

# INGEGNERIZZAZIONE DELLA SPINA DORSALE ANIMALE

PER APPLICAZIONI STRUTTURALI

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITA' DI BOLOGNA  
SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
DIPARTIMENTO DI TECNICA DELLE COSTRUZIONI  
CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA EDILE/ARCHITETTURA

Tesi di laurea in Tecnica delle Costruzioni  
a-a: 2019 - 2020  
Sessione: 23 - 07 - 2020

Candidato: di.Biase Nicola Maria  
Relatore: prof. Silvestri Stefano

## ABSTRACT

Questa tesi vuole indagare alcune possibilità di produrre un sistema strutturale edile o civile, che collega due punti nello spazio, i cui vincoli architettonici prevedano la necessità di curvatura nel piano orizzontale, come ad esempio, la struttura di un ponte. Dunque, Il modello di riferimento adottato per la ricerca, è la spina dorsale degli animali, essendo essa una struttura di comprovato funzionamento, ottimizzata dalla natura nel tempo, durante l'evoluzione delle specie vertebrate.

La tesi inizia con l'analisi comparativa qualitativa, dei principali ponti pedonali al mondo, caratterizzati da curvatura spaziale. Si è notato allora, che le strutture più performanti sono 'miste', cioè mettono in relazione tre diversi elementi portanti, di cui quello primario, con natura differente a seconda del determinato concept progettuale, ha il compito di sostenere quello secondario, cioè l'impalcato. I due infine, sono connessi da un terzo elemento, che ha solo la funzione di collegamento. Senza dubbio, tra tutti i principi strutturali riscontrati, uno dei più interessanti è il sistema 'Tensegrity misto', che risulta costituito, da elementi infinitamente rigidi, soggetti a tutte le caratteristiche della sollecitazione, sostenuti esclusivamente da funi. Tale sistema cioè, è una particolare struttura reticolare, che differisce da quella tradizionale completamente rigida, per massimizzare il quantitativo di funi, minimizzare quello di aste ed escludere le cerniere interne fisiche meccaniche (ad esempio di tipo 'Mero'). Cioè, il requisito fondamentale del sistema Tensegrity è, collegare i puntoni soltanto, o con l'esterno, o con funi, ma non tra di loro.

Pertanto, prima di ogni altra considerazione progettuale, è apparso di fondamentale importanza, eseguire un'analisi strutturale completa su tutti i possibili schemi statici minimi, in cui una maglia di circa 5m x 5m può essere configurata, eseguendo manualmente i calcoli, mediante tre diversi metodi risolutivi dell'equilibrio e verificando l'uguaglianza dei loro risultati, alla fine. Le prime due tecniche utilizzate sono: (1) la scrittura diretta delle equazioni di equilibrio senza vincoli ausiliari, purtroppo non abbastanza elaborata da poter essere applicata a casi complessi e (2) il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, che si è rivelato inutilmente troppo laborioso e difficilmente applicabile al caso spaziale, per via dell'obbligo di dover scrivere una sola equazione iniziale di lavoro deformativo spaziale, per passare poi, solo in un secondo momento, alle equazioni piane, che risultano tra l'altro, non sempre scrivibili. Infine, l'ultimo metodo adottato (3), è la scrittura diretta delle equazioni di equilibrio con vincoli ausiliari ed è il più semplice e potente di tutti, per via della chiara discretizzazione del problema, piano o spaziale che sia, in un sistema matriciale, fatto da equazioni di equilibrio piane, sempre scrivibili.

La tesi prosegue con il tentativo di confrontare tutti i vari sistemi strutturali indipendenti simili, rilevabili dai due principali modelli della spina dorsale animale, quello dei mammiferi marini, in cui le vertebre sono assemblate in assenza completa di cerniere zigapofigeali rigide e quello degli animali terrestri, in cui invece, esse sono presenti. Dunque, i sistemi riscontrati sono tre: la 'Catenaria mista', il 'Tensegrity misto' e il 'Reticolare misto'. Per ognuno di essi allora, si è individuato il modulo minimo, capace di replicare il funzionamento in scala più ampia. Esso pertanto, risulta composto da tre elementi infinitamente rigidi, collegati da funi e vincolati all'esterno con due appoggi, nel caso piano e quattro in quello spaziale. Per rendere il confronto più preciso possibile allora, si è scelto per tutti i tre sistemi, di collocare nella stessa posizione, i nodi esterni vincolati e tutti quelli di collegamento con le funi. Invece, per quanto riguarda la disposizione dei nodi interni, caratteristici esclusivamente di ogni elemento infinitamente rigido, influenti sul comportamento globale, non è stato possibile identificare la stessa collocazione per tutte le tre soluzioni strutturali, a causa delle loro intrinseche differenze. Quindi, dopo aver

individuato il modulo minimo geometrico di ogni sistema, si è studiato nel dettaglio lo schema statico corrispondente, per comprenderne l'intimo funzionamento strutturale. Pertanto, si è scelto di procedere parallelamente su diversi fronti (analitici, fisici e numerici), partendo dalla scrittura manuale delle equazioni analitiche di equilibrio, sia per il caso piano, che per quello spaziale, relativamente al sistema più complicato dei tre, il 'Reticolare misto'. Poi, si è scelto di realizzare il modello fisico ('plastico') di ciascuno dei tre sistemi spaziali minimi. Infine, si è condotta l'analisi automatica di tutte le sei strutture (tre piane e tre spaziali), con il programma di calcolo 'Autodesk Robot structural analysis', che si è rivelato ben funzionante e semplice da usare, al pari di 'Sap 2000'.

La tesi si conclude, con le proposte di concept architettonico/strutturale, relative ai tre sistemi spaziali per ponte pedonale, costituite da rappresentazioni grafiche tridimensionali del modulo minimo e dal modello fisico ('plastico') in scala più ampia, del più performante dei tre, il 'Reticolare misto'.

# INDICE

002\_\_ABSTRACT

007\_\_INTRODUZIONE

- 008\_\_Scelta del problema da studiare
- 010\_\_Millennium footbridge - London (United Kingdom)
- 014\_\_Living footbridge - University of Limerick (Ireland)
- 018\_\_Spinningfield footbridge - Manchester (United Kingdom)
- 022\_\_Ripshorst footbridge - Oberhausen (Germany)
- 026\_\_Studenci footbridge - Maribor (Slovenia)
- 030\_\_Costituzione footbridge - Venezia (Italia)
- 034\_\_Kuripla footbridge - Brisbane (Australia)

039\_\_SCHEMI STATICI MINIMI

- 040\_\_Scelta degli schemi statici
- 046\_\_Vierendell
- 048\_\_Reticolare triangolare
- 050\_\_Reticolare quadrangolare
- 052\_\_Ipotesi sulle tensostrutture discrete
- 060\_\_III-condition puro senza pretensione simmetrico
- 062\_\_III-condition puro con pretensione simmetrico
- 064\_\_Sistema misto (A) simmetrico
- 068\_\_Sistema misto (B) simmetrico
- 072\_\_Tensegrity puro simmetrico
- 076\_\_Analisi strutturale comparativa in M. Excell
- 080\_\_Sistema misto (B) non simmetrico
- 088\_\_Tensegrity puro non simmetrico

095\_\_SISTEMA STRUTTURALE DELLA SPINA DORSALE

- 096\_\_Spina dorsale dei vertebrati
- 102\_\_Anatomia lombare della spina dorsale umana
- 104\_\_Osteologia lombare della spina dorsale umana
- 106\_\_Artrologia lombare della spina dorsale umana
- 108\_\_Miologia lombare della spina dorsale umana
- 110\_\_Ipotesi alla definizione dello schema geometrico
- 112\_\_Schema geometrico della spina dorsale umana
- 116\_\_Riflessioni strutturali sullo schema geometrico

119\_\_STUDIO DEL MODELLO ARCHITETTONICO

- 120\_\_Modelli di tre pezzi infinitamente rigidi collegati da funi
- 126\_\_Modello architettonico (1): Catenaria discreta mista
- 140\_\_Modello architettonico (2): Tensegrity misto
- 154\_\_Modello architettonico (3): Reticolare misto con una cerniera unica
- 166\_\_Modello architettonico (4): Reticolare misto con due cerniere distinte

173\_\_\_ANALISI MANUALE DELLA STRUTTURA

174\_\_Scelte di calcolo

180\_\_Studio dei cinematismi

200\_\_Metodo diretto con vincoli ausiliari per il caso spaziale

221\_\_\_ANALISI MANUALE DELLO SCHEMA STATICO PIANO TRAMITE IL SOFTWARE M. EXCELL

222\_\_Metodo diretto con vincoli ausiliari per il caso piano

232\_\_Risoluzione dello schema statico (3) piano

239\_\_\_SCELTA DEL MODELLO STRUTTURALE

240\_\_Disegno dello schema geometrico

243\_\_Modelli strutturali iniziali

249\_\_\_ANALISI AUTOMATICA DELLO SCHEMA STATICO TRAMITE IL SOFTWARE A. ROBOT S.A.

250\_\_Schema statico (3) piano

256\_\_Schema statico (3) spaziale

260\_\_Schema statico (2) piano

262\_\_Schema statico (2) spaziale

266\_\_Schema statico (1) piano

270\_\_Schema statico (1) spaziale

275\_\_\_CONCLUSIONI

276\_\_Riflessioni finali

284\_\_Modello fisico (3) di un ipotetico progetto reale

290\_\_\_SITOGRAFIA

291\_\_\_BIBLIOGRAFIA

292\_\_\_RINGRAZIAMENTI



## INTRODUZIONE

## SCelta DEL PROBLEMA DA STUDIARE

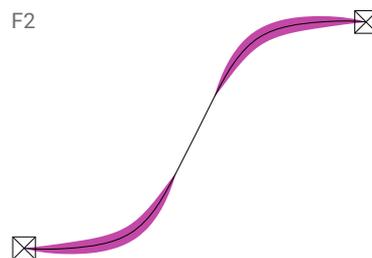
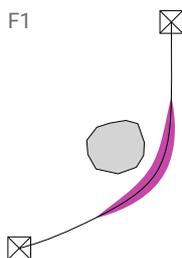
Relativamente ai sistemi strutturali che servono a collegare due punti nello spazio, può essere utile indagare sulle possibilità di conferire curvatura, sia nel piano verticale, che in quello orizzontale, essendo entrambe caratteristiche presenti in molteplici occasioni. Ad esempio, quando un vincolo architettonico prevede il superamento di ostacoli all'interno della luce e allo stesso tempo il divieto di usare pile intermedie<sup>F1</sup>. Oppure ancora, in prossimità delle spalle, quando gli accessi devono obbligatoriamente essere ortogonali alla direzione della luce<sup>F2</sup>. Per lo scopo suddetto si è scelto allora, di approfondire soltanto sistemi leggeri, cioè costituiti prevalentemente da elementi strutturali snelli in acciaio. Si è ritenuto indispensabile inoltre, iniziare lo studio con un'analisi comparativa dello schema geometrico, relativo alla campata maggiore di sette strutture significative. Esse cioè, sono costituite da combinazioni dei principali elementi strutturali leggeri, utilizzati oggi nel mondo e di seguito riportati.

### .Catenaria<sup>N1</sup>

Struttura funicolare priva di rigidità flessionale e tagliante, vincolata soltanto alle due estremità della sua luce e caricata esclusivamente da azioni verticali, concentrate o distribuite, in maniera uniforme e continuativa lungo tutta la sua lunghezza. Quindi, l'asse geometrico coincide costantemente con la deformata ed il sistema è libero di oscillare nel piano orizzontale.

### .Arco<sup>N2</sup>

Il termine si usa per indicare due tipologie di elementi strutturali differenti, non tanto per geometria, quanto per caratteristiche della sollecitazione. Si definisce cioè, arco piano, una struttura antifunicolare in cui l'asse geometrico è curvo e contenuto in un piano o nello spazio. Si chiama invece, arco spaziale, una struttura prevalentemente soggetta a sforzo normale di compressione, ma non antifunicolare, in cui l'asse geometrico è contenuto in un piano o nello spazio. Ortogonalmente ad esso cioè, sono presenti anche a momento flettente e taglio. In entrambi i casi pertanto, la sezione può essere molto sottile, rispetto a quella di una trave con luce uguale, ma le imposte devono inevitabilmente sopportare forti reazioni orizzontali, che possono incidere notevolmente sui requisiti della fondazione.



O.BELLUZZI, Scienza delle costruzioni Vol.1, Zanichelli, 1974, pg.50

Def:

Strutture in cui la curva delle pressioni coincide con quella dell'asse geometrico e quindi esiste esclusivamente sforzo normale:

.Se lo sforzo normale è di TRAZIONE:

- caso continuo: CATENARIA  
- caso discreto: TIRANTE

.Se lo sforzo normale è di COMPRESSIONE:

- caso continuo: ARCO  
- caso discreto: PUNTONE

N1

O.BELLUZZI, Scienza delle costruzioni Vol.1, Zanichelli, 1974, pg.148

N2

M . S A R M I E N T O - C ,  
A.M.RUIZ-T, A.C.CAPARICIO,  
State of the art of spatial  
arch bridges, 2012, pg.1

F1-F2

Piante dello schema semplificato di un sistema dotato di curvatura verticale ed orizzontale lungo un tratto generico della luce:

1: tratto intermedio

2: tratto prossimo alle spalle

N3  
P.POZZATI, Teoria e tecnica  
delle strutture Vol.1, UTET,  
1972, pg.192

### .Reticolare<sup>N3</sup>

Il termine si usa per indicare l'elemento strutturale trave o arco, composto da aste correnti, aste montanti ed aste diagonali comunque vincolate tra loro, all'interno del quale è possibile individuare una struttura principale isostatica, soggetta solo a sforzo normale. Pertanto, l'analisi definitiva di questa struttura può essere condotta, in maniera approssimativa, considerando nei nodi la presenza di cerniere e non di incastri. In tali circostanze cioè, è lecito trascurare lo sforzo di taglio e il momento flettente staticamente indeterminati.

N4  
O.BELLUZZI, Scienza delle  
costruzioni Vol.2, Zanichelli,  
1974, pg.452

### .Vierendell<sup>N4</sup>

Il termine è riferito all'elemento strutturale trave o arco, composto soltanto da aste correnti ed aste montanti incastrate tra loro. All'interno della Vierendell cioè, non è possibile individuare una struttura principale isostatica soggetta solo a sforzo normale, perchè diversamente dalla reticolare, la presenza di cerniere nei nodi, comporterebbe labilità. Tale sistema pertanto, è soggetto a sforzo di taglio, momento flettente e sforzo normale staticamente indeterminati.

N5  
M . M A J O W I E C K I ,  
Tensostrutture: progetto e  
verifica, CREA, 1991, pg.102

### .Tensegrity<sup>N5</sup>

Il termine è l'abbreviativo di 'tensional integrity', che significa tensione integrale ed è riferito al sistema strutturale costituito, unicamente da aste soggette soltanto a sforzo normale di compressione e da funi soggette soltanto a sforzo normale di trazione. Inoltre, tutti i nodi della struttura possono essere esclusivamente cerniere, mentre i puntoni possono essere collegati soltanto con l'esterno e con tiranti, cioè non tra di loro.

### .Legenda



Elemento strutturale PRIMARIO:  
Sostiene l'impalcato



Elemento strutturale SECONDARIO (impalcato):  
Sostiene la soletta



Elemento strutturale di CONNESSIONE (costola):  
Collega l'elemento strutturale principale con quello secondario



Elemento strutturale PARTICOLARE:  
Presidio contro un eventuale problema inaspettato



Elemento strutturale SOLETTA:  
Recepisce le azioni esterne ed irrigidisce l'intera struttura

## MILLENNIUM FOOTBRIDGE - LONDON (UNITED KINGDOM)<sup>N1</sup>

Il Millennium footbridge a Londra sorge sul fiume Tamigi ed ha lo scopo di collegare la Tate Modern art gallery (spalla sud) con la Saint Paul's Cathedral (spalla nord)<sup>F1</sup>. L'opera è una struttura mista in cui l'elemento portante primario è la catenaria, costituito da due sistemi di funi laterali continue lungo ogni campata. L'impalcato invece, è la trave longitudinale composta da due profilati d'acciaio disgiunti a sezione circolare articolati in pezzi di 16m incernierati tra loro. L'elemento di connessione poi, è la costola trasversale in profilati d'acciaio a sezione rettangolare avente lunghezza circa 14m e passo 8m. La soletta infine, è formata da pannelli in alluminio disgiunti tra loro, lunghi 16m e larghi 4m costantemente per l'intera campata. In questo ponte allora, il collegamento tra gli elementi centrali della sezione non è assolutamente baricentrico in quanto la soletta è appoggiata all'estradosso dell'impalcato, che invece è incastrato a quello delle costole per tentare di irrigidire l'intero sistema, già criticamente mobile per geometria. Tramite gli elementi trasversali di collegamento poi, l'impalcato è appeso al sistema di funi rispetto al quale si trova prevalentemente al disotto in assenza totale di connessioni alle pile. Esso cioè, risulta libero di oscillare nel piano orizzontale per l'intera luce, essendo collegato a terra esclusivamente in corrispondenza delle spalle. La struttura complessiva quindi, è costituita da conci sostanzialmente incernierati, che dovendo coprire la notevole luce della campata centrale, non riescono da soli a rispettare i requisiti massimi di deformabilità dinamica indotti dal moto sincronizzato dei pedoni. In particolare cioè, la frequenza di oscillazione orizzontale dell'impalcato in mezz'ora senza alcun presidio specifico risulta circa 0.5Hz e dovrebbe invece essere maggiore di 1.3Hz che è quella del passo pedonale. Quindi per risolvere questo grave problema e tutti gli altri meno importanti legati al moto verticale, il ponte è dotato di smorzatori. Alcuni di essi sono lineari fluido-viscosi disposti a croce tra le cerniere dell'impalcato e altri puntuali a massa concentrata in corrispondenza delle costole.

N1

T.FITZPATRICK, The London Millennium Footbridge, 2001

DATI

.Progetto strutturale:  
ARUP

.Progetto architettonico:  
FOSTER & Partners, A.CARO

.Impresa:  
Monberg & Thorsen Sir  
Robert McAlpine

.Anno apertura: 2000

.L tot: 333m

.N campate: 3

.L campata sud: 108m

.L campata centrale: 144m

.L campata nord: 81m

.Costo: £23.000.000

Schema GEOMETRICO della  
campata centrale:

F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:

F5 - F11

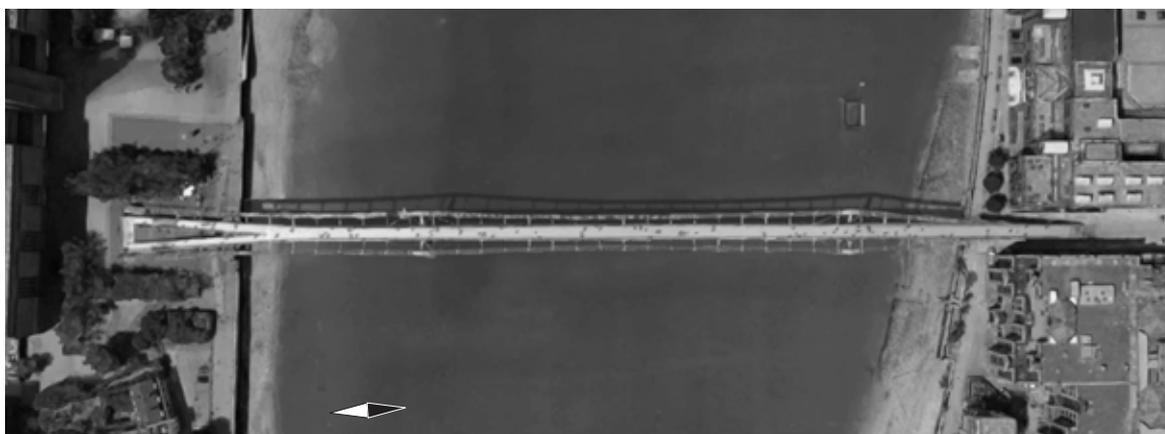
F1

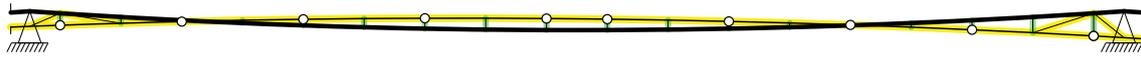
<https://www.google.it/maps/@51.5095669,-0.0985301,455a,35y,272.58h/data=!3m1!1e3>

Millennium footbridge, foto aerea della pianta

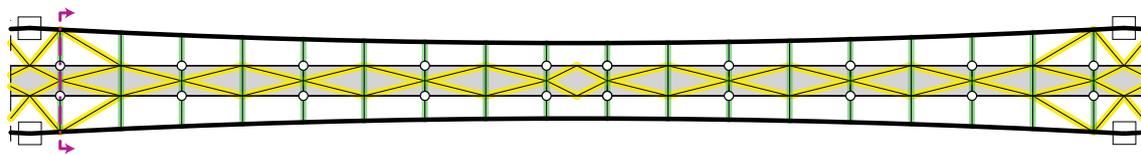
0 10 20

F1

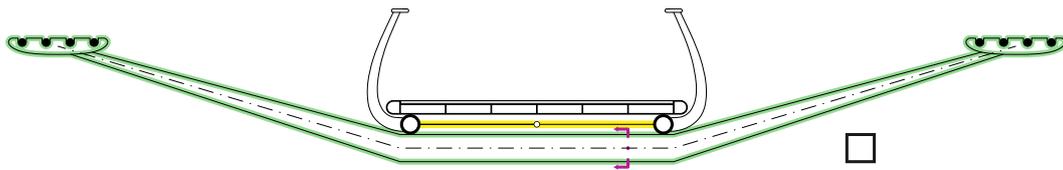




F2  
 Prospetto laterale schema geometrico campata centrale



F3  
 Pianta schema geometrico campata centrale  
 La particolarità consiste nell'applicazione di smorzatori  
 fluido-viscosi (ad asse lineare inseriti tra due nodi della  
 struttura)



F4  
 Sezione trasversale massima in prossimità della pila





F5: <httpwww.chsrentals.comwp-content/uploads/201509/millennium-bridge-london.jpgw=240>  
 Vista globale S-E



F6: [httpsupload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Millennium\\_Bridge\\_01.jpg](httpsupload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/45/Millennium_Bridge_01.jpg)  
 Vista globale dall'alto



F7: <httpwww.fosterandpartners.commedia/Projects/0953img8.jpg>  
 Collegamento Funi-Costole



F8: [httpwww.vosizneias.comwp-content/uploads/201208/London-Olympics-Effec\\_sham.jpg](httpwww.vosizneias.comwp-content/uploads/201208/London-Olympics-Effec_sham.jpg)  
 Collegamento funi-pile (l'impalcato è scollegato dalle pile)



F9:[https://www.adventuresofzaddie.com/wp-content/uploads/2014/12/DSC\\_0022.jpg](https://www.adventuresofzaddie.com/wp-content/uploads/2014/12/DSC_0022.jpg)  
 Vista globale S-O

Smorzatori lineari fluido-viscosi disposti a croce tra le cerniere dell'impalcato



F10:<http://cdnfiles.hdrcreme.com/39796/original/millennium-bridge-london.jpg?1426760691>  
 Attacco funi - fondazione



F12:<http://yorkavenueblog.com/wp-content/uploads/2016/11/Millennium-Bridge-London-4316.jpg>



F11: <http://www.fosterandpartners.com/media/Projects/0953/img4.jpg>  
 Vista laterale Est da cui è visibile il collegamento di tipo cerniera fra le travi dell'impalcato

## LIVING FOOTBRIDGE - LIMERICK (IRELAND)<sup>N1</sup>

Il Living footbridge a Limerick sorge sul fiume Shannon ed ha lo scopo di collegare i due aggregati edilizi relativi al polo universitario della città, separati dal corso d'acqua<sup>F1</sup>. L'opera è una struttura mista in cui l'elemento portante primario è la catenaria, costituita da due sistemi di funi laterali continue lungo ogni campata. L'impalcato invece, è la trave longitudinale composta da diversi profili d'acciaio continui, collegati tra loro trasversalmente ed irrigiditi da aste tese disposte a croce. Quelli perimetrali cioè, hanno sezione circolare, mentre quelli interni, hanno sezione a T. Il loro numero inoltre varia, da 10 in corrispondenza delle pile, a 7 in mezzeria. L'elemento di connessione poi, è la costola in profilati d'acciaio avente passo 2.2m e sezione differente per ogni asta che la compone. Quella trasversale cioè, è a doppia T ed ha lunghezza 7m alle spalle e 4m in mezzeria. I suoi puntoni inclinati invece, hanno sezione rettangolare. La soletta infine, è formata da pannelli in alluminio profondi 2.56m non disgiunti, ma incastrati lungo l'intera campata. Il ponte a Limerick quindi, presenta molte differenze rispetto al suo simile londinese realizzato precedentemente, poichè i suoi progettisti, gli stessi per entrambi, non hanno ripetuto gli errori fatti inizialmente. Dunque per prima cosa, il collegamento tra gli elementi centrali della sezione è assolutamente baricentrico, in quanto l'asse geometrico di ogni profilo che costituisce la trave d'impalcato, interseca quello della costola. I due cioè, non sono separati, ma uniti in uno unico. In secondo luogo, la sezione dell'impalcato con soletta non è costante, ma larga sulle pile e stretta in mezzeria. Infine, l'impalcato non è semplicemente appeso al sistema di funi, ma autoancorato ad esso, costituendo con lui una trave sotto armata, in cui il primo è il lembo teso inferiore e il secondo è quello compresso superiore. Quindi rispetto al Millennium footbridge, il ponte a Limerick risulta notevolmente più rigido per geometria, tanto da non avere necessità di smorzatori. Infatti la frequenza oscillatoria orizzontale del suo impalcato in mezzeria è 1.9Hz, già superiore a quella del passo pedonale di 1.3Hz.

F1

N1  
C.LAVERY, University of Limerick "Living" Bridge: A Design Response to Sensitive Landscape, Ireland, 2011

### DATI

.Progetto strutturale:  
ARUP  
.Progetto architettonico:  
Wilkinson Eyre  
.Impresa:  
Eiffel  
  
.Anno apertura: 2007  
.L tot: 350m  
.N campate: 6  
.L singola campata: 44m  
.Costo: €12.000.000

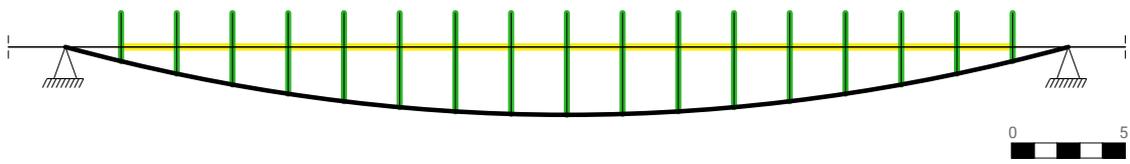
Schema GEOMETRICO della campata:  
F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:  
F5 - F10

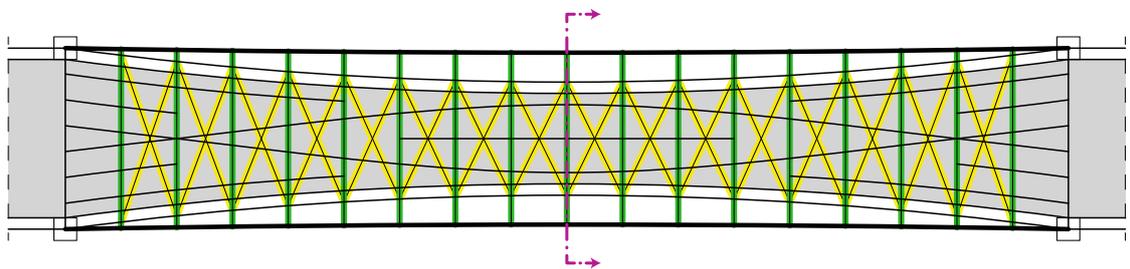
F1  
<https://www.google.it/maps/@52.6765548,-8.5711405,471a,35y,313.36h/data=!3m1!1e3>  
Living footbridge, foto aerea della pianta

0 20 40

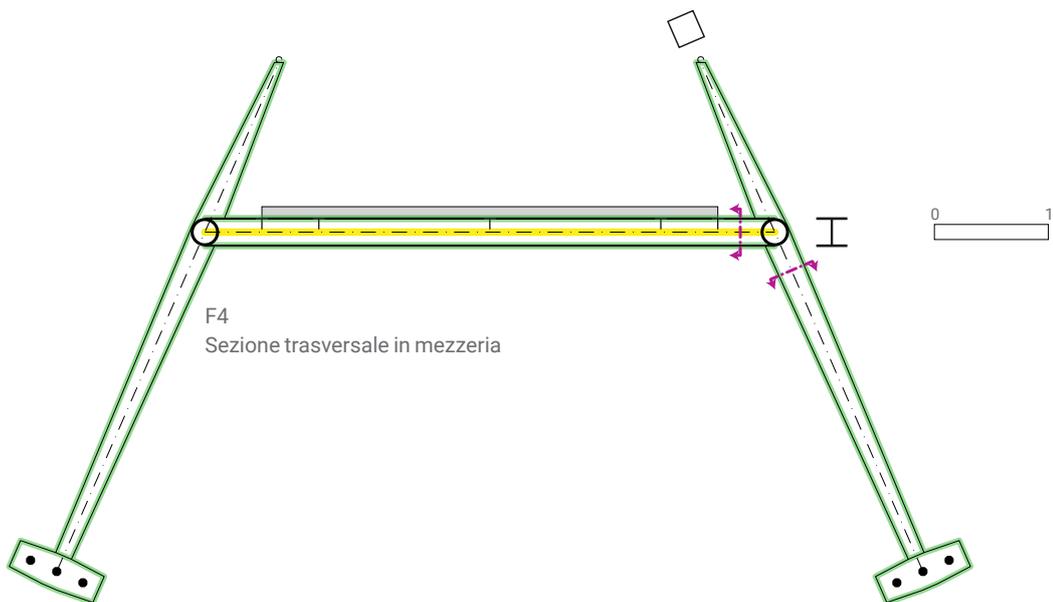




F2  
 Prospetto laterale schema geometrico campata



F3  
 Pianta schema geometrico campata:  
 La particolarità è costituita da irrigidimenti applicati ai nodi di bordo dell'impalcato, tra due costole adiacenti



F4  
 Sezione trasversale in mezzeria



F5: [http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building3553/media/06-365P106\\_h.jpg](http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building3553/media/06-365P106_h.jpg)  
 Vista globale N-E



F6: [https://film.limerick.ie/sites/default/files/styles/full\\_screen/public/users/clare/images/locations/21978152809\\_b1f1d92916\\_k.jpg?itok=3BGxCG42](https://film.limerick.ie/sites/default/files/styles/full_screen/public/users/clare/images/locations/21978152809_b1f1d92916_k.jpg?itok=3BGxCG42)  
 Collegamento tra i profilati della trave di impalcato e quelli del sistema di connessione alle funi



F7: [http://www.wilkinsoneyre.com/assets/images/\\_1768x12000\\_fit\\_center-center\\_75/365\\_365P112\\_h.jpg](http://www.wilkinsoneyre.com/assets/images/_1768x12000_fit_center-center_75/365_365P112_h.jpg)  
 Sistema autoancorato della trave armata che costituisce l'impalcato



F8: WILKINSON EYRE, Living Bridge, University of Limerick, 2009  
 Collegamento impalcato-pile



F9: [https://film.limerick.ie/sites/default/files/styles/full\\_screen/public/users/clare/images/locations/121007ULBridge\\_021.jpg?itok=B51JfLol](https://film.limerick.ie/sites/default/files/styles/full_screen/public/users/clare/images/locations/121007ULBridge_021.jpg?itok=B51JfLol)  
Prospetto laterale singola campata N-O



F10: WILKINSON EYRE, Living Bridge, University of Limerick, 2009  
Vista globale S-E

## SPINNINGFIELD FOOTBRIDGE - MANCHESTER (UNITED KINGDOM)<sup>N1</sup>

Il Spinningfield footbridge sorge sul fiume Irwell e serve a collegare la stazione ferroviaria ed i locali commerciali dell'omonimo quartiere a Manchester (spalla nord), con quelli Mark Addy del paese di Salford (spalla sud)<sup>F1</sup>. L'opera è una struttura mista in cui l'elemento portante primario è la catenaria, costituita da un profilato a sezione circolare con diametro 10cm. L'impalcato invece, è la trave longitudinale reticolare spaziale monostrato, con larghezza di 4.5m in mezzeria e 3.2m alle estremità, le cui aste sono piatti saldati in maniera differente. La sezione cioè, di quelli perimetrali, è scatolare, di quello spinale, è circolare, e di quelli trasversali è a T rastremata verso l'esterno. L'elemento di connessione poi, è il puntone in piatti saldati a V avente passo 3.8m e sezione rastremata anch'essa verso l'esterno. La soletta infine, è assente e lascia direttamente il posto alla pavimentazione autoportante in pannelli d'alluminio permeabili, profondi 1.9m e spessi 5cm, allettati direttamente sull'impalcato. Esso cioè, grazie alla sua maglia distribuita superficialmente, fornisce già il piano d'appoggio per la pavimentazione, senza bisogno di un ulteriore elemento strutturale che la sostenga. Il ponte di Spinningfield quindi, è un sistema autoancorato sotto armato, in cui la catenaria è il lembo teso inferiore e la trave reticolare è quello compresso superiore. Perciò, in virtù della forte ottimizzazione dei suoi elementi costruttivi, la struttura risulta sufficientemente rigida e leggera, da non avere necessità di smorzatori. Quindi, la cosa più interessante dello Spinningfield footbridge è senza dubbio il procedimento automatico di generazione dello schema geometrico. Esso cioè, viene condotto esclusivamente per la combinazione di carico più importante e consiste nell'inserire cerniere in tutti i nodi, imporre la forma dell'impalcato e lasciare che la catenaria e gli elementi di connessione si dispongano cercando l'equilibrio in presenza di solo sforzo normale. Al termine della procedura poi, le cerniere vengono sostituite da incastri e si esegue il calcolo per tutte le altre combinazioni di carico. In questo modo allora, il valore delle ulteriori caratteristiche della sollecitazione risulta minimo.

F1

N1

<http://happyPontist.blogspot.it/2013/02/manchester-bridges-22-spinningfields.html>

DATI

.Progetto strutturale:  
Ramboll  
.Progetto architettonico:  
Whitbybird  
.Impresa:  
Eric Wright

.Anno apertura: 2012  
.L tot: 52m  
.N campate: 1  
.L luce libera: 44m  
.Costo: £1.500.000

Schema GEOMETRICO della  
campata:  
F2 - F5

Descrizione FOTOGRAFICA:  
F6 - F15

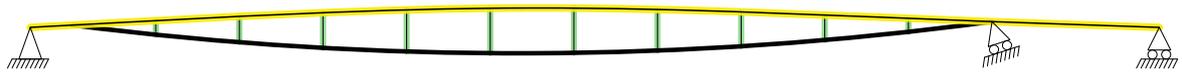
F1

<https://www.google.it/maps/@53.4813087,-2.2544707,183a,35y,232.73h/data=!3m1!1e3>

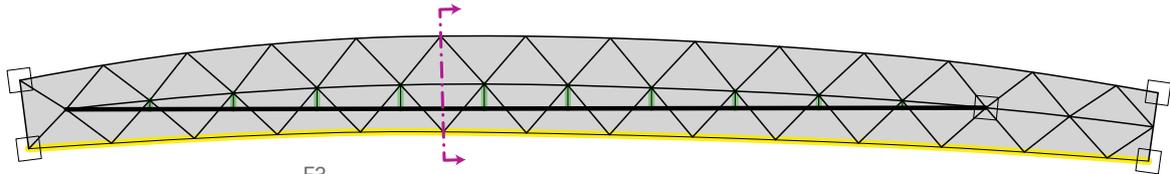
Spinningfield footbridge,  
foto aerea della pianta

0 5 10

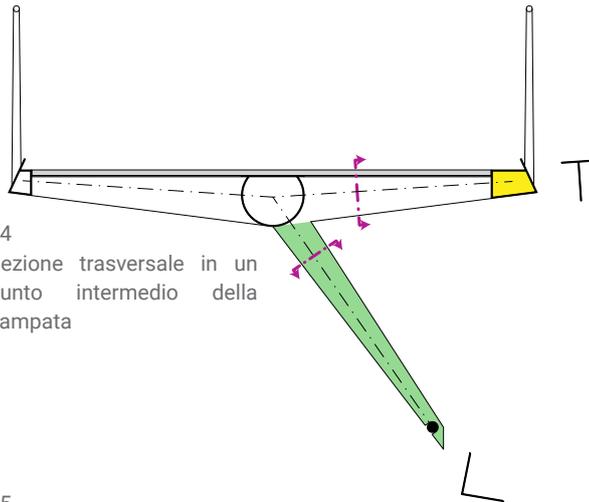




F2  
 Prospetto laterale schema geometrico campata

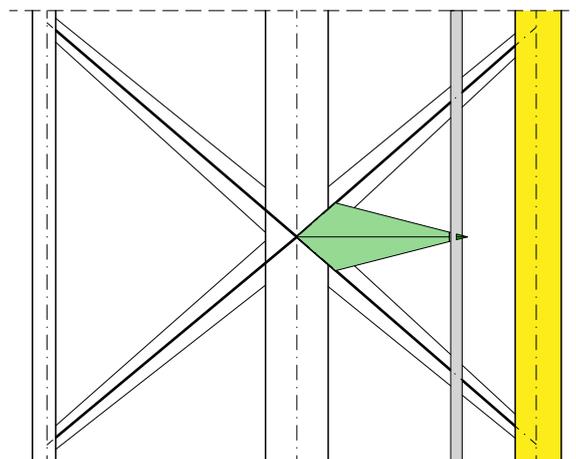


F3  
 Pianta (vista dal basso) schema geometrico campata:  
 La particolarità consiste nell'asimmetria di sezione tra  
 i due correnti di bordo, dovuta a quella delle componenti  
 dell'azione interna (prevalentemente la torsione)



F4  
 Sezione trasversale in un  
 punto intermedio della  
 campata

F5  
 Nodo centrale della struttura  
 reticolare in pianta





F6: [http://3.bp.blogspot.com/-O4eTPgkVds/URGby49c3KI/AAAAAAAAFLc/v\\_4YCWbnyCk/s1600/Spinning7.jpg](http://3.bp.blogspot.com/-O4eTPgkVds/URGby49c3KI/AAAAAAAAFLc/v_4YCWbnyCk/s1600/Spinning7.jpg)  
Vista globale da Sud



F7: <http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/>  
Collocamento in sede dell'intero ponte



F8: <http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/>  
Montaggio spalla Sud



F9: <http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/>  
Montaggio spalla Nord



F10: <http://2.bp.blogspot.com/-ndoFGiBiOo8/URGbXoYT4II/AAAAAAAAAFLA/zA5gN2zr9ii/s1600/Spinning3.jpg>  
 Vista globale da Nord



F11: [http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Fondazioni Nord](http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Fondazioni%20Nord)



F12: <http://4.bp.blogspot.com/Spinning2.jpg>  
 Nodo interno dell'impalcato reticolare



F13: [http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Fondazioni Sud](http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Fondazioni%20Sud)



F14: [http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Pavimentazione in fogli di alluminio di 5cm](http://www.suaveairphotos.co.uk/general/2/EricWrightIrwelFootbridge/Pavimentazione%20in%20fogli%20di%20alluminio%20di%205cm)



F15: [http://1.bp.blogspot.com/-w\\_nSDeT7JiE/URGbyxgRx-MI/AAAAAAAAAFLQ/IhWDyakmFjc/s1600/Spinning6.jpg](http://1.bp.blogspot.com/-w_nSDeT7JiE/URGbyxgRx-MI/AAAAAAAAAFLQ/IhWDyakmFjc/s1600/Spinning6.jpg)  
 Vista superiore da Sud

## RIPSHORST FOOTBRIDGE - OBERHAUSEN (GERMANY)<sup>N1</sup>

Il Ripshorst footbridge a Oberhausen sorge sul fiume Rhein-Herne ed ha lo scopo di dare continuità al percorso ciclopedonale della città, tra le due sponde del corso d'acqua<sup>F1</sup>. L'opera dunque, è una struttura mista in cui l'elemento portante primario è l'arco spaziale costituito da conci d'acciaio incastrati. La loro lunghezza è pertanto, 2.8m circa e sono composti da due profilati a sezione circolare con diametro 37cm e 55cm, inseriti l'uno dentro l'altro. L'impalcato invece, è la trave longitudinale in acciaio avente sezione chiusa scatolare di 3m per 25cm, su cui si trova la pavimentazione costituita da fogli d'alluminio lunghi 2m e spessi 5cm. L'elemento connettivo poi, è il puntone in acciaio avente passo 2.8m circa e sezione circolare costante, che varia per ogni gruppo di aste da 8cm a 22cm. Riguardo alla generazione dello schema geometrico poi, il ponte di Ripshorst è stato progettato con lo stesso metodo automatico utilizzato per quello di Spinningfield. I due infatti, presentano analogie e differenze. Le prime cioè, sono la curvatura dell'impalcato nel piano orizzontale e la posizione del sistema portante primario sottostante ad esso, che quando possibile, è da preferire a quella sovrastante, per vari motivi. In primo luogo, si semplifica notevolmente l'assestamento architettonico dovuto alla necessità di transito. In secondo luogo, nel caso di arco superiore anziché inferiore, si evita il necessario compromesso relativo alla posizione reciproca dei vincoli che collegano i due elementi strutturali con il suolo. Se l'arco è superiore cioè, un'eccessiva distanza orizzontale tra la spalla ed il corrispondente vincolo esterno dell'impalcato, riduce la prevalenza dello sforzo normale sulle altre caratteristiche della sollecitazione, precludendo il funzionamento dell'arco. Quando esso è inferiore invece, ciò non succede e le sue spalle possono essere allontanate senza restrizioni dagli appoggi dell'impalcato, fino ad ottenere la struttura antifunicolare desiderata, durante la ricerca dello schema geometrico. Il ponte di Ripshorst infine, differisce principalmente da quello inglese in quanto non è un sistema autoancorato, ma spingente.

F1



N1

J.JORQUERA, Structural behaviour of spatial arch bridges, 2009

DATI

.Progetto strutturale:  
S.B.P.

.Progetto architettonico:  
Diekmann e Lohaus

.Impresa:  
Strabag, Hoch e  
Ingenieurbau, E.Rüter GmbH

.Anno apertura: 1997

.L tot: 140m

.N campate: 1

.L luce libera: 78m

.Costo: €1.600.000

Schema GEOMETRICO della  
campata:

F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:

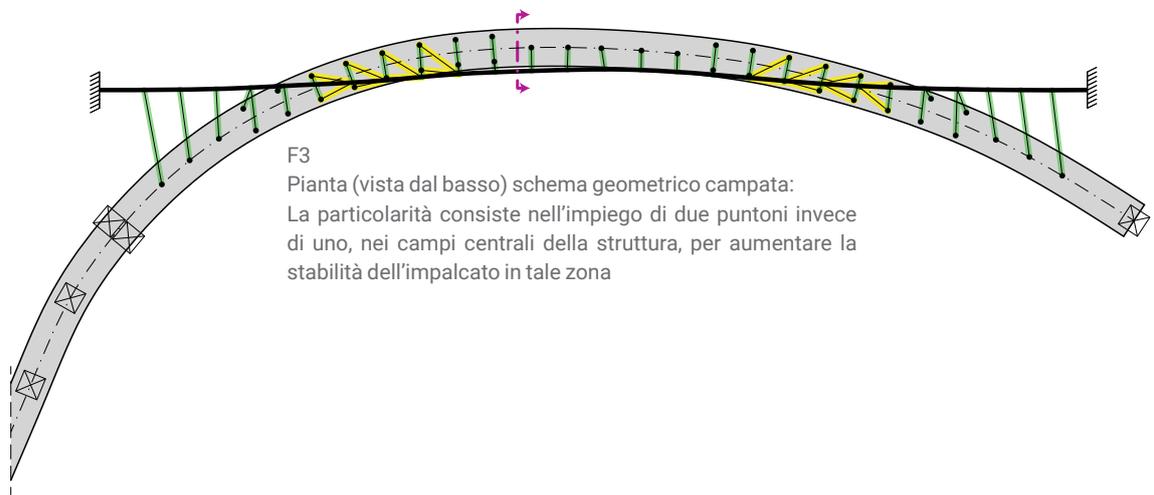
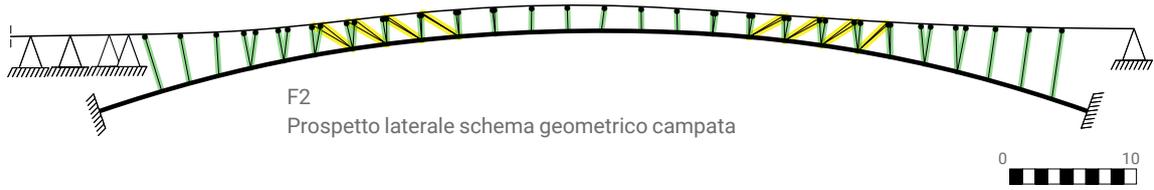
F5 - F10

F1

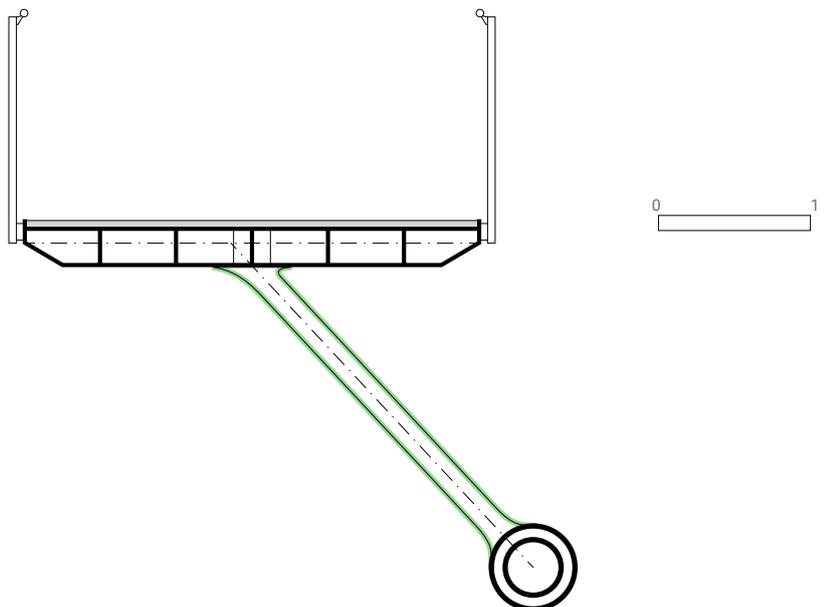
<https://www.google.it/maps/@51.4947001,6.8984158,243a,35y,258.52h/data=!3m1!1e3>

Ripshorst footbridge, foto aerea della pianta

0 10 20



F4  
Sezione trasversale in un punto intermedio della campata





F5: <http://www.klein-garten.de/Ruhrpottbruecken.html>  
 Vista frontale S-E



F6: <https://hiveminer.com/Tags/hausripshorst>  
 Vista laterale S-E



F7: <http://www.sbp.de/en/project/ripshorst-pedestrian-bridge/>  
 Vista frontale da Sud



F8: <http://mapio.net/geo/51.494176/6.899328/en/>  
 Fondazione spalla Nord



F9: [http://www.rainerliebe.de/page\\_id=447](http://www.rainerliebe.de/page_id=447)  
Vista frontale da Nord



F10: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oberhausen\\_-\\_Ripshorstbr%C3%BCcke\\_10\\_ies.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Oberhausen_-_Ripshorstbr%C3%BCcke_10_ies.jpg)  
Spalla arco e appoggio impalcato Nord

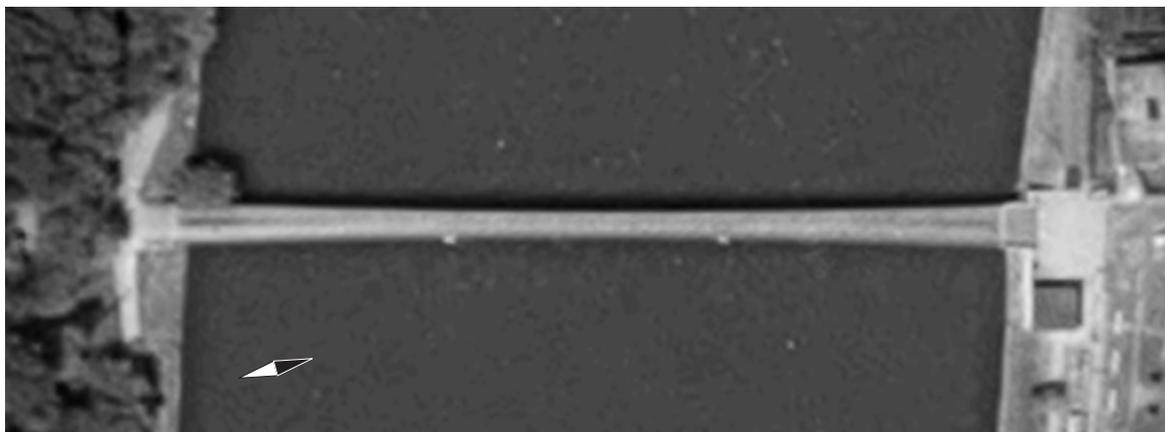


F11: <http://mapio.net/geo/51.494176/6.899328/en/>  
Vista superiore da Sud

## STUDENCI FOOTBRIDGE - MARIBOR (SLOVENIA)<sup>N1</sup>

Lo Studenci footbridge a Maribor sorge sul fiume Drava ed ha lo scopo di connettere centralmente le due porzioni della città, separate dal corso d'acqua. Siccome il ponte è stato demolito e ricostruito varie volte durante la storia, per colpa di guerre ed alluvioni, le spalle e le pile attuali, sono ancora quelle originarie, ma adattate all'ultima versione dell'opera. Il suo elemento portante primario dunque, è una trave reticolare spaziale ad asse lievemente circolare di raggio 4000m, la cui maglia triangolare avente base trasversale 150cm, altezza 175cm e base longitudinale 210cm, è costituita da profili tubolari in acciaio. I correnti cioè, hanno diametro 30cm, mentre i montanti e le diagonali 14cm<sup>F1</sup>. L'elemento portante secondario poi, è la trave longitudinale costituita da quattro profili in acciaio di tipo IPE 160, che hanno la funzione di irrigidire torsionalmente l'intera struttura e costituire il supporto della soletta (impalcato). L'elemento connettivo allora, è la costola trasversale in piatti metallici saldati aventi, sezione rastremata verso l'esterno, spessore 8mm e rinforzo del bordo libero con tubolari di diametro 4cm. Inoltre, con lo scopo di diversificare la curvatura dell'impalcato rispetto a quella dell'elemento strutturale primario, ogni costola si trova sul piano dei due montanti corrispondenti, ma a quote diverse decrescenti verso le spalle. La soletta infine, è formata da pannelli di legno isotropi spessi 5cm, profondi 2.1m e dotati di larghezza variabile da 3.2m in mezzeria a 4.8m alle spalle. Riguardo l'ottimizzazione del processo di fabbricazione poi, il ponte Studenci è stato progettato usando la strategia opposta a quella impiegata per Ripshorst. Cioè, la tipologia strutturale di quest'ultimo prevede, asse curvilineo di forma non definita, poche membrature, ma tutte diverse tra loro. Quella del primo invece, ne prevede tante, ma tutte uguali per ogni gruppo, condizione a cui è stato possibile arrivare soltanto impiegando asse circolare e distribuzione radiale dei montanti. Altro motivo di risparmio infine, è stato dato dall'utilizzo del vecchio ponte come piano d'appoggio per il montaggio del nuovo, situazione che si presenta soltanto raramente.

F1



N1

V.MARKELJ, Some aspects of footbridge design, 2014

DATI

.Progetto strutturale:  
Ponting  
.Progetto architettonico:  
Reichenberg Arhitektura  
.Impresa:  
Group Pomgrad, Konstruktor

.Anno apertura: 2008  
.L tot : 126m  
.N campate: 3  
.L luce libera: 42m  
.Costo: €1.200.000

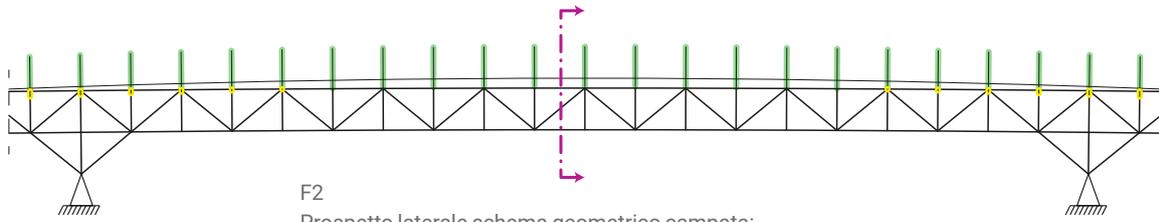
Schema GEOMETRICO della  
campata:  
F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:  
F5 - F11

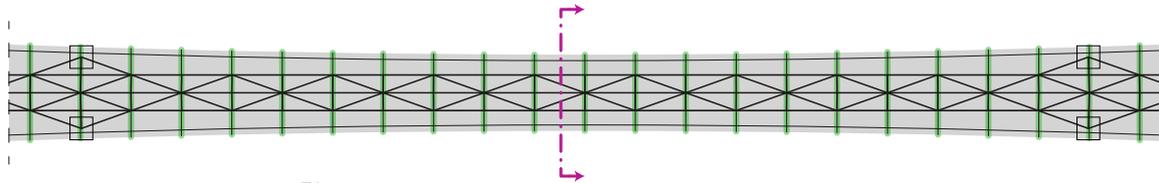
F1

<https://www.google.it/maps/@46.556911,15.6358487,523a,35y,287.34h/data=!3m1!1e3>  
Studenci footbridge, foto aerea della pianta

0 10 20

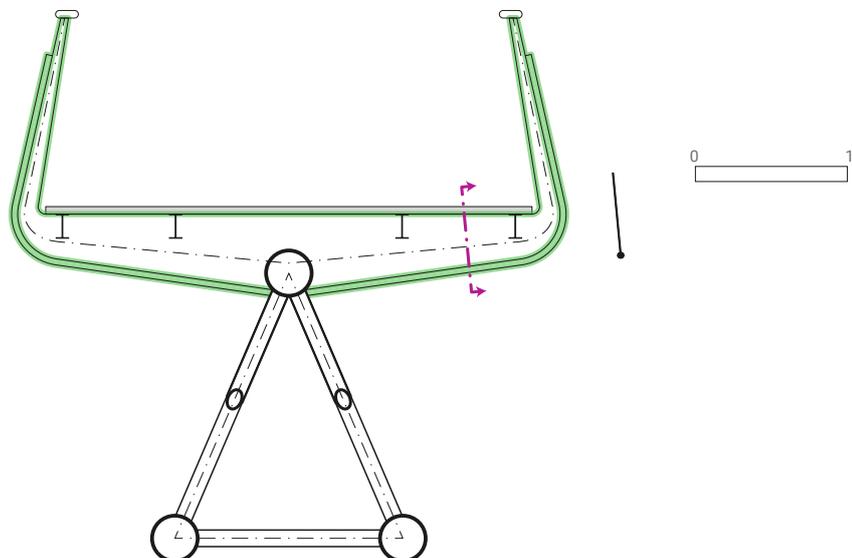


F2  
 Prospetto laterale schema geometrico campata:  
 La particolarità consiste nella variazione della quota di collegamento della costola all'elemento portante primario, con lo scopo di dare all'impalcato pendenza diversa da esso



F3  
 Pianta schema geometrico campata

F4  
 Sezione trasversale in un punto prossimo alla mezzeria





F5: V.MARKELJ-M.PIPENBAHER, Ponting d.o.o. (Ltd) consulting engineers, Slovenia  
Campata centrale vista da Est



F6: [https://farm8.staticflickr.com/73908968203712\\_e6fe62c098\\_b.jpg](https://farm8.staticflickr.com/73908968203712_e6fe62c098_b.jpg)  
Campata centrale vista da Ovest

Accesso N-O: in corrispondenza delle spalle la struttura principale fuoriesce dalla soletta



F7: Bridge design & engineering magazine, Footbridge award 2008  
Smontaggio del ponte precedente avvenuto dopo la messa in opera di quello attuale



F8: [https://farm8.static.flickr.com/7303/8967015369\\_43b063eb-7d\\_b.jpg](https://farm8.static.flickr.com/7303/8967015369_43b063eb-7d_b.jpg)



F9: [https://farm6.staticflickr.com/5336/8968203068\\_a897e5ca9a\\_b.jpg](https://farm6.staticflickr.com/5336/8968203068_a897e5ca9a_b.jpg)  
Vista globale superiore da Sud



F10: [https://farm3.static.flickr.com/2857/8967013883\\_5dffff4b34\\_b.jpg](https://farm3.static.flickr.com/2857/8967013883_5dffff4b34_b.jpg)  
Vista superiore S-O



F11: [https://c1.staticflickr.com/3/2812/8968203790\\_172562c318\\_b.jpg](https://c1.staticflickr.com/3/2812/8968203790_172562c318_b.jpg)  
Particolare campata Sud

## COSTITUZIONE FOOTBRIDGE - VENEZIA (ITALIA)<sup>N1,N2</sup>

Il ponte della costituzione a Venezia sorge sul fiume Canal Grande e collega la stazione ferroviaria di S.Lucia, sulla terra ferma, con quella delle corriere in P.Roma, sull'isola<sup>F1</sup>. L'opera, è un arco spaziale a sesto ribassato in acciaio di tipo Vierendell, i cui elementi principali sono tre correnti superiori e due inferiori. Due dei primi cioè, sono profilati laterali a sezione triangolare costante, il terzo invece, è un tubo centrale con diametro di 40cm, collocato dentro un profilato a sezione triangolare variabile, che in mezzeria ha base 140cm ed altezza 80cm, mentre alle spalle ha dimensioni circa doppie rispetto alle precedenti. I due correnti inferiori poi, hanno sezione composta da un profilato circolare ed uno ad L. L'elemento portante secondario inoltre, qui è assente e lascia a quello connettivo il compito di sostenere la soletta, costituita da pannelli in pietra e vetro strutturale. L'impalcato allora, è largo 8.3m in mezzeria e 5.7m alle spalle, dimensioni molto maggiori di quelle che generalmente si scelgono per ponti di luce analoga. L'elemento di connessione dei correnti dunque, è il montante Vierendell che, dovendo collegarne cinque, ha forma stellare, costituita da bracci rastremati verso l'esterno, aventi sezione rettangolare con lato corto arrotondato. Il loro asse inoltre, non è ortogonale a quello dei correnti, ma inclinato in base a considerazioni unicamente estetiche, che hanno implicato una grande quantità di elementi con passo 1m, soggetti a basso sforzo normale ed alto momento flettente, situazione opposta a quella dello Studenci footbridge. Inoltre, per consentire la navigabilità con 3.5m di freccia all'intradosso, la pendenza dell'impalcato non è minore del 7% ovunque, pertanto le regole sul transito dei disabili sono state ignorate. La decisione più impropria tuttavia, è stata la scelta dell'arco, in quanto la roccia di Venezia consente esclusivamente fondazioni su pali profondi 20-50m che, se sottoposte a spinte orizzontali, cedono lateralmente danneggiando gli edifici circostanti. E' stato necessario dunque, un costosissimo sistema di riduzione della deformata, che si attiva automaticamente quando essa supera i 2cm da ogni spalla.

F1



N1

K.R.HEATH, A critical analysis of ponte della costituzione, Venice, 2011

N2

G.ROMANO-C.ROMANO-L.ZIERO, Il IV ponte sul canal grande a Venezia, 2007

DATI

.Progetto strutturale:

S.Calatrava

.Progetto architettonico:

S.Calatrava

.Impresa:

Cignoni

.Anno apertura: 2008

.L tot : 94m

.N campate: 1

.L luce libera: 81m

.Costo: €12.000.000

Schema GEOMETRICO della

campata:

F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:

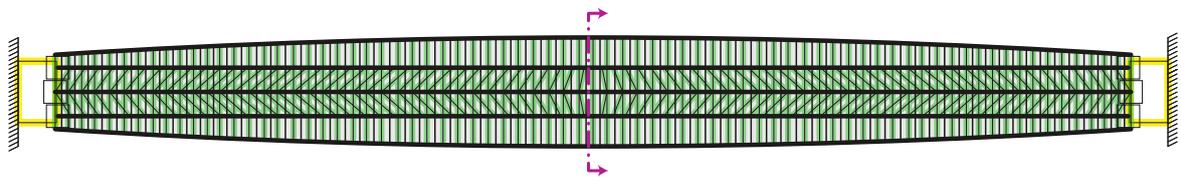
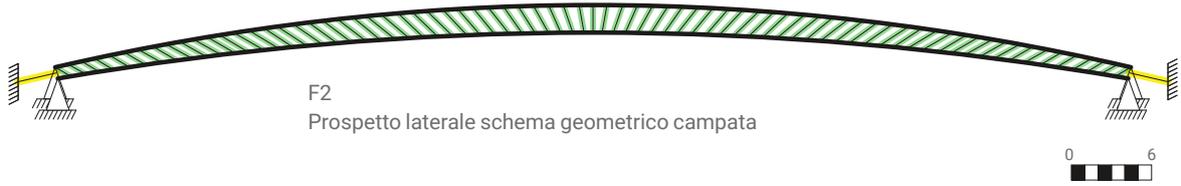
F5 - F11

F1

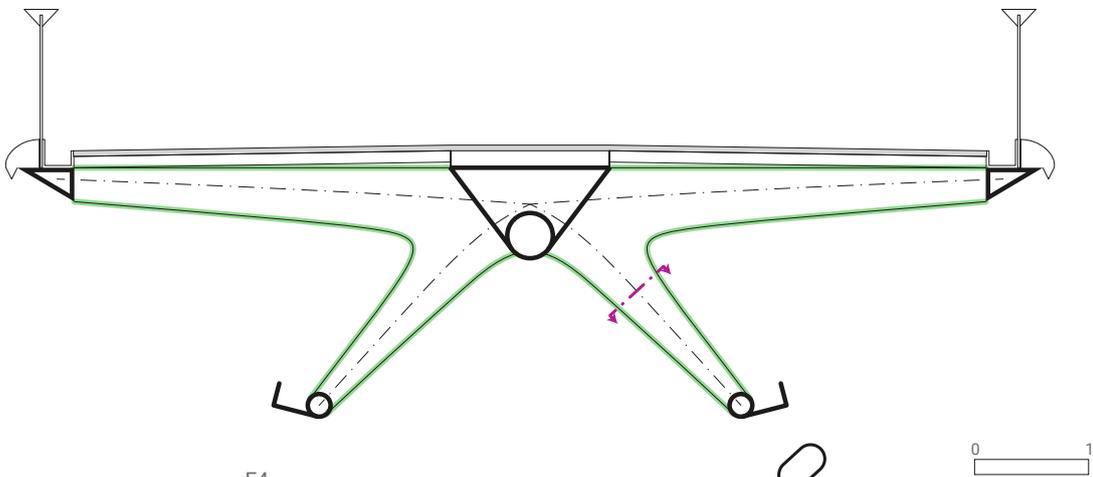
<https://www.google.it/maps/@45.4388673,12.3194851,180a,35y,307.5h/data=!3m1!1e3>

Costituzione footbridge, foto aerea della pianta

0 5 10



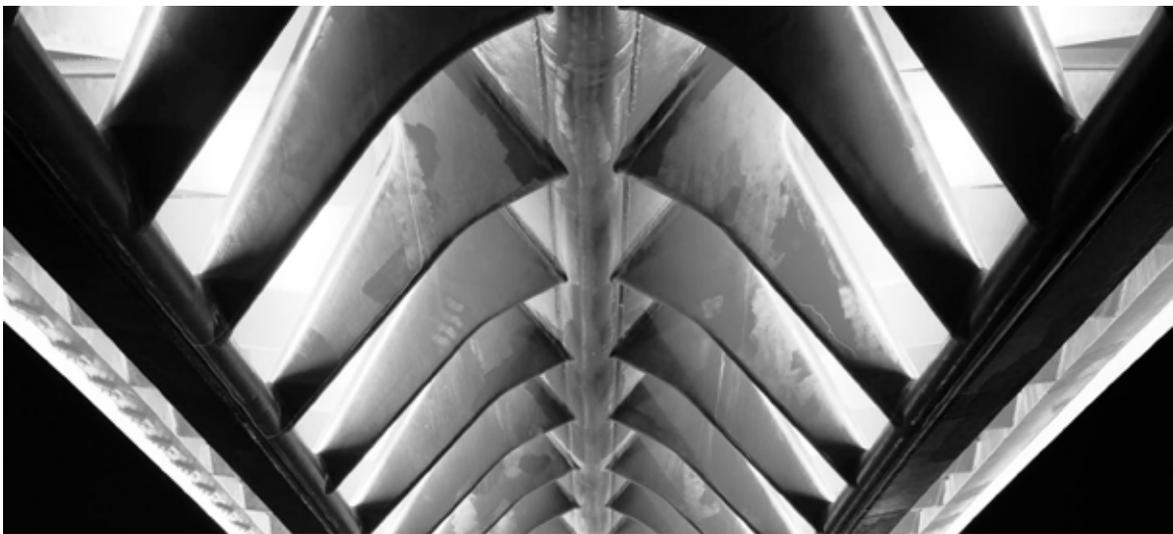
F3  
 Pianta schema geometrico campata:  
 La particolarità consiste nel sistema idraulico di ripristino della configurazione indeformata. Esso si attiva automaticamente quando ciascuna delle due fondazioni si allontana per più di 2cm in orizzontale, per effetto della spinta dell'arco



F4  
 Sezione trasversale in un punto prossimo alla mezzeria



F5: <http://www.calatrava.com/projects/quarto-ponte-sul-canal-grande-venezia.html>  
Vista globale Ovest



F6: <http://www.calatrava.com/projects/quarto-ponte-sul-canal-grande-venezia.html>  
Intradosso arco Vierendell



F7: G.ROMANO-C.ROMANO-L.ZIERO, Il IV ponte sul canal grande a Venezia, 2007  
Montante Vierendell in fase di assemblaggio



F8: <http://www.calatrava.com/projects/quarto-ponte-sul-canal-grande-venezia.html>  
Vista globale Nord



F9: <http://www.calatrava.com/projects/quarto-ponte-sul-canal-grande-venezia.html>  
Vista intradosso spalla N-O



F10: G.ROMANO-C.ROMANO-L.ZIERO, Il IV ponte sul canal grande a Venezia, 2007  
Fondazione N-E: i correnti superiori laterali non sono ancorati



F11: G.ROMANO-C.ROMANO-L.ZIERO, Il IV ponte sul canal grande a Venezia, 2007  
Vista laterale arco Vierendell in fase di montaggio

## KURIPLA FOOTBRIDGE - BRISBANE (AUSTRALIA)<sup>N1</sup>

Il Kuripla footbridge a Brisbane sorge sul fiume omonimo ed ha lo scopo di collegare la Queensland gallery of modern arts (sponda S-O) alla zona centrale della città (sponda N-E)<sup>F1</sup>. L'opera, è una trave Vierendell con armatura tensegrity all'estradosso, composta da tiranti e puntoni d'acciaio a sezione circolare, che sono l'elemento portante primario. I più lunghi di essi pertanto, 30m in corrispondenza degli appoggi centrali, hanno diametro 90cm, mentre i più corti, 23m all'interno di ogni campata, sono larghi 60cm. L'impalcato allora, ai bordi del quale è incernierata direttamente l'armatura, in assenza di un elemento portante secondario, è costituito da una trave Vierendell larga 10.5m, irrigidita da sottili aste diagonali a sezione circolare. Si vede chiaramente che il loro inserimento, effettuato a fine progetto, ha lo scopo di migliorare la stabilità laterale dell'impalcato, in base all'esperienza provata dai progettisti, riguardo al Millennium footbridge di Londra. I montanti Vierendell allora, sono elementi reticolari piani composti da profilati a doppia T. I correnti invece, sono travi longitudinali con sezione scatolare curvilinea, avente lo scopo di adattare la struttura al vento tangente. L'elemento connettivo poi, è assente e la soletta è costituita da due pannelli in c.a.p. affiancati, profondi 6.4m come i campi dell'impalcato, che forniscono una superficie ciclo-pedonale larga 6.5m. Dunque, gli accorgimenti per migliorare il comportamento fluidodinamico della trave, compreso l'inserimento di tre smorzatori a massa concentrata TMD in mezzeria, le hanno conferito la frequenza oscillatoria di 2.6Hz, superando quella del passo pedonale di 1.3Hz. Il vero collaudo del ponte però, è avvenuto successivamente all'alluvione del 2011, che ne ha sommerso completamente l'impalcato, senza danneggiarlo. Tuttavia, anche i puntoni dell'armatura tensegrity, hanno dovuto subire un miglioramento fluidodinamico, per via della loro altezza che li espone al distacco di vortici in quota. E' stato cioè applicato in mezzeria, uno smorzatore a massa concentrata, costituito da una piastra elicoidale arrotolata al palo, che sbatte contro di esso durante la vibrazione, riducendola.

N1  
[http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa\\_bridge\\_a\\_tensegrity\\_world\\_first](http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa_bridge_a_tensegrity_world_first)

DATI  
.Progetto strutturale:  
Arup  
.Progetto architettonico:  
Cox Rayner  
.Impresa:  
Baulderstone Pty Ltd

.Anno apertura: 2009  
.L tot : 231m  
.N campate: 3  
.L campata Ovest: 58m  
.L campata centrale: 128m  
.L campata Est: 45m  
.Costo: AU\$63.000.000  
€35.000.000

Schema GEOMETRICO della  
campata:  
F2 - F4

Descrizione FOTOGRAFICA:  
F5 - F13

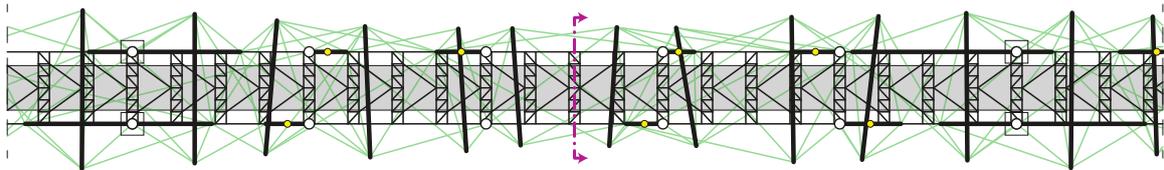
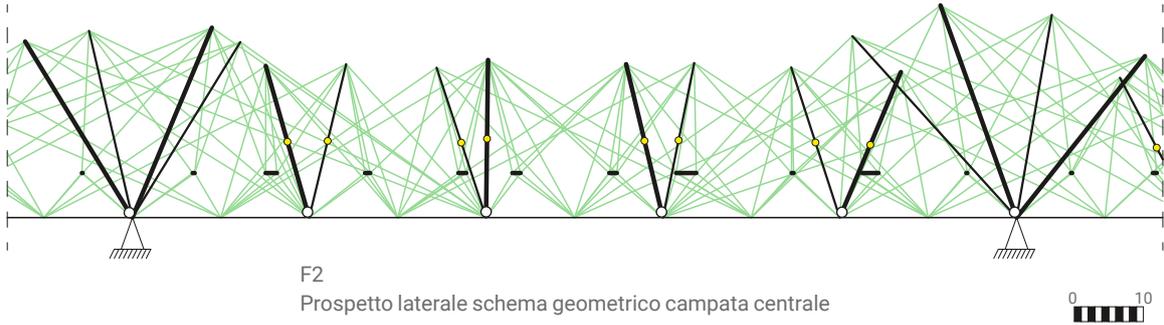
F1  
<https://www.google.it/maps/place/Kurilpa+Bridge/@-27.469325,153.0181593,544a,35y,341.48h/data=!3m1!1e3!>

0 20 40



F1





F3  
 Pianta schema geometrico campata centrale:  
 La particolarità consiste nell'applicazione di smorzatori a massa concentrata (TMD) costituiti da semplici piastre metalliche di forma elicoidale, arrotolate ai puntoni in corrispondenza della mezzeria. Quando il palo inizia a vibrare per effetto del distacco di vortici, il dispositivo sbatte contro di esso dissipandone il movimento.





F5: [http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building5510/media/Kurilpa\\_12\\_ChristopherFrederickJones1.jpg](http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building5510/media/Kurilpa_12_ChristopherFrederickJones1.jpg)  
 Vista laterale N-O



F6 - F7: BAULDERSTONE PTY LTD, COX RAYANER, ARUP, ACAA entry form, The kuripla bridge, 2010  
 Vista globale N-O



Appoggio ESTERNO N-E con supporti provvisori per incastrare l'impalcato



F8: <https://www.engenhariacivil.com/imagens/tensegridade-estruturas.jpg>  
 Vista Nord appoggio INTERNO N-E con supporti provvisori per incastrare l'impalcato in fase di montaggio



F9: [http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building5510/media/Kurilpa\\_12\\_ChristopherFrederickJones1.jpg](http://c1038.r38.cf3.rackcdn.com/group1/building5510/media/Kurilpa_12_ChristopherFrederickJones1.jpg)  
 Vista globale Est



F10: [http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa\\_bridge\\_a\\_tensegrity\\_world\\_first](http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa_bridge_a_tensegrity_world_first)



F11: <http://1.bp.blogspot.com/-ZTAkNP138MI/UU2GzcKcHsl/AAAAAAAAcLU/b7sWHIhbqaA/s1600/Kurilpa+Bridge+by+Cox+Architecture04.jpg>  
 Vista globale intradosso



F12: [http://broer.no/bro/b/b105\\_4.jpg](http://broer.no/bro/b/b105_4.jpg)  
 Attacco dell'armatura tensegrity all'impalcato



F13: [http://www.coxarchitecture.com.au/wp-content/uploads/2009/01/406081\\_00\\_N205\\_medium.jpg](http://www.coxarchitecture.com.au/wp-content/uploads/2009/01/406081_00_N205_medium.jpg)  
 Vista Est appoggio INTERNO N-E con supporti provvisori



## SCHEMI STATICI MINIMI

## SCelta DEGLI SCHEMI STATICI

Dai riferimenti illustrati in precedenza è opportuno effettuare alcune considerazioni tecniche, relative alle principali componenti della struttura, con lo scopo di individuare le strategie progettuali più opportune.

### .Elemento strutturale primario<sup>N1</sup>

Se si desidera scegliere un elemento strutturale primario soggetto solo a sforzo assiale, posto al di sotto dell'impalcato ed autoancorato ad esso, è opportuno che la sua proiezione orizzontale sia rettilinea, anche nel caso di impalcato con curvatura laterale. In questo modo cioè, si evita l'elevato momento torcente imposto dalla labilità laterale dell'elemento strutturale primario stesso.

### .Elemento strutturale di connessione<sup>N2</sup>

Se l'asse del puntone che collega l'elemento strutturale primario all'impalcato, è verticale, quest'ultimo si trova in condizione di equilibrio instabile lateralmente. Occorre pertanto, inclinare tale asse.

### .Impalcato<sup>N3</sup>

Per l'elemento strutturale secondario (impalcato), si è scelto di adottare un sistema discreto. Quindi, sono stati risolti e confrontati gli schemi statici di una singola generica maglia<sup>N4</sup>, relativa ad un possibile impalcato per ponte pedonale, prodotta con vari metodi diversi<sup>N5</sup>. Allora, per analoghi risultati delle verifiche di resistenza e deformabilità, si è riscontrato che la struttura Vierendell, quadrangolare per assenza di elementi diagonali irrigidenti, presenta aste soggette a sforzo normale, taglio e momento flettente, quindi necessariamente molto più ingombranti, rispetto a quelle della maglia reticolare, in cui è presente soltanto sforzo normale. A loro volta poi, le aste di quest'ultima, hanno sezione molto più grossa delle funi che compongono una tensostruttura mista, che risulta pertanto, la meno dispendiosa. Quindi, a parità di tensione normale e di abbassamento in mezzzeria, sembrerebbe vantaggioso preferire il terzo sistema strutturale, anche per la sua inclinazione a massimizzare la presenza di elementi tesi e quindi non soggetti ad instabilità da sforzo normale di compressione, al contrario del sistema reticolare. La tensostruttura mista tuttavia, impone un vincolamento esterno con cerniera in entrambe le estremità, per via della reazione orizzontale, a cui gli altri due sistemi non sono sottoposti.

N1

Schemi statici qualitativi sull'elemento strutturale primario  
pg.41- 43

N2

Schemi statici qualitativi sull'elemento strutturale di connessione  
pg. 44, 45

N3

Risoluzione manuale degli schemi statici di un solo pezzo, utili a comporre l'intero impalcato

.Vierendell - pg. 46, 47

.Reticolare - pg. 48 - 51

.Tensostruttura mista :  
simmetrica pg. 52 - 75  
non simmetrica pg. 80 - 93

N4

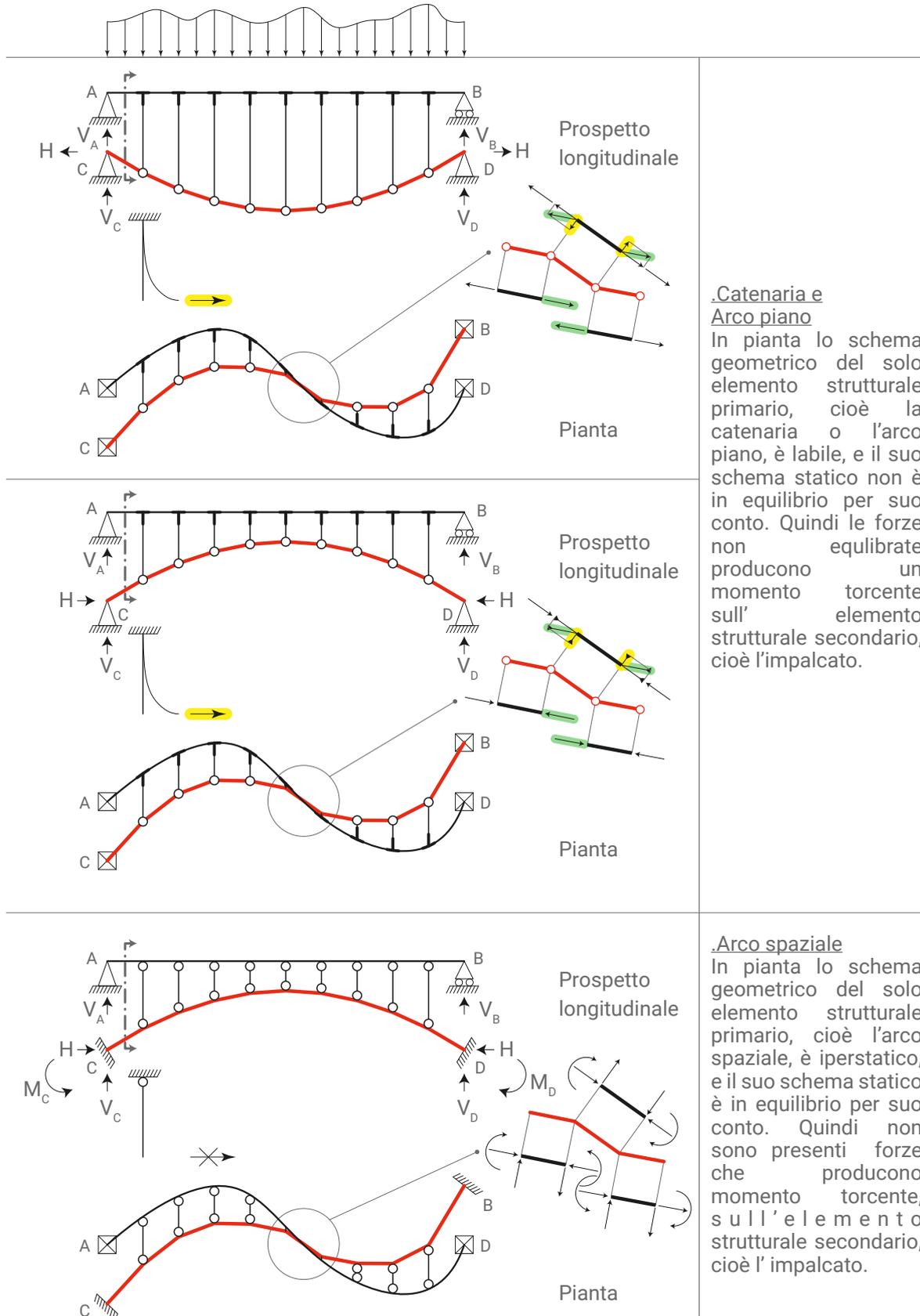
Analisi dei carichi approssimata, della possibile maglia (5m x 5m), con cui comporre la struttura di un ponte pedonale  
pg. 242

N5

Analisi strutturale comparativa, condotta su tutte le tipologie di sistema, nella loro più semplice configurazione simmetrica, eseguita con il software EXCELL  
pg. 76 - 79

Elemento secondario non collegato a quello primario (A) ≠ (C)

Elemento primario con curvatura nel piano orizzontale



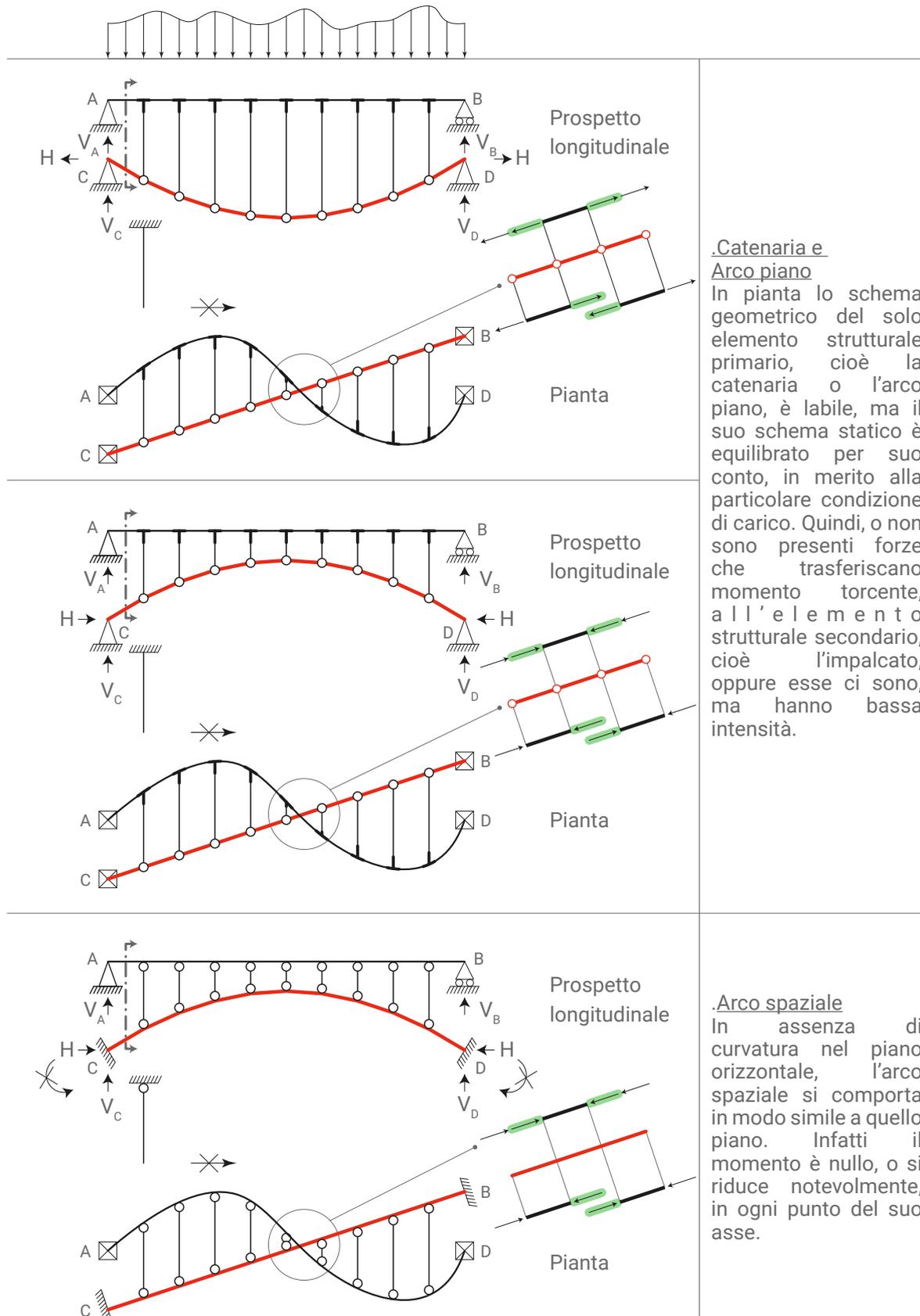
.Catenaria e  
Arco piano

In pianta lo schema geometrico del solo elemento strutturale primario, cioè la catenaria o l'arco piano, è labile, e il suo schema statico non è in equilibrio per suo conto. Quindi le forze non equilibrate producono un momento torcente sull'elemento strutturale secondario, cioè l'impalcato.

.Arco spaziale

In pianta lo schema geometrico del solo elemento strutturale primario, cioè l'arco spaziale, è iperstatico, e il suo schema statico è in equilibrio per suo conto. Quindi non sono presenti forze che producono momento torcente, sull'elemento strutturale secondario, cioè l'impalcato.

## Elemento primario senza curvatura nel piano orizzontale



### Catenaria e Arco piano

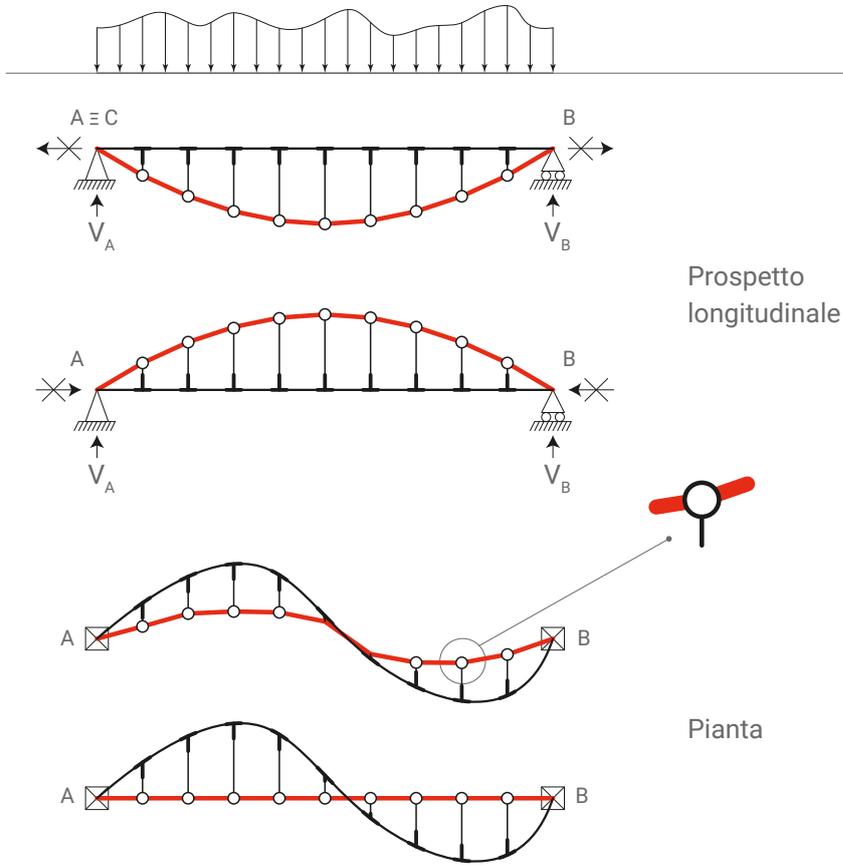
In pianta lo schema geometrico del solo elemento strutturale primario, cioè la catenaria o l'arco piano, è labile, ma il suo schema statico è equilibrato per suo conto, in merito alla particolare condizione di carico. Quindi, o non sono presenti forze che trasferiscano momento torcente, all'elemento strutturale secondario, cioè l'impalcato, oppure esse ci sono, ma hanno bassa intensità.

### Arco spaziale

In assenza di curvatura nel piano orizzontale, l'arco spaziale si comporta in modo simile a quello piano. Infatti il momento è nullo, o si riduce notevolmente, in ogni punto del suo asse.

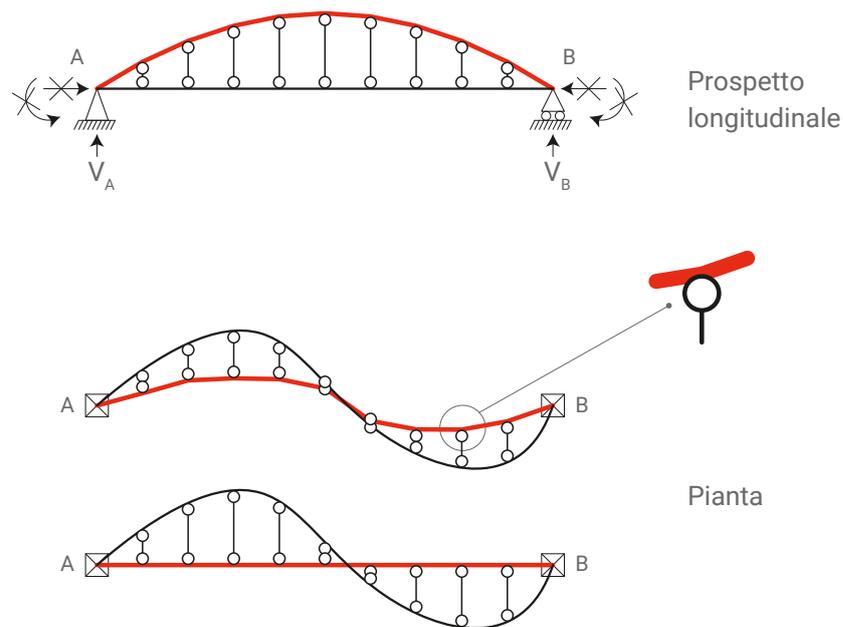
Elemento secondario collegato a quello primario (A)  $\equiv$  (C)

Elemento primario con e senza curvatura nel piano orizzontale



Catenaria e Arco piano

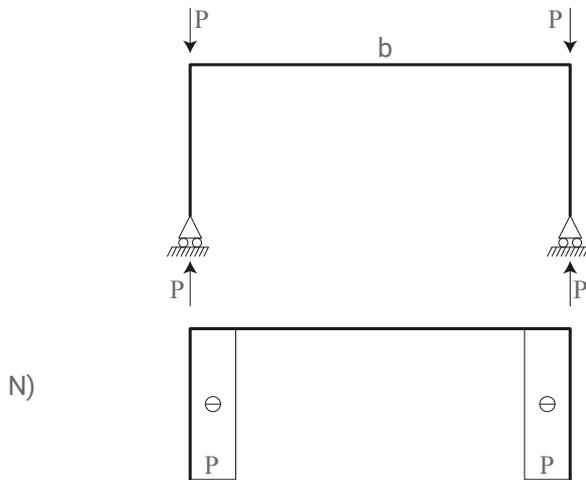
Quando l'elemento strutturale primario, cioè la catenaria o l'arco piano, è collegato a quello secondario, cioè l'impalcato, i loro vincoli esterni coincidono e non devono sopportare alcuna reazione orizzontale. Essa infatti, viene trasferita all'impalcato, producendo su di esso tutte le caratteristiche della sollecitazione.



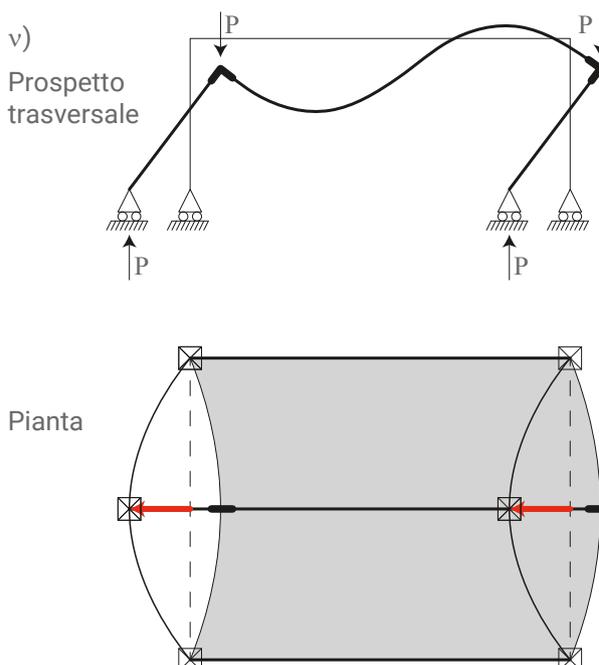
Arco spaziale

Quando l'elemento strutturale primario, cioè l'arco spaziale, è collegato a quello secondario, cioè l'impalcato, i loro vincoli esterni coincidono e non devono sopportare ne reazione orizzontale, ne momento flettente. Essi infatti, vengono trasferiti all'impalcato, producendo su di esso tutte le caratteristiche della sollecitazione.

Elemento di connessione ad asse non inclinato



Relativamente a questo schema statico, la deformata senza il fenomeno dell'instabilità da carico di punta è trascurabile, perchè corrisponde ad uno di quei casi, a cui si può applicare il primo teorema, riguardante l'interazione tra sforzo normale e momento flettente<sup>N1</sup>. Di seguito è riportata pertanto, solo la deformata che tiene conto, anche dell'instabilità da carico di punta.



