div } \mathbf{C} = -g, \quad (\text{A.3})$$

dove  $g$  è una funzione armonica (cioè  $\nabla^2 g = 0$ , dal momento che la vorticità definisce un campo solenoidale), ma, in generale, non identicamente nulla. Si può notare che i due campi così definiti garantiscono che  $\mathbf{A}$  soddisfi l'equazione di Poisson Eq.(1.35) e sia a divergenza nulla ( $\text{div } \mathbf{A} = \text{div } \mathbf{B} + \text{div } \mathbf{C} = g - g = 0$ ). Si è ottenuta, in questo modo, una certa libertà nell'individuare il campo  $\mathbf{B}$ : esso può essere fissato come una qualunque soluzione di  $\nabla^2 \mathbf{B} = -\boldsymbol{\omega}$  (ottenibile più o meno semplicemente a seconda della forma della vorticità e delle condizioni al contorno) deducendo in seguito la forma della sua divergenza  $g$ . Il problema si riduce, allora, alla risoluzione delle equazioni in  $\mathbf{C}$ . Trattandosi di un sistema indeterminato avente numero infinito di soluzioni, si può

supporre senza perdita di generalità che, ad esempio, il campo  $\mathbf{C}$  abbia componenti tutte nulle eccetto la prima, ottenendo, dalla condizione sulla divergenza, l'equazione scalare

$$\frac{\partial C_1}{\partial x_1} = -g \equiv f \quad (\text{A.4})$$

con

$$\nabla^2 f = 0. \quad (\text{A.5})$$

Si ha, allora, che

$$C_1(x_1, x_2, \dots, x_N, t) = \int_0^{x_1} d\xi f(\xi, x_2, \dots, x_N, t) + h(x_2, x_3, \dots, x_N) \quad (\text{A.6})$$

dove, affinché sia soddisfatta l'equazione di Laplace  $\nabla^2 \mathbf{C} = 0$ , si ha che

$$\nabla^2 h = -\frac{\partial f}{\partial x}. \quad (\text{A.7})$$

In questo modo, anche il campo  $\mathbf{C} = (C_1, 0, \dots, 0)$  è determinato, rendendo possibile ottenere una soluzione per  $\mathbf{A}$  che sia basata unicamente sulle simmetrie intuitive del problema più che sulla risoluzione analitica degli integrali in Eq.(1.36) ed Eq.(1.37) mostrati in precedenza.

# Appendice B

## Triedro di Frenet

**Definizione** (Curva in  $\mathbb{R}^3$ ). Si definisce curva in  $\mathbb{R}^3$  la coppia  $(\gamma, \boldsymbol{\lambda})$ , con  $\gamma \subset \mathbb{R}^3$  e  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}(I \rightarrow \mathbb{R}^3)$ ,  $\mathbb{R} \supseteq I = [a, b]$ , tale che  $\gamma = \boldsymbol{\lambda}(I) \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(t), t \in I\}$ . L'insieme  $\gamma$  è detto sostegno della curva e  $\boldsymbol{\lambda}$  una sua parametrizzazione.

**Definizione** (Curva regolare). Una curva  $(\gamma, \boldsymbol{\lambda})$  (in  $\mathbb{R}^3$ ) si dice regolare se sono soddisfatte le seguenti condizioni:

1.  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{C}^1(I \rightarrow \mathbb{R}^3)$ ;
2.  $\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt}(t) \neq 0, \forall t \in [a, b] = I$ .

Il parametro  $t \in I$  che compare nelle precedenti definizioni permette di individuare univocamente un punto lungo la curva, attraverso la parametrizzazione  $\boldsymbol{\lambda}$ . In particolare, risulta spesso conveniente scegliere come parametro della curva la grandezza  $s$  nota come parametro di lunghezza d'arco (o ascissa curvilinea) e definita attraverso la seguente:

$$ds = \left\| \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} \right\| dt = \left( \left( \frac{d\lambda_x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda_y}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\lambda_z}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt, \quad (\text{B.1})$$

cioè

$$s(t) = \int^t dt' \left\| \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt'} \right\|. \quad (\text{B.2})$$

Operando tale scelta, è possibile costruire in ogni punto della curva un sistema di coordinate ortogonali avente come origine il punto considerato, in modo tale che, spostando il punto lungo la curva, il sistema costruito si "adatti" alla nuova posizione seguendo la curva: tale sistema di coordinate è chiamato triedro di Frenet.

Si può osservare, infatti, che, per un dato punto  $\mathbf{x} \in \gamma$ ,  $\mathbf{x} = \boldsymbol{\lambda}(s(t))$ , il versore (versore tangente)

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\boldsymbol{\lambda}(s)}{ds} \quad (\text{B.3})$$

è tangente alla curva e ha norma unitaria per la precedente definizione del parametro di lunghezza d'arco.

Si può, poi, ottenere un versore ortogonale al precedente (versore normale) considerando la grandezza

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\|} \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds}, \quad (\text{B.4})$$

dove

$$\varrho(s) = \frac{1}{\left\| \frac{d\mathbf{t}(s)}{ds} \right\|} \quad (\text{B.5})$$

è chiamato raggio di curvatura e può essere interpretato come il raggio della circonferenza tangente alla curva nel punto di ascissa curvilinea  $s$ , giacente nel piano osculatore, piano normale alla curva  $\gamma$  individuato dai versori  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{n}$ .