Schema geometrico:  
Una volta labile, ma in equilibrio per la particolare condizione di carico  
 $2gdv-3gdl = -1$

Schema statico:  
Staticamente determinato

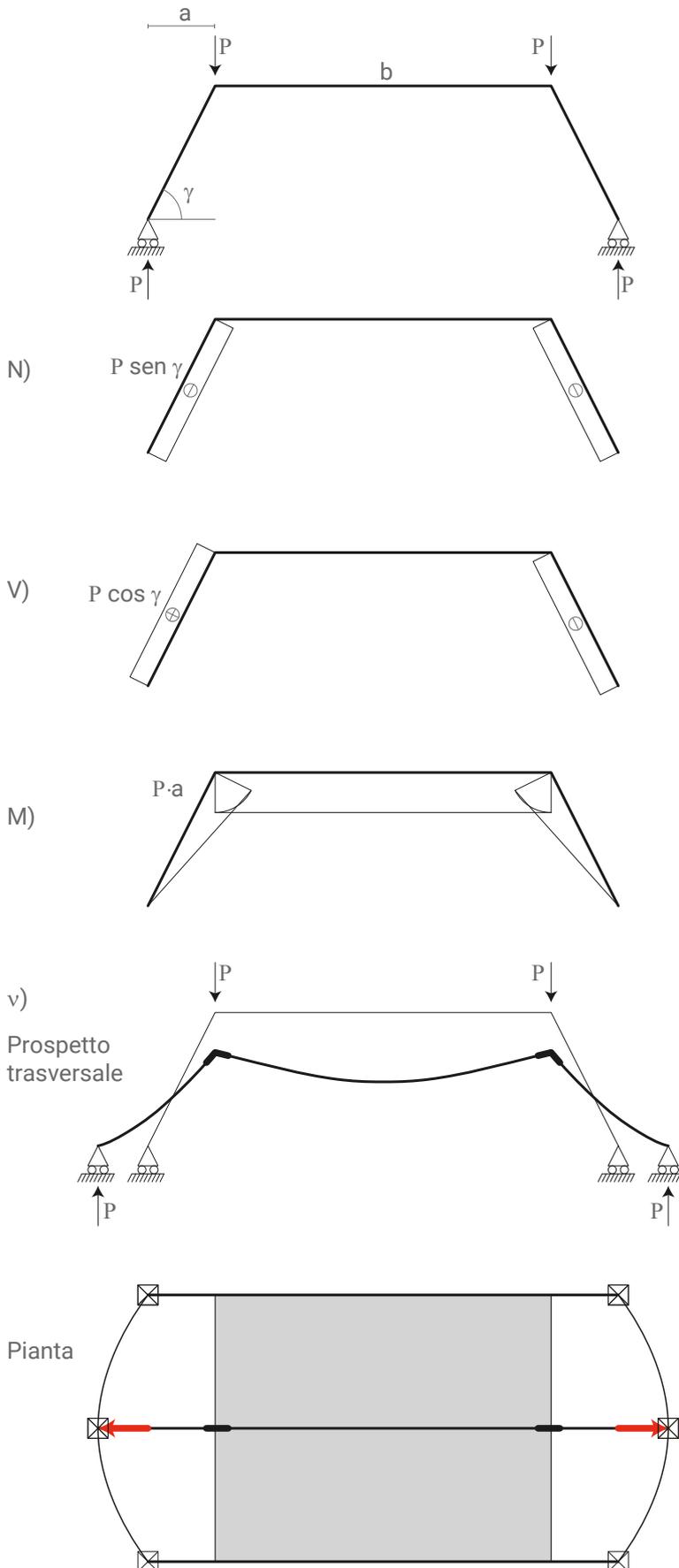
Metodo adottato:  
Equilibrio statico

Deformata:  
Simmetrica polarmente

Impalcato:  
In equilibrio laterale instabile

N1  
P. POZZATI, Teoria e tecnica delle strutture, Vol.1, UTET, 1972, cap. 6

Elemento di connessione ad asse inclinato



Schema geometrico:  
Una volta labile, ma in equilibrio per la particolare condizione di carico  
 $2gdv-3gdl=-1$

Schema statico:  
Staticamente determinato

Metodo adottato:  
Equilibrio statico

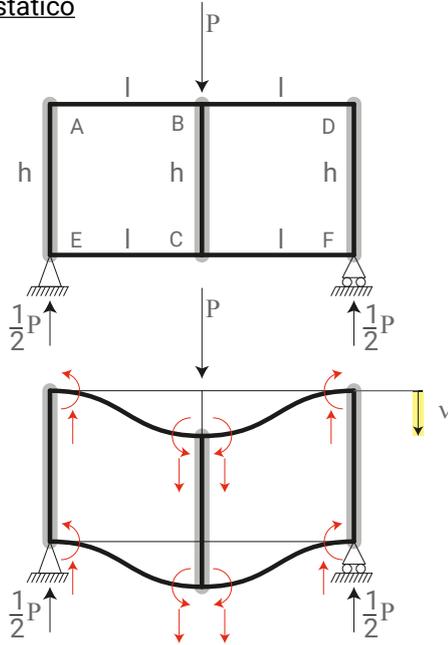
Deformata:  
Simmetrica assialmente

Impalcato:  
In equilibrio laterale stabile

VIERENDELL

O.BELUZZI, Scienza delle costruzioni Vol.2, Zanichelli, 1974, pg.453

.Schema statico



.Schema geometrico:  
nodi che possono solo traslare

.Schema statico esterno:  
Staticamente determinato

.Movimenti:  
1 movimento indipendente (v)

.Metodo equilibrio:  
Diretto Esplicito

.Convenzioni segno:

Traslazioni verticali (+) in basso

Forze verticali (+) in basso

Momenti (+) orari

Dati:

$$M_{ki} = 6 \left( \frac{JE}{l^2} \right) v$$

$$V_{ki} = 12 \left( \frac{JE}{l^3} \right) v$$

Equilibrio verticale: calcolo di v

$$v_k = \frac{H_k}{\sum U_{ki}}$$

$$v = \frac{+P}{4 \cdot 12 \left( \frac{JE}{l^3} \right)}$$

$$v = + \frac{P}{48 \left( \frac{JE}{l^3} \right)}$$

$$v = + \frac{P \cdot l^3}{48 JE}$$

Calcolo  $V_{ki} = R_V \cdot v$

$$V_{AB} = -V_{BA}$$

$$V_{BA} = 12 \frac{JE}{l^3} (v)$$

$$V_{BA} = 12 \frac{JE}{l^3} \left( + \frac{P \cdot l^3}{48 JE} \right)$$

$$V_{BA} = + \frac{2P}{8}$$

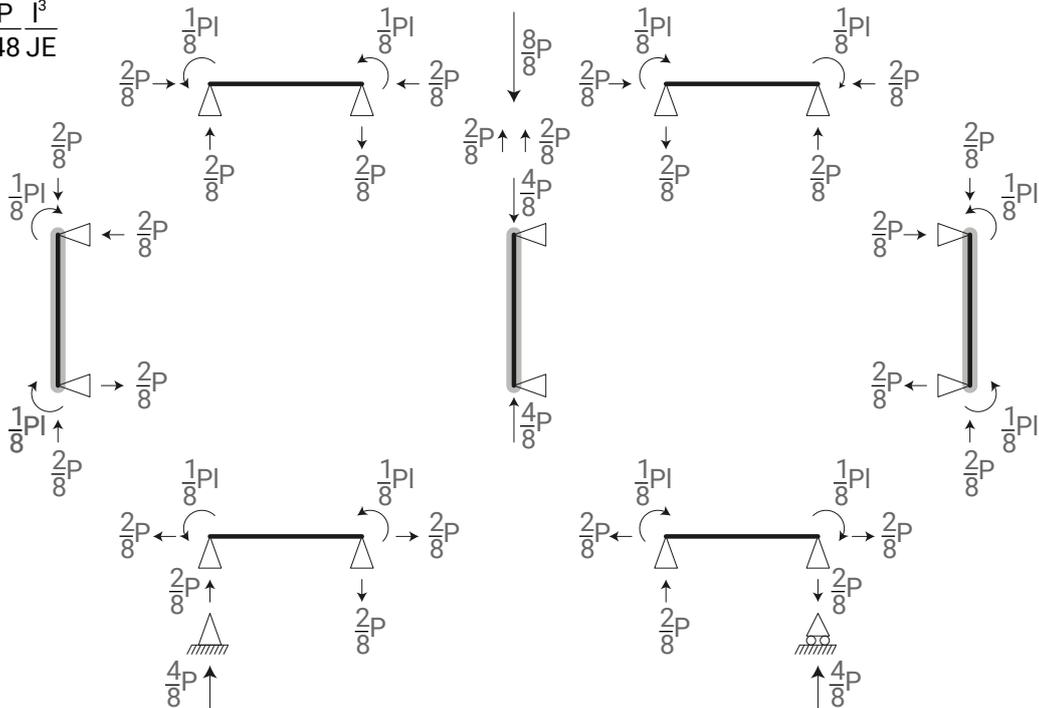
Calcolo  $M_{ki} = R_M \cdot v$

$$M_{AB} = M_{BA}$$

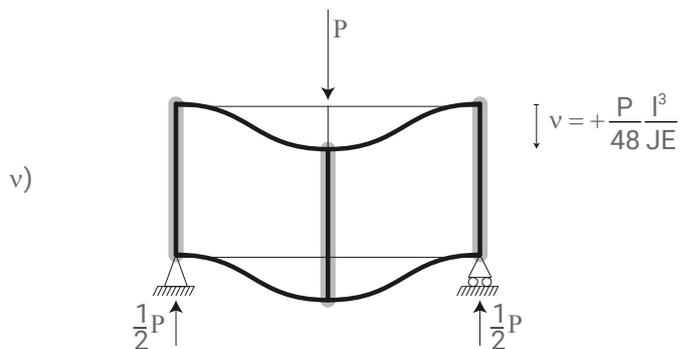
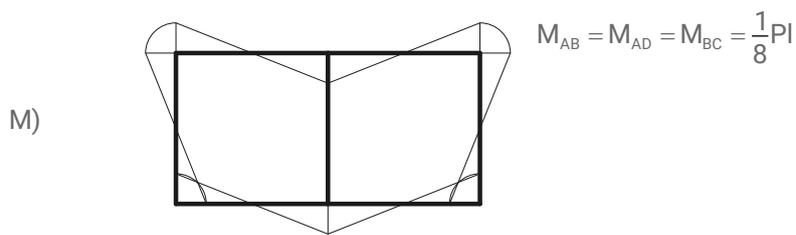
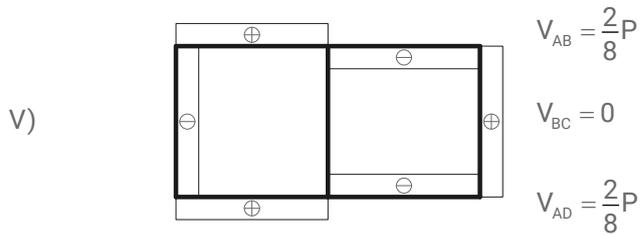
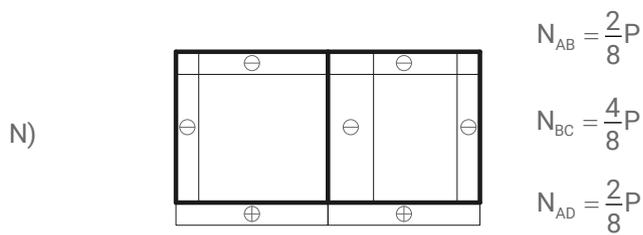
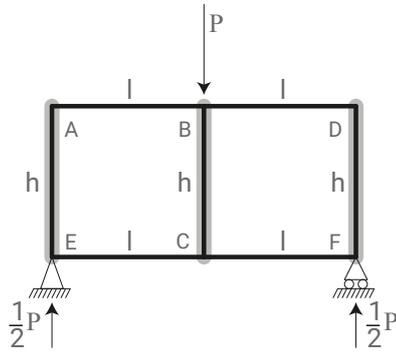
$$M_{BA} = -6 \frac{JE}{l^2} (v)$$

$$M_{BA} = -6 \frac{JE}{l^2} \left( + \frac{P \cdot l^3}{48 JE} \right)$$

$$M_{BA} = - \frac{1}{8} Pl$$



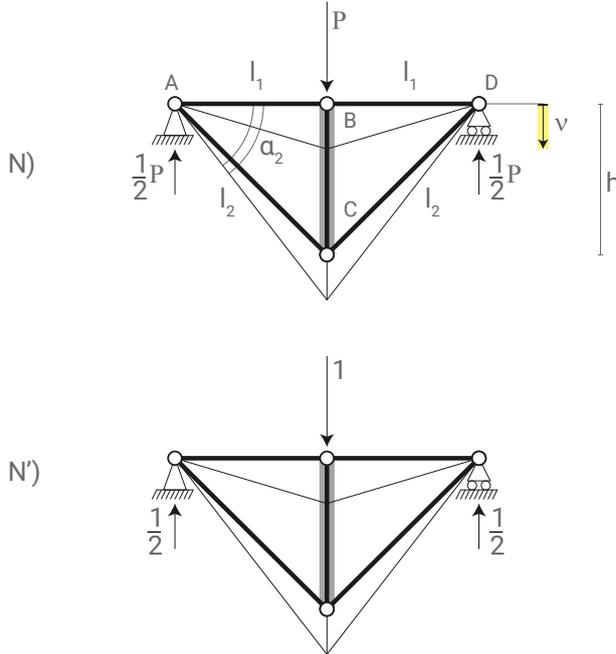
.Diagrammi azione interna



RETICOLARE TRIANGOLARE

O.BELUZZI, Scienza delle costruzioni Vol.1, Zanichelli, 1974, pg.533

Schema statico



Schema geometrico:

Isostatico  
 $gve + gvi - gdl = ? 0$   
 $(3) + (5) - (4 \times 2)$   
 $+ 8 - 8 = 0$

Schema statico:

Staticamente determinato

Calcolo sforzi:

Metodo dei nodi

Convenzioni segno equilibrio:

Traslazioni verticali (+) in basso  
 Forze verticali (+) in basso  
 Forze orizzontali (+) a destra  
 Sforzi normali (+) trazione, uscenti

Calcolo movimenti:

P.L.V (forza unitaria)

$l_1 = l$

Trigonometria

$l_2 = \sqrt{l^2 + h^2}$

$l_2 \cos \alpha_2 = l$

$\cos \alpha_2 = \frac{l}{l_2}$

$l_2 \sin \alpha_2 = h$

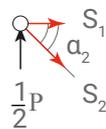
$\sin \alpha_2 = \frac{h}{l_2}$

$\alpha = \cos^{-1} \left( \frac{l}{l_2} \right)$

Equilibrio verticale del nodo A  
 ↓A) (+in basso)

$-\frac{P}{2} + S_2 \sin \alpha_2 = 0$

$S_2 = + \frac{P}{2 \sin \alpha_2}$



Equilibrio orizzontale del nodo A  
 →A) (+ a destra)

$+S_1 + S_2 \cos \alpha_2 = 0$

$S_1 = -S_2 \cos \alpha_2$

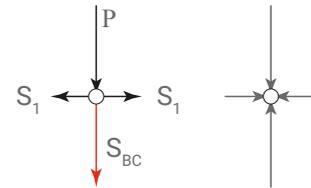
$S_1 = - \frac{P \cos \alpha_2}{2 \sin \alpha_2}$



Equilibrio verticale del nodo B  
 ↓B) (+in basso)

$+P + S_{BC} = 0$

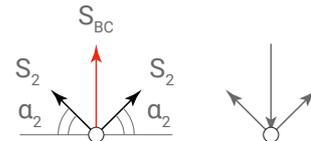
$S_{BC} = -P$



Equilibrio verticale del nodo C (conferma)  
 ↓C) (+in basso)

$-S_{BC} - 2S_2 \sin \alpha_2 = 0$

$S_{BC} = -2S_2 \sin \alpha_2$



Calcolo abbassamento verticale  $v_{BC}$   
 $Lve = Lvi$

1·movimento =  $\int_v \sigma_i \epsilon_i$

1·v =  $\sum_1^n \int_L N'_i dw dz$

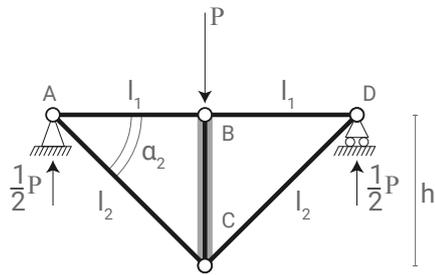
$v = \sum_1^n \left( N'_i \cdot \frac{l_i}{A_i E} N_i \pm \alpha_i \Delta t \right)$

$v = 2 \left( \frac{P \cos^2 \alpha_2}{4 \sin^2 \alpha_2} \cdot \frac{l_1}{A_1 E} \right) + 2 \left( \frac{P}{4 \sin^2 \alpha_2} \cdot \frac{l_2}{A_2 E} \right)$

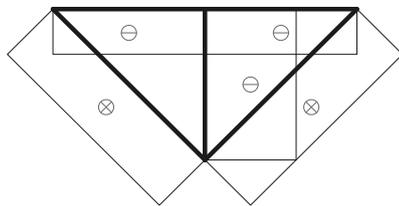
$v = \frac{P}{2E \sin^2 \alpha_2} \left( \cos^2 \alpha_2 \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right)$

Asta	$l_i$	$N_i$	$N'_i$	$N'_i \frac{l_i}{A_i E} N_i$
AB	$l_1$	$-\frac{P \cos \alpha_2}{2 \sin \alpha_2}$	$-\frac{1 \cos \alpha_2}{2 \sin \alpha_2}$	$+\frac{P \cos^2 \alpha_2}{4 \sin^2 \alpha_2} \frac{l_1}{A_1 E}$
AC	$l_2$	$+\frac{P}{2 \sin \alpha_2}$	$+\frac{1}{2 \sin \alpha_2}$	$+\frac{P}{4 \sin^2 \alpha_2} \frac{l_2}{A_2 E}$
BC E=∞	$l_{BC} = h$	-P	-1	$+P \frac{h}{A_{BC \infty}} = 0$

.Diagrammi azione interna



N)

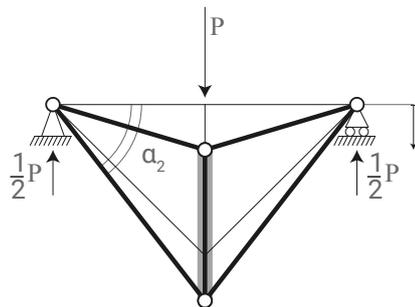


$$S_1 = -\frac{P \cos \alpha_2}{2 \operatorname{sen} \alpha_2}$$

$$S_{BC} = -P$$

$$S_2 = +\frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha_2}$$

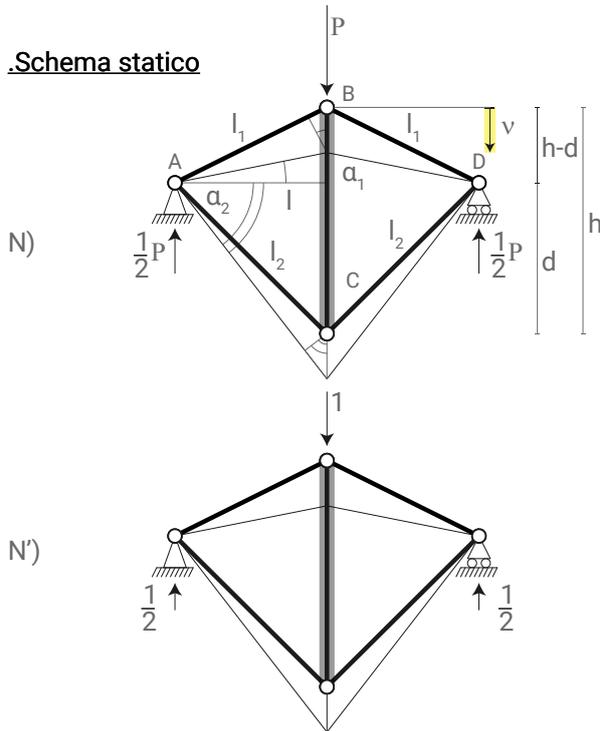
v)



$$v = \frac{P}{2E \operatorname{sen}^2 \alpha_2} \left( \cos^2 \alpha_2 \frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2} \right)$$

RETICOLARE QUADRANGOLARE

Schema statico



Schema geometrico:

Isostatico  
 $g_v + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(3) + (5) - (4 \times 2)$   
 $+ 8 - 8 = 0$

Trigonometria

$$l_1 = \sqrt{l^2 + (h-d)^2}$$

$$l_1 \cos \alpha_1 = l$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{l}{l_1}$$

$$l_1 \sin \alpha_1 = h-d$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{h-d}{l_1}$$

$$l_2 = \sqrt{l^2 + d^2}$$

$$l_2 \cos \alpha_2 = l$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{l}{l_2}$$

$$l_2 \sin \alpha_2 = d$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{d}{l_2}$$

Schema statico:

Staticamente determinato

Calcolo sforzi:

Metodo dei nodi

Convenzioni segno equilibrio:

Traslazioni verticali

(+) in basso

Forze verticali

(+) in basso

Forze orizzontali

(+) a destra

Sforzi normali

(+) trazione, uscenti

Calcolo movimenti:

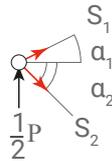
P.L.V (forza unitaria)

Equilibrio orizzontale del nodo A  
 $\rightarrow A$  (+ a destra)

$$+S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$+S_1 \cos \alpha_1 = -S_2 \cos \alpha_2$$

$$S_1 = -S_2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$



Equilibrio verticale del nodo A  
 $\downarrow A$  (+in basso)

$$-S_1 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 - \frac{P}{2} = 0$$

$$-\left(-S_2 \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}\right) \sin \alpha_1 + S_2 \sin \alpha_2 - \frac{P}{2} = 0$$

$$S_2 \left( \frac{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\cos \alpha_1} \right) = \frac{P}{2}$$

$$S_2 = + \frac{P \cos \alpha_1}{2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

$$S_1 = - \frac{P \cos \alpha_1}{2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

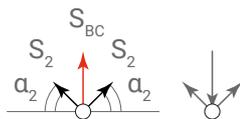
Equilibrio verticale del nodo C  
 $\downarrow C$  (+in basso)

$$-S_{BC} - 2S_2 \sin \alpha_2 = 0$$

$$S_{BC} = -2S_2 \sin \alpha_2$$

$$S_{BC} = -2 \left( \frac{P \cos \alpha_1}{2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right) \sin \alpha_2$$

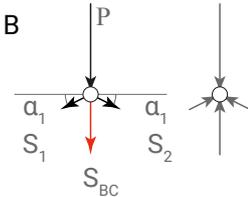
$$S_{BC} = -P \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1}$$



Equilibrio verticale del nodo B  
 $\downarrow B$  (+in basso) (confirma)

$$+S_{BC} + 2S_1 \sin \alpha_1 + P = 0$$

$$S_{BC} = -2S_1 \sin \alpha_1 - P$$



Asta <sub>i</sub>	$N'_i \frac{l_i}{A_i E_i} N_i$
AB	$+ \frac{P}{4} \left( \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)^2 \frac{l_1}{A_1 E}$
AC	$+ \frac{P}{4} \left( \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)^2 \frac{l_2}{A_2 E}$
BC E = ∞	$+ \frac{P}{4} \left( \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1} \right)^2 \frac{h}{A_{BC} \infty} = 0$

Calcolo abbassamento verticale v<sub>BC</sub>

$$Lve = Lvi$$

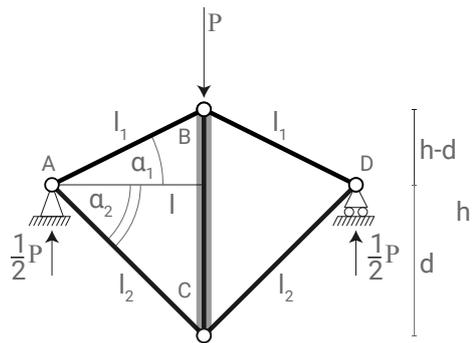
$$1 \cdot \text{movimento} = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$$

$$1 \cdot v = \sum_1^n \int_{L_i} N'_i dwdz$$

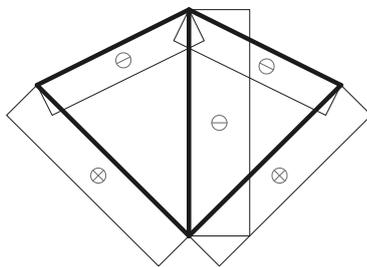
$$v = \sum_1^n \left( N'_i \cdot \frac{l_i}{A_i E} N_i \pm \alpha_i \Delta t \right)$$

$$v = \frac{P}{2E} \frac{\left( \cos^2 \alpha_2 \frac{l_1}{A_1} + \cos^2 \alpha_1 \frac{l_2}{A_2} \right)}{\left( \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \right)^2}$$

.Diagrammi azione interna



N)

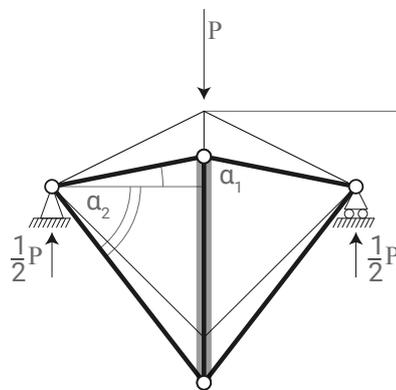


$$S_1 = -\frac{P \cos \alpha_1}{2 \cos \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

$$S_{BC} = -P \frac{\cos \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2}{\cos \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

$$S_2 = +\frac{P \cos \alpha_2}{2 \cos \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1}$$

v)



$$v = \frac{P}{2E} \frac{\left( \cos^2 \alpha_2 \frac{l_1}{A_1} + \cos^2 \alpha_1 \frac{l_2}{A_2} \right)}{(\cos \alpha_2 \operatorname{sen} \alpha_1 + \operatorname{sen} \alpha_2 \cos \alpha_1)^2}$$

## IPOTESI SULLE TENSOSTRUTTURE MISTE DISCRETE

Diversamente delle strutture rigide, lo schema geometrico dei sistemi di funi, (stato zero), non può essere disegnato senza alcune considerazioni statiche preliminari, differenti a seconda della tipologia di tensostruttura<sup>N1</sup>. Cioè, per la funicolare continua (catenaria), bisogna mettere in conto, sia lo sforzo normale di pretensione, che la deformata delle funi stesse, dovuta al loro peso proprio. Invece, per le tensostrutture discrete miste (tiranti + pezzi infinitamente rigidi), quest'ultima può essere trascurata, ma vanno considerati comunque, sia il primo, che il peso proprio di tutta la struttura, agente come carico concentrato nei nodi, al pari dei sistemi reticolari tradizionali, composti soltanto da aste rigide.

### .Stato di tensione/deformazione elastico-lineare: $\sigma/\epsilon$

La legge di Hooke è valida, quindi il procedimento di verifica degli sforzi o delle tensioni e la scelta della sezione di ogni elemento strutturale, sono analoghi a quelli relativi alle aste rigide<sup>N2</sup>.

### .Stato di carico/allungamento elastico-non lineare: $P/\Delta$

Come accade per aste rigide compresse, da carico di punta euleriano, la deformata di funi tese, da un'azione concentrata ortogonalmente al loro asse, stabilisce tra le due, proporzione non lineare. Pertanto, il principio di sovrapposizione degli effetti, non risulta sempre valido<sup>N2</sup>.

### .Piccoli movimenti: $u, \alpha$

Indipendentemente dagli stati di tensione/deformazione e di carico/allungamento, i movimenti dei nodi sono piccoli, come per le aste rigide. Quindi, rispetto all'orizzontale, il valore dell'angolo compiuto da ogni fune dopo la deformazione, rimane uguale a quello presente prima di essa (sistema Tensegrity). Se tuttavia, per geometria, tale valore iniziale risulta nullo, bisogna trovare quello finale comunque, utilizzando lo sviluppo in serie della funzione deformata della fune e non la sua indeformata (sistema III-condition).

### .Meccanismi infinitesimi del primo ordine

I sistemi di funi labili a livello infinitesimo, sono meccanismi infinitesimi del primo ordine. Pertanto, lo sviluppo in serie della funzione deformata della fune, ritrovabile con la formula di Mac Laurin<sup>N3</sup>, può essere arrestato al termine del secondo ordine<sup>N4</sup>. Allora, nei metodi risolutivi dello schema statico che implicano l'utilizzo del quadrato di tale funzione sviluppata, alcuni, in via approssimata, preferiscono trascurare i termini di grado superiore al secondo, comunque<sup>N4</sup>. In tal modo tuttavia, il risultato non viene analogo a quello ottenuto con metodi che utilizzano soltanto la funzione sviluppata e non il suo quadrato. Si è scelto quindi, di utilizzare sempre la via esatta, per poter confrontare i risultati ottenuti, mediante

N1

Ricerca dello "stato zero"

M . M A J O W I E C K I ,  
Tensostrutture: progetto e  
verifica, CREA, 1991, pg.124

N2

Sistema "III-condition"

O.BELLUZZI, Scienza delle  
costruzioni Vol.1, Zanichelli,  
1974, pg.2, 124

N3

Formula di Mac Laurin

P . M A R C E L L I N I ,  
C.SBORDONE, Analisi  
matematica uno, Liguori,  
1998, pg.370

N4

Sistema III-condition

A. MICHELETTI, Strutture  
pieghevoli che ricercano  
una forma di equilibrio,  
Università degli studi di  
Roma, Tor Vergata, 1999, pg.  
32

N5

Principio di Stazionarietà dell'energia potenziale totale

E.VIOLA, Scienza delle costruzioni Vol.1, Pitagora, 1991, pg.480

M . M A J O W I E C K I ,  
Tensostrutture: progetto e verifica, CREA, 1991, pg.141-142

N6

Equazioni algebriche di terzo grado

[http://calvino.polito.it/~lancelotti/didattica/analisi1\\_new/approfondimenti/equazioni\\_terzo-grado.pdf](http://calvino.polito.it/~lancelotti/didattica/analisi1_new/approfondimenti/equazioni_terzo-grado.pdf)

Ricerca delle soluzioni nel caso particolare in cui il termine di secondo grado è nullo.

N7

Reticolari labili al livello infinitesimo

C . R . C A L L A D I N E ,  
Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, Int.J. solid structures Vol. 14, 1978, pg. 161-172

Scarsa utilità delle formule di Maxwell per il calcolo della staticità.

metodi differenti.

### .Metodi di risoluzione manuali

Per comprendere il funzionamento dei sistemi misti discreti spaziali, si è scelto di risolvere manualmente, prima gli analoghi casi piani simmetrici, mediante tre diversi metodi, verificando l'uguaglianza dei loro risultati alla fine. Quindi, sono state applicate le equazioni di equilibrio con e senza vincoli ausiliari ed il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale, per strutture reticolari<sup>N5</sup>. In entrambi i casi allora, si è giunti alla stessa equazione di terzo grado, con termine di secondo grado nullo, in cui l'incognita è lo spostamento del nodo in direzione del carico concentrato su di esso<sup>N6</sup>.

### .Tipologie di strutture reticolari labili a livello infinitesimo

Le strutture reticolari labili a livello infinitesimo sono due. Nella prima di esse cioè, sistema Ill-condition, si ha complanarità degli elementi strutturali e forza esterna ortogonale al loro piano. Nella seconda invece, sistema Tensegrity, questi ultimi sono dotati di inclinazione reciproca ed il carico concentrato, non è ortogonale al loro asse geometrico<sup>N7</sup>. Quindi, per risolvere qualunque schema statico Ill-condition, bisogna per forza considerare comunque, il suo asse geometrico, inclinato rispetto all'orizzontale. Pertanto, si applica la semplificazione possibile per piccoli movimenti, al contrario. Cioè, si utilizza da subito, soltanto lo schema geometrico deformato, in cui quindi, l'angolo prima della deformazione, è uguale a quello dopo di essa<sup>N2</sup>.

### .Presollecitazione

Le strutture reticolari labili a livello infinitesimo, ma isostatiche o iperstatiche a livello finito, se prive di presollecitazione, affrontano l'equilibrio con rigidità iniziale nulla, fino all'espletamento del cinematismo dovuto alla labilità<sup>N7</sup>. Se invece, viene impartita una presollecitazione, anche la rigidità iniziale del sistema è diversa da zero, ma esso ovviamente cambia geometria (stato zero). Quindi, per presollecitare la struttura, esistono teoricamente due modi: o si allungano i puntoni, fornendo loro uno sforzo normale di presollecitazione arbitrario, fisicamente impossibile, o si accorciano i tiranti, fornendo loro uno sforzo normale di pretrazione arbitrario, cosa molto più semplice. Pertanto, per agevolare il costo e l'assemblamento, conviene sempre che la maggior parte degli elementi strutturali del sistema, sia costituita da tiranti, riducendo al minimo la presenza di puntoni. Inoltre, relativamente al caso di struttura soggetta a momento che tende le fibre di sopra, è opportuno osservare che le funi pretese possono resistere anche a compressione, in modo simile alle aste rigide. Quest'ultima cioè, per piccoli movimenti, può tradursi in una diminuzione dello sforzo normale di pretensione e non nel suo annullamento. Quindi, il collasso della fune, può comunque essere evitato.

.Equilibrio dello schema geometrico

Le tensostrutture che occorre studiare ai fini di questa tesi, sono sistemi misti di pezzi infinitamente rigidi e tiranti, globalmente classificati come reticolari labili a livello infinitesimo, indipendentemente dal grado di staticità, del loro schema geometrico finito, calcolato con la formula di Maxwell<sup>N7</sup>. Infatti, i sistemi Tensegrity misti, sono proprio definiti come quelli in cui, isostaticità non sempre corrisponde ad equilibrio. Anzi, spesso, la prima configurazione equilibrata, è proprio iperstatica e non isostatica<sup>N8</sup>.

.Natura della pretensione

Lo schema statico relativo ad un sistema composto, da aste e da funi soggette a sforzo normale di presollecitazione, equivale all'analogo costituito interamente da aste rigide, sottoposte a carico termico uniforme. Talvolta allora, per rendere più agili i passaggi analitici manuali, è opportuno indicare il carico, non come sforzo normale dato, ma come dilatazione data, indipendentemente dalla sua natura. Invece, se durante la procedura di analisi virtuale, mediante un programma di calcolo, si presentino difficoltà nell'inserimento dello sforzo normale di pretensione nelle funi in maniera diretta, è possibile alternativamente, inserire l'esatto carico termico equivalente.

(δ) TERMICO = (δ) PRETRAZIONE

$$(\alpha \cdot \Delta t \cdot l_i) = (l_i - l_{Ni})$$

$l_i$  = distanza tra i nodi da collegare tramite l'elemento (i)

$l_{Ni}$  = lunghezza naturale della fune (i)

$\Delta t$  = carico termico

$\alpha$  = coefficiente di dilatazione termica del materiale

CARICO TERMICO EQUIVALENTE

$$\alpha \cdot \Delta t \cdot l_i = \delta$$

$$\Delta t = \delta / (\alpha \cdot l_i)$$

$$\Delta t = (l_i - l_{Ni}) / (\alpha \cdot l_i)$$

SFORZO NORMALE DI PRETRAZIONE

$$k_i = EA_i / l_{Ni}$$

$$N_i = k_i \cdot \delta_i$$

.Fasi di carico delle tensostrutture miste discrete

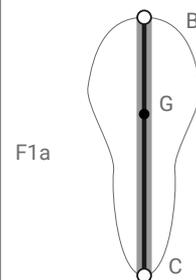
Il comportamento in fase di sola pretensione con o senza peso proprio (stato zero) e quello in cui i carichi concentrati nei nodi, comprendono anche le azioni esterne, (stato di esercizio), differiscono a seconda della tipologia di tensostruttura discreta. Nei sistemi Ill-condition allora, la formula dell'abbassamento in mezzeria, ottenuta dal procedimento analitico manuale, non cambia da una fase all'altra, in quanto lo sforzo nelle funi superiori è sempre di trazione<sup>N9</sup>. Quindi, qualora si desidera

N8 Valutazione dello schema geometrico, per sistemi tensostrutturali misti discreti:

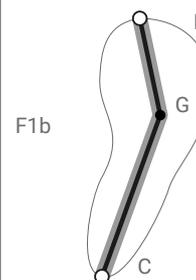
.staticità - pg.56 ; 57  
.vincolamento - pg.58 ; 59

F1 Pezzo infinitamente rigido, con baricentro (G) ed asse geometrico evidenziato :

a - simmetrico  
b - non simmetrico



Tab 1	Sistema	Equazioni	Variabili
	TENSEGRITY Simmetrico	lineari	$v_G$
	TENSEGRITY NON simmetrico	lineari	$v_G, u_G, \phi_{GC}$
	MISTO (B) simmetrico	terzo grado	$v_G^3$
	MISTO (B) NON simmetrico	secondo grado	$v_G^2, u_G^2, \phi_{GC}^2$



N9

Formula dell'abbassamento in mezzeria, per sistemi ill-condition simmetrici:

puro - pg.63

misto (A) - pg.65

misto (B) - pg.69

N10

Formula dell'abbassamento in mezzeria, per sistema Tensegrity simmetrico  
pg.73

N11

.Ill-condition puro senza pretensione -pg.60; 61 con pretensione -pg.62; 63

.Misto (A) simmetrico  
pg.64 - 67

.Misto (B) simmetrico  
pg.68 - 71

.Tensegrity puro simmetrico  
pg.72 - 74

.Misto (B) non simmetrico  
pg.80 - 87

.Tensegrity puro non simmetrico  
pg.88 - 93

N12

Relazione tra movimenti incogniti e grado delle equazioni, per ogni sistema studiato:

Tabella 1

### .Legenda



Pezzo RIGIDO  
infinitamente



FUNE



Indicazioni

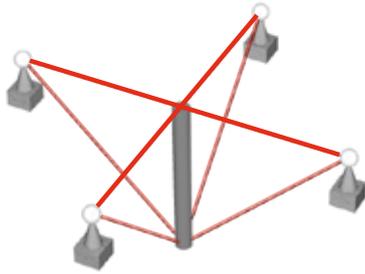
avere i risultati dell'analisi allo stato zero, privo di peso proprio, basta cancellare i termini relativi al carico concentrato (P). Nel sistema Tensegrity invece, se quest'ultimo è assente, le funi superiori sono tese, mentre se esso è presente, risultano compresse. Vi è quindi, una notevole riduzione della reazione orizzontale della cerniera, che diversifica leggermente, la formula dell'abbassamento verticale in mezzeria<sup>N10</sup>.

### .Schemi statici studiati<sup>N11</sup>

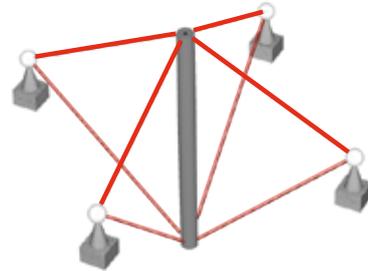
I primi due schemi statici che si è scelto di studiare, sono costituiti esclusivamente da due tiranti caricati ortogonalmente al loro asse, senza e con pretensione (sistema Ill-condition puro simmetrico). Il terzo poi, è composto da quattro funi interposte da un'asta rigida, nelle versioni, con pretensione esclusivamente nelle funi orizzontali, (sistema misto A simmetrico) e con pretensione in tutte, (sistema misto B simmetrico). Il quinto, poi è simile a quest'ultimo, ma è composto da sole funi inclinate rispetto all'orizzontale (sistema Tensegrity puro simmetrico)<sup>F1a</sup>. Infine, gli schemi statici sesto e settimo, sono analoghi agli ultimi appena descritti, ma non hanno alcuna simmetria (sistema misto B non simmetrico) e (sistema Tensegrity puro non simmetrico)<sup>F1b</sup>. Esclusivamente per questi ultimi poi, occorre constatare che esistono due modi, uno approssimato e l'altro esatto, di considerare l'inclinazione con l'orizzontale ( $\alpha_1$ ), delle funi Ill-condition. Allora, partendo dal rispetto della congruenza, il movimento dei nodi (B) e (C), in cui i due gruppi di funi differenti Ill-condition e Tensegrity, si uniscono al pezzo infinitamente rigido (BC), deve essere uguale per entrambi. Quindi, nel metodo approssimato, siccome le due funi Ill-condition, sono inizialmente prive di rigidità assiale, fino a quando il cinematismo infinitesimo del nodo (B), non viene espletato, la deformata dell'intero sistema, dipende unicamente da quella delle funi Tensegrity. Pertanto, ( $\alpha_1$ ) può essere assunto come semplice funzione lineare, dell'inclinazione finita di queste ultime, con l'orizzontale ( $\alpha_2$ ). Cioè, si considera che ( $\alpha_1$ ) sia nullo e le sue funi non partecipino all'equilibrio, in alcun modo. Quindi, l'approssimazione di questo metodo, consiste nell'assumere che il movimento cinematico del nodo (B), non sia infinitesimo, ma semplicemente piccolo, dovendo essere uguale a quello del nodo (C), che è elastico e finito. Nel metodo esatto invece, il movimento di ogni nodo del pezzo infinitamente rigido (BC), dipende dalla funzione esatta della deformata di ogni fune che vi si collega, qualunque natura essa abbia. Riepilogando, quando un sistema è composto da funi di natura diversa, nel metodo approssimato, ognuna di esse, anche se in Ill-condition, partecipa al calcolo del movimento, del pezzo infinitamente rigido, con la legge della deformata Tensegrity, invece in quello esatto, con la sua. In questa tesi dunque, si è scelto di usare il secondo metodo, riscontrando che le sue equazioni, hanno grado differente a seconda della simmetria geometrica<sup>N12</sup>.

Esempi di calcolo della staticità

F2



F3



Caso tridimensionale

Prima configurazione equilibrata:

A livello finito: 3 IPERSTATICA

$gve+gvi-gdl ? 0$

$$(3 \times 4) + 9 - (3 \times 6)$$

$$21 - 18 = +3$$

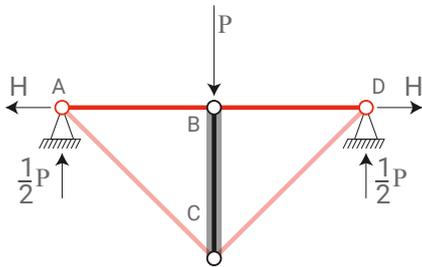
F2; F3

Casi tridimensionali di sistema misto, III-condition e Tensegrity.

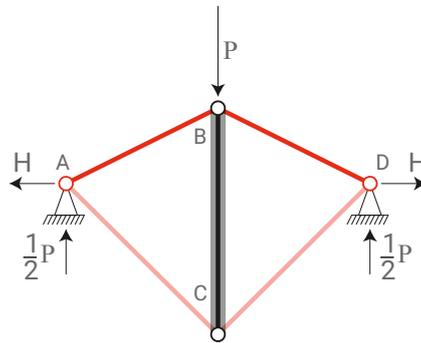
La cerniera spaziale ha tre gradi di vincolo, a differenza di quella piana, che ne ha due.

A livello infinitesimo: 1LABILE (L'asta rigida può traslare in verticale)

F4



F5



Caso bidimensionale

Prima configurazione equilibrata:

A livello finito: 1 IPERSTATICA

$gve+gvi-gdl ? 0$

$$(2 \times 2) + 5 - (2 \times 4)$$

$$9 - 8 = +1$$

F4; F5

Casi bidimensionali di sistema misto, III-condition e Tensegrity.

Per piccoli movimenti, le funi superiori, se prive di pretensione, risultano scariche.

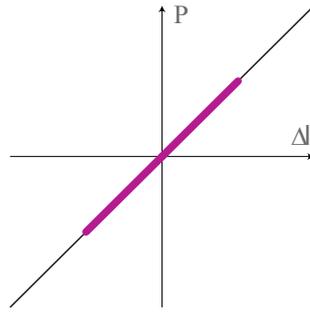
A livello infinitesimo: 1LABILE (L'asta rigida può traslare in verticale)

.Legge Carico - Allungamento

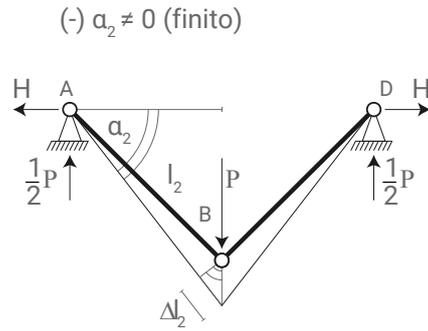
F6-F9

Possibili situazioni carico/deformata, diverse della stessa geometria reticolare

C. R. CALLADINE, Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, Int.J. solid structures Vol. 14, 1978, pg. 161-172



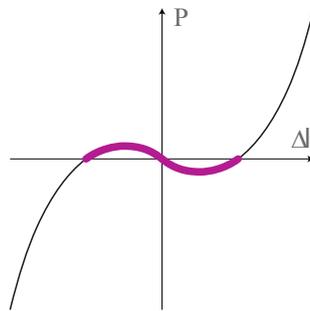
F6



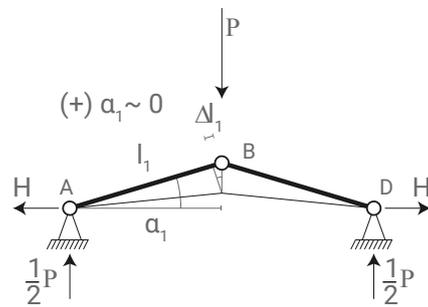
F6

Legge lineare

Sistema reticolare di aste rigide o funi, stabile ed isostatica anche a livello infinitesimo



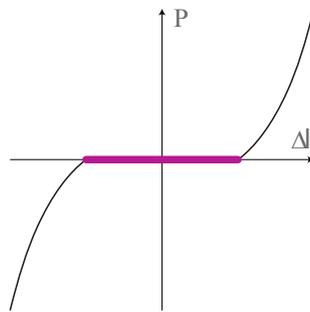
F7



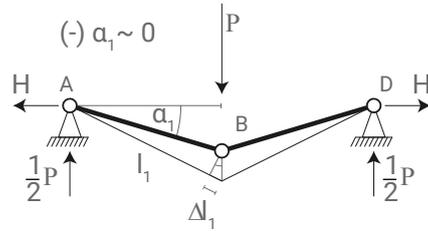
F7

Legge non lineare

Sistema reticolare di aste rigide, instabile per compressione (carico di punta euleriano) e una volta labile a livello infinitesimo.



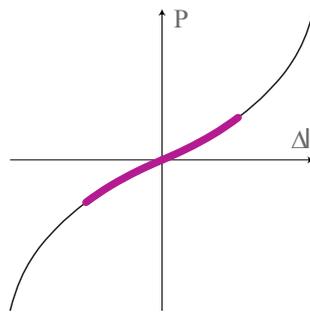
F8



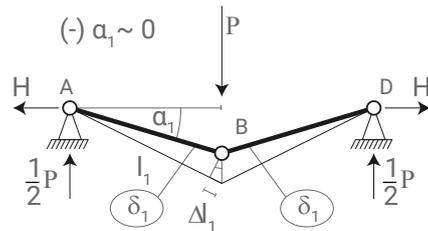
F8

Legge non lineare

Sistema reticolare III-condition di aste rigide o funi, instabile per trazione, una volta labile a livello infinitesimo e avente rigidità iniziale nulla per assenza di pretensione.



F9



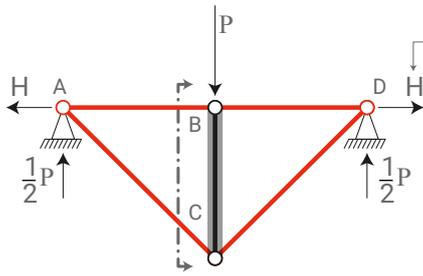
F9

Legge non lineare

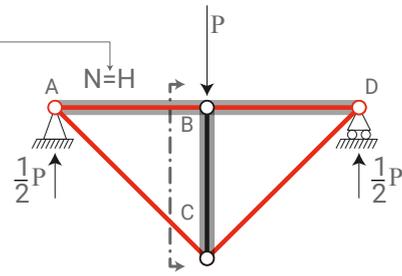
Sistema reticolare III-condition di aste rigide o funi, instabile per trazione, una volta labile a livello infinitesimo e avente rigidità iniziale NON nulla per presenza di pretensione

.Vincolamento sistema misto III conditioned - Tensegrity

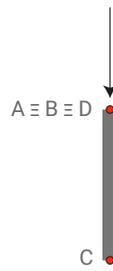
F10



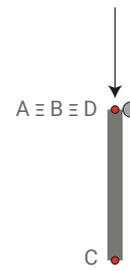
F14



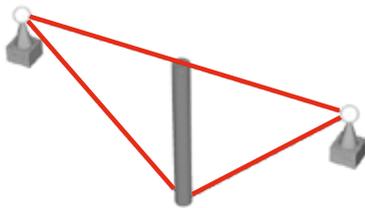
F11



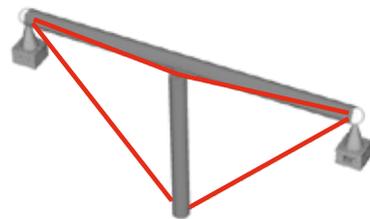
F15



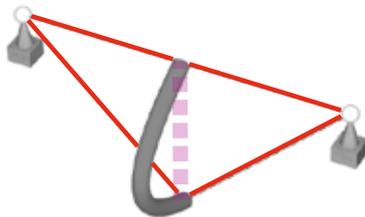
F12



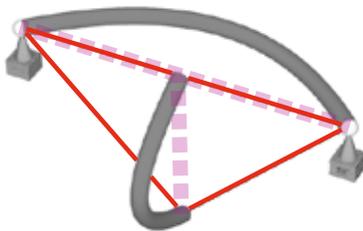
F16



F13



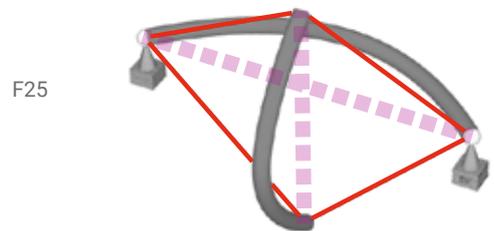
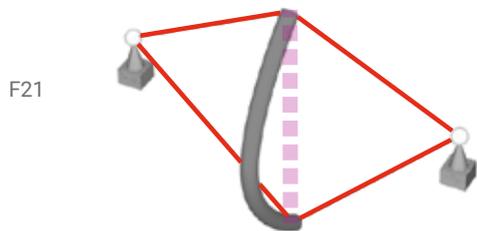
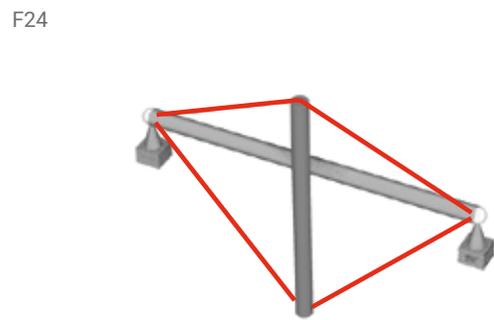
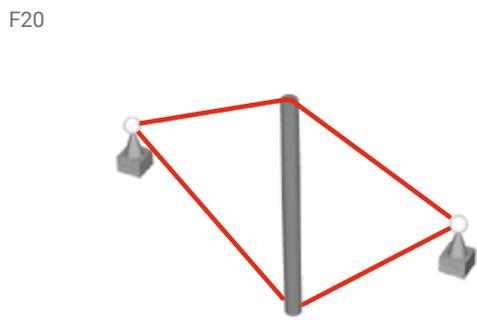
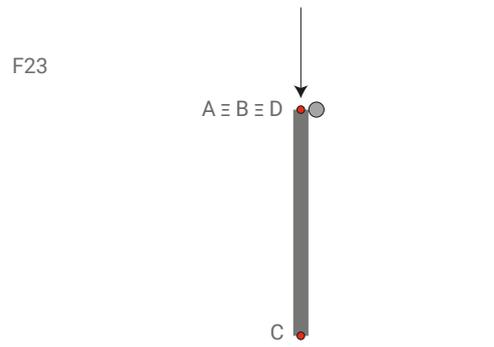
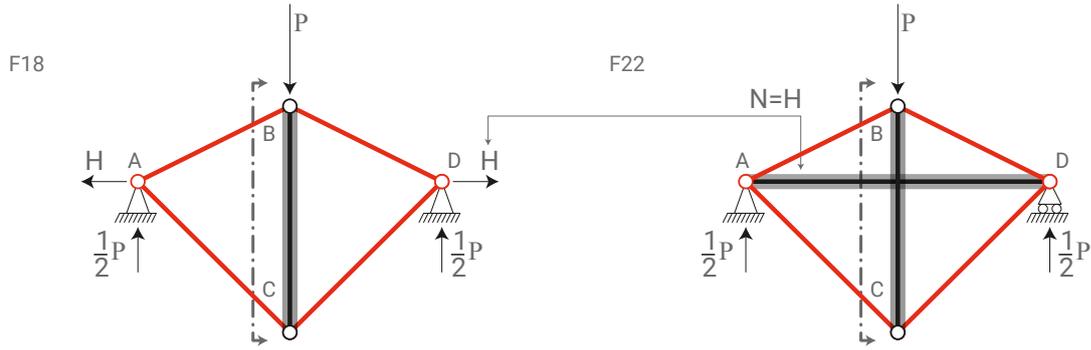
F17



Sistema misto III conditioned - Tensegrity: cerniera - cerniera  
 .in prospettiva e sezione - F10, F11  
 .in prospettiva, con asta rigida e con trave curva - F12, F13

Sistema misto III conditioned - Tensegrity: cerniera - carrello  
 .in prospettiva e sezione - F14, F15  
 .in prospettiva, con aste rigide e con travi curve - F16, F17

.Vincolamento sistema Tensegrity puro

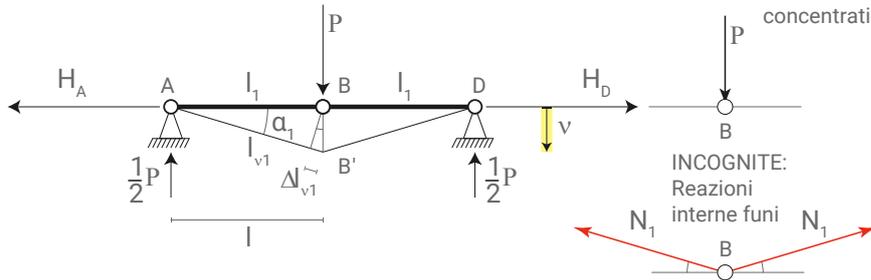


Sistema Tensegrity puro: cerniera - cerniera  
 .in prospetto e sezione - F18, F19  
 .in prospettiva, con asta rigida e con trave curva - F20, F21

Sistema Tensegrity puro: cerniera - carrello  
 .in prospetto e sezione - F22, F23  
 .in prospettiva, con aste rigide e con travi curve - F24, F25

ILL CONDITION PURO SENZA PRETENSIONE SIMMETRICO

.Schema statico



DATI:  
Carichi  
concentrati

.Schema geometrico:

Isostatico  
 $g_v + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(4) + (2) - (3 \times 2)$   
 $+6 - 6 = 0$

.Schema statico:

Una volta  
staticamente  
indeterminato

.Movimenti:

1 movimento  
indipendente (v)

.Convenzioni segno  
equilibrio:

Traslazioni verticali  
 (+) in basso  
 Deformate  
 (+) allungamenti  
 Sforzi normali  
 (+) trazione, uscenti  
 Forze verticali  
 (+) in basso  
 Forze orizzontali  
 (+) a destra  
 Lavoro virtuale  
 esterno verticale  
 (+) in basso

**Lunghezze**  
 $l_1 = l$  Lunghezza iniziale (dato)  
 $l_{v1}$  Lunghezza deformata (funzione)

**Rigidità assiale**  
 $k_1 = EA_1 / l_1$

**Sforzo normale fune**  
 $N_1 = k_1 (\pm \Delta l_{v1}) \equiv S_1$   
sola Reazione (Hooke)

1) Trigonometria

$$l_{v1} \sin \alpha_1 = v \Rightarrow l_{v1} = \frac{v}{\sin \alpha_1}$$

$$l_{v1} \cos \alpha_1 = l_1 \Rightarrow l_{v1} = \frac{l_1}{\cos \alpha_1}$$

$$\left( \frac{\sin \alpha_1}{l_1} \right) \frac{v}{\sin \alpha_1} = \frac{l_1}{\cos \alpha_1} \left( \frac{\sin \alpha_1}{l_1} \right)$$

$$\frac{v}{l_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1$$

2) Ipotesi piccoli spostamenti

$$\tan \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \sin \alpha_1$$

$$\frac{v}{l_1} = \sin \alpha_1$$

3) Geometria del sistema

$$\alpha_1 = \sin^{-1} \left( \frac{v}{l_1} \right)$$

$$\cos \alpha_1$$

Sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione allungamento

$$f(v) = f(v)|_0 + \frac{\partial f(v)}{\partial v} \Big|_0 v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2} \Big|_0 v^2 + o \frac{\partial^3 f(v)}{\partial v^3} \Big|_0 v^3$$

Pitagora

$$l_{v1} = \sqrt{l^2 + v^2}$$

Funzione

$$\Delta l_{v1} = l_{v1} - l = \sqrt{l^2 + v^2} - l = (l^2 + v^2)^{1/2} - l$$

$$\Delta l_{v1} \Big|_0 = (l^2 + 0^2)^{1/2} - l = l - l = 0$$

Derivata prima

$$\frac{\partial \Delta l_{v1}}{\partial v} = \frac{1}{2} (l^2 + v^2)^{-1/2} 2v - 0$$

$$\frac{\partial \Delta l_{v1}}{\partial v} \Big|_0 = (l^2 + 0^2)^{-1/2} 0 = 0$$

Derivata seconda

$$\frac{\partial^2 \Delta l_{v1}}{\partial v^2} = \left[ -\frac{1}{2} (l^2 + v^2)^{-3/2} 2v \right] v + \left[ (l^2 + v^2)^{-1/2} \right] 1$$

$$\frac{\partial^2 \Delta l_{v1}}{\partial v^2} \Big|_0 = \left[ -(l^2 + 0^2)^{-3/2} 0 \right] 0 + \left[ (l^2 + 0^2)^{-1/2} \right] 1 = l^{2(-1/2)} = l^{-1} = \frac{1}{l}$$

Sviluppo

$$\Delta l_{v1}^{svilupata} = 0 + 0v + \frac{1}{2} \frac{1}{l} v^2$$

$$\Delta l_{v1}^{svilupata} = \frac{v^2}{2l}$$

Quadrato della funzione allungamento  
svilupata

$$(\Delta l_{v1}^{svilupata})^2 = \left( \frac{v^2}{2l} \right)^2$$

$$(\Delta l_{v1}^{svilupata})^2 = \frac{v^4}{4l^2}$$

Equilibrio senza vincoli ausiliari

Equazione di Equilibrio del nodo B  
(+ allungamenti) (+ forze in basso)  
↓ B)

$$-2(\pm N_1) \text{sen} \alpha_1 + P = 0$$

$$k_1(+\Delta l_{v1})$$

$$-2k_1 \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right) \frac{v}{l_1} + P = 0$$

$$\left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right) \left( -k_1 \frac{v^3}{l_1^2} + P \right) = 0 \cdot \left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right)$$

$$v^3 - \frac{Pl_1^2}{k_1} = 0$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{Pl_1^2}{k_1}}$$

Energia Potenziale Totale  
(+ trazione) (+ lavoro in basso)

$$\Pi = \phi - H$$

$$L_{vi} - 2L_{ve}$$

$$\frac{1}{2} \sum (\pm N_i) \Delta l_{vi} - (+Pv)$$

$$(\pm k_i \Delta l_{vi}) \Delta l_{vi}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \pm k_i \Delta l_{vi}^2 - Pv$$

$$\Pi = + \frac{1}{2} 2k_1 \left( \frac{v^4}{4l_1^2} \right) - Pv$$

$$\Pi = +v^4 \frac{k_1}{4l_1^2} - vP$$

Principio di Stazionarietà di  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0 \Rightarrow v$$

$$+4 \frac{k_1}{4l_1^2} v^3 - P = 0$$

$$v^3 = \frac{Pl_1^2}{k_1}$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{Pl_1^2}{k_1}}$$

Risoluzione schema statico conoscendo v

1) Geometria

(+ allungamenti ; - accorciamenti)

$$\Delta l_{v1} = \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right)$$

$$l_{v1} = l_1 + (+\Delta l_{v1})$$

2) Sforzo normale uscente dal nodo (A)

(+ trazione ; -compressione)

$$N_1 = k_1(+\Delta l_{v1}) \equiv S_1$$

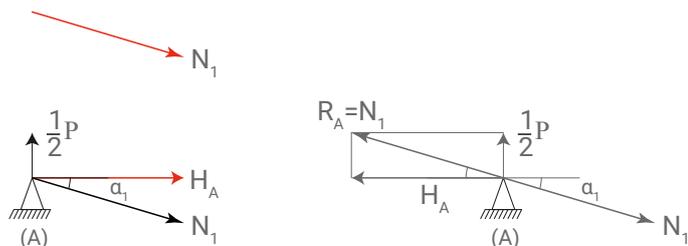
3) Reazioni vincolari esterne

Equilibrio orizzontale del nodo A

→ A) (+ Forze a destra)

$$+H_A + N_1 \cos \alpha_1 = 0$$

$$H_A = -N_1 \cos \alpha_1$$



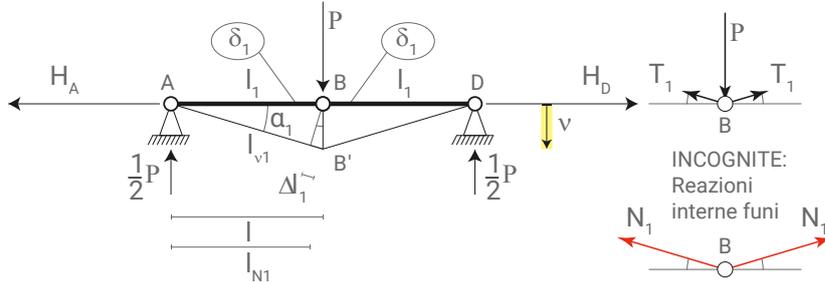
ILL CONDITION PURO CON PRETENSIONE SIMMETRICO

DATI:  
Carichi  
concentrati e  
Sforzi di  
pretensione

.Schema geometrico:

Isostatico  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(4) + (2) - (3 \times 2)$   
 $+ 6 - 6 = 0$

.Schema statico



.Schema statico:

Una volta  
staticamente  
indeterminato

.Movimenti:

1 movimento  
indipendente (v)

.Convenzioni segno  
equilibrio:

Traslazioni verticali  
(+) in basso  
Deformate  
(+) allungamenti  
Sforzi normali  
(+) trazione, uscenti  
Forze verticali  
(+) in basso  
Forze orizzontali  
(+) a destra  
Lavoro virtuale  
esterno verticale  
(+) in basso

Lunghezze

$l_{N1}$  = Lunghezza naturale (dato)  
 $l_1$  = Lunghezza iniziale (dato)  
 $l_{v1}$  = Lunghezza deformata (funzione)

Rigidezza assiale

$k_1 = EA_1 / l_{N1}$

Sforzo normale fune

$S_1 = k_1 (\pm \Delta l_1)$  (Hooke)  
 $S_1 = + (+T_1) + (\pm N_1)$   
 $k_1 (+\delta_1)$  sola Pretensione  
 $k_1 (\pm \Delta l_{v1})$  sola Reazione

Allungamento di sola pretensione

$+\delta_1 = l_1 - l_{N1}$  (Dato)

1) Trigonometria

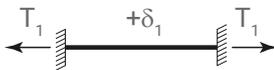
$l_{v1} \sin \alpha_1 = v \Rightarrow l_{v1} = \frac{v}{\sin \alpha_1}$   
 $l_{v1} \cos \alpha_1 = l_1 \Rightarrow l_{v1} = \frac{l_1}{\cos \alpha_1}$   
 $\left(\frac{\sin \alpha_1}{l_1}\right) \frac{v}{\sin \alpha_1} = \frac{l_1}{\cos \alpha_1} \left(\frac{\sin \alpha_1}{l_1}\right)$   
 $\frac{v}{l_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1$

2) Ipotesi piccoli spostamenti

$\tan \alpha_1 \approx \alpha_1 \approx \sin \alpha_1$   
 $\frac{v}{l_1} = \sin \alpha_1$

3) Geometria del sistema

$\alpha_1 = \sin^{-1} \left( \frac{v}{l_1} \right)$   
 $\cos \alpha_1$



Sviluppo in serie di Mc Laurin della funzione allungamento

$f(v) = f(v)|_0 + \frac{\partial f(v)}{\partial v}|_0 v + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(v)}{\partial v^2}|_0 v^2 + o \left( \frac{\partial^3 f(v)}{\partial v^3}|_0 v^3 \right)$

Pitagora

$l_{v1} = \sqrt{l^2 + v^2}$

Funzione

$\Delta l_1 = l_{v1} - l_{N1} = \sqrt{l^2 + v^2} - l_{N1} = (l^2 + v^2)^{1/2} - l_{N1}$

$\Delta l_1|_0 = (l^2 + 0^2)^{1/2} - l_{N1} = l - l_{N1}$

Derivata prima

$\frac{\partial \Delta l_1}{\partial v} = \frac{1}{2} (l^2 + v^2)^{-1/2} 2v - 0$

$\frac{\partial \Delta l_1}{\partial v}|_0 = (l^2 + 0^2)^{-1/2} 0 = 0$

Derivata seconda

$\frac{\partial^2 \Delta l_1}{\partial v^2} = \left[ -\frac{1}{2} (l^2 + v^2)^{-3/2} 2v \right] v + \left[ (l^2 + v^2)^{-1/2} \right] 1$

$\frac{\partial^2 \Delta l_1}{\partial v^2}|_0 = \left[ -\frac{1}{2} (l^2 + 0^2)^{-3/2} 0 \right] 0 + \left[ (l^2 + 0^2)^{-1/2} \right] 1 = l^{2(-1/2)} = \frac{1}{l}$

Sviluppo

$\Delta l_1^{svilupata} = (l - l_{N1}) + 0v + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{l} v^2$

$\Delta l_1^{svilupata} = (l - l_{N1}) + \frac{v^2}{2l}$

$\Delta l_1^{svilupata} = \delta_1 + \frac{v^2}{2l}$   
 $\Delta l_{v1}$

Quadrato della funzione allungamento sviluppata

$(\Delta l_1^{svilupata})^2 = \left( \delta_1 + \frac{v^2}{2l} \right)^2$

$\delta_1^2 + 2\delta_1 \frac{v^2}{2l} + \frac{v^4}{4l^2}$

$(\Delta l_1^{svilupata})^2 = \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l} + \frac{v^4}{4l^2}$

Equilibrio senza vincoli ausiliari

Equazione di Equilibrio del nodo B  
(+ allungamento) (+ forze in basso)  
↓ B)

$$-2(+T_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(\pm N_1)\text{sen}\alpha_1 + P = 0$$

$$k_1(+\delta_1) \quad k_1(+\Delta l_{v1})$$

$$-2k_1\delta_1 \frac{v}{l_1} - 2k_1 \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right) \frac{v}{l_1} + P = 0$$

$$\left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right) \left( -v^3 \frac{k_1}{l_1^2} - v^2 \frac{k_1\delta_1}{l_1} + P \right) = 0 \cdot \left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right)$$

$$v^3 + v(2l_1\delta_1) + \left( -\frac{Pl_1^2}{k_1} \right) = 0$$

$$v^3 + vp + q = 0$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

> 0 sempre

Si verifica sempre

$$l > l_{N1}$$

$$\delta_1 > 0$$

$$p > 0$$

Energia Potenziale Totale  
(+ trazione) (+ lavoro in basso)

$$\Pi = \phi - H$$

$$L_{vi} - 2L_{ve}$$

$$\frac{1}{2} \sum (\pm S_i) \Delta l_i - (+Pv)$$

$$(\pm k_i \Delta l_i) \Delta l_i$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \pm k_i \Delta l_i^2 - Pv$$

$$\Pi = + \frac{1}{2} 2k_1 \left( \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l_1} + \frac{v^4}{4l_1^2} \right) - Pv$$

$$\Pi = +v^4 \frac{k_1}{4l_1^2} + v^2 k_1 \frac{\delta_1}{l_1} - vP + k_1 \delta_1^2$$

Principio di Stazionarietà di  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0 \Rightarrow v$$

$$+4 \frac{k_1}{4l_1^2} v^3 + 2k_1 \frac{\delta_1}{l_1} v - P = 0$$

$$\left( \frac{l_1^2}{k_1} \right) \left( \frac{k_1}{l_1^2} v^3 + 2k_1 \frac{\delta_1}{l_1} v - P \right) = 0 \cdot \left( \frac{l_1^2}{k_1} \right)$$

$$v^3 + v(2l_1\delta_1) + \left( -\frac{Pl_1^2}{k_1} \right) = 0$$

Risoluzione schema statico conoscendo v

1) Geometria

(+ allungamenti ; - accorciamenti)

$$\Delta l_{v1} = \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right)$$

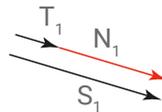
$$l_{v1} = l_1 + (+\Delta l_{v1})$$

2) Sforzo normale uscente dal nodo (A)

(+ trazione ; - compressione)

$$N_1 = k_1(+\Delta l_{v1})$$

$$S_1 = +(+T_1) + (+N_1)$$



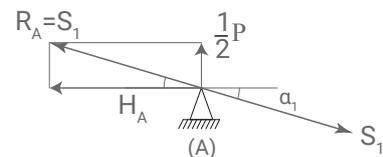
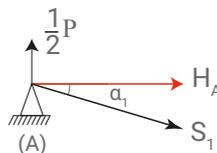
3) Reazioni vincolari esterne

Equilibrio orizzontale del nodo A

→ A) (+ Forze a destra)

$$+H_A + S_1 \cos \alpha_1 = 0$$

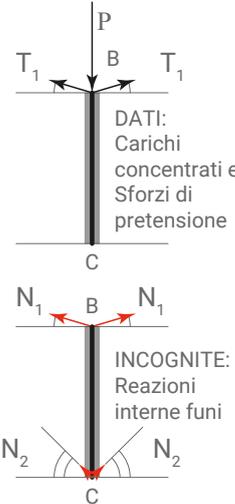
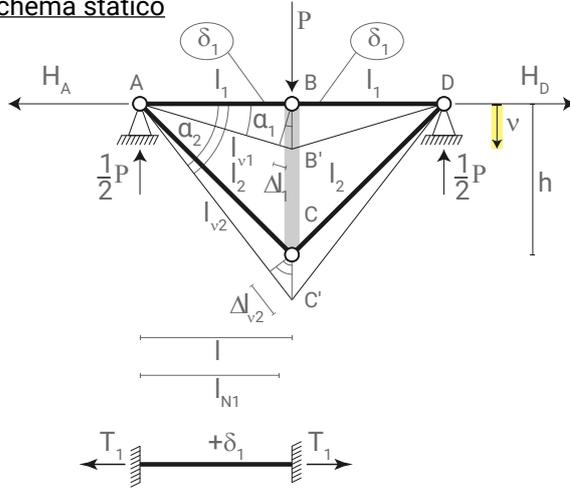
$$H_A = -S_1 \cos \alpha_1$$



**SISTEMA MISTO (A) SIMMETRICO**

- .fune sopra in Ill-condition con pretensione
- .fune sotto in Tensegrity senza pretensione

.Schema statico



.Schema geometrico:

1 Iperstatico  
 $gve + gvi - gdl = ? 0$   
 $(4) + (5) - (4 \times 2)$   
 $+ 9 - 8 = +1$

.Schema statico:

Una volta staticamente indeterminato

.Movimenti:

1 movimento indipendente (v)

.Convenzioni segno equilibrio:

Traslazioni verticali (+) in basso  
 Deformate (+) allungamenti  
 Sforzi normali (+) trazione, uscenti  
 Forze verticali (+) in basso  
 Forze orizzontali (+) a destra  
 Lavoro virtuale esterno verticale (+) in basso

**Lunghezze**

- $l_{N1}$  = Lunghezza naturale (dato)
- $l_1$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v1}$  = Lunghezza deformata (funzione)
- $l_2$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v2}$  = Lunghezza deformata (non si usa)

**Rigidezze assiali**

$k_1 = EA_1 / l_{N1}$   
 $k_2 = EA_2 / l_2$

**Sforzo normale fune 1**

$S_1 = k_1 (\pm \Delta l_1)$  (Hooke)  
 $S_1 = +(+T_1) + (\pm N_1)$   
 $k_1 (+\delta_1)$  sola Pretensione  
 $k_1 (\pm \Delta l_{v1})$  sola Reazione

**Sforzo normale fune 2**

$N_2 = k_2 (\pm \Delta l_{v2})$  (Hooke)

**Allungamenti di sola pretensione**

$+\delta_1 = l_1 - l_{N1}$  (Dato)

**Geometria fune 2**

$l_2 \sin \alpha_2 = h$      $l_2 \cos \alpha_2 = l$   
 $\sin \alpha_2 = \frac{h}{l_2}$      $\cos \alpha_2 = \frac{l}{l_2}$   
 $l_2 = \sqrt{l^2 + h^2}$  (Pitagora)

**Geometria fune 1**

$\frac{v}{l_1} = \sin \alpha_1$   
 $l_1 = \frac{v}{\sin \alpha_1}$   
 $\alpha_1 = \sin^{-1} \left( \frac{v}{l_1} \right)$   
 $\cos \alpha_1$

**Funzione allungamento fune 2 (proporzione triangoli)**

$h : \Delta l_{v2} = l_2 : v$   
 $\Delta l_{v2} \cdot l_2 = h \cdot v$   
 $\Delta l_{v2} = v \frac{h}{l_2}$   
 $\Delta l_{v2} = v \sin \alpha_2$

**Quadrato della funzione**

$(\Delta l_{v2})^2 = v^2 \sin^2 \alpha_2$

**Funzione allungamento fune 1 sviluppata**

$\Delta l_1^{sviluppata} = \delta_1 + \frac{v^2}{2l}$   
 $\Delta l_{v1}$

**Quadrato della funzione sviluppata**

$(\Delta l_1^{sviluppata})^2 = \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l} + v^4 \frac{1}{4l^2}$

Equilibrio senza vincoli ausiliari

Equazione di Equilibrio del nodo B  
(+ allungamenti) (+ forze in basso)  
↓ B)

$$-2(+T_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(\pm N_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(\pm N_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$k_1(+\delta_1)$        $k_1(+\Delta l_{v1})$        $k_2(+\Delta l_{v2})$

$$-2k_1\delta_1\frac{v}{l_1} - 2k_1\left(\frac{v^2}{2l_1}\right)\frac{v}{l_1} - 2k_2(+v\text{sen}\alpha_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$-v2k_1\frac{\delta_1}{l_1} - v^3\frac{k_1}{l_1^2} - v2k_2\text{sen}^2\alpha_2 + P = 0$$

$$\left(-\frac{l_1^2}{k_1}\right)\left[-v^3\frac{k_1}{l_1^2} - v2\left(k_1\frac{\delta_1}{l_1} + k_2\text{sen}^2\alpha_2\right) + P\right] = 0 \cdot \left(-\frac{l_1^2}{k_1}\right)$$

$$v^3 + v2\left(l_1\delta_1 + \frac{k_2}{k_1}l_1^2\text{sen}^2\alpha_2\right) + \left(-\frac{Pl_1^2}{k_1}\right) = 0$$

$$v^3 + vp + q = 0$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

> 0 sempre

Si verifica sempre

$$l > l_{N1}$$

$$\delta_1 > 0$$

$$p > 0$$

Energia Potenziale Totale  
(+ trazione) (+ lavoro in basso)

$$\Pi = \phi - H$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum (\pm S_i) \Delta l_i - (+Pv)$$

$(\pm k_i \Delta l_i) \Delta l_i$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum \pm k_i \Delta l_i^2 - Pv$$

$$\Pi = +\frac{1}{2} 2k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} 2k_2 \Delta l_2^2 - Pv$$

$$\Pi = +k_1 \left( \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l_1} + v^4 \frac{1}{4l_1^2} \right) + k_2 (v^2 \text{sen}^2 \alpha_2) - Pv$$

Principio di Stazionarietà di  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0 \Rightarrow v$$

$$+2k_1\frac{\delta_1}{l_1}v + 4\frac{k_1}{4l_1^2}v^3 + 2k_2\text{sen}^2\alpha_2v - P = 0$$

$$\left(\frac{l_1^2}{k_1}\right)\left[v^3\frac{k_1}{l_1^2} + v2\left(k_1\frac{\delta_1}{l_1} + k_2\text{sen}^2\alpha_2\right) - P\right] = 0 \cdot \left(\frac{l_1^2}{k_1}\right)$$

$$v^3 + v2\left(l_1\delta_1 + \frac{k_2}{k_1}l_1^2\text{sen}^2\alpha_2\right) + \left(-\frac{Pl_1^2}{k_1}\right) = 0$$

Risoluzione schema statico conoscendo  $v$

1) Geometria (+ allungamenti ; - accorciamenti)

$$\Delta l_{v1} = \left(\frac{v^2}{2l_1}\right)$$

$$l_{v1} = l_1 + (+\Delta l_{v1})$$

$$\Delta l_{v2} = (+v\text{sen}\alpha_2)$$

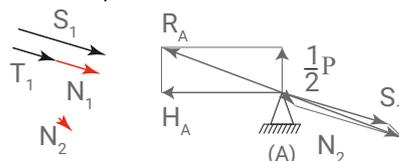
$$l_{v2} = l_2 + (+\Delta l_{v2})$$

2) Sforzi normali uscenti dal nodo (A)  
(+ trazione ; - compressione)

$$N_1 = k_1(+\Delta l_{v1})$$

$$S_1 = +(+T_1) + (+N_1)$$

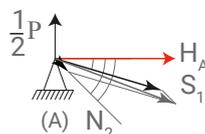
$$N_2 = k_2(+\Delta l_{v2})$$



3) Reazioni vincolari esterne  
Equilibrio orizzontale del nodo A  
→ A) (+ forze a destra)

$$+H + S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 = 0$$

$$H = -S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2$$

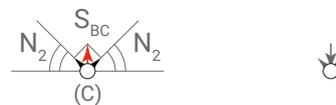


Equilibrio verticale del nodo C

↓ C) (+forze in basso)

$$-S_{BC} - 2S_2 \text{sen} \alpha_2 = 0$$

$$S_{BC} = -2S_2 \text{sen} \alpha_2$$

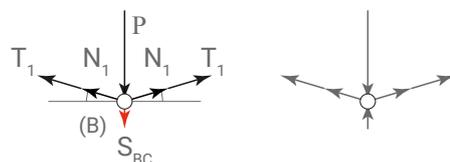


Equilibrio verticale del nodo B

↓ B) (conferma)

$$+S_{BC} - 2T_1 \text{sen} \alpha_1 - 2N_1 \text{sen} \alpha_1 + P = 0$$

$$S_{BC} = +2T_1 \text{sen} \alpha_1 + 2N_1 \text{sen} \alpha_1 - P$$

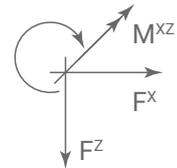


Equilibrio con vincoli ausiliari

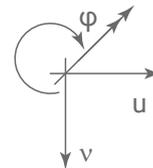
Movimenti:  
1 movimento indipendente incognito (v)

Metodo equilibrio:  
Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari

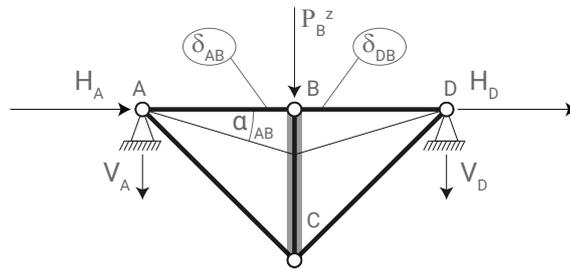
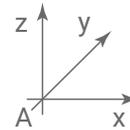
Convenzione segno forze



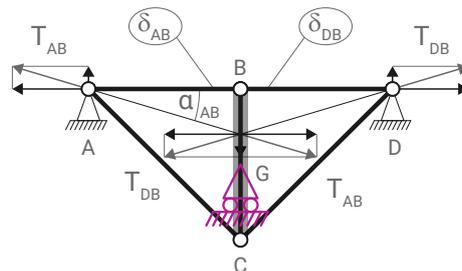
Convenzione segno movimenti



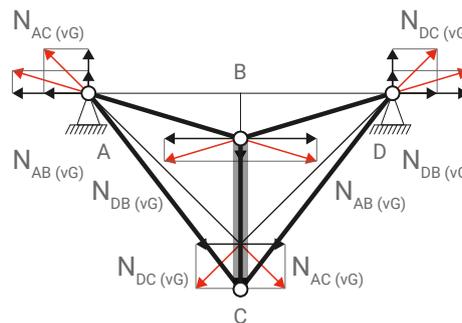
Convenzione segno coordinate



Solo reazioni dovute alla pretensione ( $T_{ij}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Solo reazioni dovute al movimento ( $v_G$ ), ( $N_{ij(vG)}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Equazione di equilibrio verticale del pezzo (BC)  
↓ BC) (+ allungamenti) ; (+ forze in basso)

$$+2T_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2N_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2N_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} = +P$$

$$+2k_{AB} \underbrace{(\delta_{AB})}_{(k_{AB} \Delta l_{AB}^{vG})} \frac{v}{l_{AB}} + 2k_{AB} \left( + \frac{v^2}{2l_{AB}} \right) \frac{v}{l_{AB}} + 2k_{AC} \underbrace{(\delta_{AC})}_{(k_{AC} \Delta l_{AC}^{vG})} \text{sen} \alpha_{AC} - P = 0$$

$$+v2k_{AB} \frac{\delta_{AB}}{l_{AB}} + v^3 \frac{k_{AB}}{l_{AB}^2} + v2k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC} - P = 0$$

$$\left( \frac{l_{AB}^2}{k_{AB}} \right) \left[ +v^3 \frac{k_{AB}}{l_{AB}^2} + v2 \left( \frac{\delta_{AB}}{l_{AB}} k_{AB} + \text{sen}^2 \alpha_{AC} k_{AC} \right) - P \right] = 0 \cdot \left( \frac{l_{AB}^2}{k_{AB}} \right)$$

$$v^3 + v2 \left( l_{AB} \delta_{AB} + \frac{k_{AC}}{k_{AB}} l_{AB}^2 \text{sen}^2 \alpha_{AC} \right) + \left( - \frac{Pl_{AB}^2}{k_{AB}} \right) = 0$$

Pretensioni

Nonostante il carrello ausiliario in (G), impedisca la traslazione verticale del tratto (BC), l'angolo delle funi (AB) e (DB) con l'orizzontale, deve comunque essere considerato, in ogni operazione relativa all'equilibrio, affinché quest'ultimo non venga violato. Quindi, lo sforzo di pretensione nelle funi 'ill condition', ha comunque una componente verticale, nonostante sia, in apparenza, completamente orizzontale.

.Funzione deformata delle funi di (v)

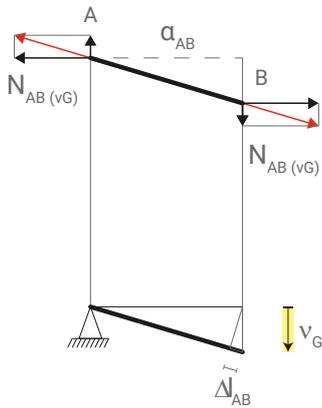
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{vG} = +f(v_G)$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = + \left| \frac{v_G^2}{2l_{AB}} \right|$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = v_G^2 \left( + \frac{1}{2l_{AB}} \right)$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = v_G^2 Q_{AB}^{vG}$$



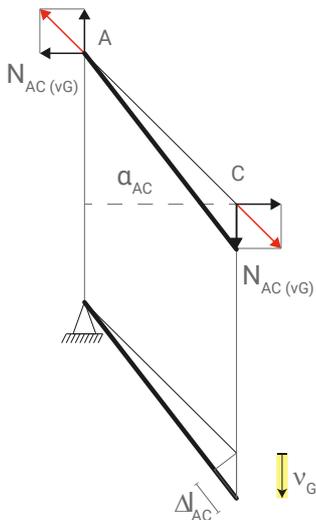
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AC} + (+0+|v_C|)\text{sen}\alpha_{AC}$$

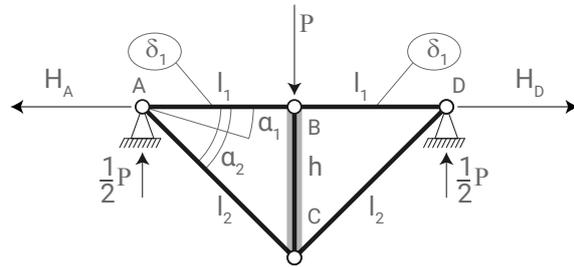
$$\Delta l_{AC}^{vG} = +|v_G|\text{sen}\alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+\text{sen}\alpha_{AC})v_G$$

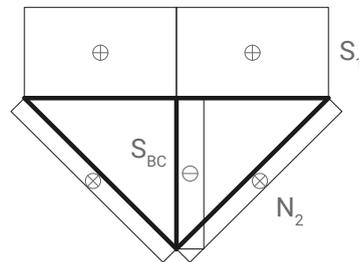
$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+F_{AC}^{vG})v_G$$



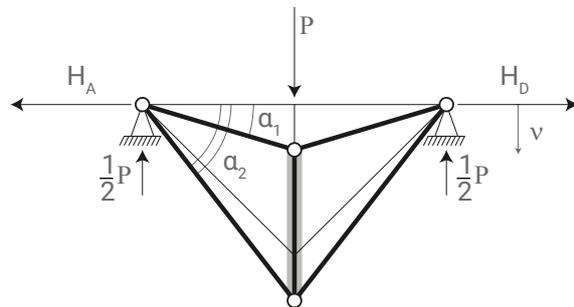
.Diagrammi azione interna



N)



v)



$$H_A = -S_1 \cos\alpha_1 - S_2 \cos\alpha_2$$

$$S_1 = +(+T_1) + (+N_1)$$

$$S_{BC} = -2S_2 \text{sen}\alpha_2$$

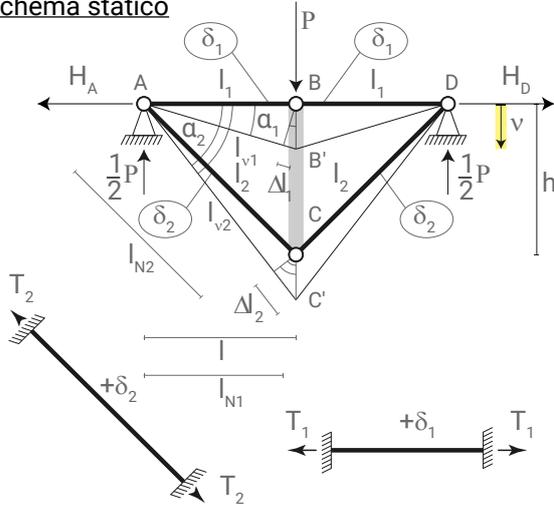
$$N_2 = +k_2 \Delta l_{v2}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

**SISTEMA MISTO (B) SIMMETRICO**

- .fune sopra in Ill-condition con pretensione
- .fune sotto in Tensegrity con pretensione

.Schema statico



DATI:  
Carichi concentrati e Sforzi di pretensione

.Schema geometrico:

1 Iperstatico  
 $gve+gvi-gdl = ? 0$   
 $(4)+(5)-(4 \times 2)$   
 $+9-8= +1$

.Schema statico:

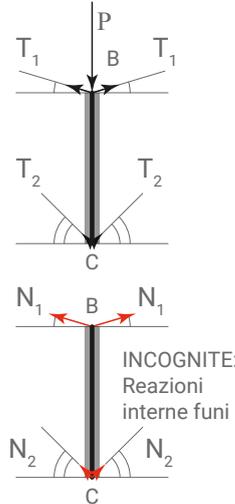
Una volta staticamente indeterminato

.Movimenti:

1 movimento indipendente (v)

.Convenzioni segno equilibrio:

Traslazioni verticali (+) in basso  
 Deformate (+) allungamenti  
 Sforzi normali (+) trazione, uscenti  
 Forze verticali (+) in basso  
 Forze orizzontali (+) a destra  
 Lavoro virtuale esterno verticale (+) in basso



**Lunghezze**

- $l_{N1}$  = Lunghezza naturale (dato)
- $l_1$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v1}$  = Lunghezza deformata (funzione)
- $l_{N2}$  = Lunghezza naturale (dato)
- $l_2$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v2}$  = Lunghezza deformata (non si usa)

**Rigidzze assiali**

$k_1 = EA_1 / l_{N1}$   
 $k_2 = EA_2 / l_{N2}$

**Sforzo normale fune 1**

$S_1 = k_1 (\pm \Delta l_1)$  (Hooke)  
 $S_1 = +(+T_1) + (\pm N_1)$   
 $\underbrace{k_1 (+\delta_1)}_{\text{ sola Pretensione }} \quad \underbrace{k_1 (\pm \Delta l_{v1})}_{\text{ sola Reazione }}$

**Sforzo normale fune 2**

$S_2 = k_2 (\pm \Delta l_2)$  (Hooke)  
 $S_2 = +(+T_2) + (\pm N_2)$   
 $\underbrace{k_2 (+\delta_2)}_{\text{ sola Pretensione }} \quad \underbrace{k_2 (\pm \Delta l_{v2})}_{\text{ sola Reazione }}$

**Allungamenti di sola pretensione**

$+\delta_1 = l_1 - l_{N1}$  (Dati)  
 $+\delta_2 = l_2 - l_{N2}$

**Geometria fune 2**

$l_2 \text{sen} \alpha_2 = h \quad l_2 \text{cos} \alpha_2 = l$   
 $\text{sen} \alpha_2 = \frac{h}{l_2} \quad \text{cos} \alpha_2 = \frac{l}{l_2}$   
 $l_2 = \sqrt{l^2 + h^2}$  (Pitagora)

**Geometria fune 1**

$\frac{v}{l_1} = \text{sen} \alpha_1$   
 $\alpha_1 = \text{sen}^{-1} \left( \frac{v}{l_1} \right)$   
 $\text{cos} \alpha_1$

**Funzione allungamento fune 2 (proporzione triangoli)**

$h : \Delta l_{v2} = l_2 : v$   
 $\Delta l_{v2} \cdot l_2 = h \cdot v$   
 $\Delta l_{v2} = v \frac{h}{l_2}$   
 $\Delta l_{v2} = v \text{sen} \alpha_2$

**Quadrato della funzione**

$(\Delta l_{v2})^2 = v^2 \text{sen}^2 \alpha_2$

**Funzione allungamento fune 1 sviluppata**

$\Delta l_1^{\text{sviluppata}} = \delta_1 + \frac{v^2}{2l_1}$   
 $\Delta l_{v1}$

**Quadrato della funzione sviluppata**

$(\Delta l_1^{\text{sviluppata}})^2 = \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l_1} + v^4 \frac{1}{4l_1^2}$

Equilibrio senza vincoli ausiliari

Equazione di Equilibrio del nodo B (+ allungamenti)  
 ↓ B) (+ forze in basso)

$$-2(+T_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(+T_2)\text{sen}\alpha_2 - 2(\pm N_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(\pm N_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$-2k_1(+\delta_1) - 2k_2(+\delta_2) - 2k_1(+\Delta l_{v1}) - 2k_2(+\Delta l_{v2}) + P = 0$$

$$-2k_1\delta_1 \frac{v}{l_1} - 2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - 2k_1 \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right) \frac{v}{l_1} - 2k_2(+v\text{sen}\alpha_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$-v2k_1 \frac{\delta_1}{l_1} - v^3 \frac{k_1}{l_1^2} - v2k_2 \text{sen}^2\alpha_2 - 2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$\left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right) \left[ -v^3 \frac{k_1}{l_1^2} - v2 \left( k_1 \frac{\delta_1}{l_1} + k_2 \text{sen}^2\alpha_2 \right) - 2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 + P \right] = 0 \cdot \left( -\frac{l_1^2}{k_1} \right)$$

$$v^3 + v2 \left( l_1\delta_1 + \frac{k_2}{k_1} l_1^2 \text{sen}^2\alpha_2 \right) + (2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P) \frac{l_1^2}{k_1} = 0$$

$$v^3 + vp + q = 0$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

Si verifica sempre

$$l > l_{Ni}$$

$$\delta_1 > 0$$

$$p > 0$$

Energia Potenziale Totale (+ trazione) (+ lavoro in basso)

$$\Pi = \phi - H$$

$$L_{vi} - 2L_{ve}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \sum (\pm S_i) \Delta l_i - [\sum (\pm T_i \text{sen}\alpha_i \cdot v) + Pv]$$

$$\left( \pm k_i \Delta l_i \right) \Delta l_i \quad \pm k_i \delta_i$$

$$\frac{1}{2} \sum \pm k_i \Delta l_i^2$$

$$\Pi = +\frac{1}{2} 2k_1 \Delta l_1^2 + \frac{1}{2} 2k_2 \Delta l_2^2 - [-2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 \cdot v + Pv]$$

$$\Pi = +k_1 \left( \delta_1^2 + v^2 \frac{\delta_1}{l_1} + v^4 \frac{1}{4l_1^2} \right) + k_2 \left( v^2 \text{sen}^2\alpha_2 \right) + (2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P)v$$

Principio di Stazionarietà di  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0 \Rightarrow v$$

$$+2k_1 \frac{\delta_1}{l_1} v + 4 \frac{k_1}{4l_1^2} v^3 + 2k_2 \text{sen}^2\alpha_2 v + 2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P = 0$$

$$\left( \frac{l_1^2}{k_1} \right) \left[ v^3 \frac{k_1}{l_1^2} + v2 \left( k_1 \frac{\delta_1}{l_1} + k_2 \text{sen}^2\alpha_2 \right) + 2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P \right] = 0 \cdot \left( \frac{l_1^2}{k_1} \right)$$

$$v^3 + v2 \left( l_1\delta_1 + \frac{k_2}{k_1} l_1^2 \text{sen}^2\alpha_2 \right) + (2k_2\delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P) \frac{l_1^2}{k_1} = 0$$

Risoluzione schema statico conoscendo v

1) Geometria (+allungamenti ; - accorciamenti)

$$\Delta l_{v1} = \left( + \frac{v^2}{2l_1} \right) \quad \Delta l_{v2} = (+v\text{sen}\alpha_2)$$

$$l_{v1} = l_1 + (+\Delta l_{v1}) \quad l_{v2} = l_2 + (+\Delta l_{v2})$$

2) Sforzi normali uscenti dal nodo (A) (+ trazione; - compressione)

$$N_1 = k_1(+\Delta l_{v1})$$

$$S_1 = +(+T_1) + (+N_1)$$



$$N_2 = k_2(+\Delta l_{v2})$$

$$S_2 = +(+T_2) + (+N_2)$$



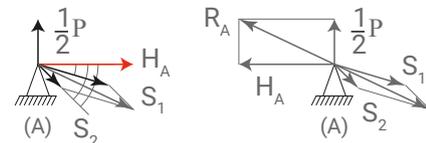
3) Reazioni vincolari esterne

Equilibrio orizzontale del nodo A

→ A) (+ destra)

$$+H_A + S_1 \cos\alpha_1 + S_2 \cos\alpha_2 = 0$$

$$H_A = -S_1 \cos\alpha_1 - S_2 \cos\alpha_2$$

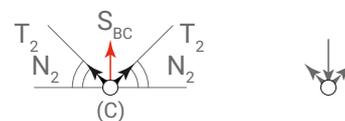


Equilibrio verticale del nodo C

↓ C) (+in basso)

$$-S_{BC} - 2T_2 \text{sen}\alpha_2 - 2N_2 \text{sen}\alpha_2 = 0$$

$$S_{BC} = -2T_2 \text{sen}\alpha_2 - 2N_2 \text{sen}\alpha_2$$

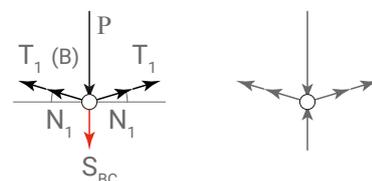


Equilibrio verticale del nodo B

↓ B) (conferma)

$$+S_{BC} - 2T_1 \text{sen}\alpha_1 - 2N_1 \text{sen}\alpha_1 + P = 0$$

$$S_{BC} = +2T_1 \text{sen}\alpha_1 + 2N_1 \text{sen}\alpha_1 - P$$

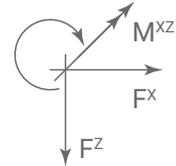


Equilibrio con vincoli ausiliari

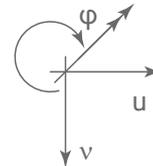
Movimenti:  
1 movimento indipendente incognito (v)

Metodo equilibrio:  
Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari

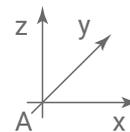
Convenzione segno forze



Convenzione segno movimenti

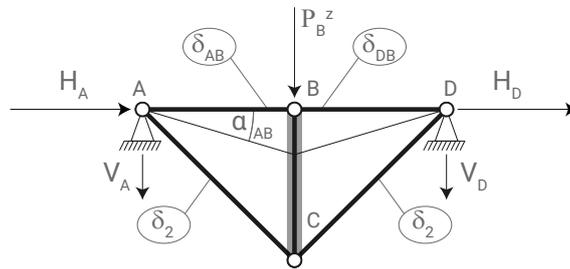


Convenzione segno coordinate

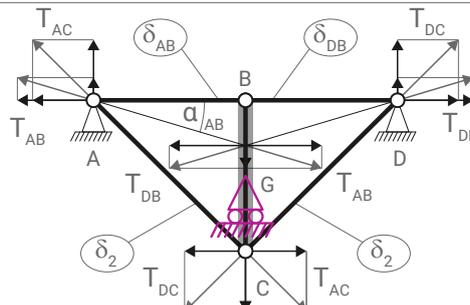


Pretensioni  
Nonostante il carrello ausiliario in (G), impedisca la traslazione verticale del tratto (BC), l'angolo delle funi (AB) e (DB) con l'orizzontale, deve comunque essere considerato, in ogni

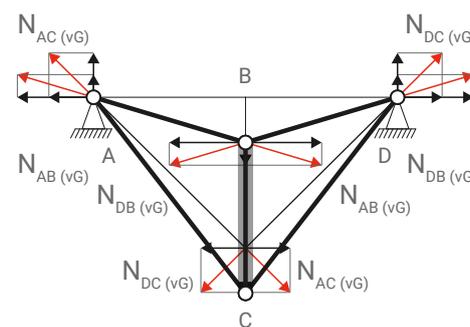
operazione relativa all'equilibrio, affinché quest'ultimo non venga violato. Quindi, lo sforzo di pretensione nelle funi 'ill condition', ha comunque una componente verticale, nonostante sia, in apparenza, completamente orizzontale.



Solo reazioni dovute alla pretensione ( $T_{ij}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Solo reazioni dovute al movimento ( $v_G$ ), ( $N_{ij(vG)}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Equazione di equilibrio verticale del pezzo (BC)  
↓ BC) (+ allungamenti) ; (+ forze in basso)

$$+2T_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2T_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} + 2N_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2N_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} = +P$$

$$+2k_{AB} \left( +\delta_{AB} \right) \frac{v}{l_{AB}} + 2k_{AC} \left( +\delta_{AC} \right) \text{sen} \alpha_{AC} + 2k_{AB} \left( +\frac{v^2}{2l_{AB}} \right) \frac{v}{l_{AB}} + 2k_{AC} \left( +v \text{sen} \alpha_{AC} \right) \text{sen} \alpha_{AC} - P = 0$$

$$+v2k_{AB} \frac{\delta_{AB}}{l_{AB}} + 2k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} + v^3 \frac{k_{AB}}{l_{AB}^2} + v2k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC} - P = 0$$

$$\left( \frac{l_{AB}^2}{k_{AB}} \right) \left[ +v^3 \frac{k_{AB}}{l_{AB}^2} + v2 \left( k_{AB} \frac{\delta_{AB}}{l_{AB}} + k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC} \right) + 2k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} - P \right] = 0 \cdot \left( \frac{l_{AB}^2}{k_{AB}} \right)$$

$$v^3 + v2 \left( l_{AB} \delta_{AB} + \frac{k_{AC}}{k_{AB}} l_{AB}^2 \text{sen}^2 \alpha_{AC} \right) + (2k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} - P) \frac{l_{AB}^2}{k_{AB}} = 0$$

.Funzione deformata delle funi di (v)

.Diagrammi azione interna

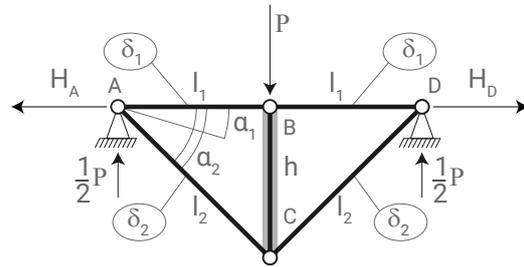
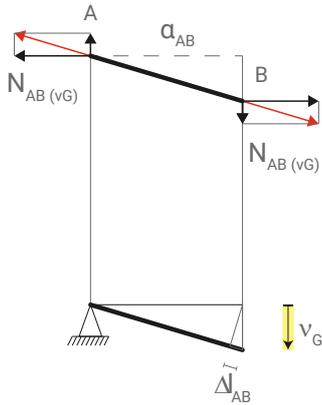
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{vG} = +f(v_G)$$

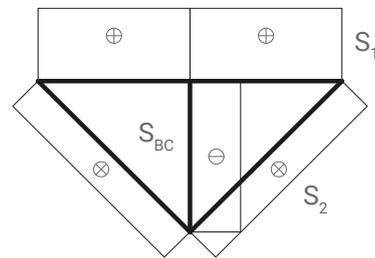
$$\Delta l_{AB}^{vG} = + \left| \frac{v_G^2}{2l_{AB}} \right|$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = v_G^2 \left( + \frac{1}{2l_{AB}} \right)$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = v_G^2 Q_{AB}^{vG}$$



N)



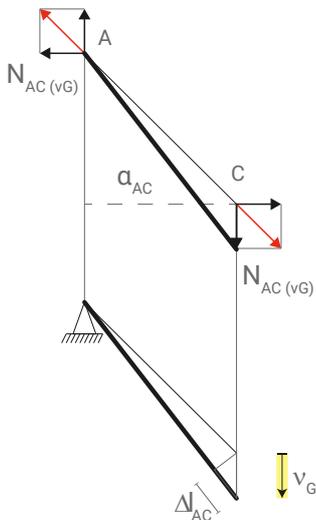
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AC} + (+0+|v_C|)\text{sen}\alpha_{AC}$$

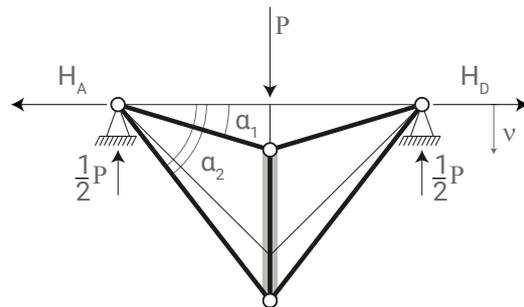
$$\Delta l_{AC}^{vG} = +|v_G|\text{sen}\alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+\text{sen}\alpha_{AC})v_G$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+F_{AC}^{vG})v_G$$



v)



$$H_A = -S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2$$

$$S_1 = +(+T_1) + (+N_1)$$

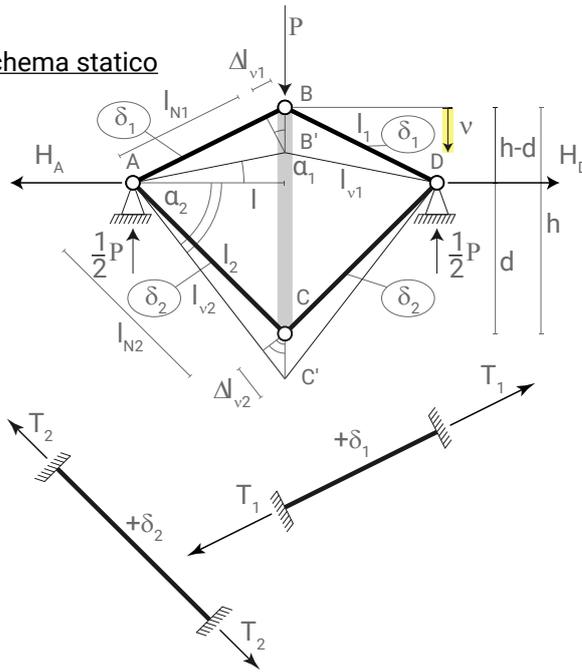
$$S_{BC} = -2T_2 \text{sen} \alpha_2 - 2N_2 \text{sen} \alpha_2$$

$$S_2 = +(+T_2) + (+N_2)$$

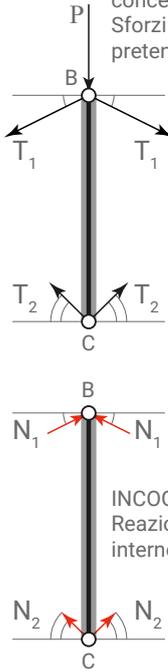
$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

TENSEGRITY PURO SIMMETRICO

Schema statico



DATI:  
Carichi  
concentrati e  
Sforzi di  
pretensione



Schema geometrico:

1 Iperstatico  
 $gve+gvi-gdl = ? 0$   
 $(4)+(5)-(4 \times 2)$   
 $+9-8= +1$

Schema statico:

Una volta  
staticamente  
indeterminato

Movimenti:

1 movimento  
indipendente (v)

Convenzioni segno  
equilibrio:

- Traslazioni verticali (+) in basso
- Deformate (+) allungamenti
- Sforzi normali (+) trazione, uscenti
- Forze verticali (+) in basso
- Forze orizzontali (+) a destra
- Lavoro virtuale esterno verticale (+) in basso

INCOGNITE:  
Reazioni  
interne funi

Requisito funi:

Diversamente dall'asta rigida, la fune non può sopportare alcun sforzo complessivo di compressione. Cioè,

$S_1 > 0$  sempre, pertanto quando  $N_1 < 0$  occorre che  $T_1 > N_1$

**Lunghezze**

- $l_{N1}$  = Lunghezza naturale (dato)
- $l_1$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v1}$  = Lunghezza deformata (non si usa)
- $l_{N2}$  = Lunghezza naturale (dato)
- $l_2$  = Lunghezza iniziale (dato)
- $l_{v2}$  = Lunghezza deformata (non si usa)

**Allungamenti di sola pretensione**

$+\delta_1 = l_1 - l_{N1}$  (Dati)  
 $+\delta_2 = l_2 - l_{N2}$

**Rigidezze assiali**

$k_1 = EA_1 / l_{N1}$   
 $k_2 = EA_2 / l_{N2}$

**Sforzo normale fune 1**

$S_1 = k_1 (\pm \Delta l_1)$  (Hooke)  
 $S_1 = +(+T_1) + (\pm N_1)$   
 $\underbrace{k_1 (+\delta_1)}_{\text{ sola Pretensione }} \quad \underbrace{k_1 (\pm \Delta l_{v1})}_{\text{ sola Reazione }}$

**Sforzo normale fune 2**

$S_2 = k_2 (\pm \Delta l_2)$  (Hooke)  
 $S_2 = +(+T_2) + (\pm N_2)$   
 $\underbrace{k_2 (+\delta_2)}_{\text{ sola Pretensione }} \quad \underbrace{k_2 (\pm \Delta l_{v2})}_{\text{ sola Reazione }}$

**Geometria fune 2**

$l_2 \sin \alpha_2 = d$   
 $\sin \alpha_2 = \frac{d}{l_2}$   
 $l_2 \cos \alpha_2 = l$   
 $\cos \alpha_2 = \frac{l}{l_2}$   
 $l_2 = \sqrt{l^2 + d^2}$  (Pitagora)

**Geometria fune 1**

$l_1 \sin \alpha_1 = h - d$   
 $\sin \alpha_1 = \frac{h - d}{l_1}$   
 $l_1 \cos \alpha_1 = l$   
 $\cos \alpha_1 = \frac{l}{l_1}$   
 $l_1 = \sqrt{l^2 + (h - d)^2}$  (Pitagora)

**Funzione allungamento fune 2**

$\Delta l_2 = v \sin \alpha_2$   
 Quadrato della funzione  
 $\Delta l_2^2 = v^2 \sin^2 \alpha_2$

**Funzione allungamento fune 1**

$\Delta l_1 = v \sin \alpha_1$   
 Quadrato della funzione  
 $\Delta l_1^2 = v^2 \sin^2 \alpha_1$

Equilibrio senza vincoli ausiliari

Equazione di Equilibrio del nodo B (+ allungamenti)  
(+ forze in basso)  
↓ B)

$$+2(+T_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(+T_2)\text{sen}\alpha_2 - 2(\pm N_1)\text{sen}\alpha_1 - 2(\pm N_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$\underbrace{k_1(+\delta_1)} \quad \underbrace{k_2(+\delta_2)} \quad \underbrace{k_1(-\Delta l_{v1})} \quad \underbrace{k_2(+\Delta l_{v2})}$$

$$+2k_1\delta_1\text{sen}\alpha_1 - 2k_2\delta_2\text{sen}\alpha_2 - 2k_1(-v\text{sen}\alpha_1)\text{sen}\alpha_1 - 2k_2(+v\text{sen}\alpha_2)\text{sen}\alpha_2 + P = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)[+v2(k_1\text{sen}^2\alpha_1 - k_2\text{sen}^2\alpha_2)] = [-2k_1\delta_1\text{sen}\alpha_1 + 2k_2\delta_2\text{sen}\alpha_2 - P]\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$v = \frac{+k_1\delta_1\text{sen}\alpha_1 - k_2\delta_2\text{sen}\alpha_2 + \frac{P}{2}}{-k_1\text{sen}^2\alpha_1 + k_2\text{sen}^2\alpha_2}$$

Risoluzione schema statico conoscendo v

1) Geometria  
(+ allungamenti;  
- accorciamenti)

$$\Delta l_{v1} = (-v\text{sen}\alpha_1)$$

$$l_{v1} = l_1 + (-\Delta l_{v1})$$

$$\Delta l_{v2} = (+v\text{sen}\alpha_2)$$

$$l_{v2} = l_2 + (+\Delta l_{v2})$$

Energia Potenziale Totale  
(+ trazione) (+lavoro in basso)

$$\Pi = \phi - H$$

$$L_{vi} - 2L_{ve}$$

$$\frac{1}{2} \sum (\pm N_i) \Delta l_{vi} - [(\sum \pm T_i \text{sen}\alpha_i \cdot v) + Pv]$$

$$\underbrace{(\pm k_i \Delta l_{vi}) \Delta l_{vi}} \quad \underbrace{\pm k_i \delta_i}$$

$$\frac{1}{2} \sum \pm k_i \Delta l_{vi}^2$$

$$\Pi = -\frac{1}{2} 2k_1 (v^2 \text{sen}^2 \alpha_1) + \frac{1}{2} 2k_2 (v^2 \text{sen}^2 \alpha_2) - (+2k_1 \delta_1 \text{sen}\alpha_1 \cdot v - 2k_2 \delta_2 \text{sen}\alpha_2 \cdot v + Pv)$$

$$\Pi = v^2 (-k_1 \text{sen}^2 \alpha_1 + k_2 \text{sen}^2 \alpha_2) + v (-2k_1 \delta_1 \text{sen}\alpha_1 + 2k_2 \delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P)$$

Principio di Stazionarietà di  $\Pi$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v} = 0 \Rightarrow v$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)[v2(-k_1 \text{sen}^2 \alpha_1 + k_2 \text{sen}^2 \alpha_2) + (-2k_1 \delta_1 \text{sen}\alpha_1 + 2k_2 \delta_2 \text{sen}\alpha_2 - P)] = 0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$v(-k_1 \text{sen}^2 \alpha_1 + k_2 \text{sen}^2 \alpha_2) = +k_1 \delta_1 \text{sen}\alpha_1 - k_2 \delta_2 \text{sen}\alpha_2 + \frac{P}{2}$$

$$v = \frac{+k_1 \delta_1 \text{sen}\alpha_1 - k_2 \delta_2 \text{sen}\alpha_2 + \frac{P}{2}}{-k_1 \text{sen}^2 \alpha_1 + k_2 \text{sen}^2 \alpha_2}$$

Equilibrio verticale del nodo B  
↓ B) (conferma)

$$+S_{BC} + 2T_1 \text{sen}\alpha_1 - 2N_1 \text{sen}\alpha_1 + P = 0$$

$$S_{BC} = -2T_1 \text{sen}\alpha_1 + 2N_1 \text{sen}\alpha_1 - P$$

2) Sforzi normali uscenti dal nodo (A)  
(+trazione; -compressione)

$$N_1 = k_1(-\Delta l_{v1})$$

$$S_1 = +(+T_1) + (-N_1)$$

$$N_2 = k_2(+\Delta l_{v2})$$

$$S_2 = +(+T_2) + (+N_2)$$

3) Reazioni vincolari esterne  
Equilibrio orizzontale del nodo A  
→ A) (+forze a destra)

$$+H_A + S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2 = 0$$

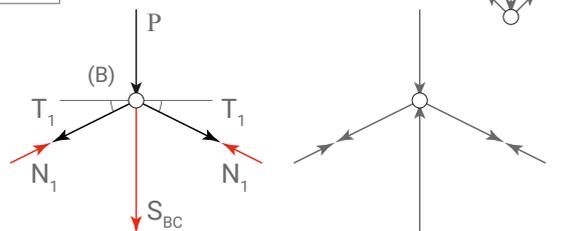
$$H_A = -S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2$$

Equilibrio verticale del nodo C

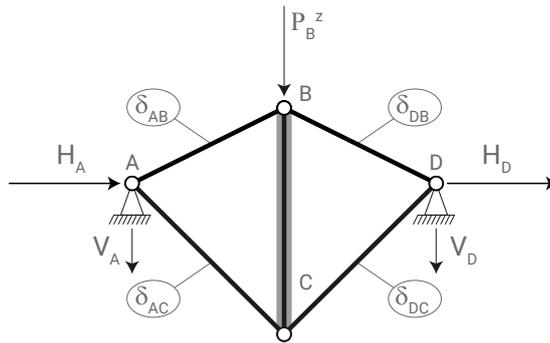
↓ C) (+ forze in basso)

$$-S_{BC} - 2T_2 \text{sen}\alpha_2 - 2N_2 \text{sen}\alpha_2 = 0$$

$$S_{BC} = -2T_2 \text{sen}\alpha_2 - 2N_2 \text{sen}\alpha_2$$



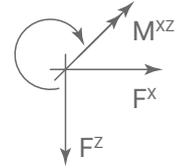
Equilibrio con vincoli ausiliari



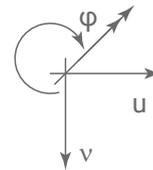
Movimenti:  
1 movimento indipendente incognito (v)

Metodo equilibrio:  
Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari

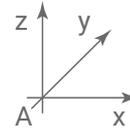
Convenzione segno forze



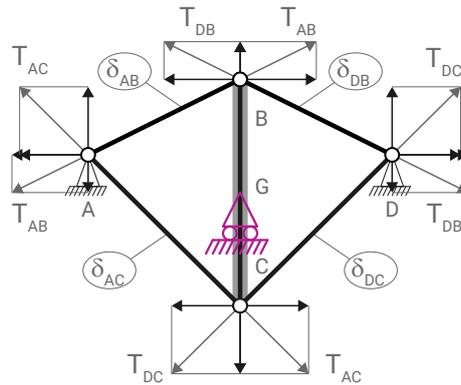
Convenzione segno movimenti



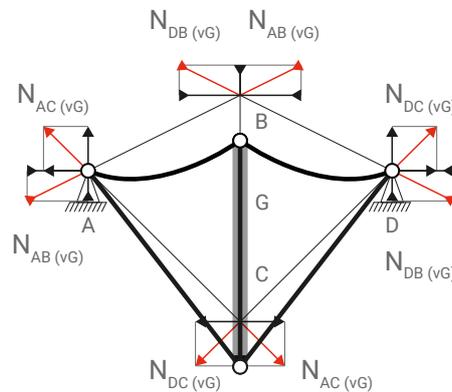
Convenzione segno coordinate



Solo reazioni dovute alla pretensione ( $T_{IJ}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Solo reazioni dovute al movimento ( $v_G$ ), ( $N_{IJ(vG)}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



Equazione di equilibrio verticale del pezzo (BC)  
↓ BC) (+ allungamenti) ; (+ forze in basso)

$$-2T_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2T_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} + 2N_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} + 2N_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} = +P$$

$$-2k_{AB} \Delta l_{AB}^{vG} \text{sen} \alpha_{AB} + 2k_{AC} \Delta l_{AC}^{vG} \text{sen} \alpha_{AC} + 2k_{AB} (-v \text{sen} \alpha_{AB}) \text{sen} \alpha_{AB} + 2k_{AC} (+v \text{sen} \alpha_{AC}) \text{sen} \alpha_{AC} - P = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) v 2(-k_{AB} \text{sen}^2 \alpha_{AB} + k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC}) = [2(+k_{AB} \delta_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} - k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC}) + P] \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$v(-k_{AB} \text{sen}^2 \alpha_{AB} + k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC}) = +k_{AB} \delta_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} - k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} + \frac{P}{2}$$

$$v = \frac{+k_{AB} \delta_{AB} \text{sen} \alpha_{AB} - k_{AC} \delta_{AC} \text{sen} \alpha_{AC} + \frac{P}{2}}{-k_{AB} \text{sen}^2 \alpha_{AB} + k_{AC} \text{sen}^2 \alpha_{AC}}$$

.Funzione deformata delle funi di (v)

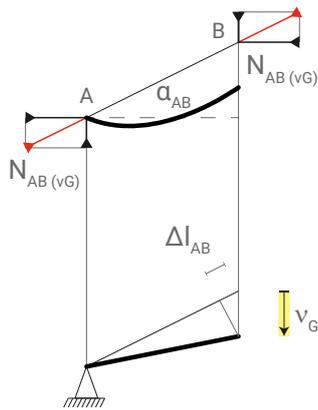
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AB} + (+0-|v_B|)\text{sen}\alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = -|v_G|\text{sen}\alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (-\text{sen}\alpha_{AB})v_G$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (-F_{AB}^{vG})v_G$$



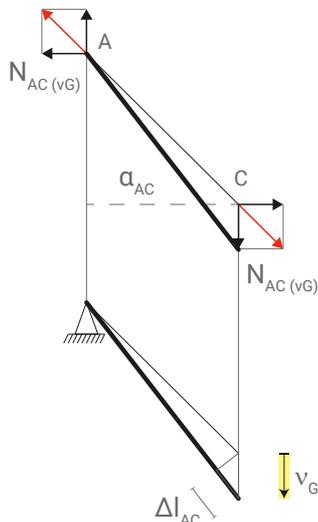
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AC} + (+0+|v_C|)\text{sen}\alpha_{AC}$$

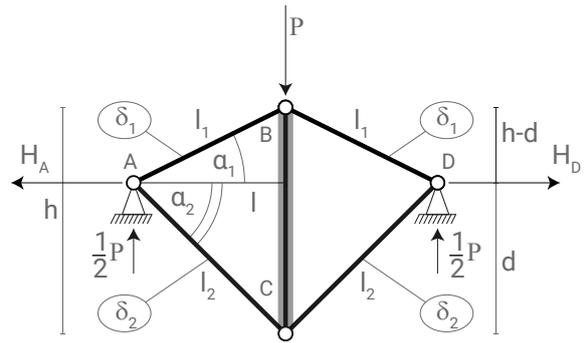
$$\Delta l_{AC}^{vG} = +|v_G|\text{sen}\alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+\text{sen}\alpha_{AC})v_G$$

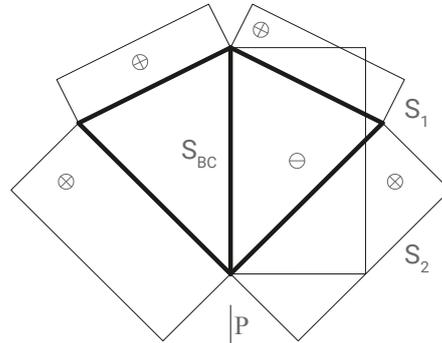
$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+F_{AC}^{vG})v_G$$



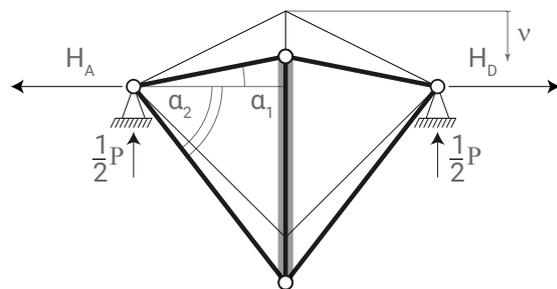
.Diagrammi azione interna



N)



v)



$$H_A = -S_1 \cos \alpha_1 - S_2 \cos \alpha_2$$

$$S_1 = +(+T_1) + (-N_1)$$

$$S_{BC} = -2T_2 \text{sen} \alpha_2 - 2N_2 \text{sen} \alpha_2$$

$$S_2 = +(+T_2) + (+N_2)$$

$$v = \frac{+k_1 \delta_1 \text{sen} \alpha_1 - k_2 \delta_2 \text{sen} \alpha_2 + \frac{P}{2}}{-k_1 \text{sen}^2 \alpha_1 + k_2 \text{sen}^2 \alpha_2}$$

ANALISI STRUTTURALE COMPARATIVA IN M. EXCELL

.Convenzioni, legenda, carico e resistenze

Geometria dell'elemento ( $G_{IJ}$ )

Traslazione verticale ( $v_{BC}$ ): positiva in basso  
 Deformata assiale ( $\Delta l_{IJ}$ ): positiva allungamento  
 Sforzo normale ( $N_{IJ}$ ) ; ( $S_{IJ}$ ): positivo di trazione  
 Forza e Reazione verticale ( $P^z$ ) ; ( $V_I$ ): positiva in basso  
 Reazione orizzontale ( $H_I$ ): positiva a destra

	dato
	sforzo finale da verificare
	movimento indipendente

$P^z_G$ (KN)	$E$ (KN/mm <sup>2</sup> )	Carp. $f_{yd}$ (KN/mm <sup>2</sup> )	Funi $f_{yd}$ (KN/mm <sup>2</sup> )
100	206	0,26	0,93

.Vierendell

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$J_{IJ}$ (mm <sup>4</sup> )	$W_{IJ}$ (mm <sup>3</sup> )
AB ; EC	3	Circolare	219,1	8	5310	29600000	270000
BC	3	Circolare	42,4	2,5	313	62600	2950
AE	3	Circolare	219,1	8	5310	29600000	270000

$S_{IJ}$ ; $\sigma_{IJ}$	M (KN*m)	V (KN)	N (KN)	$\sigma$ (KN/mm <sup>2</sup> )	$< \sigma_{am}$ (KN/mm <sup>2</sup> )
AB	38	25	-25	0,14	0,17
EC	38	25	25	0,14	0,17
BC	0	0	-50	0,16	0,17
AE	38	-25	-25	0,14	0,17

$V_I$ ; $v_{BC}$	$V_E$ (KN)	$H_A$ (KN)	$v_{BC}$ (mm)	$< v_{am}$ (mm)
	-50	0	9	30

.Reticolare a maglia triangolare

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sen\alpha_{IJ}$
AB (1)	3	Circolare	42,4	2,5	313	0	0	1	0
AC (2)	4,2	Circolare	42,4	4	483	45	0,785	0,71	0,71
BC (h)	3	Circolare	48,3	5	680	90	1,571	0	1

$S_{IJ}$ ; $\sigma_{IJ}$		$N_{IJ}$ (KN)	$N_{IJ}$ (KN)	$\sigma$ (KN/mm <sup>2</sup> )	$< \sigma_{am}$ (KN/mm <sup>2</sup> )
AB (1)	Equilibrio orizzontale in A	-50		-0,16	0,17
AC (2)	Equilibrio verticale in A	71		0,15	0,17
BC (h)	Equilibrio verticale in C e in B	-100,0	-100,0	-0,15	0,17

$V_I$ ; $v_{BC}$	$V_A$ (KN)	$H_A$ (KN)	$v_{BC}$ (mm)	$< v_{am}$ (mm)
	-50	0	7	30

.Misto A: pretensione solo nella coppia di funi orizzontali

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3	OSS	24		353	0,111	0,002	1,000	0,002
AC (2)	4,243	OSS	24		353	45	0,79	0,71	0,71
BC (h)	3	Circolare	48,3	5	680	90	1,571	0	1

$\delta_{IJ}; k_{IJ}$	$\delta_{IJ}$ (m)	$l_{N-IJ}$ (m)	$k_{IJ}$ (KN/m)	$T_{IJ}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	0,004	2,996	24239	97		219
AC (2)	0	4,2	17140	0		219

$v_{BC}$	p	q	$v_{BC}$ (m)	$v_{BC}$ (mm)	<	$v_{am}$ (mm)
	6	-0,04	0,006	6		30

$\Delta l_{IJ}^v; S_{IJ}$	$l_{IJ}^v$ (m)	$\Delta l_{IJ}^v$ (m)	$N_{IJ}$ (KN)	$S_{IJ}$ (KN)	$F_{Rd}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	3,000	0,00001	0,136	97	328		219
AC (2)	4,247	0,00411	70	70	328		219
BC (h)	Equilibrio verticale in C e in B		-99,624	-99,624	177		118

$V_I$	$V_A$ (KN)	$H_A$ (KN)
	-50	-147

.Misto B: pretensione in entrambe le coppie di funi

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3	OSS	24		353	0,003	0,00006	1,0000	0,0001
AC (2)	4,2	OSS	24		353	45	0,79	0,71	0,71
BC (h)	3	Circolare	48,3	5	680	90	1,571	0	1

$\delta_{IJ}; k_{IJ}$	$\delta_{IJ}$ (m)	$l_{N-IJ}$ (m)	$k_{IJ}$ (KN/m)	$T_{IJ}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	0,004	2,996	24272	97		219
AC (2)	0,004	4,239	17156	69		219

$v_{BC}$	p	q	$v_{BC}$ (m)	$v_{BC}$ (mm)	<	$v_{am}$ (mm)
	6	-0,0011	0,0002	0,2		30

$\Delta l_{IJ}^v; S_{IJ}$	$l_{IJ}^v$ (m)	$\Delta l_{IJ}^v$ (m)	$N_{IJ}$ (KN)	$S_{IJ}$ (KN)	$F_{Rd}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	3,000	0,00000	0,0001	97	328		219
AC (2)	4,243	0,00012	2	71	328		219
BC (h)	Equilibrio verticale in C e in B		-99,99	-99,99	177		118

$V_I$	$V_A$ (KN)	$H_A$ (KN)
	-50	-147

.Tensegrity

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3,354	OSS	24		353	27	0,464	0,89	0,45
AC (2)	4,243	OSS	24		353	45	0,785	0,71	0,71
BC (h)	4,5	Circolare	139,7	4	1710	90	1,571	0	1
d	3								
l	3								

$\delta_{IJ}; k_{IJ}$	$\delta_{IJ}$ (m)	$l_{N-IJ}$ (m)	$k_{IJ}$ (KN/m)	$T_{IJ}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	0,003	3,351	21700	65		219
AC (2)	0,005	4,238	17160	86		219

$v_{BC}$	$v_{BC}$ (m)	$v_{BC}$ (mm)	<	$v_{am}$ (mm)
	0,004	4		34

$\Delta l_{IJ}^v; S_{IJ}$	$l_{IJ}^v$ (m)	$\Delta l_{IJ}^v$ (m)	$N_{IJ}$ (KN)	$S_{IJ}$ (KN)	$F_{Rd}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	3,352	-0,0019	-42	23	328		219
AC (2)	4,246	0,0031	53	139	328		219
BC (h)	Equilibrio verticale in C e in B		-195,98	-195,98	445		296

$V_I$	$V_A$ (KN)	$H_A$ (KN)
	-50	-118

.Reticolare a maglia quadrangolare

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$s$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3,4	Circolare	42,4	2,5	313	27	0,464	0,89	0,45
AC (2)	4,2	Circolare	42,4	4	483	45	0,785	0,71	0,71
BC (h)	4,5	Circolare	48,3	5	680	90	1,571	0	1
d	3								
l	3								

$S_{IJ}; \sigma_{IJ}$		$N_{IJ}$ (KN)	$N_{IJ}$ (KN)	$\sigma$ (KN/mm <sup>2</sup> )	<	$\sigma_{am}$ (KN/mm <sup>2</sup> )
AB (1)	Equilibrio orizzontale in A	-37		-0,12		0,17
AC (2)	Equilibrio verticale in A	47		0,10		0,17
BC (h)	Equilibrio verticale in C e in B	-66,67	-66,67	-0,10		0,17

$V_I; v_{BC}$	$V_A$ (KN)	$H_A$ (KN)	$v_{BC}$ (mm)	<	$v_{am}$ (mm)
	-50	0	3		30

.III condition semplice senza pretensione

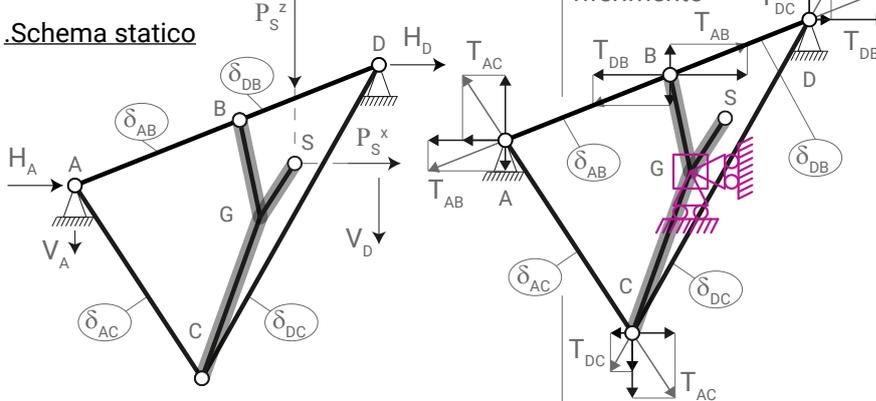
$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3	OSS	44	1186	4	0,07432	0,997	0,074
$\delta_{IJ}; k_{IJ}$	$\delta_{IJ}$ (m)			$k_{IJ}$ (KN/m)		$T_{IJ}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB	0			81439		0		735
$v_{BC}$			$v_{BC}$ (m)	$v_{BC}$ (mm)			<	$v_{am}$ (mm)
			0,223	223	impossibile verificarlo			30
$\Delta l^v_{IJ}; S_{IJ}$	$l^v_{IJ}$ (m)		$\Delta l^v_{IJ}$ (m)	$N_{IJ}$ (KN)	$S_{IJ}$ (KN)	$F_{Rd}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	3,008		0,0083	673	673	1103		735
$V_I$	$V_A$ (KN)		$H_A$ (KN)					
	-50		-672					

.III condition semplice con pretensione

$G_{IJ}$	$l_{IJ}$ (m)	Sezione	$D_{IJ}$ (mm)	$A_{IJ}$ (mm <sup>2</sup> )	$\alpha_{IJ}$ (°)	$\alpha_{IJ}$ (rad)	$\cos\alpha_{IJ}$	$\sin\alpha_{IJ}$
AB (1)	3	FLC	112	8744	0,6	0,009613	1,0000	0,0096
$\delta_{IJ}; k_{IJ}$	$\delta_{IJ}$ (m)		$l_{N-IJ}$ (m)	$k_{IJ}$ (KN/m)		$T_{IJ}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	0,0085		2,992	602127		5118		5421
$v_{BC}$	p	q	$v_{BC}$ (m)	$v_{BC}$ (mm)			<	$v_{am}$ (mm)
	0,051	-0,0015	0,029	29				30
$\Delta l^v_{IJ}; S_{IJ}$	$l^v_{IJ}$ (m)		$\Delta l^v_{IJ}$ (m)	$N_{IJ}$ (KN)	$S_{IJ}$ (KN)	$F_{Rd}$ (KN)	<	$S_{am}$ (KN)
AB (1)	3,0001		0,00014	83	5202	8132		5421
$V_I$	$V_A$ (KN)		$H_A$ (KN)					
	-50		-5201					

SISTEMA MISTO (B) NON SIMMETRICO  
 .fune sopra in Ill-condition con pretensione  
 .fune sotto in Tensegrity con pretensione

.Schema statico



Solo reazioni dovute alla pretensione ( $T_{ij}$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento

.Schema geometrico:

1 Iperstatico  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(4) + (5) - (4 \times 2)$   
 $+ 9 - 8 = +1$

.Schema statico:

Una volta staticamente indeterminato

.Movimenti

3 movimenti indipendenti incogniti

$u_G, v_G, \varphi_{GB}$

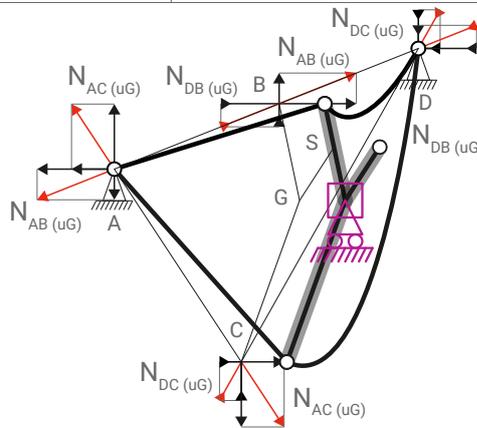
.Metodo equilibrio:

Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari applicati al baricentro del corpo rigido

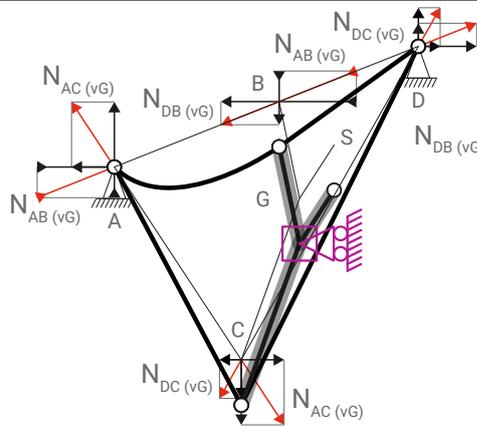
.Particolarità esclusiva del sistema il condition:

$$|T_{AB}| = |T_{DB}|$$

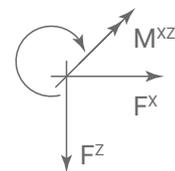
Solo reazioni dovute al movimento ( $u_G$ ), ( $N_{ij}(u_G)$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



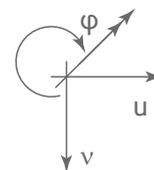
Solo reazioni dovute al movimento ( $v_G$ ), ( $N_{ij}(v_G)$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



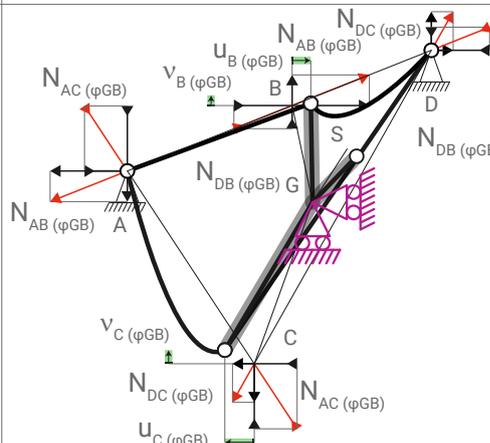
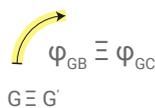
.Covenezione segno forze



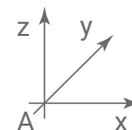
.Covenezione segno movimenti



Solo reazioni dovute al movimento ( $\varphi_{GB}$ ), ( $N_{ij}(\varphi_{GB})$ ), con loro proiezioni sugli assi di riferimento



.Covenezione segno coordinate



Funzione deformata delle funi di (u)

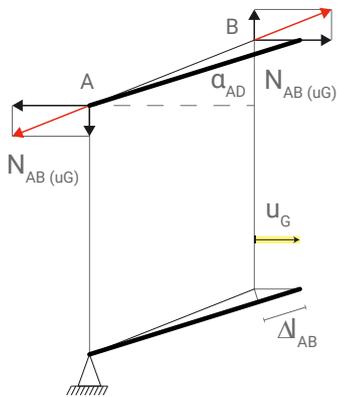
Fune AB

$$\Delta_{AB}^{uG} = \pm \Delta_{AB||}^{uG} \pm \Delta_{AB\perp}^{uG}$$

$$\Delta_{AB}^{uG} = +|u_G| \cos \alpha_{AD} + \left[ + \frac{(|u_G| \operatorname{sen} \alpha_{AD})^2}{2l_{AB}} \right]$$

$$\Delta_{AB}^{uG} = u_G^2 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{AD}}{2l_{AB}} \right) + u_G (+ \cos \alpha_{AD})$$

$$\Delta_{AB}^{uG} = u_G^2 Q_{AB}^{uG} + u_G U_{AB}^{uG}$$



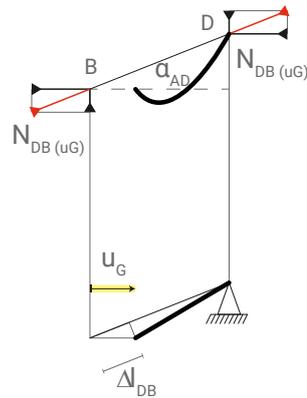
Fune DB

$$\Delta_{DB}^{uG} = \pm \Delta_{DB||}^{uG} \pm \Delta_{DB\perp}^{uG}$$

$$\Delta_{DB}^{uG} = -|u_G| \cos \alpha_{AD} + \left[ + \frac{(|u_G| \operatorname{sen} \alpha_{AD})^2}{2l_{DB}} \right]$$

$$\Delta_{DB}^{uG} = u_G^2 \left( \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha_{AD}}{2l_{DB}} \right) + u_G (- \operatorname{sen} \alpha_{AD})$$

$$\Delta_{DB}^{uG} = u_G^2 Q_{DB}^{uG} + u_G U_{DB}^{uG}$$



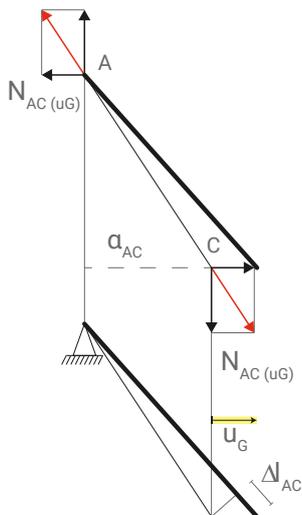
Fune AC

$$\Delta_{AC}^{uG} = (+0 + |u_C|) \cos \alpha_{AC} + (+0 + 0) \operatorname{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta_{AC}^{uG} = +|u_G| \cos \alpha_{AC}$$

$$\Delta_{AC}^{uG} = (+ \cos \alpha_{AC}) u_G$$

$$\Delta_{AC}^{uG} = (+D_{AC}^{uG}) u_G$$



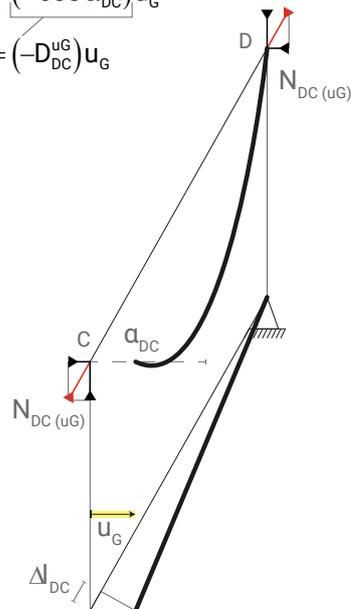
Fune DC

$$\Delta_{DC}^{uG} = (-|u_C| + 0) \cos \alpha_{DC} + (+0 + 0) \operatorname{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta_{DC}^{uG} = -|u_G| \cos \alpha_{DC}$$

$$\Delta_{DC}^{uG} = (- \cos \alpha_{DC}) u_G$$

$$\Delta_{DC}^{uG} = (-D_{DC}^{uG}) u_G$$



.Funzione deformata delle funi di (v)

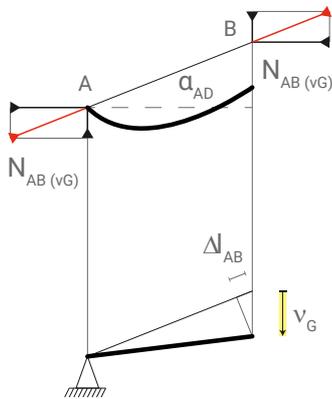
Fune AB

$$\Delta_{AB}^{vG} = \pm \Delta_{AB||}^{vG} \pm \Delta_{AB\perp}^{vG}$$

$$\Delta_{AB}^{vG} = -|v_G| \text{sen} \alpha_{AD} + \left[ + \frac{(v_G \cos \alpha_{AD})^2}{2l_{AB}} \right]$$

$$\Delta_{AB}^{vG} = v_G^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha_{AD}}{2l_{AB}} \right) + v_G (-\text{sen} \alpha_{AD})$$

$$\Delta_{AB}^{vG} = v_G^2 Q_{AB}^{vG} + v_G U_{AB}^{vG}$$



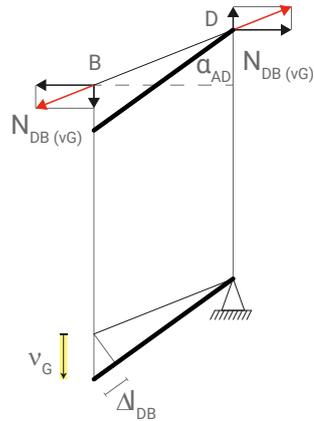
Fune DB

$$\Delta_{DB}^{vG} = \pm \Delta_{DB||}^{vG} \pm \Delta_{DB\perp}^{vG}$$

$$\Delta_{DB}^{vG} = +|v_G| \text{sen} \alpha_{AD} + \left[ + \frac{(|v_G| \cos \alpha_{AD})^2}{2l_{DB}} \right]$$

$$\Delta_{DB}^{vG} = v_G^2 \left( \frac{\cos^2 \alpha_{AD}}{2l_{DB}} \right) + v_G (+\text{sen} \alpha_{AD})$$

$$\Delta_{DB}^{vG} = v_G^2 Q_{DB}^{vG} + v_G U_{DB}^{vG}$$



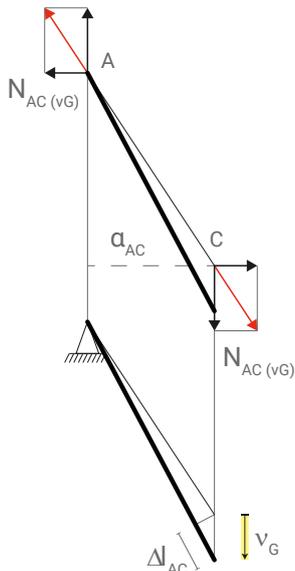
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+0+0) \cos \alpha_{AC} + (+0+|v_C|) \text{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = +|v_G| \text{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+\text{sen} \alpha_{AC}) v_G$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+F_{AC}^{vG}) v_G$$



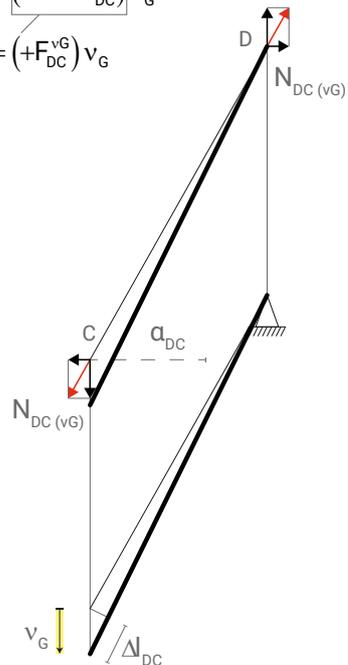
Fune DC

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+0+0) \cos \alpha_{DC} + (+0+|v_C|) \text{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = +|v_G| \text{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+\text{sen} \alpha_{DC}) v_G$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+F_{DC}^{vG}) v_G$$



## Funzione deformata delle funi di $\varphi$

### Funne AB

$$\Delta_{AB}^{\varphi GB} = \pm \Delta_{AB||}^{\varphi GB} \pm \Delta_{AB\perp}^{\varphi GB}$$

$$\Delta_{AB}^{\varphi GB} = \left( +|u_{B(\varphi GB)}| \cos \alpha_{AD} + |v_{B(\varphi GB)}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right) + \left[ + \frac{\left( |u_{B(\varphi GB)}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right)^2}{2l_{AB}} + \frac{\left( |v_{B(\varphi GB)}| \cos \alpha_{AD} \right)^2}{2l_{AB}} \right]$$

$$\Delta_{AB}^{\varphi GB} = \left( +|b_{GB}| \cos \alpha_{AD} + |a_{GB}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right) \varphi_{GB} + \left( \frac{b_{GB}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{AD} + a_{GB}^2 \cos^2 \alpha_{AD}}{2l_{AB}} \right) \varphi_{GB}^2$$

$$\Delta_{AB}^{\varphi GB} = \varphi_{GB}^2 Q_{AB}^{\varphi GB} + \varphi_{GB} U_{AB}^{\varphi GB}$$

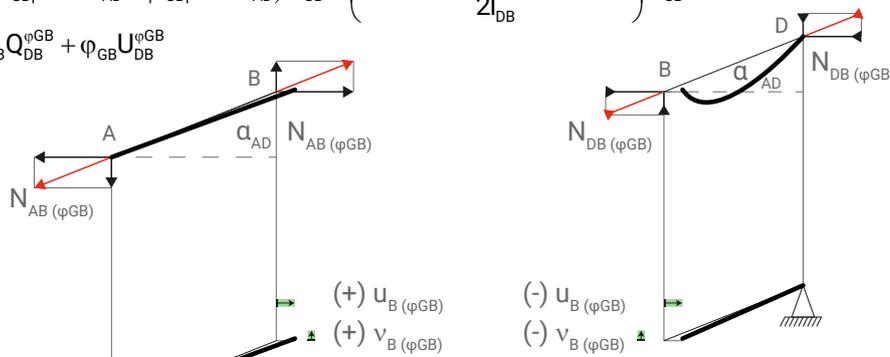
### Funne DB

$$\Delta_{DB}^{\varphi GB} = \pm \Delta_{DB||}^{\varphi GB} \pm \Delta_{DB\perp}^{\varphi GB}$$

$$\Delta_{DB}^{\varphi GB} = \left( -|u_{B(\varphi GB)}| \cos \alpha_{AD} - |v_{B(\varphi GB)}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right) + \left[ + \frac{\left( |u_{B(\varphi GB)}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right)^2}{2l_{DB}} + \frac{\left( |v_{B(\varphi GB)}| \cos \alpha_{AD} \right)^2}{2l_{DB}} \right]$$

$$\Delta_{DB}^{\varphi GB} = \left( -|b_{GB}| \cos \alpha_{AD} - |a_{GB}| \operatorname{sen} \alpha_{AD} \right) \varphi_{GB} + \left( \frac{b_{GB}^2 \operatorname{sen}^2 \alpha_{AD} + a_{GB}^2 \cos^2 \alpha_{AD}}{2l_{DB}} \right) \varphi_{GB}^2$$

$$\Delta_{DB}^{\varphi GB} = \varphi_{GB}^2 Q_{DB}^{\varphi GB} + \varphi_{GB} U_{DB}^{\varphi GB}$$



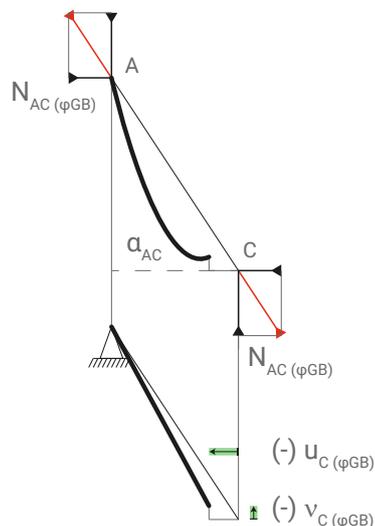
### Funne AC

$$\Delta_{AC}^{\varphi GB} = \left( +0 - |u_{C(\varphi GB)}| \right) \cos \alpha_{AC} + \left( +0 - |v_{C(\varphi GB)}| \right) \operatorname{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta_{AC}^{\varphi GB} = - \left[ (-b_{GC}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{AC} - \left[ (-a_{GC}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta_{AC}^{\varphi GB} = \left[ -|b_{GC}| \cos \alpha_{AC} - |a_{GC}| \operatorname{sen} \alpha_{AC} \right] \varphi_{GB}$$

$$\Delta_{AC}^{\varphi GB} = (-A_{AC}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



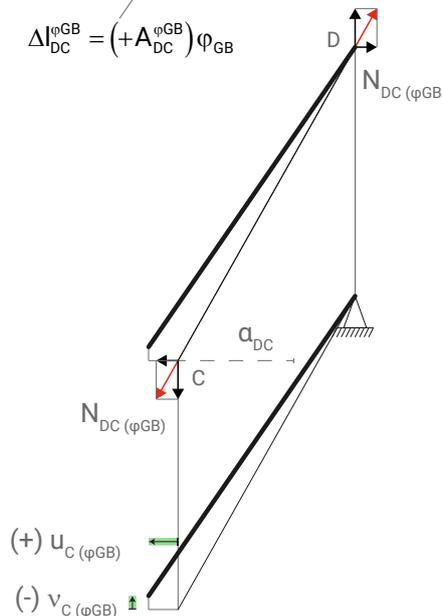
### Funne DC

$$\Delta_{DC}^{\varphi GB} = \left( +0 + |u_{C(\varphi GB)}| \right) \cos \alpha_{DC} + \left( +0 - |v_{C(\varphi GB)}| \right) \operatorname{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta_{DC}^{\varphi GB} = + \left[ (-b_{GC}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{DC} - \left[ (-a_{GC}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta_{DC}^{\varphi GB} = \left[ +|b_{GC}| \cos \alpha_{DC} - |a_{GC}| \operatorname{sen} \alpha_{DC} \right] \varphi_{GB}$$

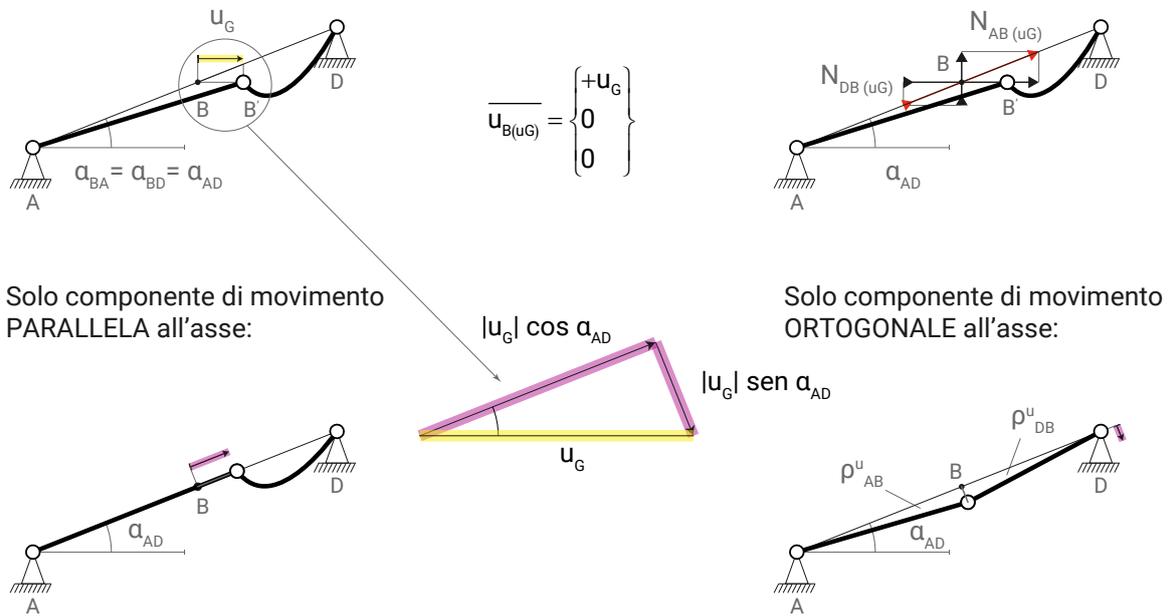
$$\Delta_{DC}^{\varphi GB} = (+A_{DC}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



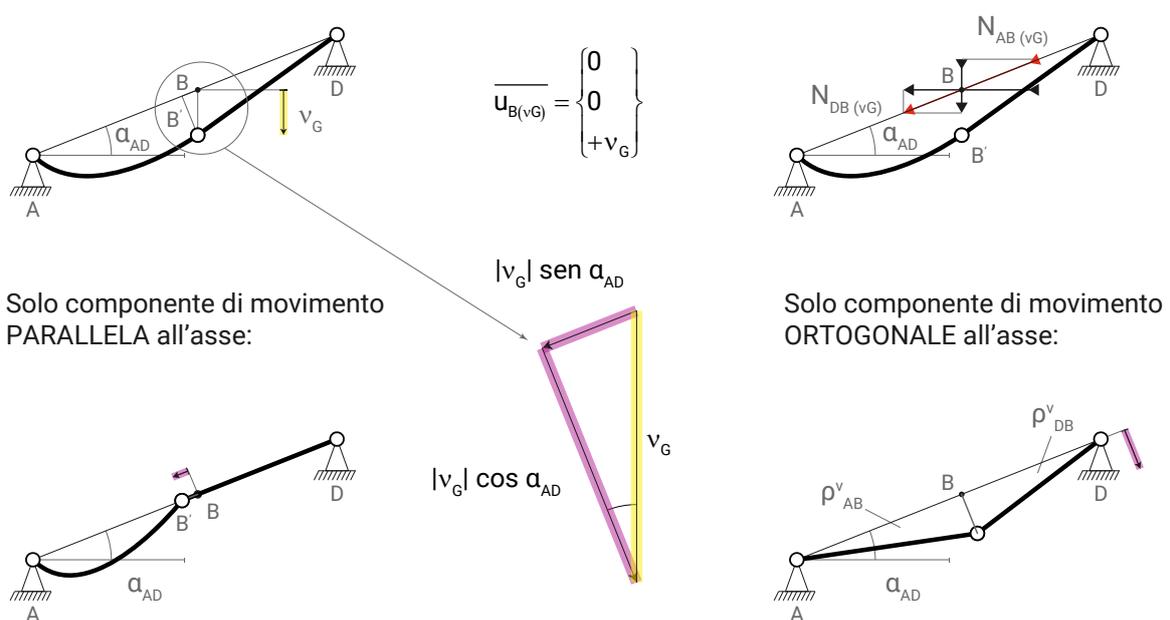
Movimenti del nodo (B)

Il movimento del nodo che collega due funi prive di inclinazione reciproca, diversamente da quanto accade per quelle dotate di essa, non si può valutare fermandosi alla sua scomposizione lungo gli assi del sistema di riferimento assoluto (0, x, y, z), ma deve essere scomposto nelle due componenti di movimento locali, quella parallela e quella ortogonale al suo asse. Pertanto, la prima produce una deformata assiale finita, la seconda invece, genera una Ill-condition. Quando cioè, due funi consecutive hanno la stessa inclinazione, diversa da zero rispetto all'orizzontale, la funzione relativa al movimento del loro nodo comune, le cui variabili risultano comunque gli spostamenti orizzontale e verticale, risulta di secondo grado invece che di primo.

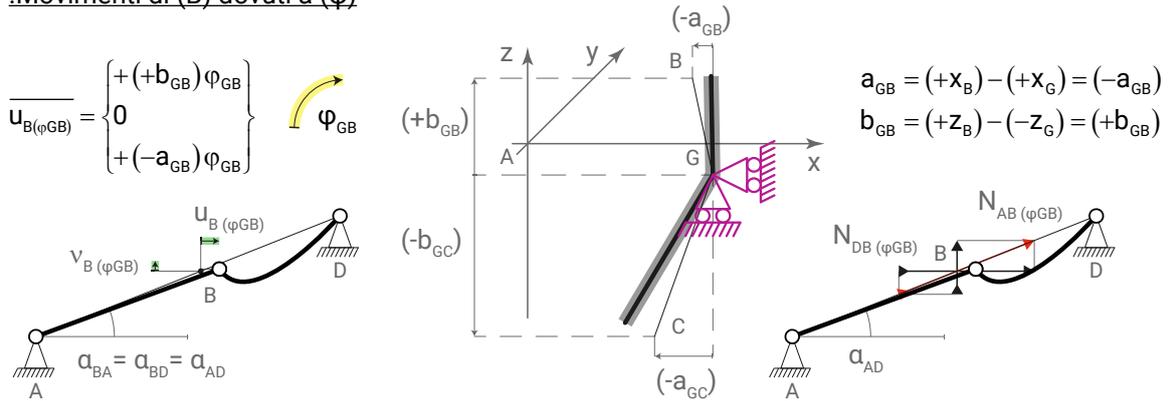
Movimenti di (B) dovuti ad (u)



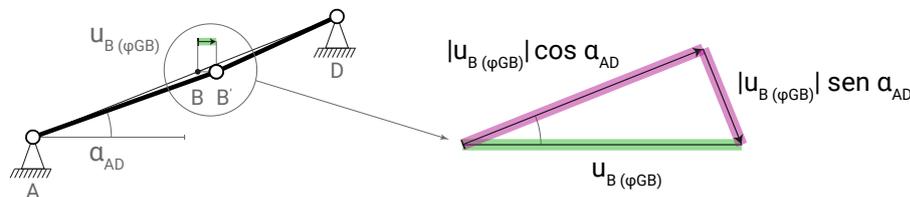
Movimenti di (B) dovuti a (v)



Movimenti di (B) dovuti a ( $\varphi$ )



Solo componente orizzontale



Solo componente di movimento PARALLELA all'asse:

$$u_{B(\varphi_{GB})} \cos \alpha_{AD} \quad |u_{B(\varphi_{GB})}| \cos \alpha_{AD}$$

$$(+b_{GB})\varphi_{GB} \cos \alpha_{AD} \quad |b_{GB}| \cos \alpha_{AD} \varphi_{GB}$$

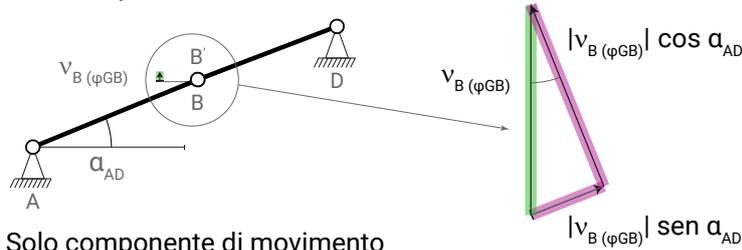
Solo componente di movimento ORTOGONALE all'asse:

$$u_{B(\varphi_{GB})} \text{sen} \alpha_{AD} \quad |u_{B(\varphi_{GB})}| \text{sen} \alpha_{AD}$$

$$(+b_{GB})\varphi_{GB} \text{sen} \alpha_{AD} \quad |b_{GB}| \text{sen} \alpha_{AD} \varphi_{GB}$$



Solo componente verticale



Solo componente di movimento PARALLELA all'asse:

$$v_{B(\varphi_{GB})} \text{sen} \alpha_{AD} \quad |v_{B(\varphi_{GB})}| \text{sen} \alpha_{AD}$$

$$(-a_{GB})\varphi_{GB} \text{sen} \alpha_{AD} \quad |a_{GB}| \text{sen} \alpha_{AD} \varphi_{GB}$$

Solo componente di movimento ORTOGONALE all'asse:

$$v_{B(\varphi_{GB})} \cos \alpha_{AD} \quad |v_{B(\varphi_{GB})}| \cos \alpha_{AD}$$

$$(-a_{GB})\varphi_{GB} \cos \alpha_{AD} \quad |a_{GB}| \cos \alpha_{AD} \varphi_{GB}$$



.Equazione di equilibrio traslatorio orizzontale del pezzo rigido (BGCS)

$$+T_{IJ}(\pm \cos \alpha_{IJ}) + N_{IJ}(\pm \cos \alpha_{IJ}) = +P_S^x$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB} (+\cos \alpha_{AB}) +$$

$$+T_{DB} (-\cos \alpha_{DB}) +$$

$$+T_{AC} (+\cos \alpha_{AC}) +$$

$$+T_{DC} (-\cos \alpha_{DC}) +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$+u_G^2 Q_{AB}^{uG} k_{AB} (+\cos \alpha_{AB}) + \quad +v_G^2 Q_{AB}^{vG} k_{AB} (-\cos \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB}^2 Q_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} (+\cos \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G U_{AB}^{uG} k_{AB} (+\cos \alpha_{AB}) + \quad +v_G U_{AB}^{vG} k_{AB} (-\cos \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB} U_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} (+\cos \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G^2 Q_{DB}^{uG} k_{DB} (+\cos \alpha_{DB}) + \quad +v_G^2 Q_{DB}^{vG} k_{DB} (-\cos \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB}^2 Q_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} (+\cos \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G U_{DB}^{uG} k_{DB} (+\cos \alpha_{DB}) + \quad +v_G U_{DB}^{vG} k_{DB} (-\cos \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB} U_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} (+\cos \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC} (+\cos \alpha_{AC}) + \quad +v_G F_{AC}^{vG} k_{AC} (+\cos \alpha_{AC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC} (-\cos \alpha_{AC}) +$$

$$+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC} (+\cos \alpha_{DC}) + \quad +v_G F_{DC}^{vG} k_{DC} (-\cos \alpha_{DC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC} (-\cos \alpha_{DC}) +$$

(+) Azioni di nodo ( $P_I$ )

$$= +P_S^x$$

.Equazione di equilibrio traslatorio verticale del pezzo rigido (BGCS)

$$+T_{IJ}(\pm \sin \alpha_{IJ}) + N_{IJ}(\pm \sin \alpha_{IJ}) = +P_S^z$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB} (-\sin \alpha_{AB}) +$$

$$+T_{DB} (+\sin \alpha_{DB}) +$$

$$+T_{AC} (+\sin \alpha_{AC}) +$$

$$+T_{DC} (+\sin \alpha_{DC}) +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$+u_G^2 Q_{AB}^{uG} k_{AB} (-\sin \alpha_{AB}) + \quad +v_G^2 Q_{AB}^{vG} k_{AB} (+\sin \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB}^2 Q_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} (-\sin \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G U_{AB}^{uG} k_{AB} (-\sin \alpha_{AB}) + \quad +v_G U_{AB}^{vG} k_{AB} (+\sin \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB} U_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} (-\sin \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G^2 Q_{DB}^{uG} k_{DB} (-\sin \alpha_{DB}) + \quad +v_G^2 Q_{DB}^{vG} k_{DB} (+\sin \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB}^2 Q_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} (-\sin \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G U_{DB}^{uG} k_{DB} (-\sin \alpha_{DB}) + \quad +v_G U_{DB}^{vG} k_{DB} (+\sin \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB} U_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} (-\sin \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC} (+\sin \alpha_{AC}) + \quad +v_G F_{AC}^{vG} k_{AC} (+\sin \alpha_{AC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC} (-\sin \alpha_{AC}) +$$

$$+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC} (-\sin \alpha_{DC}) + \quad +v_G F_{DC}^{vG} k_{DC} (+\sin \alpha_{DC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC} (+\sin \alpha_{DC}) +$$

(+) Azioni di nodo ( $P_I$ )

$$= +P_S^z$$

.Equazione di equilibrio rotatorio del pezzo rigido (BGCS) intorno al nodo (G)

$$+T_{IJ} (\pm \cos \alpha_{IJ} b_{GJ} \pm \text{sen} \alpha_{IJ} a_{GJ}) + N_{IJ} (\pm \cos \alpha_{IJ} b_{GJ} \pm \text{sen} \alpha_{IJ} a_{GJ}) = +P_I^z a_{GI} + P_I^x b_{GI}$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{AC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$+u_G^2 Q_{AB}^{uG} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G^2 Q_{AB}^{vG} k_{AB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GB}^2 Q_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+u_G U_{AB}^{uG} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G U_{AB}^{vG} k_{AB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GB} U_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+u_G^2 Q_{DB}^{uG} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G^2 Q_{DB}^{vG} k_{DB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GB}^2 Q_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+u_G U_{DB}^{uG} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G U_{DB}^{vG} k_{DB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GB} U_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G F_{AC}^{vG} k_{AC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+v_G F_{DC}^{vG} k_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

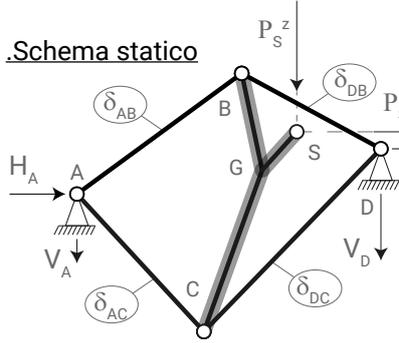
$$+\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

(+) Azioni di nodo ( $P_i$ )

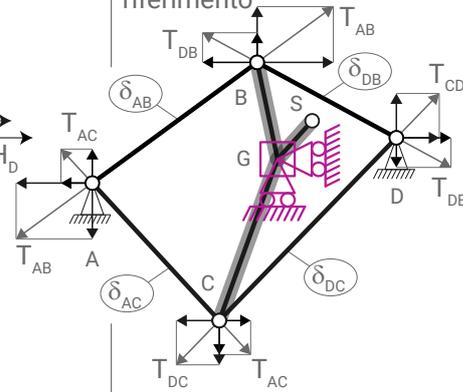
$$= +P_S^z a_{GS} + P_S^x b_{GS}$$

TENSEGRITY PURO NON SIMMETRICO

Schema statico



Solo reazioni dovute alla pretensione ( $T_{IJ}$ ), con loro proiezioni sugli gli assi di riferimento



Schema geometrico:

1 Iperstatico  
 $g_v + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(4) + (5) - (4 \times 2)$   
 $+ 9 - 8 = +1$

Schema statico:

Una volta staticamente indeterminato

Movimenti:

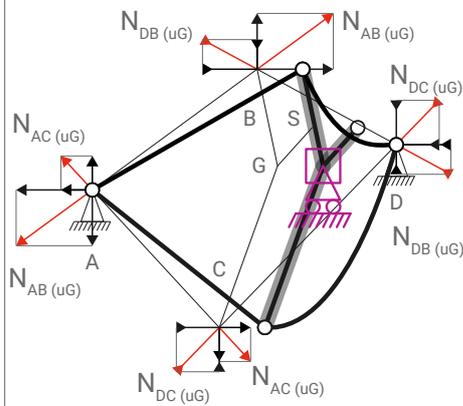
3 movimenti indipendenti incogniti

$u_G, v_G, \varphi_{GB}$

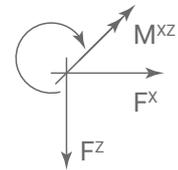
Metodo equilibrio:

Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari applicati al baricentro del corpo rigido

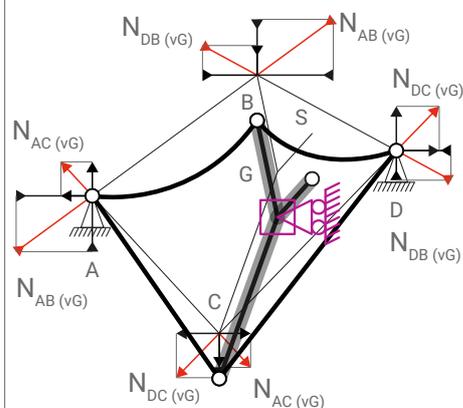
Solo reazioni dovute al movimento ( $u_G$ ), ( $N_{IJ(uG)}$ ), con loro proiezioni sugli gli assi di riferimento



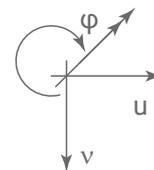
Convenzione segno forze



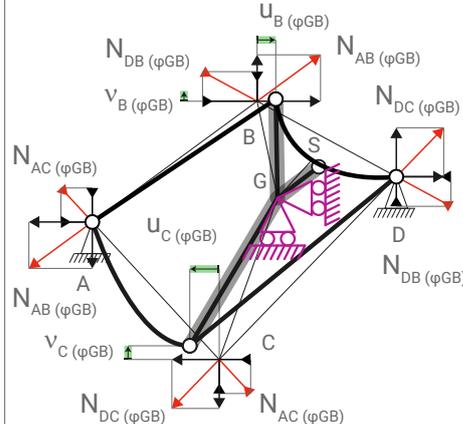
Solo reazioni dovute al movimento ( $v_G$ ), ( $N_{IJ(vG)}$ ), con loro proiezioni sugli gli assi di riferimento



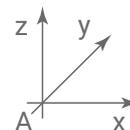
Convenzione segno movimenti



Solo reazioni dovute al movimento ( $\varphi_{GB}$ ), ( $N_{IJ(\varphi_{GB})}$ ), con loro proiezioni sugli gli assi di riferimento



Convenzione segno coordinate



.Funzione deformata delle funi di (u)

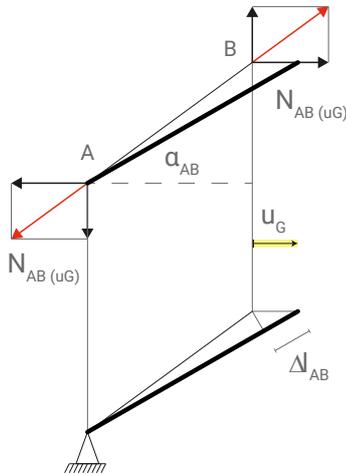
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{u_G} = (+0 + |u_B|) \cos \alpha_{AB} + (+0 + 0) \sin \alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{u_G} = +|u_G| \cos \alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{u_G} = (+\cos \alpha_{AB}) u_G$$

$$\Delta l_{AB}^{u_G} = (+D_{AB}^{u_G}) u_G$$



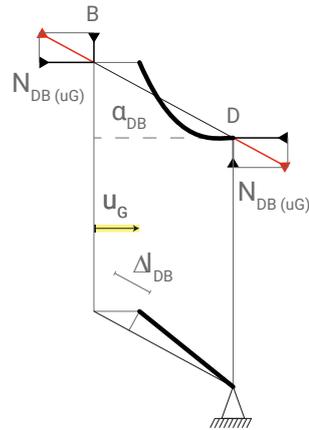
Fune DB

$$\Delta l_{DB}^{u_G} = (-|u_B| + 0) \cos \alpha_{DB} + (+0 + 0) \sin \alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{u_G} = -|u_G| \cos \alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{u_G} = (-\cos \alpha_{DB}) u_G$$

$$\Delta l_{DB}^{u_G} = (-D_{DB}^{u_G}) u_G$$



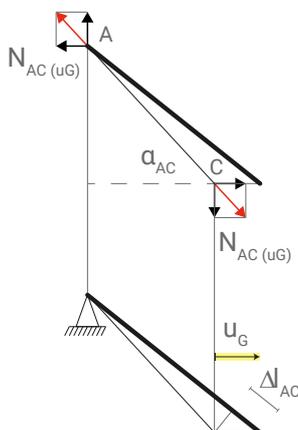
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{u_G} = (+0 + |u_C|) \cos \alpha_{AC} + (+0 + 0) \sin \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{u_G} = +|u_G| \cos \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{u_G} = (+\cos \alpha_{AC}) u_G$$

$$\Delta l_{AC}^{u_G} = (+D_{AC}^{u_G}) u_G$$



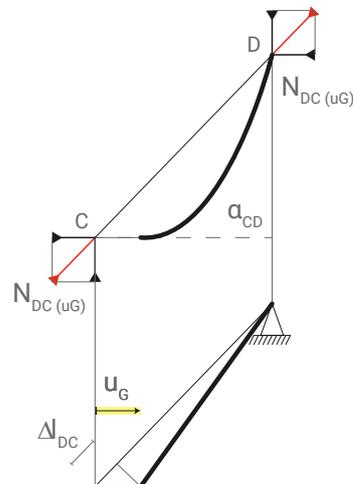
Fune DC

$$\Delta l_{DC}^{u_G} = (-|u_C| + 0) \cos \alpha_{DC} + (+0 + 0) \sin \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{u_G} = -|u_G| \cos \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{u_G} = (-\cos \alpha_{DC}) u_G$$

$$\Delta l_{DC}^{u_G} = (-D_{DC}^{u_G}) u_G$$



.Funzione deformata delle funi di (v)

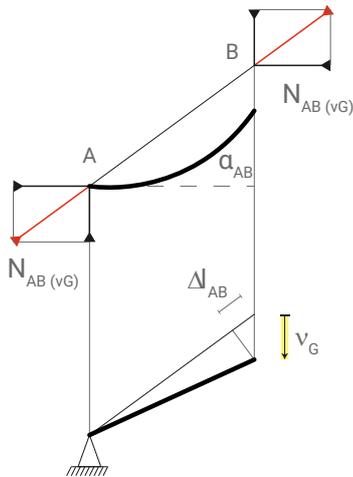
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AB} + (+0-|v_B|)\text{sen}\alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = -|v_G|\text{sen}\alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (-\text{sen}\alpha_{AB})v_G$$

$$\Delta l_{AB}^{vG} = (-F_{AB}^{vG})v_G$$



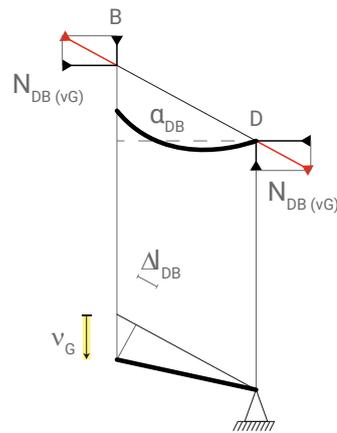
Fune DB

$$\Delta l_{DB}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{DB} + (-|v_B|+0)\text{sen}\alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{vG} = -|v_G|\text{sen}\alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{vG} = (-\text{sen}\alpha_{DB})v_G$$

$$\Delta l_{DB}^{vG} = (-F_{DB}^{vG})v_G$$



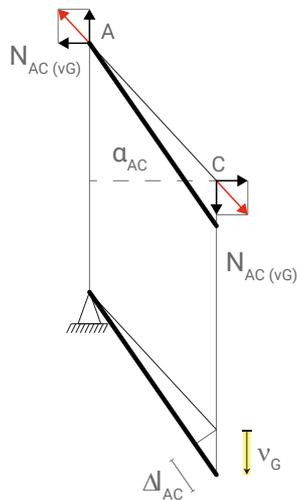
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{AC} + (+0+|v_C|)\text{sen}\alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = +|v_G|\text{sen}\alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+\text{sen}\alpha_{AC})v_G$$

$$\Delta l_{AC}^{vG} = (+F_{AC}^{vG})v_G$$



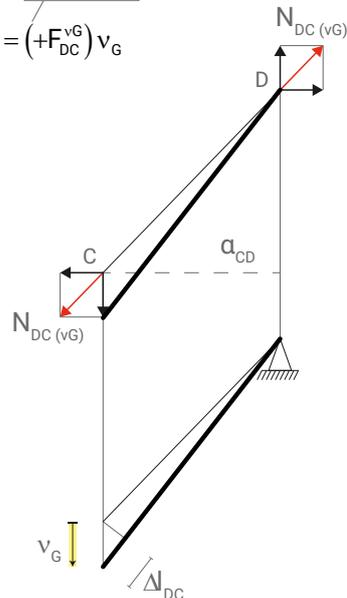
Fune DC

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+0+0)\cos\alpha_{DC} + (+|v_C|+0)\text{sen}\alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = +|v_G|\text{sen}\alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+\text{sen}\alpha_{DC})v_G$$

$$\Delta l_{DC}^{vG} = (+F_{DC}^{vG})v_G$$



Funzione deformata delle funi di  $\varphi$

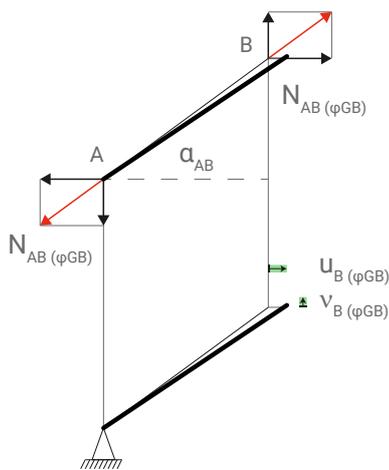
Fune AB

$$\Delta l_{AB}^{\varphi GB} = (+0 + |u_B|) \cos \alpha_{AB} + (+0 + |v_B|) \operatorname{sen} \alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{\varphi GB} = + \left[ (+b_{GB}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{AB} + \left[ (-a_{GB}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{AB}$$

$$\Delta l_{AB}^{\varphi GB} = \left[ + |b_{GB}| \cos \alpha_{AB} + |a_{GB}| \operatorname{sen} \alpha_{AB} \right] \varphi_{GB}$$

$$\Delta l_{AB}^{\varphi GB} = (+A_{AB}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



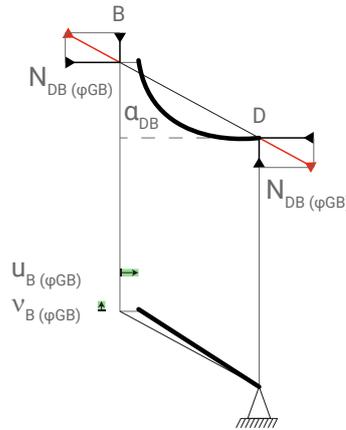
Fune DB

$$\Delta l_{DB}^{\varphi GB} = (-|u_B| + 0) \cos \alpha_{DB} + (+|v_B| + 0) \operatorname{sen} \alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{\varphi GB} = - \left[ (+b_{GB}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{DB} + \left[ (-a_{GB}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{DB}$$

$$\Delta l_{DB}^{\varphi GB} = \left[ - |b_{GB}| \cos \alpha_{DB} + |a_{GB}| \operatorname{sen} \alpha_{DB} \right] \varphi_{GB}$$

$$\Delta l_{DB}^{\varphi GB} = (-A_{DB}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



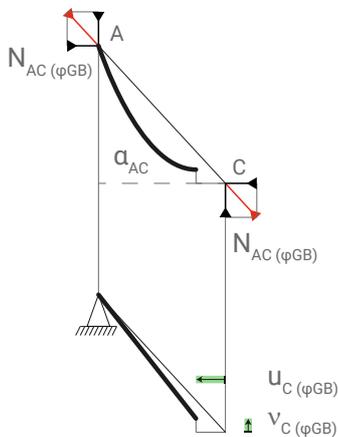
Fune AC

$$\Delta l_{AC}^{\varphi GB} = (+0 - |u_C|) \cos \alpha_{AC} + (+0 - |v_C|) \operatorname{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{\varphi GB} = - \left[ (-b_{GC}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{AC} - \left[ (-a_{GC}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{AC}$$

$$\Delta l_{AC}^{\varphi GB} = \left[ - |b_{GC}| \cos \alpha_{AC} - |a_{GC}| \operatorname{sen} \alpha_{AC} \right] \varphi_{GB}$$

$$\Delta l_{AC}^{\varphi GB} = (-A_{AC}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



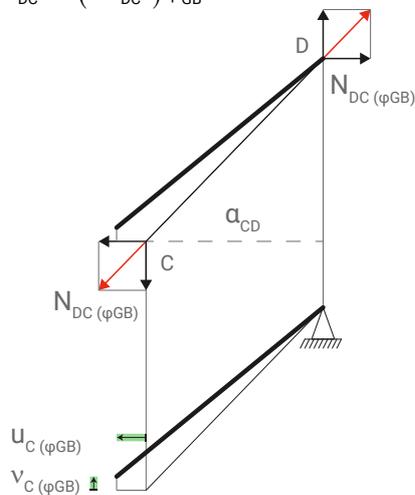
Fune DC

$$\Delta l_{DC}^{\varphi GB} = (+|u_C| + 0) \cos \alpha_{DC} + (-|v_C| + 0) \operatorname{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{\varphi GB} = + \left[ (-b_{GC}) \varphi_{GB} \right] \cos \alpha_{DC} - \left[ (-a_{GC}) \varphi_{GB} \right] \operatorname{sen} \alpha_{DC}$$

$$\Delta l_{DC}^{\varphi GB} = \left[ + |b_{GC}| \cos \alpha_{DC} - |a_{GC}| \operatorname{sen} \alpha_{DC} \right] \varphi_{GB}$$

$$\Delta l_{DC}^{\varphi GB} = (+A_{DC}^{\varphi GB}) \varphi_{GB}$$



.Equazione di equilibrio traslatorio orizzontale del pezzo rigido (BGCS)

$$+T_{IJ}(\pm \cos \alpha_{IJ}) + N_{IJ}(\pm \cos \alpha_{IJ}) = +P_I^x$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB}(\cos \alpha_{AB}) +$$

$$+T_{DB}(-\cos \alpha_{DB}) +$$

$$+T_{AC}(\cos \alpha_{AC}) +$$

$$+T_{DC}(-\cos \alpha_{DC}) +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$+u_G D_{AB}^{uG} k_{AB}(\cos \alpha_{AB}) + \quad +v_G F_{AB}^{vG} k_{AB}(\cos \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AB}^{\varphi GB} k_{AB}(\cos \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G D_{DB}^{uG} k_{DB}(\cos \alpha_{DB}) + \quad +v_G F_{DB}^{vG} k_{DB}(-\cos \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DB}^{\varphi GB} k_{DB}(\cos \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC}(\cos \alpha_{AC}) + \quad +v_G F_{AC}^{vG} k_{AC}(\cos \alpha_{AC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC}(-\cos \alpha_{AC}) +$$

$$+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC}(\cos \alpha_{DC}) + \quad +v_G F_{DC}^{vG} k_{DC}(-\cos \alpha_{DC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC}(-\cos \alpha_{DC}) +$$

(+) Azioni di nodo ( $P_I$ )

$$= +P_S^x$$

.Equazione di equilibrio traslatorio verticale del pezzo rigido (BGCS)

$$+T_{IJ}(\pm \sin \alpha_{IJ}) + N_{IJ}(\pm \sin \alpha_{IJ}) = +P_I^z$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB}(-\sin \alpha_{AB}) +$$

$$+T_{DB}(-\sin \alpha_{DB}) +$$

$$+T_{AC}(\sin \alpha_{AC}) +$$

$$+T_{DC}(\sin \alpha_{DC}) +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$+u_G D_{AB}^{uG} k_{AB}(-\sin \alpha_{AB}) + \quad +v_G F_{AB}^{vG} k_{AB}(\sin \alpha_{AB}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AB}^{\varphi GB} k_{AB}(-\sin \alpha_{AB}) +$$

$$+u_G D_{DB}^{uG} k_{DB}(\sin \alpha_{DB}) + \quad +v_G F_{DB}^{vG} k_{DB}(\sin \alpha_{DB}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DB}^{\varphi GB} k_{DB}(\sin \alpha_{DB}) +$$

$$+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC}(\sin \alpha_{AC}) + \quad +v_G F_{AC}^{vG} k_{AC}(\sin \alpha_{AC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC}(-\sin \alpha_{AC}) +$$

$$+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC}(-\sin \alpha_{DC}) + \quad +v_G F_{DC}^{vG} k_{DC}(\sin \alpha_{DC}) + \quad +\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC}(\sin \alpha_{DC}) +$$

(+) Azioni di nodo ( $P_I$ )

$$= +P_S^z$$

.Equazione di equilibrio rotatorio del pezzo rigido (BGCS) intorno al nodo (G)

$$+T_{IJ} (\pm \cos \alpha_{IJ} b_{GJ} \pm \text{sen} \alpha_{IJ} a_{GJ}) + N_{IJ} (\pm \cos \alpha_{IJ} b_{GJ} \pm \text{sen} \alpha_{IJ} a_{GJ}) = +P_I^z a_{GI} + P_I^x b_{GI}$$

(+) Componenti di reazione reattive alla sola pretensione ( $T_{IJ}$ )

$$+T_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{DB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{AC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

$$+T_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} +$$

(+) Componenti di reazione complessiva ( $N_{IJ}$ )

$$\begin{aligned} &+u_G D_{AB}^{uG} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} + && +v_G F_{AB}^{vG} k_{AB} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} + && +\varphi_{GB} A_{AB}^{\varphi GB} k_{AB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AB} b_{GB} + \\ +\text{sen} \alpha_{AB} a_{GB} \end{pmatrix} + \\ &+u_G D_{DB}^{uG} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} + && +v_G F_{DB}^{vG} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} + && +\varphi_{GB} A_{DB}^{\varphi GB} k_{DB} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DB} b_{GB} + \\ -\text{sen} \alpha_{DB} a_{GB} \end{pmatrix} + \\ &+u_G D_{AC}^{uG} k_{AC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} + && +v_G F_{AC}^{vG} k_{AC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} + && +\varphi_{GB} A_{AC}^{\varphi GB} k_{AC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{AC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{AC} a_{GC} \end{pmatrix} + \\ &+u_G D_{DC}^{uG} k_{DC} \begin{pmatrix} -\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ +\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} + && +v_G F_{DC}^{vG} k_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} + && +\varphi_{GB} A_{DC}^{\varphi GB} k_{DC} \begin{pmatrix} +\cos \alpha_{DC} b_{GC} + \\ -\text{sen} \alpha_{DC} a_{GC} \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

(+) Azioni di nodo ( $P_I$ )

$$= +P_S^z a_{GS} + P_S^x b_{GS}$$



## SISTEMA STRUTTURALE DELLA SPINA DORSALE

## SPINA DORSALE DEI VERTEBRATI

Gli animali vertebrati, sono caratterizzati da un sistema neurologico articolato in due parti separate l'una dall'altra. La prima è costituita da nervo spinale e cervello, fisicamente sostenuti dalla colonna vertebrale, mentre la seconda è la rete neurale distribuita sulla restante parte del corpo. Gli animali invertebrati invece, hanno un unico sistema nervoso, interamente inserito nei visceri ai quali esso è completamente amalgamato, senza alcuna traccia di nervo spinale o di cervello. Questo è il motivo per cui gli invertebrati non possiedono la spina dorsale<sup>N1</sup>. La colonna vertebrale dunque, è morfologicamente simile in tutti coloro che la possiedono, differendo principalmente soltanto nella proporzione tra le componenti osteologiche delle singole vertebre e nel modo in cui esse confinano l'una con l'altra. Inoltre, partendo dall'estremità opposta alla testa ed andando verso di essa, la spina dorsale è composta da vari gruppi di ossa.

Le prime vertebre sono cioè, quelle caudali<sup>N2</sup>, che nell'uomo risultano incastrate tra loro formando un blocco unico, mentre nel quadrupede e nel cetaceo sono assemblate in tensegrity, dovendo essere molto mobili, per garantire l'equilibrio durante la corsa nel primo e la propulsione in acqua nel secondo.

Il successivo gruppo di vertebre poi, è costituito da quelle lombari<sup>N3</sup> da cui si capisce meglio il funzionamento della spina dorsale, poichè si trovano in prossimità di un ipotetico incastro che suddivide la parte superiore del corpo da quella inferiore<sup>F1-F3</sup>. Rispetto alle altre cioè, le vertebre lombari devono essere maggiormente resistenti e mobili allo stesso tempo, quindi sono le più sviluppate e le uniche prive di collegamenti con altre ossa<sup>F4-F10</sup>. Nel cetaceo allora, è maggiore la necessità di mobilità rispetto a quella di rigidità, dovendo esso deambulare tramite ampie oscillazioni della spina dorsale stessa. Il movimento avviene cioè, in ambiente acquatico, dove la gravità è meno percepibile rispetto a quello terrestre. Nel cetaceo quindi, il collegamento tra le vertebre è costituito, in alcuni tratti da una cerniera soltanto ed in altri dal sistema tensegrity privo di essa<sup>N4</sup>, perciò la sua struttura resiste poco torsionalmente<sup>F11-F13</sup>. Nell'uomo e nel quadrupede invece, è maggiore la necessità di rigidità rispetto a quella di mobilità, dovendo entrambi deambulare tramite gli arti in ambiente terrestre, dove la gravità è più percepibile rispetto a quello acquatico. Nei suddetti animali dunque, le vertebre sono collegate da due cerniere affiancate, che consentono alla struttura di resistere anche torsionalmente<sup>F14-F16</sup>.

Il terzo gruppo di vertebre poi, è costituito da quelle toraciche<sup>N5</sup>, che servono a sostenere il costato e tutti gli organi ivi contenuti. Pertanto, rispetto a quelle lombari, tali ossa spinali sono poco mobili, meno resistenti e più vicine tra loro. Infatti, le due costole collegate a ciascuna di esse, fungono da irrigidimento intermedio della spina dorsale, alleggerendone il compito sostenitivo.

N1  
H.A.NICHOLSON, Advanced text book of zoology for the use of schools, 1899, pg. 197-200

N2  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 32-36  
Nell'uomo le vertebre caudali sono catalogate in due sotto blocchi, che in questa trattazione non vengono considerati per semplicità (sacro e coccige)

N3  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 29-30

N4  
[http://www.intensiondesigns.com/model\\_quick\\_reference\\_sheets/intension\\_vertebral\\_masts\\_1.3.pdf](http://www.intensiondesigns.com/model_quick_reference_sheets/intension_vertebral_masts_1.3.pdf)

N5  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 27-28

N6  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 23-26

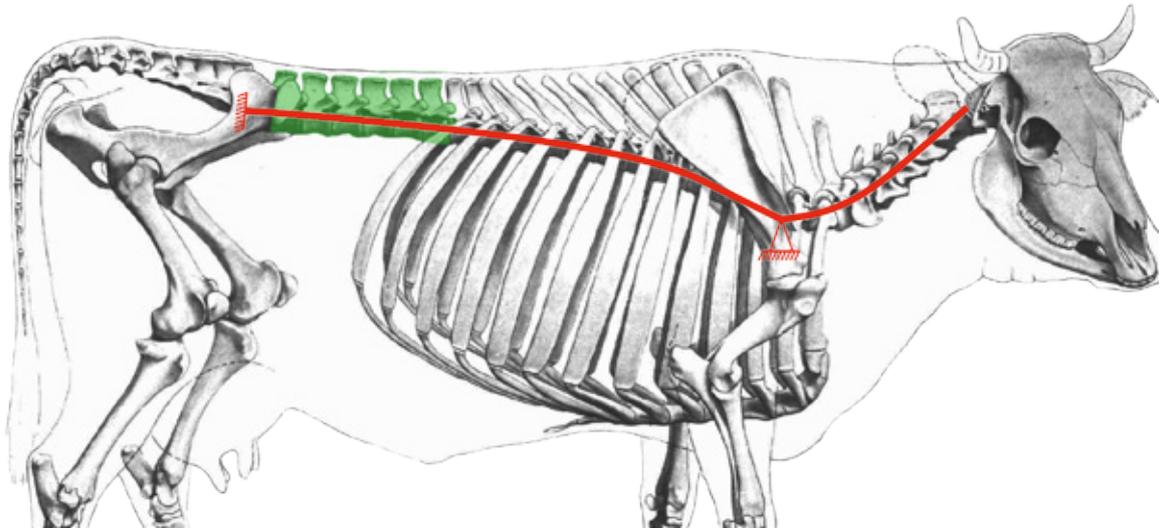
N7  
W.E.FLOWER, Description of  
the skeleton of the chinese  
white dolphin, 1869, pg. 156

Il quarto gruppo di vertebre poi, è costituito da quelle cervicali<sup>N6</sup>, che consentono il movimento della testa e siccome esso avviene diversamente nelle specie animali, tali ossa sono molto differenti in ogni vertebrato. Ad esempio, la maggior parte dei quadrupedi erbivori, deve muovere il capo notevolmente, pertanto la porzione cervicale della loro spina dorsale è molto lunga, mobile e poco resistente, come quella caudale. I predatori terrestri tra cui l'uomo invece, non devono portare la testa continuamente al suolo, perciò il loro collo è più corto, pur essendo articolato come nei quadrupedi. Al contrario, nei cetacei un'ampia mobilità del capo sarebbe poco idrodinamica, pertanto le loro vertebre cervicali<sup>N7</sup> sono molto ravvicinate e quasi fisse, analogamente alle caudali nell'uomo.

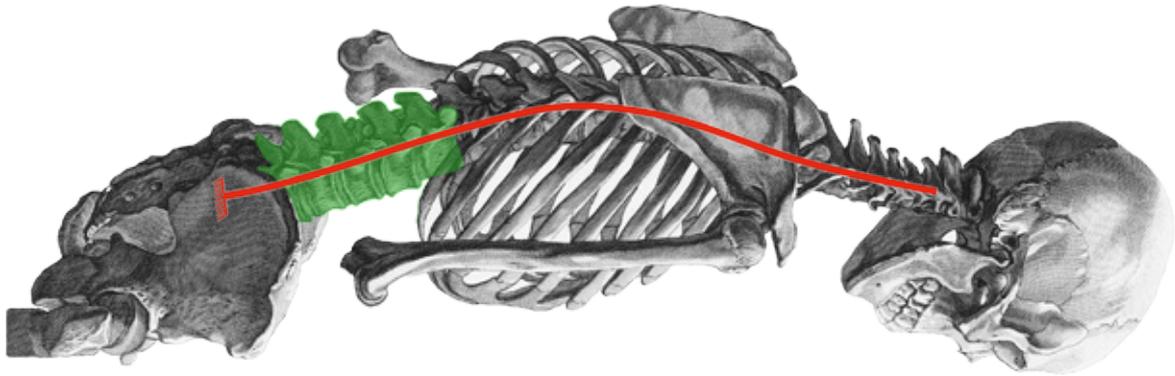
Questa breve analisi scheletrica dei principali gruppi di vertebrati dunque, riassume l'anatomia comparativa delle loro spine dorsali. In particolare cioè, si è cercato di mettere in luce esclusivamente l'ipotetico asse geometrico relativo a ciascuna di esse, l'utilità delle vertebre lombari e i principali vincoli che le collegano. Queste ultime infine, sono state scelte come riferimento per comprendere lo schema geometrico della struttura spinale.

#### Legenda

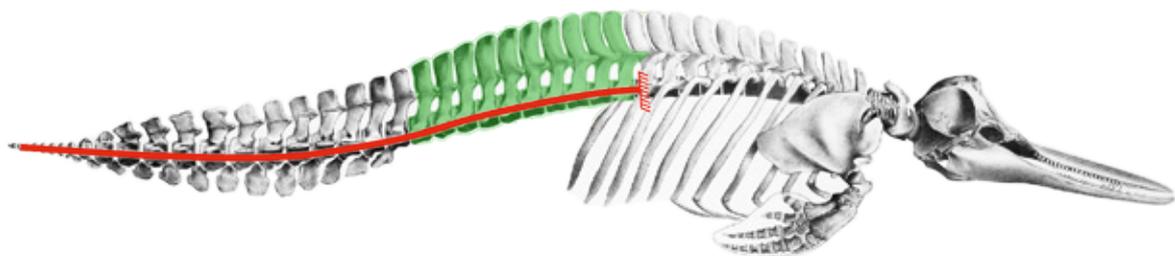
-  Ipotesi asse GEOMETRICO della spina dorsale con vincoli
-  Vertebre LOMBARI
-  Articolazione cartilaginea di tipo CERNIERA bidimensionale
-  Processus articularis SUPERIOR, componente della vertebra volta al sostenimento anteriore dell'articolazione
-  Processus articularis INFERIOR, componente della vertebra volta al sostenimento posteriore dell'articolazione



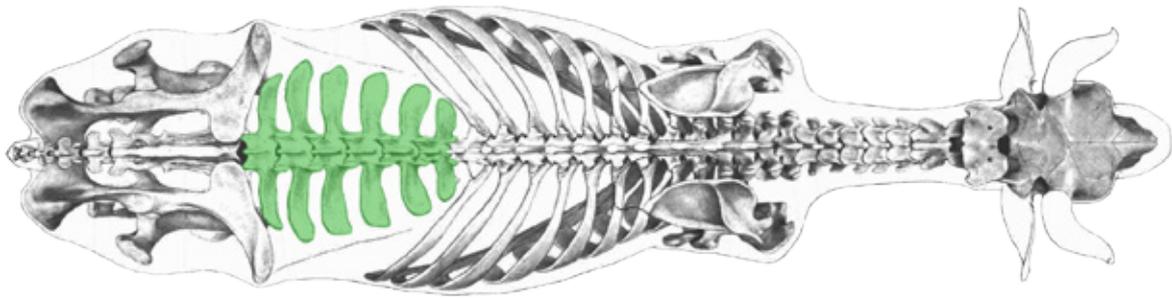
F1: W.ELLENBERGER, H.BAUM, H.DITTRICH, An atlas of animal anatomy for artists, 1956, pl. 3  
Scheletro bovino in prospetto laterale



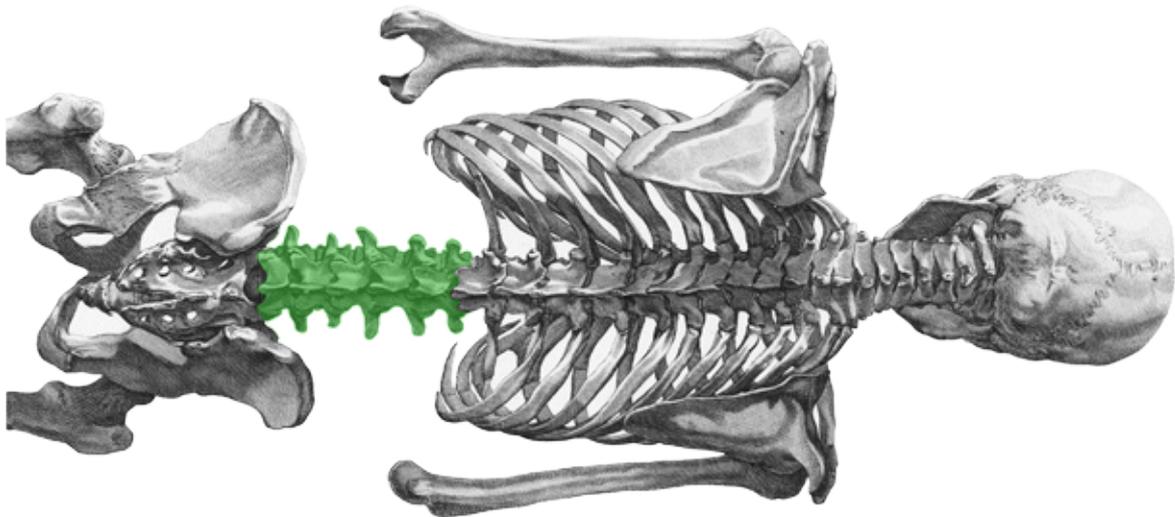
F2: C.J.TREW, Tabulae osteologicae, 1769, tab. B  
Scheletro umano in prospetto laterale



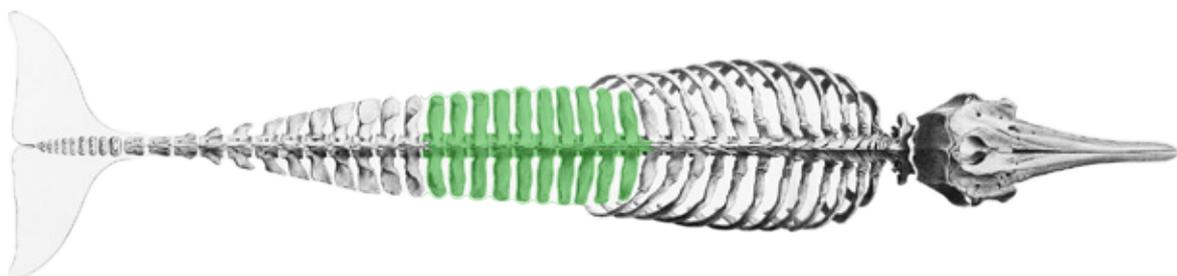
F3: W.E.FLOWER, Description of the skeleton of the chinese white dolphin, 1869, pl. 17  
Scheletro cetaceo in prospetto laterale



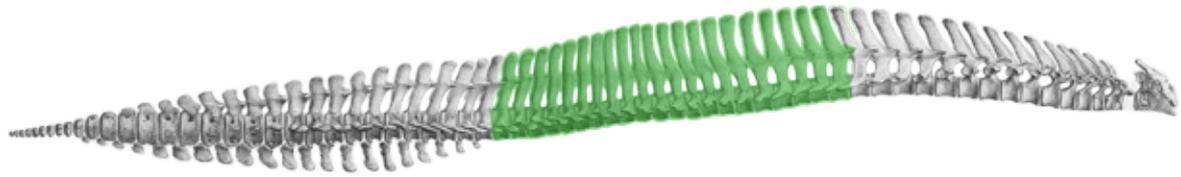
F4: W.ELLENBERGER, H.BAUM, H.DITTRICH, *An atlas of animal anatomy for artists*, 1956, pl. 14  
Scheletro bovino in pianta



F5: C.J.TREW, *Tabulae osteologicae*, 1769, tab. C  
Scheletro umano in pianta



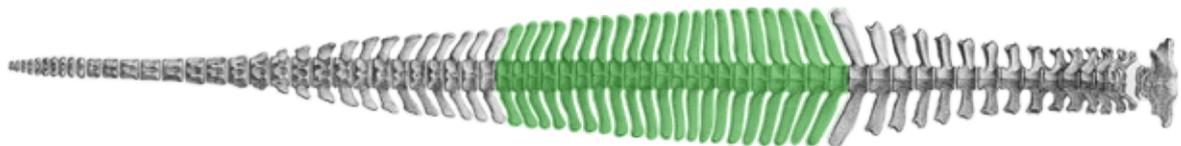
F6: W.E.FLOWER, *Description of the skeleton of the chinese white dolphin*, 1869, pl. 17  
Scheletro cetaceo in pianta



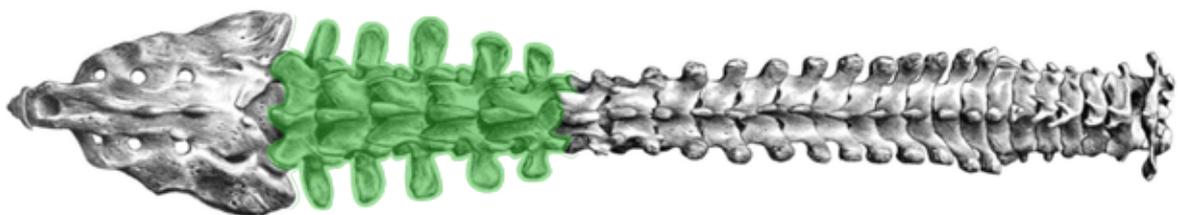
F7: V.BENEDEN, P.GERVAIS, *Ostéographie des cétacés vivant et fossiles*, Atlas, 1879, pl. 40  
Spina dorsale cetacea in prospetto laterale



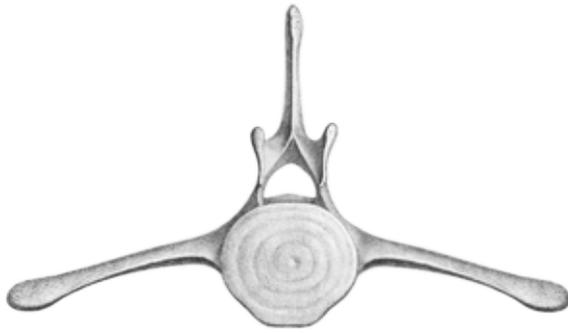
F8: J.SOBOTTA, *Atlas and text book of human anatomy*, Vol.I, 1914, fig.23  
Spina dorsale umana in prospetto laterale



F9: V.BENEDEN, P.GERVAIS, *Ostéographie des cétacés vivant et fossiles*, Atlas, 1879, pl. 40  
Spina dorsale cetacea in pianta



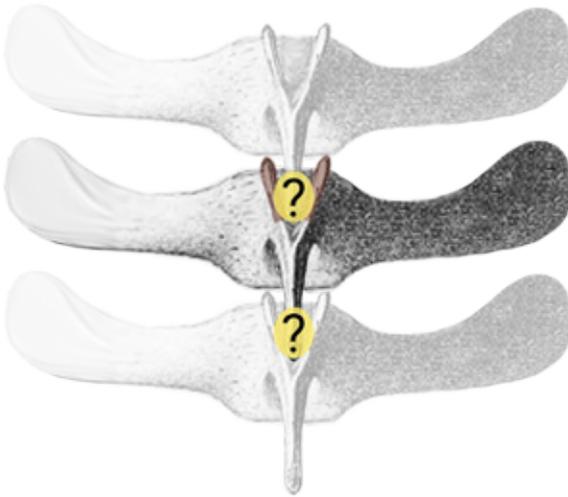
F10: J.SOBOTTA, *Atlas and text book of human anatomy*, Vol.I, 1914, fig.22  
Spina dorsale umana in prospetto laterale



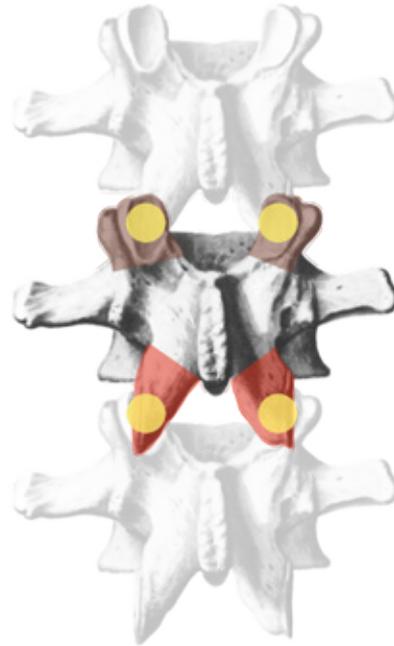
F11: V.BENEDEN, P.GERVAIS, Ostéographie des cétacés vivant et fossiles, Atlas, 1879, pl. 4 e 5  
Quinta vertebra lombare cetacea in sezione



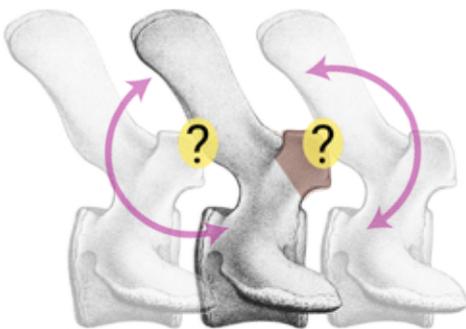
F14: R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 29  
Terza vertebra lombare umana in sezione



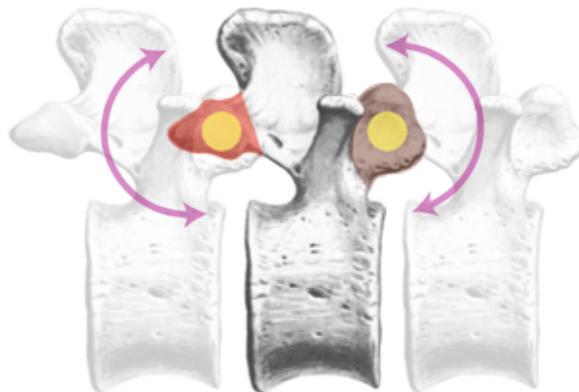
F12: V.BENEDEN, P.GERVAIS, Ostéographie des cétacés vivant et fossiles, Atlas, 1879, pl. 19  
Quinta vertebra lombare cetacea in pianta



F15: R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 30  
Terza vertebra lombare umana in pianta



F13: V.BENEDEN, P.GERVAIS, Ostéographie des cétacés vivant et fossiles, Atlas, 1879, pl. 4 e 5  
Quinta vertebra lombare cetacea in prospetto laterale



F16: R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 30  
Terza vertebra lombare umana in prospetto laterale

## ANATOMIA LOMBARE DELLA SPINA DORSALE UMANA

L'equilibrio statico della colonna vertebrale, avviene grazie ai seguenti elementi strutturali, che per comodità si è scelto di descrivere considerando il sistema in posizione orizzontale.

### .Ossa: componenti osteologiche<sup>N1</sup>

Le ossa della spina dorsale si chiamano vertebre e nella zona lombare, sono composte da dieci elementi accoppiati e sottoposti a tutte le caratteristiche della sollecitazione. I primi di essi allora, collocati poco sopra il baricentro della vertebra, sono il *Pediculus Arcus Vertebrae* destro e quello sinistro. La loro funzione primaria cioè, è costituire l'incastro a cui sono collegati tutti gli altri elementi, mentre quella secondaria, è produrre un'asola per il passaggio del nervo spinale. Sopra l'incastro poi, si trovano quattro porzioni ossee che ospitano due cerniere, adibite alla rotazione reciproca tra vertebre adiacenti, nel piano verticale. Le due anteriori dunque, sono i *Processus Articularis Superior*, mentre quelle posteriori sono i *Processus Articularis Inferior*. Le componenti che si occupano di muovere la vertebra nel piano verticale poi, sono due mensole, quella superiore, *Processus Spinosus* e quella inferiore, *Corpus Vertebrae*. Quest'ultima poi, è la più consistente tra tutte e pertanto sposta il baricentro complessivo verso di se. Per quanto riguarda il movimento nel piano orizzontale invece, ci sono anche in questo caso due mensole, che però sono uguali, il *Processus Costarius* destro e quello sinistro.

### .Legamenti: componenti artrologiche fibrose<sup>N2</sup>

I legamenti che collegano due vertebre lombari accostate sono otto e agiscono in quattro gruppi, di cui due si occupano dell'equilibrio nel piano verticale e due, di quello nel piano orizzontale. Gli elementi suddetti quindi, sono soggetti soltanto a sforzo normale, in maniera analoga a tiranti. Partendo dal primo allora, nella parte superiore della vertebra, si trovano dall'alto verso il basso, il *Ligamentum Supraspinale* e quello *Interspinale*, che collegano due *Processus Spinosus* adiacenti. Sotto di essi poi, si trova il *Ligamentum Flavum*, che serve a collegare due coppie di *Pediculus Arcus Vertebrae* consecutive. Il gruppo tendineo inferiore che si occupa dell'equilibrio nel piano verticale poi, è costituito dal *Ligamentum longitudinale Posterius*, dal *Discus Intervertebralis* e dal *Ligamentum longitudinale Anterius*. Sebbene tutti e tre servano a collegare due *Corpus Vertebrae* adiacenti, il secondo è l'unico legamento in grado di resistere anche a compressione, poichè costituito da due materiali diversi. Nel caso di tensione delle fibre di sotto cioè, entra in gioco soltanto la parte resistente a trazione, *Anulus Fibrosus*, che si tende insieme agli altri due legamenti del gruppo inferiore, senza che le vertebre subiscano una rotazione eccessiva. Quando vengono tese le fibre di sopra invece, occorre contrastare ulteriormente la rotazione

N1  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 21-36

N2  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 175, 183-188

reciproca tra due ossa spinali adiacenti, poichè il gruppo di legamenti tesi superiori, da solo non basta. Entra in gioco quindi, la parte del Discus Intervertebralis resistente a compressione, Nucleus Pulposus, che non è una cerniera, ma un limitatore di movimento, cioè uno smorzatore.

Gli elementi che si occupano dell'equilibrio nel piano orizzontale infine, sono soltanto il Ligamentum Intertraversarium destro e quello sinistro. Ciascuno di essi cioè, connette i due Processus Costarius adiacenti che si trovano dalla sua parte.

#### .Cerniere: componenti artrologiche zigapofiseali<sup>N3</sup>

Gli unici veri vincoli tra ossa lombari, sono le due Articulatio Zygapophysealis, contenute tra i Processus Articularis Superior di una vertebra e i Processus Articularis Inferior di quella successiva. La loro funzione quindi, è permettere la rotazione reciproca tra ossa adiacenti, nel piano verticale e pertanto sono cerniere.

#### .Muscoli: componenti miologiche<sup>N4</sup>

Le funzioni strutturali dei muscoli sono, definire lo schema geometrico insieme ai legamenti e produrre delle autotensioni che lo deformano. Ogni membratura cioè, viene portata da una condizione di equilibrio ad un'altra differente, variando la lunghezza dei suoi muscoli. L'intero sistema miologico poi, è articolato in tre livelli, quello profondo, il più vicino alle pareti ossee, quello intermedio e quello superficiale, il più vicino alla pelle. Si è scelto tuttavia, di prendere in considerazione soltanto il primo, poichè è quello che contribuisce alla formazione dello schema geometrico più semplice, l'isostatico. Per quanto riguarda la colonna vertebrale cioè, i livelli muscolari lontani dall'osso, aumentano il grado di vincolo del sistema, aggiungendo tra ossa collocate a distanza crescente, elementi strutturali soggetti soltanto a trazione. La strategia sostenitiva cioè, è la stessa dei sistemi Tensegrity molto iperstatici, in cui una volta raggiunta l'isostaticità, i tiranti aggiuntivi servono ad irrigidire la struttura, collegando puntoni sempre più distanti tra loro<sup>N5</sup>.

I muscoli lombari di primo livello sono dunque sette, organizzati in coppie, tranne il Musculus Interspinalis, che autonomamente connette due Processus Spinous adiacenti, sovrapponendosi al tendine omonimo. In maniera analoga poi, lavorano il Musculus Intertraversarium destro ed il sinistro, che collegano due Processus Costarius adiacenti. Invece, gli unici muscoli senza componente artrologica corrispondente, sono le due coppie di Musculus Rotatores, Brevis e Longi. Il loro compito pertanto, è unico, in quanto collegano trasversalmente i Processus Costarius di una vertebra, al Processus Spinous delle due successive. Occorre rilevare infine, che le componenti miologiche appena descritte, garantirebbero l'equilibrio, anche in assenza di cerniere. E' proprio grazie alle prime infatti, che la struttura spinale cetacea in alcuni tratti, può essere un Tensegrity puro<sup>N6</sup>.