Per completare la terna cartesiana intrinseca è, infine, sufficiente eseguire il prodotto vettoriale fra i due versori precedenti

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \wedge \mathbf{n}(s), \quad (\text{B.6})$$

ottenendo un versore (versore binormale) ortogonale a entrambi i versori precedenti. La grandezza

$$\tau(s) = - \left\| \frac{d\mathbf{b}(s)}{ds} \right\| \quad (\text{B.7})$$

viene chiamata torsione e indica quanto la curva  $\gamma$  tenda a separarsi dal piano osculatore ed è nulla nel caso di curva piana.

Dalle precedenti considerazioni discende un sistema di equazioni valido per una curva parametrizzata nel modo descritto. Si tratta delle equazioni di Frenet-Serret e sono nella forma seguente (sottintendendo la dipendenza dal parametro di lunghezza d'arco):

$$\begin{cases} d\boldsymbol{\lambda}/ds = \mathbf{t} \\ d\mathbf{t}/ds = \mathbf{n}/\varrho \\ d\mathbf{n}/ds = -\mathbf{t}/\varrho + \tau\mathbf{b} \\ d\mathbf{b}/ds = -\tau\mathbf{n} \end{cases}, \quad (\text{B.8})$$

dove, introducendo la curvatura  $c = 1/\varrho$  e indicando con un apice l'operazione di derivazione rispetto all'ascissa curvilinea, le ultime tre equazioni possono essere scritte anche nella forma più sintetica

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

# Bibliografia

- [1] Adams C.C., 1994, *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, American Mathematical Soc.
- [2] Batchelor G., 1967, *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- [3] Belardinelli M.E., Bonafede M., 2018, *Fisica dei Solidi e dei Fluidi* (appunti dal corso).
- [4] Casadio R., Cicoli M., Kamenchtchik A., 2020, *Complementi di Metodi Matematici della Fisica* (appunti dal corso).
- [5] Da Rios L.S., 1906, *Sul moto d'un liquido indefinito con un filetto vorticoso di forma qualunque*, Rend. Circ. Mat. Palermo 22, 117-135.
- [6] Dyson F.W., 1893, *Potential of an anchor ring, part II*, Phil. Trans. Roy. Soc. A184, 1041-1106.
- [7] Fraenkel L.E., 1970, *On steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid*, Proc. Roy. Soc. Lond. A316, 29-62.
- [8] Hasimoto H., 1972, *A soliton on a vortex filament*, J. Fluid Mech. 51, 477-485.
- [9] Kamenchtchik A., 2019, *Metodi Matematici della Fisica* (appunti dal corso).
- [10] Kida S., 1981, *A vortex filament moving without change of form*, J. Fluid Mech. 112, 397-409.
- [11] Kleckner D., Scheeler M.W., Irvine W.T.M., 2014, *The life of a vortex knot*, Physics of Fluids 26, 091105.
- [12] Lamb H., 1932, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press.
- [13] Landau L.D., Lifshitz E.M., 1987, *Fluid Mechanics: Volume 6 of Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press.

- [14] Lions P., 1966, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol I: Incompressible models*, Oxford University Press.
- [15] Maggioni F., Alamri S., Barenghi C.F., Ricca R.L., 2010, *Velocity, energy, and helicity of vortex knots and unknots*, Phys. Rev. E 82, 026309.
- [16] Milne-Thomson L.M., 1968, *Theoretical hydrodynamics*, Macmillan.
- [17] Moffatt H.K., 1969, *The degree of knottedness of tangled vortex lines*, J. Fluid Mech. 35, 117-129.
- [18] Moffatt H.K., Ricca R.L., 1992, *Helicity and the Călugăreanu invariant*, Proc. R. Soc. Lond. 439, 411-429.
- [19] Ricca R.L., 1993, *Torus knots and polynomial invariants for a class of soliton equations*, Chaos 3, 83-91 [1995, *Erratum*, Chaos 5, 346].
- [20] Ricca R.L., 1995, *Geometric and Topological Aspects of Vortex Filament Dynamics under LIA*, Springer-Verlag, Lecture Notes in Physics 462, 99-104.
- [21] Ricca R.L., 1996, *The contributions of Da Rios and Levi-Civita to asymptotic potential theory and vortex filament dynamics*, Fluid Dyn. Res. 18, 245.
- [22] Ricca R.L., Samuels D.C., Barenghi C.F., 1998, *Vortex Knots*, 369-372 [in U. Frisch (ed.), *Advances in Turbulence VII. Fluid Mechanics and Its Applications*, vol 46. Springer, Dordrecht].
- [23] Ricca R.L., Samuels D.C., Barenghi C.F., 1999, *Evolution of vortex knots*, J. Fluid Mech. 391, 29-44.
- [24] Saffman P.G., 1992, *Vortex Dynamics*, Cambridge University Press.