N3

R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 181, 185-187

N4

J.SOBOTTA, Atlas and text book of human anatomy, Vol.I, 1914, pg. 149-155, fig. 240, 244

R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 277-279

N5

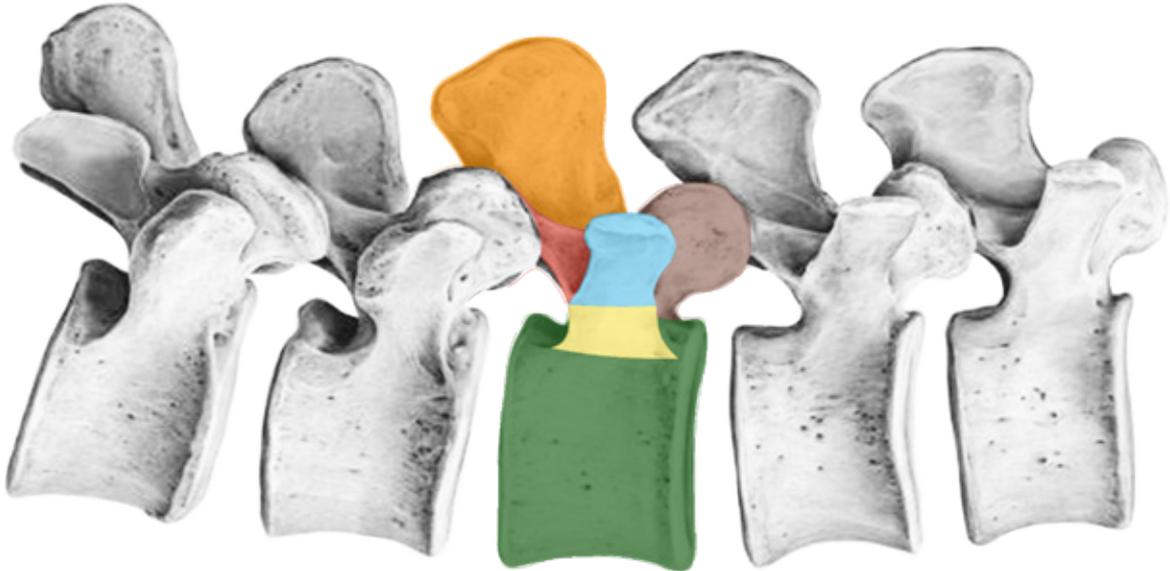
Kuripla Footbridge, Australia Brisbane, 2009, pg. 34

N6

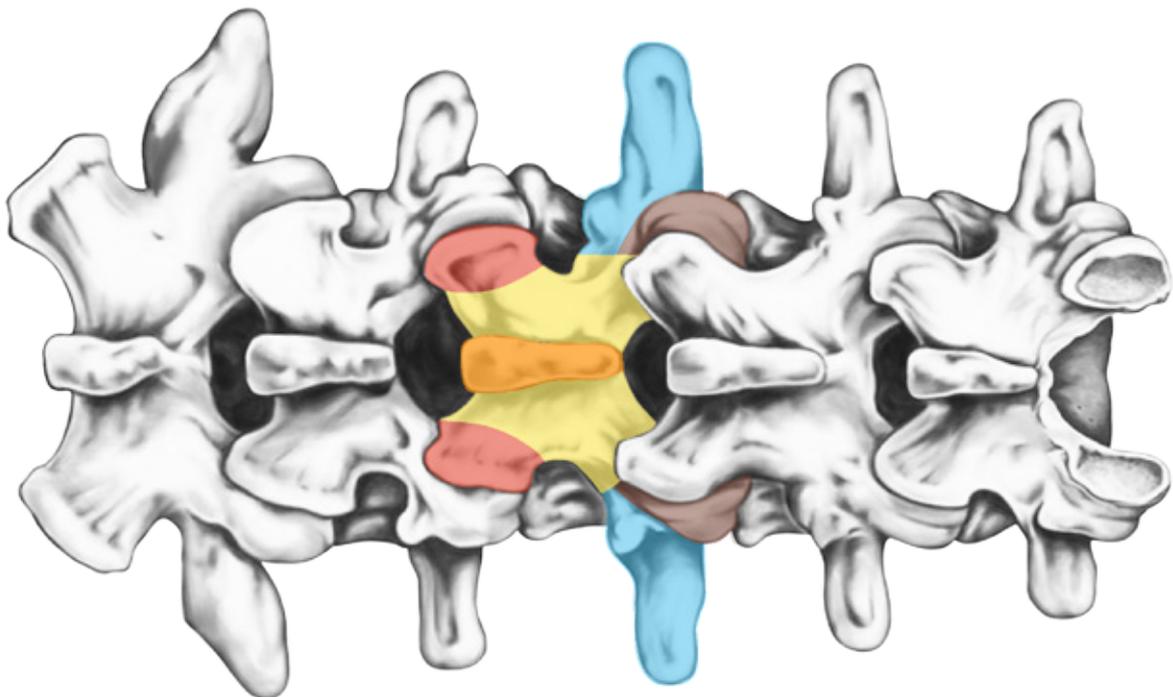
Vedere trattazione a pg.56-59

## OSTEOLOGIA LOMBARE DELLA SPINA DORSALE UMANA

Caratteristiche della sollecitazione presenti: N, V, M, T

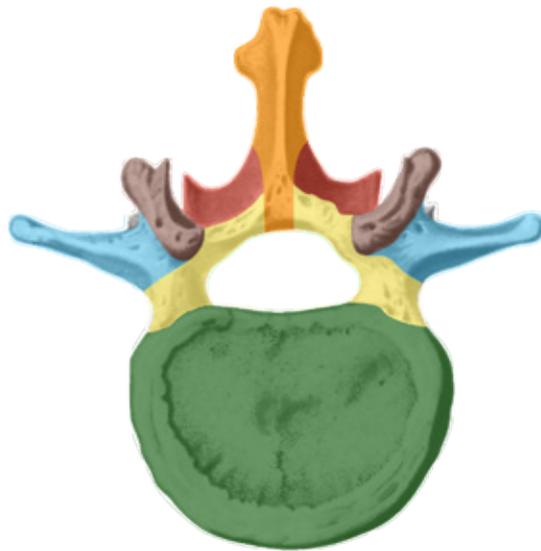


F1: <https://classconnection.s3.amazonaws.com/1699/flashcards/875876/jpg/vertebra3.jpg>  
Componenti osteologiche delle vertebre lombari umane in prospetto laterale



F2: <https://image.shutterstock.com/z/stock-photo-lumbar-spine-structure-vertebral-bones-lumbar-bones-anatomy-of-human-bony-system-human-skeletal-405564520.jpg>  
Componenti osteologiche delle vertebre lombari umane in pianta

F3  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 29  
Componenti osteologiche  
della terza vertebra lombare  
umana in sezione

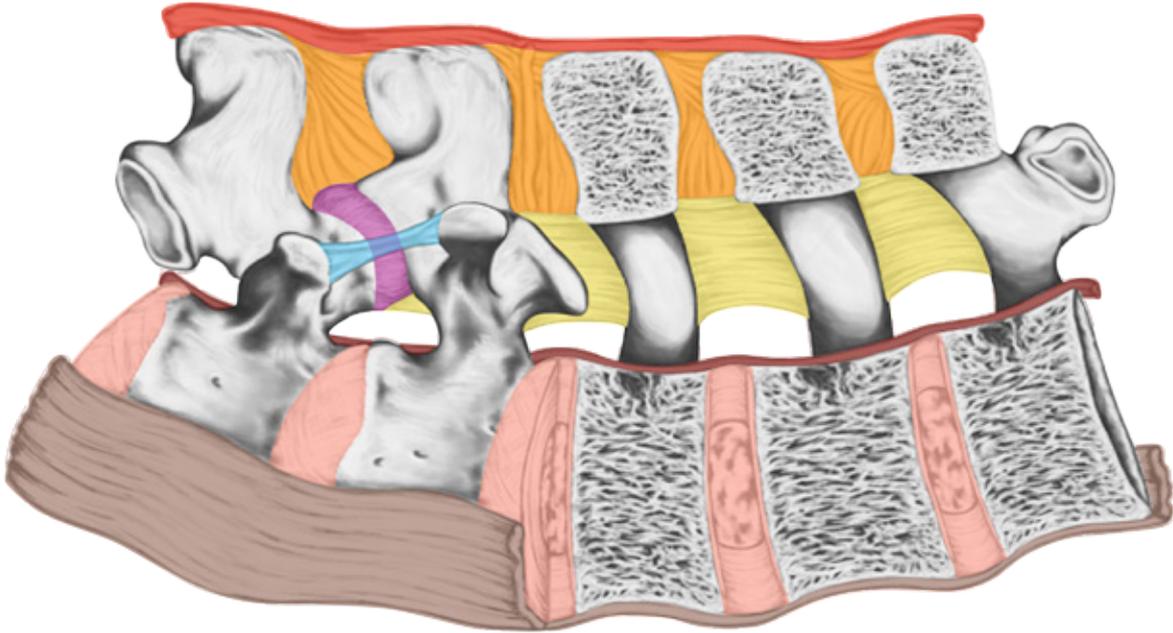


LEGENDA  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 29-30  
Nomenclatura componenti  
osteologiche della vertebra  
lombare

-  Processus SPINOSUS
-  Processus ARTICULARIS INFERIOR
-  Processus ARTICULARIS SUPERIOR
-  Processus COSTARIUS
-  Pediculus ARCUS vertebrae
-  CORPUS vertebrae

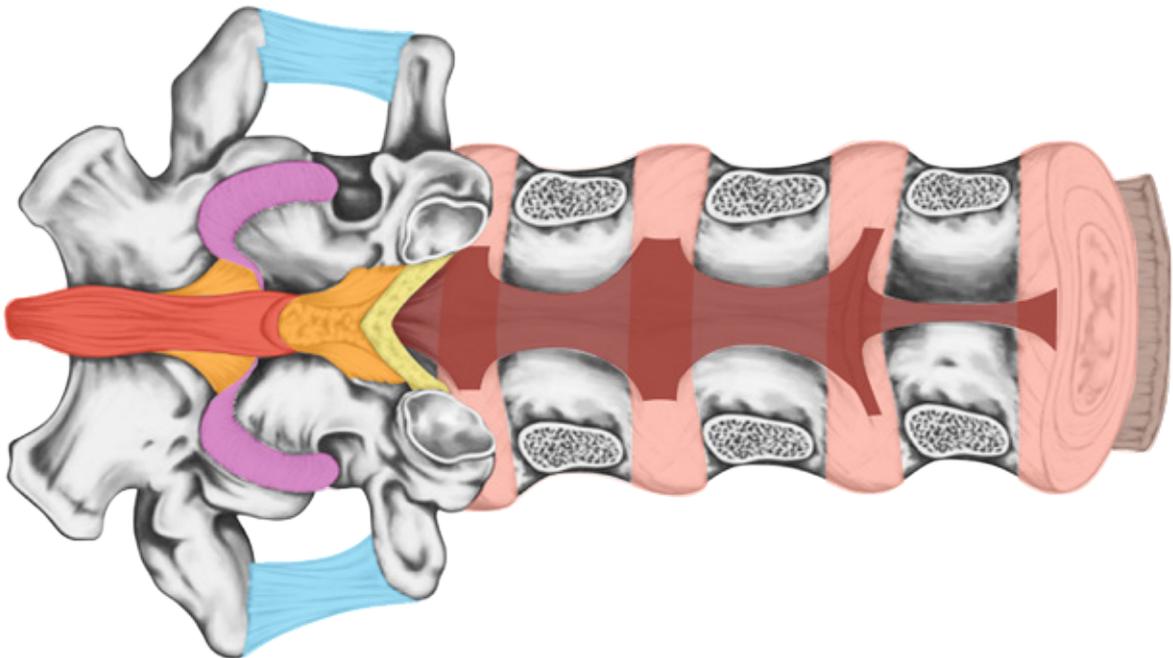
## ARTROLOGIA LOMBARE DELLA SPINA DORSALE UMANA

Caratteristiche della sollecitazione presenti: N+, N-



F1:<https://image.shutterstock.com/z/stock-photo-ligaments-and-lumbar-spine-structure-the-ligaments-surrounding-the-lumbar-spine-posterior-290274404.jpg>

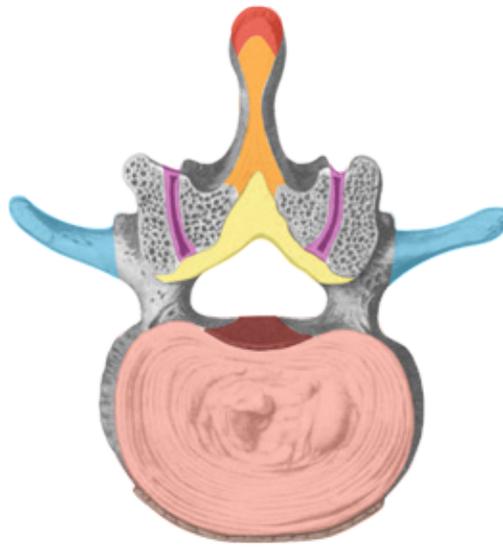
Componenti artrologiche delle vertebre lombari umane in prospetto laterale



F2:<https://image.shutterstock.com/z/stock-photo-ligaments-and-lumbar-spine-structure-the-ligaments-surrounding-the-lumbar-spine-posterior-290274404.jpg>

Componenti artrologiche delle vertebre lombari umane in pianta

F3  
 R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 185  
 Componenti artrologiche della terza vertebra lombare umana in sezione

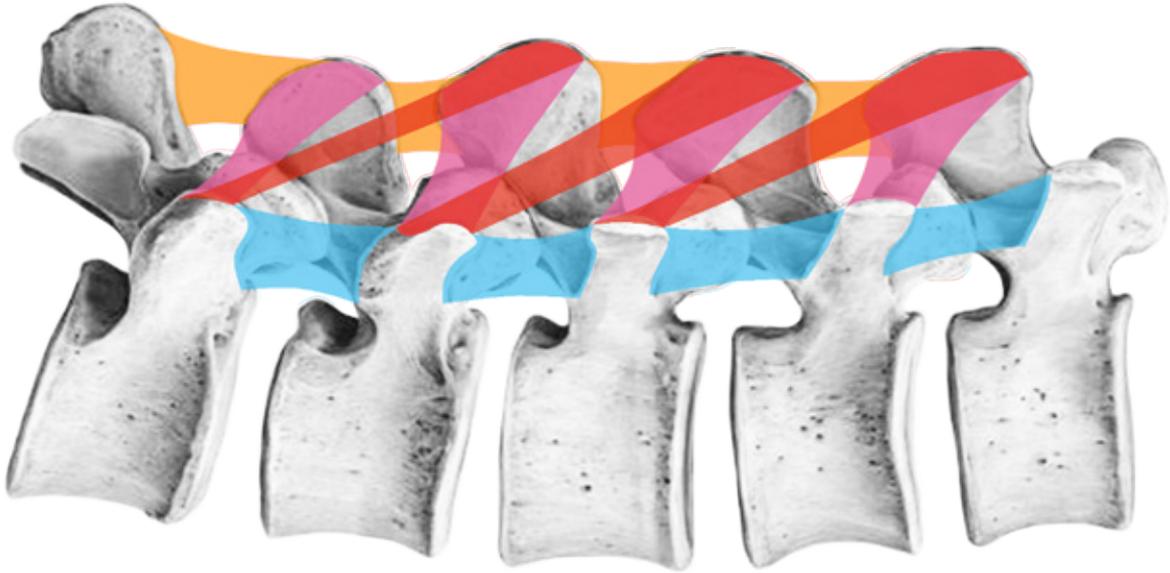


LEGENDA  
 R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 185-186  
 Nomenclatura componenti artrologiche della vertebra lombare

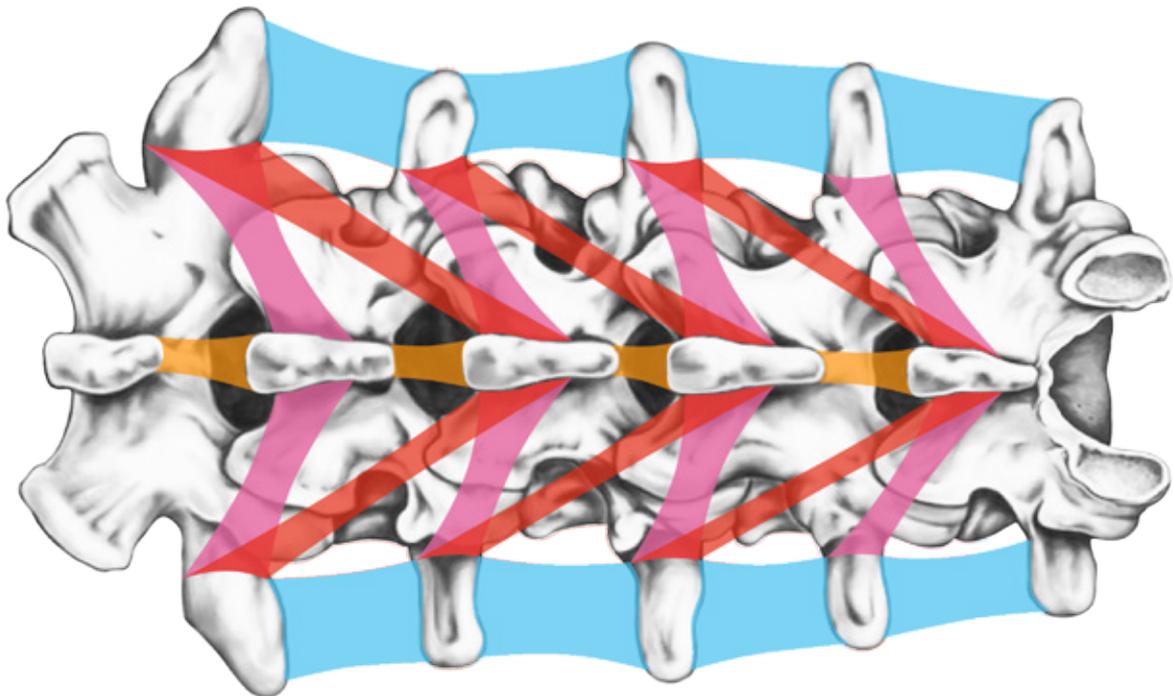
- Ligamentum SUPRASPINALE
- Ligamentum INTERSPINALE
- Ligamentum FLAVUM
- Articulazio ZYGAPOPHYSEALIS
- Ligamentum INTERTRAVERSARIUM
- Ligamentum LONGITUDINALE POSTERIUS
- DISCUS intervertebralis (Anulus fibrosus + Nucleus pulposus)
- Ligamentum LONGITUDINALE ANTERIUS

## MIOLOGIA LOMBARE DELLA SPINA DORSALE UMANA

Caratteristiche della sollecitazione presenti: N+

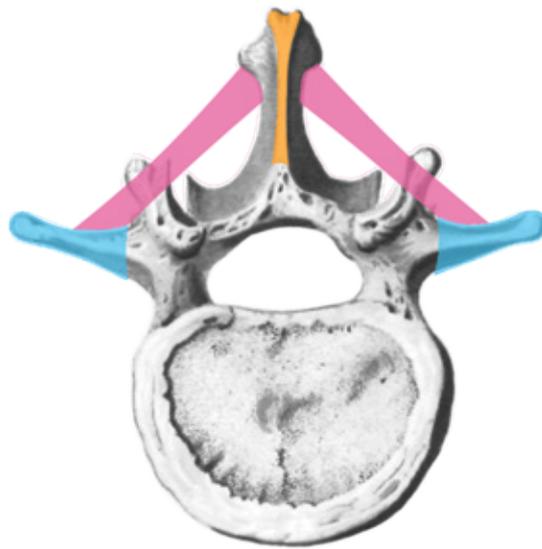


F1: <https://classconnection.s3.amazonaws.com/1699/flashcards/875876/jpg/vertebra3.jpg>  
Componenti miologiche delle vertebre lombari umane in prospettiva laterale



F2: <https://image.shutterstock.com/z/stock-photo-lumbar-spine-structure-vertebral-bones-lumbar-bones-anatomy-of-human-bony-system-human-skeletal-405564520.jpg>  
Componenti miologiche delle vertebre lombari umane in pianta

F3  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 29  
Componenti miologiche  
della terza vertebra lombare  
umana in sezione



LEGENDA  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of  
human anatomy, Vol.I, 1988,  
pg. 277-278  
J.SOBOTTA, Atlas and text  
book of human anatomy,  
Vol.I, 1914, pg.154  
Nomenclatura componenti  
miologiche della vertebra  
lombare

-  Musculus INTERSPINALES
-  Musculus ROTATOIRES LONGI
-  Musculus ROTATOIRES BREVIS
-  Musculus INTERTRAVERSARIUM

## IPOSTESI ALLA DEFINIZIONE DELLO SCHEMA GEOMETRICO

Dopo aver compreso la funzione di ogni componente portante della spina dorsale mammifera, è possibile ipotizzarne una ingegnerizzazione. Tra tutti i sistemi esistenti allora, si è scelto il più semplice, cioè quello costituito da elementi con schema geometrico monodimensionale<sup>N1</sup>. Quindi, anche se le componenti strutturali della colonna vertebrale sono volumetriche, quest'ultima può essere sintetizzata esclusivamente tramite travi dritte o curve<sup>N2</sup>, puntoni e tiranti, vincolati con incastri e cerniere.

### .Elementi con rigidità flessionale: aste

Le porzioni volumetriche della vertebra con una dimensione prevalente rispetto alle altre e vincolate alla restante parte dell'osso in un punto solo, sono state tradotte in mensole incastrate; quelle estese superficialmente invece, in maglie di aste opportunamente vincolate con cerniere o incastri<sup>F3-F6</sup>. In particolare cioè, il telaio in cui la vertebra può essere schematizzata, sembra costituito da una maglia triangolare collocata al centro dell'osso e da mensole incastrate ai suoi vertici. All'estremità opposta all'incastro poi, alcune di esse sono libere, altre invece collegate tra loro con cerniere. Queste ultime pertanto, si comportano da struttura reticolare nel piano che le contiene e da mensole, in quello ortogonale ad esso<sup>F1, F2</sup>.

### .Elementi senza rigidità flessionale: funi

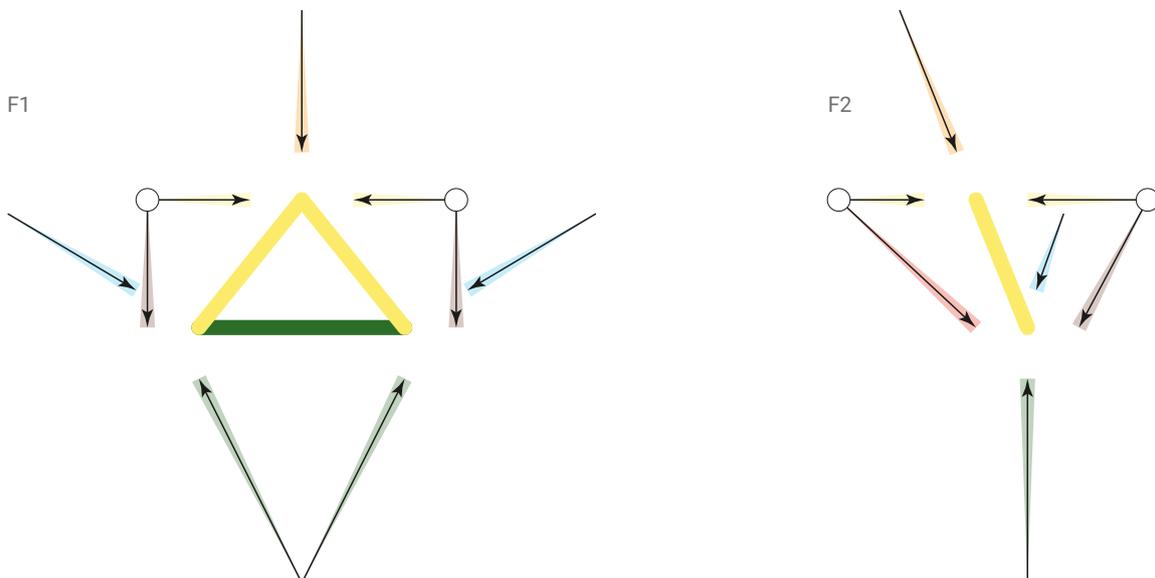
I tendini e i muscoli intervertebrali sono elementi portanti volumetrici e superficiali, ciascuno dei quali lavora da solo o in aggregazione ad altri. Si è scelto quindi di tradurre l'intero sistema artro-miologico in funi singole corrispondenti, in alcuni casi ad un elemento unico e in altri, ad un gruppo di essi.

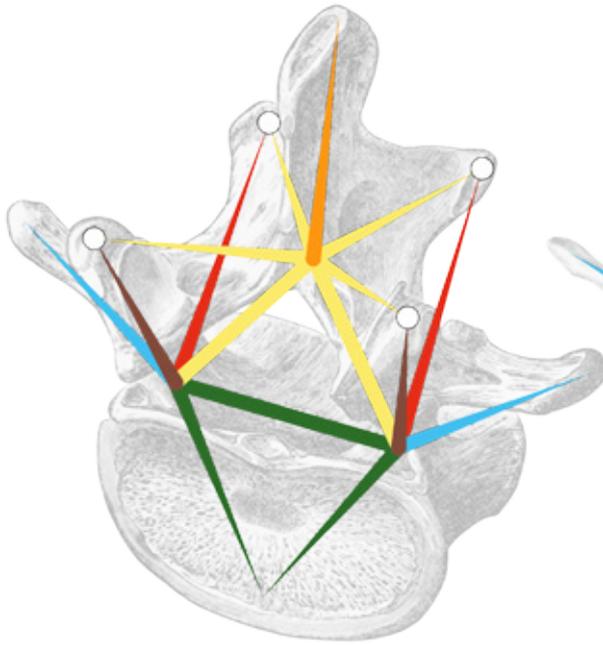
N1  
O.BELLUZZI, Scienza delle costruzioni, Vol.2, Zanichelli, 1974, pg.648

Il procedimento adottato per individuare uno schema geometrico di elementi strutturali all'interno della spina dorsale, è analogo al metodo di Morsch, usato per gestire il problema del taglio negli elementi strutturali di C.A. Al loro interno cioè, si cerca la struttura reticolare a nodi incernierati in cui, le barre d'acciaio vengono considerate aste tese e le porzioni di cls. disposte tra esse, bielle compresse.

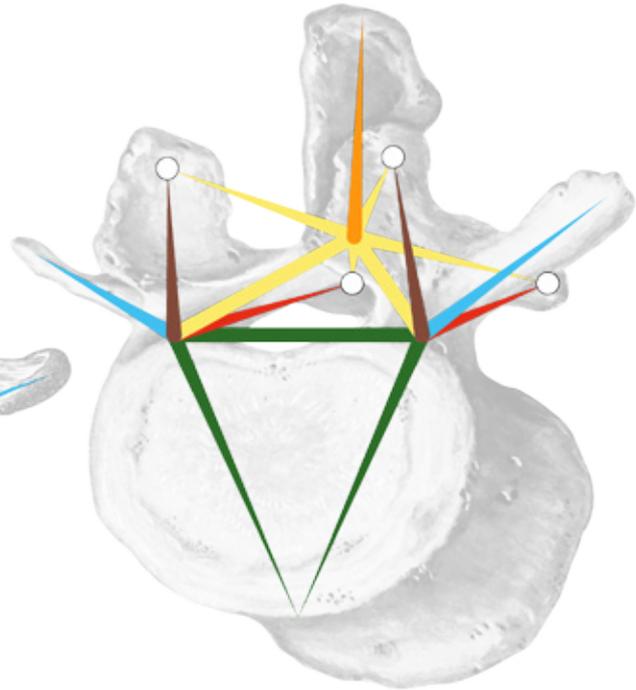
N2  
La porzione vertebrale 'Arcus vertebrae' (pg. 64-65), può essere tradotta in una trave tozza, curva, pressoinflessa e non in un arco. Tuttavia, in questa fase iniziale di definizione della maglia, si considera dritta. Tale semplificazione però, non sarebbe lecita nel caso di arco effettivo.

F1-F2  
Ipotesi di schema geometrico esploso, relativo alla vertebra lombare umana, in prospetto frontale e laterale.

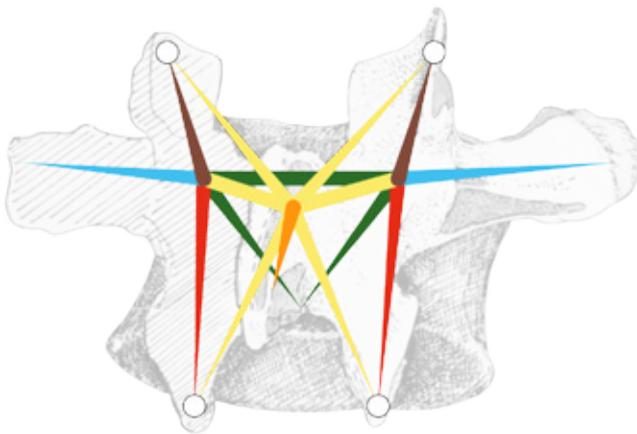




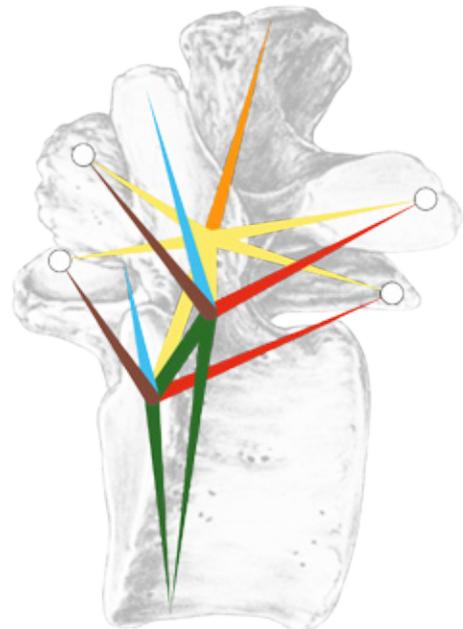
F3: H.GRAY, Anatomy of the human body, 1918, pg. 105  
Vertebra lombare umana vista di sbieco



F5: <https://thumbs.dreamstime.com/z/spine-lumbar-vertebra-shown-transverse-process-inferior-articular-process-mammillary-process-accessory-process-superior-82092485.jpg>  
Vertebra lombare umana vista di fronte



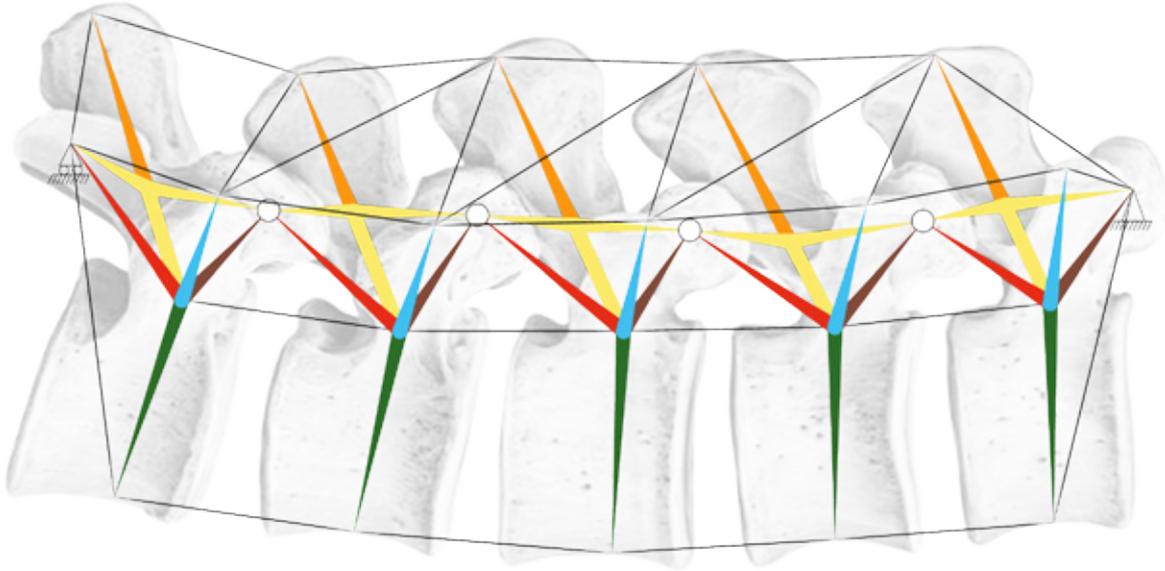
F4: J.E.S. FRAZER, The anatomy of the human skeleton, 1920, fig. 27 a  
Vertebra lombare umana vista da sopra



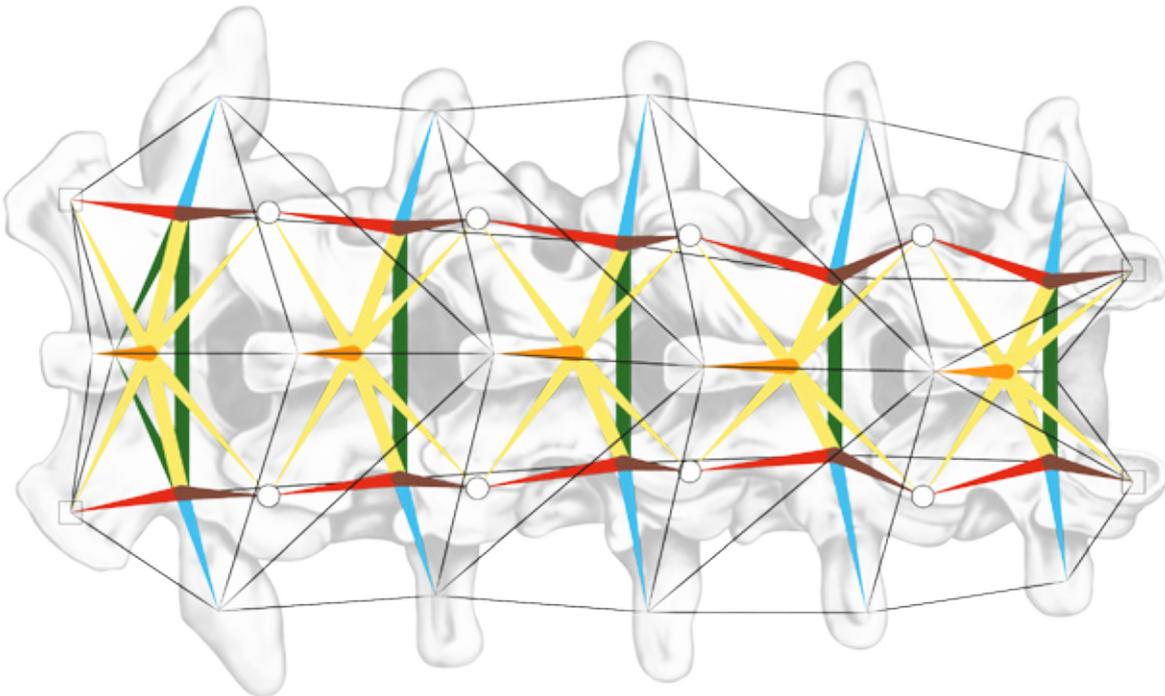
F6: <https://prohealthsys.com/wp-content/uploads/2013/07/Gray276.jpg>  
Vertebra lombare umana vista di lato

## SCHEMA GEOMETRICO DELLA SPINA DORSALE UMANA<sup>N1</sup>

Caratteristiche della sollecitazione presenti: N, V, M, T



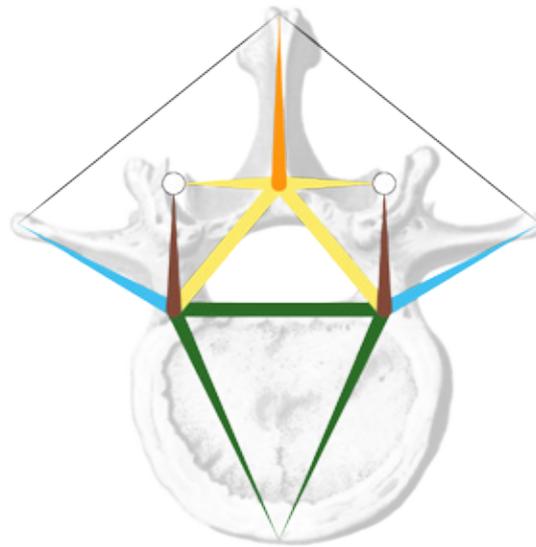
F1: <https://classconnection.s3.amazonaws.com/1699/flashcards/875876/jpg/vertebra3.jpg>  
Ipotesico schema geometrico delle vertebre lombari umane in prospettiva laterale



F2: <https://image.shutterstock.com/z/stock-photo-lumbar-spine-structure-vertebral-bones-lumbar-bones-anatomy-of-human-bony-system-human-skeletal-405564520.jpg>  
Ipotesico schema geometrico delle vertebre lombari umane in pianta

F3  
 R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 29  
 Ipotetico schema geometrico delle vertebre lombari umane in sezione

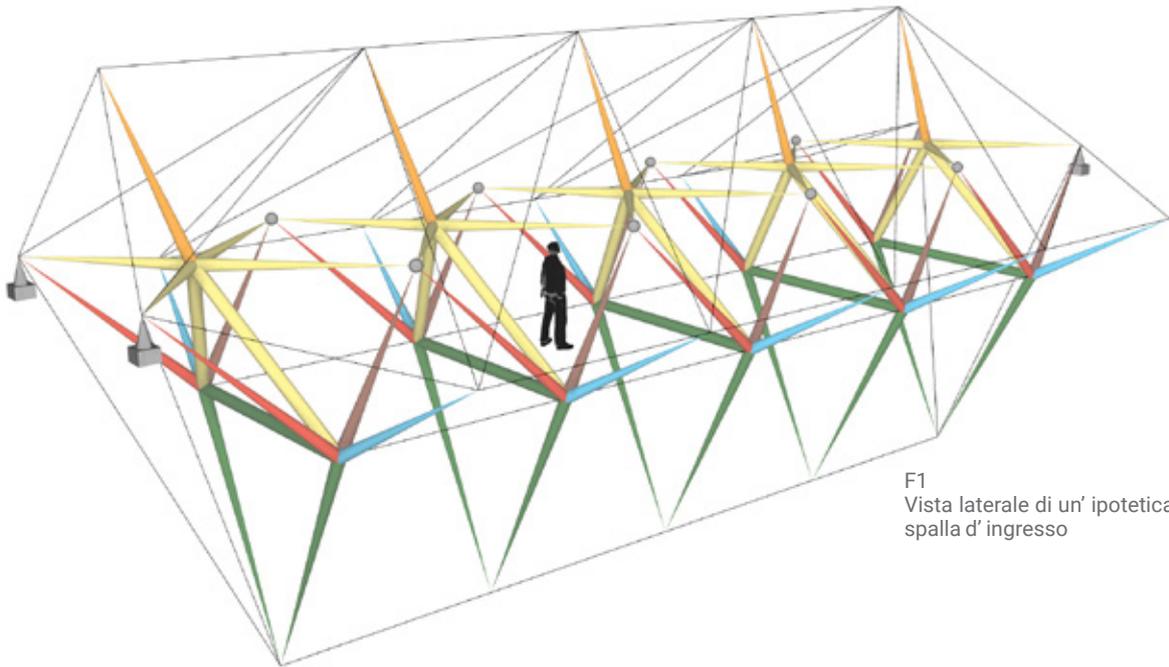
N1  
 Lo schema geometrico ipotizzato in questa fase di studio è approssimativo. Non considera cioè, il peso proprio, le autotensioni e i motivi strutturali sull'inclinazione delle singole componenti biologiche. Va inteso quindi, come il modello di partenza da dover elaborare.



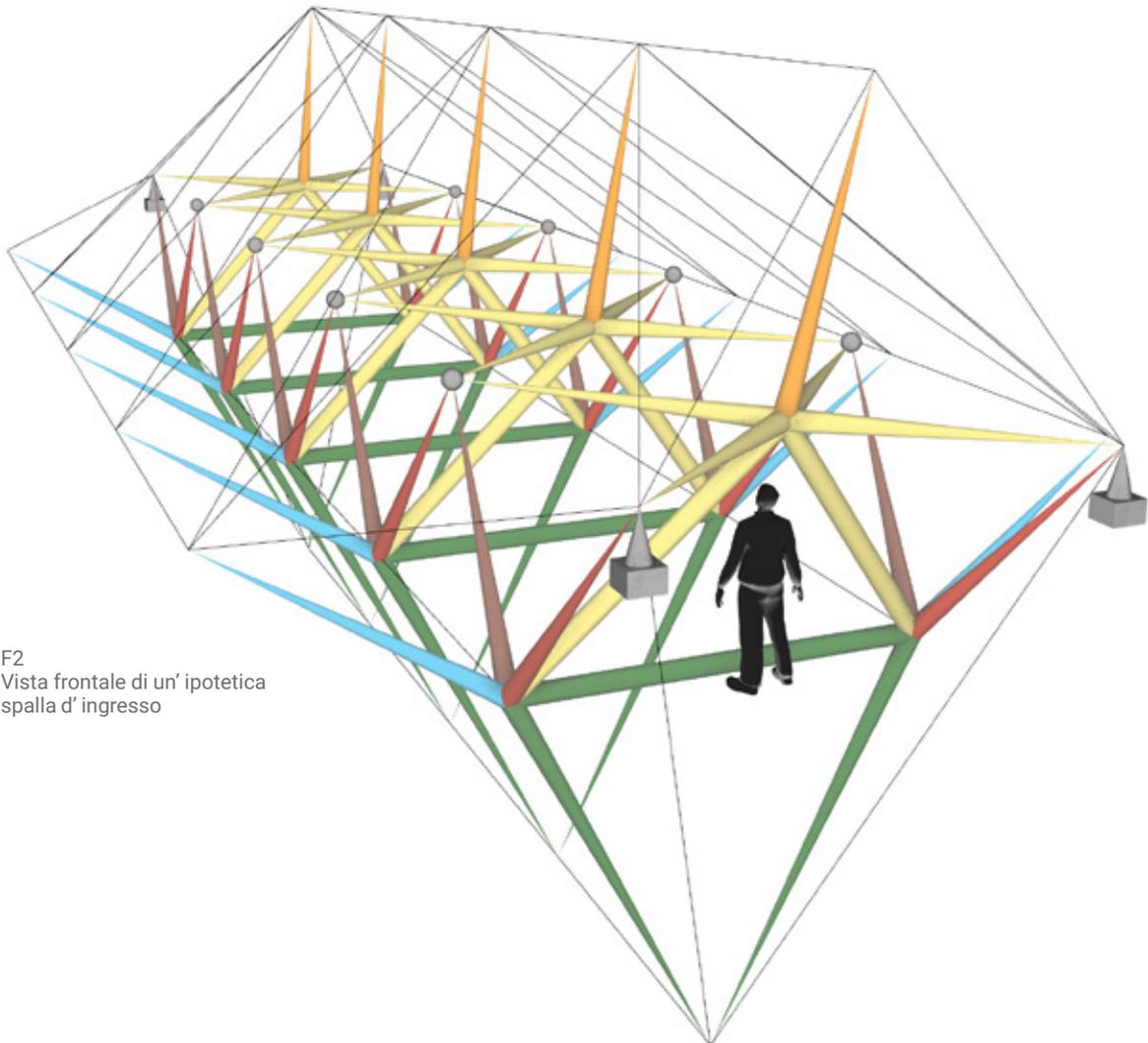
LEGENDA  
 Elementi strutturali principali di un telaio inscritto nella vertebra lombare umana

- Processus SPINOSUS: mensola verticale**  
 caratteristiche prevalenti: V, M
  
- Processus ARTICULARIS INFERIOR: puntone**  
 caratteristiche prevalenti: N
  
- Processus ARTICULARIS SUPERIOR: puntone**  
 caratteristiche prevalenti: N
  
- Processus COSTARIUS: mensola laterale**  
 caratteristiche prevalenti: V, M
  
- Pediculus ARCUS vertebrae: puntone**  
 caratteristiche prevalenti: N
  
- CORPUS vertebrae: elemento pressoinflesso verticale**  
 caratteristiche prevalenti: N, V, M
  
- TIRANTI corrispondenti al sistema artro/myologico**  
 caratteristiche prevalenti: N+
  
- Articolazio ZYGAPOPHYSEALIS: cerniera**

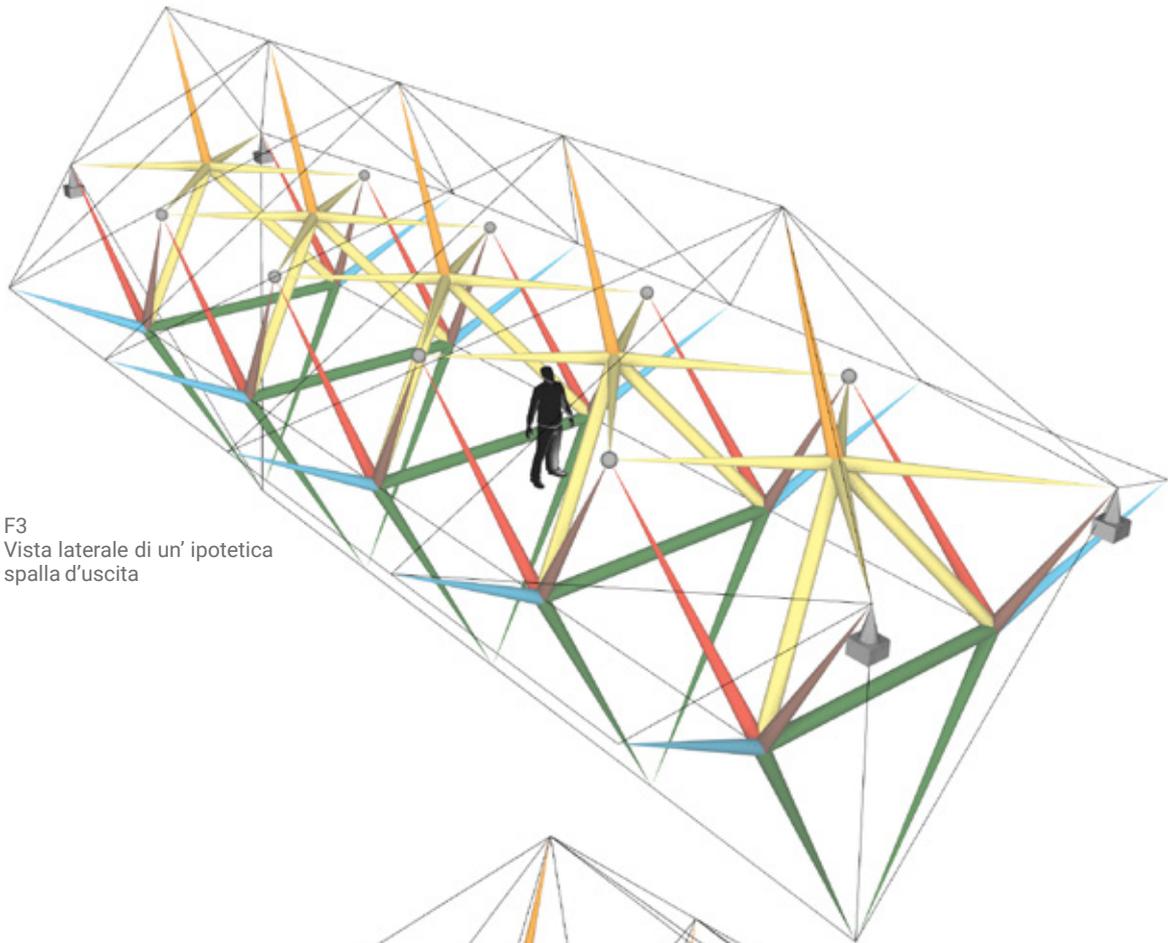
.Modello tridimensionale



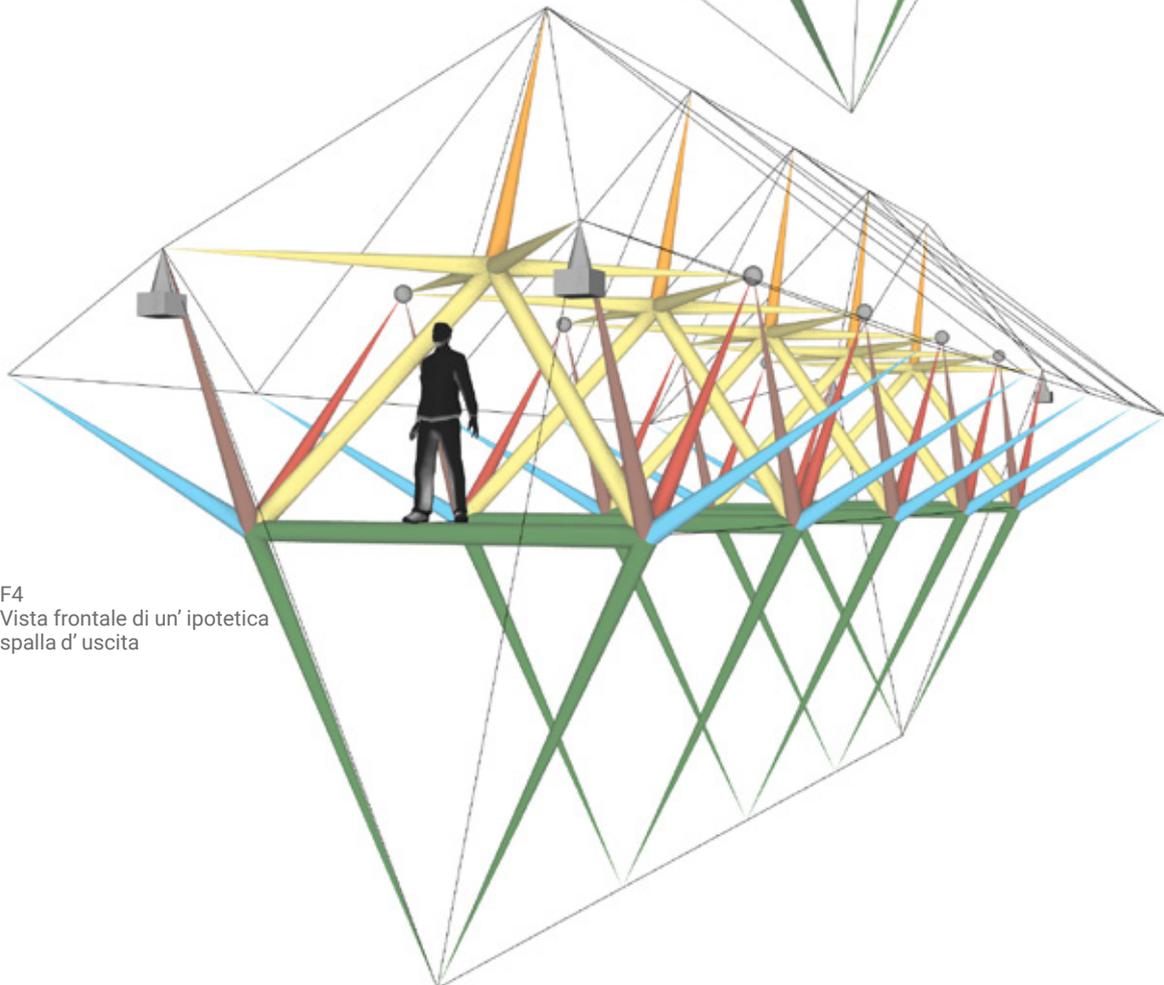
F1  
Vista laterale di un' ipotetica  
spalla d' ingresso



F2  
Vista frontale di un' ipotetica  
spalla d' ingresso



F3  
Vista laterale di un' ipotetica  
spalla d'uscita



F4  
Vista frontale di un' ipotetica  
spalla d' uscita

## RIFLESSIONI STRUTTURALI SULLO SCHEMA GEOMETRICO

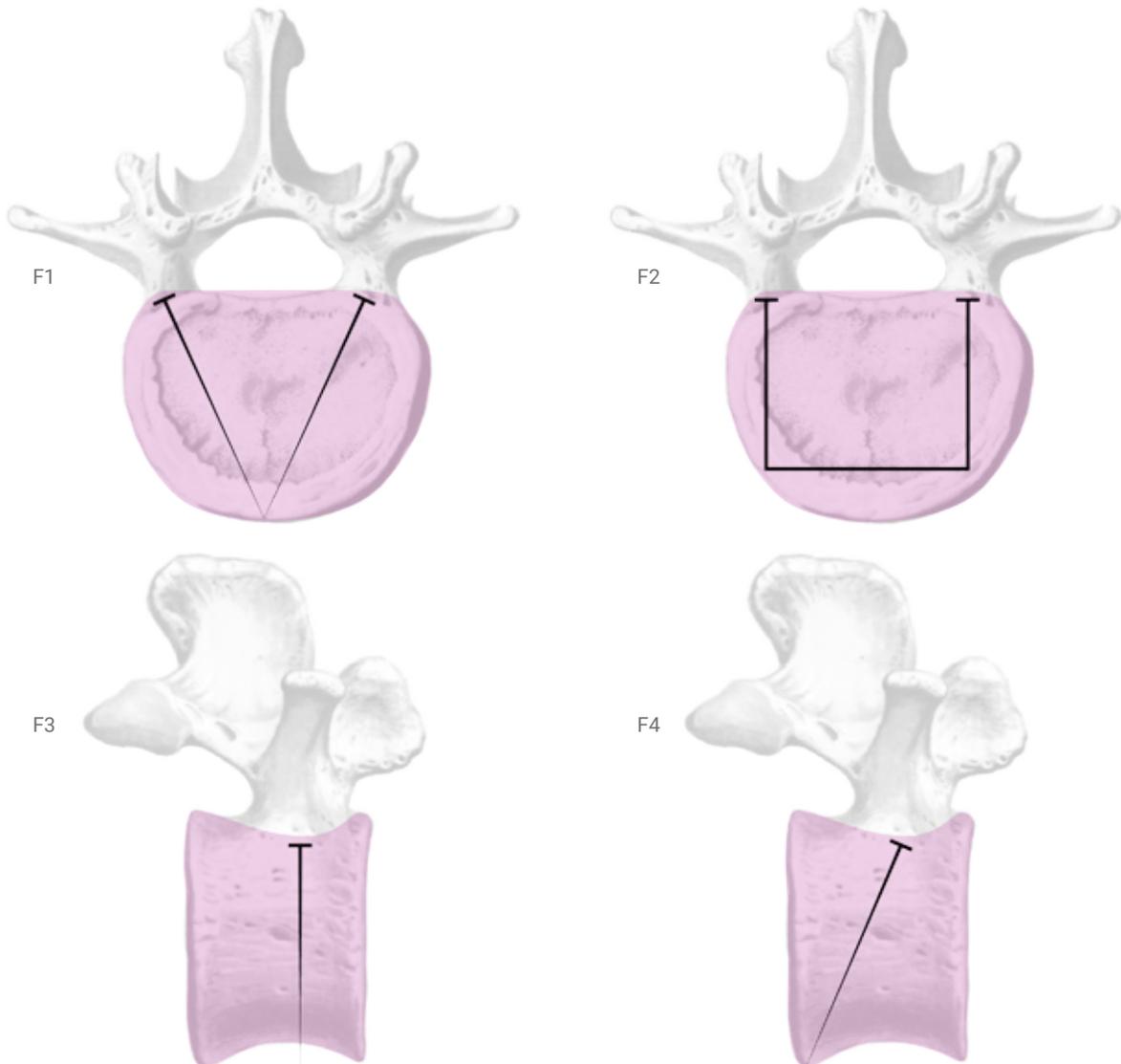
Per poter confermare il disegno dello schema geometrico ipotizzato relativo alla spina dorsale e modificarlo qualora non sia corretto, occorre necessariamente effettuare delle considerazioni statiche, che verranno affrontate in seguito, confrontando varie tipologie strutturali differenti. Per ora dunque, è possibile fare soltanto alcune riflessioni di carattere generale.

### .Corpus Vertebrae

Diversamente dalle altre componenti ossee della vertebra, il Corpus Vertebrae, non ha una dimensione così prevalente rispetto alle altre, da giustificare in maniera univoca, la forma del sottotelaio inscritto al suo interno. Quest'ultima infatti, potrebbe essere, in sezione, triangolare<sup>F1</sup> o rettangolare<sup>F2</sup>, mentre in prospetto laterale, dritta<sup>F3</sup> o inclinata<sup>F4</sup>, a seconda della tipologia strutturale globale ipotizzata.

F1-F2  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 29  
Possibili strutture inscritte nel Corpus vertebrae, in sezione

F3-F4  
R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 30  
Possibili inclinazioni della struttura inscritta nel Corpus vertebrae, in prospetto



F5  
 R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 29  
 Elemento strutturale iscritto nel Processus costarius, in sezione

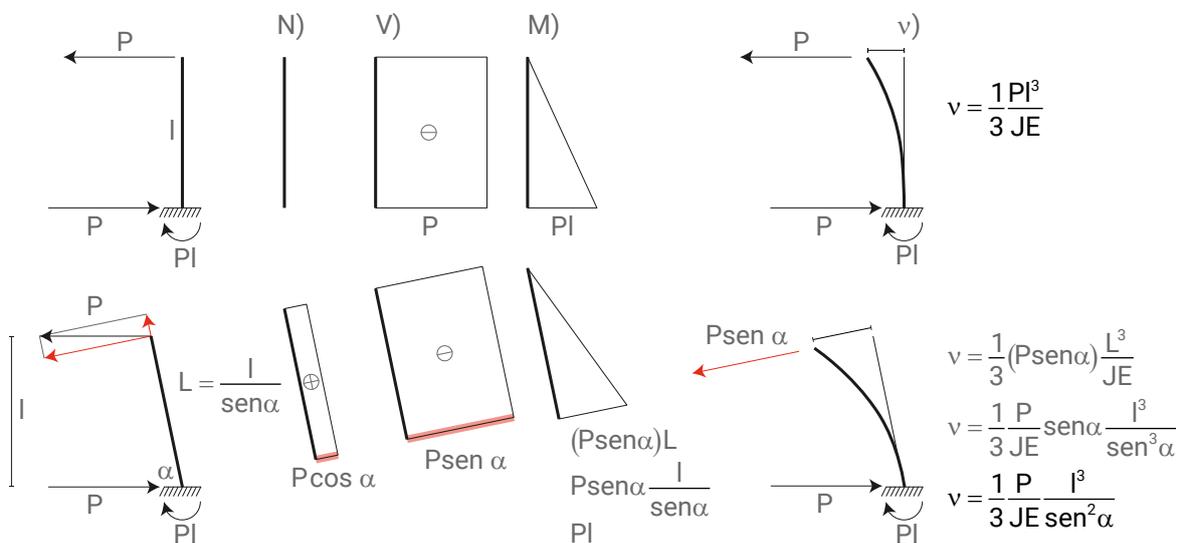
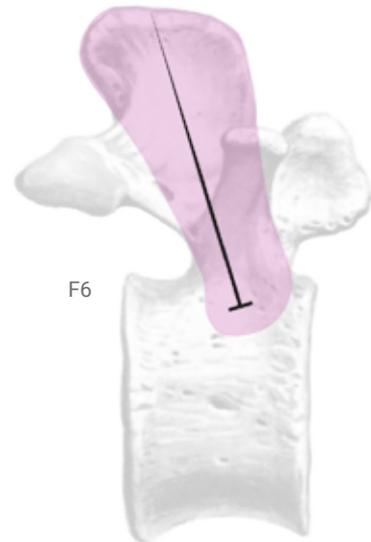
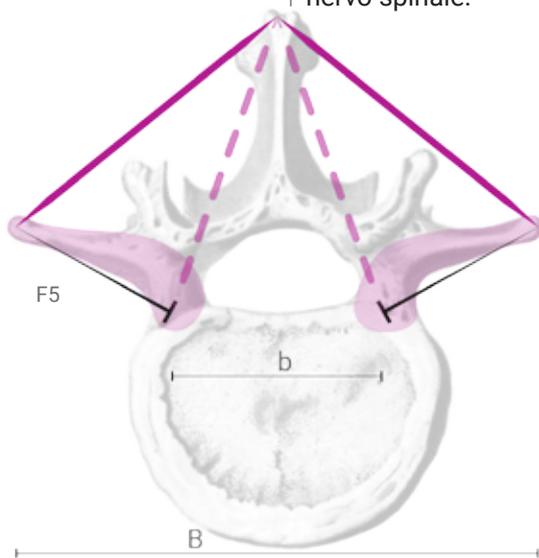
F6  
 R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988, pg. 30  
 Elemento strutturale iscritto nel Processus spinosus, in prospetto

Inclinazione degli elementi strutturali

Indipendentemente dal funzionamento strutturale ipotizzato per lo schema geometrico dell'intera colonna vertebrale, l'inclinazione del Processus Costarius<sup>F5</sup> e del Processus Spinosus<sup>F6</sup> può essere motivata nel modo seguente. Una mensola con carico concentrato all'estremità libera, come lo sforzo di un tirante, se disposta inclinata, anzichè dritta, ha uguale momento flettente, ma taglio ridotto e sforzo normale di trazione in aggiunta, che anche se modesto, contribuisce a stabilizzare l'elemento strutturale. La deformata prodotta dal solo momento flettente invece, aumenta, dato poco rilevante visto che tutte le componenti ossee della vertebra sono tozze.

Processus Costarius

Il Processus Costarius migliora l'efficienza del sistema artro-miologico, poichè aumenta il braccio del momento resistente a torsione (B), che sarebbe molto inferiore in sua assenza (b). Tale condizione inoltre, potrebbe restringere il forame vertebrale, intralciando il passaggio del nervo spinale.





## STUDIO DEL MODELLO ARCHITETTONICO

## MODELLI DI TRE PEZZI RIGIDI COLLEGATI DA FUNI

Dalle considerazioni fatte precedentemente, si può intuire che la spina dorsale, è frutto di vari sistemi strutturali indipendenti, alternativi. Quindi, invece di studiare subito quello preponderante, che sarebbe un reticolare misto a due cerniere (4), si è scelto di analizzare prima, gli altri sistemi più semplici inscritti al suo interno e cioè, la catenaria discreta mista (1), il tensegrity misto (2) e il reticolare misto con unica cerniera centrale (3). Per ciascuno di essi poi, si è scelto di produrre un modello fisico e virtuale<sup>N1</sup>, costituito da tre elementi rigidi, vincolati reciprocamente con funi e aventi la capacità di assumere geometria, sia rettilinea che curvilinea. Per ciascuna delle due allora, si è tentato di comprendere gli effetti dell'aumento progressivo di rigidità flessionale del sistema<sup>N2</sup>. I modelli infatti, nella loro configurazione iniziale molto deformabile (labile o isostatica), hanno la capacità di effettuare il movimento correlativo al determinato momento che li sollecita<sup>Tab1</sup>. Si è partiti quindi, da tale configurazione, per arrivare a quella iperstatica più utile, mediante l'inserimento progressivo di elementi che sopportano solo sforzo normale. Il risultato più importante della modifica dei modelli tuttavia, non era individuare la configurazione più iperstatica, ma quella meno iperstatica che, se sottoposta a carichi concentrati nei nodi e a pretensione nelle funi, risultasse in equilibrio, con ottimale disposizione delle sue membrature. Occorre ricordare cioè, che nelle tensostrutture miste, diversamente da quanto accade per le strutture completamente rigide, la prima configurazione che garantisce l'equilibrio non è sempre isostatica, ma può essere anche iperstatica<sup>N4</sup>.

### .Struttura primordiale rigida > Tensostruttura discreta

Vista la complessità geometrica delle tensostrutture discrete, è opportuno evidenziare prima, la tipologia ed i movimenti possibili della struttura primordiale rigida monodimensionale piana, desiderata<sup>F1-F3</sup>. Partendo da essa poi, è possibile ipotizzare la tensostruttura spaziale discreta corrispondente, in prospetto longitudinale ed in pianta<sup>F4-F6</sup>.

### .Curvatura

E' possibile dare curvatura verticale ed orizzontale al modello virtuale, in vari modi. Uno di essi, è disegnare prima, lo schema geometrico dotato di curvatura approssimativa, nel programma di disegno, trattandolo come una struttura reticolare rigida. Poi, nel programma di calcolo, dare uno sforzo normale di pretensione<sup>N3</sup>, uguale o diverso per tutte le funi della struttura, modificando la curvatura precedente, in maniera uniforme (più semplice). Un altro modo invece, è disegnare la struttura rettilinea, priva di qualunque curvatura, nel programma di disegno, poi nel programma di calcolo, dare uno sforzo normale di pretensione, considerevolmente diverso in ogni fune e tale da produrre la curvatura definitiva desiderata (più complicato). Si è scelto pertanto, di utilizzare il primo modo.

N1

Si è cercato di produrre un modello che fosse il più simile possibile, per tutte le tre tipologie strutturali, in modo da renderle meglio confrontabili. Pertanto, la distanza tra i pezzi rigidi è uguale, mentre la loro morfologia è simile.

N2

La rigidità flessionale studiata, è quella dell'intero sistema ovviamente, e non dei singoli elementi strutturali che lo compongono. Le funi infatti, ne sono prive, essendo dotate unicamente di rigidità assiale di trazione.

N3

Vari modi di applicare il carico di pretrazione  
pg.48

N4

Staticità delle tensostrutture miste  
pg.50

### .Legenda

-  MOVIMENTI
-  Azioni, Reazioni interne, esterne
-  FUNI specifiche
-  Elementi RIGIDI infinitamente
-  Cerniere PIANE (xz)
-  Cerniere PIANE (xy)
-  Cerniere SPAZ. (xz), (xy), (yz)

Tab 1 MODELLO	1	2	3	4
TIPOLOGIA Strutturale	CATENARIA DISCRETA mista	TENSEGRITY misto	RETICOLARE misto 1 cerniera	RETICOLARE misto 2 cerniere
MOMENTI NON sopportati dal meccanismo iniziale	Nessuno (li sopporta tutti)	$M_{xz}$ $M_{xy}$	$M_{xz}$ $M_{xy}$ $M_{yz}$	$M_{xz}$
MOVIMENTI CINEMATICI indipendenti del meccanismo iniziale	Nessuno (è già in equilibrio)	$\varphi_1 \varphi_2 (xz)$ $\gamma_1 \gamma_2 (xy)$	$\varphi_1 \varphi_2 (xz)$ $\gamma_1 \gamma_2 (xy)$ $\omega_2 (yz)$	$\varphi_1 \varphi_2 (xz)$
STATICITA' dello schema geometrico	2 Iperstatico (prima configurazione in equilibrio)	4 Labile	5 Labile	2 Labile

#### .Piani di studio del movimento

Verticale Longitudinale (xz)

Orizzontale (xy)

Verticale Trasversale (yz)

#### .Movimenti piani dell'elemento spaziale rigido (i)

(xz) piano verticale longitudinale

( $\varphi_i$ ) rotazione ; ( $v_i$ ) traslazione verticale ; ( $u_i$ ) traslazione orizzontale

(xy) piano orizzontale

( $\gamma_i$ ) rotazione ; ( $w_i$ ) traslazione trasversale ; ( $u_i$ ) traslazione orizzontale

(yz) piano verticale trasversale

( $\omega_i$ ) rotazione ; ( $v_i$ ) traslazione verticale ; ( $w_i$ ) traslazione trasversale

#### .Funi

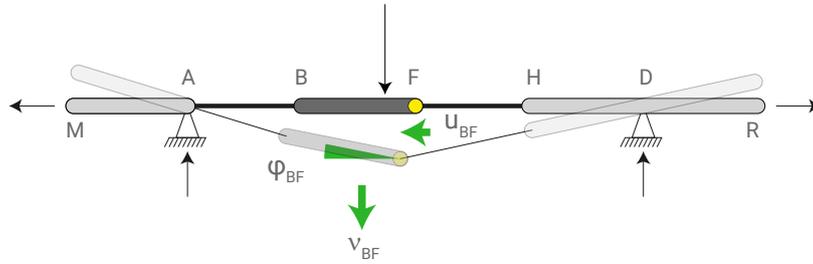
Le funi pseudo verticali servono a costituire gli eventuali collegamenti primari tra gli elementi rigidi, dove necessario (modelli 1 e 2). Le funi pseudo orizzontali invece, migliorano il comportamento a momento flettente, sia nel piano verticale che in quello orizzontale. Le funi pseudo oblique infine, servono ad irrigidire il sistema a torsione.

#### .Cerniere

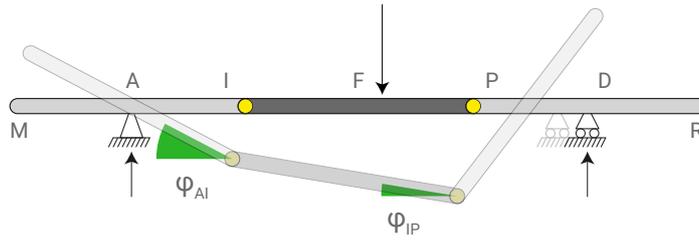
Evidenziare lo spazio lavorativo di ogni cerniera, aiuta a visualizzare i movimenti elastici o cinematici possibili nel piano orizzontale, anche in prospetto verticale e viceversa.

.Struttura primordiale bidimensionale nel piano (xz)

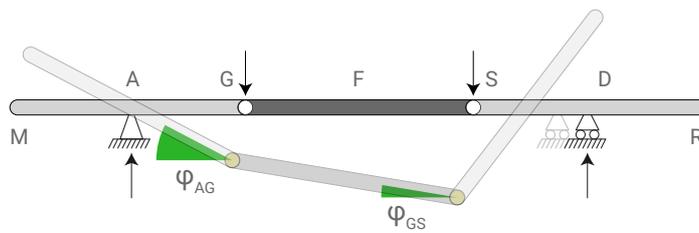
F1  
 Primordiale (xz) 1:  
 3 movimenti indipendenti  
 elastici  
 $(\varphi_{BF}) (v_{BF}) (u_{BF})$   
 Schema geometrico piano  
 Isostatico  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2 \times 2) + (1 \times 2) - (2 \times 3)$   
 $4 + 2 - 6$   
 $6 - 6 = 0$



F2  
 Primordiale (xz) 2:  
 2 movimenti indipendenti  
 cinematici  
 $(\varphi_{AI}) (\varphi_{IP})$   
 Schema geometrico piano  
 2 Labile  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2+1) + (2 \times 2) - (3 \times 3)$   
 $3 + 4 - 9$   
 $7 - 9 = -2$

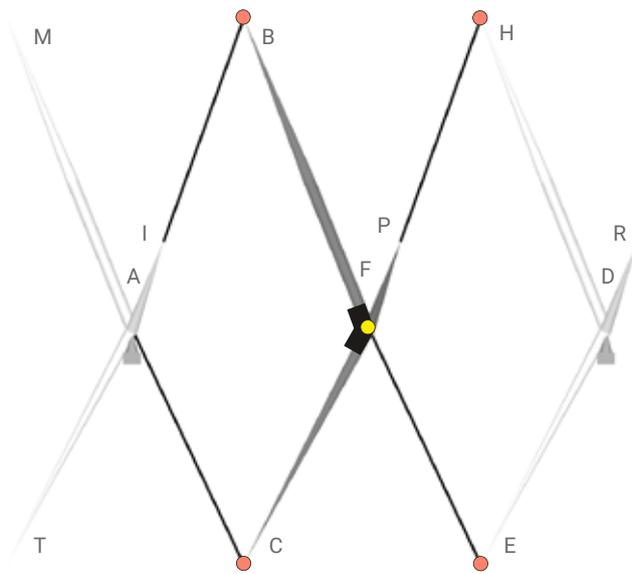


F3  
 Primordiale (xz) 3:  
 2 movimenti indipendenti  
 cinematici  
 $(\varphi_{AG}) (\varphi_{GS})$   
 Schema geometrico piano  
 2 Labile  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2+1) + (2 \times 2) - (3 \times 3)$   
 $3 + 4 - 9$   
 $7 - 9 = -2$

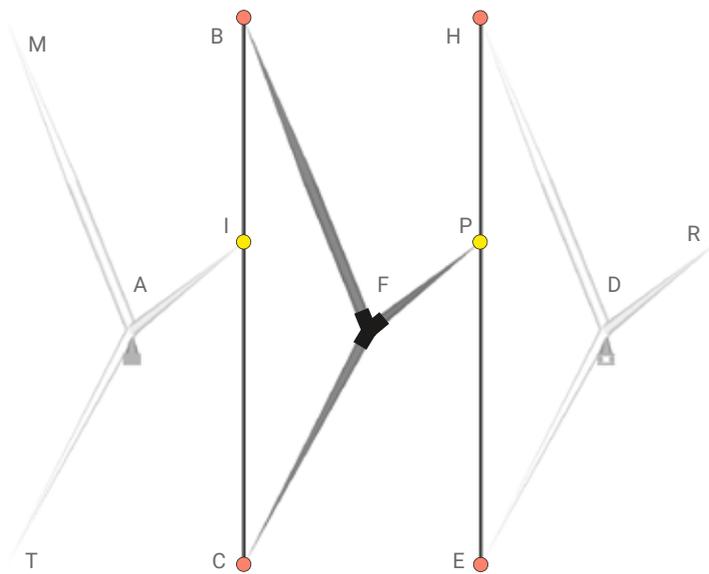


.Tensostruttura discreta mista spaziale in prospettiva longitudinale

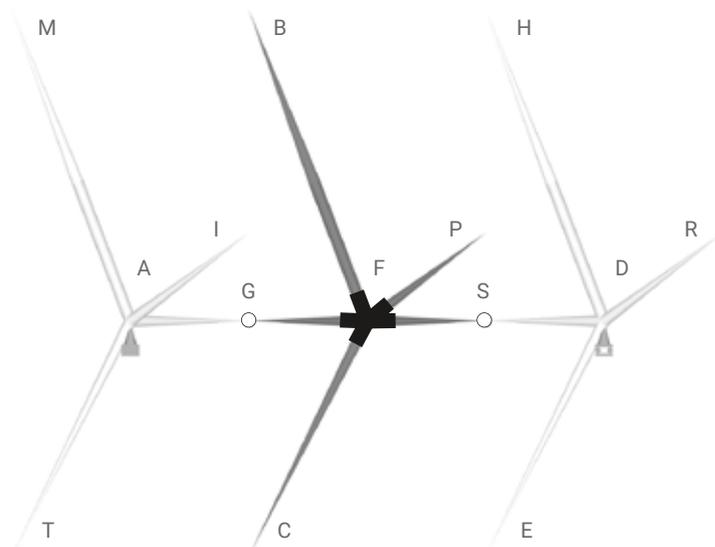
F4  
Prospetto modello 1



F5  
Prospetto modello 2

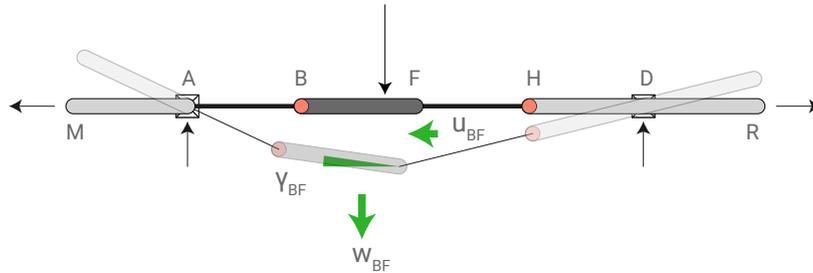


F6  
Prospetto modello 3

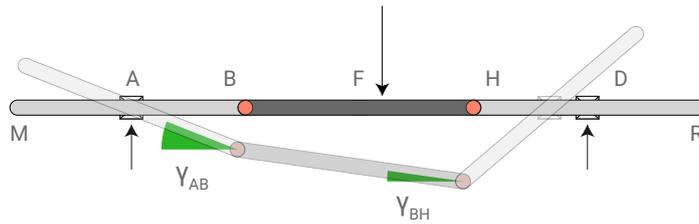


.Struttura primordiale bidimensionale nel piano (xy)

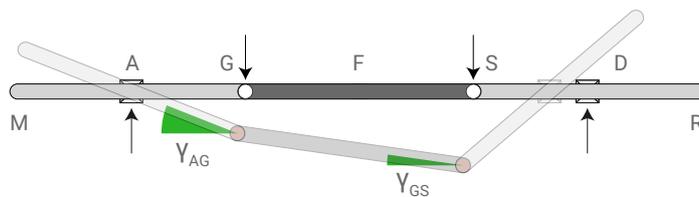
F1  
 Primordiale (xy) 1:  
 3 movimenti indipendenti  
 elastici  
 $(v_{BF}) (w_{BF}) (u_{BF})$   
 Schema geometrico piano  
 Isostatico  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2 \times 2) + (1 \times 2) - (2 \times 3)$   
 $4 + 2 - 6$   
 $6 - 6 = 0$



F2  
 Primordiale (xy) 2:  
 2 movimenti indipendenti  
 cinematici  
 $(v_{AB}) (v_{BH})$   
 Schema geometrico piano  
 2 Labile  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2+1) + (2 \times 2) - (3 \times 3)$   
 $3 + 4 - 9$   
 $7 - 9 = -2$

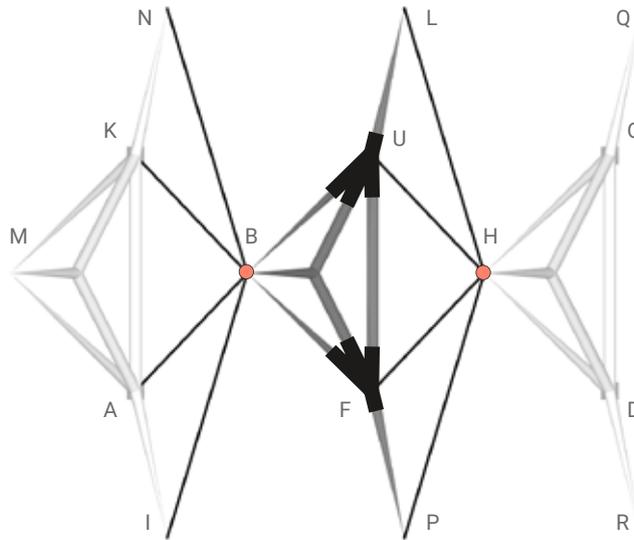


F3  
 Primordiale (xy) 3:  
 2 movimenti indipendenti  
 cinematici  
 $(v_{AG}) (v_{GS})$   
 Schema geometrico piano  
 2 Labile  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(2+1) + (2 \times 2) - (3 \times 3)$   
 $3 + 4 - 9$   
 $7 - 9 = -2$

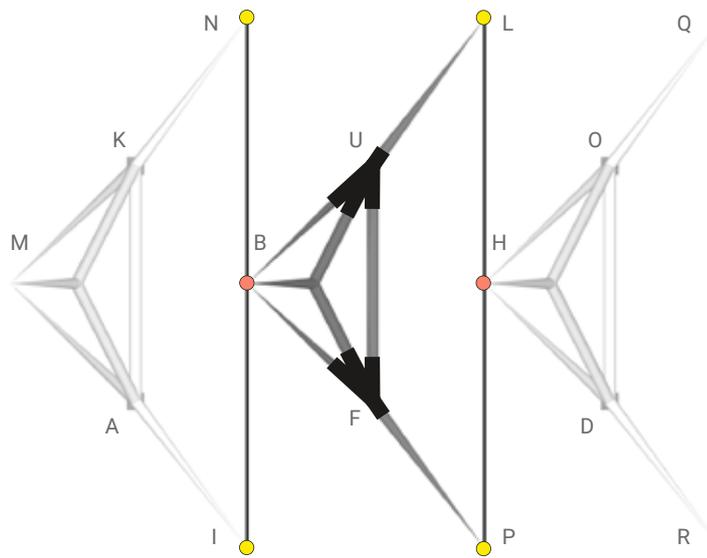


.Tensostruttura discreta mista spaziale in pianta

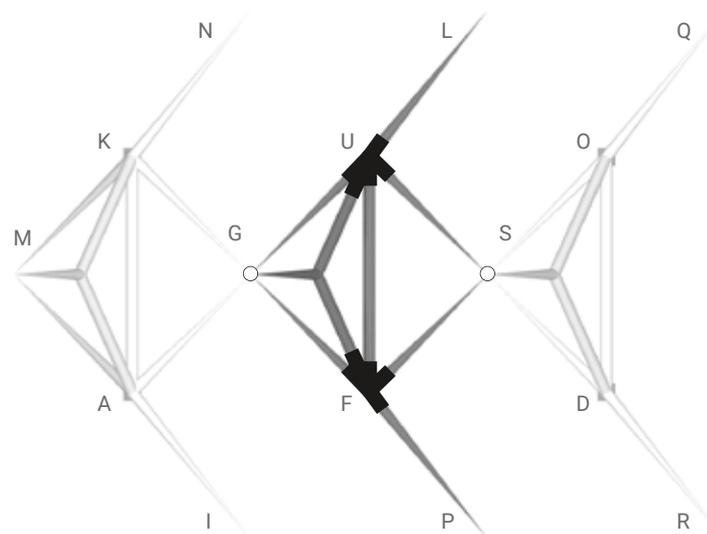
F4  
Pianta modello 1



F5  
Pianta modello 2



F6  
Pianta modello 3



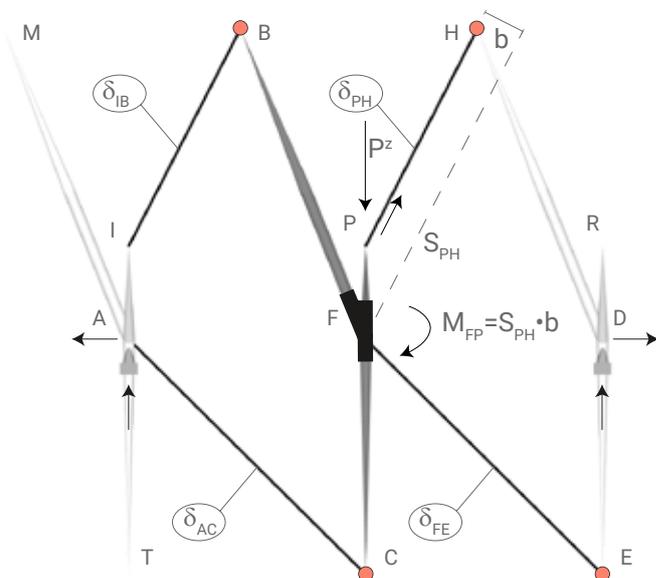
## MODELLO ARCHITETTONICO (1): CATENARIA DISCRETA MISTA

Il modello di catenaria discreta mista della struttura intervertebrale, è costituito da conci rigidi<sup>N1</sup> in grado di sopportare tutte le caratteristiche della sollecitazione, collegati con funi disposte esclusivamente in Tensegrity. L'intera struttura poi, è vincolata con cerniere in tutte le estremità.

N1  
Immagini del concio rigido isolato pg. 134-135

### Possibili vincolamenti interni

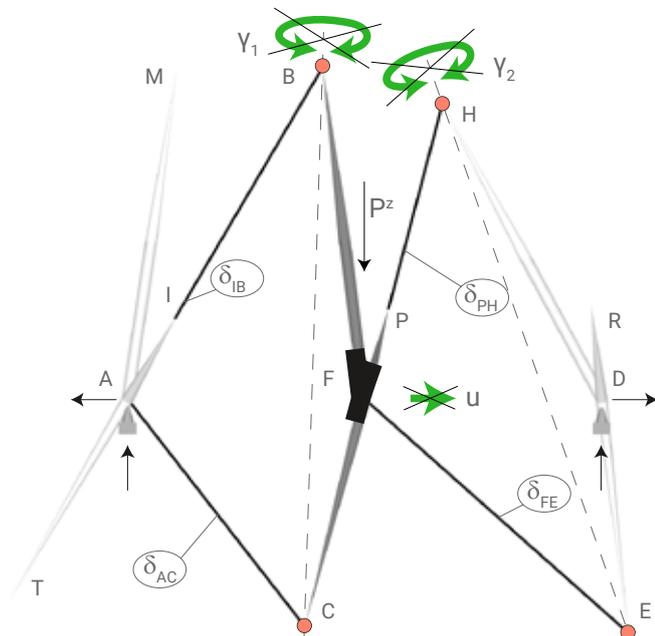
La prima configurazione equilibrata del modello virtuale (1), comprende soltanto funi trasversali e consente di visualizzare in prospetto longitudinale, varie ipotesi con cui vincolare il concio centrale a quelli laterali. La prima di esse allora, comporta l'asta (FP) incastrata e non allineata alla fune (PH)<sup>F1</sup>. In questo caso quindi, compare il fastidioso momento ( $M_{FP}$ ), responsabile di una consistente rotazione del concio centrale nel piano verticale intorno al nodo (F). La seconda ipotesi poi, consiste nella condizione estrema della deformata di quella precedente. In tale situazione cioè, l'asta (FP) si orienta verso il nodo (H), costituendo di fatto un elemento unico teso, composto da una porzione rigida e una fune<sup>F2</sup>. Inoltre, indipendentemente dal vincolo interno nel nodo (F), tale disposizione delle membrature è senza dubbio la più rigida di quelle possibili. Infatti, a rotazione avvenuta nel piano verticale, in quello orizzontale, il concio centrale non può ruotare elasticamente rispetto agli altri due, perchè gli assi di ogni coppia di cerniere non sono più paralleli, impedendo così la traslazione orizzontale elastica del concio, presupposto per la sua rotazione elastica nel piano orizzontale, intorno a tali assi. Questa condizione può anche essere adottata direttamente nella geometria iniziale, senza bisogno cioè, di attendere la deformata successiva all'applicazione dei carichi. A tal scopo pertanto, nelle restanti ipotesi di configurazione delle membrature, che prevedono sia carichi di pretensione, che forza verticale nel baricentro del sistema,



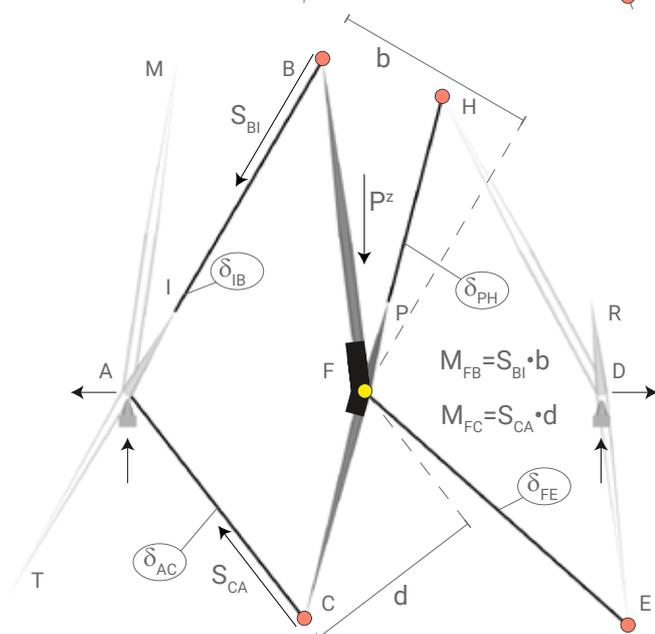
F1  
Asta corta incastrata  
verticale  
Configurazione in cui l'asta (FP), è incastrata, ma non allineata alla fune (PH).

l'asta (FP) viene incernierata, in modo da rendere possibile la rotazione elastica del concio centrale rispetto agli altri due, senza impedimenti vincolari, assicurando quindi, il costante allineamento dell'asta (FP) verso il nodo (H). La terza ipotesi di configurazione delle membrature dunque, prevede soltanto le due aste lunghe (FB) e (FC), incastrate<sup>F3</sup> nel nodo (F). Il momento che esso deve sopportare quindi, ha una componente in meno rispetto alla prima ipotesi, perchè dato unicamente dalla reazione delle due funi (IB) e (AC) per il loro bracci. Manca cioè, il momento ( $M_{FP}$ ). Nelle ipotesi successive allora, si tenta di ridurre ulteriormente la flessione nel nodo (F). La quarta quindi, prevede lo stesso vincolamento della terza, ma con l'aggiunta delle funi orizzontali<sup>F4</sup>. In tale situazione allora, il momento conferito al nodo (F) dalle due aste (FB) ed (FC), è dato dalla risultante degli sforzi nelle funi collegate alle loro estremità

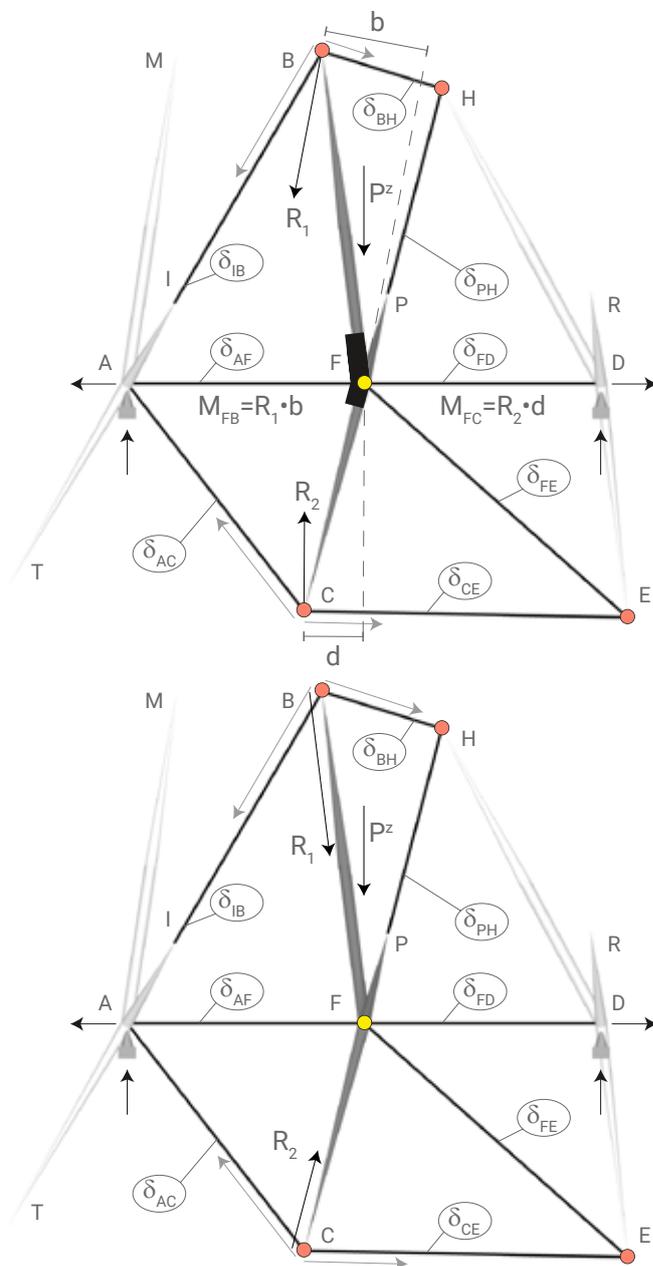
F2  
Asta corta incastrata non verticale  
 Configurazione in cui l'asta (FP) è incastrata ed allineata alla fune (PH).



F3  
Asta corta incernierata  
 Configurazione in cui l'asta (FP) è incernierata e quindi, costantemente parallela alla fune (PH).



libere (B) e (C), per il loro braccio. Quest'ultimo pertanto, è notevolmente inferiore rispetto a quello della terza ipotesi, poichè l'inclinazione di tale risultante, rispetto alla direzione dell'asta a cui è applicata, è senz'altro minore di quella delle forze che la compongono e cioè, le reazioni delle singole funi. Quindi, il momento complessivo in (F) relativo alla quarta ipotesi, è inferiore a quello della terza. La quinta situazione di vincolamento ipotizzata infine, è analoga alla quarta, ma con il nodo (F), completamente incernierato nel piano verticale<sup>F5</sup>. Tale condizione allora, comporta l'assenza completa di momenti conferiti al nodo (F), in quanto la risultante degli sforzi applicati all'estremità libera di ogni asta, è sovrapposta all'asta stessa e quindi il suo braccio è nullo. Quest'ultima ipotesi tuttavia, aumenta tantissimo il momento nel nodo (D), vanificando l'alleggerimento del nodo (F).



F4

Aggiunta di funi orizzontali con aste lunghe incastrate  
Configurazione in cui il momento in (F) da parte di ogni asta, è dato dalla risultante degli sforzi nelle funi collegate alla sua estremità libera, per il suo braccio.

F5

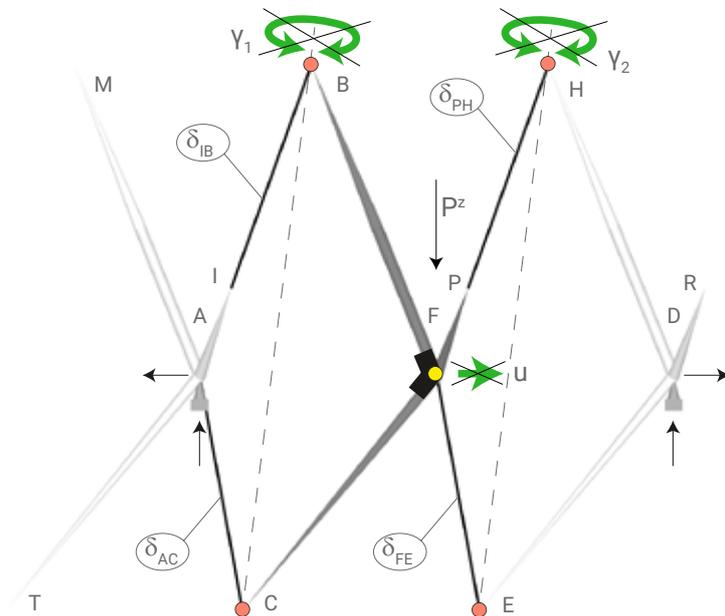
Nodo (F) completamente incernierato nel piano verticale  
Configurazione in cui il momento in (F) è nullo, poichè la direzione relativa alla risultante delle reazioni nelle funi collegate ad ogni asta rigida, coincide con la direzione di quest'ultima e quindi, il suo braccio è nullo. Pertanto, l'intero concio centrale rigido è soggetto soltanto a sforzo normale. Quello di destra invece, deve sopportare un grande momento flettente in (D).

N2  
 Fiugura F2 pg.127

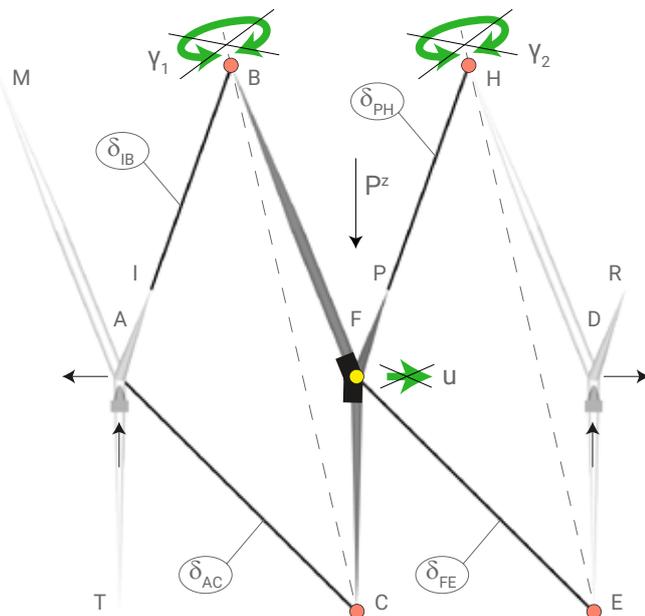
Possibili disposizioni della prima configurazione equilibrata

Le possibili disposizioni della prima configurazione equilibrata, che il modello (1) può assumere, differiscono soltanto riguardo all'inclinazione delle aste rigide (FB) e (FC). Come visto in precedenza<sup>N2</sup>, la migliore disposizione delle membrature, è senza dubbio quella in cui gli assi delle due coppie di cerniere orizzontali, non sono paralleli, perchè è l'unica in cui la rotazione elastica dei conci nel piano orizzontale non può avvenire, essendo impedita la loro traslazione elastica orizzontale, anche senza necessità di ulteriori collegamenti iperstatici. Questi ultimi diventano fortemente indicati invece, nei casi in cui gli assi delle due coppie di cerniere orizzontali risultano paralleli<sup>F6-F9</sup>, poichè la rotazione elastica del concio centrale nel piano orizzontale, può avvenire, essendo possibile la sua traslazione elastica orizzontale. Pertanto, il comportamento

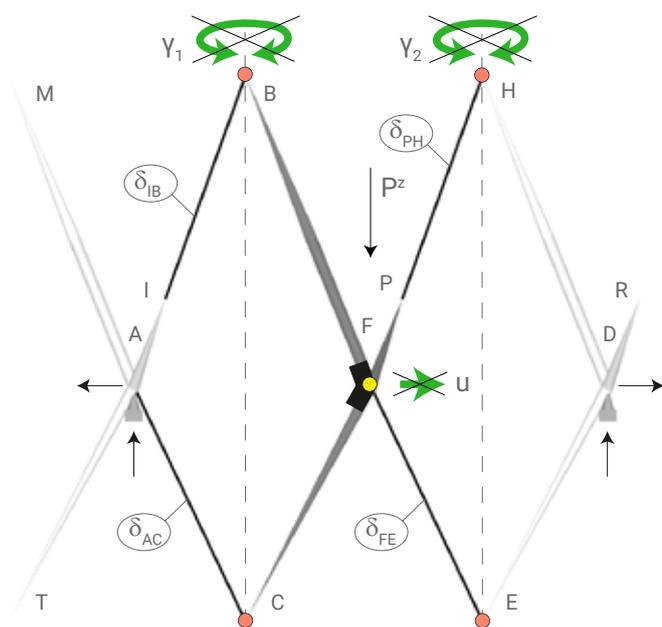
F6  
 Configurazione in cui gli assi delle coppie di cerniere orizzontali, sono inclinati verso destra.



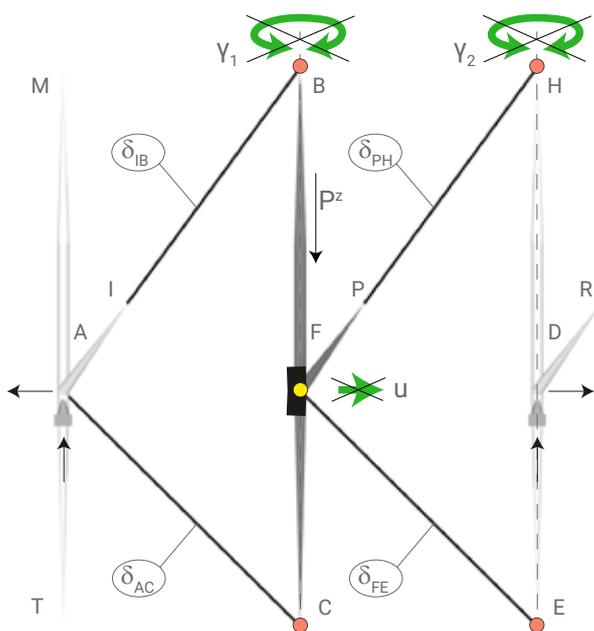
F7  
 Configurazione in cui gli assi delle coppie di cerniere orizzontali, sono inclinati verso sinistra.



strutturale non presenta differenze, se gli assi delle due coppie di cerniere sono inclinati verso destra<sup>F6</sup>, verso sinistra<sup>F7</sup> o perfettamente verticali<sup>F8</sup>. E' opportuno tuttavia evitare, che le due aste rigide (BF) ed (FC) siano perfettamente allineate<sup>F9</sup>, in quanto agiscono come un elemento unico molto lungo, dotato di grande snellezza e pertanto, inutilmente molto più instabile degli altri. Infine, occorre precisare che i movimenti rappresentati nei disegni di questa trattazione, sono solo cinematici, e quindi per il modello (1), non possibili perchè in equilibrio sin dalla prima configurazione ipotizzata. Diversamente invece, accade per i modelli (2) e (3).

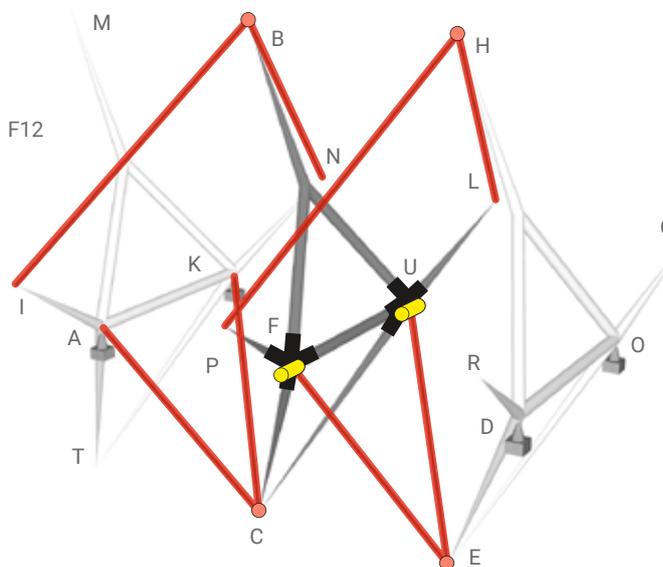
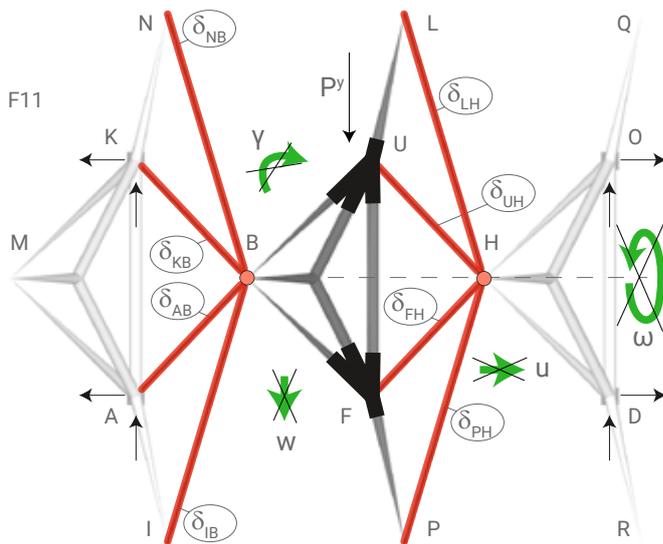
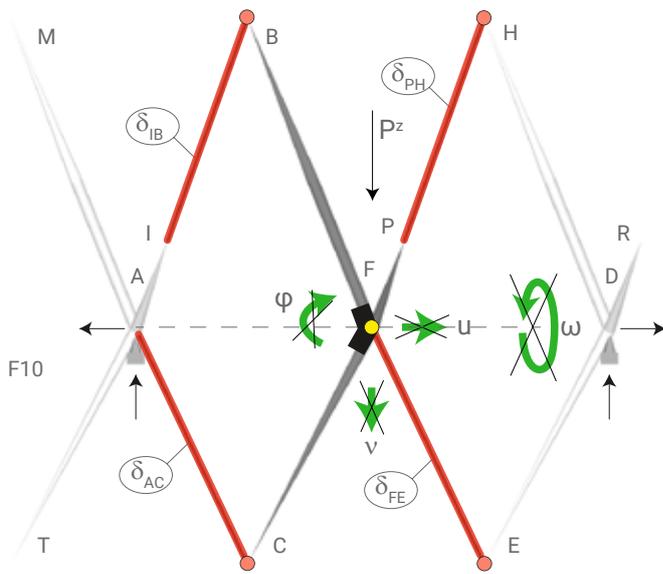


F8 Configurazione in cui gli assi delle coppie di cerniere orizzontali, sono perfettamente verticali. Geometria del modello virtuale scelta, per quello fisico, in virtù della semplicità con cui è possibile vedere i movimenti dei concetti rigidi durante il loro assemblamento.



F9 Configurazione in cui le aste rigide (FB) e (FC) sono perfettamente allineate in verticale.

.Prima configurazione equilibrata scelta per il modello fisico

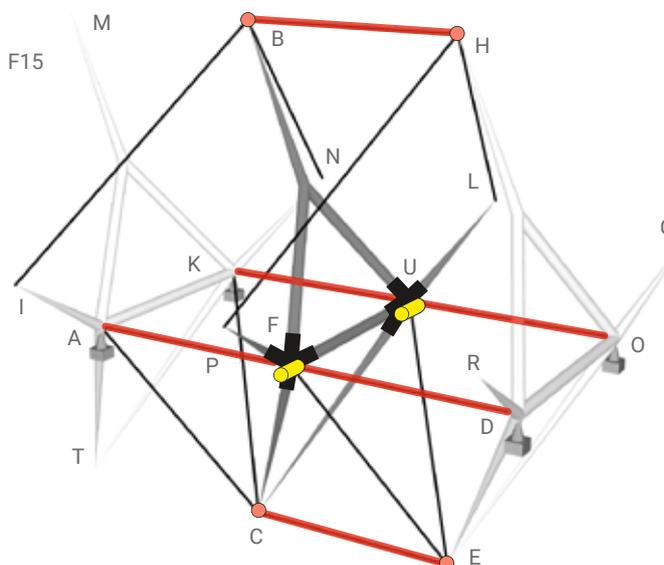
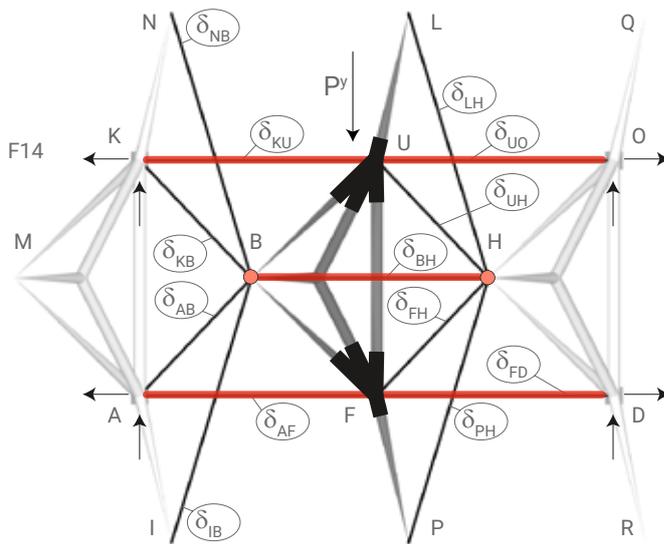
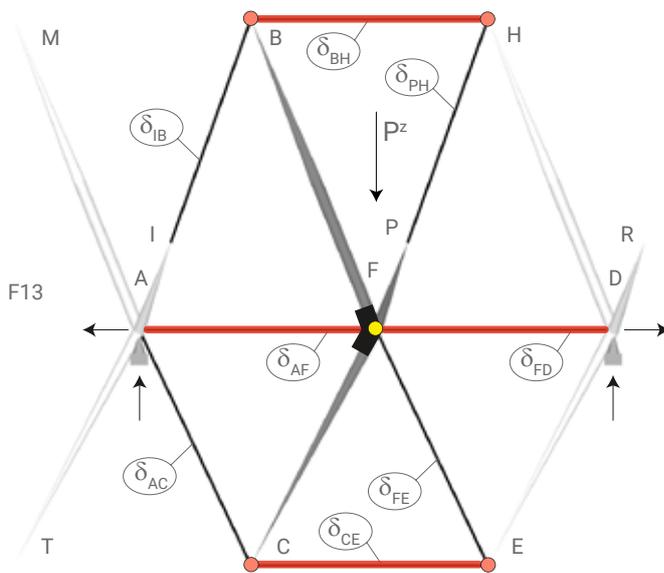


Nella configurazione 2 volte iperstatica<sup>N3</sup> del modello virtuale (1), in prospetto longitudinale<sup>F10</sup>, in pianta<sup>F11</sup> e in prospettiva<sup>F12</sup>, le funi pseudo verticali, hanno lo scopo di collegare i conchi rigidi, fornendo al sistema, equilibrio e resistenza torsionale. Come detto in precedenza poi, per ora, l'asta (FP), può essere incernierata, esclusivamente nel piano verticale. In quello orizzontale invece, tale asta deve rimanere incastrata, essendo una mensola con carico concentrato, costituito dalla reazione della fune (LH). Analoghe considerazioni quindi, valgono anche per il modello fisico (1)<sup>N4</sup>.

N3  
Schema geometrico  
spaziale  
2 lperstatico  
gve+gvi-gdl?0  
(3x4)+(1x8)-(3x6)  
12+8-18  
20-18 = +2

N4  
La versione del modello  
fisico corrispondente a  
quello virtuale di questa  
pagina, si trova fotografata  
in prospetto longitudinale,  
in pianta ed in prospettiva a  
pg.136

.Aggiunta di funi orizzontali



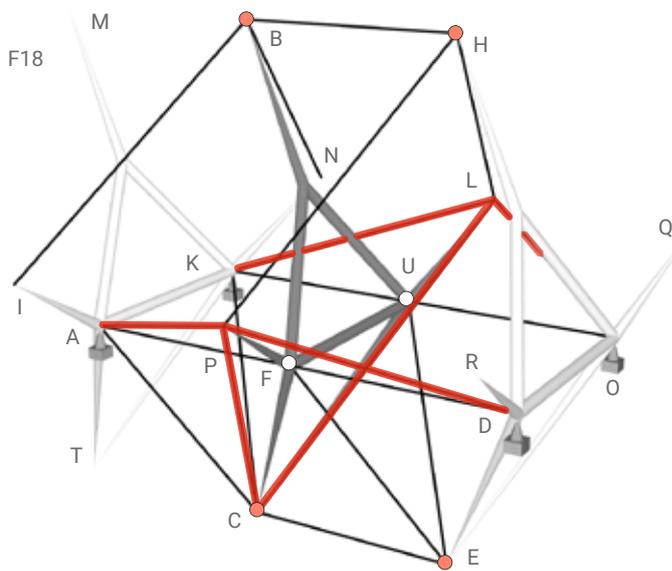
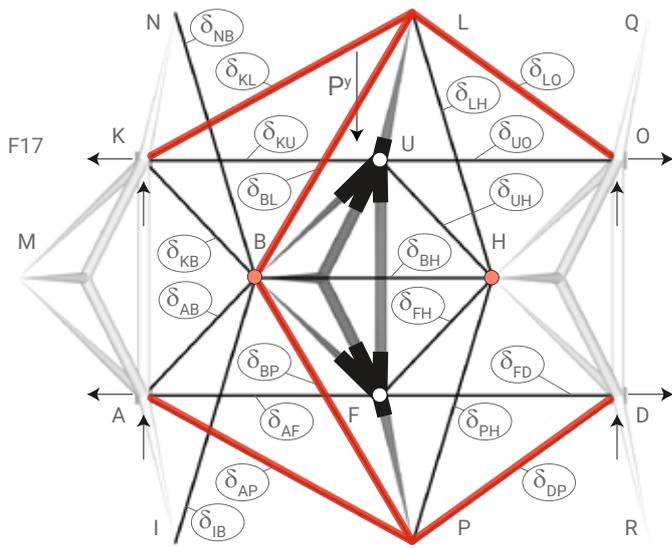
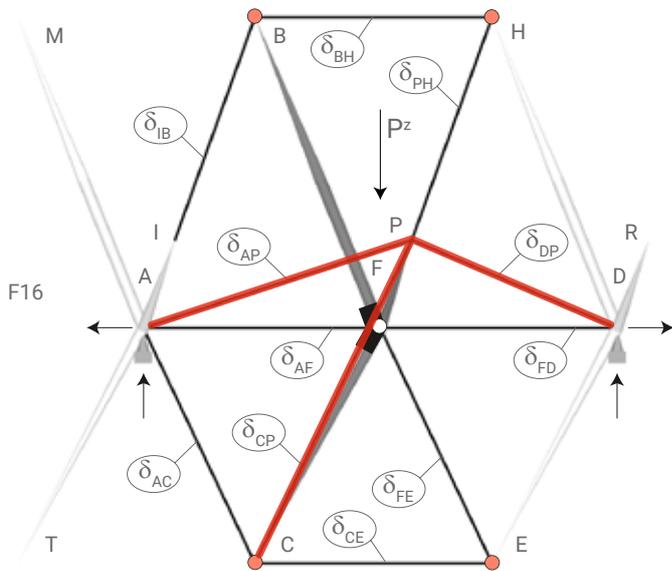
Nella configurazione 8 volte iperstatica<sup>N5</sup>, del modello virtuale (1), in prospetto longitudinale<sup>F13</sup>, in pianta<sup>F14</sup> e in prospettiva<sup>F15</sup>, le funi orizzontali hanno lo scopo di aumentare la resistenza a momento flettente, sia nel piano verticale (funi BH e CE) che in quello orizzontale (funi AF e FD). Il loro inserimento comporta inoltre, la possibile riduzione del grado di vincolo del nodo centrale, che esclusivamente nel piano verticale, può diventare completamente incernierato, cosa non ancora possibile in quello orizzontale. Le stesse considerazioni quindi, valgono anche per il modello fisico (1), in cui si è scelto, per chiarezza, di separare le condizioni relative ai due tipi di momento flettente. La prima cioè, consiste nell'aggiunta di sole le funi adibite a momento flettente nel piano orizzontale<sup>N6a</sup>. La seconda condizione invece, è quella in cui vengono aggiunte anche le funi adibite a momento flettente nel piano verticale, per modello ad asse rettilineo<sup>N6b</sup>. La terza condizione infine, è analoga alla precedente, ma riguarda il tentativo di produrre un modello ad asse curvilineo, fallito, poichè la catenaria sembra consentire difficilmente curvatura in pianta<sup>N6c</sup>.

N5  
Schema geometrico  
spaziale  
8 Iperstatico  
gve+gvi-gdl?0  
(3x4)+(1x14)-(3x6)  
12+14-18  
26-18 = +8

N6  
Le versioni del modello  
fisico corrispondenti a  
quello virtuale di questa  
pagina, si trovano  
fotografate in prospetto  
longitudinale, in pianta ed  
in prospettiva:

a - pg. 137  
b - pg. 138  
c - pg. 139

.Aggiunta di funi oblique



Nella configurazione 14 volte iperstatica<sup>N7</sup>, del modello virtuale (1), in prospetto longitudinale<sup>F16</sup>, in pianta<sup>F17</sup> e in prospettiva<sup>F18</sup>, le funi oblique hanno lo scopo di aumentare la resistenza a momento torcente, collegando il nodo (L) con i nodi (A), (D) e (C). Il loro inserimento comporta inoltre, la possibilità di ridurre ulteriormente il vincolamento del nodo centrale, che può diventare completamente incernierato, sia nel piano verticale, che in quello orizzontale. Analoghe considerazioni quindi, varrebbero anche per il modello fisico (1), che si è scelto tuttavia, di non modificare ulteriormente, poichè non appare utile una ulteriore conferma fisica, relativa al comportamento delle funi oblique.

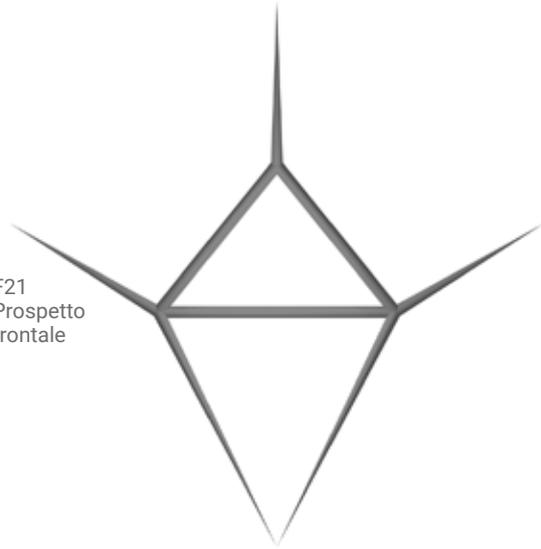
N7  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 14 Iperstatico  
 $gve + gvi - gdl ? 0$   
 $(3 \times 4) + (1 \times 20) - (3 \times 6)$   
 $12 + 20 - 18$   
 $22 - 18 = +14$

.Concio del modello virtuale (1)

F19  
Prospetto  
longitudinale



F21  
Prospetto  
frontale



F20  
Pianta



F22  
Prospettiva



.Concio del modello fisico (1)

F23  
Prospetto  
longitudinale



F25  
Prospetto  
frontale



F24  
Pianta



F26  
Prospettiva

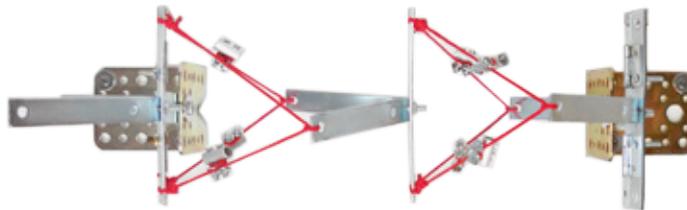


.Modello (1) fisico con sole funi di collegamento dei conchi

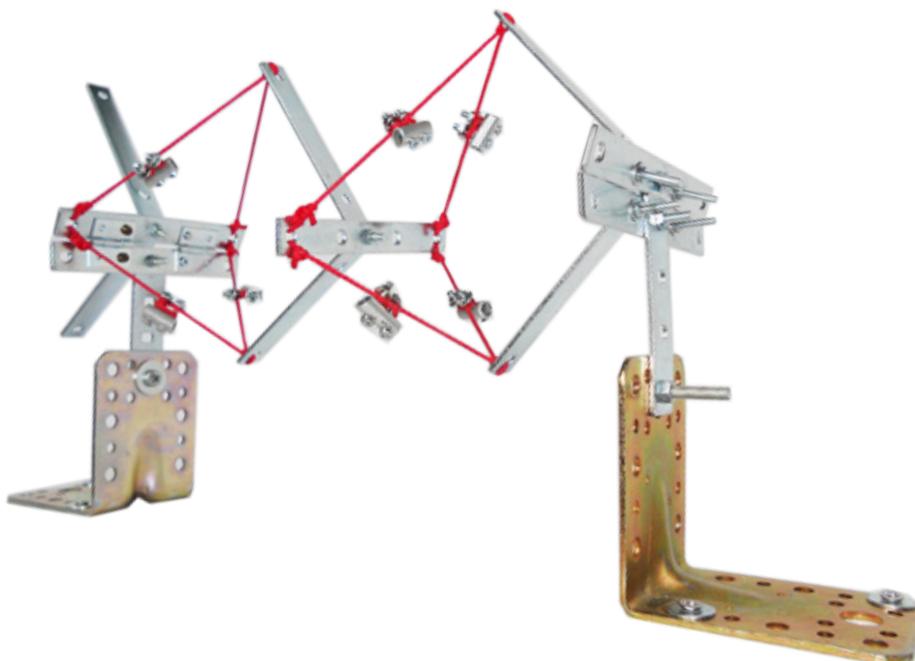
F27  
Prospetto  
longitudinale



F28  
Pianta

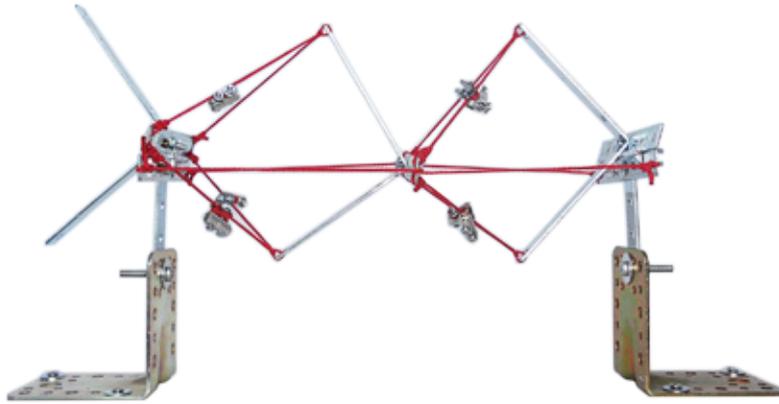


F29  
Prospettiva

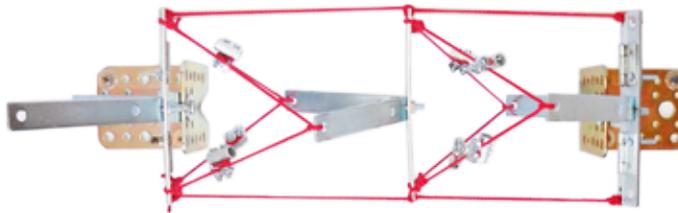


.Modello (1) fisico con aggiunta di funi nel piano (xy)

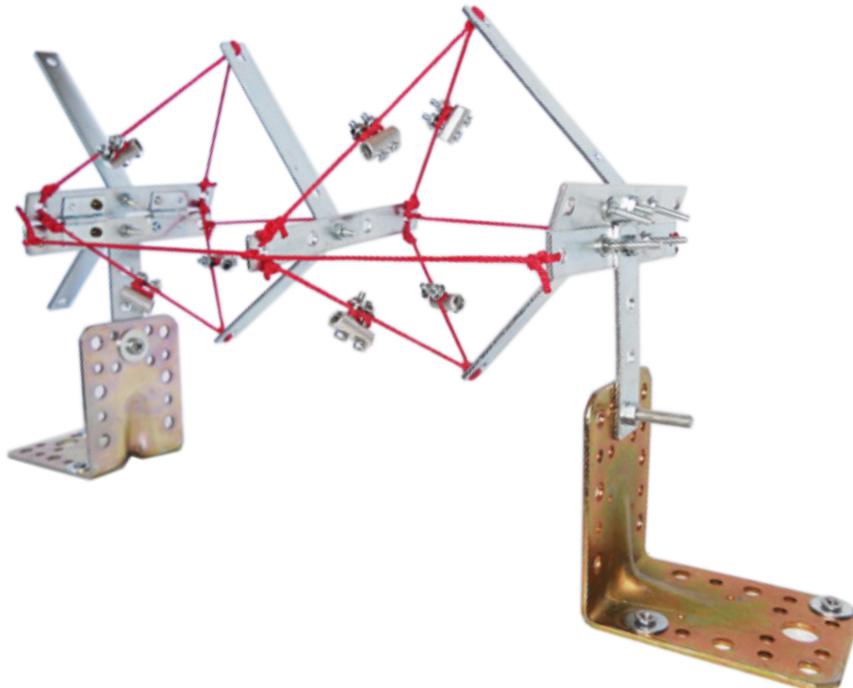
F30  
Prospetto  
longitudinale



F31  
Pianta

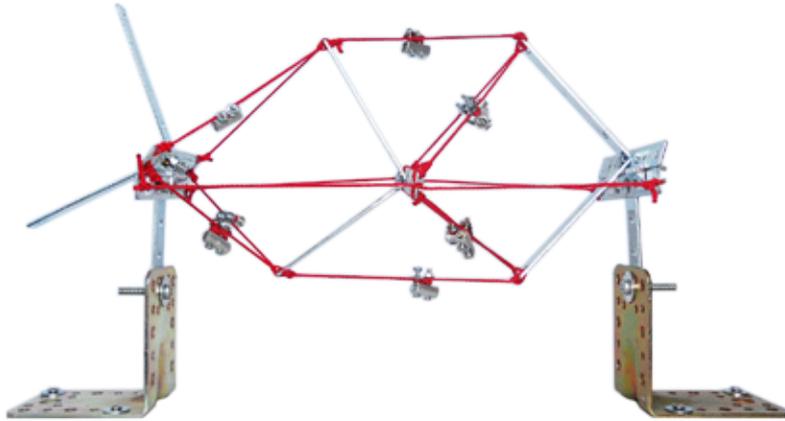


F32  
Prospettiva

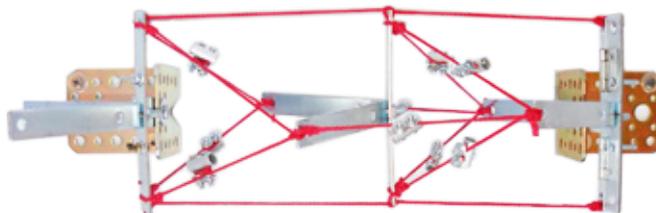


.Modello (1) fisico rettilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)

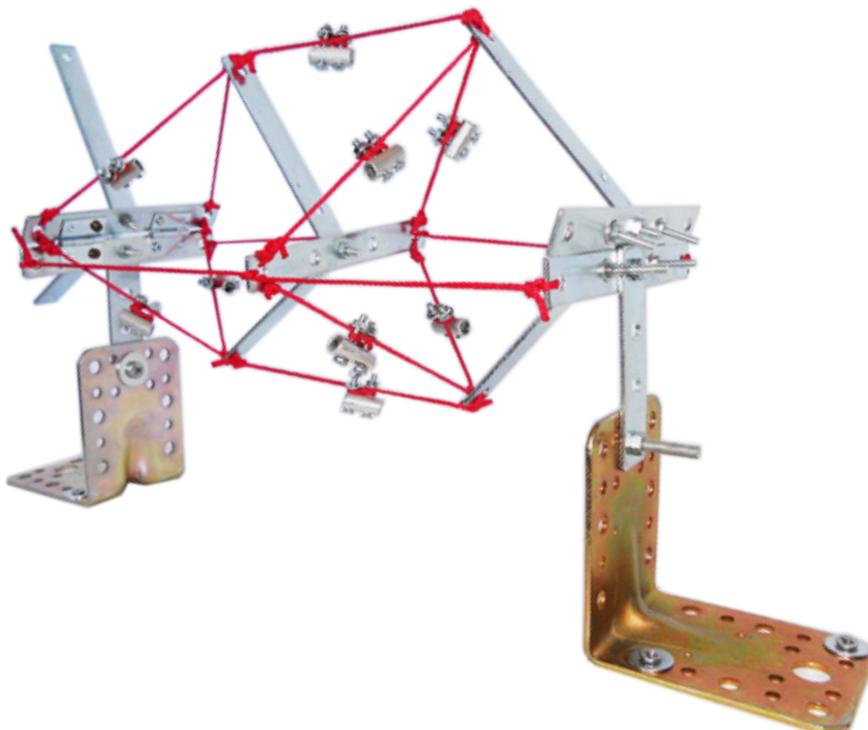
F33  
Prospetto  
longitudinale



F34  
Pianta

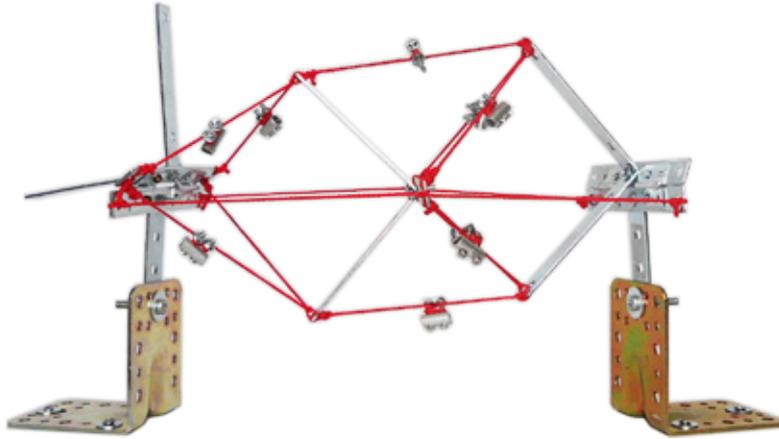


F35  
Prospettiva

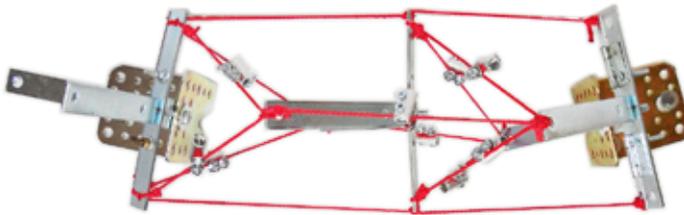


.Modello (1) fisico curvilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)

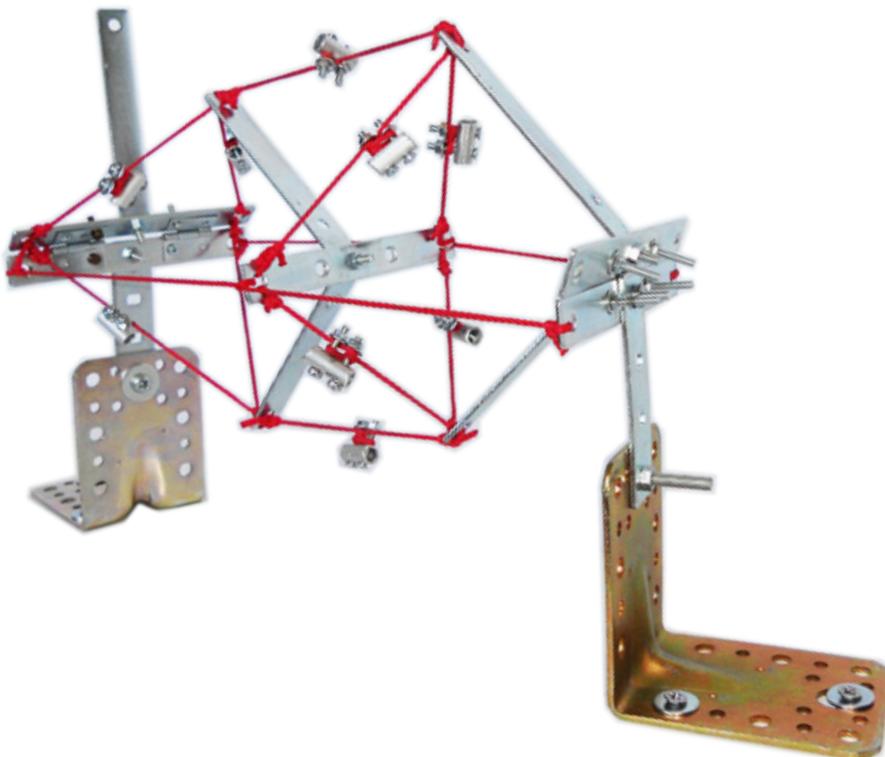
F36  
Prospetto  
longitudinale



F37  
Pianta



F38  
Prospettiva

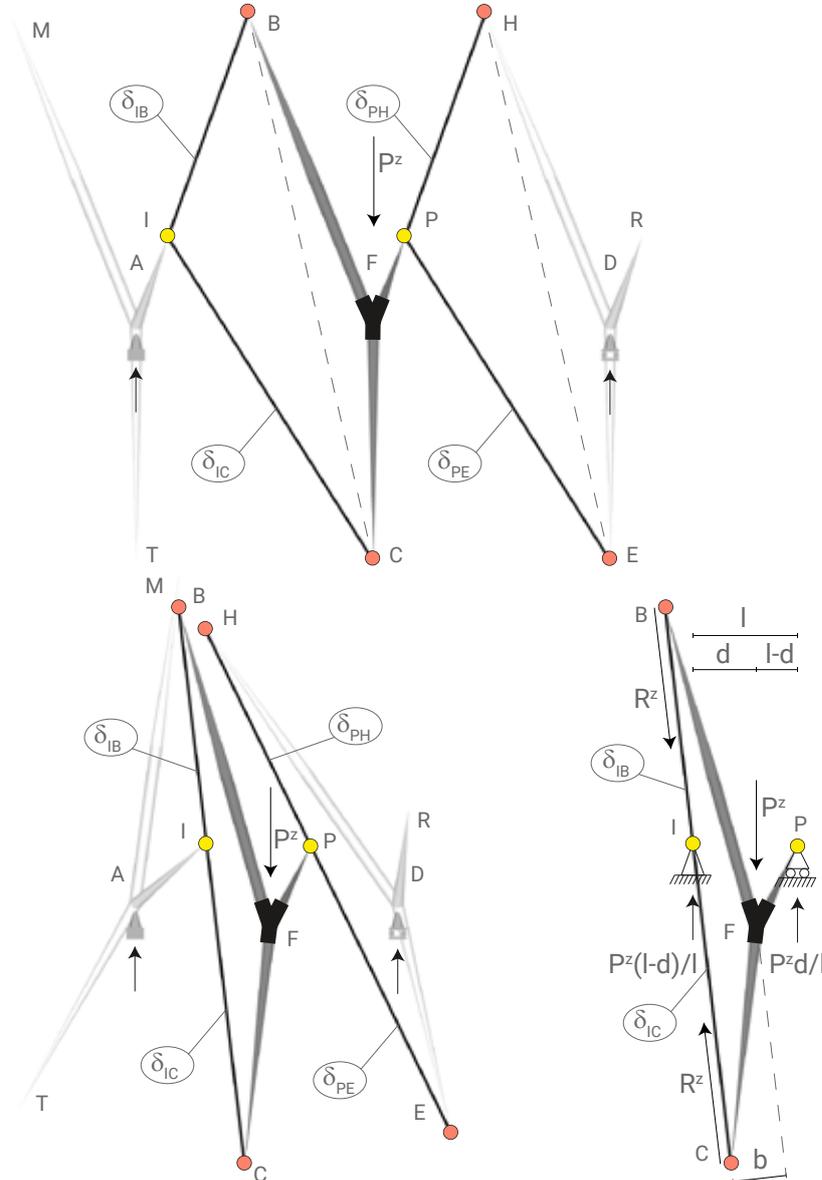


MODELLO ARCHITETTONICO (2): TENSEGRITY MISTO

Il modello Tensegrity misto della struttura intervertebrale, è costituito da conci rigidi<sup>N1</sup> in grado di sopportare tutte le caratteristiche della sollecitazione, collegati con alcune funi disposte in Tensegrity ed altre eventualmente in III-condition. L'intera struttura poi, è vincolata con una cerniera ad una estremità e con carrelli in tutte le altre.

Procedura di collegamento

Il modello (2) può essere prodotto in due modi alternativi, che differiscono riguardo alla connessione dei pezzi rigidi. Nel primo cioè, si costituisce subito la configurazione equilibrata finale, disponendo e pretensionando unicamente in Tensegrity, tutte le funi necessarie, insieme<sup>F5</sup>. Nel secondo modo invece, si costituisce prima una configurazione labile di partenza, con funi pretese, soggette solo a sforzo assiale<sup>F3</sup>, poi la si rende in equilibrio, aggiungendo altre funi in Tensegrity

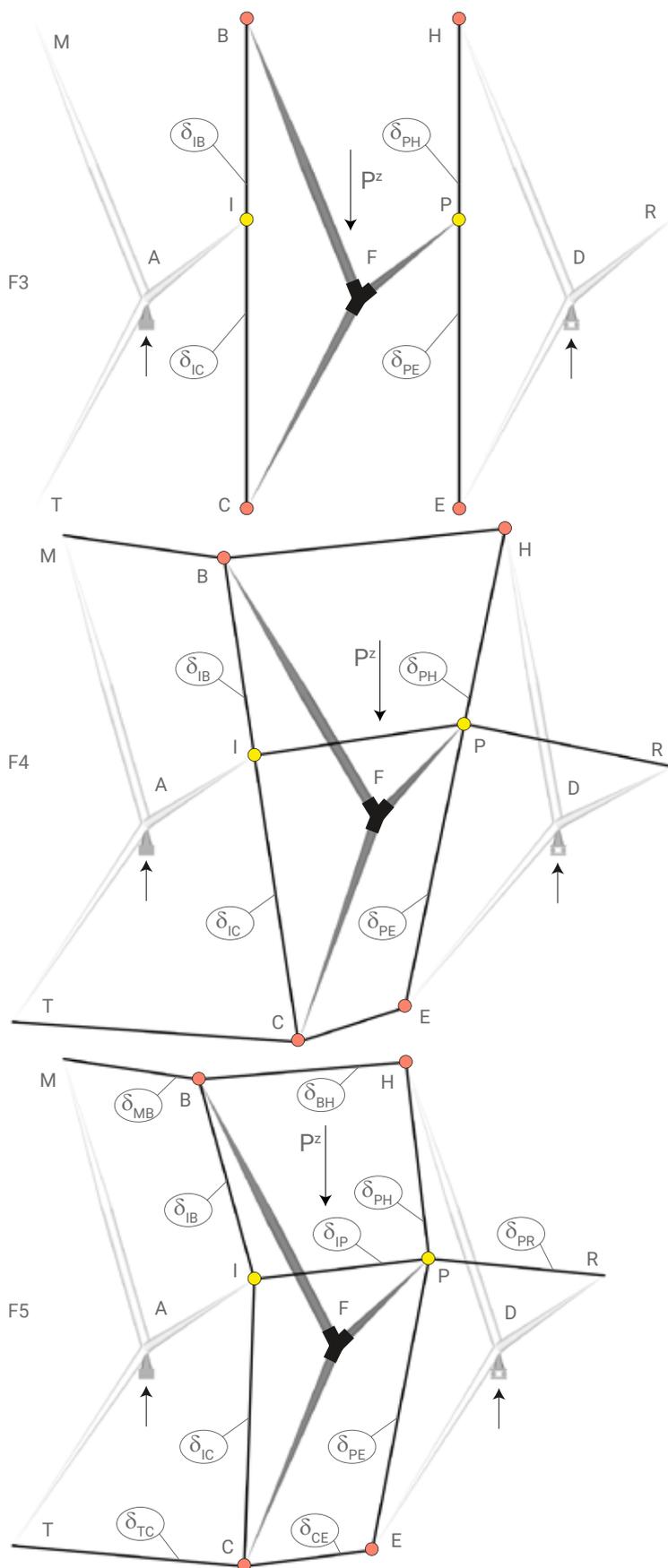


N1  
 Immagini del cono rigido isolato pg. 148-149

N2  
 Trattazione del sistema III-condition pg. 60-63

F1  
Configurazione labile con funi di collegamento non complanari  
 L'equilibrio non sussiste, ne globalmente, ne localmente.

F2a ; F2b  
Configurazione labile con funi di collegamento complanari  
 L'equilibrio sussiste solo localmente, cioè esclusivamente per l'elemento misto, costituito dal cono infinitamente rigido (BCFP) e dal gruppo di funi complanari (IB) ; (IC).

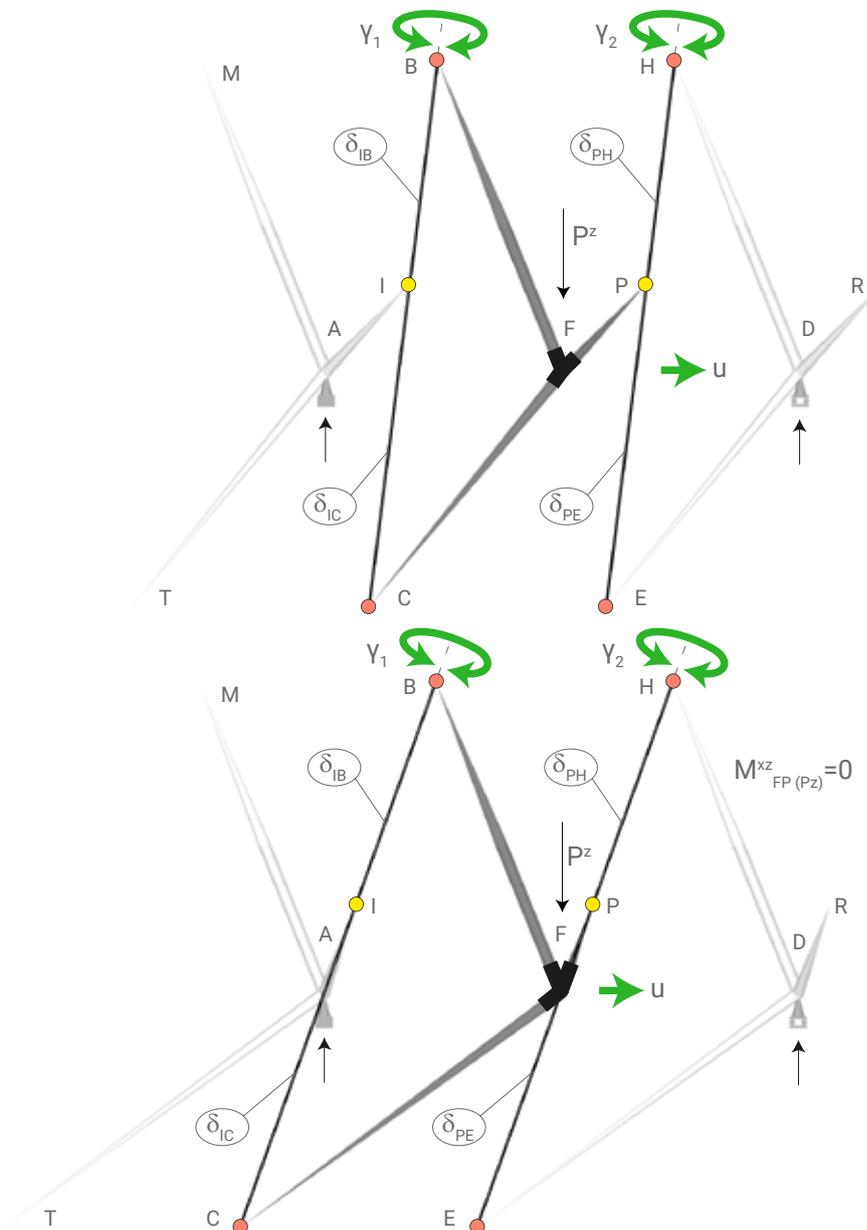


senza pretensione<sup>F4</sup> e infine si applica quest'ultima anche ad esse, provocando una Ill-condition<sup>N2</sup> nelle prime<sup>F5</sup>. La fase iniziale allora, ha lo scopo di produrre una catena globalmente labile<sup>F2a</sup>, con elementi misti, localmente isostatici<sup>F2b</sup>. Questi ultimi dunque, sono composti da una porzione infinitamente rigida, cioè il concio stesso, e da una deformabile, cioè le funi (IB) e (IC), che collegano un dato elemento misto, al precedente. Occorre precisare quindi, che per ottenere l'equilibrio locale, tali funi devono essere complanari, cioè allineate trasversalmente, altrimenti l'equilibrio non sussiste<sup>F1</sup>. La seconda fase poi, ha lo scopo di fornire al modello, equilibrio globale, ed eventuale curvatura spaziale desiderata, inserendo tutte le funi orizzontali, senza pretensione. La lunghezza di queste ultime infatti, determina cinematicamente, la curvatura della la catena nel piano (xz), per rotazione dei conci intorno alle cerniere (I) e (P) e quella nel piano (xy), per analogo movimento, intorno ai nodi (B) e (H). Nella seconda fase tuttavia, il modello è in equilibrio solo globalmente, perchè sussistono ancora le labilità infinitesime nei nodi (I) e (P), dovute alla presenza di funi in Ill-condition non ancora caricate, da azioni ortogonali al loro asse<sup>F4</sup>. Nell'ultima fase dunque, anche le funi orizzontali vengono pretese, pertanto quelle trasversali di ogni dato elemento misto, vengono 'punzionate' da quello precedente, ed ogni labilità infinitesima viene meno, perchè la Ill-condition che le corrisponde, viene caricata<sup>F5</sup>.

Possibili disposizioni della configurazione labile

Le possibili disposizioni della configurazione iniziale labile, che il modello (2) può assumere, differiscono soltanto riguardo all'inclinazione delle aste rigide (FB) ed (FC). In modo simile al modello (1) quindi, la migliore disposizione delle membrature, è senza dubbio quella in cui gli assi delle due coppie di cerniere orizzontali, non sono paralleli<sup>N3</sup>, perchè è l'unica in cui la rotazione cinematica dei conci nel piano orizzontale, avviene con difficoltà, essendo contrastata la loro concomitante traslazione cinematica orizzontale, che ovviamente non può essere del tutto impedita, senza gli ulteriori collegamenti, necessari a fornire l'equilibrio. Tuttavia, si è scelto di esaminare i casi in cui gli assi delle due coppie di cerniere orizzontali risultano paralleli, per notare con maggiore facilità, i movimenti cinematici dei conci nel piano orizzontale. Quindi, nel modello (2), diversamente dal (1), l'inclinazione delle aste rigide, influisce

N3  
Orientamento generico degli  
elementi misti  
F5 - pg. 141

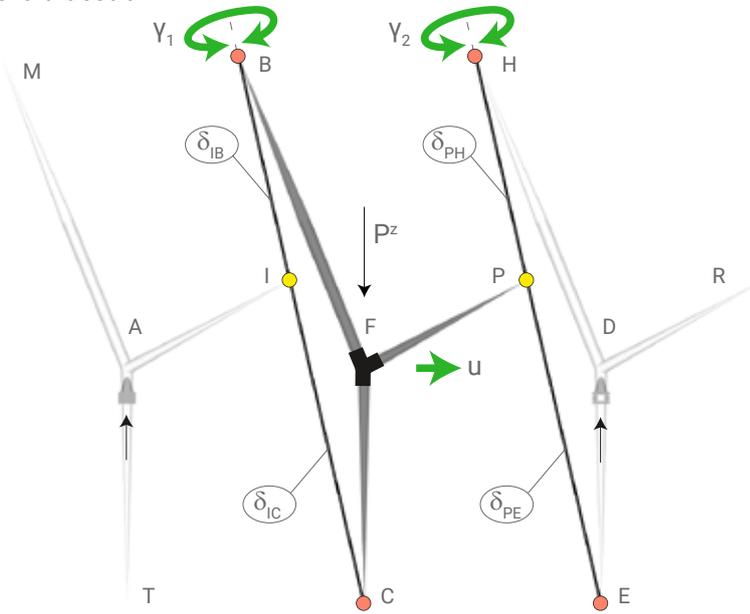


F6  
Configurazione generica, in  
cui gli assi delle due coppie  
di cerniere (BC) e (HE), sono  
inclinati verso destra.

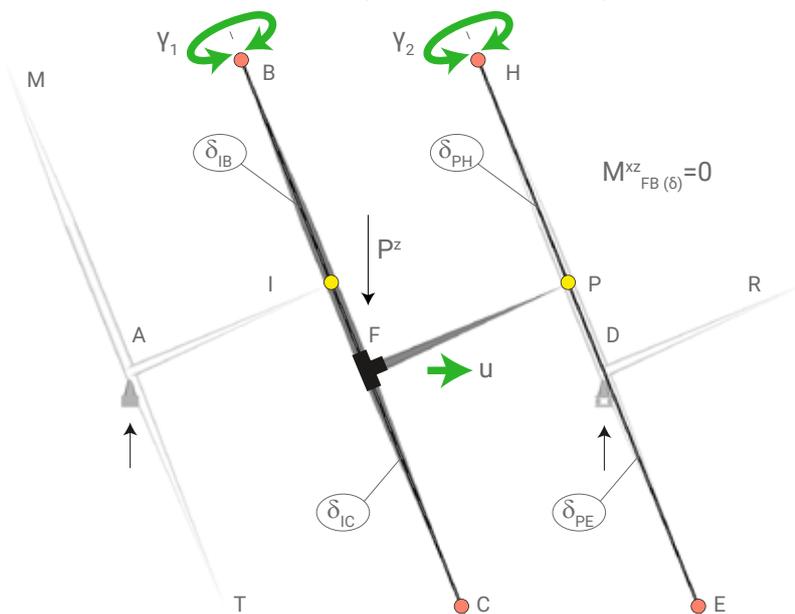
F7  
Configurazione estrema, in  
cui gli assi delle due coppie  
di cerniere (BC) e (HE),  
sono inclinati verso destra.  
Quindi, la componente  
del momento nel piano  
verticale, conferito al nodo  
(F) da parte dell'asta (FP),  
risulta nulla.

significativamente sulla componente nel piano verticale del momento nel nodo (F), fornendo una regola generale. Cioè, più gli assi delle due coppie di cerniere, vengono inclinati verso destra, più aumenta il braccio del momento alla base delle due mensole di sinistra (FB), (FC) e più si riduce quello della mensola di destra (FP)<sup>F6</sup>. Pertanto, il caso limite di tale disposizione, è quello in cui l'asta (FP) è allineata alle funi (PH) e (PE), provocando valore massimo del momento in (F), da parte delle aste alla sua sinistra e valore nullo da parte di quella a destra<sup>F7</sup>. Invece, più gli assi delle due coppie di cerniere vengono inclinati verso sinistra, più diminuisce il braccio del momento alla base delle due mensole di sinistra (FB), (FC) e più aumenta quello della mensola di destra (FP)<sup>F8</sup>. Pertanto, il caso limite di questa seconda disposizione, è quello in cui le mensole a sinistra del nodo (F), sono allineate trasversalmente, conferendo ad esso, valore nullo del momento da parte loro e valore massimo da parte di quella a destra<sup>F9</sup>.

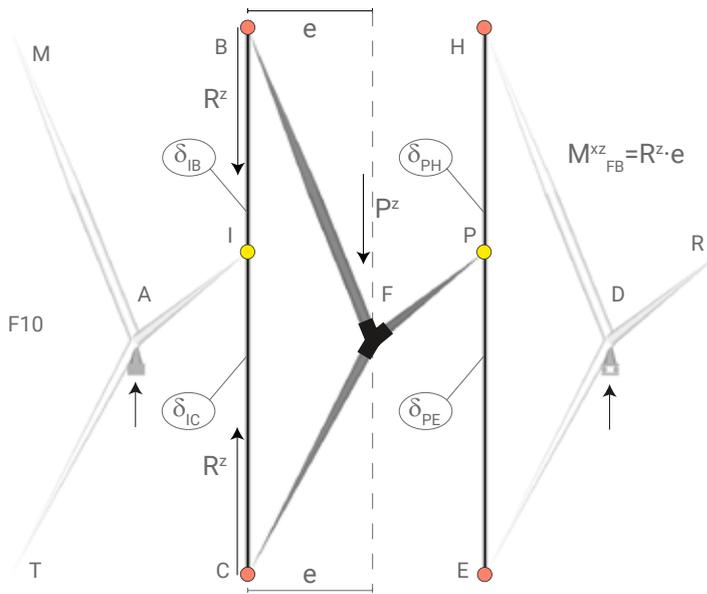
F8  
Configurazione generica, in cui gli assi delle due coppie di cerniere (BC) e (HE), sono inclinati verso sinistra.



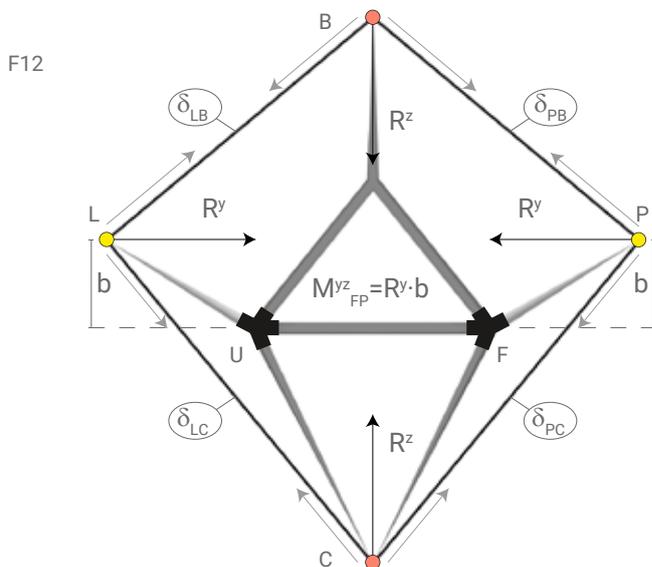
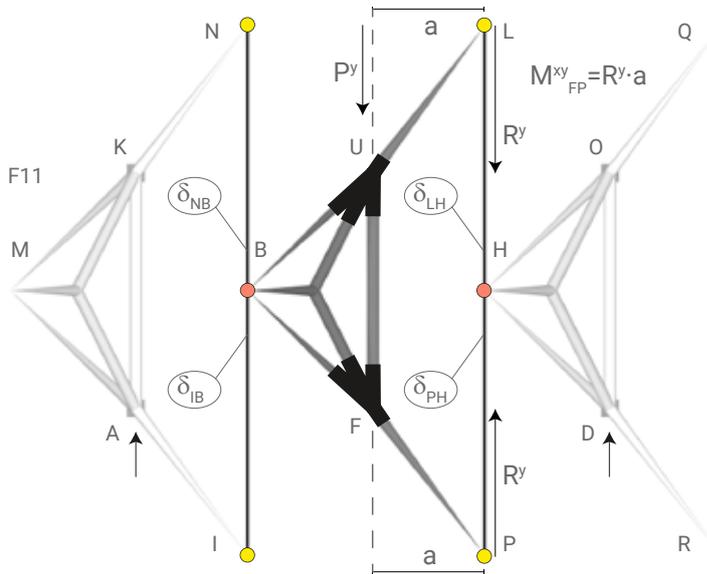
F9  
Configurazione estrema, in cui gli assi delle due coppie di cerniere (BC) e (HE), sono inclinati verso sinistra. Quindi, la componente del momento nel piano verticale, conferito al nodo (F) da parte delle aste (FB) e (FC), risulta nulla.



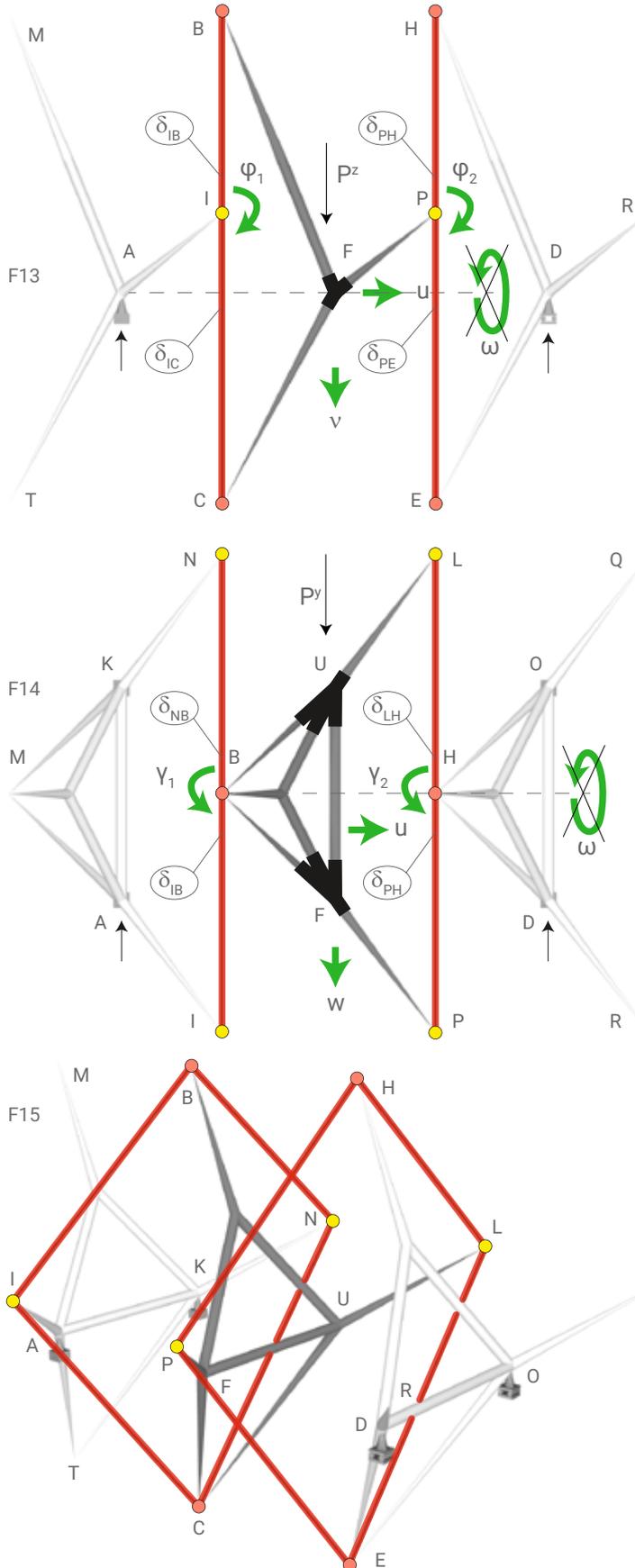
Vincolamento dei nodi centrali



Diversamente dal modello (1), nel (2) non è possibile valutare vincolamenti interni dei nodi centrali, diversi dall'incastro. Infatti, la componente del momento che grava sui nodi (F) e (U), risulta comunque diversa da zero, in ogni piano cartesiano,  $(xz)^{F10}$ ,  $(xy)^{F11}$  e  $(yz)^{F11}$ .



.Configurazione labile da equilibrare scelta per il modello fisico



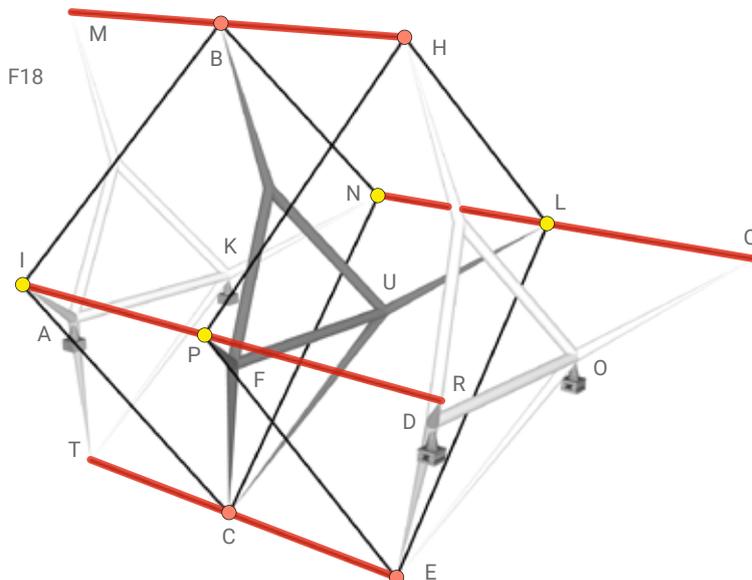
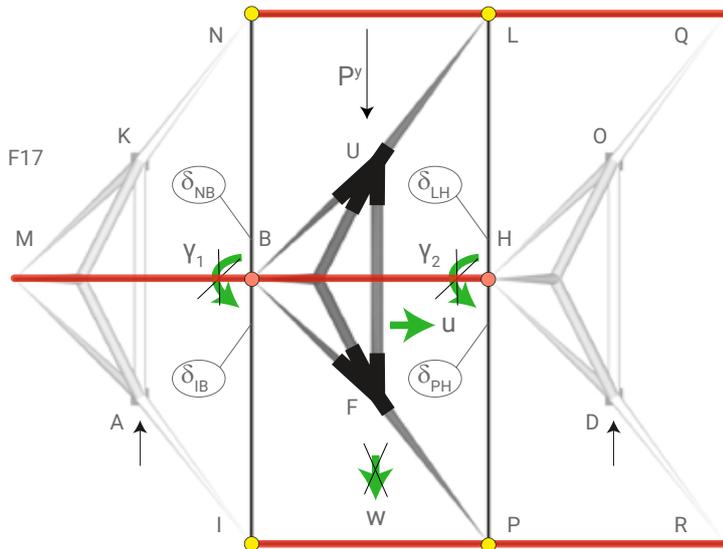
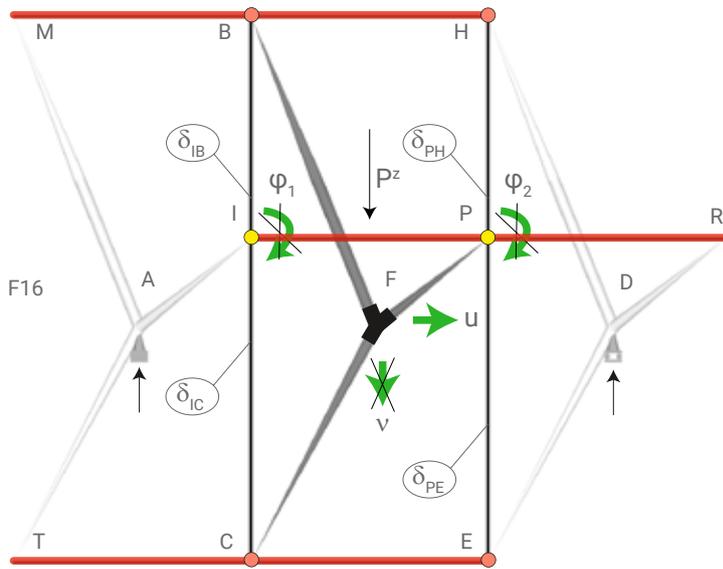
Nella configurazione 4 volte labile<sup>N3</sup>, in prospetto longitudinale<sup>F13</sup>, in pianta<sup>F14</sup> e in prospettiva<sup>F15</sup>, le funi trasversali permettono tutti i movimenti cinematici rotatori e traslatori degli elementi misti, sia in nel piano (xz) che in quello (xy), tranne la rotazione del concio centrale nel piano (yz), conferendo resistenza torsionale alla struttura. Poi, riguardo al vincolamento esterno, occorre precisare che nel nodo (A) è presente una cerniera spaziale (vincolo triplo), nel nodo (D) un carrello spaziale bidirezionale (vincolo doppio in z e in y) e nei nodi (K), (O) un carrello monodirezionale (vincolo singolo in z). Analoghe considerazioni quindi, valgono anche per la corrispondente versione del modello fisico (2)<sup>N4</sup>.

N3  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 4 labile  
 Ufficialmente il sistema risulta 3 volte labile,  
 ma di fatto lo è 4 volte, per il seguente motivo:  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1) + (1 \times 8) - (3 \times 6)$   
 $7 + 8 - 18$   
 $15 - 18 = -3$

Il carrello in (O), che fornisce al sistema un grado di vincolo esterno sovrabbondante, non impedisce in alcun modo i 4 movimenti indipendenti possibili, che restano comunque, le due rotazioni nel piano (xy) e le due nel piano (xz). Il sistema quindi, si comporta come se il suo grado di vincolo esterno fosse 6 e non 7.

N4  
 La versione del modello fisico corrispondente a quello virtuale di questa pagina, si trova fotografata in prospetto longitudinale, in pianta ed in prospettiva a pg.150

.Aggiunta di funi orizzontali senza pretensione



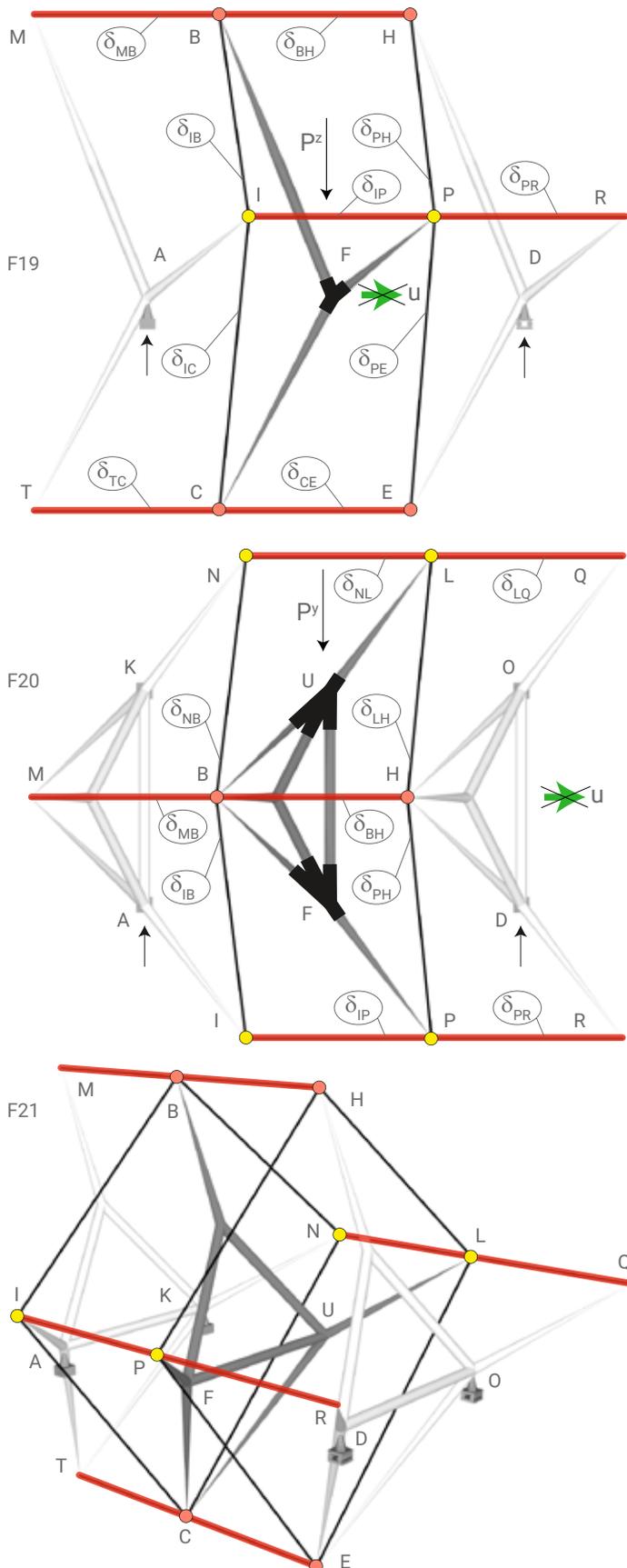
Nella configurazione 4 volte staticamente indeterminata<sup>N5</sup>, del modello virtuale (2), in prospetto longitudinale<sup>F16</sup>, in pianta<sup>F17</sup> e in prospettiva<sup>F18</sup>, le funi orizzontali senza pretensione, hanno lo scopo di impedire tutti i cinematismi globali finiti. Pertanto, rimane possibile soltanto la traslazione orizzontale cinematica infinitesima, dovuta all'assenza di caricamento in ill-condition, delle funi trasversali. Simili considerazioni quindi, valgono anche per il modello fisico (2). Quest'ultimo tuttavia, differisce da quello virtuale, soltanto riguardo all'ordine di caricamento delle funi. Cioè, prima sono state inserite solo quelle nel piano (xy), ma con pretensione<sup>N6a</sup>. Poi, anche quelle nel piano (xz), sempre con pretensione<sup>N6b</sup>. Il modello fisico quindi, è stato fotografato soltanto con funi dotate di pretensione, perchè la sua assenza risulta molto meno percepibile rispetto al modello virtuale e quindi, in quello fisico, si è scelto di non considerarla.

N5  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 5 Iperstatico  
 4 Staticamente indeterminato  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1) + (1 \times 16) - (3 \times 6)$   
 $7 + 16 - 18$   
 $23 - 18 = +5$

N6  
 Le versioni del modello  
 fisico corrispondenti a  
 quello virtuale di questa  
 pagina, si trovano  
 fotografate in prospetto  
 longitudinale, in pianta ed in  
 prospettiva:

a - pg.151  
 b - pg.152

.Applicazione della pretensione nelle funi orizzontali



Nella configurazione 4 volte staticamente indeterminata<sup>N7</sup>, del modello virtuale (2), in prospetto longitudinale<sup>F19</sup>, in pianta<sup>F20</sup> e in prospettiva<sup>F21</sup>, l'applicazione della pretensione nelle funi orizzontali, ha lo scopo di caricare quelle trasversali normalmente al loro asse, impedendo così, anche l'ultimo cinematisma rimasto possibile, cioè la traslazione orizzontale infinitesima di tipo Ill-condition. Analoghe considerazioni quindi, valgono anche per il modello fisico (2), sia ad asse rettilineo<sup>N8a</sup> che curvilineo<sup>N8b</sup>. Infatti, la sperimentazione sulla curvatura nel piano (xy) ha avuto successo, diversamente da quanto accaduto per il modello (1).

N7  
Il grado di staticità della struttura non varia, se si applica o meno la pretensione nelle funi.

N8  
Le versioni del modello fisico corrispondente a quello virtuale di questa pagina, si trovano fotografate in prospetto longitudinale, in pianta ed in prospettiva:

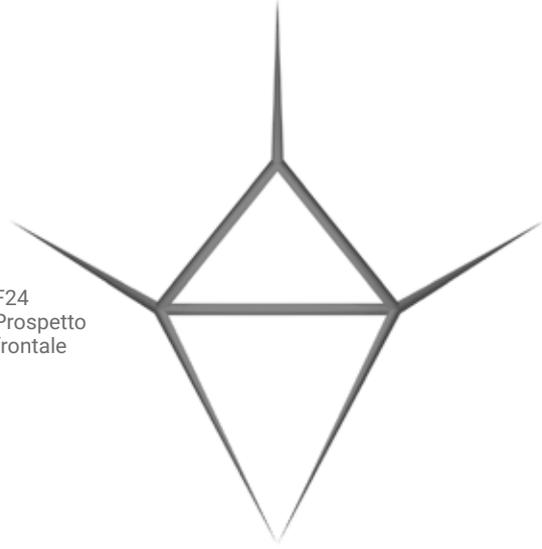
a - pg.152  
b - pg. 153

.Concio del modello virtuale (2)

F22  
Prospetto  
longitudinale



F24  
Prospetto  
frontale



F23  
Pianta



F25  
Prospettiva



.Concio del modello fisico (2)

F26  
Prospetto  
longitudinale



F28  
Prospetto  
frontale



F27  
Pianta



F29  
Prospettiva

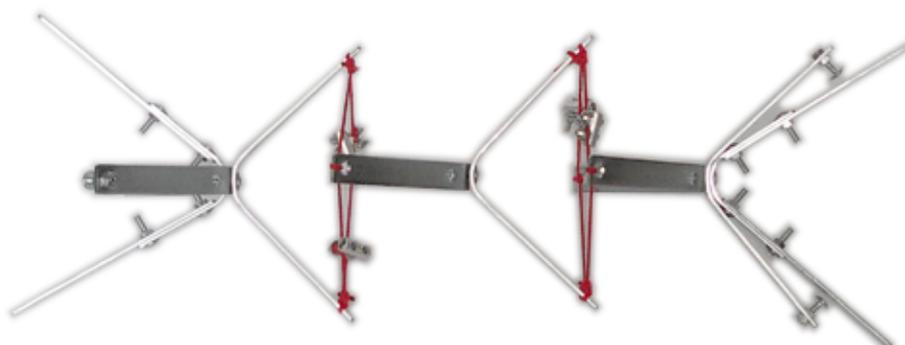


.Modello (2) fisico con sole funi nel piano (yz)

F30  
Prospetto  
longitudinale



F31  
Pianta

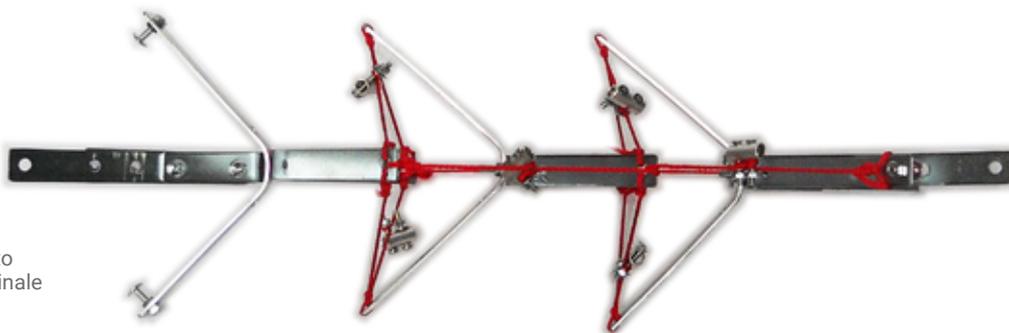


F32  
Prospettiva

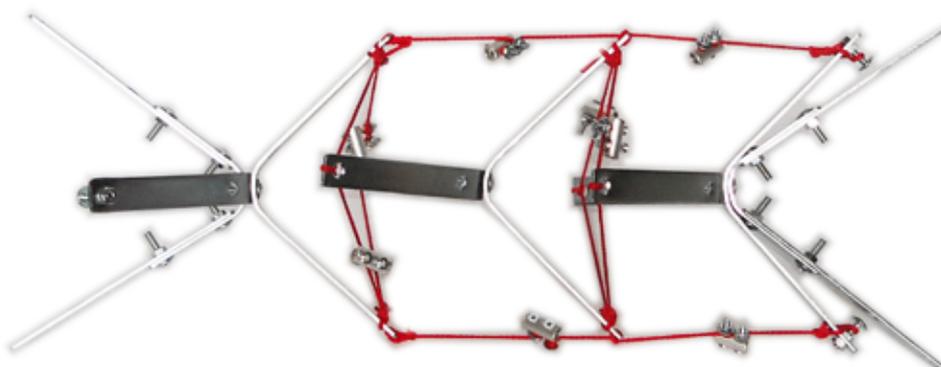


.Modello (2) fisico con aggiunta di funi nel piano (xy)

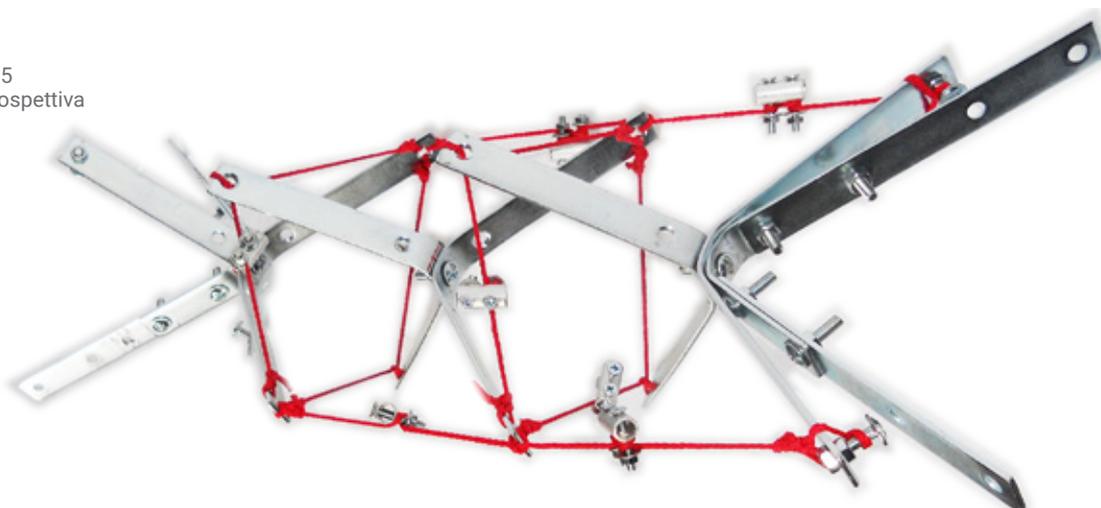
F33  
Prospetto  
longitudinale



F34  
Pianta

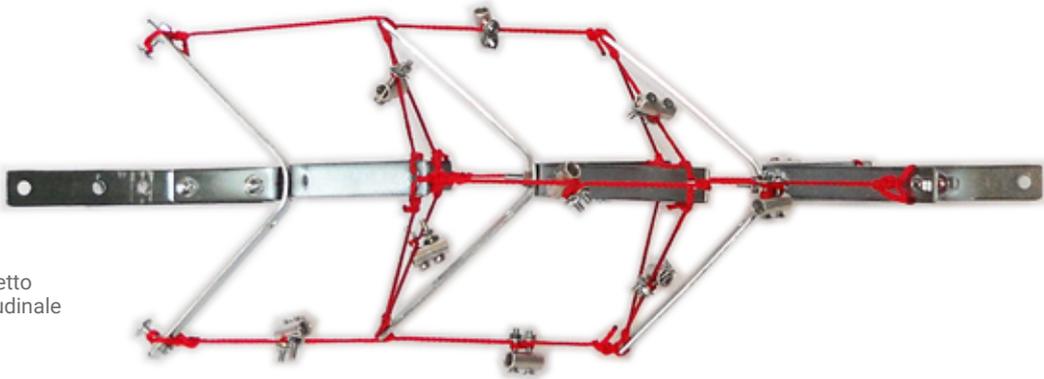


F35  
Prospettiva



.Modello (2) fisico rettilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)

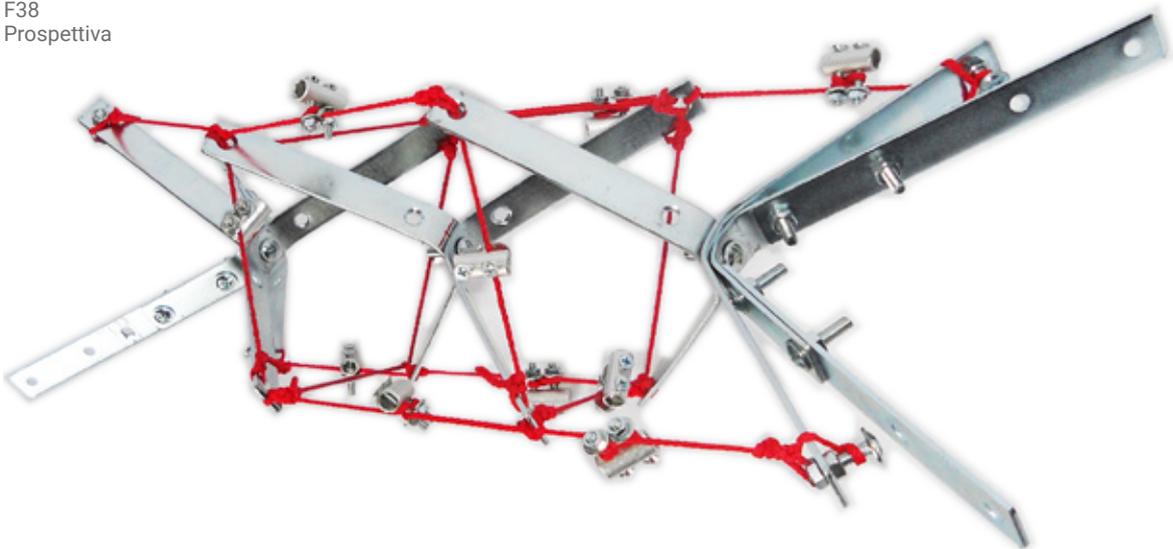
F36  
Prospetto  
longitudinale



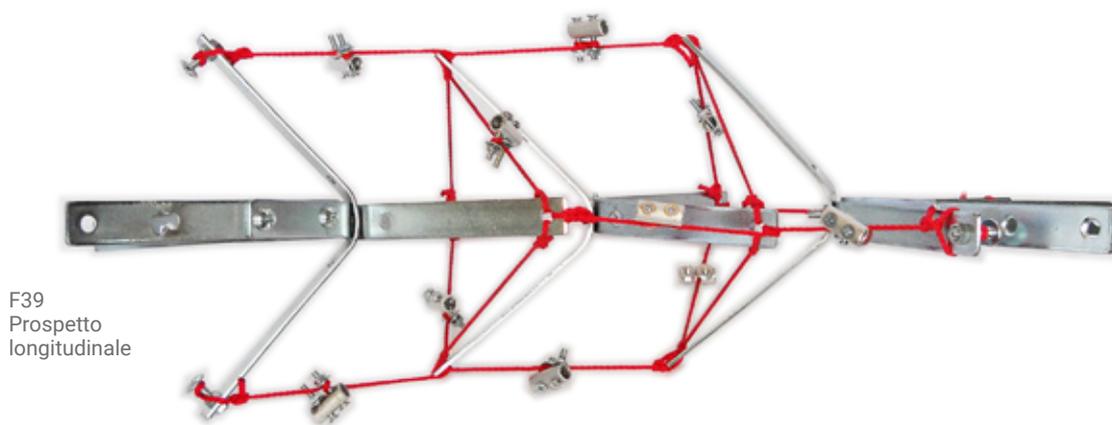
F37  
Pianta



F38  
Prospettiva



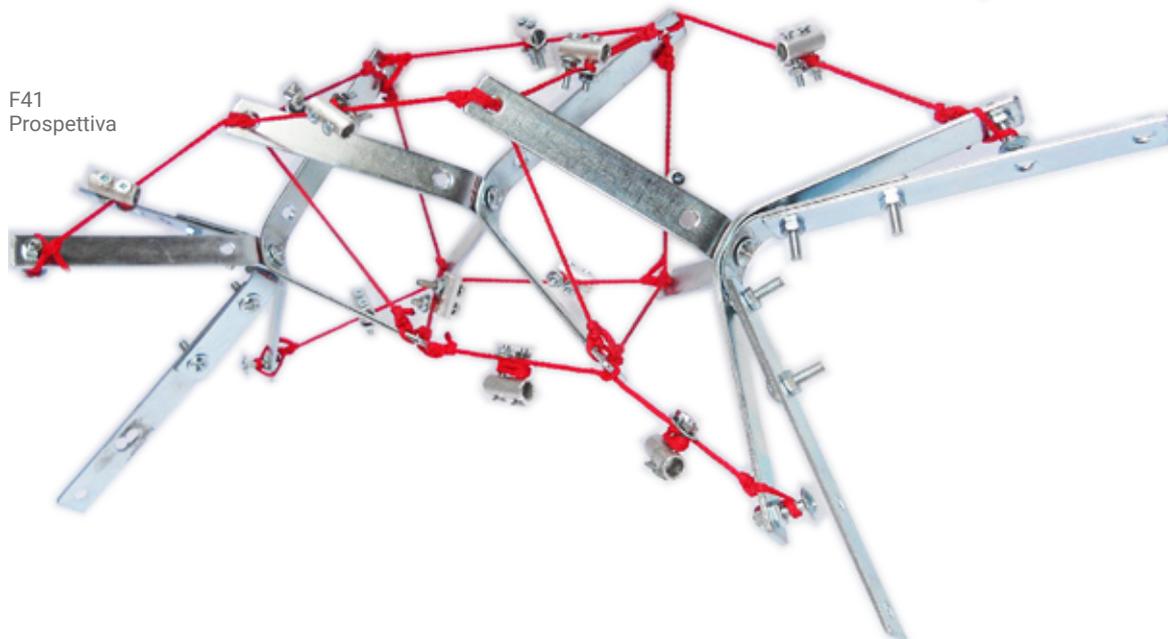
.Modello (2) fisico curvilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)



F39  
Prospetto  
longitudinale



F40  
Pianta



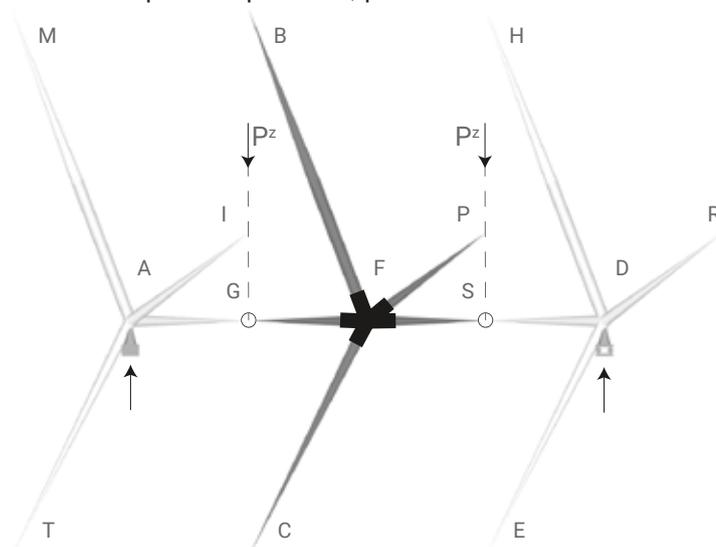
F41  
Prospettiva

## MODELLO ARCHITETTONICO (3): RETICOLARE MISTO CON UNA CERNIERA UNICA

Il modello reticolare misto ad una cerniera, della struttura intervertebrale, è costituito da conci rigidi<sup>N1</sup> in grado di sopportare tutte le caratteristiche della sollecitazione, collegati tra loro da una cerniera unica e da funi disposte in Tensegrity. L'intera struttura poi, è vincolata con una cerniera ad una estremità e con carrelli in tutte le altre.

### .Disposizione delle membrature

La geometria iniziale del modello (3), prevede una catena labile, di conci infinitamente rigidi, collegati unicamente da una cerniera spaziale<sup>F1</sup>. In questa prima fase pertanto, la posizione reciproca degli elementi discreti è ininfluente, perchè destinata a cambiare radicalmente, dopo l'inserimento delle funi. Nella seconda fase quindi, vengono applicate solo tutte quelle orizzontali con pretensione, per fornire alla struttura, equilibrio ed eventuale curvatura spaziale desiderata<sup>F2</sup>. In questa fase cioè, si decide la forma pressochè finale del modello, poichè la lunghezza delle funi pretensionate, determina cinematicamente la rotazione reciproca dei conci nello spazio, intorno alle cerniere (G) ed (S). Tuttavia, occorre precisare che, anche se la curvatura del modello (3), ha natura spaziale, durante l'analisi strutturale, la sua deformata, potrà essere scomposta in rotazioni piane indipendenti, in (xy), in (xz) e nel piano ortogonale all'asse (GS)<sup>N2</sup>. Pertanto, sarà possibile ricondursi ad una situazione simile, a quanto già accade più fisiologicamente, nel modello (2). Poi, l'inserimento di tutte le funi orizzontali, costituisce la prima configurazione equilibrata del sistema, di cui è opportuno valutare subito, l'inclinazione reciproca degli elementi rigidi, per aumentarne il più possibile l'efficienza. Infatti, se gli assi dei conci sono tutti allineati, costituiscono di fatto un sistema III-condition, che per la prima volta in questa tesi, compare su elementi rigidi<sup>N3</sup>. Tale configurazione infatti, è stata scelta come quella di partenza, per lo studio del modello fisico (3),



N1  
Immagine del cono rigido  
isolato pg. 160-161

N2  
Vedere la teoria sul calcolo  
geometrico dei movimenti  
spaziali, nel capitolo  
'Impostazioni generali'  
pg. 186 - 199

N3  
Modello virtuale (3), scelto  
per la sperimentazione fisica  
pg. 157 - 159

F1  
Configurazione labile  
che occorre equilibrare,  
costituita da una catena di  
conci infinitamente rigidi,  
incernierati, ed allineati in  
orizzontale (A), (G), (S) e (D).

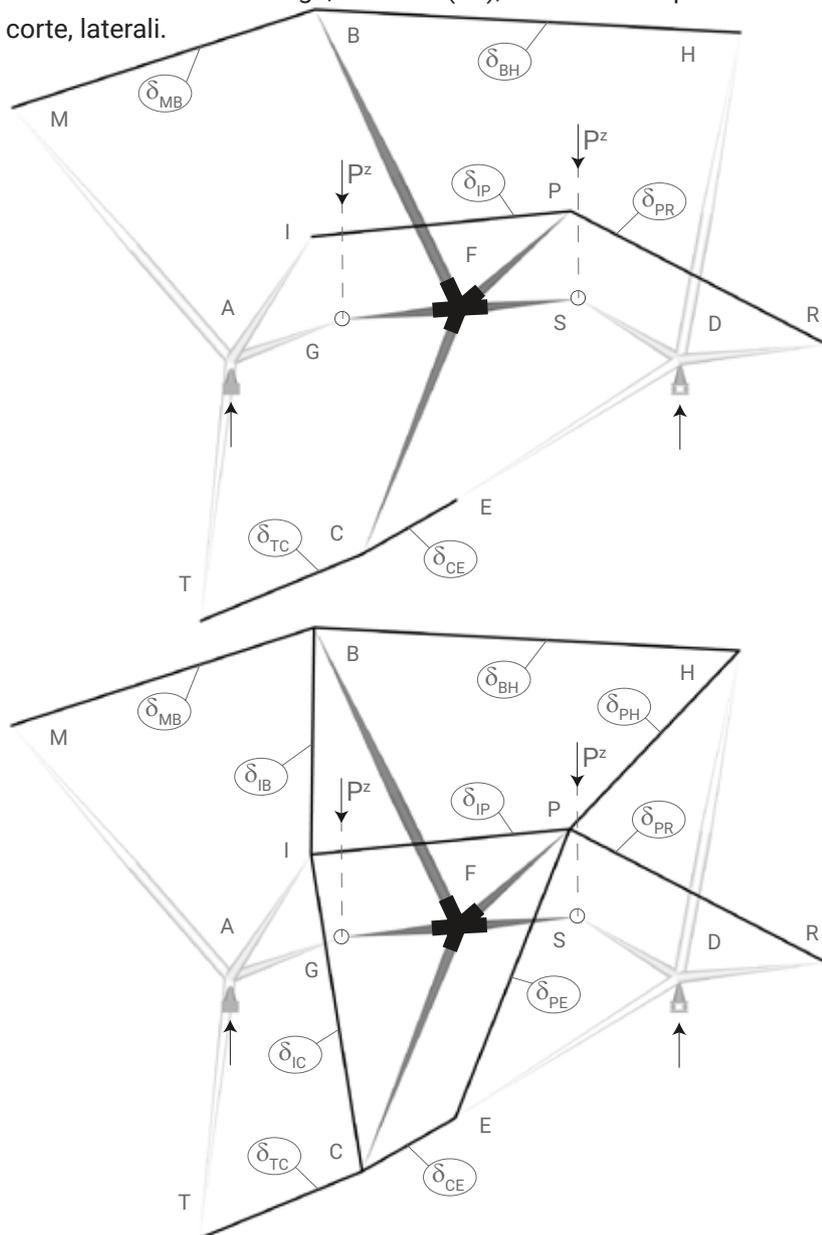
N4  
Arco a spinta eliminata  
pg. 43

N5  
Modello fisico (3), in tutte le  
configurazioni ipotizzate per  
quello virtuale, fotografato  
in prospetto longitudinale, in  
pianta e in prospettiva  
pg. 162-165

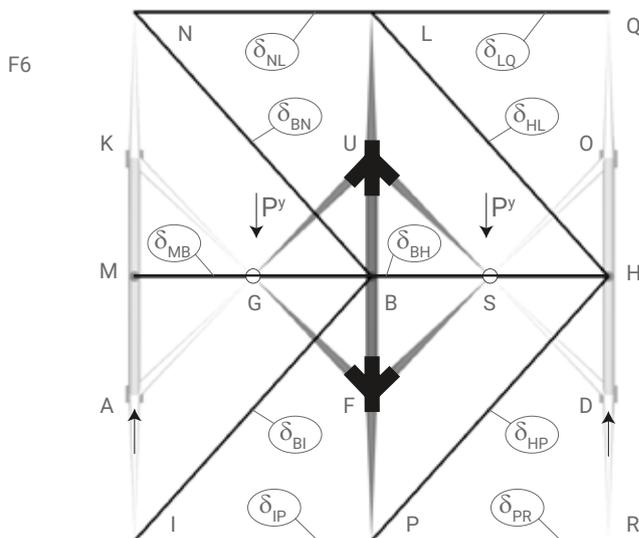
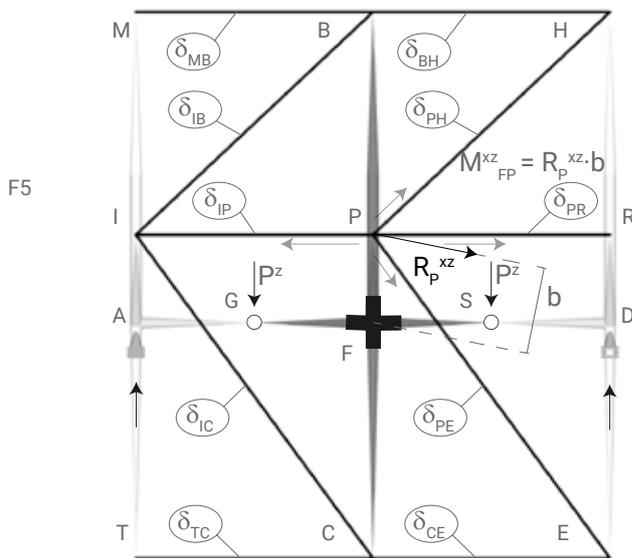
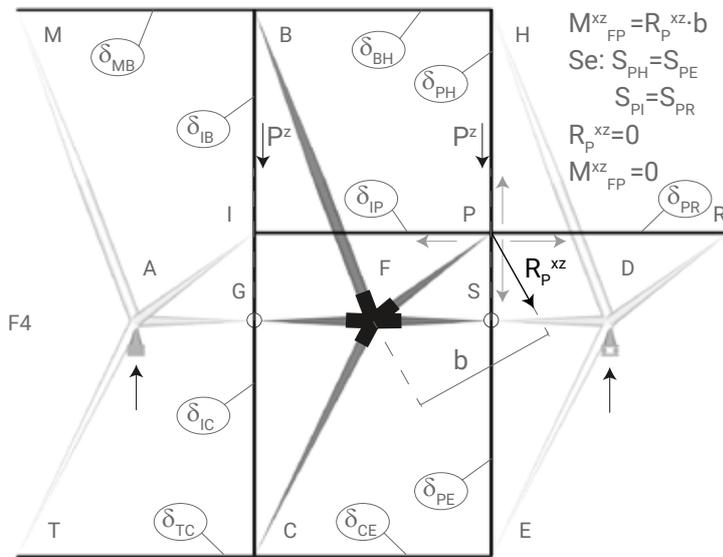
F2  
Prima configurazione  
equilibrata del sistema,  
necessariamente costituita,  
sia di funi nel piano (xy), che  
da quelle nel piano (xz).

F3  
Configurazione iperstatica  
con funi trasversali adibite a  
momento torcente.

perchè, nonostante sia la meno efficiente di tutte, è quella da cui si può intuire meglio, la deformata rigida. Se invece, si allestiscono tutte le funi orizzontali pretensionate, in modo che diano al modello una curvatura non nulla, le sue porzioni infinitamente rigide, sfruttano il beneficio del funzionamento ad arco autoequilibrato<sup>N4</sup>, situazione assai più efficiente della precedente. Nella terza fase infine, vengono inserite anche le funi trasversali con pretensione, che servono ad irrigidire il sistema a torsione<sup>F3</sup>. Queste ultime pertanto, dovrebbero essere allestite, in modo da influire il meno possibile sul cambiamento della forma ottenuta in precedenza, per evitare di imporre al sistema, una ulteriore torsione non obbligatoria. Infine, occorre precisare che il modello fisico (3)<sup>N5</sup>, presenta una semplificazione formale, che lo rende una volta più iperstatico di quello virtuale, senza tuttavia modificarne il funzionamento generale. Cioè, esclusivamente per semplicità costruttiva, al posto di un' unica mensola verticale molto lunga, centrale (FB), si è scelto di produrne due più corte, laterali.

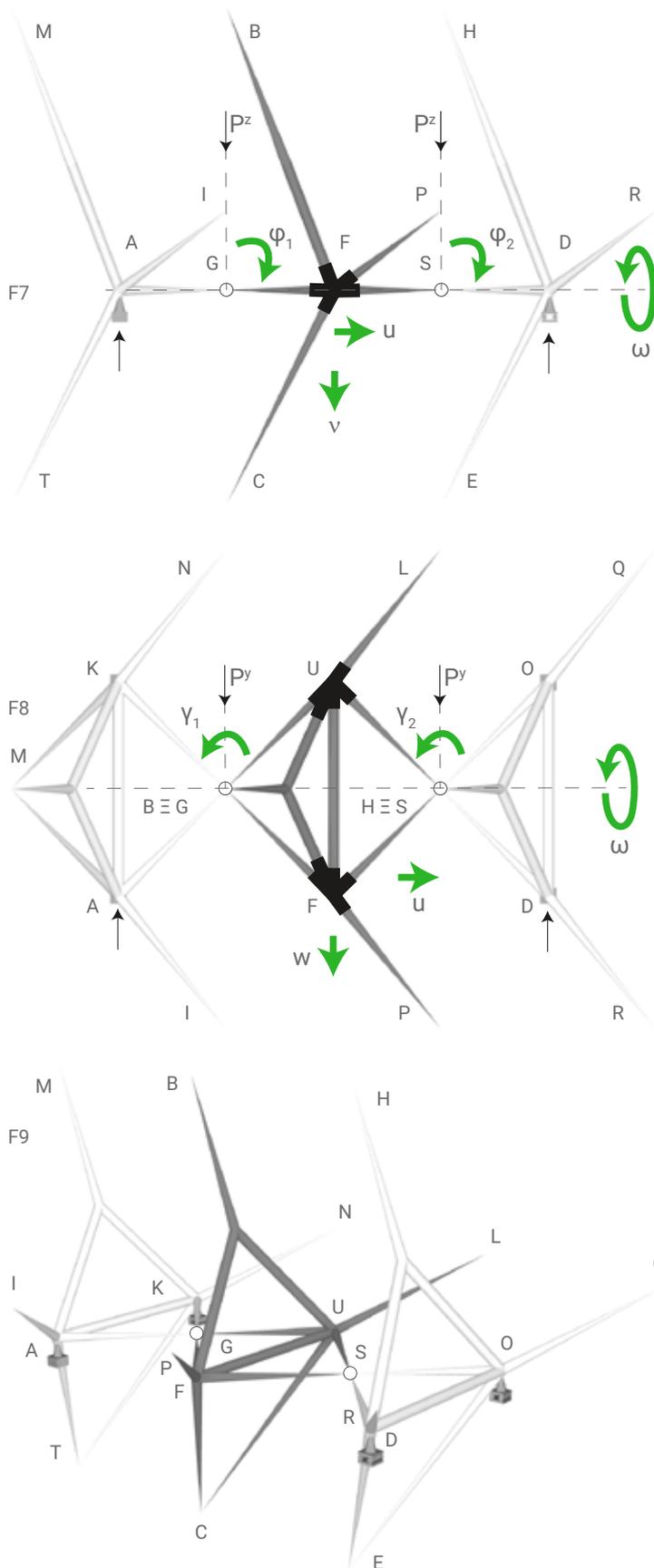


Possibili orientamenti delle mensole



Analogamente al modello (2), nel (3) bisogna vincolare le mensole ai nodi centrali (F) e (U), esclusivamente con l'incastro, poichè la componente del momento che grava su di loro, risulta generalmente diversa da zero, in ogni piano cartesiano. Tuttavia, è possibile valutare due principali orientamenti delle mensole, con lo scopo di ridurre il momento alla loro base. Nel primo caso allora, se si considera l'asta (FP) inclinata, in modo che il nodo (P) risulti allineato con (H) ed (E) in prospettiva longitudinale<sup>F4</sup>, può verificarsi la condizione in cui il momento conferito al nodo (F), dall'asta (FP), sia nullo esclusivamente nel piano (xz). Tale condizione quindi, si presenta soltanto quando gli sforzi nelle funi collegate al nodo (P), sono uguali lungo entrambe le direzioni del piano, provocando il completo scaricamento dell'asta (FP), nel piano (xz). Ovviamente, tale condizione non si verifica con facilità, ma sembra comunque utile metterla in evidenza. La seconda ipotesi, invece, vede tutte le mensole del concio allineate, sia in (xz)<sup>F5</sup>, che in (xy)<sup>F6</sup>. Questa condizione però, non è senza dubbio la migliore, sia per la grande instabilità da sforzo normale ai cui le mensole vengono sottoposte, sia perchè il difficile scaricamento dell'asta (FP) nel piano (xz), diventa ancor meno probabile rispetto al caso precedente, in quanto le funi collegate al nodo (P), non hanno alcun tipo di simmetria.

.Configurazione labile da equilibrare scelta per il modello fisico

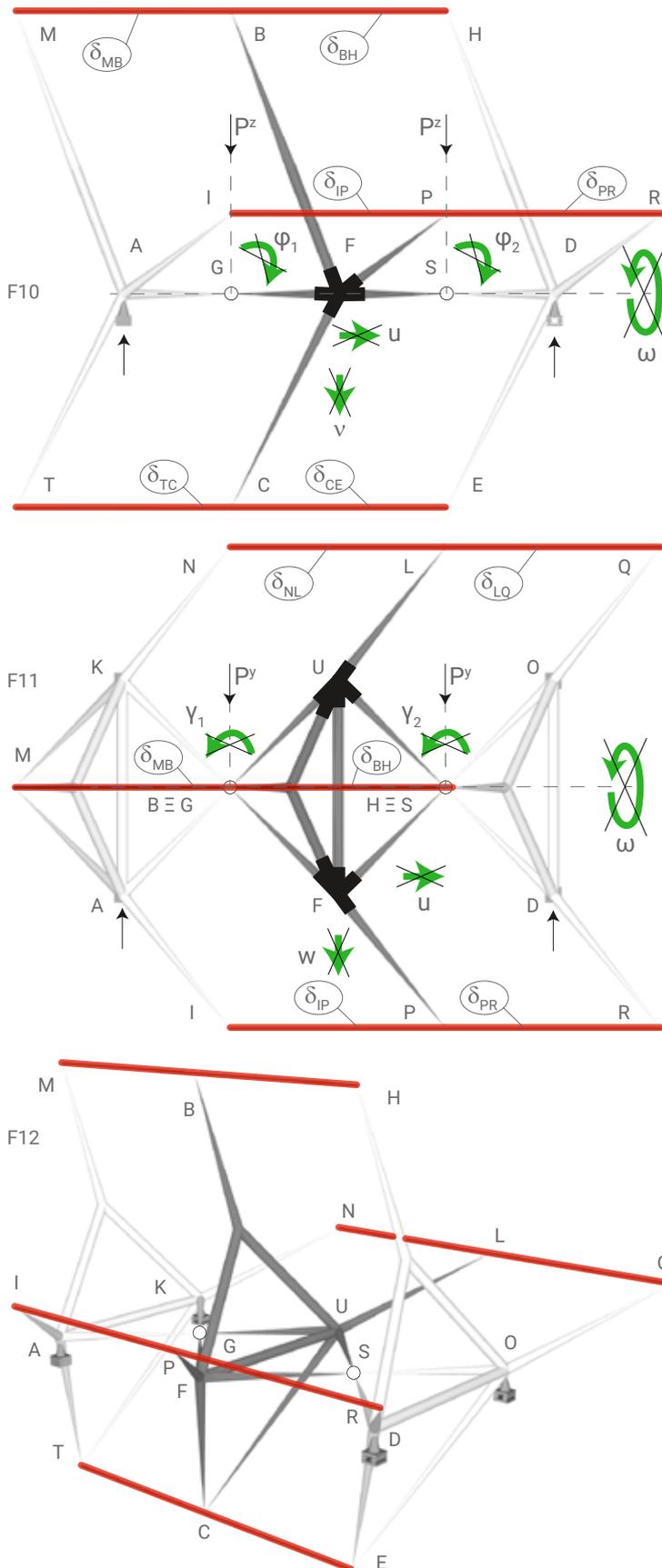


Nella configurazione 5 volte labile<sup>N6</sup>, del modello virtuale (3), in prospetto longitudinale<sup>F7</sup>, in pianta<sup>F8</sup> e in prospettiva<sup>F9</sup>, l'assenza completa di funi, permette tutti i movimenti cinematici rotatori e traslatori dei conci rigidi, in ognuno dei tre piani (xz), (xy), (yz). Quindi, diversamente dagli altri modelli (1) e (2), la configurazione labile del (3), è priva di resistenza torsionale. Il vincolamento esterno invece, è analogo a quello del modello (2). Cioè, nel nodo (A) è presente una cerniera spaziale (vincolo triplo), nel nodo (D) un carrello spaziale bidirezionale (vincolo doppio in z e in y) e nei nodi (K), (O) un carrello monodirezionale (vincolo singolo in z). Analoghe considerazioni quindi, valgono anche per la corrispondente versione del modello fisico (3)<sup>N7</sup>.

N6  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 5 labile  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $(1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1) + (2 \times 3) - (3 \times 6)$   
 $7 + 6 - 18$   
 $13 - 18 = -5$

N7  
 La versione del modello fisico corrispondente a quello virtuale di questa pagina, si trova fotografata in prospetto longitudinale, in pianta ed in prospettiva a pg.162

.Aggiunta di funi orizzontali



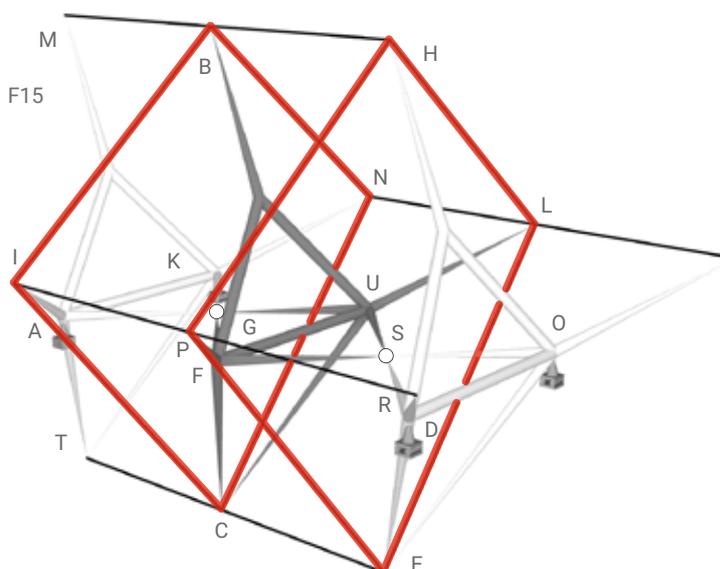
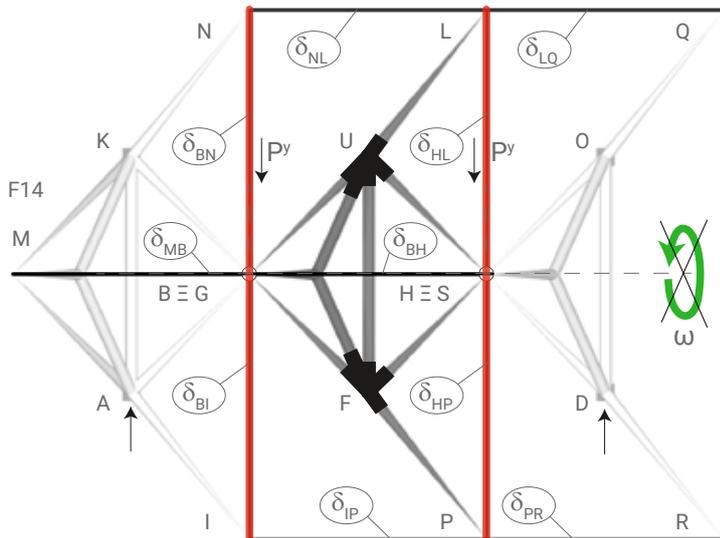
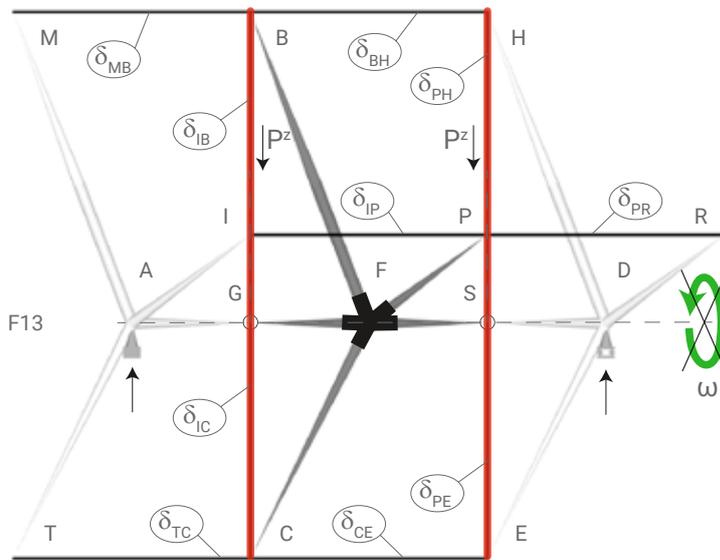
Nella configurazione 3 volte iperstatica<sup>N8</sup>, del modello virtuale (3), in prospetto longitudinale<sup>F10</sup>, in pianta<sup>F11</sup> e in prospettiva<sup>F12</sup>, le funi orizzontali con pretensione, hanno lo scopo di impedire tutti i cinematismi globali finiti. Pertanto, rimane possibile soltanto la rotazione cinematica infinitesima nel piano trasversale (yz), dovuta all'assenza di elementi dedicati alla torsione. Inoltre, occorre precisare che nel modello virtuale (3), tutte le funi vengono pretensionate insieme, diversamente da quanto accade per il modello (2), in cui la pretensione di alcune funi può avvenire successivamente a quella di altre. Simili considerazioni quindi, valgono anche per il modello fisico (3) ad asse rettilineo, che differisce da quello virtuale, soltanto riguardo all'ordine di applicazione delle funi. Nel primo cioè, sono state inserite, inizialmente solo le funi nel piano (xy)<sup>N9a</sup>, poi anche quelle nel piano (xz)<sup>N9b</sup>. Infine, le stesse considerazioni risultano valide, anche per il modello fisico (3) ad asse curvilineo<sup>N10</sup>, la cui sperimentazione ha avuto successo, analogamente a quanto accaduto per il modello (2).

N8  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 3 lperstatico  
 gve+gvi-gdl?0  
 $(1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1) + (2 \times 3 + 1 \times 8) - (3 \times 6)$   
 $7 + 14 - 18$   
 $21 - 18 = +3$

N9  
 Le versioni del modello fisico ad asse rettilineo corrispondenti a quello virtuale di questa pagina, si trovano fotografate in prospetto longitudinale, in pianta ed in prospettiva:

a - pg.163  
 b - pg.164

.Aggiunta di funi trasversali



Nella configurazione 11 volte iperstatica<sup>N11</sup>, del modello virtuale (3), in prospetto longitudinale<sup>F13</sup>, in pianta<sup>F14</sup> e in prospettiva<sup>F15</sup>, l'inserimento di funi trasversali, ha lo scopo di aumentare la resistenza torsionale del sistema, impedendo così, anche l'ultimo cinematismo rimasto possibile, cioè la rotazione infinitesima del concio nel piano (yz). Inoltre, a differenza di quanto accade nel modello (2) le funi trasversali del (3), non vengono inserite per prime, ma per ultime e rimangono caricate esclusivamente nel loro asse e non ortogonalmente ad esso, senza quindi costituire mai, una Ill-condition. Tuttavia, è da notare la differenza rispetto alla configurazione generica con funi trasversali non complanari<sup>F3</sup>, in cui la rotazione labile infinitesima non si verifica, a prescindere dalla loro presenza<sup>F2</sup>. Infine, analoghe considerazioni varrebbero anche per il modello fisico (3), che tuttavia si è scelto di non modificare ulteriormente, perchè non appare utile, una conferma fisica sul funzionamento delle funi trasversali, relative a questa trattazione.

N10  
Il modello fisico ad asse curvilineo corrispondente a quello virtuale della pagina precedente, si trova fotografato in prospetto longitudinale, in pianta ed in prospettiva a pg.165

N11  
Schema geometrico spaziale  
11 Iperstatico  
gve+gvi-gdl?0  
(1x3+1x2+2x1)+(2x3+1x16)-(3x6)  
7+22-18  
29-18 = +11

.Concio del modello virtuale (3)

F16  
Prospetto  
longitudinale



F18  
Prospetto  
frontale



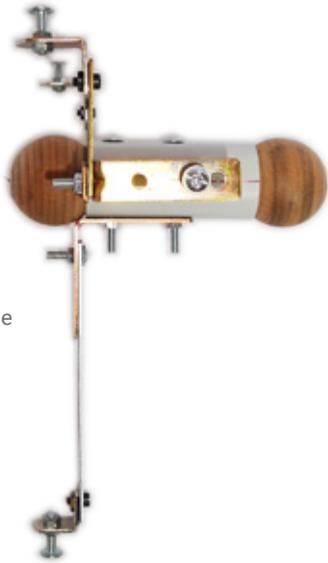
F17  
Pianta



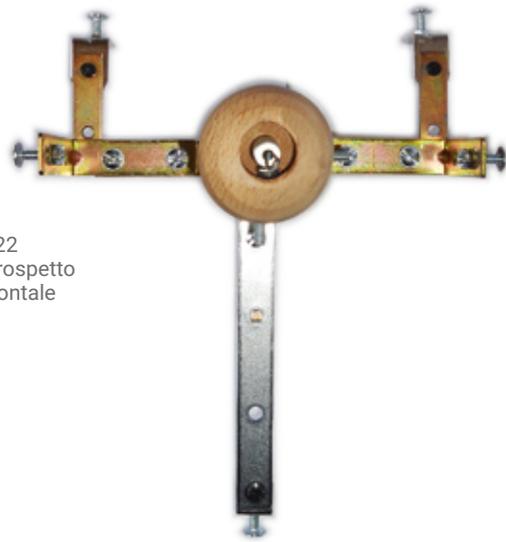
F19  
Prospettiva



.Concio del modello fisico (3)



F20  
Prospetto  
longitudinale



F22  
Prospetto  
frontale



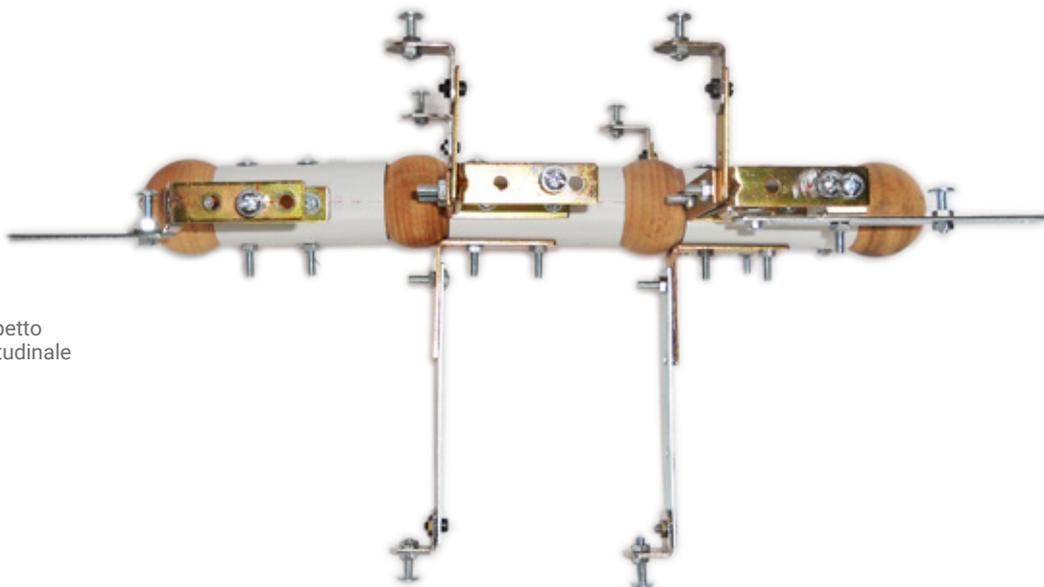
F21  
Pianta



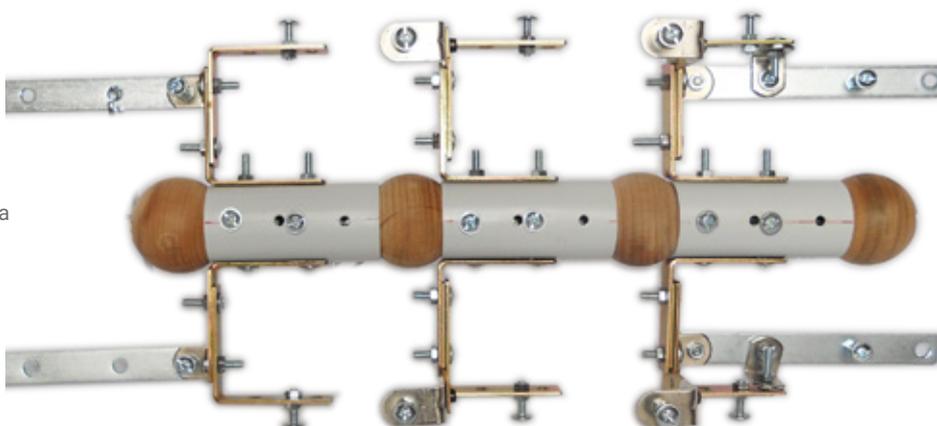
F23  
Prospettiva

.Modello (3) fisico senza funi

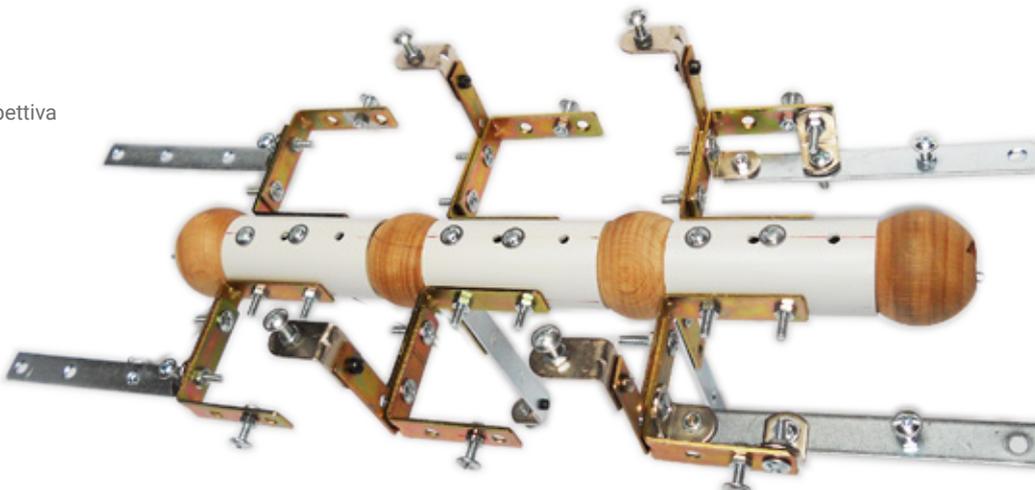
F24  
Prospetto  
longitudinale



F25  
Pianta



F26  
Prospettiva

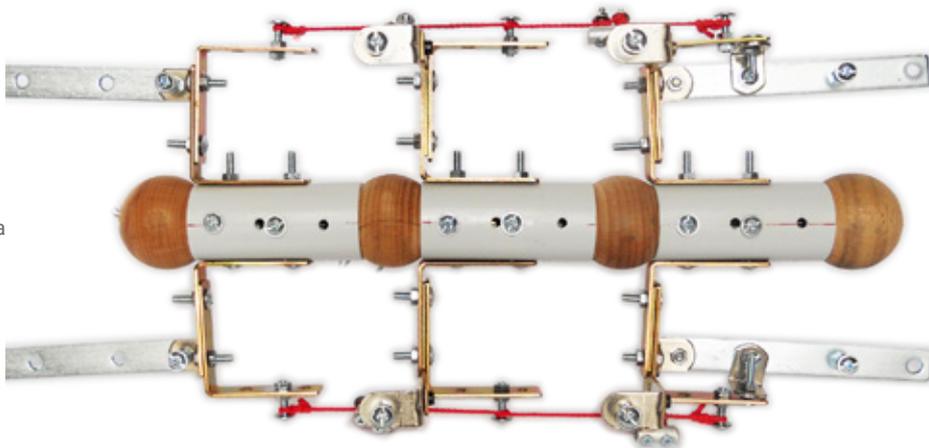


.Modello (3) fisico con aggiunta di sole funi nel piano (xy)

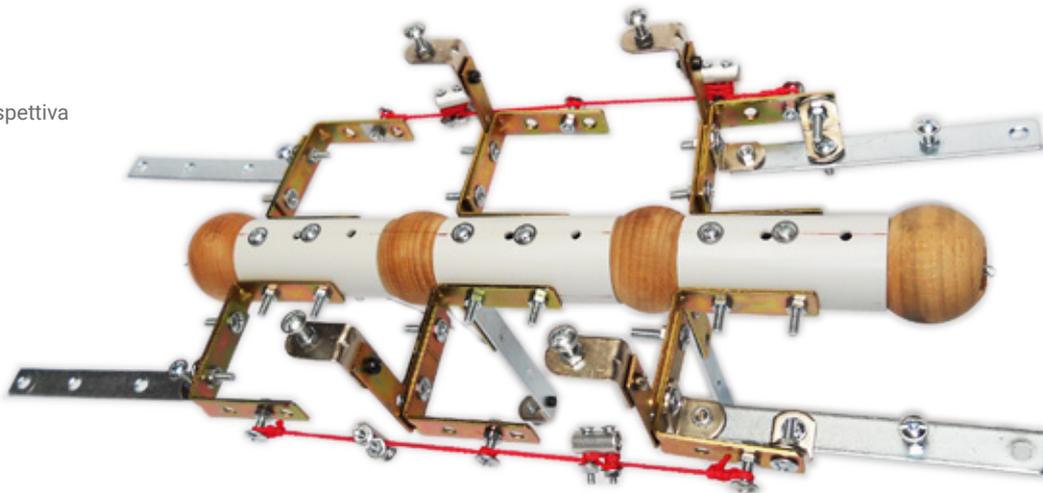
F27  
Prospetto  
longitudinale



F28  
Pianta

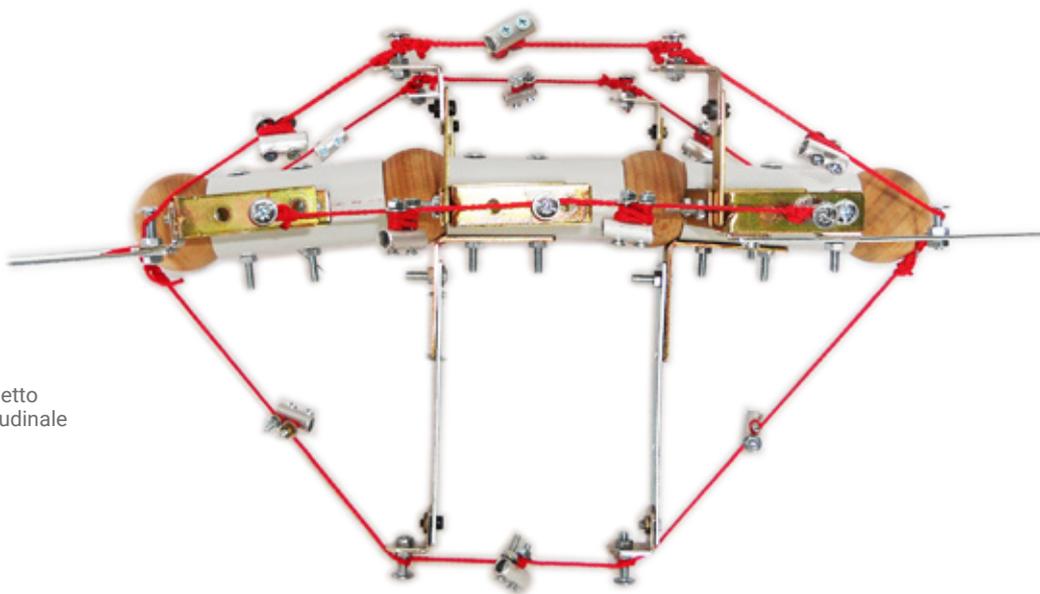


F29  
Prospettiva

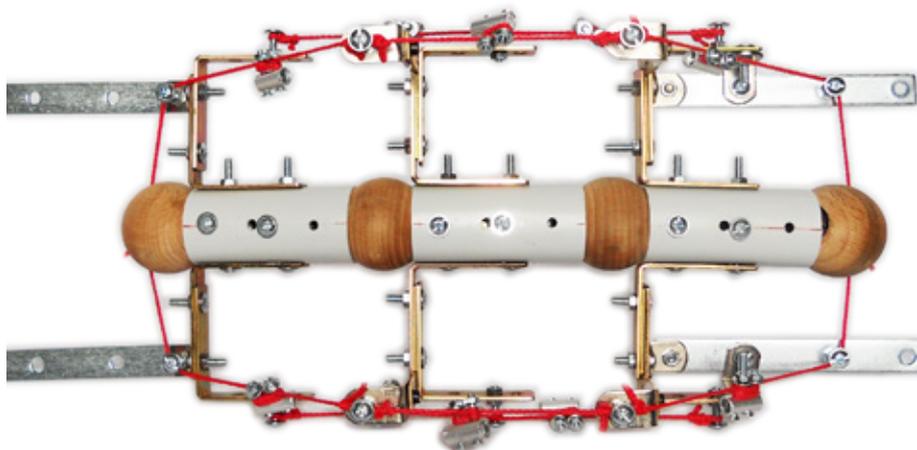


.Modello (3) fisico rettilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)

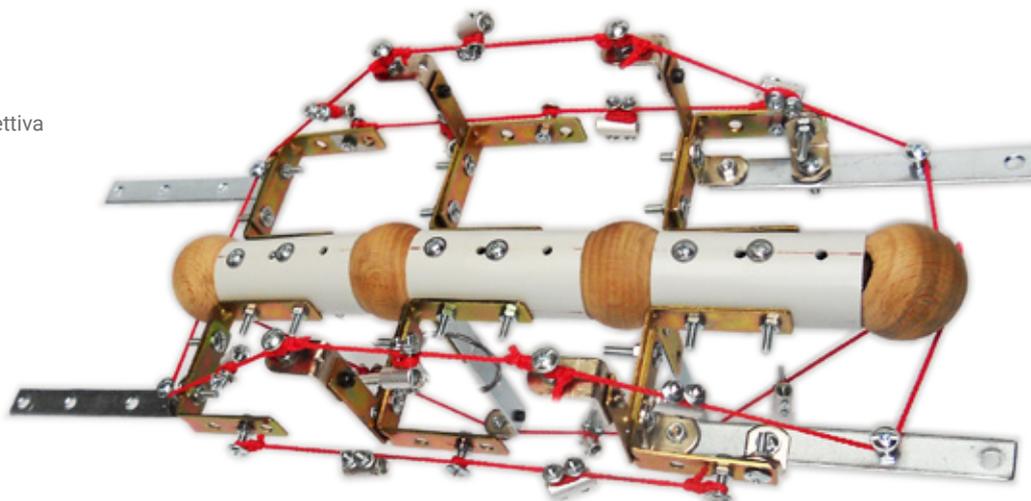
F30  
Prospetto  
longitudinale



F31  
Pianta

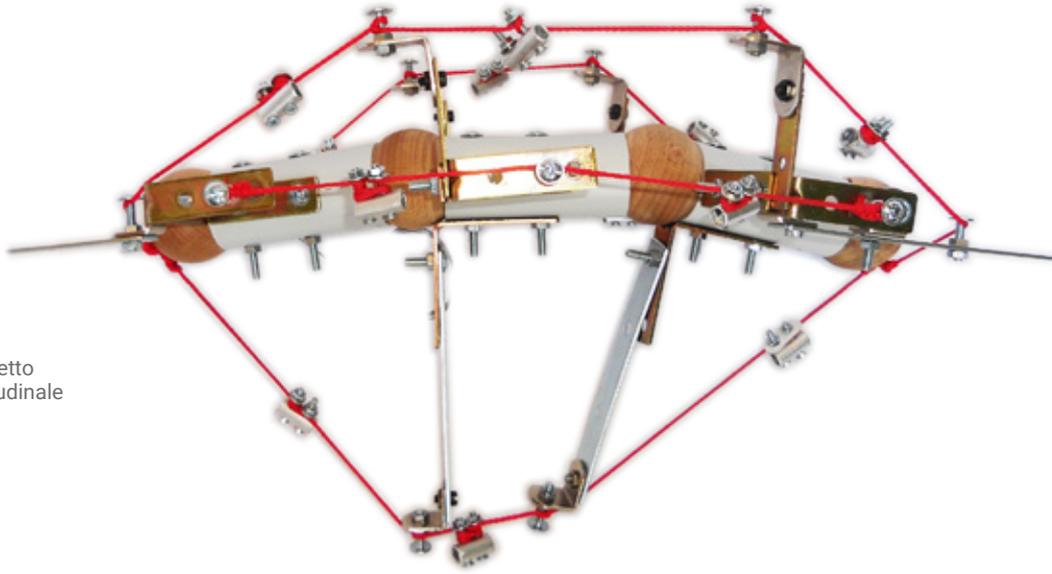


F32  
Prospettiva

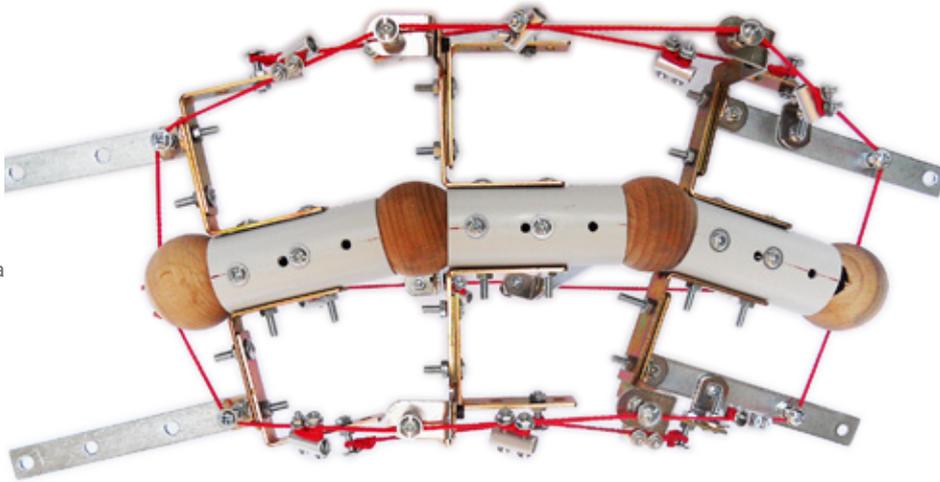


.Modello (3) fisico curvilineo con aggiunta di funi nel piano (xz)

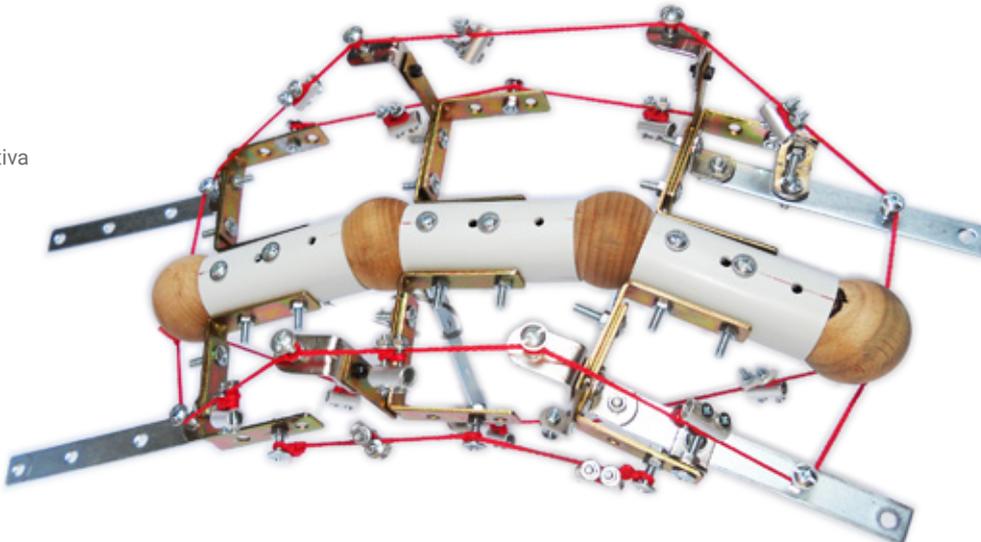
F33  
Prospetto  
longitudinale



F34  
Pianta



F35  
Prospettiva

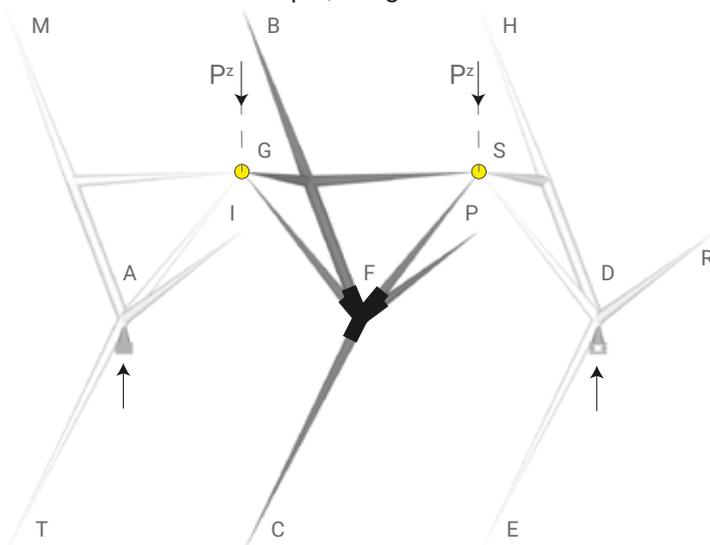


## MODELLO ARCHITETTONICO (4): RETICOLARE MISTO CON DUE CERNIERE DISTINTE

Il modello reticolare misto a due cerniere, della struttura intervertebrale, è costituito da conchi rigidi<sup>N1</sup> in grado di sopportare tutte le caratteristiche della sollecitazione, collegati tra loro da due cerniere diverse e da funi disposte in Tensegrity. L'intera struttura poi, è vincolata con una cerniera ad una estremità e con carrelli in tutte le altre.

### .Disposizione delle membrature

La geometria iniziale del modello (4), prevede una catena labile, di conchi infinitamente rigidi, collegati da due cerniere, allineate nel piano (yz)<sup>F1</sup>. Tali vincoli funzionano di fatto, in (xz), come una unica cerniera piana e in (xy), come un unico incastro piano. In questa prima fase pertanto, la posizione reciproca degli elementi discreti è ininfluente, perchè analogamente al modello (3), è destinata a cambiare, dopo l'inserimento delle funi. Nella seconda fase quindi, vengono applicate solo le funi orizzontali con pretensione nel piano (xz), per fornire alla struttura, equilibrio ed eventuale curvatura piana desiderata<sup>F2</sup>. In questa fase cioè, si decide la forma finale della struttura poichè, in modo simile al modello (3), la lunghezza delle funi pretensionate, determina cinematicamente la rotazione reciproca dei conchi nel piano (xz), intorno alle cerniere (G) ed (S). Tuttavia, diversamente dal modello (3), siccome la curvatura del (4) ha natura bidimensionale, durante l'analisi strutturale, la sua deformata, potrà essere scomposta in rotazioni piane, che si esplicano esclusivamente in (xz)<sup>N2</sup>. Quindi, l'inserimento delle sole funi orizzontali, in tale piano, costituisce la prima configurazione equilibrata del sistema, di cui è opportuno valutare subito, l'inclinazione reciproca degli elementi rigidi, per aumentarne il più possibile l'efficienza. A questo punto allora, scaturiscono le stesse considerazioni, fatte per il modello (3)<sup>N3</sup>, con la sola differenza che nel (4), gli assi dei conchi non sono allineati. Nella terza fase poi, vengono inserite anche le funi orizzontali

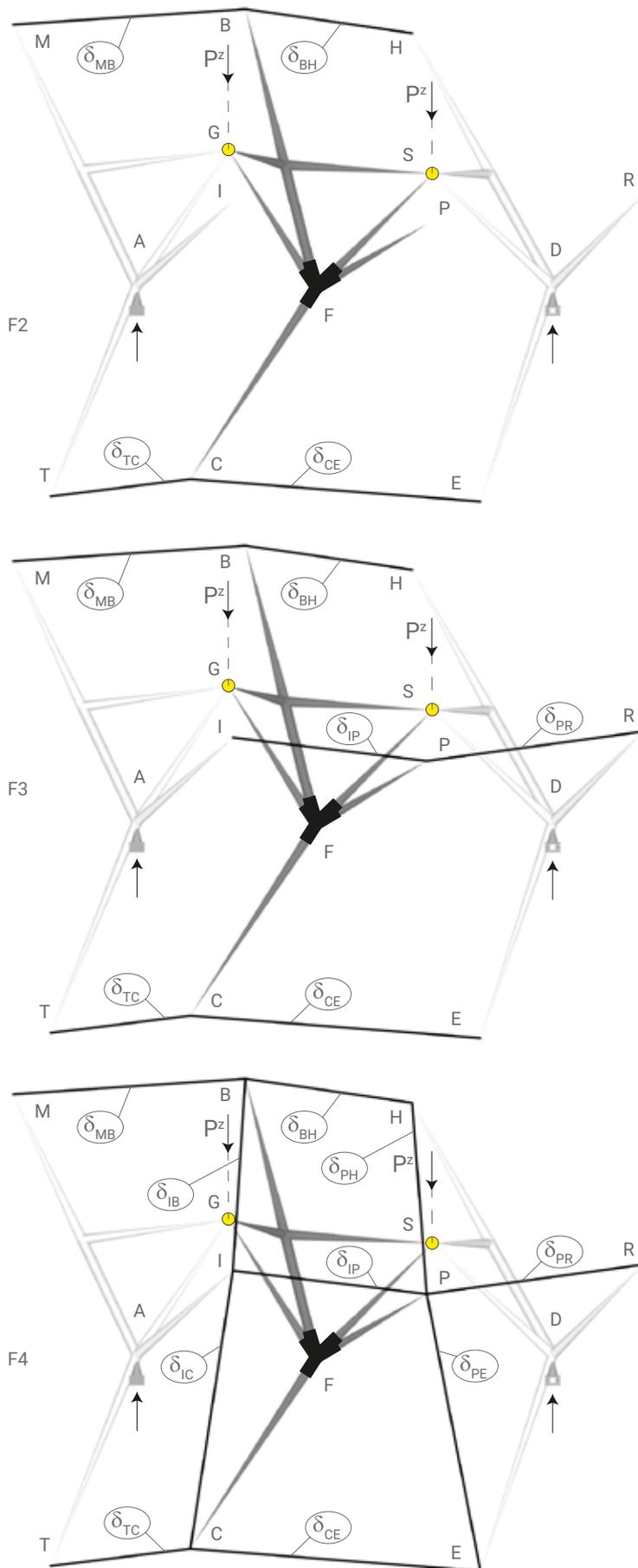


N1  
Immagini della vertebra umana isolata  
pg. 110 - 111

N2  
Vedere la teoria sul calcolo geometrico dei movimenti piani, nel capitolo 'Impostazioni generali'  
pg. 184 - 185

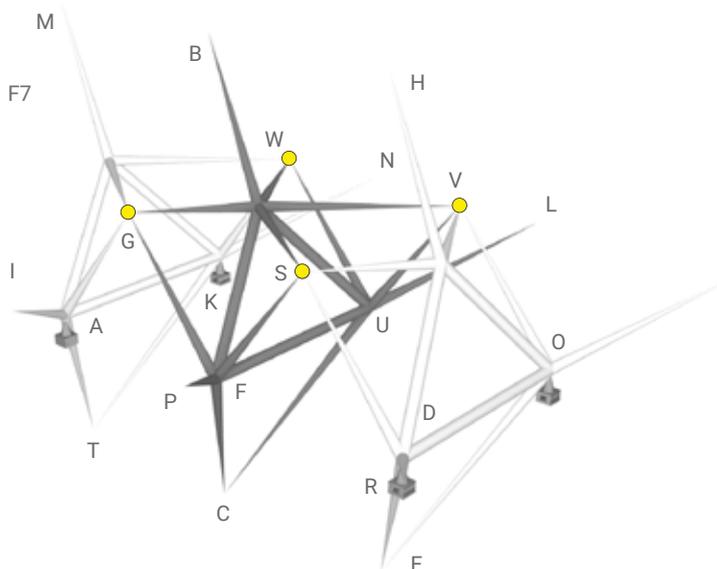
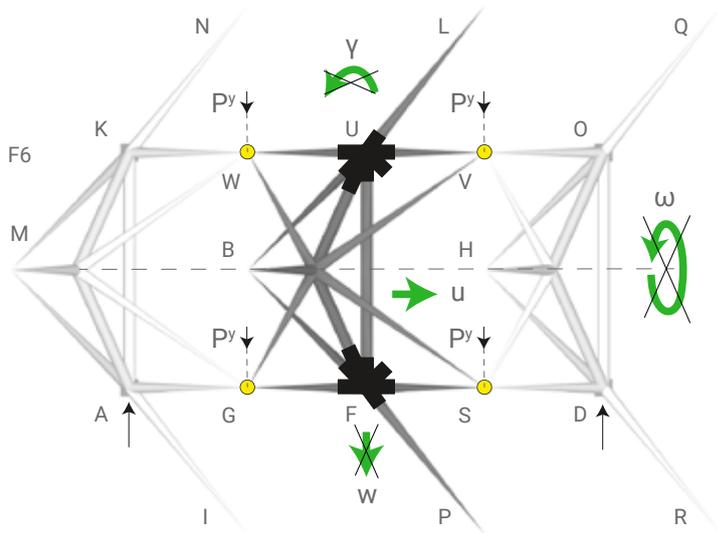
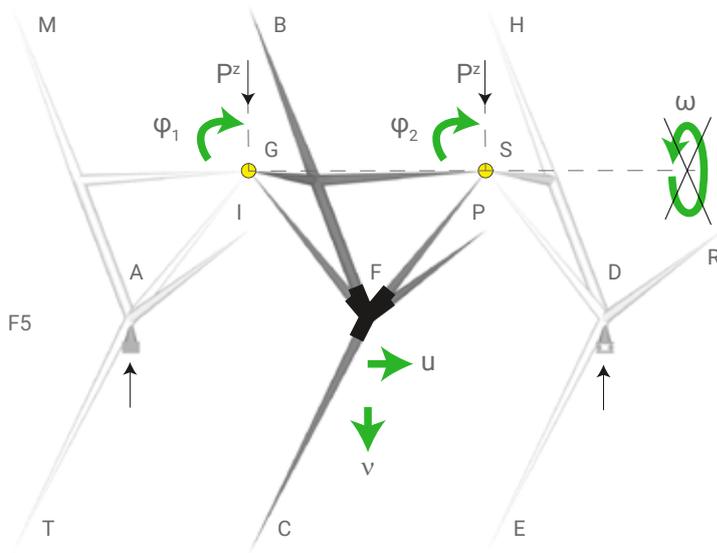
N3  
Vedere le considerazioni sulle varie possibilità di inclinazione reciproca dei conchi rigidi, relative al modello virtuale (3)  
pg. 154 - 156

F1  
Configurazione labile che occorre equilibrare, costituita da una catena di conchi infinitamente rigidi, incernierati e non allineati in orizzontale (A), (G), (S) e (D).



in  $(xy)^{F3}$ , che hanno solo il compito di aumentare la resistenza a momento flettente nel loro piano, diversamente dal modello (3), in cui esse risultano indispensabili all'equilibrio. Nella quarta fase infine, vengono inserite anche le funi trasversali con pretensione, che servono ad irrigidire il sistema a torsione<sup>F4</sup>. Queste ultime tuttavia, diversamente dal modello (3), non corrono il rischio di produrre alcun cambiamento della forma ottenuta in precedenza, perchè anche se potrebbero imporre al sistema, un' ulteriore torsione non obbligatoria, le due cerniere allineate trasversalmente, non permettono che tale sollecitazione, produca il suo movimento cinematico correlativo, cioè la rotazione del concio centrale nel piano  $(yz)$ . Infine, occorre precisare che si è scelto di non produrre alcun modello fisico (4), perchè tutte le questioni relative ai possibili funzionamenti del sistema intervertebrale, sono già state sperimentate fisicamente, sugli altri modelli precedenti. Si ricorda cioè, che lo scopo di questi ultimi, era esclusivamente fornire una conferma, preliminare all'analisi strutturale, su quanto ipotizzato per i modelli architettonici virtuali. Inoltre, il modello (4) appare legato funzionalmente al (3). I due cioè, possono racchiudere i passaggi geometrici volti, ad ottenere un modello unico ottimizzato. Il primo cioè, ha lo scopo di trovare la configurazione spaziale, soggetta solo a sforzo assiale. Il secondo invece, deve irrigidire il sistema trasversalmente, aggiungendo soltanto le cerniere laterali.

.Configurazione labile da equilibrare



Nella configurazione 2 volte labile<sup>N3</sup>, del modello virtuale (4), in prospetto longitudinale<sup>F5</sup>, in pianta<sup>F6</sup> e in prospettiva<sup>F7</sup>, l'assenza completa di funi, permette tutti i movimenti cinematici rotatori e traslatori dei concetti rigidi, in ciascuno dei tre piani cartesiani, tranne la rotazione nel piano (yz). Quindi, diversamente dal modello (3), e in maniera analoga al (1) e al (2), la configurazione labile del (4), è dotata di resistenza torsionale. Il vincolamento esterno invece, è analogo a quello dei modelli (2) e (3). Cioè, nel nodo (A) è presente una cerniera spaziale (vincolo triplo), nel nodo (D) un carrello spaziale bidirezionale (vincolo doppio in z e in y) e nei nodi (K), (O) un carrello monodirezionale (vincolo singolo in z).

N3  
Schema geometrico  
spaziale  
2 labile

Ufficialmente il sistema risulta 1 volta labile, ma di fatto lo è 2 volte, per i seguenti motivi, che riguardano la disposizione dei vincoli:

$$gve+gvi-gdl?0$$

$$(1 \times 3 + 1 \times 2 + 2 \times 1) + (2 \times 5) - (3 \times 6)$$

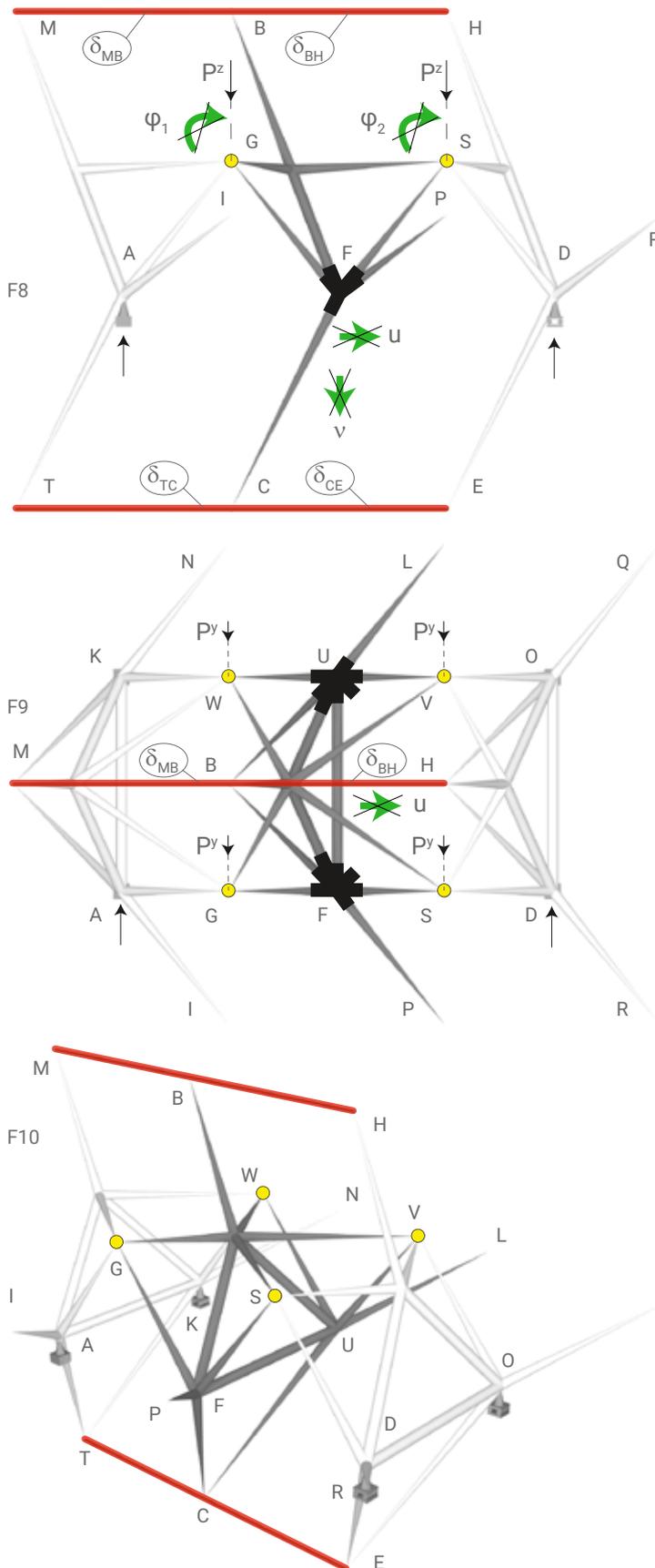
$$7 + 10 - 18$$

$$21 - 18 = -1$$

a) Le cerniere interne spaziali non si comportano realmente come 4 vincoli tripli, ma come 2 vincoli quintupli, perchè sono allineate a coppie rendendo comunque possibili, gli unici movimenti indipendenti del sistema, cioè le due rotazioni cinematiche nel piano (xz). Pertanto, i movimenti che ciascuno dei due vincoli impedisce sono: (u), (v), (w), (y), (omega)

b) Il carrello in (O), che fornisce al sistema un grado di vincolo esterno sovrabbondante, non impedisce in alcun modo i due movimenti indipendenti possibili, che restano comunque, le due rotazioni nel piano (xz). Il sistema quindi, si comporta come se il suo grado di vincolo esterno fosse 6 e non 7.

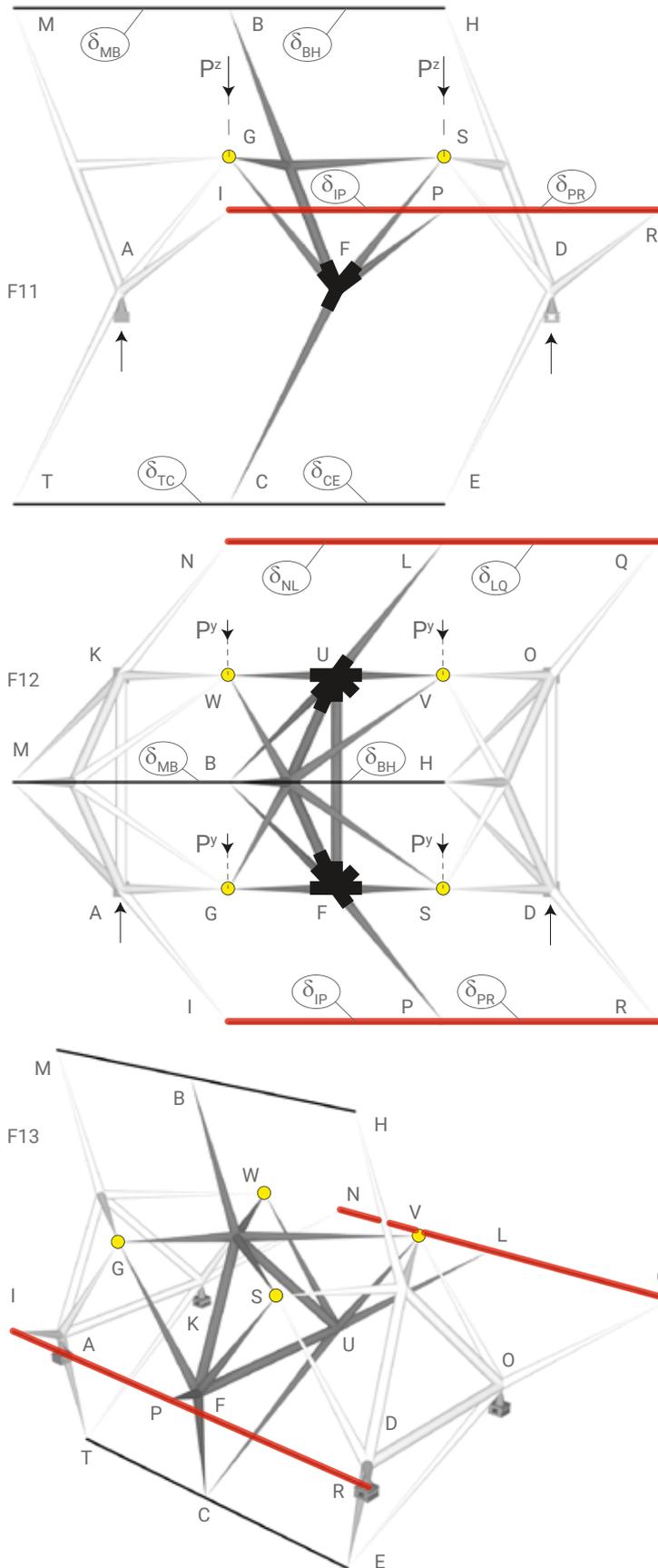
.Aggiunta di funi orizzontali nel piano (xz)



Nella configurazione 2 volte staticamente indeterminata<sup>N4</sup>, del modello virtuale (4), in prospetto longitudinale<sup>F8</sup>, in pianta<sup>F9</sup> e in prospettiva<sup>F10</sup>, le funi orizzontali con prentensione, hanno lo scopo di impedire tutti i cinatismi globali finiti. Pertanto, questa configurazione del modello (4), è la sua prima equilibrata, diversamente da quanto accaduto per il modello (3), che per raggiungere l'equilibrio, necessita anche di funi orizzontali nel piano (xy) e di quelle trasversali nel piano (yz). Inoltre, con ulteriore diversità rispetto al modello (3), il (4) non è gravato da alcun movimento labile infinitesimo, essendo più simile ad una struttura reticolare rigida tradizionale.

N4  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 3 Iperstatico  
 2 Staticamente indeterminato  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} ? 0$   
 $7 + (2 \times 5 + 4 \times 1) - (3 \times 6)$   
 $7 + 14 - 18$   
 $21 - 18 = +3$

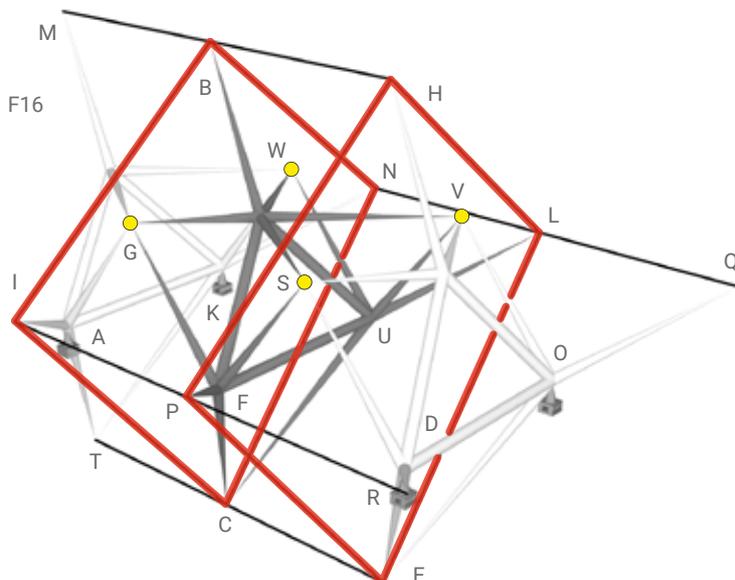
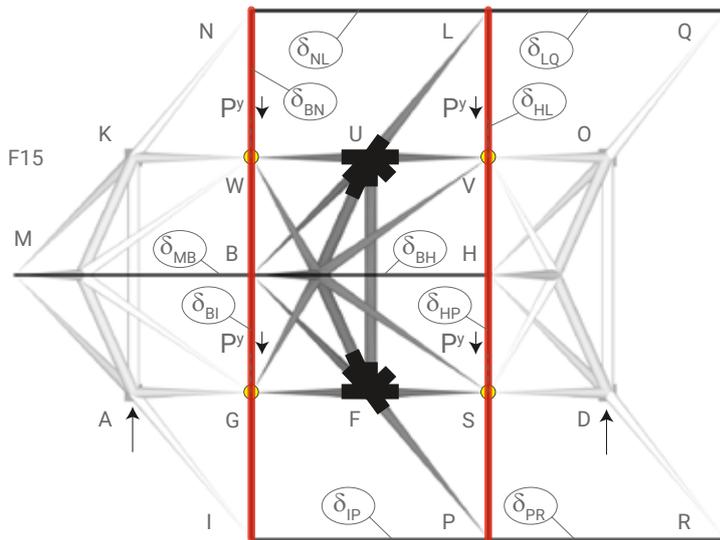
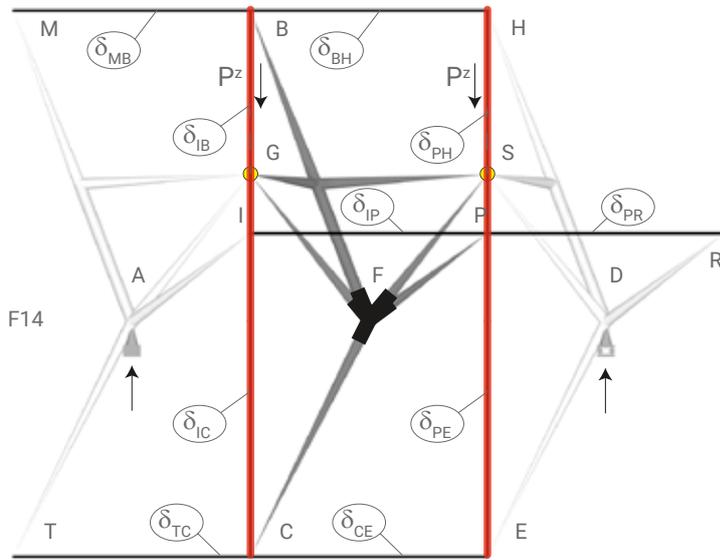
.Aggiunta di funi orizzontali nel piano (xy)



Nella configurazione 6 volte staticamente indeterminata<sup>N5</sup>, del modello virtuale (4), in prospetto longitudinale<sup>F11</sup>, in pianta<sup>F12</sup> e in prospettiva<sup>F13</sup>, le funi orizzontali con prentensione nel piano (xy), hanno lo scopo di aumentare la resistenza della struttura a momento flettente in tale piano, analogamente al modello (1). Pertanto, anche se non sarebbero necessarie al soddisfacimento dell'equilibrio, già ottenuto nella configurazione precedente, le funi orizzontali nel piano (xy), contribuiscono in maniera decisiva, alla riduzione dell'impegno strutturale complessivo.

N5  
 Schema geometrico spaziale  
 7 Iperstatico  
 6 Staticamente indeterminato  
 $gve+gvi-gdl?0$   
 $7+(2 \times 5+8 \times 1)-(3 \times 6)$   
 $7+18-18 = +7$

.Aggiunta di funi trasversali



Nella configurazione 10 volte staticamente indeterminata<sup>N6</sup>, del modello virtuale (4), in prospetto longitudinale<sup>F14</sup>, in pianta<sup>F15</sup> e in prospettiva<sup>F16</sup>, l'inserimento di funi trasversali con pretensione nel piano (yz), ha lo scopo di aumentare la resistenza torsionale del sistema, alleggerendo le cerniere interne, che sarebbero le uniche a doversi occupare della torsione. Inoltre, analogamente a quanto accade nel modello (3) e diversamente dal (2), le funi trasversali del (4), non vengono inserite per prime, ma per ultime e rimangono caricate solo nel loro asse e non ortogonalmente ad esso, senza quindi costituire mai, una Ill-condition. Pertanto, anche se non sarebbero necessarie al soddisfacimento dell'equilibrio, già ottenuto nella seconda configurazione ipotizzata, le funi trasversali nel piano (yz), contribuiscono in maniera decisiva, alla riduzione dell'impegno strutturale complessivo, analogamente a quelle orizzontali nel piano (xy).

N6  
 Schema geometrico  
 spaziale  
 11 Iperstatico  
 10 Staticamente indeterminato  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} ? 0$   
 $7 + (2 \times 5 + 16 \times 1) - (3 \times 6)$   
 $7 + 26 - 18$   
 $33 - 18 = +11$



## ANALISI MANUALE DELLA STRUTTURA

## SCELTE DI CALCOLO

### Reazioni vincolari esterne

La necessità di conoscere il valore delle reazioni vincolari esterne, per determinare le caratteristiche della sollecitazione degli elementi strutturali interni, varia nei tre schemi statici oggetto di questa tesi.

Schema 1	Schema 2	Schema 3
Esternamente staticamente Indeterminato	Esternamente staticamente Determinato	Esternamente staticamente Determinato
Reazioni non necessarie e non calcolabili per equilibrio	Reazioni non necessarie, ma calcolabili per equilibrio	Reazioni necessarie e calcolabili per equilibrio

Reazioni in tutti i vincoli esterni reali ed ausiliari presenti nel nodo (K), dovute alle sole azioni esterne applicate

Reazione dovuta ai soli carichi esterni concentrati nel nodo (N), ( $P_N$ )

$$V_K^P$$

Reazione dovuta al solo carico di pretensione applicato ad ogni fune (IJ), ( $T_{IJ}$ )

$$V_K^T$$

Reazioni in tutti i vincoli esterni reali ed ausiliari presenti nel nodo (K), dovute al solo inserimento dei vincoli ausiliari, con costanti relative alle varie tipologie di movimento indipendente ( $\pm u_{NM}$ )

$$V_K^{uNM} = (\pm A_{V_k}^{uNM}) u_{NM}$$

Costante della rotazione piana del pezzo (NM) intorno al nodo (N) nel piano (xz)

$$V_K^{\varphi NM} = (\pm A_{V_k}^{\varphi NM}) \varphi_{NM}$$

Costante della rotazione piana del pezzo (NM) intorno al nodo (N) nel piano (xy)

$$V_K^{\gamma NM} = (\pm B_{V_k}^{\gamma NM}) \gamma_{NM}$$

Costante della rotazione spaziale del pezzo (NM) intorno all'asse (NM)

$$V_K^{\omega NM} = (\pm C_{V_k}^{\omega NM}) \omega_{NM}$$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (x)

$$V_K^{uG} = (\pm D_{V_k}^{uG}) u_G$$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (y)

$$V_K^{wG} = (\pm E_{V_k}^{wG}) w_G$$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (z)

$$V_K^{vG} = (\pm F_{V_k}^{vG}) v_G$$

Metodo	Funzione deformata	Grado
Vincoli ausiliari	$\Delta l$	primo
Principio di stazionarietà di $\pi$	$\Delta l^2$	secondo

N1  
Capitolo: 'Scelta del modello strutturale'.  
pg.238 - 247

N2  
Capitolo: 'Schemi statici minimi'.  
Paragrafo: 'Tensegrity puro non simmetrico'.  
pg.88 - 93

N3  
 Capitolo: 'Analisi manuale dello schema statico, mediante il software Microsoft Excell'.  
 pg.220 - 237

N4  
 Capitolo: 'Analisi automatica dello schema statico, mediante il software Autodesk Robot Structural Analysis'.  
 pg.248 - 271

N5  
 Tab 2  
 Equazioni di equilibrio necessarie a trovare le reazioni vincolari esterne, di ogni singolo sotto schema statico parziale, del sistema (3) spaziale.  
 pg.201

.Legenda

-  Vincoli reali
-  Reazioni esterne
  
-  Vincoli ausiliari
  
-  Componenti di reazione interne
  
-  Reazioni interne sola pretensione
  
-  Reazioni interne compressive
  
-  Movimenti indipendenti
  
-  Movimenti dipendenti

.Metodi di risoluzione degli schemi statici

Come si può notare dalla loro geometria<sup>N1</sup>, i sistemi (1) e (2) sono casi di Tensegrity puro non simmetrico, analoghi a quello di un solo pezzo, studiato in precedenza<sup>N2</sup>, ma con un maggior numero di incognite rispetto ad esso. Pertanto, non appare particolarmente utile, cimentarsi nella risoluzione manuale dei primi due sistemi. Il terzo invece, è molto più complicato e necessita di tale procedura, con lo scopo di comprenderne a pieno il funzionamento generale. Quindi, si è scelto di risolvere il sistema (3), prima manualmente, impostando le sue equazioni per il caso spaziale e risolvendole solo per quello piano, mediante il programma Microsoft Excell (EXC)<sup>N3</sup>. Poi, per tutti i sistemi (1), (2), (3), si è scelto di risolvere lo schema statico, sia del caso piano, che di quello spaziale, mediante il programma di calcolo Autodesk Robot structural analysis (RSA), commentando analogie e differenze<sup>N4</sup>. Riguardo al metodo manuale allora, tra le due tecniche ipotizzate, Metodo diretto mediante vicoli ausiliari (DAM) e Principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale (EPT), si è scelta la prima, per le seguenti ragioni<sup>Tab1</sup>. Cioè, il (DAM) consente la formulazione diretta e separata, delle varie equazioni piane di equilibrio statico, facendo avvenire un movimento incognito alla volta. Pertanto, la funzione deformata della fune, è di primo grado e quindi facilmente scrivibile anche se dipendente da più variabili. Invece, il (EPT) impone un inutile complicatissimo passaggio in più, rispetto al metodo precedente. Cioè, invece di poter scrivere subito ogni singola, necessaria e indipendente, equazione piana di equilibrio, bisogna averne formulata un'altra precedente, spaziale di lavoro deformativo, non sempre scrivibile, in cui tutti i movimenti incogniti, avvengono all'unisono. Pertanto, la funzione deformata della fune, è di secondo grado e quindi difficilmente utilizzabile, se dipendente da più variabili. Solo successivamente poi, di questa unica equazione spaziale, è possibile fare le singole derivate parziali, rispetto ad ogni movimento indipendente, ottenendo così, tutte le equazioni piane del sistema. A differenza degli altri quindi, il sistema (3), implica tre diversi tipi di equazioni, di cui i primi due sono, quelle cinematiche, per trovare la funzione del movimento di ogni singolo nodo e quelle di equilibrio statico, per ottenere le reazioni vincolari esterne, relative ad ogni sotto schema statico parziale, cioè soggetto a, soli carichi concentrati, sola pretensione e soli movimenti indipendenti, liberati uno alla volta<sup>N5</sup>. Infine, il terzo gruppo di equazioni, è relativo all'equilibrio rotatorio (i traslatori sono privi di significato) di porzioni della struttura intorno alle cerniere e serve a trovare i movimenti indipendenti del sistema. Pertanto, questa versione del metodo dei vincoli ausiliari, che implica la necessità di conoscere tutte le reazioni vincolari esterne, è assai più complicata di quella tradizionale, in cui si scrive soltanto l'equilibrio di un singolo pezzo rigido alla volta, indipendentemente dagli altri. Inoltre, alcune reazioni esterne sono solo fittizie, pertanto devono essere inserite nelle equazioni, rigorosamente con segno cambiato, cioè mettendo sempre il (-) davanti.

.Movimento

Movimento indipendente del pezzo rigido (NM), il cui segno deve essere inserito manualmente in maniera concorde alla deformata arbitraria del modello grafico, solo durante la scrittura della funzione di movimento di ogni nodo ( $u_i$ ), mediante prodotti vettoriali ed equazioni cinematiche. Durante la scrittura delle equazioni statiche di equilibrio invece, comparirà solo in valore assoluto, inquanto il suo segno sarà già stato incluso nelle costanti di deformata delle funi ( $\pm A_{IJ}^{uNM}$ ).

$(\pm u_{NM})$

Movimento del nodo (I), funzione del movimento indipendente del pezzo rigido ( $\pm u_{NM}$ ) il cui segno è automatico, dipendente cioè da quello di quest'ultimo e da quello dei bracci delle aste ( $\pm a_{IJ}, \pm c_{IJ}, \pm b_{IJ}$ ).

$u_i = f(\pm u_{NM})$

.Deformata

Convenzione di segno della deformata assiale della fune (IJ)

$\pm \Delta I_{IJ}^{uNM}$

(+): Allungamento

(-): Accorciamento

Funzione deformata della fune (IJ) relativa al movimento indipendente ( $\pm u_{NM}$ )

$\Delta I_{IJ}^{uNM} = (\pm |u_i| \pm |u_j|) \cos \alpha_{IJ} + (\pm |v_i| \pm |v_j|) \text{sen} \alpha_{IJ} + (\pm |w_i| \pm |w_j|) \text{sen} \beta_{IJ} \quad \text{sen} \beta_{IJ} = \cos \lambda_{IJ}$

$\Delta I_{IJ}^{uNM} = (\pm A_{IJ}^{uNM}) u_{NM}$

Costanti di deformata della fune (IJ) relative alle varie tipologie di movimento indipendente ( $\pm u_{NM}$ )

Costante della rotazione piana del pezzo (NM) intorno al nodo (N) nel piano (xz)

$\varphi_{NM} \rightarrow (\pm A_{IJ}^{\varphi NM})$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (x)

$u_G \rightarrow (\pm D_{IJ}^{uG})$

Costante della rotazione piana del pezzo (NM) intorno al nodo (N) nel piano (xy)

$\gamma_{NM} \rightarrow (\pm B_{IJ}^{\gamma NM})$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (y)

$w_G \rightarrow (\pm E_{IJ}^{wG})$

Costante della rotazione spaziale del pezzo (NM) intorno all'asse (NM)

$\omega_{NM} \rightarrow (\pm C_{IJ}^{\omega NM})$

Costante della traslazione del pezzo avente baricentro (G) in direzione (z)

$v_G \rightarrow (\pm F_{IJ}^{vG})$

.Sforzo assiale

Convenzione di segno dello sforzo assiale della fune (IJ)

$\pm N_{IJ(uNM)}$

(+): Trazione

(-): Compressione

Funzione sforzo assiale relativo alla fune (IJ) nello spazio

$N_{IJ(uNM)} = N_{J(uNM)}$

$N_{IJ(uNM)} = +K_{IJ} (\pm \Delta I_{IJ}^{uNM})$

$N_{IJ(uNM)} = f(|u_i|, |w_i|, |v_i|, |u_j|, |w_j|, |v_j|)$

$N_{IJ(uNM)} = f|\pm u_{NM}|$

$N_{IJ(tot)} = +K_{IJ} \sum (\pm \Delta I_{IJ}^{uNM})$

$N_{IJ(tot)} = +K_{IJ} \sum [(\pm A_{IJ}^{uNM}) u_{NM}]$

Proiezioni della funzione sforzo assiale relativo alla fune (IJ) nei tre piani

$N_{IJ}^{xz} = N_{IJ(tot)} \cos \eta_{IJ}$

$N_{IJ}^{xy} = N_{IJ(tot)} \cos \xi_{IJ}$

$N_{IJ}^{yz} = N_{IJ(tot)} \cos \psi_{IJ}$

Proiezioni della funzione sforzo assiale relativo alla fune (IJ) nelle tre direzioni

$N_{IJ}^x = N_{IJ}^{xz} \cos \alpha_{IJ}$

$N_{IJ}^z = N_{IJ}^{xz} \text{sen} \alpha_{IJ}$

$N_{IJ}^x = N_{IJ}^{xy} \cos \beta_{IJ}$

$N_{IJ}^y = N_{IJ}^{xy} \text{sen} \beta_{IJ}$

$N_{IJ}^y = N_{IJ}^{yz} \cos \lambda_{IJ}$

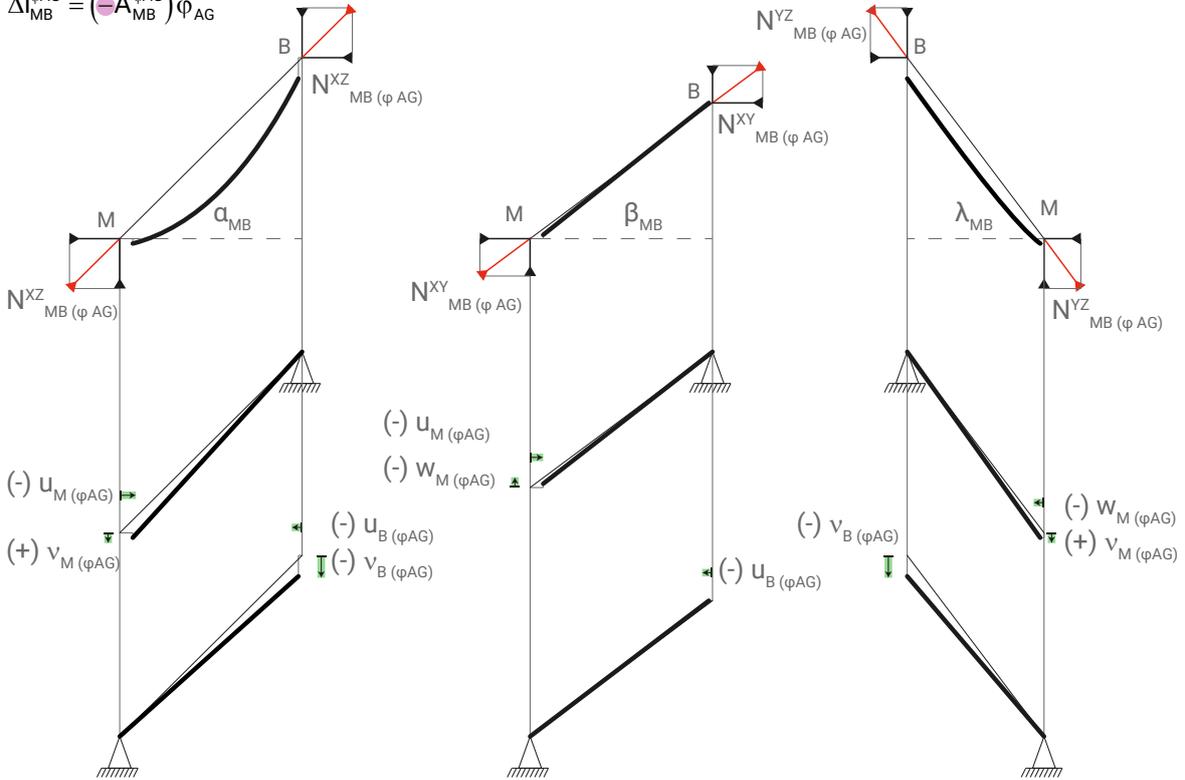
$N_{IJ}^z = N_{IJ}^{yz} \text{sen} \lambda_{IJ}$

Funzione deformata del generico movimento ( $\varphi_{AG}$ ) relativa a due generiche funi

Generica fune compressa (MB)

$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{AG}} = +(-|\pm u_M| - |\pm u_B|) \cos \alpha_{MB} + (|\pm v_M| - |\pm v_B|) \text{sen} \alpha_{MB} + (-|\pm w_M| + 0) \text{sen} \beta_{MB}$$

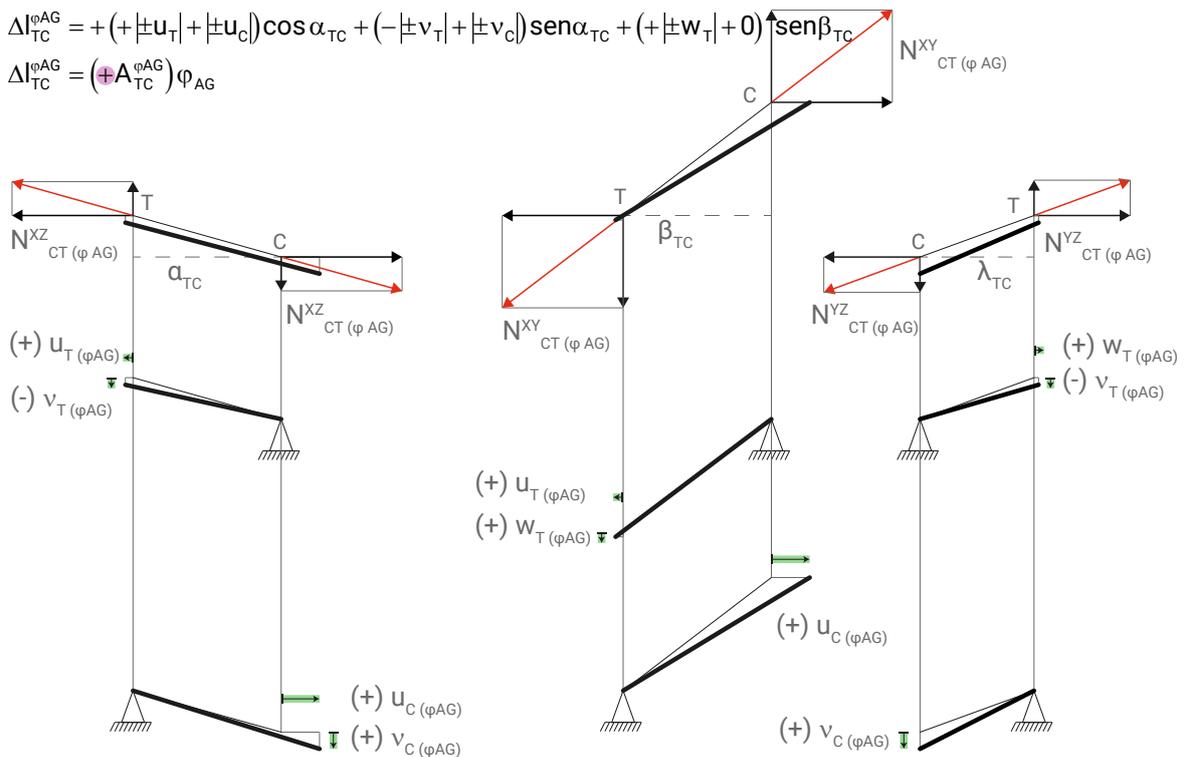
$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{AG}} = (-A_{MB}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$



Generica fune tesa (TC)

$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{AG}} = +(|\pm u_T| + |\pm u_C|) \cos \alpha_{TC} + (-|\pm v_T| + |\pm v_C|) \text{sen} \alpha_{TC} + (|\pm w_T| + 0) \text{sen} \beta_{TC}$$

$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{AG}} = (+A_{TC}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$



## Geometria del sistema <sup>N6</sup>

Si è scelto di utilizzare la geometria dei sistemi strutturali oggetto di questa tesi, inserendo nelle equazioni di calcolo, le coordinate dei nodi, con segno e gli angoli dei pezzi con il sistema di riferimento (O,x,y,z), in valore assoluto. L'origine di quest'ultimo poi, è la cerniera esterna della struttura (A). Con lo scopo di confrontare più agevolmente il caso piano con quello spaziale, si è scelto di inserire la geometria del secondo mediante, prima le proiezioni del pezzo (IJ) sui piani del sistema di riferimento, utilizzando gli angoli spaziali ( $L_{IJ}^{xz}$ ), ( $L_{IJ}^{xy}$ ), ( $L_{IJ}^{yz}$ ) e poi quelle lungo i suoi assi, utilizzando gli angoli piani ( $a_{IJ}$ ), ( $c_{IJ}$ ), ( $b_{IJ}$ ).

Coordinate nodi (I,J)

$$I = (\pm x_I)(\pm y_I)(\pm z_I)$$

$$J = (\pm x_J)(\pm y_J)(\pm z_J)$$

Bracci asta/fune (IJ)

$$a_{IJ} = [(\pm x_J) - (\pm x_I)]$$

$$b_{IJ} = [(\pm z_J) - (\pm z_I)]$$

$$c_{IJ} = [(\pm y_J) - (\pm y_I)]$$

Lunghezze asta/fune (IJ)

$$L_{IJ}^{xz} = \sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2}$$

$$L_{IJ}^{xy} = \sqrt{a_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}$$

$$L_{IJ}^{yz} = \sqrt{b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}$$

$$L_{IJ} = \sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}$$

ξ) Angolo della fune (IJ) nello spazio, con il piano xy

$$L_{IJ} \cos \xi_{IJ} = L_{IJ}^{xy}$$

$$\cos \xi_{IJ} = \frac{L_{IJ}^{xy}}{L_{IJ}}$$

$$\cos \xi_{IJ} = \frac{\sqrt{a_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}}{\sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}}$$

η) Angolo della fune (IJ) nello spazio, con il piano xz

$$L_{IJ} \cos \eta_{IJ} = L_{IJ}^{xz}$$

$$\cos \eta_{IJ} = \frac{L_{IJ}^{xz}}{L_{IJ}}$$

$$\cos \eta_{IJ} = \frac{\sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2}}{\sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}}$$

ψ) Angolo della fune (IJ) nello spazio, con il piano yz

$$L_{IJ} \cos \psi_{IJ} = L_{IJ}^{yz}$$

$$\cos \psi_{IJ} = \frac{L_{IJ}^{yz}}{L_{IJ}}$$

$$\cos \psi_{IJ} = \frac{\sqrt{b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}}{\sqrt{a_{IJ}^2 + b_{IJ}^2 + c_{IJ}^2}}$$

α) Angolo della fune (IJ) nel piano xz, con l'asse x

$$L_{IJ}^{xz} \cos \alpha_{IJ} = a_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{xz} = \frac{a_{IJ}}{\cos \alpha_{IJ}}$$

$$L_{IJ}^{xz} \sin \alpha_{IJ} = b_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{xz} = \frac{b_{IJ}}{\sin \alpha_{IJ}}$$

$$\frac{a_{IJ}}{\cos \alpha_{IJ}} = \frac{b_{IJ}}{\sin \alpha_{IJ}}$$

$$\frac{\sin \alpha_{IJ}}{\cos \alpha_{IJ}} = \operatorname{tg} \alpha_{IJ} = \frac{b_{IJ}}{a_{IJ}}$$

$$\alpha_{IJ} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_{IJ}}{a_{IJ}}$$

$$|\sin \alpha_{IJ}|$$

$$|\cos \alpha_{IJ}|$$

β) Angolo della fune (IJ) nel piano xy, con l'asse x

$$L_{IJ}^{xy} \cos \beta_{IJ} = a_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{xy} = \frac{a_{IJ}}{\cos \beta_{IJ}}$$

$$L_{IJ}^{xy} \sin \beta_{IJ} = c_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{xy} = \frac{c_{IJ}}{\sin \beta_{IJ}}$$

$$\frac{a_{IJ}}{\cos \beta_{IJ}} = \frac{c_{IJ}}{\sin \beta_{IJ}}$$

$$\frac{\sin \beta_{IJ}}{\cos \beta_{IJ}} = \operatorname{tg} \beta_{IJ} = \frac{c_{IJ}}{a_{IJ}}$$

$$\beta_{IJ} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{c_{IJ}}{a_{IJ}}$$

$$|\sin \beta_{IJ}|$$

$$|\cos \beta_{IJ}|$$

λ) Angolo della fune (IJ) nel piano yz, con l'asse y

$$L_{IJ}^{yz} \cos \lambda_{IJ} = c_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{yz} = \frac{c_{IJ}}{\cos \lambda_{IJ}}$$

$$L_{IJ}^{yz} \sin \lambda_{IJ} = b_{IJ}$$

$$L_{IJ}^{yz} = \frac{b_{IJ}}{\sin \lambda_{IJ}}$$

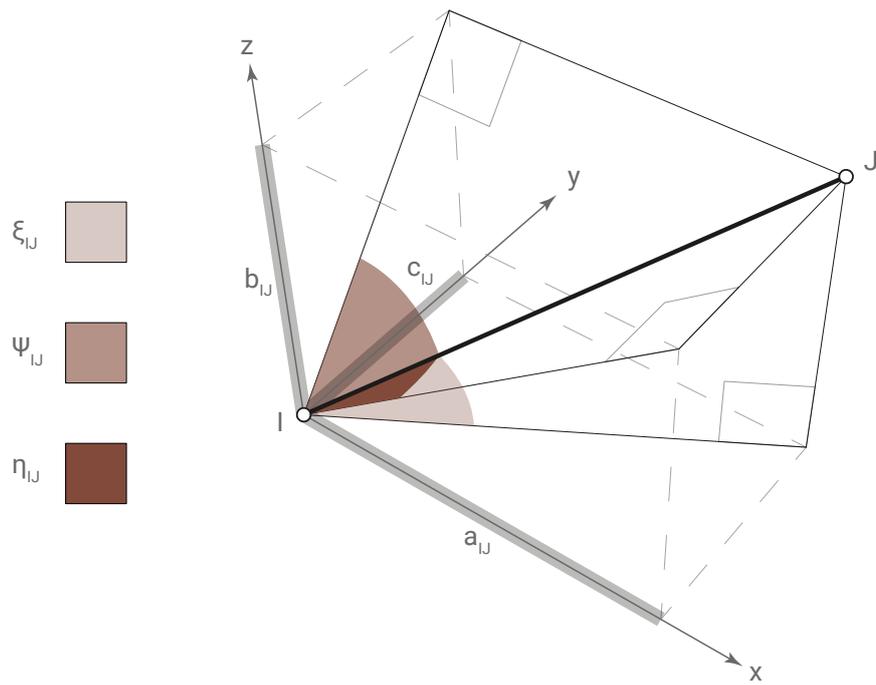
$$\frac{c_{IJ}}{\cos \lambda_{IJ}} = \frac{b_{IJ}}{\sin \lambda_{IJ}}$$

$$\frac{\sin \lambda_{IJ}}{\cos \lambda_{IJ}} = \operatorname{tg} \lambda_{IJ} = \frac{b_{IJ}}{c_{IJ}}$$

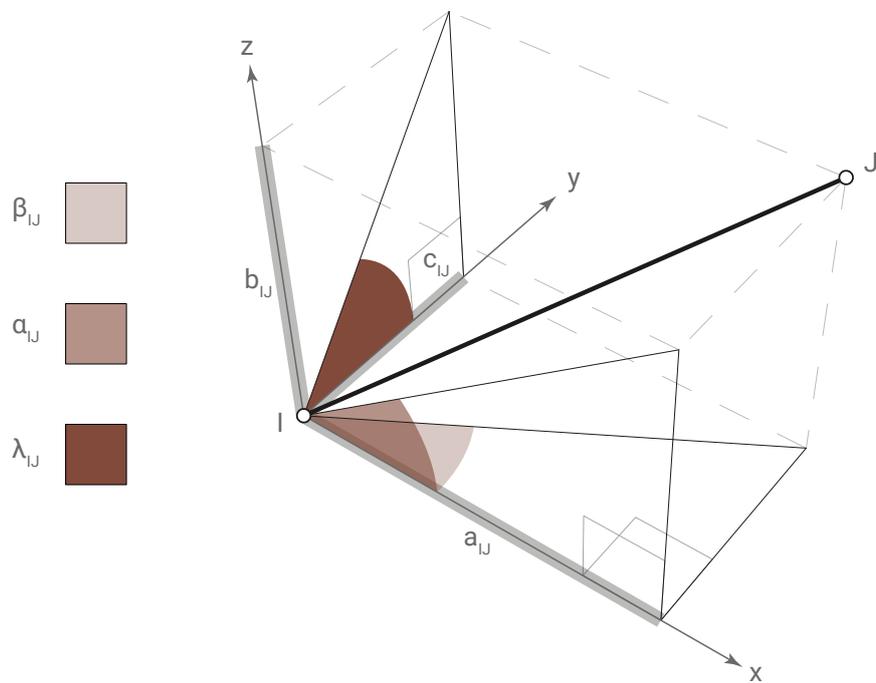
$$\lambda_{IJ} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_{IJ}}{c_{IJ}}$$

$$|\sin \lambda_{IJ}|$$

$$|\cos \lambda_{IJ}|$$

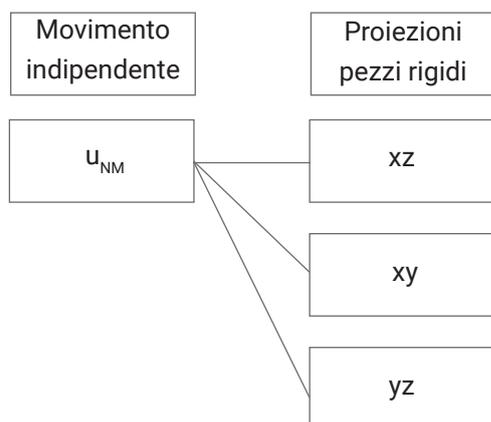


N6  
 A.DI TOMMASO,  
 L.BOSCOTRECASE, *Statica  
 applicata alle costruzioni*,  
 Patron, 1976, pg.15 - 20



## STUDIO DEI CINEMATISMI

Per ogni singolo movimento indipendente incognito del sistema, i pezzi infinitamente rigidi, compiono un cinematismo e le funi si allungano o si accorciano. Pertanto, come la deformata di queste ultime<sup>N1</sup>, è funzione del movimento dei nodi, relativi ai pezzi infinitamente rigidi, a cui è collegata, il movimento di ciascuno di essi ( $u_j$ ), è funzione di quello indipendente attivato ( $u_{NM}$ ). Quindi, se questo è una traslazione, il penultimo vi coincide, se esso è una rotazione invece, bisogna calcolarlo, come prodotto vettoriale tra quest'ultimo ed il vettore posizione (J-I)<sup>N2</sup>. Pertanto, se la struttura è bidimensionale, tutti i movimenti da studiare, avvengono esclusivamente nel piano in cui essa si trova. Invece, se la struttura è spaziale, bisogna proiettare ogni cinematismo, sui piani cartesiani (xz), (xy), (yz), indipendentemente dal fatto che esso avvenga nello spazio, o in uno di loro<sup>N3</sup>. Si è riscontrato inoltre, che la funzione del cinematismo indotto, da una rotazione in un piano cartesiano, per sistema spaziale, ha forma analoga a quella del caso bidimensionale.



N1  
Espressione della funzione deformata della fune  
pg. 176; 177

N2  
A. DI TOMMASO,  
L. BOSCO TRECASE, Statica applicata alle costruzioni, Patron, 1976  
pg. 22 - 24; 33; 34

N3  
Sistema (3) caso spaziale  
Proiezioni sui piani cartesiani della deformata, dei soli pezzi infinitamente rigidi, sottoposti ad ognuno dei cinque movimenti indipendenti.

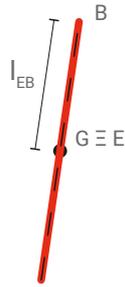
$\phi_{AG}$  piano (xz) - pg.205  
 $\phi_{GS}$  piano (xz) - pg.207  
 $\gamma_{AG}$  piano (xy) - pg.209  
 $\gamma_{GS}$  piano (xy) - pg.211  
 $\omega_{GS}$  spazio - pg.213

.Rotazione piana

Sistemi (1) e (2)

Geometria REALE ( $l_{EB}$ )  
 Schema geometrico  
 architettonico di un concio  
 rigido, libero nello spazio:  
 viene utilizzata la lunghezza  
 dell'asta.

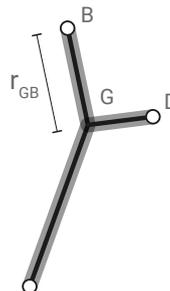
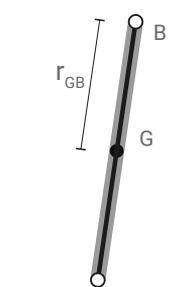
Caso semplice  
 Baricentro  
 coincidente con il  
 nodo centrale  
 $G \equiv E$



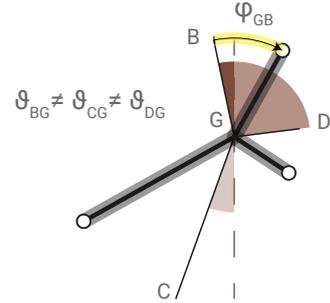
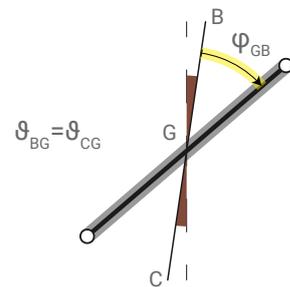
Caso generale  
 Baricentro non  
 coincidente con il  
 nodo centrale  
 $G \neq E$



Geometria di CALCOLO ( $r_{GB}$ )  
 Schema geometrico  
 'baricentrico' del concio  
 rigido,  
 ottenuto congiungendo il suo  
 baricentro con i nodi di  
 estremità:  
 viene utilizzato il braccio  
 baricentro-nodo di estremità.

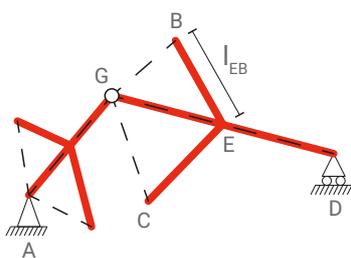


Deformata ROTATORIA  
 Deformata rigida del concio,  
 ottenuta per rotazione intorno al  
 suo baricentro (G), data  
 l'inclinazione di ogni asta con la  
 verticale.

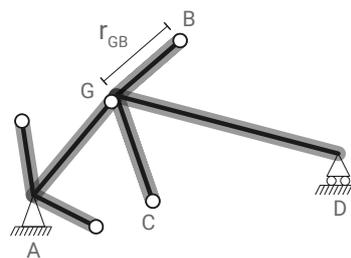


Sistema (3)

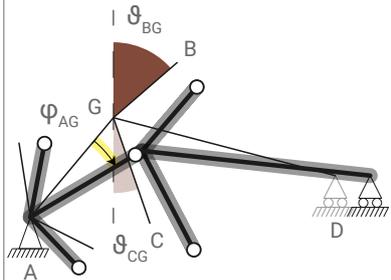
Geometria REALE ( $l_{EB}$ )  
 Schema geometrico  
 architettonico di due conci rigidi,  
 incernierati tra loro e vincolati  
 all'esterno con una cerniera ed  
 un carrello:  
 viene utilizzata la lunghezza  
 dell'asta.



Geometria di CALCOLO ( $r_{GB}$ )  
 Schema geometrico  
 'non baricentrico' dei due conci  
 rigidi, ottenuto congiungendo il  
 nodo che li collega con quelli di  
 estremità:  
 viene utilizzato il braccio  
 nodo di collegamento - nodo di  
 estremità.



Deformata ROTO-TRASLATORIA  
 Deformata rigida dei due  
 conci, ottenuta per rotazione di  
 quello sinistro intorno al nodo  
 esterno incernierato (A), data  
 l'inclinazione di ogni asta con la  
 verticale.



Cinematismo piano di un pezzo rigido incernierato

Un possibile movimento indipendente dell'asta infinitamente rigida (IJ), è la sua rotazione intorno al nodo incernierato (I), ( $\varphi_{IJ}$ ). Con lo scopo di utilizzare il metodo dei movimenti, per risolvere uno schema statico che necessita di tale cinematismo, adottato come incognita, è possibile esprimere le caratteristiche della sollecitazione, relative agli elementi deformabili collegati al nodo (J), in funzione delle sue componenti di traslazione, dovute alla rotazione dell'asta infinitamente rigida ( $u_{J(\varphi_{IJ})}$ ;  $v_{J(\varphi_{IJ})}$ ). Tali funzioni quindi, possono essere determinate tramite uno dei modi seguenti.

**Modo 1)**

Formule prostaferesi + Semplificazione piccoli movimenti

$\text{sen}\varphi_{IJ} \approx \varphi_{IJ}$

$\text{cos}\varphi_{IJ} \approx 1$

$$u_{J(\varphi_{IJ})} = (2r_{IJ}\text{sen}\gamma)\text{cos}(\vartheta_{IJ} + \gamma)$$

$$2r_{IJ} [\text{sen}\gamma(+\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{cos}\gamma - \text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}\gamma)]$$

$$2r_{IJ} [+ \text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}\gamma\text{cos}\gamma - \text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}^2\gamma]$$

$$+2r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\frac{1}{2}\text{sen}(2\gamma) - 2r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos}(2\gamma)\right]$$

$$+r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}(2\gamma) - r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}[1 - \text{cos}(2\gamma)]$$

$$+r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}(2\gamma) - r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ} + r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{cos}(2\gamma)$$

$$+r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}\varphi_{IJ} - r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ} + r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{cos}\varphi_{IJ}$$

$$+b_{IJ}\text{sen}\varphi_{IJ} - a_{IJ} + a_{IJ}\text{cos}\varphi_{IJ}$$

$$u_{J(\varphi_{IJ})} = +b_{IJ}\varphi_{IJ} - a_{IJ} + a_{IJ} \cdot 1$$

$$u_{J(\varphi_{IJ})} = +b_{IJ}\varphi_{IJ}$$

$$v_{J(\varphi_{IJ})} = (2r_{IJ}\text{sen}\gamma)\text{sen}(\vartheta_{IJ} + \gamma)$$

$$2r_{IJ} [\text{sen}\gamma(+\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{cos}\gamma + \text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}\gamma)]$$

$$2r_{IJ} [+ \text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}\gamma\text{cos}\gamma + \text{cos}\vartheta_{IJ}\text{sen}^2\gamma]$$

$$+2r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\frac{1}{2}\text{sen}(2\gamma) + 2r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{cos}(2\gamma)\right]$$

$$+r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}(2\gamma) + r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}[1 - \text{cos}(2\gamma)]$$

$$+r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}(2\gamma) + r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ} - r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{cos}(2\gamma)$$

$$+r_{IJ}\text{sen}\vartheta_{IJ}\text{sen}\varphi_{IJ} + r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ} - r_{IJ}\text{cos}\vartheta_{IJ}\text{cos}\varphi_{IJ}$$

$$+a_{IJ}\text{sen}\varphi_{IJ} + b_{IJ} - b_{IJ}\text{cos}\varphi_{IJ}$$

$$v_{J(\varphi_{IJ})} = +a_{IJ}\varphi_{IJ} + b_{IJ} - b_{IJ} \cdot 1$$

$$v_{J(\varphi_{IJ})} = +a_{IJ}\varphi_{IJ}$$

**Modo 2)**

Direttamente

Semplificazione piccoli movimenti

$2r_{IJ}\text{sen}\frac{\varphi_{IJ}}{2} \approx 2r_{IJ}\frac{\varphi_{IJ}}{2} \approx r_{IJ}\varphi_{IJ}$

$\vartheta_{IJ} \pm \frac{\varphi_{IJ}}{2} \approx \vartheta_{IJ}$

$u_{J(\varphi_{IJ})} = +r_{IJ}\varphi_{IJ} \cdot \text{cos}\vartheta_{IJ} = +b_{IJ}\varphi_{IJ}$

$v_{J(\varphi_{IJ})} = +r_{IJ}\varphi_{IJ} \cdot \text{sen}\vartheta_{IJ} = +a_{IJ}\varphi_{IJ}$

**Modo 3)<sup>N7</sup>**

Prodotto vettoriale

$$\overline{J-I} = \begin{Bmatrix} \pm a_{IJ} \\ \pm c_{IJ} \\ \pm b_{IJ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_J) - (\pm x_I) \\ 0 \\ (\pm z_J) - (\pm z_I) \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\omega_{IK}} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{IK} \\ \pm \varphi_{IK} \\ \pm \gamma_{IK} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\varphi_{IJ} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\overline{u_J} = \overline{\omega_{IK}} \wedge \overline{J-I}$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & (+\varphi_{IJ}) & 0 \\ (\pm a_{IJ}) & 0 & (\pm b_{IJ}) \end{pmatrix}$$

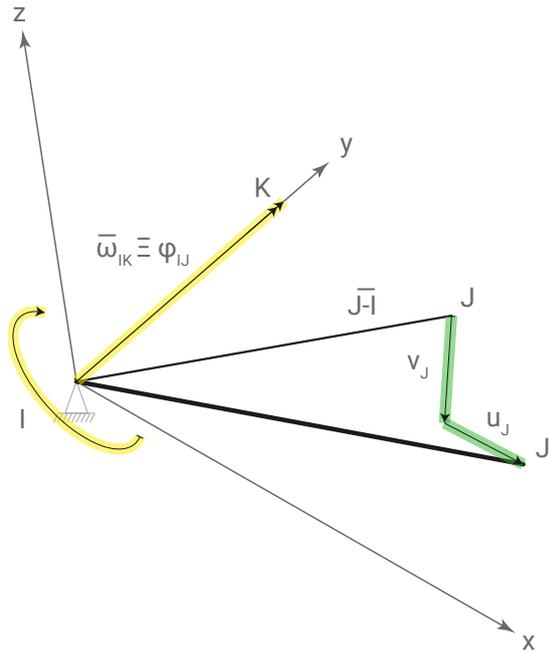
$u_J = + \begin{vmatrix} (+\varphi_{IJ}) & 0 \\ 0 & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = + [ (+\varphi_{IJ})(\pm b_{IJ}) - (0)(0) ] = + (\pm b_{IJ}) \varphi_{IJ}$

$w_J = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = + [ (0)(\pm b_{IJ}) - (0)(\pm a_{IJ}) ] = 0$

$v_J = - \begin{vmatrix} 0 & (+\varphi_{IJ}) \\ (\pm a_{IJ}) & 0 \end{vmatrix} = - [ (0)(0) - (+\varphi_{IJ})(\pm a_{IJ}) ] = + (\pm a_{IJ}) \varphi_{IJ}$

N7

A.DI TOMMASO,  
L.BOSCOTRECASE, Statica applicata alle costruzioni, Patron, 1976  
pg. 22 - 24 ; 33 ; 34



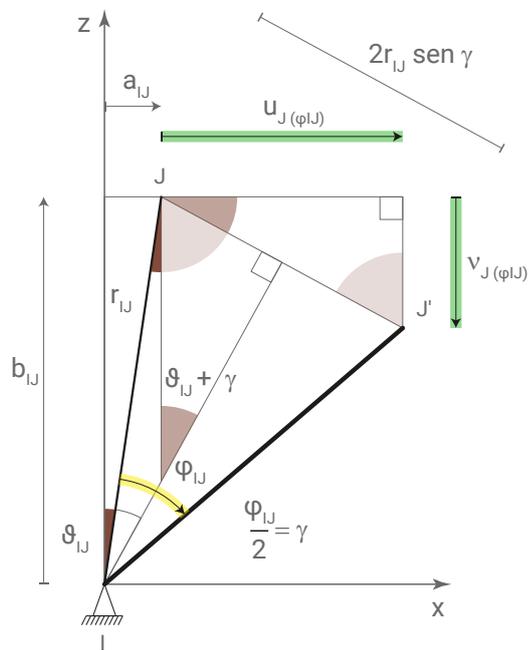
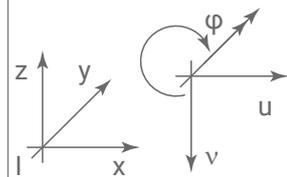
Schema geometrico

1 Labile  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} = ?0$   
 $(2) + (0) - (3 \times 1)$   
 $+2 - 3 = -1$

Movimento indipendente adottato  
 $\varphi_{IJ}$

Disegni  
 Attivazione del movimento  $\varphi_{IJ}$ .  
 Deformata del pezzo rigido (IJ), nello spazio e nel piano xz.

Convenzione di segno coordinate e movimenti nel piano



Cinematismo piano di due pezzi rigidi incernierati

Un possibile movimento indipendente del sistema di aste infinitamente rigide (ABGD), è la rotazione del pezzo (AG) intorno al nodo incernierato (A), ( $\varphi_{AG}$ ). Con lo scopo di utilizzare il metodo dei movimenti, per risolvere uno schema statico che necessita di tale cinematismo, adottato come incognita, è possibile determinare le funzioni di movimento relative a tutti gli altri nodi del sistema, tramite operazioni vettoriali, in modo analogo a quello usato nel caso di un solo pezzo infinitamente rigido. Rispetto a quest'ultima situazione tuttavia, quando il sistema è costituito da più pezzi incernierati, bisogna esguire anche, ulteriori operazioni cinematiche, cioè quelle con cui imporre la congruenza.

Scrittura vettori  $\bar{u}_{G(sx)}$  e  $\bar{u}_{G(dx)}$

$$u_* = +(\pm b_{GD})(-\varphi_{GD})$$

$$u_D = u_{G(dx)} + (\pm u_*)$$

$$u_{G(dx)} = u_D + (\pm u_*)$$

$$u_{G(dx)} = u_D + (\pm b_{GD})(-\varphi_{GD})$$

$$\bar{u}_{G(dx)} = \begin{Bmatrix} +(\pm b_{AG})(+\varphi_{AG}) \\ 0 \\ +(\pm a_{AG})(+\varphi_{AG}) \end{Bmatrix}$$

$$\bar{u}_{G(sx)} = \begin{Bmatrix} +u_D + (\pm b_{GD})(-\varphi_{GD}) \\ 0 \\ +(\pm a_{GD})(-\varphi_{GD}) \end{Bmatrix}$$

Ricerca movimenti  $\varphi_{GD}$  e  $u_D$   
Sistema di due equazioni di congruenza cinematica in due incognite

$$\begin{cases} \rightarrow) u_{G(sx)} = u_{G(dx)} \\ \downarrow) v_{G(sx)} = v_{G(dx)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow) +(\pm b_{AG})(+\varphi_{AG}) = +u_D + (\pm b_{DG})(-\varphi_{GD}) \\ \downarrow) +(\pm a_{AG})(+\varphi_{AG}) = +(\pm a_{GD})(-\varphi_{GD}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow) +(\pm b_{AG})\varphi_{AG} = +u_D - (\pm b_{DG})\varphi_{GD} \\ \downarrow) +(\pm a_{AG})\varphi_{AG} = -(\pm a_{GD})\varphi_{GD} \end{cases}$$

$$\downarrow) \varphi_{GD} = -\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})} \varphi_{AG}$$

$$\rightarrow) u_D = +(\pm b_{AG})\varphi_{AG} + (\pm b_{DG})\varphi_{GD}$$

$$u_D = +(\pm b_{AG})\varphi_{AG} - (\pm b_{DG})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})}\varphi_{AG}$$

$$u_D = \left[ +(\pm b_{AG}) - (\pm b_{DG})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})} \right] \varphi_{AG}$$

Ricerca movimenti  $u_B$  e  $v_B$   
Somma vettoriale di più componenti di movimento

$$\rightarrow) u_B = +u_{G(sx)} + u_B$$

$$+(\pm b_{AG})(+\varphi_{AG}) + (\pm b_{GB})(-\varphi_{GD})$$

$$+(\pm b_{AG})(+\varphi_{AG}) - (\pm b_{GB})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})}\varphi_{AG}$$

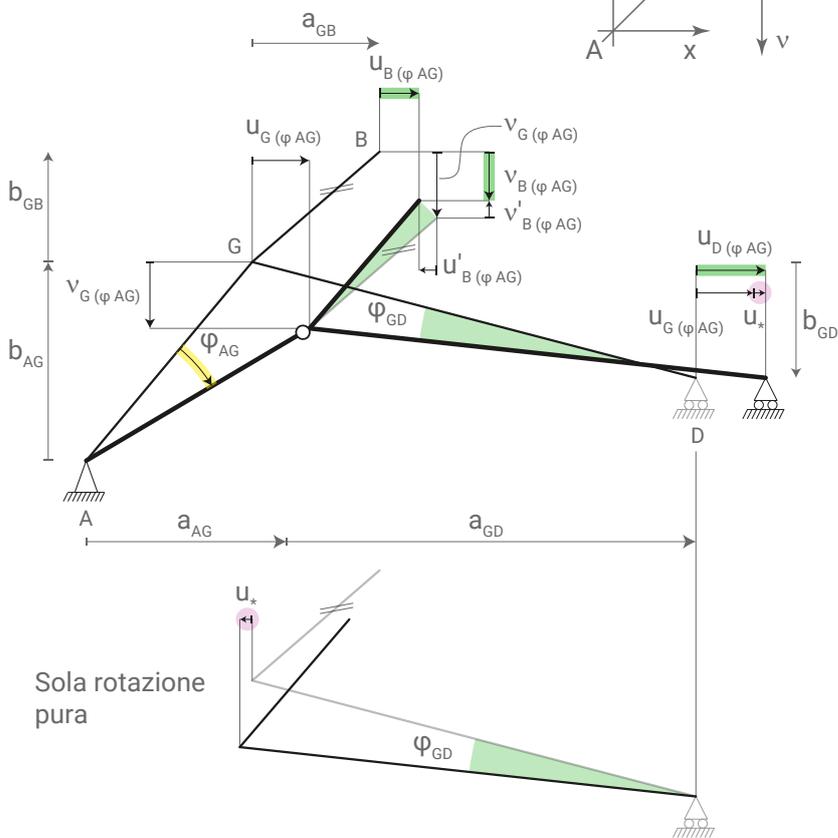
$$u_B = \left[ +(\pm b_{AG}) - (\pm b_{GB})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})} \right] \varphi_{AG}$$

$$\downarrow) v_B = +v_{G(sx)} + v_B$$

$$+(\pm a_{AG})(+\varphi_{AG}) + (\pm a_{GB})(-\varphi_{GD})$$

$$+(\pm a_{AG})(+\varphi_{AG}) - (\pm a_{GB})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})}\varphi_{AG}$$

$$v_B = \left[ +(\pm a_{AG}) - (\pm a_{GB})\frac{(\pm a_{AG})}{(\pm a_{GD})} \right] \varphi_{AG}$$



Sola rotazione pura

Schema geometrico

1 Labile  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} = ?$   
 $(2+1) + (2) - (3 \times 2)$   
 $+5 - 6 = -1$

Movimento indipendente adottato

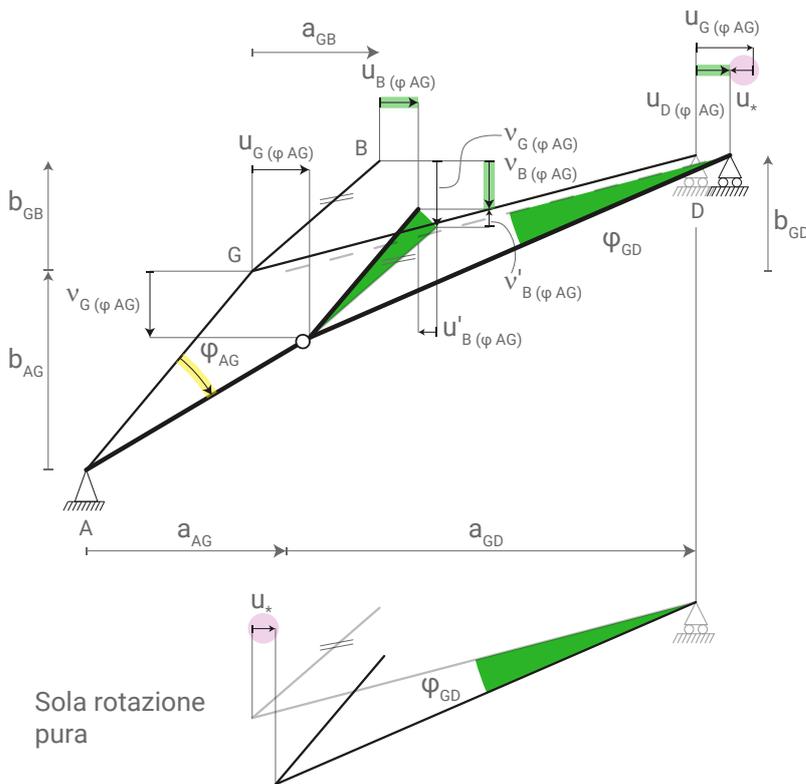
$\varphi_{AG}$

Disegni

Attivazione del movimento  $\varphi_{AG}$ .  
 Deformata dei pezzi rigidi nel piano xz, con convenzione di segno delle coordinate e dei movimenti, per le due situazioni, ( $b_{GD} < 0$ ) e ( $b_{GD} > 0$ ).

Approssimazione

Il modello analitico elastico lineare è approssimato, per via della semplificazione inerente ai piccoli movimenti ( $\sin \varphi \sim \varphi$ ,  $\cos \varphi \sim 1$ ).  
 Quindi, a parità del valore dell'angolo  $\varphi_{AG}$ , l'angolo  $\varphi_{GD}$  ha lo stesso valore in



Sola rotazione pura

entrambe le situazioni del braccio ( $b_{GD}$ ). Il modello grafico invece, è esatto, quindi l'angolo  $\varphi_{GD}$  ha valore leggermente diverso nelle due situazioni. Anche se la differenza tra i due modelli è quasi impercettibile, può verificarsi un cambiamento locale di segno, tra il modello analitico e quello grafico, nel caso di movimenti piccolissimi, cioè dell'ordine dei mm. Tale discrepanza tuttavia, risulta ininfluente sul risultato dell'analisi complessiva e quindi può essere trascurata.

### .Caso piano

Vettore delle proiezioni dell'asta (I,J)

$$\overline{J-I} = \begin{Bmatrix} \pm a_{IJ} \\ \pm c_{IJ} \\ \pm b_{IJ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_J) - (\pm x_I) \\ (\pm y_J) - (\pm y_I) \\ (\pm z_J) - (\pm z_I) \end{Bmatrix}$$

Bivettore rotazione in direzione (I,K)

$$\overline{\omega_{IK}} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{IK} \\ \pm \varphi_{IK} \\ \pm \gamma_{IK} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm \varphi_{IK} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Vettore movimento del nodo (J)

$$\overline{u}_J = \overline{\omega_{IK}} \wedge \overline{J-I}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & (\pm \varphi_{IK}) & 0 \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm c_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{pmatrix}$$

$$u_J = + \begin{vmatrix} (\pm \varphi_{IK}) & 0 \\ (\pm c_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = \oplus [ + (\pm \varphi_{IK})(\pm b_{IJ}) - (0)(\pm c_{IJ}) ]$$

$$w_J = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = \oplus [ + (0)(\pm b_{IJ}) - (0)(\pm a_{IJ}) ]$$

$$v_J = - \begin{vmatrix} 0 & (\pm \varphi_{IK}) \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm c_{IJ}) \end{vmatrix} = \ominus [ + (0)(\pm c_{IJ}) - (\pm \varphi_{IK})(\pm a_{IJ}) ]$$

$$u_J = + (\pm \varphi_{IK})(\pm b_{IJ})$$

$$w_J = 0$$

$$v_J = + (\pm \varphi_{IK})(\pm a_{IJ})$$

### .Caso spaziale

Vettore delle proiezioni dell'asta (I,J)

$$\overline{J-I} = \begin{Bmatrix} \pm a_{IJ} \\ \pm c_{IJ} \\ \pm b_{IJ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_J) - (\pm x_I) \\ (\pm y_J) - (\pm y_I) \\ (\pm z_J) - (\pm z_I) \end{Bmatrix}$$

Bivettore rotazione in direzione (I,K)

$$\overline{\omega_{IK}} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{IK} \\ \pm \varphi_{IK} \\ \pm \gamma_{IK} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \pm \omega \cos \eta_{IK} \cos \alpha_{IK} \\ \pm \omega \cos \xi_{IK} \operatorname{sen} \beta_{IK} \\ \pm \omega \cos \eta_{IK} \operatorname{sen} \alpha_{IK} \end{Bmatrix}$$

Vettore movimento del nodo (J)

$$\overline{u}_J = \overline{\omega_{IK}} \wedge \overline{J-I}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (\pm \lambda_{IK}) & (\pm \varphi_{IK}) & (\pm \gamma_{IK}) \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm c_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{pmatrix}$$

$$u_J = + \begin{vmatrix} (\pm \varphi_{IK}) & (\pm \gamma_{IK}) \\ (\pm c_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = \oplus [ + (\pm \varphi_{IK})(\pm b_{IJ}) - (\pm \gamma_{IK})(\pm c_{IJ}) ]$$

$$w_J = + \begin{vmatrix} (\pm \lambda_{IK}) & (\pm \gamma_{IK}) \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm b_{IJ}) \end{vmatrix} = \oplus [ + (\pm \lambda_{IK})(\pm b_{IJ}) - (\pm \gamma_{IK})(\pm a_{IJ}) ]$$

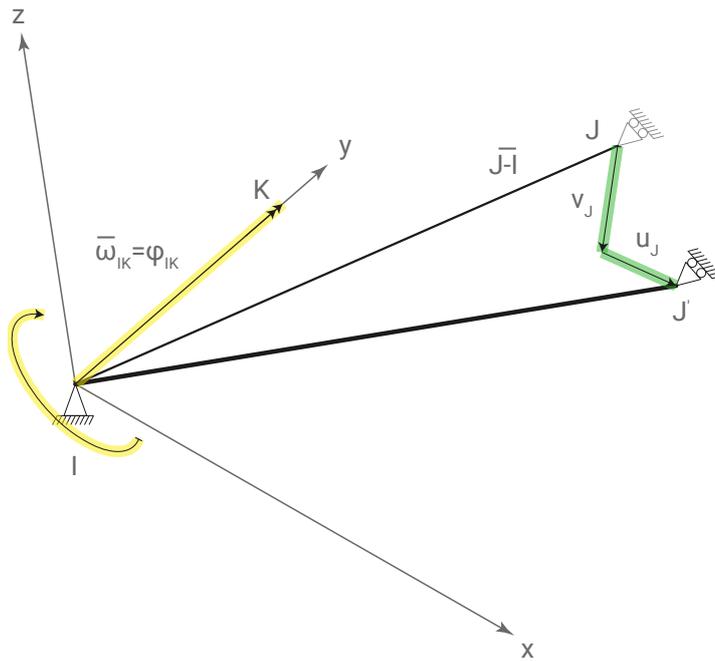
$$v_J = - \begin{vmatrix} (\pm \lambda_{IK}) & (\pm \varphi_{IK}) \\ (\pm a_{IJ}) & (\pm c_{IJ}) \end{vmatrix} = \ominus [ + (\pm \lambda_{IK})(\pm c_{IJ}) - (\pm \varphi_{IK})(\pm a_{IJ}) ]$$

### .Segno componenti vettoriali

Il segno di ogni componente del vettore relativo alle proiezioni dell'asta, dipende unicamente dalle coordinate dei suoi nodi, pertanto viene automaticamente stabilito durante il disegno del modello grafico.

Il segno di ogni componente del bivettore relativo al movimento dell'asta, dipende dal disegno della deformata arbitraria del modello, pertanto deve essere inserito manualmente in modo concorde ad essa.

Il segno di ogni componente del vettore relativo al movimento del nodo, è dato dal prodotto tra il segno del suo determinante e (-1) elevato alla somma, tra il numero della riga e quello della colonna esclusi (-1)<sup>1+1</sup>=+1, (-1)<sup>1+2</sup>=-1, (-1)<sup>1+3</sup>=+1. L'ordine di questi ultimi segni tuttavia, non può essere stabilito con questa regola, inquanto il segno del prodotto tra due vettori cambia se il loro ordine viene invertito. In questo caso cioè, non si può dire quale dei due deve essere primo, tra il vettore del movimento e quello delle proiezioni. Inoltre, l'ordine con cui vengono disposti i tre versori nella prima riga della matrice relativa al prodotto vettoriale, può non essere concorde a quello di cui il modello tiene conto. Dunque, bisogna per forza adattare il modello analitico a quello grafico e la strategia più semplice per farlo consiste, nell' associare i due (+) e il (-) ai segni dei tre determinanti, in modo che il loro segno complessivo, risulti concorde alla deformata ipotizzata nel modello grafico.



Schemi geometrici

1 Labile  
 $g_{ve} + g_{vi} - g_{dl} = ? 0$   
 $(4) + (0) - (6 \times 1)$   
 $+4 - 6 = -2$

Una labilità è data dalla rotazione del pezzo rigido intorno al suo asse (IJ), che in questo ragionamento non è significativa. L'altra labilità è data dal cinematismo del pezzo, che costituisce proprio l'oggetto di questo ragionamento.

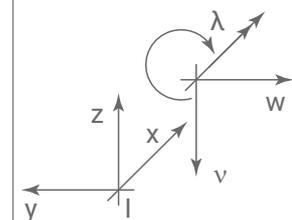
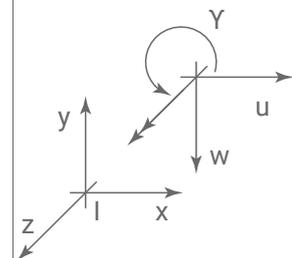
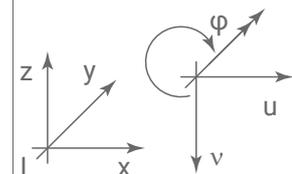
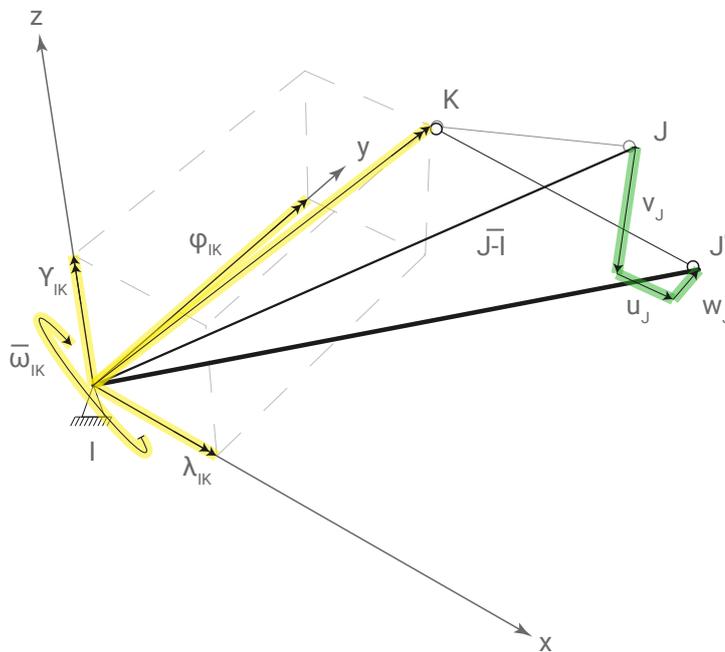
Movimento indipendente adottato

$\omega_{IK}$

Disegni

Attivazione del movimento  $\omega_{IK}$ .  
 Deformata del pezzo rigido (IJ), nello spazio, relativa al caso piano e a quello spaziale.

Convenzioni di segno coordinate e movimenti nei piani



Cinematismo del pezzo intermedio del sistema (3)

Il cinematismo del pezzo rigido (LGS), è costituito dalla sua rotazione intorno all'asse (GS), ( $\omega_{GS}$ ). Il movimento è analogo alla rotazione spaziale di una sola asta incernierata, studiata in precedenza. Pertanto, il movimento dell'intero pezzo si riconduce a quello del solo nodo (L).

Movimenti del nodo (L) del pezzo (LGS)

Vettori braccio e rotazione del pezzo (LGS)

$$\overline{L-G} = \begin{Bmatrix} \pm a_{GL} \\ \pm c_{GL} \\ \pm b_{GL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_L) - (\pm x_G) \\ (\pm y_L) - (\pm y_G) \\ (\pm z_L) - (\pm z_G) \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{GS}} = \begin{Bmatrix} +\omega_{GS}^x \\ +\omega_{GS}^y \\ +\omega_{GS}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\omega_{GS} \cos \eta_{GS} \cos \alpha_{GS} \\ +\omega_{GS} \cos \xi_{GS} \operatorname{sen} \beta_{GS} \\ +\omega_{GS} \cos \eta_{GS} \operatorname{sen} \alpha_{GS} \end{Bmatrix}$$

Componenti di movimento del nodo (L) dovute alla rotazione spaziale intorno all'asse (GS)

$$\overline{u_L} = \overline{\omega_{GS}} \wedge \overline{L-G}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (+\omega_{GS}^x) & (+\omega_{GS}^y) & (+\omega_{GS}^z) \\ (\pm a_{GL}) & (\pm c_{GL}) & (\pm b_{GL}) \end{pmatrix}$$

$$u_L = + \begin{vmatrix} (+\omega_{GS}^y) & (+\omega_{GS}^z) \\ (\pm c_{GL}) & (\pm b_{GL}) \end{vmatrix} = + [ (+\omega_{GS}^y)(\pm b_{GL}) - (+\omega_{GS}^z)(\pm c_{GL}) ]$$

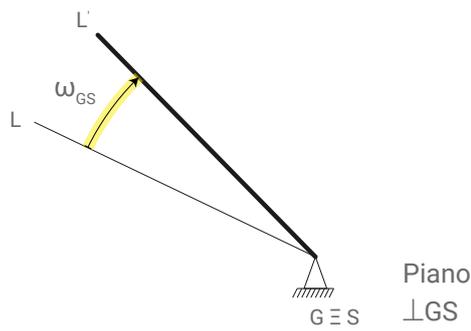
$$w_L = + \begin{vmatrix} (+\omega_{GS}^x) & (+\omega_{GS}^z) \\ (\pm a_{GL}) & (\pm b_{GL}) \end{vmatrix} = + [ (+\omega_{GS}^x)(\pm b_{GL}) - (+\omega_{GS}^z)(\pm a_{GL}) ]$$

$$v_L = - \begin{vmatrix} (+\omega_{GS}^x) & (+\omega_{GS}^y) \\ (\pm a_{GL}) & (\pm c_{GL}) \end{vmatrix} = - [ (+\omega_{GS}^x)(\pm c_{GL}) - (+\omega_{GS}^y)(\pm a_{GL}) ]$$

$$u_L = + [ +(\pm b_{GL}) \cos \xi_{GS} \operatorname{sen} \beta_{GS} - (\pm c_{GL}) \cos \eta_{GS} \operatorname{sen} \alpha_{GS} ] \omega_{GS}$$

$$w_L = + [ +(\pm b_{GL}) \cos \eta_{GS} \cos \alpha_{GS} - (\pm a_{GL}) \cos \eta_{GS} \operatorname{sen} \alpha_{GS} ] \omega_{GS}$$

$$v_L = - [ +(\pm c_{GL}) \cos \eta_{GS} \cos \alpha_{GS} - (\pm a_{GL}) \cos \xi_{GS} \operatorname{sen} \beta_{GS} ] \omega_{GS}$$



Schema geometrico

1 Labile  
 $gve+gvi-gdl = ?0$   
 $(3+2)+(0)-(6 \times 1)$   
 $+5-6 = -1$

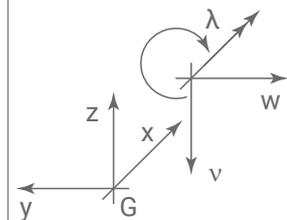
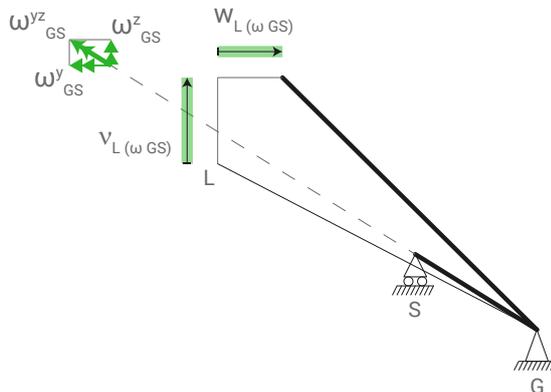
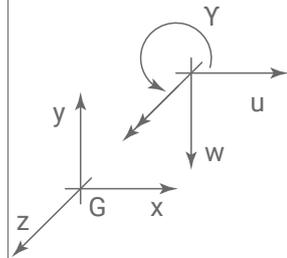
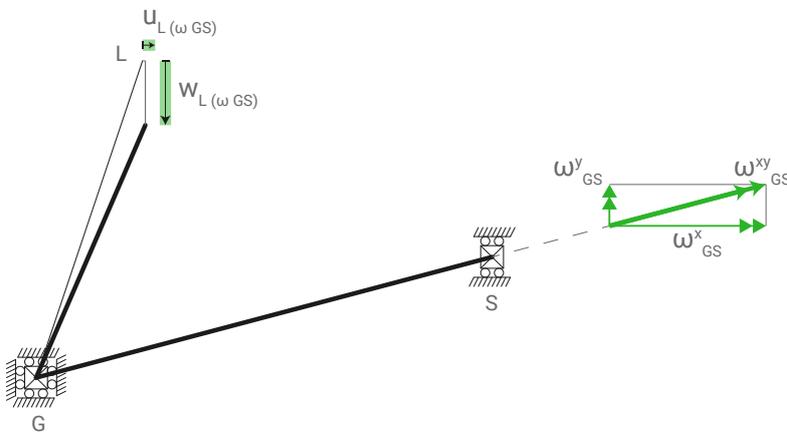
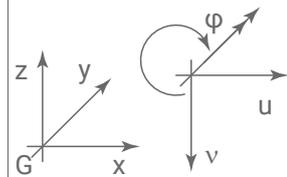
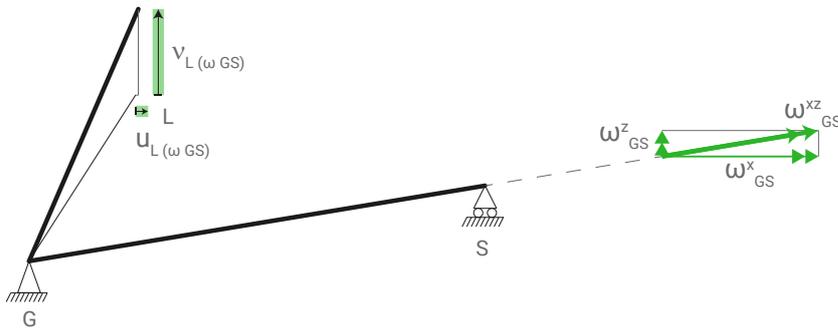
Movimento indipendente adottato

$\omega_{GS}$

Disegni

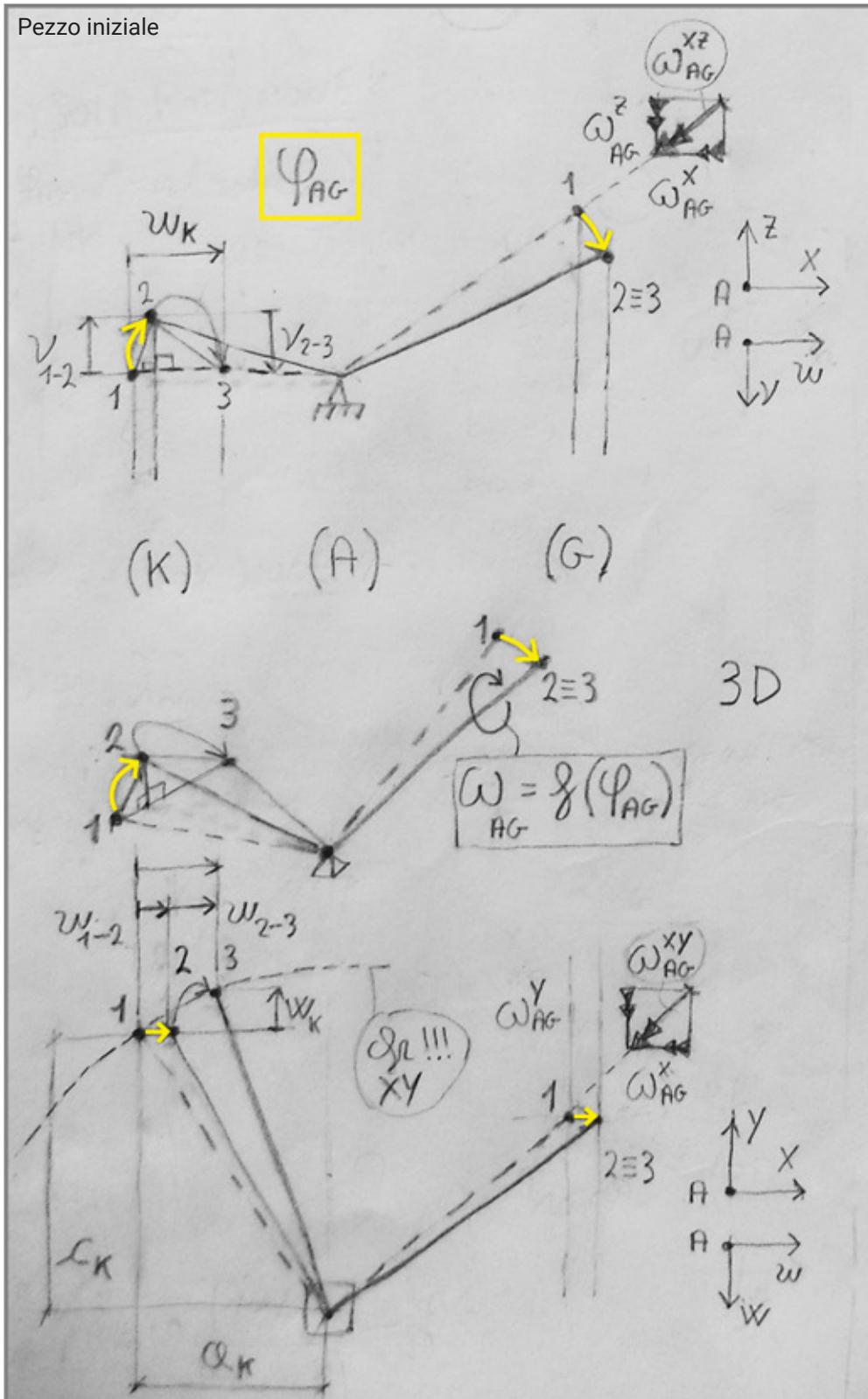
Attivazione del movimento  $\omega_{GS}$   
 Proiezioni della deformata del pezzo rigido nei piani  $\perp GS$ ,  $xz$ ,  $xy$  e  $yz$ .

Convenzione di segno coordinate e movimenti nei piani



Cinematismi dei pezzi terminali del sistema (3)

Vista la complessità geometrica dei cinematismi terminali, dello schema statico (3), occorre riportarne i disegni manuali qualitativi, prima di studiarli in dettaglio. Quindi, entrambi i movimenti sono scomponibili in due fasi, che sommate, rispettano comunque, il vincolamento al suolo della

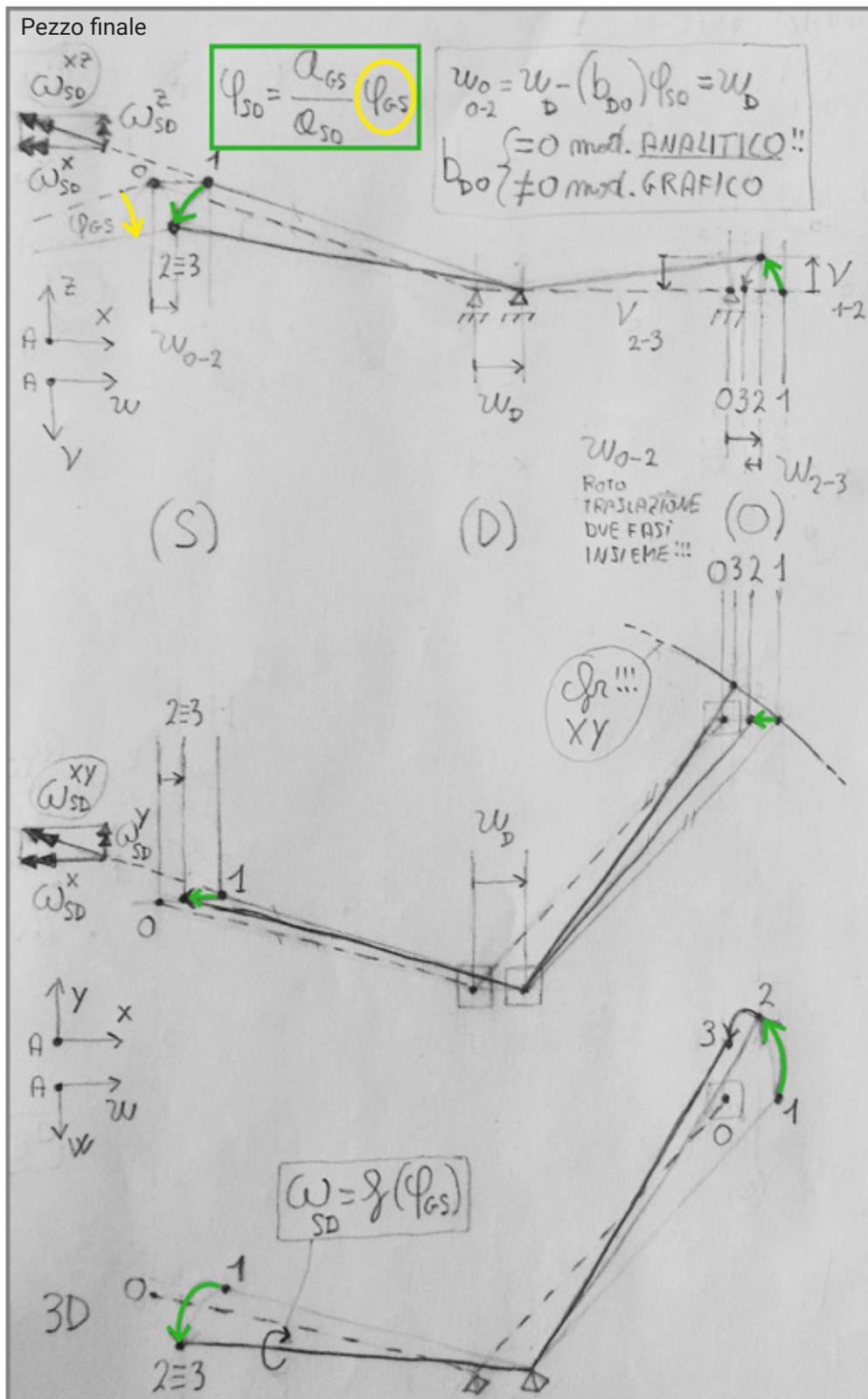


F1  
Cinematismo complessivo del pezzo iniziale relativo al sistema (3), scomposto in due fasi:

Prima fase:  
(1-2)  
rotazione pura nel piano (xy)

Seconda fase:  
(2-3)  
rotazione pura intorno all'asse (AG)

porzione rigida. Essa cioè, può soltanto ruotare intorno al nodo centrale, nel piano orizzontale (xy). Pertanto, il movimento di prima fase (1-2) del pezzo iniziale<sup>F1</sup>, è la rotazione pura intorno al nodo (A), nel piano verticale (xz). Il successivo (2-3) invece, è la rotazione spaziale pura intorno all'asse (AG), fino al contatto con il suolo. Poi, il pezzo finale<sup>F2</sup> si comporta in maniera simile al precedente, ma il movimento di prima fase (0-2), è una roto-traslazione e non una rotazione pura.



F2  
Cinematismo complessivo del pezzo finale relativo al sistema (3), scomposto in due fasi:

Prima fase:  
(0-2) rototraslazione nel piano (xy)  
(0-1) traslazione pura  
(1-2) rotazione pura

Seconda fase:  
(2-3) rotazione pura intorno all'asse (DO)

### Movimenti di tutti i nodi del pezzo (KNAG)

#### Componenti di movimento complessive del nodo (K)

$$u_K = u_{K(1-2)} + u_{K(2-3)}$$

$$u_K = + (0) + [ + (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$w_K = w_{K(1-2)} + w_{K(2-3)}$$

$$w_K = + (0) + [ + (\pm a_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$v_K = v_{K(1-2)} + v_{K(2-3)}$$

$$v_K = + (\pm a_{AK}) \varphi_{AG} - [ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] \omega_{AG}$$

#### Equazione di congruenza cinematica verticale del nodo (K)

$$v_K = v_{K(1-2)} + v_{K(2-3)} = 0$$

$$+ (\pm a_{AK}) \varphi_{AG} - [ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] \omega_{AG} = 0$$

$$\omega_{AG} = \frac{+ (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \varphi_{AG}$$

#### Funzioni delle componenti di movimento complessive del nodo (K)

$$u_K = + \frac{[ + (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \varphi_{AG}$$

$$w_K = + \frac{[ + (\pm a_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \varphi_{AG}$$

$$v_K = 0$$

#### Componenti di movimento complessive del nodo (N)

$$u_N = u_{N(1-2)} + u_{N(2-3)}$$

$$u_N = + (\pm b_{AN}) (+\varphi_{AG}) + [ - (\pm b_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} + (\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$w_N = w_{N(1-2)} + w_{N(2-3)}$$

$$w_N = + (0) + [ - (\pm b_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$v_N = v_{N(1-2)} + v_{N(2-3)}$$

$$v_N = + (\pm a_{AN}) (+\varphi_{AG}) - [ - (\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] \omega_{AG}$$

#### Funzioni delle componenti di movimento complessive del nodo (N)

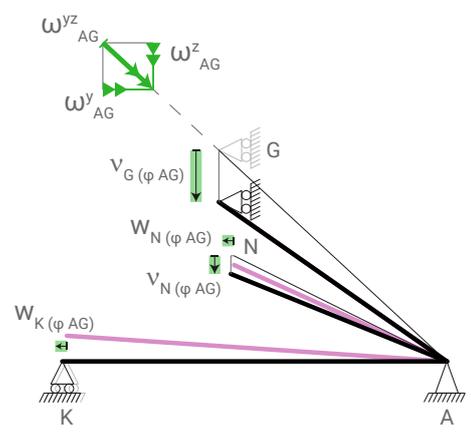
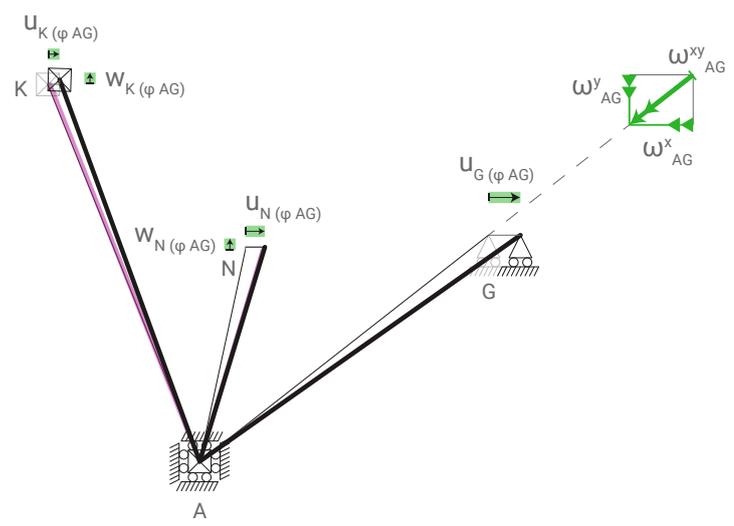
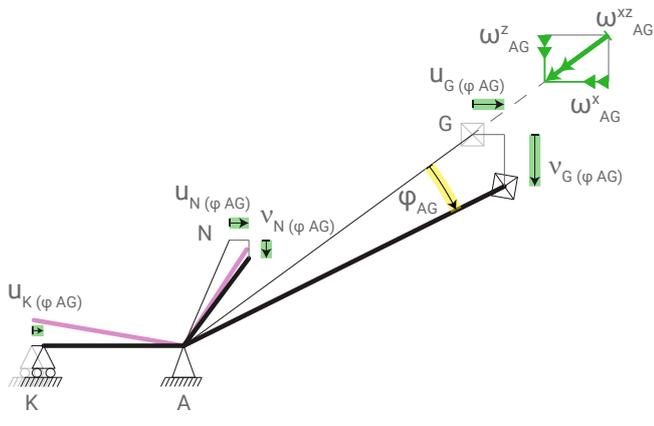
$$u_N = \left\{ + (\pm b_{AN}) + \frac{[ - (\pm b_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} + (\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \right\} \varphi_{AG}$$

$$w_N = \left\{ + \frac{[ - (\pm b_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \right\} \varphi_{AG}$$

$$v_N = \left\{ + (\pm a_{AN}) - \frac{[ - (\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] (\pm a_{AK})}{[ - (\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ]} \right\} \varphi_{AG}$$

### Cinematismo del pezzo iniziale del sistema (3)

Il cinematismo del pezzo (KNAG), è determinabile dalla sua scomposizione in due diversi movimenti separati che avvengono all'unisono; la rotazione nel piano (xz) intorno al nodo (A), ( $\varphi_{AG}$ ), fase (1-2, colore viola), possibile s o p p r i m e n d o momentaneamente il carrello nel nodo (K), e la successiva rotazione spaziale, intorno all'asse (AG), ( $\omega_{AG} (\varphi_{AG})$ ), fase (2-3, colore nero). Pertanto, per ciascuna delle due funzioni, bisogna scrivere l'espressione della componente di spostamento verticale ed inserirla nella relativa equazione di congruenza cinematica, ricavando una incognita. Cioè, la funzione di rotazione intorno all'asse (AG), per cui si annulla lo spostamento verticale del nodo (K).

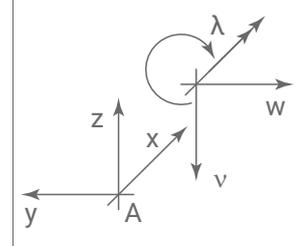
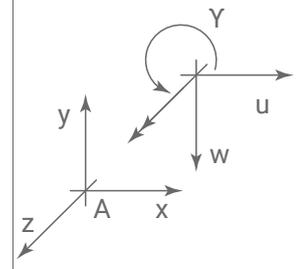
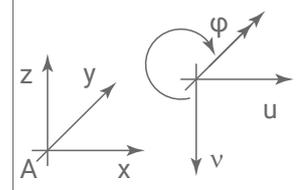


Schema geometrico  
 1 Labile  
 $gve+gvi-gdl = ?0$   
 $(1+3+1)+(0)-(6 \times 1)$   
 $+5-6=-1$

Movimento indipendente adottato  
 $\varphi_{AG}$

Disegni  
 Attivazione del movimento  $\varphi_{AG}$   
 Proiezioni della deformata del pezzo rigido nei piani xz, xy e yz.

Convenzione di segno coordinate e movimenti nei piani



## Movimenti separati del nodo (N)

Vettori braccio e rotazioni del pezzo (NAG)

$$\overline{\mathbf{N}-\mathbf{A}} = \begin{Bmatrix} \pm a_{AN} \\ \pm c_{AN} \\ \pm b_{AN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_N) - (\pm x_A) \\ (\pm y_N) - (\pm y_A) \\ (\pm z_N) - (\pm z_A) \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{AN}} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{AN} \\ \pm \varphi_{AN} \\ \pm \gamma_{AN} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\varphi_{AG} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{AG}} = \begin{Bmatrix} -\omega_{AG}^x \\ -\omega_{AG}^y \\ -\omega_{AG}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{AG} \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} \\ -\omega_{AG} \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} \\ -\omega_{AG} \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} \end{Bmatrix}$$

Fase 1-2 (colore viola)

Componenti di movimento del nodo (N) dovute alla sola rotazione piana intorno al nodo (A)

$$\overline{\mathbf{u}}_N = \overline{\omega_{AN}} \wedge \overline{\mathbf{N}-\mathbf{A}}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & (+\varphi_{AG}) & 0 \\ (\pm a_{AN}) & (\pm c_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_N = + \begin{vmatrix} (+\varphi_{AG}) & 0 \\ (\pm c_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{vmatrix} = + [ (+\varphi_{AG})(\pm b_{AN}) - (0)(\pm c_{AN}) ]$$

$$\mathbf{w}_N = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\pm a_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{vmatrix} = + [ (0)(\pm b_{AN}) - (0)(\pm a_{AN}) ]$$

$$\mathbf{v}_N = - \begin{vmatrix} 0 & (+\varphi_{AG}) \\ (\pm a_{AN}) & (\pm c_{AN}) \end{vmatrix} = - [ (0)(\pm c_{AN}) - (+\varphi_{AG})(\pm a_{AN}) ]$$

$$\mathbf{u}_N = + (\pm b_{AN})(+\varphi_{AG})$$

$$\mathbf{w}_N = 0$$

$$\mathbf{v}_N = + (\pm a_{AN})(+\varphi_{AG})$$

Fase 2-3 (colore nero)

Componenti di movimento del nodo (N) dovute alla sola rotazione spaziale intorno all'asse (AG)

$$\overline{\mathbf{u}}_N = \overline{\omega_{AG}} \wedge \overline{\mathbf{N}-\mathbf{A}}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^y) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm a_{AN}) & (\pm c_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_N = + \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^y) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm c_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{vmatrix} = + [ (-\omega_{AG}^y)(\pm b_{AN}) - (-\omega_{AG}^z)(\pm c_{AN}) ]$$

$$\mathbf{w}_N = + \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm a_{AN}) & (\pm b_{AN}) \end{vmatrix} = + [ (-\omega_{AG}^x)(\pm b_{AN}) - (-\omega_{AG}^z)(\pm a_{AN}) ]$$

$$\mathbf{v}_N = - \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^y) \\ (\pm a_{AN}) & (\pm c_{AN}) \end{vmatrix} = - [ (-\omega_{AG}^x)(\pm c_{AN}) - (-\omega_{AG}^y)(\pm a_{AN}) ]$$

$$\mathbf{u}_N = + [ -(\pm b_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} + (\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$\mathbf{w}_N = + [ -(\pm b_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$\mathbf{v}_N = - [ -(\pm c_{AN}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AN}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] \omega_{AG}$$

## Movimenti separati del nodo (K)

Vettori braccio e rotazioni del pezzo (KAG)

$$\overline{K-A} = \begin{Bmatrix} \pm a_{AK} \\ \pm c_{AK} \\ \pm b_{AK} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_K) - (\pm x_A) \\ (\pm y_K) - (\pm y_A) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{AK}} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{AK} \\ \pm \varphi_{AK} \\ \pm \gamma_{AK} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\varphi_{AG} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{AG}} = \begin{Bmatrix} -\omega_{AG}^x \\ -\omega_{AG}^y \\ -\omega_{AG}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{AG} \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} \\ -\omega_{AG} \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} \\ -\omega_{AG} \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} \end{Bmatrix}$$

Fase 1-2 (colore viola)

Componenti di movimento del nodo (K) dovute alla sola rotazione piana intorno al nodo (A)

$$\overline{u_K} = \overline{\omega_{AK}} \wedge \overline{K-A}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & (+\varphi_{AG}) & 0 \\ (\pm a_{AK}) & (\pm c_{AK}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_K = + \begin{vmatrix} (+\varphi_{AG}) & 0 \\ (\pm c_{AK}) & 0 \end{vmatrix} = + [ (+\varphi_{AG})(0) - (0)(\pm c_{AK}) ]$$

$$w_K = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\pm a_{AK}) & 0 \end{vmatrix} = + [ (0)(0) - (0)(\pm a_{AK}) ]$$

$$v_K = - \begin{vmatrix} 0 & (+\varphi_{AG}) \\ (\pm a_{AK}) & (\pm c_{AK}) \end{vmatrix} = - [ +0(\pm c_{AK}) - (+\varphi_{AG})(\pm a_{AK}) ]$$

$$u_K = 0$$

$$w_K = 0$$

$$v_K = +(\pm a_{AK})\varphi_{AG}$$

Fase 2-3 (colore nero)

Componenti di movimento del nodo (K) dovute alla sola rotazione spaziale intorno all'asse (AG)

$$\overline{u_K} = \overline{\omega_{AG}} \wedge \overline{K-A}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^y) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm a_{AK}) & (\pm c_{AK}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_K = + \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^y) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm c_{AK}) & 0 \end{vmatrix} = + [ +(-\omega_{AG}^y)(0) - (-\omega_{AG}^z)(\pm c_{AK}) ]$$

$$w_K = + \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^z) \\ (\pm a_{AK}) & 0 \end{vmatrix} = + [ +(-\omega_{AG}^x)(0) - (-\omega_{AG}^z)(\pm a_{AK}) ]$$

$$v_K = - \begin{vmatrix} (-\omega_{AG}^x) & (-\omega_{AG}^y) \\ (\pm a_{AK}) & (\pm c_{AK}) \end{vmatrix} = - [ +(-\omega_{AG}^x)(\pm c_{AK}) - (-\omega_{AG}^y)(\pm a_{AK}) ]$$

$$u_K = + [ +(\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$w_K = + [ +(\pm a_{AK}) \cos \eta_{AG} \operatorname{sen} \alpha_{AG} ] \omega_{AG}$$

$$v_K = - [ -(\pm c_{AK}) \cos \eta_{AG} \cos \alpha_{AG} + (\pm a_{AK}) \cos \xi_{AG} \operatorname{sen} \beta_{AG} ] \omega_{AG}$$

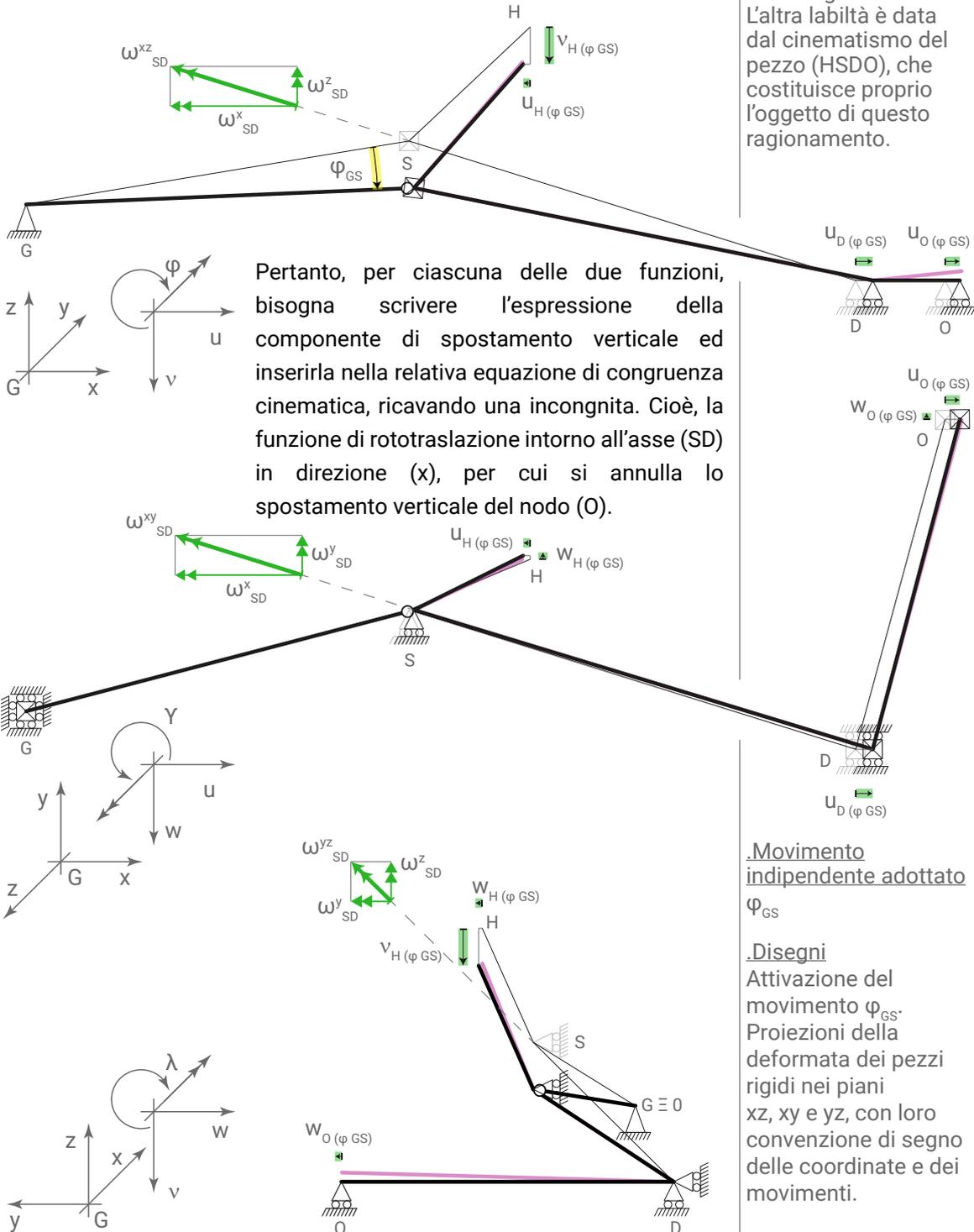
Cinematismo del pezzo finale del sistema (3)

Il cinematismo del pezzo (HSDO), è determinabile dalla sua scomposizione in due diversi movimenti separati, che avvengono all'unisono; la rototraslazione in direzione (x), nel piano (xz) intorno al nodo (D), ( $u_D + \varphi_{SD}$ ), fase (0-2, colore viola), possibile sopprimendo momentaneamente il carrello nel nodo (O), e la successiva rotazione spaziale, intorno all'asse (SD), ( $\omega_{SD(\varphi_{GS})}$ ), fase (2-3, colore nero).

Schema geometrico

2 Labile  
 $gve + gvi - gdl = ?0$   
 $(3+1+2+1) + (3) - (6 \times 2)$   
 $+10 - 12 = -2$

Una labilità è data dalla rotazione del pezzo (GS) intorno al suo asse, che in questo ragionamento non è significativa. L'altra labilità è data dal cinematismo del pezzo (HSDO), che costituisce proprio l'oggetto di questo ragionamento.



### Movimenti di tutti i nodi del pezzo (HSDO)

Componenti di movimento complessive del nodo (O)

$$u_o = u_{o(0-2)} + u_{o(2-3)}$$

$$u_o = + \left[ (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SD}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS} + [ - (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

$$w_o = w_{o(0-2)} + w_{o(2-3)}$$

$$w_o = + (0) + [ - (\pm a_{DO}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

$$v_o = v_{o(0-2)} + v_{o(2-3)}$$

$$v_o = - (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} - [ - (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ] \omega_{SD}$$

Equazione di congruenza cinematica verticale del nodo (O)

$$v_o = v_{o(0-2)} + v_{o(2-3)} = 0$$

$$- (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} - [ - (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ] \omega_{SD} = 0$$

$$\omega_{SD} = + \frac{1}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS}$$

Funzioni delle componenti di movimento complessive del nodo (O)

$$u_o = \left\{ + \left[ (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SD}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] + \frac{[ - (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ]}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right\} \varphi_{GS}$$

$$w_o = \left\{ + (0) + \frac{[ - (\pm a_{DO}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ]}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right\} \varphi_{GS}$$

$$v_o = 0$$

Componenti di movimento complessive del nodo (H)

$$u_H = u_{H(0-2)} + u_{H(2-3)}$$

$$u_H = + \left[ + (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS} + [ + (\pm b_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} - (\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

$$w_H = w_{H(0-2)} + w_{H(2-3)}$$

$$w_H = + (0) + [ - (\pm b_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

$$v_H = v_{H(0-2)} + v_{H(2-3)}$$

$$v_H = + \left[ + (\pm a_{GS}) - (\pm a_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS} - [ - (\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ] \omega_{SD}$$

Funzioni delle componenti di movimento complessive del nodo (H)

$$u_H = \left\{ + (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} + \frac{[ + (\pm b_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} - (\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ]}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right\} \varphi_{GS}$$

$$w_H = \left\{ + (0) + \frac{[ - (\pm b_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} ]}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right\} \varphi_{GS}$$

$$v_H = \left\{ + (\pm a_{GS}) - (\pm a_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} - \frac{[ - (\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]}{[ + (\pm c_{DO}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} + (\pm a_{DO}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} ]} (\pm a_{DO}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right\} \varphi_{GS}$$

## Movimenti separati del nodo (H)

Vettori braccio e rotazione del pezzo (HSD)

$$\overline{H-S} = \begin{Bmatrix} \pm a_{SH} \\ \pm c_{SH} \\ \pm b_{SH} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_H) - (\pm x_S) \\ (\pm y_H) - (\pm y_S) \\ (\pm z_H) - (\pm z_S) \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{SD}} = \begin{Bmatrix} -\omega_{SD}^x \\ +\omega_{SD}^y \\ +\omega_{SD}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{SD} \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} \\ +\omega_{SD} \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} \\ +\omega_{SD} \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} \end{Bmatrix}$$

Fase 0-2 (colore viola)

Componenti di movimento del nodo (H) dovute al solo cinematicismo piano di traslazione e rotazione intorno al nodo (G)

Sono le stesse funzioni del caso piano, che in quello spaziale non cambiano forma

$$u_H = \left[ +(\pm b_{GS}) - (\pm b_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS}$$

$$w_H = 0$$

$$v_H = \left[ +(\pm a_{GS}) - (\pm a_{SH}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS}$$

Fase 2-3 (colore nero)

Componenti di movimento del nodo (H) dovute alla sola rotazione spaziale intorno all'asse (SD)

$$\overline{u}_H = \overline{\omega_{SD}} \wedge \overline{H-S}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (-\omega_{SD}^x) & (+\omega_{SD}^y) & (+\omega_{SD}^z) \\ (\pm a_{SH}) & (\pm c_{SH}) & (\pm b_{SH}) \end{pmatrix}$$

$$u_H = + \begin{vmatrix} +\omega_{SD}^y & +\omega_{SD}^z \\ \pm c_{SH} & \pm b_{SH} \end{vmatrix} = + \left[ +(+\omega_{SD}^y)(\pm b_{SH}) - (+\omega_{SD}^z)(\pm c_{SH}) \right]$$

$$w_H = + \begin{vmatrix} -\omega_{SD}^x & +\omega_{SD}^z \\ \pm a_{SH} & \pm b_{SH} \end{vmatrix} = + \left[ +(-\omega_{SD}^x)(\pm b_{SH}) - (+\omega_{SD}^z)(\pm a_{SH}) \right]$$

$$v_H = - \begin{vmatrix} -\omega_{SD}^x & +\omega_{SD}^y \\ \pm a_{SH} & \pm c_{SH} \end{vmatrix} = - \left[ +(-\omega_{SD}^x)(\pm c_{SH}) - (+\omega_{SD}^y)(\pm a_{SH}) \right]$$

$$u_H = + \left[ +(\pm b_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} - (\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} \right] \omega_{SD}$$

$$w_H = + \left[ -(\pm b_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \eta_{SD} \operatorname{sen} \alpha_{SD} \right] \omega_{SD}$$

$$v_H = - \left[ -(\pm c_{SH}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{SH}) \cos \xi_{SD} \operatorname{sen} \beta_{SD} \right] \omega_{SD}$$

## Movimenti separati del nodo (O)

Vettori braccio, traslazione e rotazioni del pezzo (SDO)

$$\overline{O-D} = \begin{Bmatrix} \pm a_{D0} \\ \pm c_{D0} \\ \pm b_{D0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\pm x_O) - (\pm x_D) \\ (\pm y_O) - (\pm y_D) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{u}_D = \begin{Bmatrix} \pm u_D \\ \pm w_D \\ \pm v_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} + \left[ (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SD}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\omega}_{D0} = \begin{Bmatrix} \pm \lambda_{D0} \\ \pm \varphi_{D0} \\ \pm \gamma_{D0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\varphi_{SD} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ - \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overline{\omega}_{SD} = \begin{Bmatrix} -\omega_{SD}^x \\ +\omega_{SD}^y \\ +\omega_{SD}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega_{SD} \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} \\ +\omega_{SD} \cos \xi_{SD} \text{sen} \beta_{SD} \\ +\omega_{SD} \cos \eta_{SD} \text{sen} \alpha_{SD} \end{Bmatrix}$$

Fase 0-2 (colore viola)

Componenti di movimento del nodo (O) dovute al solo cinematismo piano di traslazione e rotazione intorno al nodo (G)

$$\overline{u}_O = \overline{u}_D + \overline{\omega}_{D0} \wedge \overline{O-D}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 0 & \left( -\frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \right) & 0 \\ (\pm a_{D0}) & (\pm c_{D0}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_O = \pm u_D + \begin{Bmatrix} -\frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \\ (\pm c_{D0}) \\ 0 \end{Bmatrix} = \pm u_D + \left[ + \left( -\frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \right) (0) - (0) (\pm c_{D0}) \right]$$

$$w_O = + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ (\pm a_{D0}) & 0 \end{vmatrix} = + [ + (0)(0) - (0)(\pm a_{D0}) ]$$

$$v_O = - \begin{vmatrix} 0 & \left( -\frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \right) \\ (\pm a_{D0}) & (\pm c_{D0}) \end{vmatrix} = - \left[ + (0)(\pm c_{D0}) - \left( -\frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS} \right) (\pm a_{D0}) \right]$$

$$u_O = + \left[ (\pm b_{GS}) - (\pm b_{SD}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \right] \varphi_{GS}$$

$$w_O = 0$$

$$v_O = - (\pm a_{D0}) \frac{(\pm a_{GS})}{(\pm a_{SD})} \varphi_{GS}$$

Fase 2-3 (colore nero)

Componenti di movimento del nodo (O) dovute alla sola rotazione spaziale intorno all'asse (SD)

$$\overline{u}_O = \overline{\omega}_{SD} \wedge \overline{O-D}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ (-\omega_{SD}^x) & (+\omega_{SD}^y) & (+\omega_{SD}^z) \\ (\pm a_{D0}) & (\pm c_{D0}) & 0 \end{pmatrix}$$

$$u_O = + \begin{Bmatrix} +\omega_{SD}^y & +\omega_{SD}^z \\ (\pm c_{D0}) & 0 \end{Bmatrix} = + \left[ + (+\omega_{SD}^y)(0) - (+\omega_{SD}^z)(\pm c_{D0}) \right]$$

$$w_O = + \begin{vmatrix} (-\omega_{SD}^x) & +\omega_{SD}^z \\ (\pm a_{D0}) & 0 \end{vmatrix} = + \left[ + (-\omega_{SD}^x)(0) - (+\omega_{SD}^z)(\pm a_{D0}) \right]$$

$$v_O = - \begin{vmatrix} (-\omega_{SD}^x) & +\omega_{SD}^y \\ (\pm a_{D0}) & (\pm c_{D0}) \end{vmatrix} = - \left[ + (-\omega_{SD}^x)(\pm c_{D0}) - (+\omega_{SD}^y)(\pm a_{D0}) \right]$$

$$u_O = + [ - (\pm c_{D0}) \cos \eta_{SD} \text{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

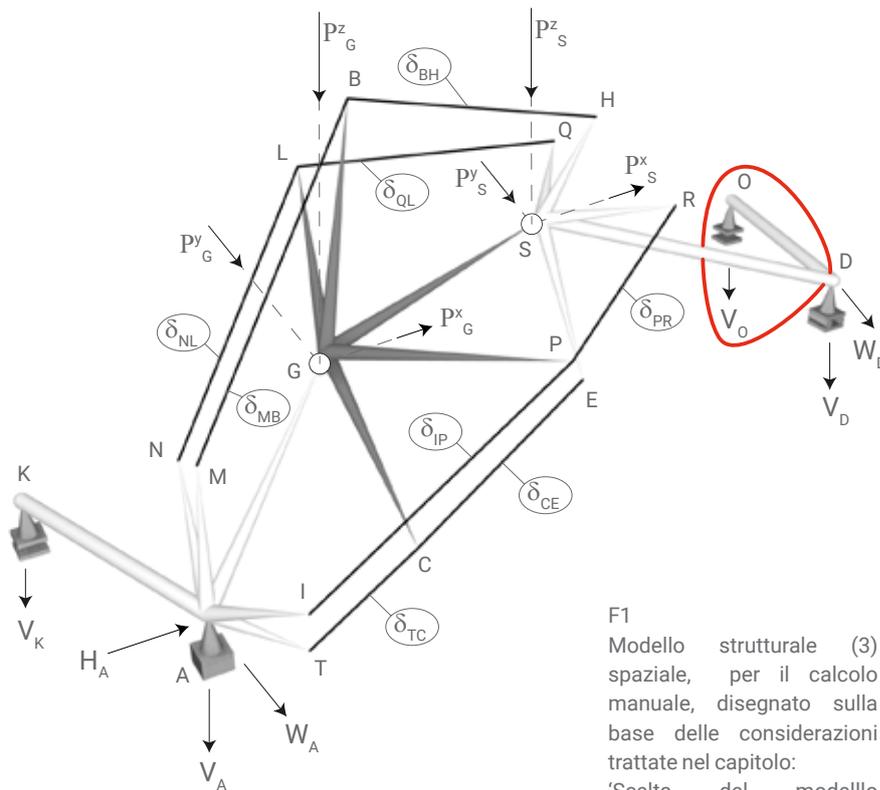
$$w_O = + [ - (\pm a_{D0}) \cos \eta_{SD} \text{sen} \alpha_{SD} ] \omega_{SD}$$

$$v_O = - [ - (\pm c_{D0}) \cos \eta_{SD} \cos \alpha_{SD} - (\pm a_{D0}) \cos \xi_{SD} \text{sen} \beta_{SD} ] \omega_{SD}$$

METODO DIRETTO CON VINCOLI AUSILIARI PER IL CASO SPAZIALE

.Schema statico spaziale (3)

Come annunciato all'inizio di questo capitolo, relativamente alla sola analisi manuale, il sistema (3) è l'unico di quelli presenti in questa tesi, che necessita la conoscenza di tutte le reazioni vincolari esterne, per poter essere risolto internamente. Tuttavia, la geometria spaziale più realistica di una struttura per ponte, prevede comunque la presenza di un vincolo esterno monodirezionale, con reazione realmente staticamente indeterminata, cioè il carrello nel nodo (O). Pertanto, nel procedimento illustrato in questo paragrafo, si considera soltanto la versione esternamente isostatica dello schema statico (3) spaziale. Quindi, per rendere più evidente il confronto tra le due geometrie, vengono riportati comunque i disegni di quella iperstatica, escludendo però, con un cerchio rosso, il braccio (DO) da tutti i passaggi grafici ed analitici.



F1  
Modello strutturale (3) spaziale, per il calcolo manuale, disegnato sulla base delle considerazioni trattate nel capitolo: 'Scelta del modello strutturale' pg.????

.Vincolamento

- esterno:  
 A: cerniera spaziale 3gdv  
 K: carrello monodirezionale 1gdv  
 D: carrello bidirezionale 2gdv  
 O: carrello monodirezionale 1gdv

.Schema geometrico esterno globale:

1 Iperstatico  
 $7gdv - 6gdl = +1$

.Schema statico esterno globale:

1 Staticamente indeterminato perchè, anche se la reazione orizzontale in (A) è staticamente determinata, quella verticale in (O), non risulta comunque determinabile per equilibrio.  
 $H_A = P_G^x + P_S^x$

.Schema geometrico interno con funi:

3 Iperstatico (gve)+(gvi)-(gdl)  
 $(7)+(2 \times 3)+(1 \times 8)-(3 \times 6)$   
 $7+6+8-18 = +3$

.Schema statico interno:

3 volte staticamente indeterminato

.Schema geometrico senza funi:

5 Labile  
 $gve+gvi-gdl \neq 0$   
 $(7)+(2 \times 3)-(3 \times 6)$   
 $7+6-18 = -5$

.Movimenti:

5 movimenti indipendenti  
 $\Phi_{AG}, \Phi_{GS}, V_{AG}, V_{GS}, \omega_{GS}$

.Metodo equilibrio:

Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari

N1

Equazioni di equilibrio dello schema statico (3) spaziale, volte a trovare i suoi movimenti indipendenti.  
pg. 214 - 219

N2

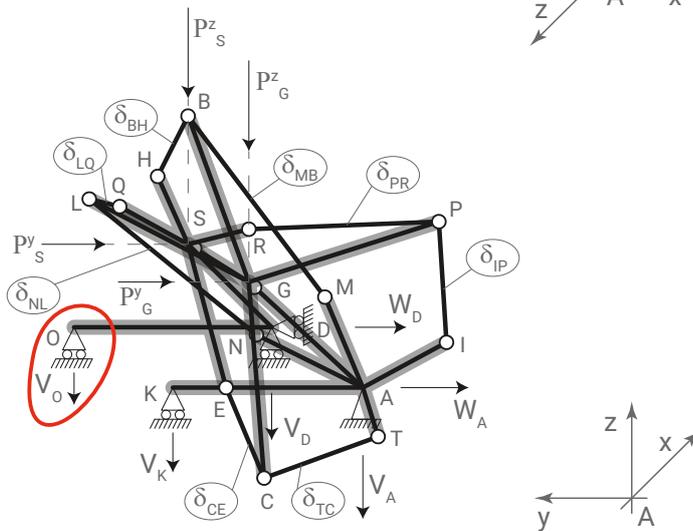
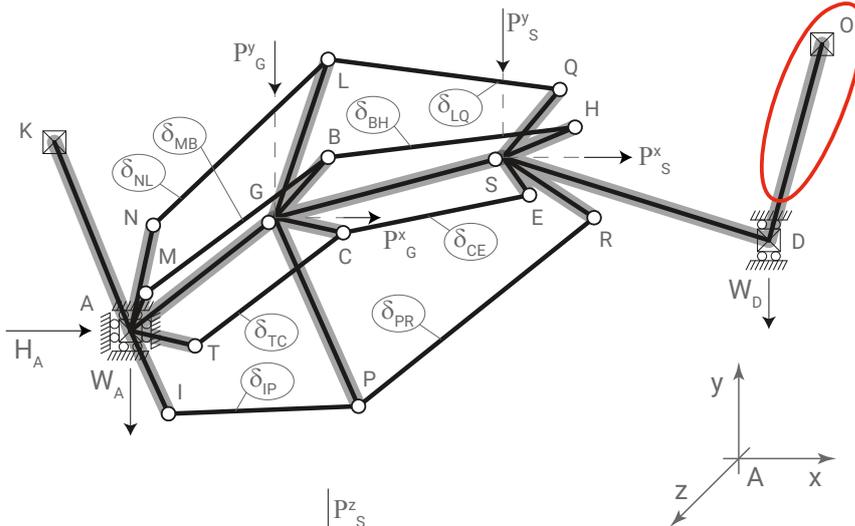
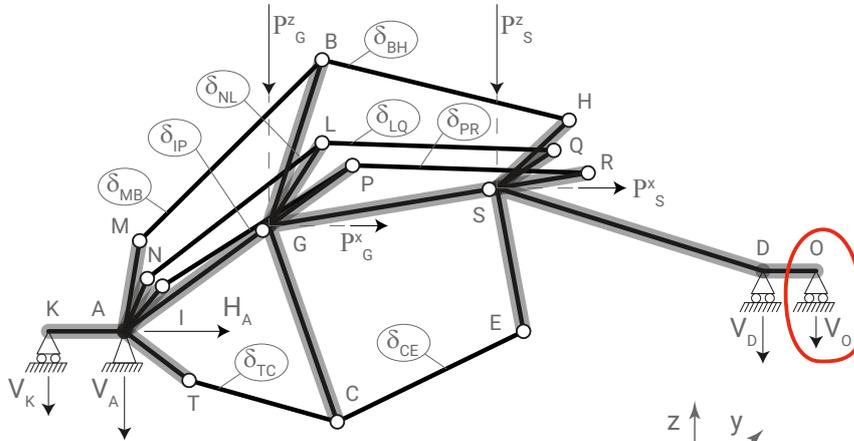
D . S C H O D E K ,  
M.BECHTHOLD, Structures,  
Pearson, 2014  
pg. 147 ; 148

Equazioni di equilibrio

Le equazioni di equilibrio relative ad un sistema spaziale, siano esse volte a trovare le sue reazioni vincolari esterne<sup>Tab2</sup>, o i suoi movimenti indipendenti<sup>N1</sup>, vanno trattate in modo analogo a quelle cinematiche, già viste in precedenza. Cioè, occorre scrivere faticosamente l'equilibrio della struttura, in ogni singolo piano cartesiano<sup>N2</sup>.

Schema STATICO	Tab 2	Equazioni di EQUILIBRIO	Reazioni vincolari INCOGNITE	NUMERO
Soli carichi concentrati nei NODI (P)	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (3D) rot.tot. (AD)	(xz) rot. tot. (A) (xy) rot.tot. (A) (yz) rot. tot. (D)	$(H_A), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D),$ $(V_K)$	6
Sola PRETENSIONE nelle funi (T)	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. sx. (G) (xy) rot. sx. (G)	(xz) rot. dx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. dx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G) (xz) rot. sx. (S) (xz) rot. sx. (S) (yz) rot. sx. (G) (xy) rot. sx. (G)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ $(V_S), (W_S),$ $(V_G), (W_G),$ $(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})$	13
Solo MOVIMENTO ( $\varphi_{AG}$ )	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. sx. (S)	(xz) rot. dx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. dx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G) (xy) rot. sx. (S) (xy) rot. sx. (S) (yz) rot. sx. (S)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ $(V_S), (W_S),$ <del><math>(V_G), (W_G),</math></del> $(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})$	12
Solo MOVIMENTO ( $\varphi_{GS}$ )	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. sx. (S)	(xz) rot. dx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. dx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G) (xy) rot. sx. (S) (xy) rot. sx. (S) (yz) rot. sx. (S)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ <del><math>(V_S), (W_S),</math></del> $(V_G), (W_G),$ $(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})$	12
Solo MOVIMENTO ( $\gamma_{AG}$ )	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. sx. (S)	(xz) rot. dx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. dx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G) (xy) rot. sx. (S) (xy) rot. sx. (S) (yz) rot. sx. (S)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ $(V_S), (W_S),$ $(V_G),$ <del><math>(W_G),</math></del> $(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})$	12
Solo MOVIMENTO ( $\gamma_{GS}$ )	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. sx. (S)	(xz) rot. dx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. dx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G) (xy) rot. sx. (S) (xy) rot. sx. (S) (yz) rot. sx. (S)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ $(V_S),$ <del><math>(W_S),</math></del> $(V_G), (W_G),$ $(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})$	12
Solo MOVIMENTO ( $\omega_{GS}$ )	(x) trasl.tot. (z) trasl.tot. (y) trasl.tot. (xz) rot. dx. (S)	(xz) rot. sx. (S) (xz) rot. dx. (G) (xy) rot. sx. (S) (xy) rot. dx. (G) (yz) rot. dx. (S) (yz) rot. dx. (G)	$(H_A=0), (V_A), (W_A),$ $(V_D), (W_D), (V_K),$ $(V_S), (W_S),$ $(V_G), (W_G),$ <del><math>(M_{GS}^{xz}), (M_{GS}^{xy}), (M_{GS}^{yz})</math></del>	10

Sole azioni esterne



Disegni  
Proiezioni dello schema statico inerente alle sole azioni esterne applicate ai nodi, nei piani xz, xy e yz.

Componente orizzontale x:  
La componente orizzontale x di ogni azione esterna e di ogni reazione vincolare, deve essere la stessa, sia nel piano xz, che in quello xy.

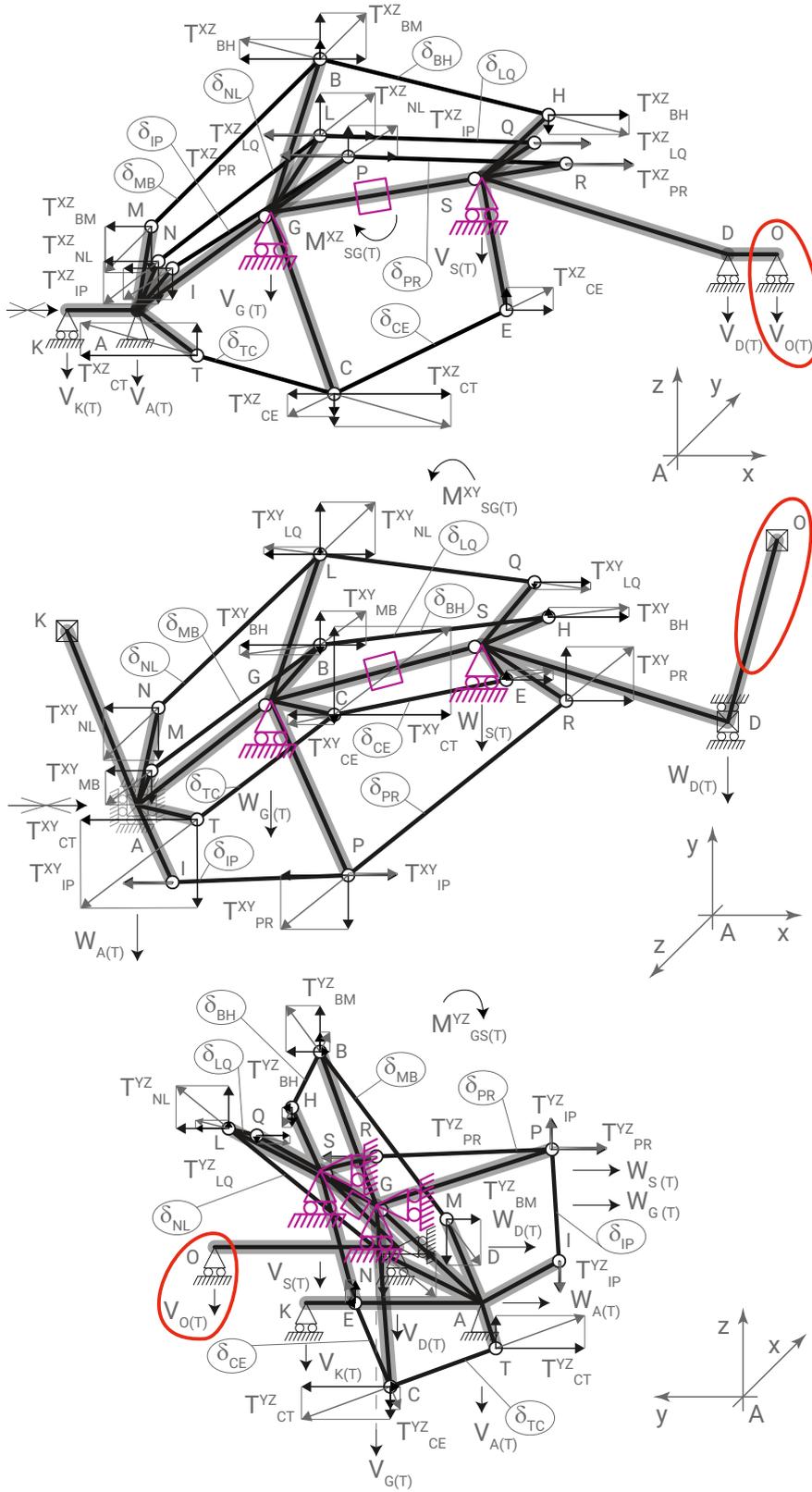
Componente orizzontale y:  
La componente orizzontale y di ogni azione esterna e di ogni reazione vincolare, deve essere la stessa, sia nel piano xy, che in quello yz.

Componente verticale z:  
La componente verticale z di ogni azione esterna e di ogni reazione vincolare, deve essere la stessa, sia nel piano xz, che in quello yz.

Scala di misura  
1:100



.Sola pretensione



.Disegni  
 Proiezioni dello  
 schema statico  
 inerente alle reazioni  
 di sola pretensione,  
 nei piani  
 xz, xy e yz.

.Componente  
 orizzontale x:  
 La componente  
 orizzontale x di ogni  
 reazione di sola  
 pretensione e di ogni  
 reazione vincolare,  
 deve essere la stessa,  
 sia nel piano xz, che in  
 quello xy.

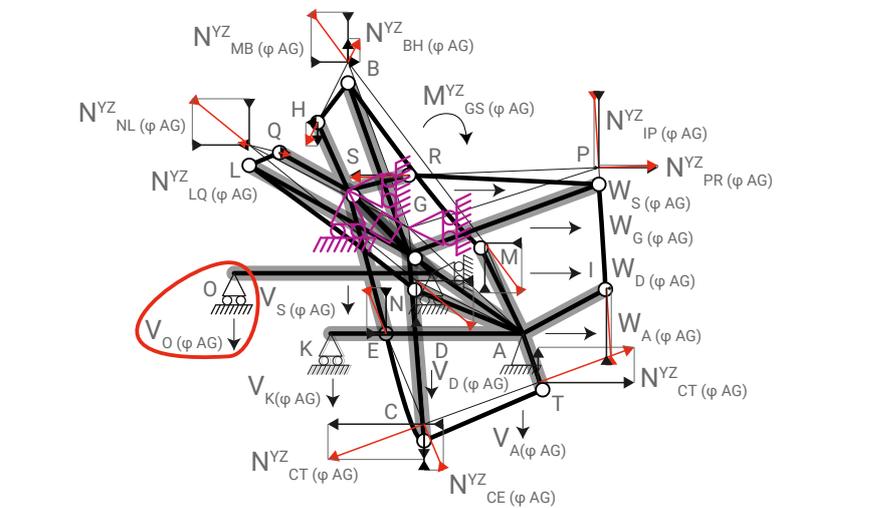
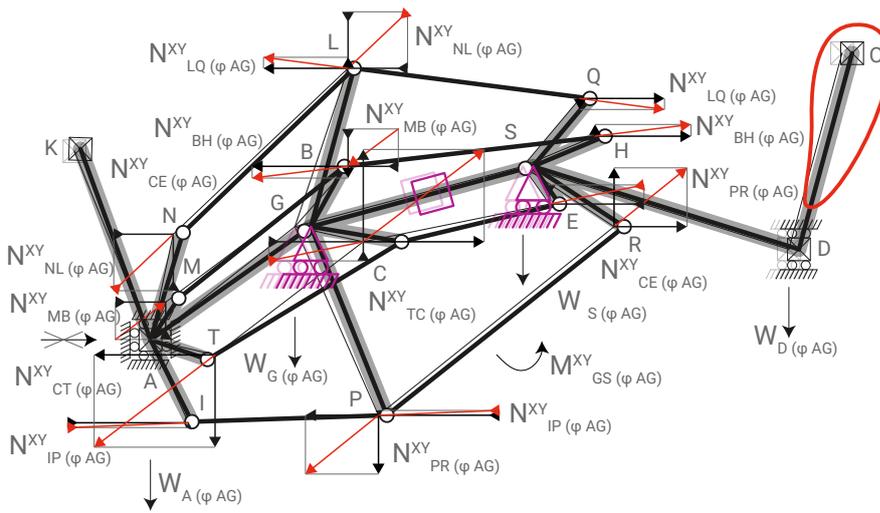
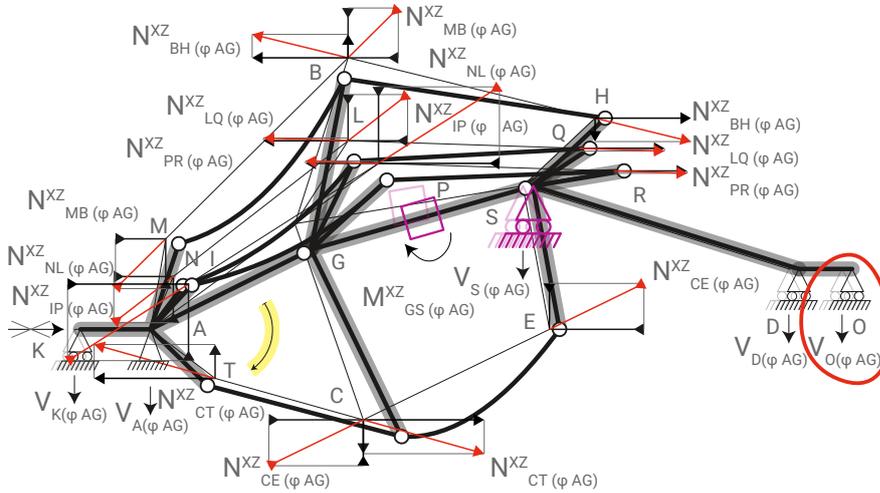
.Componente  
 orizzontale y:  
 La componente  
 orizzontale y di ogni  
 reazione di sola  
 pretensione e di ogni  
 reazione vincolare,  
 deve essere la stessa,  
 sia nel piano xy, che in  
 quello xz.

.Componente  
 verticale z:  
 La componente  
 verticale z di ogni  
 reazione di sola  
 pretensione e di ogni  
 reazione vincolare,  
 deve essere la stessa,  
 sia nel piano xz, che in  
 quello yz.

.Scala di misura  
 1:100



Attivazione del solo movimento ( $\varphi_{AG}$ )

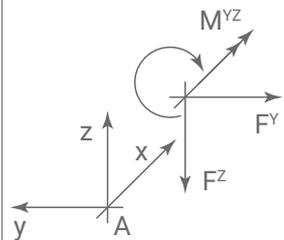
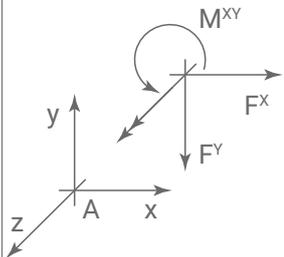
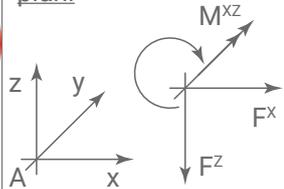


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni dello schema statico inerente alle sole componenti di reazione delle funi, nei piani xz, xy e yz.

Convenzioni segno  
coordinate e forze nei piani

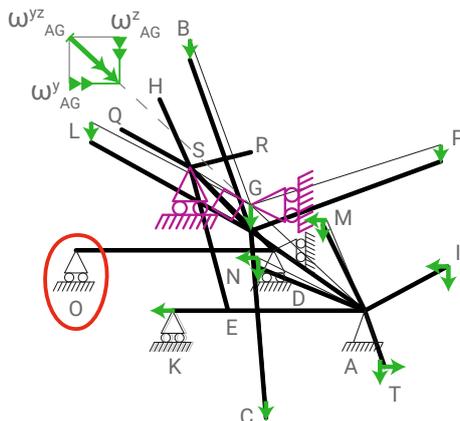
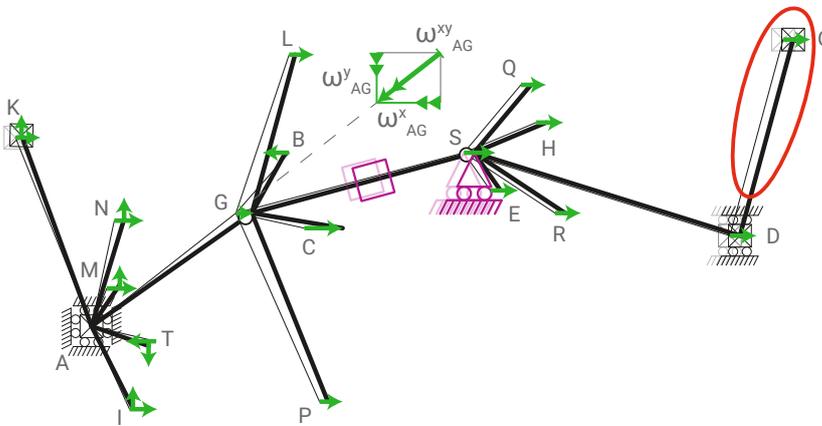
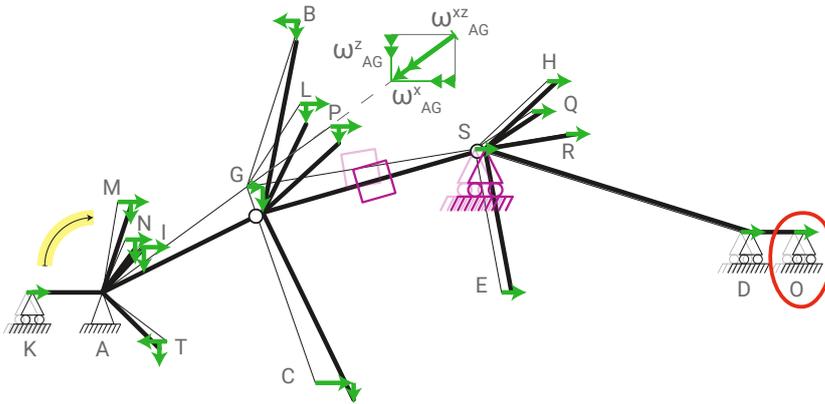


Scala di misura  
1:100



Deformata dei pezzi rigidi relativa al solo movimento ( $\varphi_{AG}$ )

$$\overline{\varphi_{AG}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\varphi_{AG} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{AG}} = \begin{Bmatrix} \omega_{AG}^x \\ \omega_{AG}^y \\ \omega_{AG}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f^x(\varphi_{AG}) \\ -f^y(\varphi_{AG}) \\ -f^z(\varphi_{AG}) \end{Bmatrix}$$

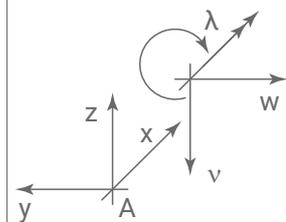
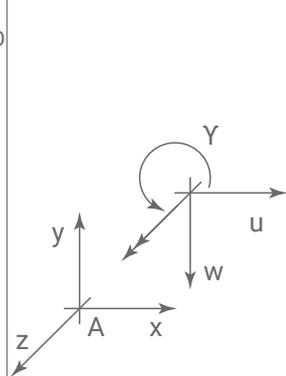
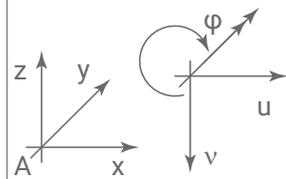


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni della deformata dei soli pezzi rigidi nei piani xz, xy e yz. La componente di movimento in direzione y è nulla per ogni nodo del secondo e del terzo pezzo rigido. Il primo invece, ruota e torce.

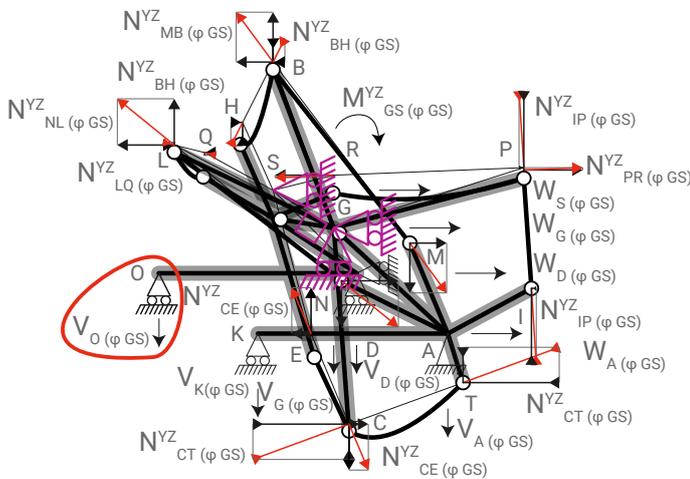
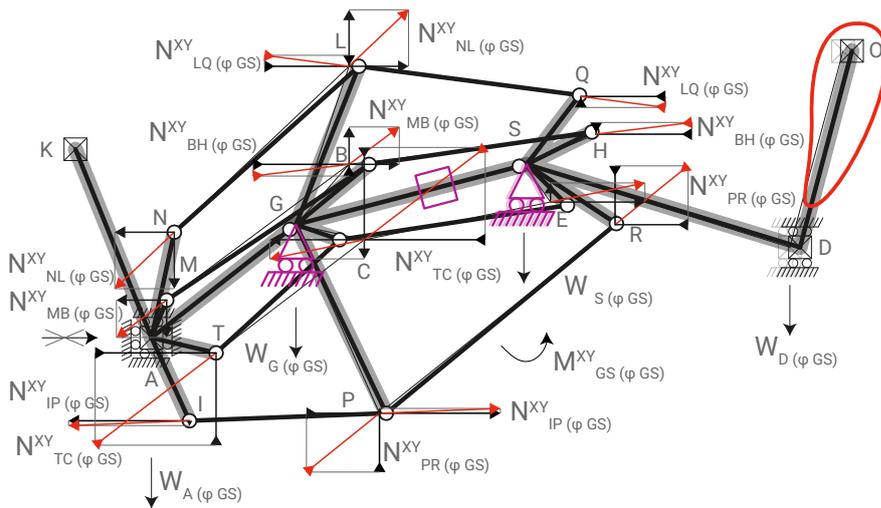
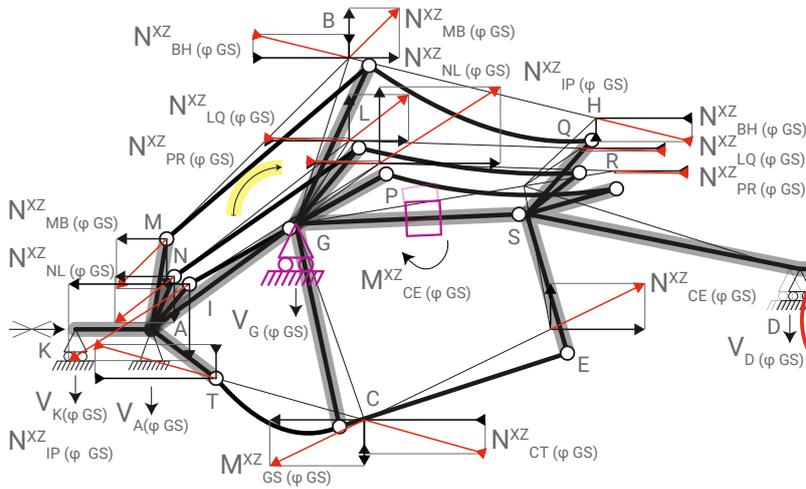
Convenzioni segno coordinate e movimenti nei piani



Scala di misura  
1:100



Attivazione del solo movimento ( $\varphi_{GS}$ )

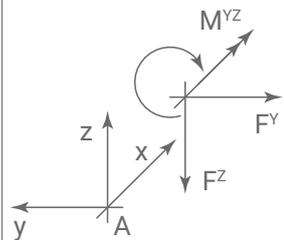
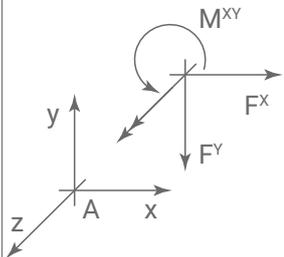
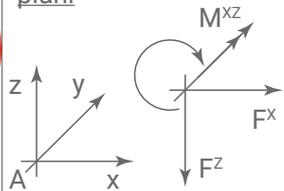


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni dello schema statico inerente alle sole componenti di reazione delle funi, nei piani xz, xy e yz.

Convenzioni segno  
coordinate e forze nei piani

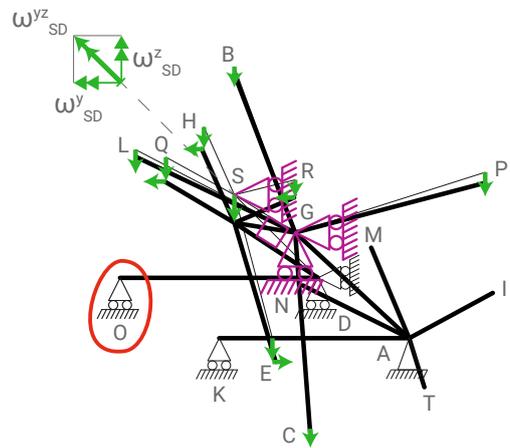
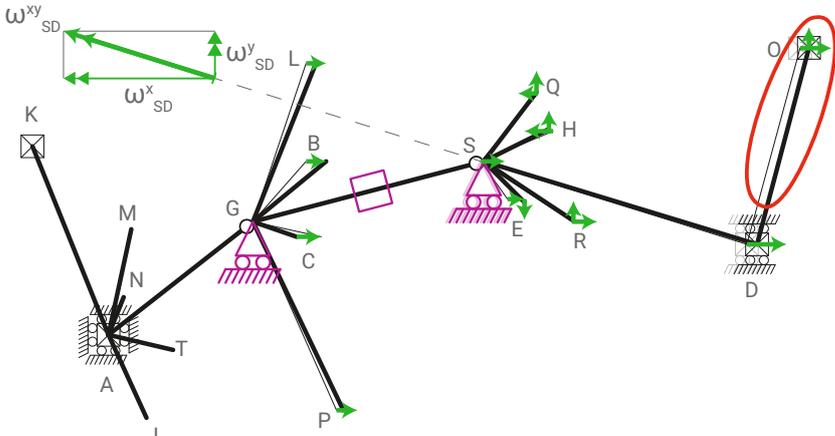
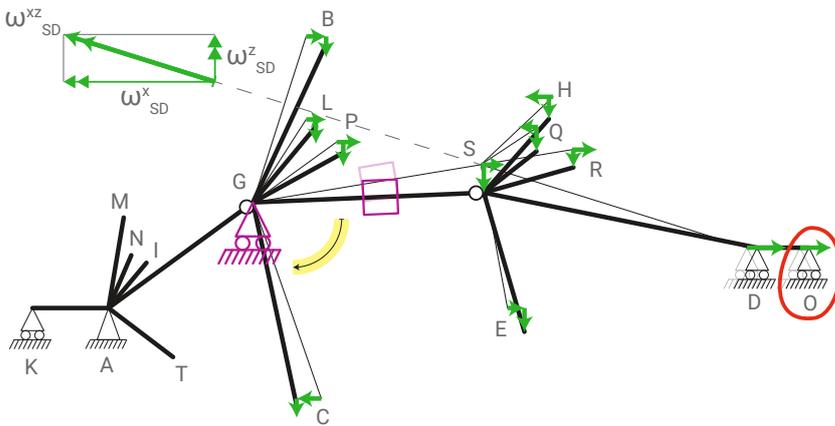


Scala di misura  
1:100



Deformata dei pezzi rigidi relativa al solo movimento ( $\varphi_{GS}$ )

$$\overline{\varphi_{GS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ +\varphi_{GS} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \overline{\omega_{SD}} = \begin{Bmatrix} \omega_{SD}^x \\ \omega_{SD}^y \\ \omega_{SD}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -f^x(\varphi_{GS}) \\ +f^y(\varphi_{GS}) \\ +f^z(\varphi_{GS}) \end{Bmatrix}$$

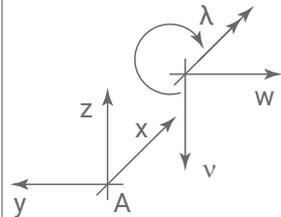
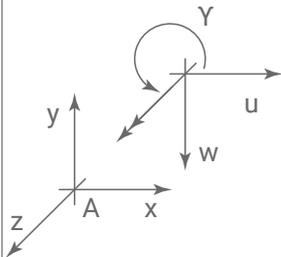
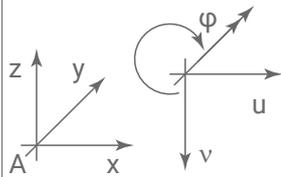


Disegni  
Attivazione del movimento:

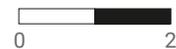


Proiezioni della deformata dei soli pezzi rigidi nei piani xz, xy e yz. La componente di movimento in direzione y è nulla per ogni nodo del primo e del secondo pezzo rigido. Il terzo invece, trasla, ruota e torce.

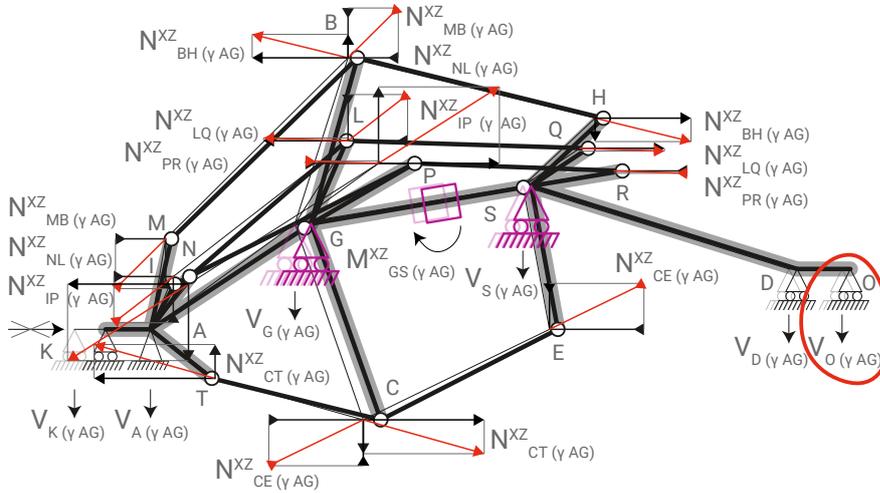
Convenzioni segno coordinate e movimenti nei piani



Scala di misura  
1:100



Attivazione del solo movimento ( $v_{AG}$ )

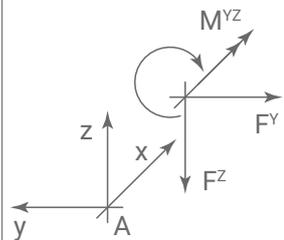
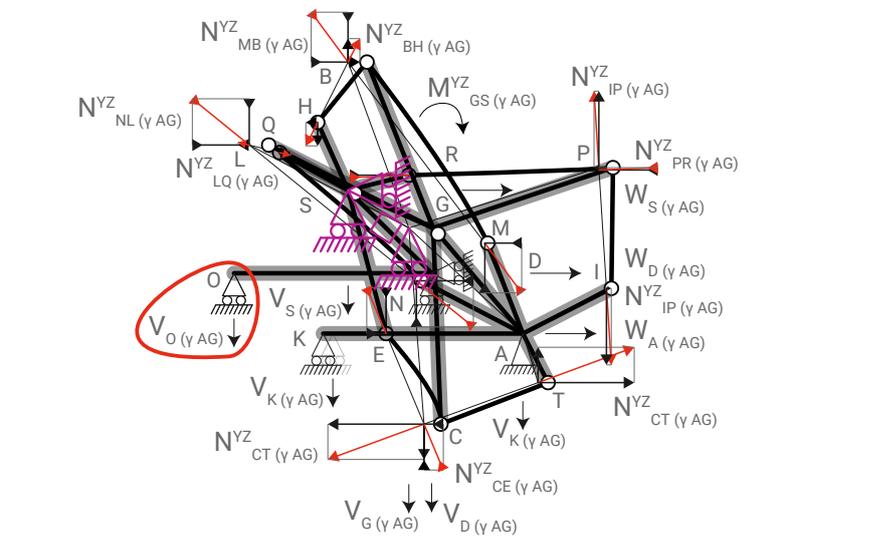
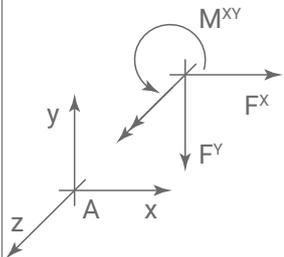
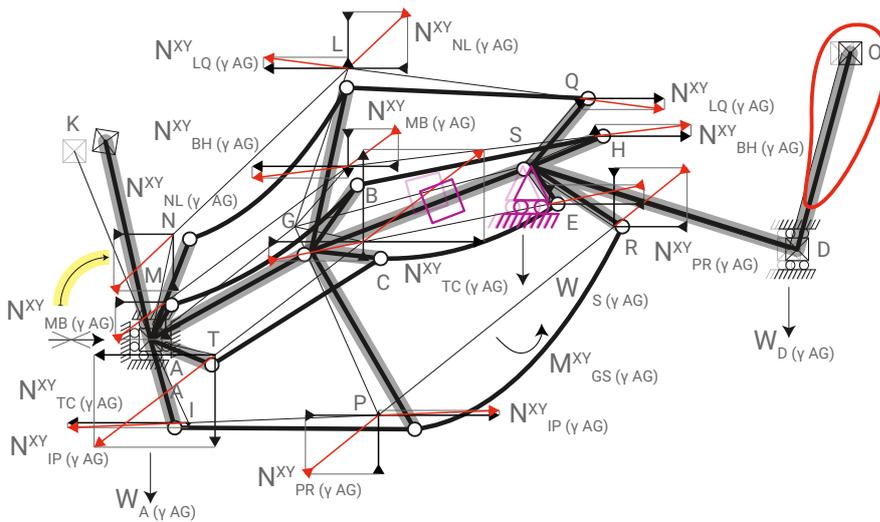
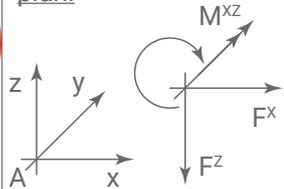


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni dello schema statico inerente alle sole componenti di reazione delle funi, nei piani xz, xy e yz.

Convenzioni segno  
coordinate e forze nei piani

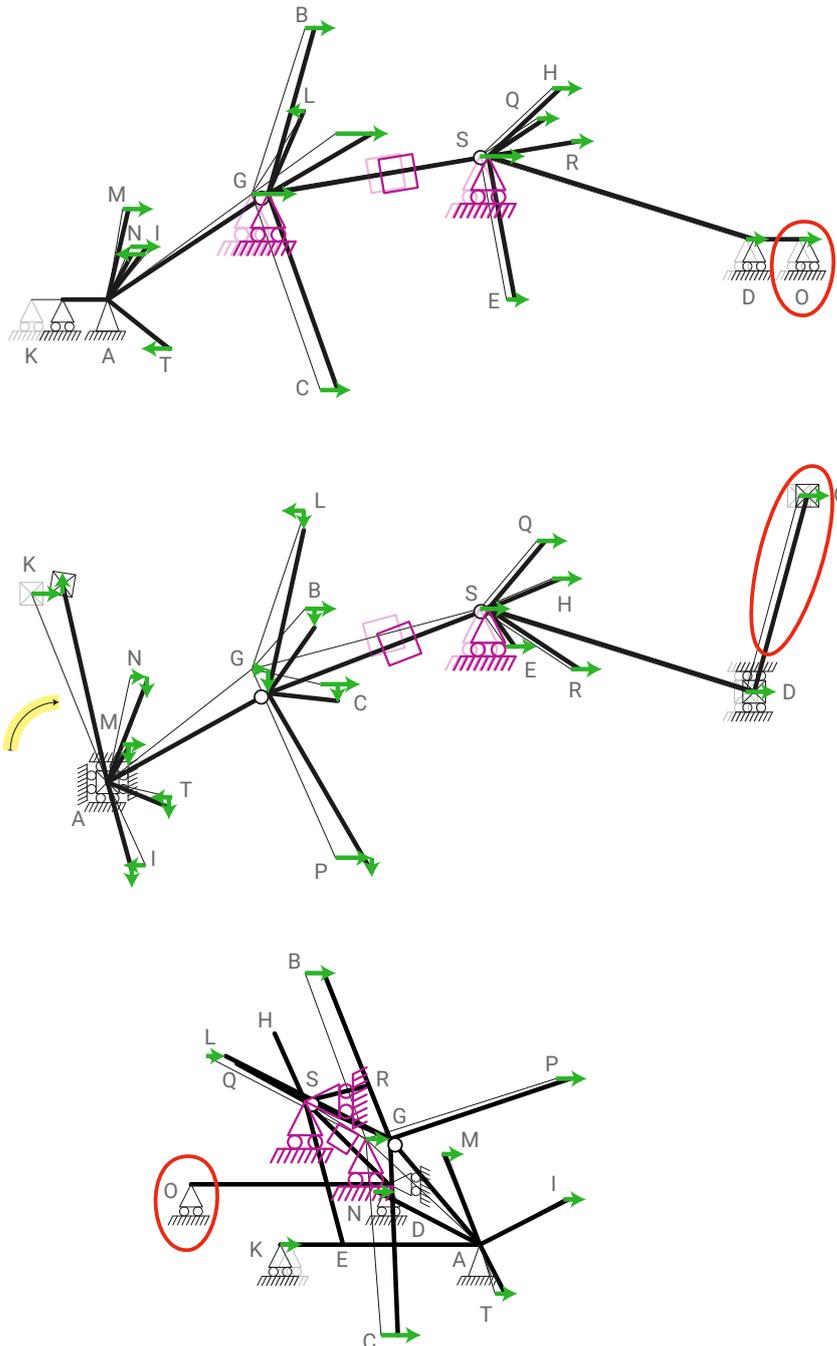


Scala di misura  
1:100



Deformata dei pezzi rigidi relativa al solo movimento ( $\gamma_{AG}$ )

$$\underline{\gamma}_{AG} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_{AG} \end{Bmatrix}$$

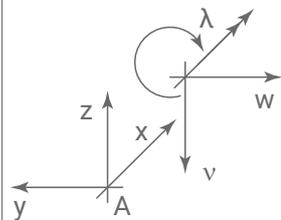
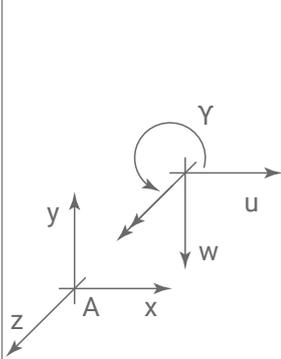
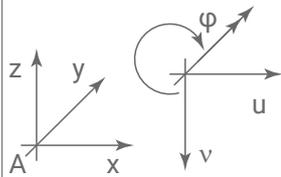


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni della deformata dei soli pezzi rigidi nei piani xz, xy e yz. La componente di movimento in direzione z, è nulla per ogni nodo.

Convenzioni segno coordinate e movimenti nei piani



Scala di misura  
1:100



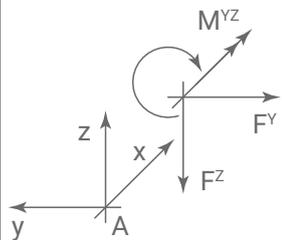
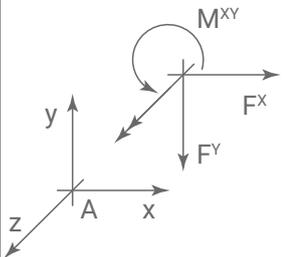
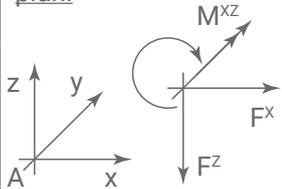
Attivazione del solo movimento ( $y_{GS}$ )

Disegni  
Attivazione del movimento:

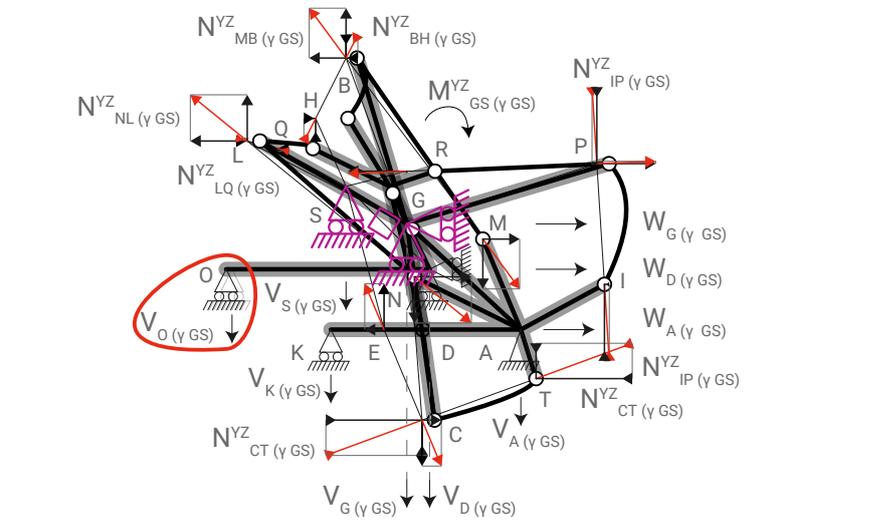
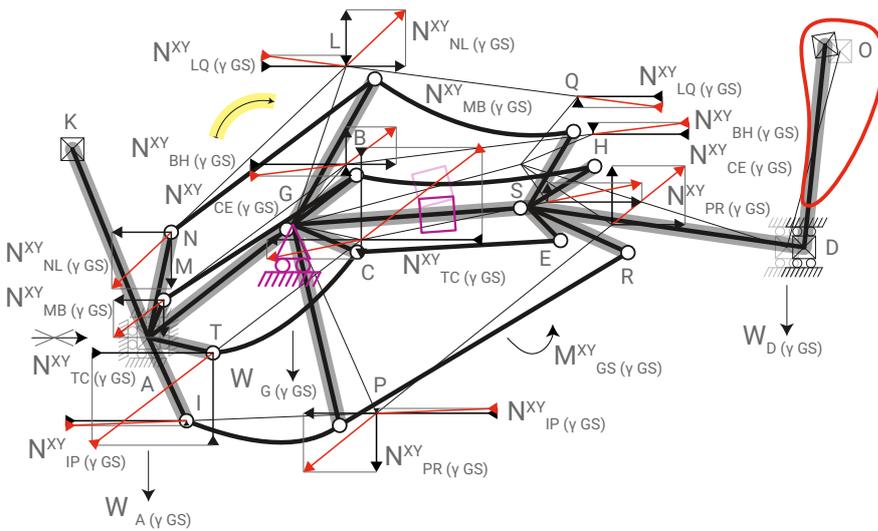
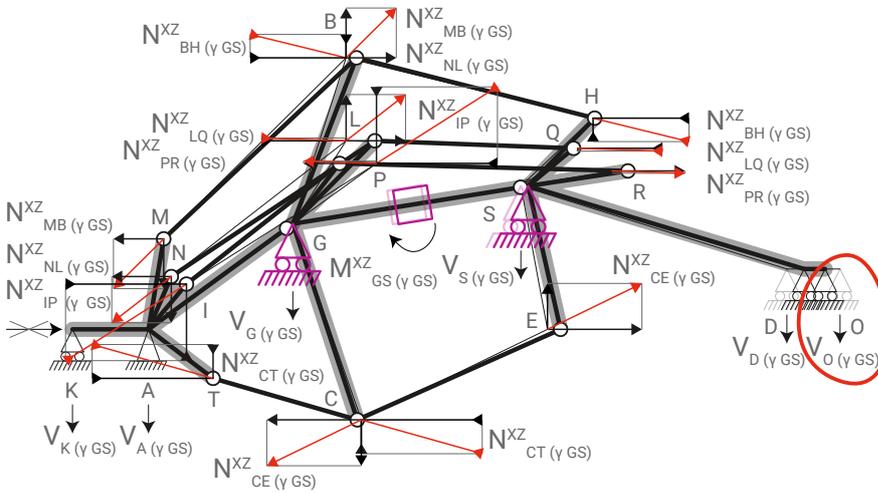


Proiezioni dello schema statico inerente alle sole componenti di reazione delle funi, nei piani xz, xy e yz.

Convenzioni segno  
coordinate e forze nei piani

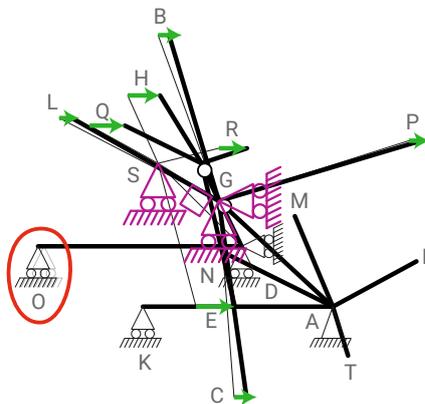
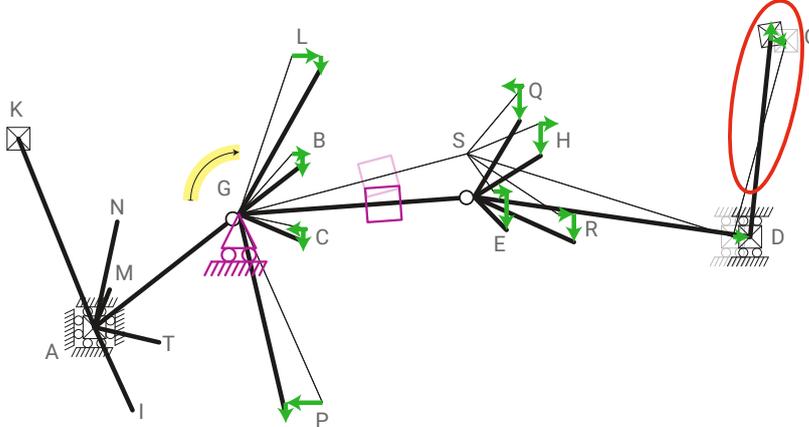
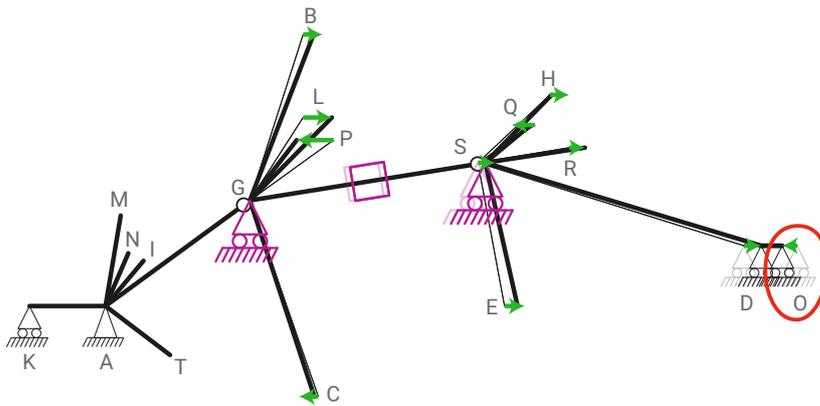


Scala di misura  
1:100



Deformata dei pezzi rigidi relativa al solo movimento ( $\gamma_{GS}$ )

$$\overline{\gamma_{GS}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\gamma_{GS} \end{Bmatrix}$$

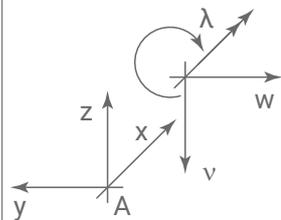
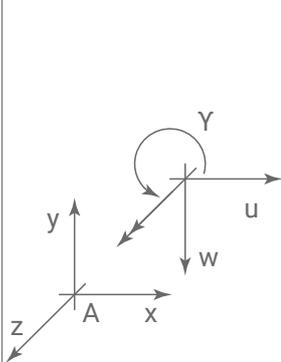
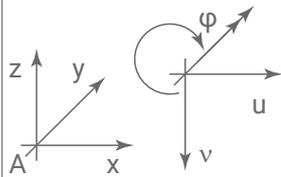


Disegni  
Attivazione del movimento:



Proiezioni della deformata dei soli pezzi rigidi nei piani xz, xy e yz. La componente di movimento in direzione z, è nulla per ogni nodo.

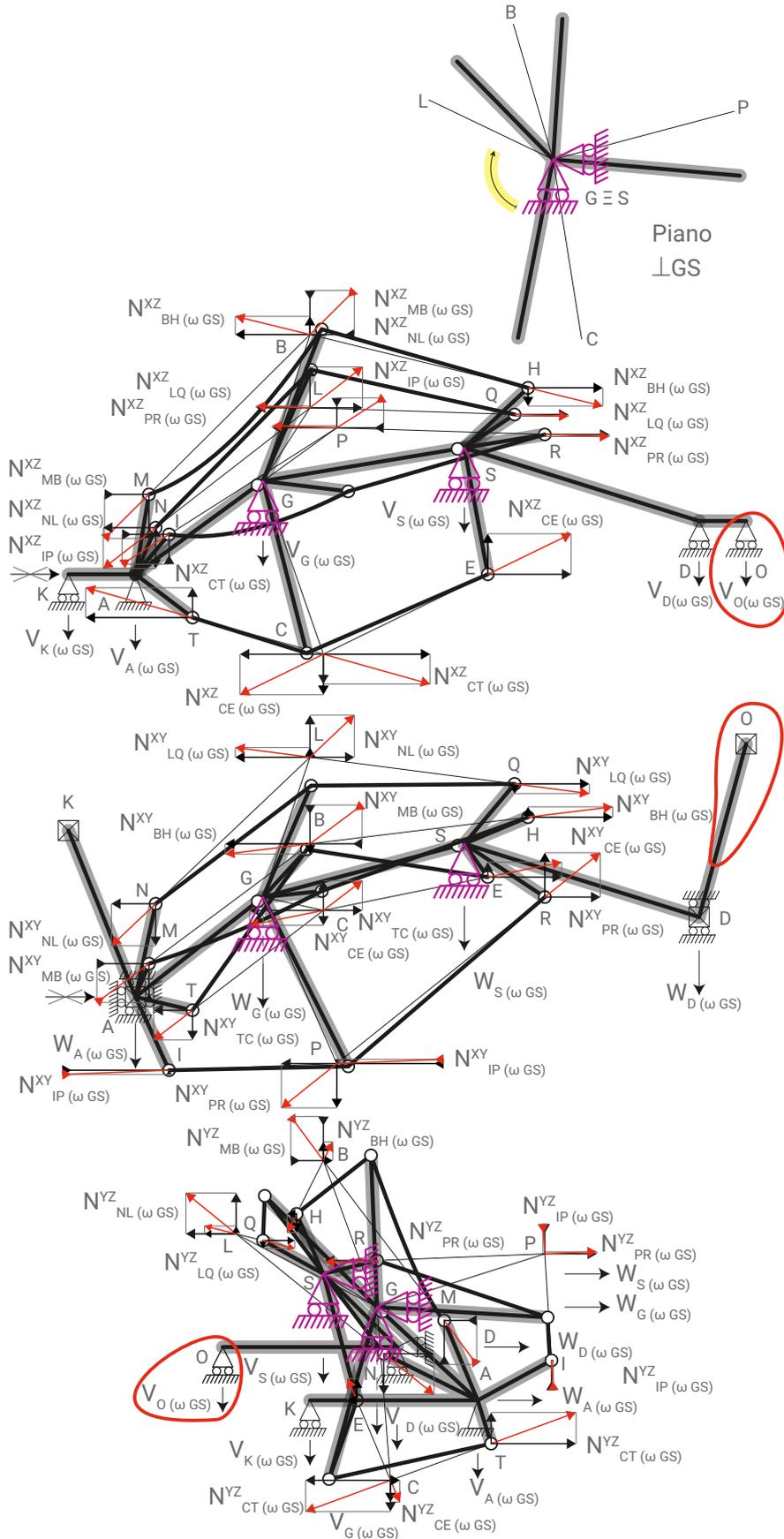
Convenzioni segno coordinate e movimenti nei piani



Scala di misura  
1:100



Attivazione del solo movimento ( $\omega_{GS}$ )



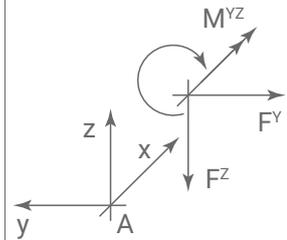
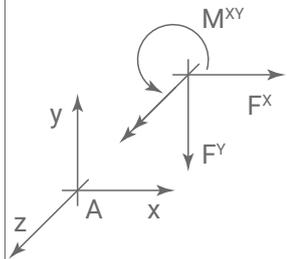
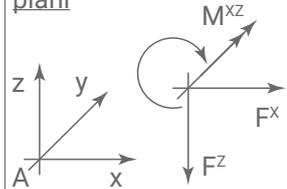
Disegni

Attivazione del movimento:

Proiezioni della deformata dei pezzi rigidi nei piani

$\perp GS$ ,  $xz$ ,  $xy$  e  $yz$ , con relative componenti di reazioni delle funi.

Convenzioni segno coordinate e forze nei piani



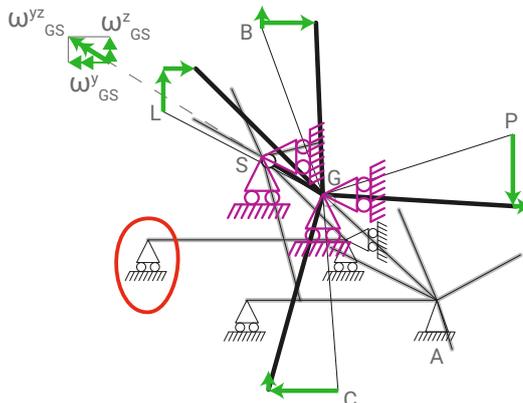
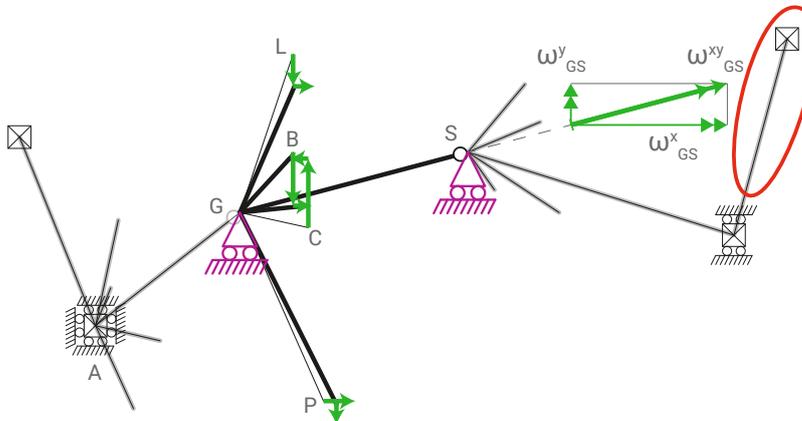
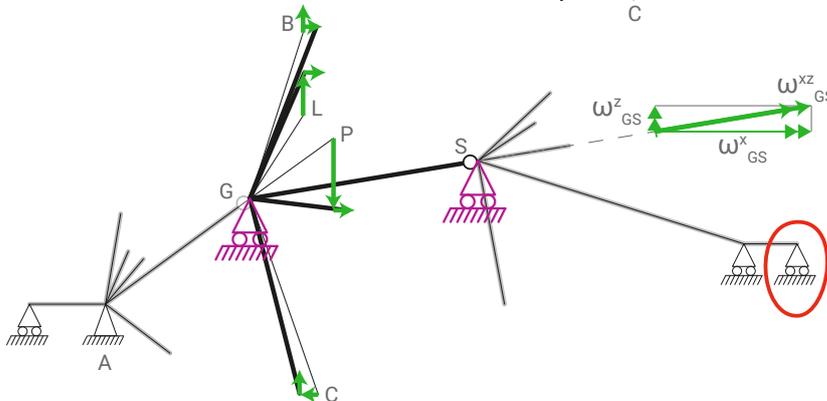
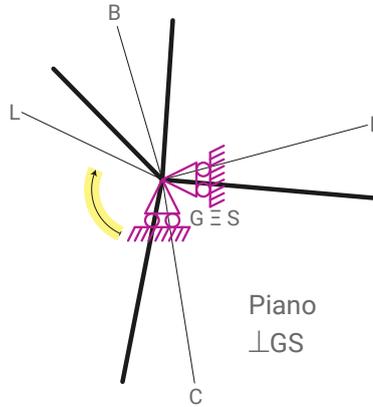
Scala di misura

1:100



Deformata dei pezzi rigidi relativa al solo movimento ( $\omega_{GS}$ )

$$\underline{\omega}_{GS} = \begin{Bmatrix} \omega_{GS}^x \\ \omega_{GS}^y \\ \omega_{GS}^z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +\omega_{GS} \cos \eta_{GS} \cos \alpha_{GS} \\ +\omega_{GS} \cos \xi_{GS} \sin \beta_{GS} \\ +\omega_{GS} \cos \eta_{GS} \sin \alpha_{GS} \end{Bmatrix}$$



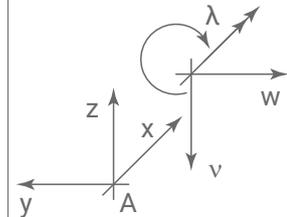
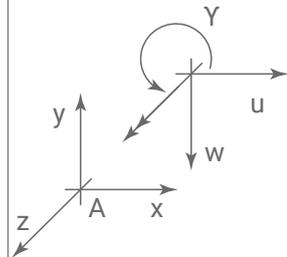
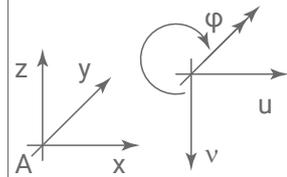
Disegni

Attivazione del movimento:



Proiezioni della deformata dei soli pezzi rigidi nei piani  $\perp GS$ ,  $xz$ ,  $xy$  e  $yz$ . Il secondo pezzo rigido è l'unico che si muove e torce soltanto, quindi ogni suo nodo ha due componenti di movimento.

Convenzione di segno coordinate e movimenti nei piani



Scala di misura

1:100



Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da destra nel piano (xz)

Primo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}^{xz}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+V_{D(T)} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+V_{O(T)} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &-(+V_{S(T)} |a_{GS}|) + \\
 &-(+M_{GS(T)}^{xz}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{MB}^{\varphi AG} k_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{MB} |b_{GB}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{NL}^{\varphi AG} k_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{IP}^{\varphi AG} k_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{TC}^{\varphi AG} k_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\varphi_{AG} A_{V_b}^{\varphi AG} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+\varphi_{AG} A_{V_o}^{\varphi AG} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &-(+\varphi_{AG} A_{V_s}^{\varphi AG} |a_{GS}|) - (+\varphi_{AG} A_{M_{GS}^{xz}}^{\varphi AG}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{MB}^{\gamma AG} k_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{MB} |b_{GB}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{NL}^{\gamma AG} k_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{IP}^{\gamma AG} k_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{TC}^{\gamma AG} k_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\gamma_{AG} B_{V_b}^{\gamma AG} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+\gamma_{AG} B_{V_o}^{\gamma AG} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &-(+\gamma_{AG} B_{V_s}^{\gamma AG} |a_{GS}|) - (+\gamma_{AG} B_{M_{GS}^{xz}}^{\gamma AG}) +
 \end{aligned}$$

=

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{MB}^{\omega GS} k_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{MB} |b_{GB}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{NL}^{\omega GS} k_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{IP}^{\omega GS} k_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{TC}^{\omega GS} k_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\omega_{GS} C_{V_b}^{\omega GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+\omega_{GS} C_{V_o}^{\omega GS} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &-(+\omega_{GS} C_{V_s}^{\omega GS} |a_{GS}|) + \\
 &-(0) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi GS} k_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{LQ} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{NL}^{\varphi GS} k_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{IP}^{\varphi GS} k_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi GS} k_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\varphi_{GS} A_{V_b}^{\varphi GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+\varphi_{GS} A_{V_o}^{\varphi GS} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &+(0) - (+\varphi_{GS} A_{M_{GS}^{xz}}^{\varphi GS}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{MB}^{\gamma GS} k_{MB} \cos \eta_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{NL}^{\gamma GS} k_{NL} \cos \eta_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{IP}^{\gamma GS} k_{IP} \cos \eta_{IP} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{IP} |b_{GP}|+ \\ +\text{sen} \alpha_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{TC}^{\gamma GS} k_{TC} \cos \eta_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{TC} |b_{GC}|+ \\ -\text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\gamma_{GS} B_{V_b}^{\gamma GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(+\gamma_{GS} B_{V_o}^{\gamma GS} |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}|) + \\
 &-(+\gamma_{GS} B_{V_s}^{\gamma GS} |a_{GS}|) - (+\gamma_{GS} B_{M_{GS}^{xz}}^{\gamma GS}) +
 \end{aligned}$$

Secondo membro

Solo azioni di nodo

$$\begin{aligned}
 &+V_D |a_{GS} + a_{SD}| \\
 &+V_O |a_{GS} + a_{SD} + a_{DO}| \\
 &+P_S^z |a_{GS}| \\
 &+P_S^x |b_{GS}|
 \end{aligned}$$

Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da destra nel piano (xy)

Primo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}^{xy}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{MB} |c_{GB}| + \\ +\sin \beta_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ +\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ +\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ +\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-W_{D(T)} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(-V_{S(T)} |a_{GS}|) + \\
 &-(-M_{GS(T)}^{xy}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{MB}^{\varphi AG} k_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{MB} |c_{GB}| + \\ -\sin \beta_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{NL}^{\varphi AG} k_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ -\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{IP}^{\varphi AG} k_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ -\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{TC}^{\varphi AG} k_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ +\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\varphi_{AG} A_{W_b}^{\varphi AG} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(-\varphi_{AG} A_{W_s}^{\varphi AG} |a_{GS}|) + \\
 &-(-\varphi_{AG} A_{M_{GS}^{xy}}^{\varphi AG}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{MB}^{\gamma AG} k_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{MB} |c_{GB}| + \\ -\sin \beta_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{NL}^{\gamma AG} k_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ -\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{IP}^{\gamma AG} k_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ +\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{TC}^{\gamma AG} k_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ +\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\gamma_{AG} B_{W_b}^{\gamma AG} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(-\gamma_{AG} B_{W_s}^{\gamma AG} |a_{GS}|) + \\
 &-(-\gamma_{AG} B_{M_{GS}^{xy}}^{\gamma AG}) +
 \end{aligned}$$

=

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{MB}^{\omega GS} k_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{MB} |c_{GB}| + \\ -\sin \beta_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{NL}^{\omega GS} k_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ +\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{IP}^{\omega GS} k_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ -\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{TC}^{\omega GS} k_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ +\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\omega_{GS} C_{W_b}^{\omega GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(-\omega_{GS} C_{W_s}^{\omega GS} |a_{GS}|) + \\
 &-(0) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi GS} k_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{LQ} |c_{GB}| + \\ +\sin \beta_{LQ} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{NL}^{\varphi GS} k_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ +\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{IP}^{\varphi GS} k_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ +\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi GS} k_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ -\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\varphi_{GS} A_{W_b}^{\varphi GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(-\varphi_{GS} A_{W_s}^{\varphi GS} |a_{GS}|) + \\
 &-(-\varphi_{GS} A_{M_{GS}^{xy}}^{\varphi GS}) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{MB}^{\gamma GS} k_{MB} \cos \xi_{MB} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{MB} |c_{GB}| + \\ +\sin \beta_{MB} |a_{GB}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{NL}^{\gamma GS} k_{NL} \cos \xi_{NL} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{NL} |c_{GL}| + \\ +\sin \beta_{NL} |a_{GL}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{IP}^{\gamma GS} k_{IP} \cos \xi_{IP} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{IP} |c_{GP}| + \\ -\sin \beta_{IP} |a_{GP}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{TC}^{\gamma GS} k_{TC} \cos \xi_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{TC} |c_{GC}| + \\ -\sin \beta_{TC} |a_{GC}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\gamma_{GS} B_{W_b}^{\gamma GS} |a_{GS} + a_{SD}|) + \\
 &-(0) + \\
 &-(-\gamma_{GS} B_{M_{GS}^{xy}}^{\gamma GS}) +
 \end{aligned}$$

Secondo membro

Solo azioni di nodo

$$\begin{aligned}
 &-W_D |a_{GS} + a_{SD}| \\
 &-P_S^y |a_{GS}| \\
 &-P_S^x |a_{GS}|
 \end{aligned}$$

Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da destra nel piano (yz)

Primo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}^{yz}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{MB} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+T_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+T_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+T_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-V_{0(T)} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (M_{GS(T)}^{YZ}) + \\
 &-(-V_{S(T)} |c_{GS}|) - (-W_{D(T)} |b_{SD} - b_{GS}|) + \\
 &- (+V_{D(T)} |c_{SD} - c_{GS}|) - (+W_{S(T)} |b_{GS}|) +
 \end{aligned}$$

=

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{MB}^{\omega GS} k_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{MB} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+\omega_{GS} C_{NL}^{\omega GS} k_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+\omega_{GS} C_{IP}^{\omega GS} k_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+\omega_{GS} C_{TC}^{\omega GS} k_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (0) + \\
 &- (+\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |c_{SD} - c_{GS}|) - (-\omega_{GS} C_{V_s}^{\omega GS} |c_{GS}|) + \\
 &- (-\omega_{GS} C_{W_0}^{\omega GS} |b_{SD} - b_{GS}|) - (+\omega_{GS} C_{W_s}^{\omega GS} |b_{GS}|) +
 \end{aligned}$$

Secondo membro

Solo azioni di nodo

$$\begin{aligned}
 &\cancel{-V_0 |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|} \\
 &+V_D |c_{SD} - c_{GS}| \\
 &-W_D |b_{SD} - b_{GS}| \\
 &+P_s^y |b_{GS}| \\
 &-P_s^z |c_{GS}|
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{MB}^{\varphi AG} k_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{MB} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{AG} A_{NL}^{\varphi AG} k_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{AG} A_{IP}^{\varphi AG} k_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{AG} A_{TC}^{\varphi AG} k_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (+\varphi_{AG} A_{M_{SS}^{\varphi AG}}) + \\
 &- (+\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |c_{SD} - c_{GS}|) - (-\varphi_{AG} A_{V_s}^{\varphi AG} |c_{GS}|) + \\
 &- (-\varphi_{AG} A_{W_0}^{\varphi AG} |b_{SD} - b_{GS}|) - (+\varphi_{AG} A_{W_s}^{\varphi AG} |b_{GS}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi GS} k_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{LQ} |b_{GB}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{GS} A_{NL}^{\varphi GS} k_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{GS} A_{IP}^{\varphi GS} k_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi GS} k_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (+\varphi_{GS} A_{M_{SS}^{\varphi GS}}) + \\
 &- (+\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |c_{SD} - c_{GS}|) - (0) + \\
 &- (-\varphi_{GS} A_{W_0}^{\varphi GS} |b_{SD} - b_{GS}|) - (+\varphi_{GS} A_{W_s}^{\varphi GS} |b_{GS}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{MB}^{\gamma AG} k_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{MB} |b_{GB}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{MB} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{AG} B_{NL}^{\gamma AG} k_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{AG} B_{IP}^{\gamma AG} k_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{AG} B_{TC}^{\gamma AG} k_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (+\gamma_{AG} B_{M_{SS}^{\gamma AG}}) + \\
 &- (+\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |c_{SD} - c_{GS}|) - (-\gamma_{AG} B_{V_s}^{\gamma AG} |c_{GS}|) + \\
 &- (-\gamma_{AG} B_{W_0}^{\gamma AG} |b_{SD} - b_{GS}|) - (+\gamma_{AG} B_{W_s}^{\gamma AG} |b_{GS}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{MB}^{\gamma GS} k_{MB} \cos \psi_{MB} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{MB} |b_{GB}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{MB} |c_{GB}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{GS} B_{NL}^{\gamma GS} k_{NL} \cos \psi_{NL} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{NL} |b_{GL}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{NL} |c_{GL}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{GS} B_{IP}^{\gamma GS} k_{IP} \cos \psi_{IP} \begin{pmatrix} +\cos \lambda_{IP} |b_{GP}|+ \\ +\text{sen} \lambda_{IP} |c_{GP}| \end{pmatrix} + \\
 &+\gamma_{GS} B_{TC}^{\gamma GS} k_{TC} \cos \psi_{TC} \begin{pmatrix} -\cos \lambda_{TC} |b_{GC}|+ \\ -\text{sen} \lambda_{TC} |c_{GC}| \end{pmatrix} + \\
 &\cancel{(-\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |c_{DO} - c_{SD} + c_{GS}|)} - (+\gamma_{GS} B_{M_{SS}^{\gamma GS}}) + \\
 &- (+\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |c_{SD} - c_{GS}|) - (-\gamma_{GS} B_{V_s}^{\gamma GS} |c_{GS}|) + \\
 &- (-\gamma_{GS} B_{W_0}^{\gamma GS} |b_{SD} - b_{GS}|) - (0)
 \end{aligned}$$

Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra nel piano (yz)

Primo membro

Sola pretensione  $T^{yz}_{IJ}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -V_{Q(T)} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +V_{D(T)} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -W_{D(T)} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{LQ}^{\varphi AG} k_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi AG} k_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{PR}^{\varphi AG} k_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi AG} k_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ +\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -\varphi_{AG} A_{W_0}^{\varphi AG} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{LQ}^{\gamma AG} k_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{BH}^{\gamma AG} k_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{PR}^{\gamma AG} k_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ -\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{CE}^{\gamma AG} k_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ +\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -\gamma_{AG} B_{W_0}^{\gamma AG} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

=

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{LQ}^{\omega GS} k_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{BH}^{\omega GS} k_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{PR}^{\omega GS} k_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{CE}^{\omega GS} k_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -\omega_{GS} C_{W_0}^{\omega GS} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{LQ}^{\varphi GS} k_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{BH}^{\varphi GS} k_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{PR}^{\varphi GS} k_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ -\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{CE}^{\varphi GS} k_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -\varphi_{GS} A_{W_0}^{\varphi GS} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{LQ}^{\gamma GS} k_{LQ} \cos \psi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \lambda_{LQ} |c_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{BH}^{\gamma GS} k_{BH} \cos \psi_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \lambda_{BH} |c_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{PR}^{\gamma GS} k_{PR} \cos \psi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \lambda_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \lambda_{PR} |c_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{CE}^{\gamma GS} k_{CE} \cos \psi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \lambda_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \lambda_{CE} |c_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &\left( -\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( +\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |c_{DS}| \right) + \\
 &- \left( -\gamma_{GS} B_{W_0}^{\gamma GS} |b_{DS}| \right) +
 \end{aligned}$$

Secondo membro

Solo azioni di nodo

$$\begin{aligned}
 &\left( -V_0 |c_{OD} - c_{DS}| \right) + \\
 &+V_D |c_{DS}| + \\
 &-W_D |b_{DS}|
 \end{aligned}$$

Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra nel piano (xz)

Primo membro

=

Secondo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}^{xz}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+V_{D(T)} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{(+V_{O(T)} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{LQ}^{\omega GS} k_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{BH}^{\omega GS} k_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{PR}^{\omega GS} k_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{CE}^{\omega GS} k_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{-(+\omega_{GS} C_{V_0}^{\omega GS} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

Solo azioni di nodo

$$\begin{aligned}
 &+V_D |a_{SD}| \\
 &\cancel{+V_O |a_{SD} + a_{DO}|}
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{LQ}^{\varphi GS} k_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{BH}^{\varphi GS} k_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{PR}^{\varphi GS} k_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ -\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{CE}^{\varphi GS} k_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{-(+\varphi_{GS} A_{V_0}^{\varphi GS} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{LQ}^{\varphi AG} k_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi AG} k_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{PR}^{\varphi AG} k_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi AG} k_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{-(+\varphi_{AG} A_{V_0}^{\varphi AG} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{LQ}^{\gamma AG} k_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ +\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{BH}^{\gamma AG} k_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{PR}^{\gamma AG} k_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ -\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{CE}^{\gamma AG} k_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ +\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{-(+\gamma_{AG} B_{V_0}^{\gamma AG} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{LQ}^{\gamma GS} k_{LQ} \cos \eta_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{LQ} |b_{SQ}| + \\ -\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{BH}^{\gamma GS} k_{BH} \cos \eta_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{PR}^{\gamma GS} k_{PR} \cos \eta_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{PR} |b_{SR}| + \\ +\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{CE}^{\gamma GS} k_{CE} \cos \eta_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(+\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |a_{SD}|) + \\
 &\cancel{-(+\gamma_{GS} B_{V_0}^{\gamma GS} |a_{SD} + a_{DO}|) +}
 \end{aligned}$$

.Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra nel piano (xy)

Primo membro

Sola pretensione  $T^{xy}_{IJ}$

$$\begin{aligned}
 &+T_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{LQ} |c_{SQ}| + \\ -\text{sen} \beta_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{BH} |c_{SH}| + \\ +\text{sen} \beta_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{PR} |c_{SR}| + \\ +\text{sen} \beta_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+T_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{CE} |c_{SE}| + \\ +\text{sen} \beta_{SE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-W_{D(T)} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

=

Solo movimento  $\omega_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\omega_{GS} C_{LQ}^{\omega GS} k_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{LQ} |c_{SQ}| + \\ -\text{sen} \alpha_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{BH}^{\omega GS} k_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{BH} |c_{SH}| + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{PR}^{\omega GS} k_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{PR} |c_{SR}| + \\ +\text{sen} \alpha_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\omega_{GS} C_{CE}^{\omega GS} k_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{CE} |c_{SE}| + \\ +\text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\omega_{GS} C_{W_b}^{\omega GS} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

Secondo membro

Solo azioni di nodo

$$-W_D |a_{SD}|$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{AG} A_{LQ}^{\varphi AG} k_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{LQ} |c_{SQ}| + \\ -\text{sen} \beta_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi AG} k_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{BH} |c_{SH}| + \\ +\text{sen} \beta_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{PR}^{\varphi AG} k_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{PR} |c_{SR}| + \\ +\text{sen} \beta_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi AG} k_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{CE} |c_{SE}| + \\ -\text{sen} \beta_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\varphi_{AG} A_{W_b}^{\varphi AG} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\varphi_{GS} A_{LQ}^{\varphi GS} k_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{LQ} |c_{SQ}| + \\ +\text{sen} \beta_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{BH}^{\varphi GS} k_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{BH} |c_{SH}| + \\ -\text{sen} \beta_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{PR}^{\varphi GS} k_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{PR} |c_{SR}| + \\ -\text{sen} \beta_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\varphi_{GS} A_{CE}^{\varphi GS} k_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{CE} |c_{SE}| + \\ +\text{sen} \beta_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\varphi_{GS} A_{W_b}^{\varphi GS} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{AG}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{AG} B_{LQ}^{\gamma AG} k_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{LQ} |c_{SQ}| + \\ -\text{sen} \beta_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{BH}^{\gamma AG} k_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{BH} |c_{SH}| + \\ +\text{sen} \beta_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{PR}^{\gamma AG} k_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{PR} |c_{SR}| + \\ -\text{sen} \beta_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{AG} B_{CE}^{\gamma AG} k_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} -\cos \beta_{CE} |c_{SE}| + \\ -\text{sen} \beta_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\gamma_{AG} B_{W_b}^{\gamma AG} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

Solo movimento  $\gamma_{GS}$

$$\begin{aligned}
 &+\gamma_{GS} B_{LQ}^{\gamma GS} k_{LQ} \cos \xi_{LQ} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{LQ} |c_{SQ}| + \\ +\text{sen} \beta_{LQ} |a_{SQ}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{BH}^{\gamma GS} k_{BH} \cos \xi_{BH} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{BH} |c_{SH}| + \\ -\text{sen} \beta_{BH} |a_{SH}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{PR}^{\gamma GS} k_{PR} \cos \xi_{PR} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{PR} |c_{SR}| + \\ +\text{sen} \beta_{PR} |a_{SR}| \end{array} \right) + \\
 &+\gamma_{GS} B_{CE}^{\gamma GS} k_{CE} \cos \xi_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \beta_{CE} |c_{SE}| + \\ +\text{sen} \beta_{CE} |a_{SE}| \end{array} \right) + \\
 &-(-\gamma_{GS} B_{W_b}^{\gamma GS} |a_{SD}|) +
 \end{aligned}$$

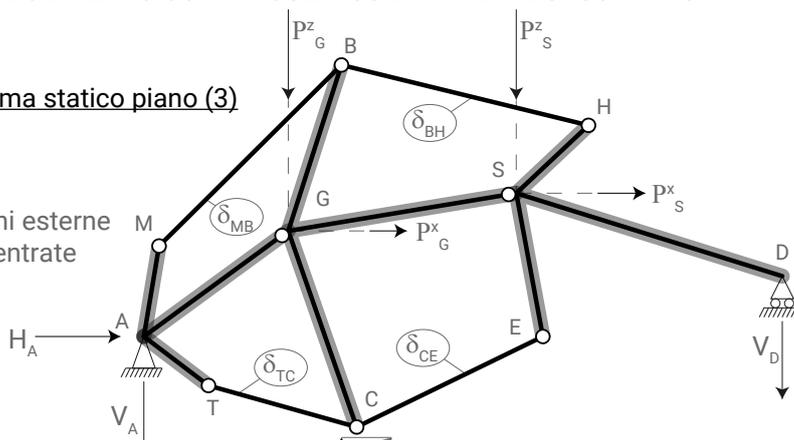


ANALISI MANUALE DELLO SCHEMA STATICO PIANO  
TRAMITE IL SOFTWARE  
MICROSOFT EXCELL

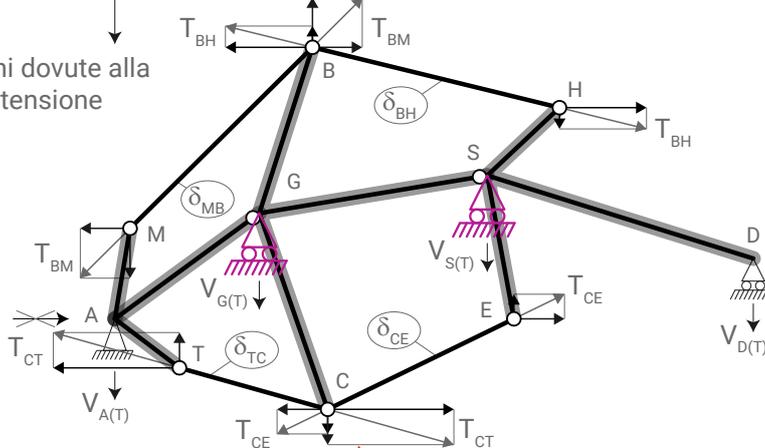
METODO DIRETTO CON VINCOLI AUSILIARI PER IL CASO PIANO

.Schema statico piano (3)

.Azioni esterne concentrate  $P_i$

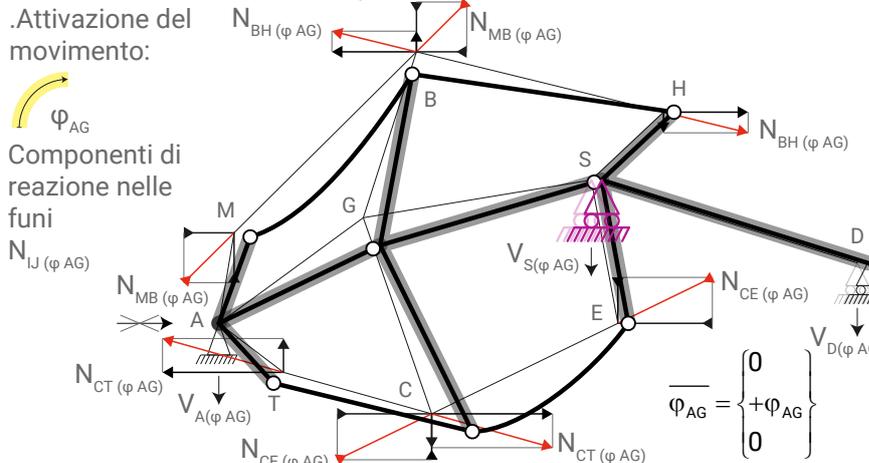


.Reazioni dovute alla sola pretensione  $T_{IJ}$



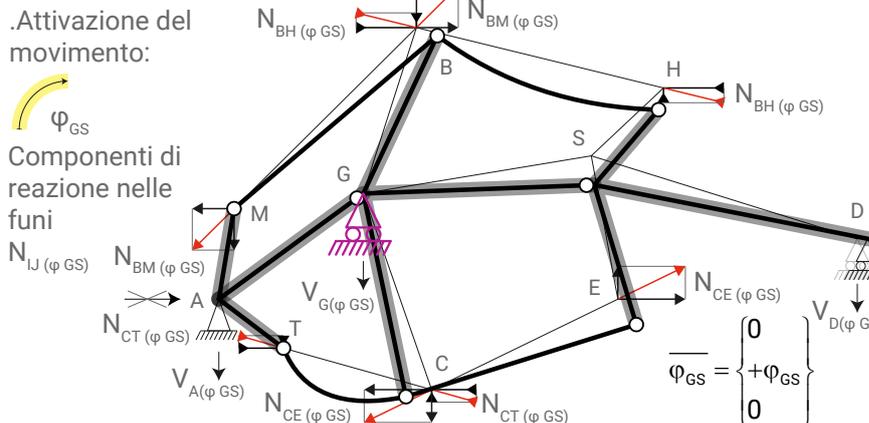
.Attivazione del movimento:

$\varphi_{AG}$   
Componenti di reazione nelle funi  $N_{IJ}(\varphi_{AG})$



.Attivazione del movimento:

$\varphi_{GS}$   
Componenti di reazione nelle funi  $N_{IJ}(\varphi_{GS})$



.Schema geometrico esterno:

Isostatico  
 $3gdv - 3gdl = 0$

.Schema geometrico interno:

2 iperstatico  
 $11gdv - 9gdl = +2$

.Schema statico interno:

due volte staticamente indeterminato

.Schema geometrico senza funi:

2 Labile  
 $gve + gvi - gdl \neq 0$   
 $(2+1) + (2 \times 2) - (3 \times 3)$   
 $7 - 9 = -2$

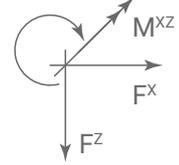
.Movimenti:

2 movimenti indipendenti  
 $\varphi_{AG}, \varphi_{GS}$

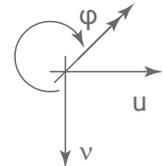
.Metodo equilibrio:

Scrittura delle equazioni con vincoli ausiliari

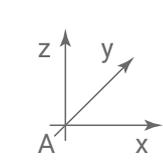
.Convenzione segno forze



.Convenzione segno movimenti



.Convenzione segno coordinate



.Scala di misura

1:100  
0 2

.Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da destra

Primo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}$

$$+T_{MB} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{MB} |b_{GB}| + \\ -\text{sen}\alpha_{MB} |a_{GB}| \end{pmatrix} +$$

$$+T_{TC} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{TC} |b_{GC}| + \\ +\text{sen}\alpha_{TC} |a_{GC}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+V_{S(T)} |a_{GS}|) +$$

$$\ominus (+V_{D(T)} |a_{GS} + a_{SD}|) +$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$+\varphi_{AG} A_{MB}^{\varphi_{AG}} k_{MB} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{MB} |b_{GB}| + \\ +\text{sen}\alpha_{MB} |a_{GB}| \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{AG} A_{TC}^{\varphi_{AG}} k_{TC} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{TC} |b_{GC}| + \\ +\text{sen}\alpha_{TC} |a_{GC}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+\varphi_{AG} A_{V_s}^{\varphi_{AG}} |a_{GS}|) +$$

$$\ominus (+\varphi_{AG} A_{V_b}^{\varphi_{AG}} |a_{GS} + a_{SD}|) +$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$+\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi_{GS}} k_{MB} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{MB} |b_{GB}| + \\ -\text{sen}\alpha_{MB} |a_{GB}| \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi_{GS}} k_{TC} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{TC} |b_{GC}| + \\ -\text{sen}\alpha_{TC} |a_{GC}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+\varphi_{GS} A_{V_b}^{\varphi_{GS}} |a_{GS} + a_{SD}|)$$

Secondo membro, solo azioni di nodo

$$+V_D |a_{GS} + a_{SD}| +$$

$$+P_s^z |a_{GS}| +$$

$$+P_s^x |b_{GS}|$$

.Equazione di equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra

Primo membro

Sola pretensione  $T_{IJ}$

$$+T_{BH} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen}\alpha_{BH} |a_{SH}| \end{pmatrix} +$$

$$+T_{CE} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen}\alpha_{CE} |a_{SE}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+V_{D(T)} |a_{SD}|) +$$

Solo movimento  $\varphi_{AG}$

$$+\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi_{AG}} k_{BH} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ +\text{sen}\alpha_{BH} |a_{SH}| \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi_{AG}} k_{CE} \begin{pmatrix} +\cos\alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ +\text{sen}\alpha_{CE} |a_{SE}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+\varphi_{AG} A_{V_b}^{\varphi_{AG}} |a_{SD}|) +$$

Solo movimento  $\varphi_{GS}$

$$+\varphi_{GS} A_{BH}^{\varphi_{GS}} k_{BH} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{BH} |b_{SH}| + \\ -\text{sen}\alpha_{BH} |a_{SH}| \end{pmatrix} +$$

$$+\varphi_{GS} A_{CE}^{\varphi_{GS}} k_{CE} \begin{pmatrix} -\cos\alpha_{CE} |b_{SE}| + \\ -\text{sen}\alpha_{CE} |a_{SE}| \end{pmatrix} +$$

$$\ominus (+\varphi_{GS} A_{V_b}^{\varphi_{GS}} |a_{SD}|)$$

Secondo membro, solo azioni di nodo

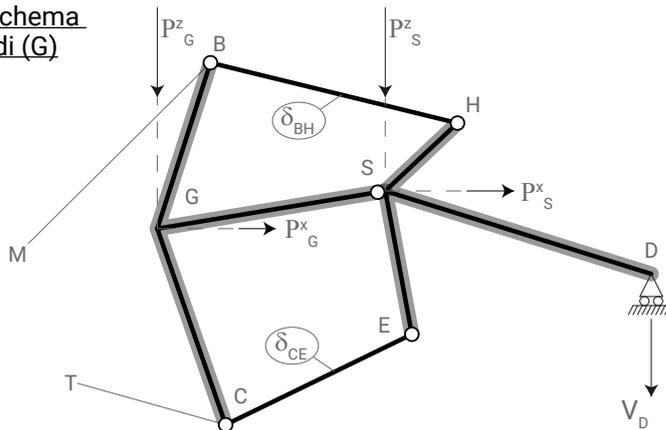
$$+V_D |a_{SD}|$$

.Forma matriciale delle equazioni di equilibrio

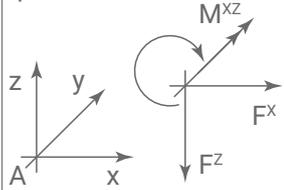
$$\{T\}_{2 \times 1} + [k]_{2 \times 2} \cdot \{\varphi\}_{2 \times 1} = \{P\}_{2 \times 1}$$

.Porzione dello schema statico a destra di (G)

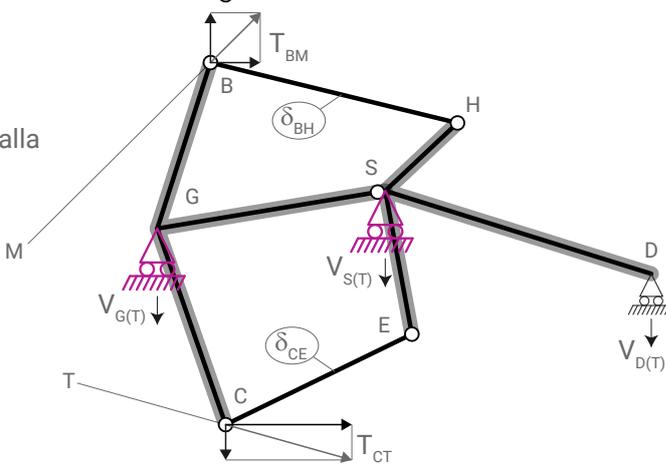
.Azioni esterne concentrate  $P_I$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



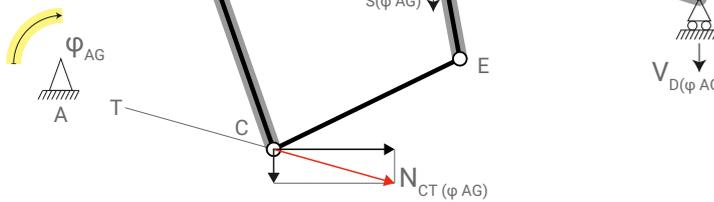
.Convenzioni segno coordinate e forze nel piano



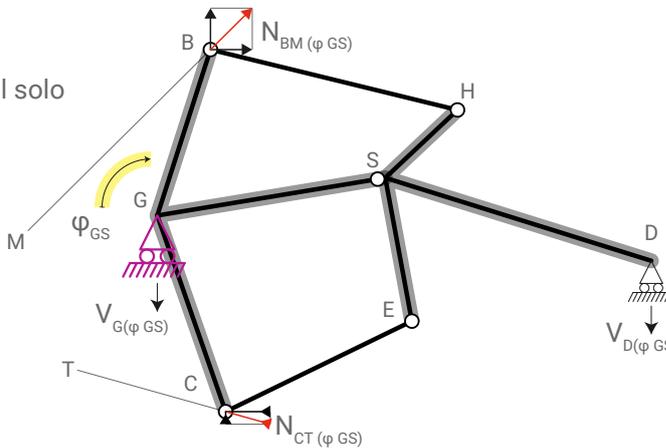
.Componenti di reazione dovute alla sola pretensione  $T_{IJ}$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



.Componenti di reazione dovute all'attivazione del solo movimento  $\varphi_{AG}$   $N_{IJ}(\varphi_{AG})$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



.Componenti di reazione dovute all'attivazione del solo movimento  $\varphi_{GS}$   $N_{IJ}(\varphi_{GS})$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti

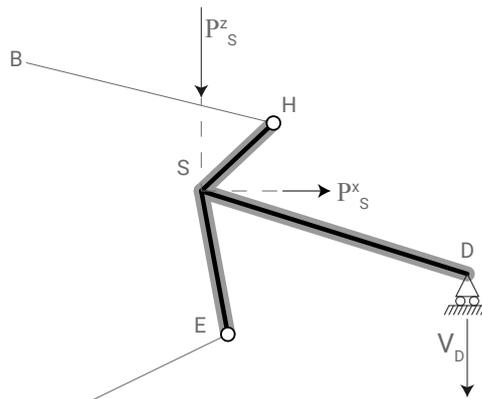


.Scala di misura 1:100

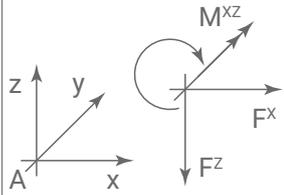


.Porzione dello schema statico a destra di (S)

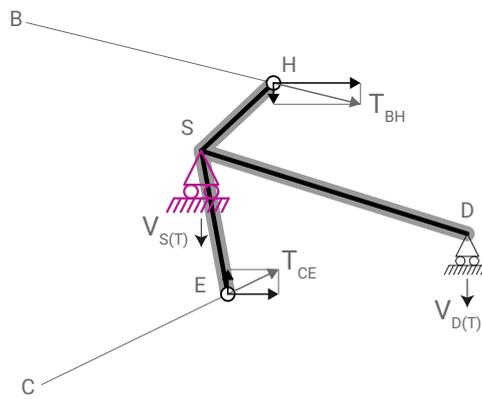
.Azioni esterne concentrate  $P_I$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



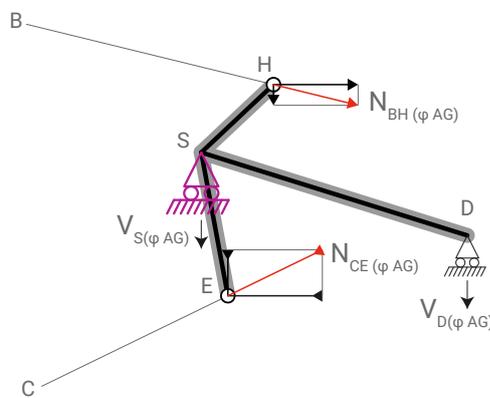
.Convenzioni segno coordinate e forze nel piano



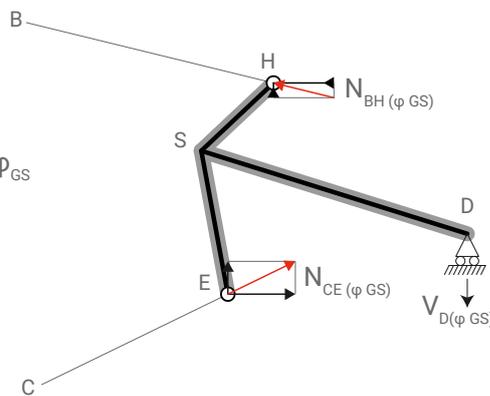
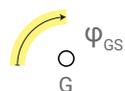
.Componenti di reazione dovute alla sola pretensione  $T_{IJ}$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



.Componenti di reazione dovute all'attivazione del solo movimento  $\varphi_{AG}$   $N_{IJ}(\varphi_{AG})$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



.Componenti di reazione dovute all'attivazione del solo movimento  $\varphi_{GS}$   $N_{IJ}(\varphi_{GS})$  con reazioni vincolari esterne corrispondenti



.Scala di misura 1:100

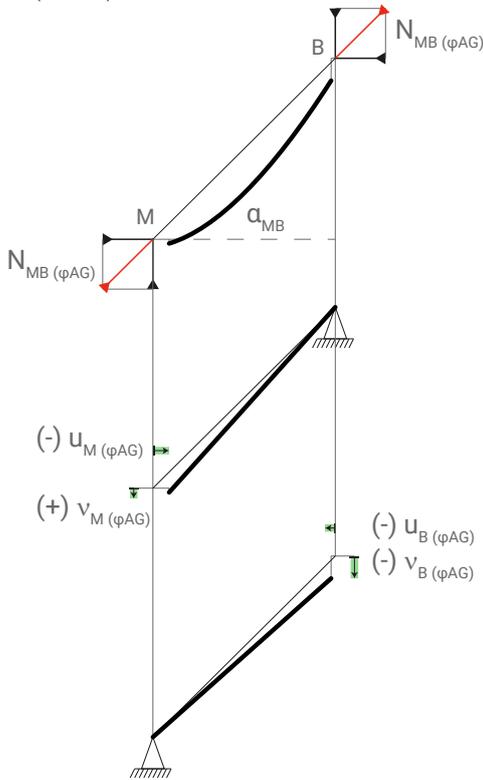


Funzione deformata delle funi di ( $\varphi_{AG}$ )

Fune MB

$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{AG}} = (-|\pm u_M| - |\pm u_B|) \cos \alpha_{MB} + (|\pm v_M| - |\pm v_B|) \text{sen} \alpha_{MB}$$

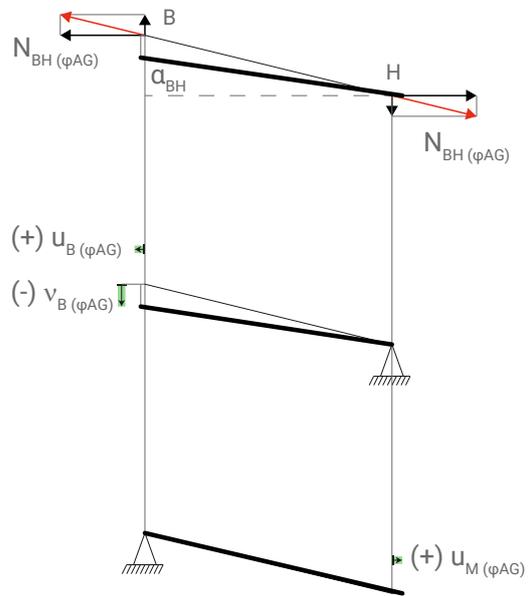
$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{AG}} = (-A_{MB}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$



Fune BH

$$\Delta l_{BH}^{\varphi_{AG}} = (|\pm u_B| + |\pm u_H|) \cos \alpha_{BH} + (-|\pm v_B| + 0) \text{sen} \alpha_{BH}$$

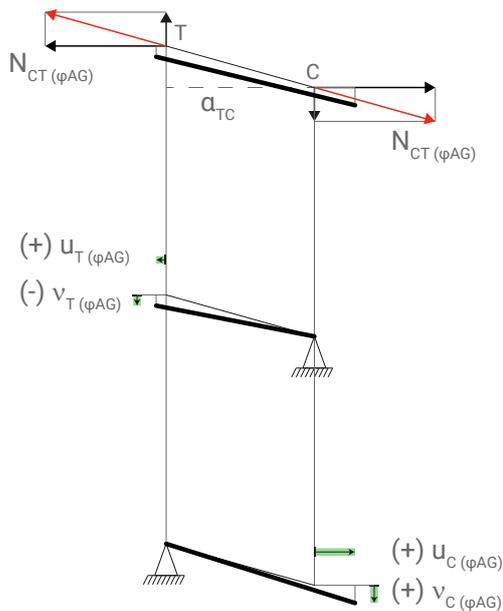
$$\Delta l_{BH}^{\varphi_{AG}} = (+A_{BH}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$



Fune TC

$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{AG}} = (|\pm u_T| + |\pm u_C|) \cos \alpha_{TC} + (-|\pm v_T| + |\pm v_C|) \text{sen} \alpha_{TC}$$

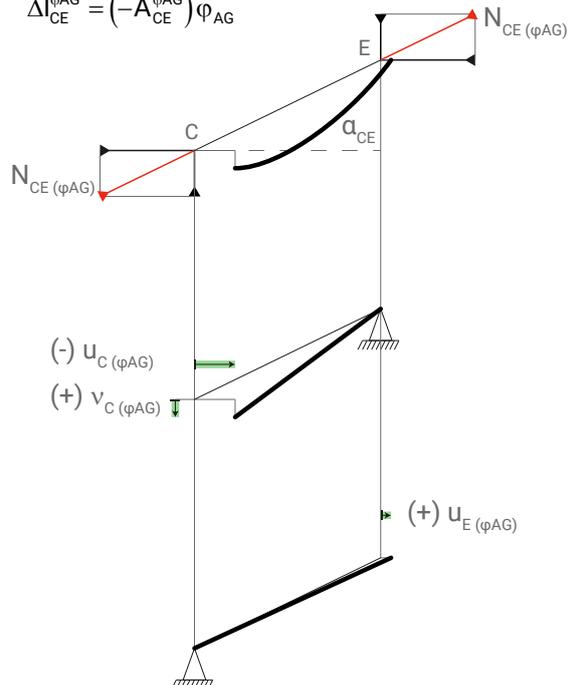
$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{AG}} = (+A_{TC}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$



Fune CE

$$\Delta l_{CE}^{\varphi_{AG}} = (-|\pm u_C| + |\pm u_E|) \cos \alpha_{CE} + (|\pm v_C| + 0) \text{sen} \alpha_{CE}$$

$$\Delta l_{CE}^{\varphi_{AG}} = (-A_{CE}^{\varphi_{AG}}) \varphi_{AG}$$

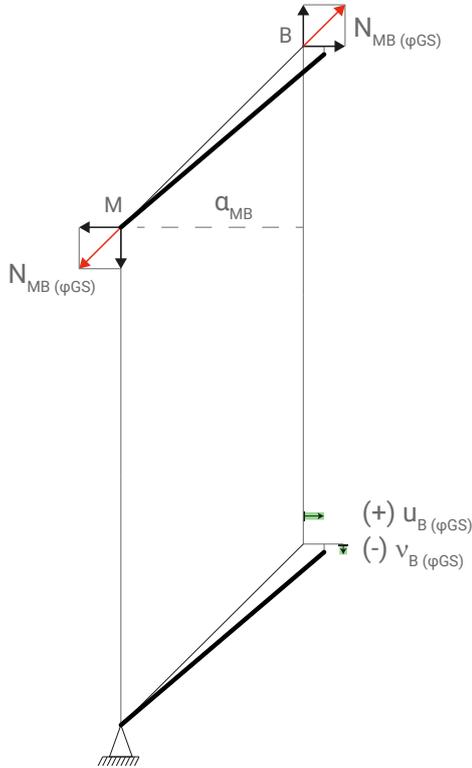


Funzione deformata delle funi di ( $\varphi_{GS}$ )

Fune MB

$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{GS}} = (0 + |\pm u_B|) \cos \alpha_{MB} + (0 - |\pm v_B|) \operatorname{sen} \alpha_{MB}$$

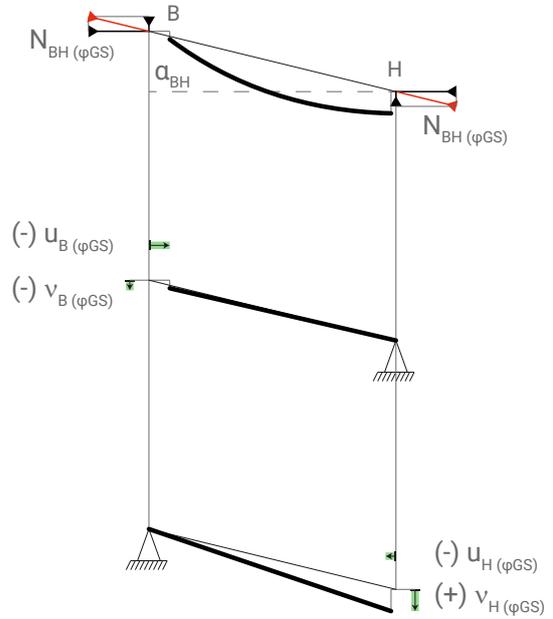
$$\Delta l_{MB}^{\varphi_{GS}} = (+A_{MB}^{\varphi_{GS}}) \varphi_{GS}$$



Fune BH

$$\Delta l_{BH}^{\varphi_{GS}} = (-|\pm u_B| - |\pm u_H|) \cos \alpha_{BH} + (-|\pm v_B| + |\pm v_H|) \operatorname{sen} \alpha_{BH}$$

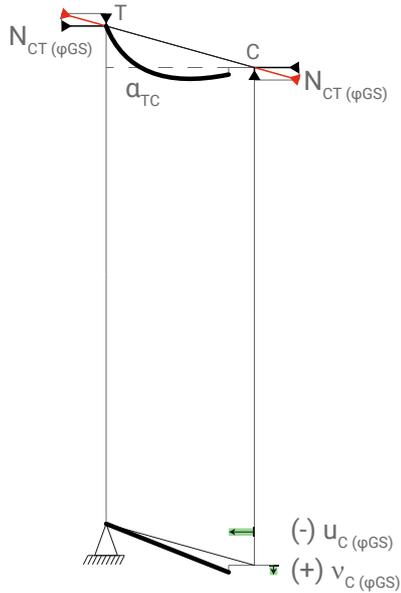
$$\Delta l_{BH}^{\varphi_{GS}} = (-A_{BH}^{\varphi_{GS}}) \varphi_{GS}$$



Fune TC

$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{GS}} = (0 - |\pm u_C|) \cos \alpha_{TC} + (0 + |\pm v_C|) \operatorname{sen} \alpha_{TC}$$

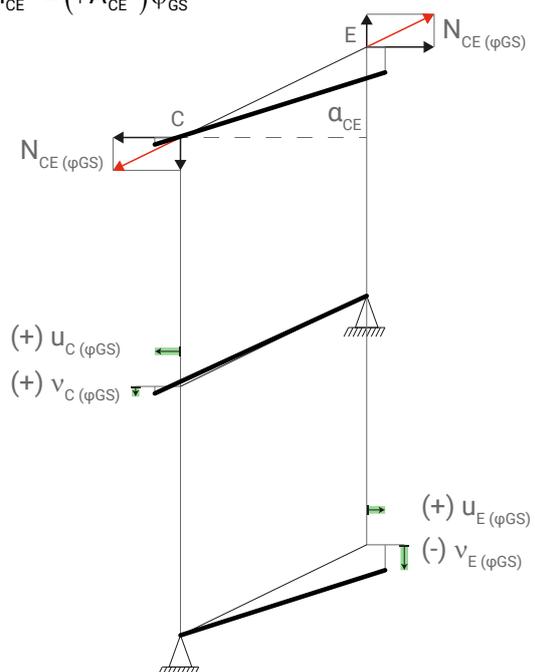
$$\Delta l_{TC}^{\varphi_{GS}} = (-A_{TC}^{\varphi_{GS}}) \varphi_{GS}$$



Fune CE

$$\Delta l_{CE}^{\varphi_{GS}} = (+|\pm u_C| + |\pm u_E|) \cos \alpha_{CE} + (+|\pm v_C| - |\pm v_E|) \operatorname{sen} \alpha_{CE}$$

$$\Delta l_{CE}^{\varphi_{GS}} = (+A_{CE}^{\varphi_{GS}}) \varphi_{GS}$$



Reazioni vincolari esterne relative ai soli carichi esterni concentrati (P)

Equilibrio rotatorio di tutta la struttura intorno al nodo (A)

$$+P_G^z |a_{AG}| + P_S^z |a_{AG} + a_{GS}| + P_G^x |b_{AG}| + P_S^x |b_{AG} + b_{GS}| + V_D |a_{AG} + a_{GS} + a_{SD}| = 0$$

$$V_D = - \frac{+P_G^z |a_{AG}| + P_S^z |a_{AG} + a_{GS}| + P_G^x |b_{AG}| + P_S^x |b_{AG} + b_{GS}|}{|a_{AG} + a_{GS} + a_{SD}|}$$

Equilibrio traslatorio verticale di tutta la struttura

$$+P_G^z + P_S^z + V_D + V_A = 0$$

$$V_A = -P_G^z - P_S^z - V_D$$

Equilibrio traslatorio orizzontale di tutta la struttura

$$+P_G^x + P_S^x + H_A = 0$$

$$H_A = -P_G^x - P_S^x$$

Reazioni vincolari esterne relative alla sola pretensione, funi escluse, (T)

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da sinistra

$$+T_{MB} [+ \cos \alpha_{MB} |b_{AM} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{AM} + a_{AG}|] +$$

$$+T_{TC} [+ \cos \alpha_{TC} |b_{AT} + b_{AG}| + \text{sen} \alpha_{TC} |a_{AT} + a_{AG}|] - V_{A(T)} |a_{AG}| = 0$$

$$+T_{MB} [+ \cos \alpha_{MB} |b_{AM} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{AM} + a_{AG}|] +$$

$$V_{A(T)} = \frac{+T_{TC} [+ \cos \alpha_{TC} |b_{AT} + b_{AG}| + \text{sen} \alpha_{TC} |a_{AT} + a_{AG}|]}{|a_{AG}|}$$

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da sinistra

$$+T_{BH} [- \cos \alpha_{BH} |b_{GB} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{GB} + a_{GS}|] +$$

$$+T_{CE} [+ \cos \alpha_{CE} |b_{GC} + b_{GS}| - \text{sen} \alpha_{CE} |a_{GC} + a_{GS}|] - V_{A(T)} |a_{AG} + a_{GS}| - V_{G(T)} |a_{GS}| = 0$$

$$+T_{BH} [- \cos \alpha_{BH} |b_{GB} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{GB} + a_{GS}|] +$$

$$V_{G(T)} = \frac{+T_{CE} [+ \cos \alpha_{CE} |b_{GC} + b_{GS}| - \text{sen} \alpha_{CE} |a_{GC} + a_{GS}|] - V_{A(T)} |a_{AG} + a_{GS}|}{|a_{GS}|}$$

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra

$$+T_{BH} [+ \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}|] +$$

$$+T_{CE} [- \cos \alpha_{CE} |b_{SE}| - \text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}|] + V_{D(T)} |a_{SD}| = 0$$

$$+T_{BH} [- \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| - \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}|] +$$

$$V_{D(T)} = \frac{+T_{CE} [+ \cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}|]}{|a_{SD}|}$$

Equilibrio traslatorio verticale di tutta la struttura

$$+V_{D(T)} + V_{A(T)} + V_{G(T)} + V_{S(T)} = 0$$

$$V_{S(T)} = -V_{D(T)} - V_{A(T)} - V_{G(T)}$$

Equilibrio traslatorio orizzontale di tutta la struttura

$$+H_{A(T)} = 0$$

Reazioni vincolari esterne relative all'attivazione del solo movimento ( $\varphi_{AG}$ )

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da destra

$$\begin{aligned}
 &+N_{BH} [ + \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| ] + \\
 &+N_{CE} [ + \cos \alpha_{CE} |b_{SE}| + \text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| ] + V_{D(\varphi_{AG})} |a_{SD}| = 0 \\
 &\quad +N_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| - \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| ] + \\
 &V_{D(\varphi_{AG})} = \frac{+N_{CE} [ - \cos \alpha_{CE} |b_{SE}| - \text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| ]}{|a_{SD}|} \\
 &\quad +\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi_{AG}} k_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| - \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| ] + \\
 &\quad +\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi_{AG}} k_{CE} [ - \cos \alpha_{CE} |b_{SE}| - \text{sen} \alpha_{CE} |a_{SE}| ] \\
 &V_{D(\varphi_{AG})} = \frac{+\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi_{AG}} k_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{SH}| - \text{sen} \alpha_{BH} |a_{SH}| ] +}{|a_{SD}|} \\
 &V_{D(\varphi_{AG})} = \varphi_{AG} A_{V_D}^{\varphi_{AG}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (S) da sinistra

$$\begin{aligned}
 &+N_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{GB} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{GB} + a_{GS}| ] + \\
 &+N_{CE} [ - \cos \alpha_{CE} |b_{GC} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{CE} |a_{GC} + a_{GS}| ] + V_{A(\varphi_{AG})} |a_{AG} + a_{GS}| = 0 \\
 &\quad +N_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{GB} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{GB} + a_{GS}| ] + \\
 &V_{A(\varphi_{AG})} = \frac{+N_{CE} [ - \cos \alpha_{CE} |b_{GC} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{CE} |a_{GC} + a_{GS}| ]}{|a_{AG} + a_{GS}|} \\
 &\quad +\varphi_{AG} A_{BH}^{\varphi_{AG}} k_{BH} [ - \cos \alpha_{BH} |b_{GB} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{BH} |a_{GB} + a_{GS}| ] + \\
 &V_{A(\varphi_{AG})} = \frac{+\varphi_{AG} A_{CE}^{\varphi_{AG}} k_{CE} [ - \cos \alpha_{CE} |b_{GC} + b_{GS}| + \text{sen} \alpha_{CE} |a_{GC} + a_{GS}| ]}{|a_{AG} + a_{GS}|} \\
 &V_{A(\varphi_{AG})} = \varphi_{AG} A_{V_A}^{\varphi_{AG}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio traslatorio verticale di tutta la struttura

$$\begin{aligned}
 &+V_{A(\varphi_{AG})} + V_{S(\varphi_{AG})} + V_{D(\varphi_{AG})} = 0 \\
 &V_{S(\varphi_{AG})} = -V_{A(\varphi_{AG})} - V_{D(\varphi_{AG})} \\
 &V_{S(\varphi_{AG})} = -\varphi_{AG} A_{V_A}^{\varphi_{AG}} - \varphi_{AG} A_{V_D}^{\varphi_{AG}} \\
 &V_{S(\varphi_{AG})} = \varphi_{AG} ( -A_{V_A}^{\varphi_{AG}} - A_{V_D}^{\varphi_{AG}} ) \\
 &V_{S(\varphi_{AG})} = \varphi_{AG} A_{V_S}^{\varphi_{AG}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio traslatorio orizzontale di tutta la struttura

$$+H_{A(\varphi_{AG})} = 0$$

Reazioni vincolari esterne relative all'attivazione del solo movimento ( $\varphi_{GS}$ )

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da destra

$$\begin{aligned}
 &+N_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{GB}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| ] + \\
 &+N_{TC} [ + \cos \alpha_{TC} |b_{GC}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| ] + V_{D(\varphi_{GS})} |a_{GS} + a_{SD}| = 0 \\
 &\quad +N_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{GB}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| ] + \\
 &V_{D(\varphi_{GS})} = \frac{+N_{TC} [ + \cos \alpha_{TC} |b_{GC}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| ]}{|a_{GS} + a_{SD}|} \\
 &\quad +\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi_{GS}} k_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{GB}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| ] + \\
 &\quad +\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi_{GS}} k_{TC} [ + \cos \alpha_{TC} |b_{GC}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{GC}| ] \\
 &V_{D(\varphi_{GS})} = \frac{+\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi_{GS}} k_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{GB}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{GB}| ] +}{|a_{GS} + a_{SD}|} \\
 &V_{D(\varphi_{GS})} = \varphi_{GS} A_{V_D}^{\varphi_{GS}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio rotatorio intorno al nodo (G) da sinistra

$$\begin{aligned}
 &+N_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{AM} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{AM} + a_{AG}| ] + \\
 &+N_{TC} [ - \cos \alpha_{TC} |b_{AT} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{AT} + a_{AG}| ] - V_{A(\varphi_{GS})} |a_{AG}| = 0 \\
 &\quad +N_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{AM} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{AM} + a_{AG}| ] + \\
 &V_{A(\varphi_{GS})} = \frac{+N_{TC} [ - \cos \alpha_{TC} |b_{AT} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{AT} + a_{AG}| ]}{|a_{AG}|} \\
 &\quad +\varphi_{GS} A_{MB}^{\varphi_{GS}} k_{MB} [ + \cos \alpha_{MB} |b_{AM} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{MB} |a_{AM} + a_{AG}| ] + \\
 &V_{A(\varphi_{GS})} = \frac{+\varphi_{GS} A_{TC}^{\varphi_{GS}} k_{TC} [ - \cos \alpha_{TC} |b_{AT} + b_{AG}| - \text{sen} \alpha_{TC} |a_{AT} + a_{AG}| ]}{|a_{AG}|} \\
 &V_{A(\varphi_{GS})} = \varphi_{GS} A_{V_A}^{\varphi_{GS}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio traslatorio verticale di tutta la struttura

$$\begin{aligned}
 &+V_{A(\varphi_{GS})} + V_{G(\varphi_{GS})} + V_{D(\varphi_{GS})} = 0 \\
 &V_{G(\varphi_{GS})} = -V_{A(\varphi_{GS})} - V_{D(\varphi_{GS})} \\
 &V_{G(\varphi_{GS})} = -\varphi_{GS} A_{V_A}^{\varphi_{GS}} - \varphi_{GS} A_{V_D}^{\varphi_{GS}} \\
 &V_{G(\varphi_{GS})} = \varphi_{GS} ( -A_{V_A}^{\varphi_{GS}} - A_{V_D}^{\varphi_{GS}} ) \\
 &V_{G(\varphi_{GS})} = \varphi_{GS} A_{V_S}^{\varphi_{GS}}
 \end{aligned}$$

Equilibrio traslatorio orizzontale di tutta la struttura

$$+H_{A(\varphi_{GS})} = 0$$

Grandezze utilizzate nel calcolo

Coordinate nodi

- A)  $x_A=0$  ;  $z_A=0$   
 G)  $x_G=+a_{AG}$  ;  $z_G=+b_{AG}$   
 M)  $x_M=+a_{AM}$  ;  $z_M=+b_{AM}$   
 T)  $x_T=+a_{AT}$  ;  $z_T=+b_{AT}$
- S)  $x_S=+a_{AG}+a_{GS}$  ;  $z_S=+b_{AG}+b_{GS}$   
 B)  $x_B=+a_{AG}+a_{GB}$  ;  $z_B=+b_{AG}+b_{GB}$   
 C)  $x_C=+a_{AG}+a_{GC}$  ;  $z_C=+b_{AG}+b_{GC}$
- D)  $x_D=+a_{AG}+a_{GS}+a_{SD}$  ;  $z_D=+b_{AG}+b_{GS}+b_{SD}$   
 H)  $x_H=+a_{AG}+a_{GS}+a_{SH}$  ;  $z_H=+b_{AG}+b_{GS}+b_{SH}$   
 E)  $x_E=+a_{AG}+a_{GS}+a_{SE}$  ;  $z_E=+b_{AG}+b_{GS}+b_{SE}$

Bracci asta rigida

- AM)  $a_{AM}=(+x_M - x_A)$  ;  $b_{AM}=(+z_M - z_A)$   
 AT)  $a_{AT}=(+x_T - x_A)$  ;  $b_{AT}=(+z_T - z_A)$   
 AG)  $a_{AG}=(+x_G - x_A)$  ;  $b_{AG}=(+z_G - z_A)$
- GB)  $a_{GB}=(+x_B - x_G)$  ;  $b_{GB}=(+z_B - z_G)$   
 GC)  $a_{GC}=(+x_C - x_G)$  ;  $b_{GC}=(+z_C - z_G)$   
 GS)  $a_{GS}=(+x_S - x_G)$  ;  $b_{GS}=(+z_S - z_G)$
- SH)  $a_{SH}=(+x_H - x_S)$  ;  $b_{SH}=(+z_H - z_S)$   
 SE)  $a_{SE}=(+x_E - x_S)$  ;  $b_{SE}=(+z_E - z_S)$   
 SD)  $a_{SD}=(+x_D - x_S)$  ;  $b_{SD}=(+z_D - z_S)$

Bracci fune

- MB)  $a_{MB}=(+x_B - x_M)$  ;  $b_{MB}=(+z_B - z_M)$   
 TC)  $a_{TC}=(+x_C - x_T)$  ;  $b_{TC}=(+z_C - z_T)$   
 BH)  $a_{BH}=(+x_H - x_B)$  ;  $b_{BH}=(+z_H - z_B)$   
 CE)  $a_{CE}=(+x_E - x_C)$  ;  $b_{CE}=(+z_E - z_C)$

Angolo fune con l'orizzontale

$$\alpha_{MB} = \text{tg}^{-1} \frac{b_{MB}}{a_{MB}} \quad \left| \text{sen} \alpha_{MB} \right| \quad \left| \cos \alpha_{MB} \right|$$

$$\alpha_{TC} = \text{tg}^{-1} \frac{b_{TC}}{a_{TC}} \quad \left| \text{sen} \alpha_{TC} \right| \quad \left| \cos \alpha_{TC} \right|$$

$$\alpha_{BH} = \text{tg}^{-1} \frac{b_{BH}}{a_{BH}} \quad \left| \text{sen} \alpha_{BH} \right| \quad \left| \cos \alpha_{BH} \right|$$

$$\alpha_{CE} = \text{tg}^{-1} \frac{b_{CE}}{a_{CE}} \quad \left| \text{sen} \alpha_{CE} \right| \quad \left| \cos \alpha_{CE} \right|$$

Movimenti dei nodi attivando  $\varphi_{AG}$

$$u_M = +b_{AM} \varphi_{AG}$$

$$v_M = +a_{AM} \varphi_{AG}$$

$$u_T = +b_{AT} \varphi_{AG}$$

$$v_T = +a_{AT} \varphi_{AG}$$

$$u_G = +b_{AG} \varphi_{AG}$$

$$v_G = +a_{AG} \varphi_{AG}$$

$$u_B = \left[ +b_{AG} - b_{GB} \frac{a_{AG}}{a_{GS}} \right] \varphi_{AG}$$

$$v_B = \left[ +a_{AG} - a_{GB} \frac{a_{AG}}{a_{GS}} \right] \varphi_{AG}$$

$$u_C = \left[ +b_{AG} - b_{GC} \frac{a_{AG}}{a_{GS}} \right] \varphi_{AG}$$

$$v_C = \left[ +a_{AG} - a_{GC} \frac{a_{AG}}{a_{GS}} \right] \varphi_{AG}$$

$$u_S = \left[ +b_{AG} - b_{GS} \frac{a_{AG}}{a_{GS}} \right] \varphi_{AG}$$

$$v_S = 0$$

$$u_H = u_S$$

$$v_H = 0$$

$$u_E = u_S$$

$$v_E = 0$$

$$u_D = u_S$$

$$v_D = 0$$

Movimenti dei nodi attivando  $\varphi_{GS}$

$$u_M = 0$$

$$v_M = 0$$

$$u_T = 0$$

$$v_T = 0$$

$$u_G = 0$$

$$v_G = 0$$

$$u_B = +b_{GB} \varphi_{GS}$$

$$v_B = +a_{GB} \varphi_{GS}$$

$$u_C = +b_{GC} \varphi_{GS}$$

$$v_C = +a_{GC} \varphi_{GS}$$

$$u_S = +b_{GS} \varphi_{GS}$$

$$v_S = +a_{GS} \varphi_{GS}$$

$$u_H = \left[ +b_{GS} - b_{SH} \frac{a_{SG}}{a_{SD}} \right] \varphi_{GS}$$

$$v_H = \left[ +a_{GS} - a_{SH} \frac{a_{SG}}{a_{SD}} \right] \varphi_{GS}$$

$$u_E = \left[ +b_{GS} - b_{SE} \frac{a_{SG}}{a_{SD}} \right] \varphi_{GS}$$

$$v_E = \left[ +a_{GS} - a_{SE} \frac{a_{SG}}{a_{SD}} \right] \varphi_{GS}$$

$$u_D = \left[ +b_{GS} - b_{SD} \frac{a_{SG}}{a_{SD}} \right] \varphi_{GS}$$

$$v_D = 0$$

Sforzo normale della fune

$$N_{MB} = +A_{MB}^{\varphi_{AG}} k_{MB} \varphi_{AG} + A_{MB}^{\varphi_{GS}} k_{MB} \varphi_{GS}$$

$$N_{TC} = +A_{TC}^{\varphi_{AG}} k_{TC} \varphi_{AG} + A_{TC}^{\varphi_{GS}} k_{TC} \varphi_{GS}$$

$$N_{BH} = +A_{BH}^{\varphi_{AG}} k_{BH} \varphi_{AG} + A_{BH}^{\varphi_{GS}} k_{BH} \varphi_{GS}$$

$$N_{CE} = +A_{CE}^{\varphi_{AG}} k_{CE} \varphi_{AG} + A_{CE}^{\varphi_{GS}} k_{CE} \varphi_{GS}$$

.Caratteristiche della fune dopo il calcolo

Deformata della fune dovuta alla sola reazione

$$\Delta l_{IJ}^{\varphi AG} + \Delta l_{IJ}^{\varphi GS} = A_{IJ}^{\varphi AG} \varphi_{AG} + A_{IJ}^{\varphi GS} \varphi_{GS}$$

Reazione della fune

$$N_{IJ} = (\Delta l_{IJ}^{\varphi AG} + \Delta l_{IJ}^{\varphi GS}) k_{N-IJ}$$

Sforzo normale complessivo della fune

$$S_{IJ} = (\pm N_{IJ}) + (+T_{IJ})$$

Deformata complessiva della fune

$$S_{IJ} = \Delta l_{IJ}^{\text{tot}} k_{N-IJ}$$

$$\Delta l_{IJ}^{\text{tot}} = \frac{S_{IJ}}{k_{N-IJ}}$$

.Reazioni vincolari delle cerniere interne

Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale a sinistra del nodo (G)

$$M_{G(sx)} = +S_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{MB} | -b_{AM} + b_{AG} | + \\ -\text{sen} \alpha_{MB} | a_{AM} + a_{AG} | \end{array} \right) +$$

$$+S_{TC} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{TC} | -b_{AT} + b_{AG} | + \\ -\text{sen} \alpha_{TC} | -a_{AT} + a_{AG} | \end{array} \right) +$$

$$-V_A | a_{AG} | -H_A | b_{AG} |$$

$$V_{G(sx)} = +S_{MB} \text{sen} \alpha_{MB} - S_{TC} \text{sen} \alpha_{TC} + V_A$$

$$H_{G(sx)} = -S_{MB} \cos \alpha_{MB} - S_{TC} \cos \alpha_{TC} + H_A$$

Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale a sinistra del nodo (S)

$$M_{S(sx)} = +S_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{BH} | -b_{GB} + b_{GS} | + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} | -a_{GB} + a_{GS} | \end{array} \right) +$$

$$+S_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{CE} | -b_{GB} + b_{GS} | + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} | -a_{GC} + a_{GS} | \end{array} \right) +$$

$$-V_A | a_{AG} + a_{GS} | -H_A | b_{AG} + b_{GS} | +$$

$$-P_G^x | b_{GS} | -P_G^y | a_{GS} |$$

$$V_{S(sx)} = -S_{BH} \text{sen} \alpha_{BH} + S_{CE} \text{sen} \alpha_{CE} + V_A + P_G^y$$

$$H_{S(sx)} = -S_{BH} \cos \alpha_{BH} - S_{CE} \cos \alpha_{CE} + H_A + P_G^x$$

.Equilibrio delle cerniere interne

Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale del nodo (G)

$$M_{G(sx)} + M_{G(dx)} = (?) 0$$

$$V_{G(sx)} + V_{G(dx)} = (?) -P_G^y$$

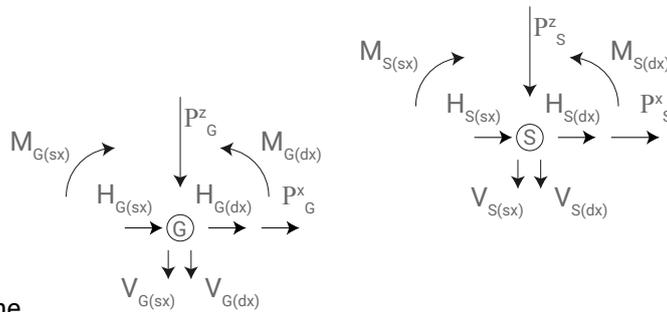
$$H_{G(sx)} + H_{G(dx)} = (?) -P_G^x$$

Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale del nodo (S)

$$M_{S(sx)} + M_{S(dx)} = (?) 0$$

$$V_{S(sx)} + V_{S(dx)} = (?) -P_S^y$$

$$H_{S(sx)} + H_{S(dx)} = (?) -P_S^x$$



Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale a destra del nodo (G)

$$M_{G(dx)} = +S_{MB} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{MB} | b_{GB} | + \\ -\text{sen} \alpha_{MB} | a_{GB} | \end{array} \right) +$$

$$+S_{TC} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{TC} | b_{GC} | + \\ +\text{sen} \alpha_{TC} | a_{GC} | \end{array} \right) +$$

$$+V_D | a_{GS} + a_{SD} | + P_S^x | b_{GS} | + P_S^y | a_{GS} |$$

$$V_{G(dx)} = -S_{MB} \text{sen} \alpha_{MB} + S_{TC} \text{sen} \alpha_{TC} + V_D + P_S^y$$

$$H_{G(dx)} = +S_{MB} \cos \alpha_{MB} + S_{TC} \cos \alpha_{TC} + P_S^x$$

Equilibrio rotatorio, verticale e orizzontale a destra del nodo (S)

$$M_{S(dx)} = +S_{BH} \left( \begin{array}{l} -\cos \alpha_{BH} | -b_{GB} + b_{GS} | + \\ +\text{sen} \alpha_{BH} | -a_{GB} + a_{GS} | \end{array} \right) +$$

$$+S_{CE} \left( \begin{array}{l} +\cos \alpha_{CE} | -b_{GB} + b_{GS} | + \\ -\text{sen} \alpha_{CE} | -a_{GC} + a_{GS} | \end{array} \right) +$$

$$-V_A | a_{AG} + a_{GS} | -H_A | b_{AG} + b_{GS} | +$$

$$-P_G^x | b_{GS} | -P_G^y | a_{GS} |$$

$$V_{S(dx)} = +S_{BH} \text{sen} \alpha_{BH} - S_{CE} \text{sen} \alpha_{CE} + V_D$$

$$H_{S(dx)} = +S_{BH} \cos \alpha_{BH} + S_{CE} \cos \alpha_{CE}$$

## RISOLUZIONE DELLO SCHEMA STATICO (3) PIANO

### Bracci dei corpi rigidi (m)

Asta IJ	$a_{IJ}$	$b_{IJ}$	$c_{IJ}$
AM	0,2	1,2	0
AT	0,85	-0,65	0
AG	1,9	1,4	0
GB	0,7	2,2	0
GC	0,9	-2,6	0
GS	3	0,5	0
SH	0,95	0,9	0
SE	0,35	-1,9	0
SD	3,5	-1,1	0

### Coordinate dei nodi (m): x) +a destra; z) +in alto

Nodo I	$x_I$	$z_I$	$y_I$
A	0	0	0
M	0,2	1,2	0
T	0,85	-0,65	0
G	1,9	1,4	0
B	2,6	3,6	0
C	2,8	-1,2	0
S	4,9	1,9	0
H	5,85	2,8	0
E	5,25	0	0
D	8,4	0,8	0

### Conferma bracci in funzione delle coordinate (m)

Asta IJ	$a_{IJ}$	$b_{IJ}$	$c_{IJ}$
AM	0,2	1,2	0
AT	0,85	-0,65	0
AG	1,9	1,4	0
GB	0,7	2,2	0
GC	0,9	-2,6	0
GS	3	0,5	0
SH	0,95	0,9	0
SE	0,35	-1,9	0
SD	3,5	-1,1	0

Fune IJ	$a_{IJ}$	$b_{IJ}$	$c_{IJ}$
MB	2,4	2,4	0
TC	1,95	-0,6	0
BH	3,25	-0,8	0
CE	2,45	1,2	0

### Dati

E' possibile programmare il modello di disegno computazionale (G.H.), in modo che fornisca subito i bracci, come dato iniziale e non le coordinate dei nodi. In questo caso quindi, il controllo della geometria risulta più semplice, rispetto ai programmi di matematica pura, non specifici per modelli grafici.

### Conferma (I)

Calcolare il valore dei bracci tramite le coordinate dei nodi e verificare che abbiano lo stesso valore, di quelli direttamente importati dal modello grafico.

.Costanti di moviento dei nodi: u) +a destra; v) + in basso

Nodo I	$u^{\varphi AG}_I/\varphi_{AG}$	$v^{\varphi AG}_I/\varphi_{AG}$	$w^{\varphi AG}_I/\varphi_{AG}$
A	0	0	0
M	1,2	0,2	0
T	-0,65	0,85	0
G	1,4	1,9	0
B	0,0067	1,46	0
C	3,05	1,33	0
S	1,08	0	0
H	1,08	0	0
E	1,08	0	0
D	1,08	0	0

Nodo I	$u^{\varphi GS}_I/\varphi_{GS}$	$v^{\varphi GS}_I/\varphi_{GS}$	$w^{\varphi GS}_I/\varphi_{GS}$
A	0	0	0
M	0	0	0
T	0	0	0
G	0	0	0
B	2,2	0,7	0
C	-2,6	0,9	0
S	0,5	3	0
H	-0,3	2,2	0
E	2,1	2,7	0
D	1,4	0	0

.Geometria funi

Fune IJ	d (mm)	A (mm <sup>2</sup> )	E(KN/mm <sup>2</sup> )	E*A (KN)	$k_{IJ} (A*E/L_{IJ})$	$f_{yd} (N/mm^2)$	$F_{rd} (KN)$
MB	24	353	206	72718	21425	930	328
TC	24	353	206	72718	35891	930	328
BH	24	353	206	72718	21726	930	328
CE	24	353	206	72718	26655	930	328

Fune IJ	$L_{IJ} (m)$	$ \alpha_{IJ} (rad) $	$\alpha_{IJ} (^\circ)$	$\cos \alpha_{IJ}$	$\sin \alpha_{IJ}$
MB	3,4	0,8	45	0,71	0,71
TC	2,0	0,3	16	0,96	0,27
BH	3,3	0,2	14	0,97	0,24
CE	2,7	0,5	26	0,90	0,44

.Costanti di deformazione delle funi: + allungamento ; - accorciamento

$A^{\varphi AG}_{IJ}$

$A^{\varphi AG}_{MB}$	-1,732
$A^{\varphi AG}_{TC}$	3,688
$A^{\varphi AG}_{BH}$	0,697
$A^{\varphi AG}_{CE}$	-1,178

Conferma (II)

Verificare la corrispondenza del segno relativo alla funzione deformata della fune, tra modello analitico e modello grafico. Cioè, ogni segno (-) deve corrispondere a compressione, ed ogni segno (+) deve corrispondere a trazione.

$A^{\varphi GS}_{IJ}$

$A^{\varphi GS}_{MB}$	1,061
$A^{\varphi GS}_{TC}$	-2,258
$A^{\varphi GS}_{BH}$	-2,045
$A^{\varphi GS}_{CE}$	3,455

.Sforzi di sola pretensione (KN)

		$\alpha$ (acciaio)	0,000012	Coeff. Dilataz. Termico			
Fune IJ	$L_{IJ}$ (m)	$\delta_{IJ}$ (m)	$\Delta t_{IJ}$ (C°)	$L_{N-IJ}$	$k_{N-IJ}$ (AE/ $L_{N-IJ}$ )	$T_{IJ}=k_{N-IJ}\delta_{IJ}$	$< S_{am}$
MB	3,394	0,004	98	3,390	21450	86	219
TC	2,026	0,003	123	2,023	35944	108	219
BH	3,347	0,003	75	3,344	21746	65	219
CE	2,728	0,005	153	2,723	26704	134	219

.Azioni esterne concentrate e reazioni vincolari dovute ad esse esclusivamente (KN)

Az ; Reaz	$P^z_I$	$P^x_I$
$P_G$	94	8
$P_S$	113	9
$V_A ; H_A$	-116	-17
$V_D ; H_D$	-91	0

.Reazioni vincolari ausiliari e reali dovute all'inserimento dei vincoli ausiliari (KN) ; (KN/rad)

Azione	$V_A$	$V_G$	$V_S$	$V_D$	$H_A$	prova equilibrio=0
$\delta_{IJ}$	80,26	-72,23	-58,5	50,45	0	0,000
$\varphi_{AG}$	8537,5	nd	-20490,1	11952,55	0	0,000
$\varphi_{GS}$	83758,7	-108242,0	nd	24483,3	0	0,000

Conferma (III)

Verificare l'equilibrio delle reazioni vincolari esterne, di ogni singolo schema statico parziale indipendente, comprensivo di tutti i vincoli ausiliari, cioè quello caricato solamente con la pretensione nelle funi ( $\delta_{IJ}$ ) e quelli caricati soltanto, con ogni movimento rigido indipendente uno alla volta, prima solo ( $\varphi_{AG}$ ) e poi solo ( $\varphi_{GS}$ ). Quindi, siccome le azioni esterne di ogni schema statico parziale, sono auto-equilibrate, l'equilibrio traslatorio delle sue reazioni vincolari esterne, deve essere (0), perchè anch'esse devono annullarsi.

.Scrittura equazioni di equilibrio rotatorio in forma matriciale

Sistema 1	{T}	+	[k]	*	{α}	=	{F}
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">G da Dx</span>	-305		-276152		$\varphi_{AG}$		-245
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">S da Dx</span>	-353		-83668		$\varphi_{GS}$		-317

Conferma (IV)

Scrivere l'equilibrio mediante vari sistemi di equazioni differenti e verificare che diano tutti lo stesso risultato, con segno analogo.

	$[k]^{-1}$		{α} = risult	{F} - {T}
	-6,74E-06	0,000010	-0,00003	60
	0,000003	-8,934E-06	-0,00016	36

Sistema 2	{T}	+	[k]	*	{α}	=	{F}
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">G da Dx</span>	-305		-276152		$\varphi_{AG}$		-245
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">S da Sx</span>	353		83668		$\varphi_{GS}$		317

	$[k]^{-1}$		{α} = risult	{F} - {T}
	-6,74E-06	0,00	-0,00003	60
	0,00	8,934E-06	-0,00016	-36

Sistema 3	{T}	+	[k]	*	{α}	=	{F}
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">G da Sx</span>	305		276152		$\varphi_{AG}$		245
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">S da Dx</span>	-353		-83668		$\varphi_{GS}$		-317

	$[k]^{-1}$		{α} = risult	{F} - {T}
	6,741E-06	0,00	-0,00003	-60
	0,00	-8,934E-06	-0,00016	36

Sistema 4	{T}	+	[k]	*	{α}	=	{F}
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">G da Sx</span>	305		276152		$\varphi_{AG}$		245
<span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">S da Sx</span>	353		83668		$\varphi_{GS}$		317

	$[k]^{-1}$		{α} = risult	{F} - {T}
	6,741E-06	0,00	-0,00003	-60
	0,00	8,934E-06	-0,00016	-36

.Reazioni interne, sforzi complessivi e verifica di resistenza delle funi (KN)

Verifica di resistenza

Sistema 1 Rotazioni (rad)	$\varphi_{AG}$	-0,00003
	$\varphi_{GS}$	-0,00016

Verificare la resistenza dello sforzo finale di ogni fune, con criterio analogo a quello delle tensioni ammissibili, visto che le azioni esterne non sono fattorizzate.

Fune IJ	$N_{IJ}$	$S_{IJ}=N_{IJ}+T_{IJ}$	$< S_{am}$	$F_{R,d}$
MB	-3	83	219	328
TC	9	117	219	328
BH	7	72	219	328
CE	-14	120	219	328

$$S_{am} = (2/3)F_{R,d}$$

.Reazioni vincolari delle cerniere interne

Equilibrio	M (KN*m)	V (KN)	H (KN)
G da Sx	420	-89,27	-188,31
G da Dx	-420	-4,73	180,31
S da Sx	460	12,97	-186,28
S da Dx	-460	-125,97	177,28

.Equilibrio delle cerniere interne (esplosione)

Nodo	M (KN*m)	V (KN)	H (KN)
G	0	-94	-8
S	0	-113	-9

Conferma (V)

Verificare l'equilibrio traslatorio delle reazioni vincolari interne, di ogni singola cerniera interna (esplosione). Quindi, il risultato deve dare, forze uguali ai carichi concentrati esterni, con segno opposto.

.Deformazione complessiva delle funi (m)

Fune IJ	$\Delta l^{TOT}_{IJ}$
MB	0,0039
TC	0,003
BH	0,003
CE	0,004

.Movimenti dei nodi (m)

Nodo I	$u_i$	$v_i$	$w_i$
A	0	0	0
M	-0,00004	-0,00001	0
T	0,00002	-0,00003	0
G	-0,00004	-0,00006	0
B	-0,00036	-0,00016	0
C	0,00032	-0,00019	0
S	-0,00011	-0,00048	0
H	0,00001	-0,00035	0
E	-0,00038	-0,00044	0
D	-0,00027	0	0

.Coordinate dei nodi dopo la deformazione (m)

Nodo I	$x_i$	$y_i$	$z_i$
A	0	0	0
M	0,19996	1,19999	0
T	0,85002	-0,65003	0
G	1,89996	1,39994	0
B	2,59964	3,59984	0
C	2,80032	-1,20019	0
S	4,89989	1,89952	0
H	5,85001	2,79965	0
E	5,24962	-0,00044	0
D	8,39973	0,80000	0

.Bracci dei corpi rigidi dopo la deformazione (m)

Asta IJ	$a_{IJ}$	$b_{IJ}$	$c_{IJ}$
AM	0,200	1,200	0
AT	0,850	-0,650	0
AG	1,900	1,400	0
GB	0,700	2,200	0
GC	0,900	-2,600	0
GS	3,000	0,500	0
SH	0,950	0,900	0
SE	0,350	-1,900	0
SD	3,500	-1,100	0

.Movimenti dei nodi (mm)

Nodo I	$u_i$	$v_i$	$w_i$
A	0	0	0
M	-0,04	-0,01	0
T	0,02	-0,03	0
G	-0,04	-0,06	0
B	-0,36	-0,16	0
C	0,32	-0,19	0
S	-0,11	-0,48	0
H	0,01	-0,35	0
E	-0,38	-0,44	0
D	-0,27	0	0

Conferma (VI)

Verificare che i bracci delle aste, calcolati con le coordinate dei nodi dopo la deformazione, risultino esattamente uguali a quelli calcolati prima di essa, all'inizio.

Valutazione dei movimenti nodali

Se i movimenti nodali risultano considerevoli, occorre effettuare una iterazione geometrica sul modello grafico iniziale, importandovi le coordinate dei nodi, dopo la deformazione. In questo modo pertanto, si ottiene la sua configurazione ottimizzata, soggetta cioè, a solo sforzo normale, su cui poter eseguire l'analisi finale complessiva. Invece, se i movimenti nodali risultano piccolissimi, (dell'ordine di mm), lo schema geometrico preliminare non va modificato e può essere utilizzato così com'è, anche per l'analisi definitiva. Pertanto, il caso piano del sistema (3), sembra funzionare in maniera più simile ad una reticolare di aste rigide, che ad una tensostruttura. Non si verifica cioè, il sostanzioso cambiamento di forma, tipico di quest'ultima.



## SCELTA DEL MODELLO STRUTTURALE

## DISEGNO DELLO SCHEMA GEOMETRICO

Dai riferimenti bibliografici<sup>N1</sup> sull'argomento e dalla risoluzione sia manuale che automatica dei sistemi Ill-condition, affrontate in questa tesi<sup>N2</sup>, appaiono evidenti i motivi del divieto di collocare nodi, in maniera allineata o complanare, globalmente o localmente, tra elementi strutturali contigui, soggetti a sforzo normale, cioè tiranti o puntoni. Tale situazione inoltre, non risulta mai architettonicamente indispensabile. In primo luogo, due pendoli contigui privi di inclinazione reciproca, sono chiamati a sopportare sforzi normali che tendono all'infinito, dopo aver comunque dovuto espletare un cinematismo che, sebbene infinitesimo del primo ordine, incide molto negativamente sulla deformata. In secondo luogo, l'effettiva procedura manuale di risoluzione della Ill-condition, comporta grande pesantezza dei sistemi di equazioni, per via della sua non linearità. Infine, se si tenta di risolvere il problema con un programma di analisi strutturale, non si perviene ad alcuna soluzione. Pertanto, quando sembra esserci esigenza architettonica di un sistema con nodi principali allineati, occorre disallinearli volontariamente, di un angolo arbitrario<sup>N3</sup>. Per esempio, è possibile inclinare reciprocamente più elementi strutturali contigui, abbassando geometricamente il nodo che li collega, di (1/20) della luce coperta da essi<sup>N4</sup>.

### Strategia di progetto

Lo schema geometrico delle tensostrutture miste discrete, al pari di quelle pure, è influenzato in maniera non trascurabile dalle azioni esterne e dal peso proprio. In pratica, dopo aver disegnato rigidamente lo schema geometrico, la deformata di qualunque suo schema statico, sarà molto diversa dalla indeformata iniziale. Quindi, indipendentemente dal soddisfacimento delle verifiche di resistenza, quelle di deformabilità, risultano inizialmente impossibili. Pertanto, bisogna seguire un processo di modifica iterativa della geometria iniziale, sottoponendo la struttura ad una specifica combinazione di carico, volta soltanto a trovare una deformata, da poter adottare come schema geometrico finale, a cui adeguare il modello architettonico iniziale. Su di esso infine, andrà eseguita l'analisi strutturale definitiva e quindi anche la verifica di deformabilità.

- 1)Modello architettonico grezzo, disegnato come una struttura completamente rigida (es. software: M.Rhinoceros + Grasshopper).
- 2)Modello strutturale grezzo, in cui si diversificano le due diverse tipologie di elementi strutturali cioè, i pezzi infinitamente rigidi e i pendoli/funi deformabili (es. software: M.Rhinoceros + Grasshopper).
- 3)Analisi specifica per modifica della geometria iniziale, con ottenimento della deformata, che potrà essere utilizzata come schema geometrico definitivo (es. software: A.Robot structural analysis).
- 4)Eventuale ottimizzazione o rifacimento del modello strutturale, in cui

N1  
M . M A J O W I E C K I ,  
Tensostrutture: progetto e  
verifica, CREA, 1991, pg.134

N2  
Ill-condition manuale:  
'Schemi statici minimi'  
pg.52-71

Ill-condition automatica:  
'Schema statico (1) piano'  
pg.264, 265

N3  
F2, F3  
pg.243

N4  
F4, F5  
pg.243

### Legenda

 TELAIO RIGIDO  
infinitamente

 GUSCIO RIGIDO  
infinitamente

 FUNE

Ill-condition:  
 Asse geometrico  
SENZA rischio

 Asse geometrico  
CON rischio

 Movimenti  
INDIPENDENTI

 Movimenti  
DIPENDENTI

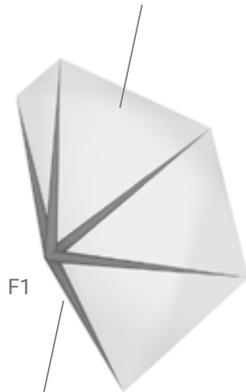
N5  
O.BELLUZZI, Scienza delle  
costruzioni Vol.2, Zanichelli,  
1974, pg.218

N6  
Schemi statici del sistema  
(3) piano e spaziale  
F9-F11  
pg.247

N7  
Schemi statici del sistema  
(2) piano e spaziale  
F6-F8  
pg.246

N8  
Schemi statici del sistema  
(1) piano e spaziale  
F2-F5  
pg.243

Guscio rappresentativo  
infinitamente rigido per  
l'analisi automatica



Telaio rappresentativo  
infinitamente rigido per  
l'analisi manuale

correggere gli errori grossolani geometrici, messi in luce dai risultati dell'analisi (es. software: M.Rhinoceros + Grasshopper).

5)Modifica del modello architettonico iniziale, tramite adeguamento alla deformata appena ottenuta (es. software: M.Rhinoceros + Grasshopper).

6)Nuovo modello strutturale corrispondente al nuovo modello architettonico (es. software: M.Rhinoceros + Grasshopper).

7)Analisi strutturale definitiva, su cui eseguire tutte le verifiche di resistenza e di deformabilità (es. software: A.Robot structural analysis).

Questa tesi dunque, essendo uno studio sperimentale sulle procedure di progettazione e non un progetto specifico da realizzare, si ferma al punto (5) compreso. Essa cioè, include soltanto tutti i passaggi di ottimizzazione globale del modello, escludendo la definizione interna dei pezzi infinitamente rigidi e l'analisi strutturale finale.

#### .Analisi dei carichi volta a modificare la geometria iniziale

Con lo scopo di determinare l'intensità approssimata della forza concentrata agente su ogni nodo principale della struttura, lungo il suo asse, si è scelto di procedere per area d'influenza, mettendo in conto tutti i carichi permanenti a piena intensità e tutti quelli accidentali con metà di essa<sup>N5</sup>. Pertanto, nel sistema (3)<sup>N6</sup>, i nodi da caricare sono due, (G) ed (S), nel (2)<sup>N7</sup> e nell' (1)<sup>N8</sup> invece, è soltanto uno, (S). Quindi, in via approssimativa, l'analisi dei carichi è stata eseguita soltanto per i due nodi caricati del sistema (3). Per l'unico nodo caricato dei sistemi (1) e (2) invece, si è scelto di prendere direttamente le forze agenti sui quelli del sistema (3) e sommarle, visto che l'area di influenza del nodo (S) dei sistemi (1) e (2) è circa uguale alla somma delle aree di influenza dei nodi (G) ed (S) del sistema (3). Pertanto, tutti i sistemi oggetto di questa tesi, risultano caricati con azioni esterne globali, di ugual valore e quindi risultano meglio confrontabili, visto che volutamente hanno anche, uguali dimensioni.

#### .Geometria indicativa dei pezzi infinitamente rigidi<sup>F1</sup>

La geometria interna dei pezzi infinitamente rigidi, non sarà oggetto di questa tesi. Essi cioè, durante l'analisi approssimata, devono soltanto compiere dei cinematismi senza cambiare forma, permettendo ai pendoli, di deformarsi il più possibile. E' stato quindi necessario, produrre due modelli strutturali differenti, uno per l'analisi manuale e l'altro per quella automatica. Nel primo dunque, è utile mettere in evidenza soltanto il telaio di assi teorici, che collegano i nodi esterni di ogni pezzo, escludendo completamente tutti i nodi interni, che ai fini del calcolo approssimato, risultano privi di significato. Nel modello per l'analisi automatica invece, i pezzi infinitamente rigidi sono gusci, in quanto molto più semplici da confrontare con i pendoli, rispetto ad un sistema di aste incastrate.

Analisi dei carichi relativa al sistema (3)

$$q_{st} = 3 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

$$q_{pa} = 0.16 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

$$q_{pr} = 1 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] \cdot 2 = 2 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$$

$$q_{pe} = 5 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

N<sub>1</sub>  
J. Jorquera,  
Estudio del  
comportamento  
resistente del los  
puentes arco  
espaciales,  
2007, pg.43

N<sub>2</sub>  
www.aluscalae.it

.Struttura portante<sup>N1</sup>

.Pavimentazione<sup>N2</sup>

Assito di alluminio

.Parapetto<sup>N1</sup>

.Persone e mezzi

NTC 2008 (5.1.3.3.3)

pg.161

$$p_v = q_b C_e C_p C_d$$

$$p_v = 0.39 \cdot 1.8 \cdot 0.8 \cdot 1 = 0.56 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

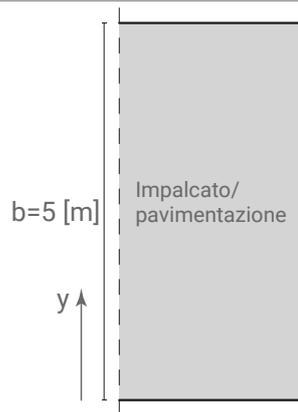
$$p_f = q_b C_e C_f$$

$$p_f = 0.39 \cdot 1.8 \cdot 0.04 = 0.028 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

$$F_i^{v.tang} = p_f b l_i$$

$$F_G^{v.tang} = 0.028 \cdot 5 \cdot 2.71 = 0.38 \text{ [kN]}$$

$$F_S^{v.tang} = 0.028 \cdot 5 \cdot 3.25 = 0.46 \text{ [kN]}$$



.Vento normale

NTC 2008 (3.3.4)

pg.39

.Vento tangente

NTC 2008 (3.3.5)

pg.40

$$q_s = q_{sk} C_e \mu_i C_t$$

$$q_s = 1.5 \cdot 1 \cdot 0.8 \cdot 1 = 1.2 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \right]$$

.Neve

NTC 2008 (3.4.1)

pg.44

$$W_i = [(q_{pa} + q_{st})b + q_{pr}] l_i$$

$$W_G = [(0.16 + 3)5 + 2]2.71 = 48.24 \text{ [kN]}$$

$$W_S = [(0.16 + 3)5 + 2]3.25 = 57.85 \text{ [kN]}$$

$$M_i = \frac{W_i}{g}$$

$$M_G = \frac{48.24}{9.81} = 4.92 \left[ \frac{\text{kN s}^2}{\text{m}} \right]$$

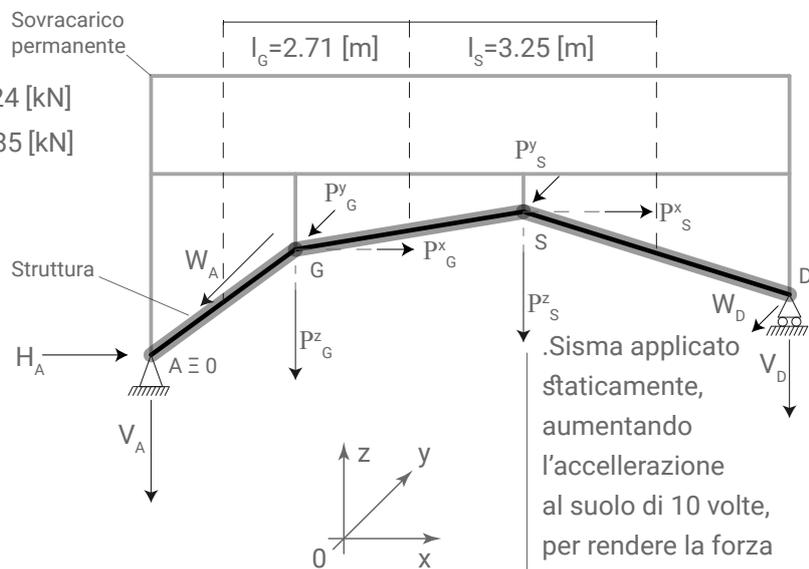
$$M_S = \frac{57.85}{9.81} = 5.90 \left[ \frac{\text{kN s}^2}{\text{m}} \right]$$

$$a_g = 0.3 \cdot 10 = 3 \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$F_i^{sisma} = a_g M_i$$

$$F_G^{sisma} = 3 \cdot 4.92 = 14.76 \text{ [kN]}$$

$$F_S^{sisma} = 3 \cdot 5.90 = 17.70 \text{ [kN]}$$



.Sisma applicato staticamente, aumentando l'accelerazione al suolo di 10 volte, per rendere la forza statica non irrisoria

$$P_i^{vert} = [(0.5q_{pe} + 0.5p_v + 0.5q_s + q_{pa} + q_{st})b + q_{pr}] l_i$$

$$P_G^{vert} = [(0.5 \cdot 5 + 0.5 \cdot 0.56 + 0.5 \cdot 1.2 + 0.16 + 3)5 + 2]2.71 = 94 \text{ [kN]}$$

$$P_S^{vert} = [(0.5 \cdot 5 + 0.5 \cdot 0.56 + 0.5 \cdot 1.2 + 0.16 + 3)5 + 2]3.25 = 113 \text{ [kN]}$$

$$P_i^{orizz} = 0.5F_i^{v.tang} + 0.5F_i^{sisma}$$

$$P_G^{orizz} = 0.5 \cdot 0.38 + 0.5 \cdot 14.76 = 8 \text{ [kN]}$$

$$P_S^{orizz} = 0.5 \cdot 0.46 + 0.5 \cdot 17.70 = 9 \text{ [kN]}$$

.Forze concentrate verticali ( $P_z$ )

.Forze concentrate orizzontali ( $P_x$ ) = ( $P_y$ )

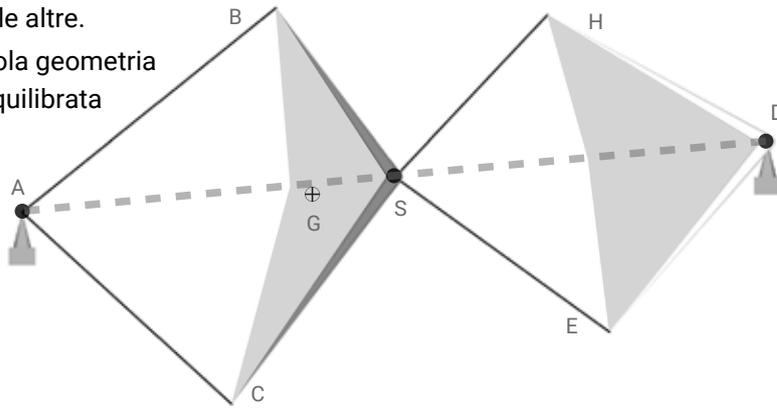
Sono uguali, perchè la loro area d'influenza è la stessa.



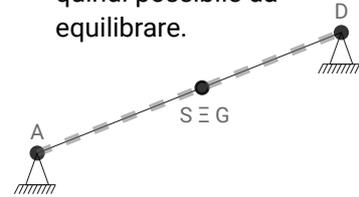
Disegno teorico dello schema geometrico (1) e della III-condition globale corrispondente

Per ogni movimento indipendente, almeno una fune deve poter reagire con sforzo di segno opposto alle altre.

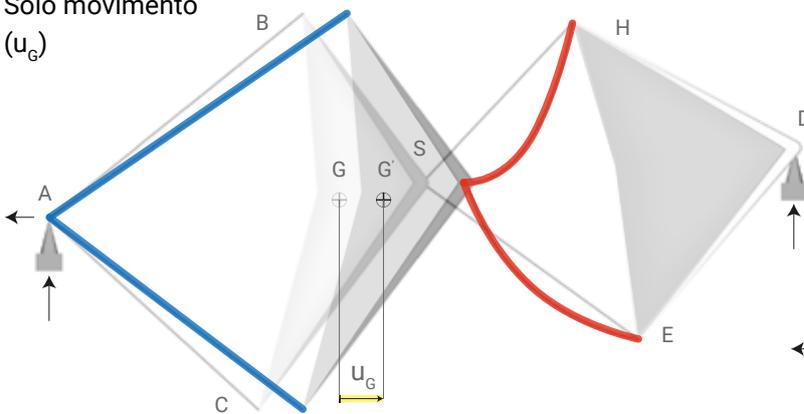
Sola geometria equilibrata



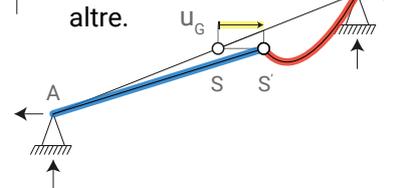
Schema geometrico indeformato con nodi vincolarti (A, D) e nodo caricato (S), tutti allineati, quindi possibile da equilibrare.



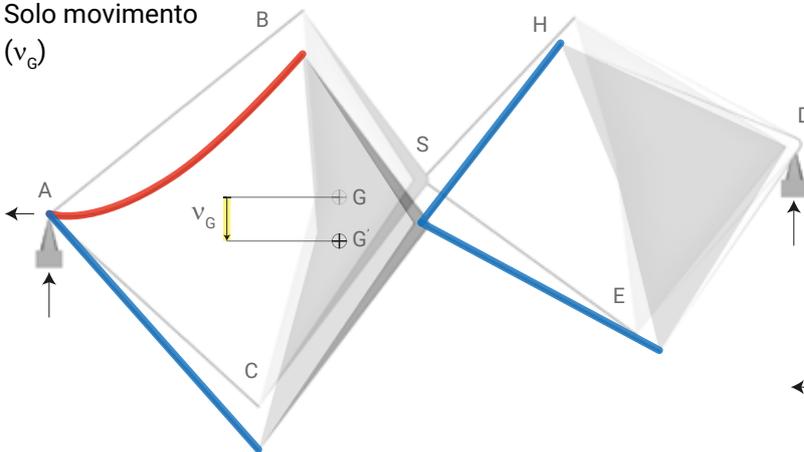
Solo movimento ( $u_G$ )



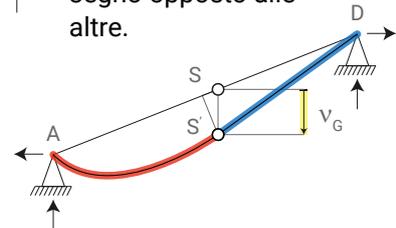
Schema statico deformato dalla sola traslazione orizzontale indipendente elastica ( $u_G$ ), equilibrato perchè le funi (AB, AC) reagiscono con sforzo di segno opposto alle altre.



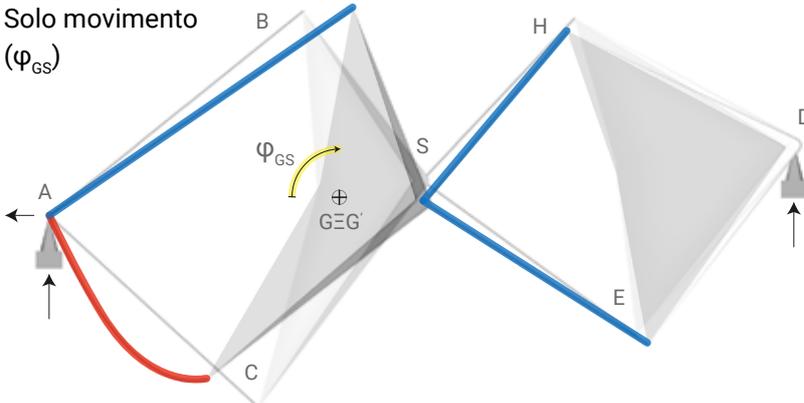
Solo movimento ( $v_G$ )



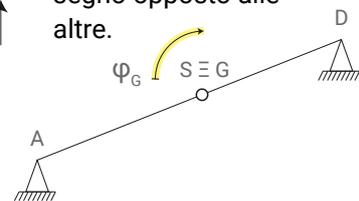
Schema statico deformato dalla sola traslazione verticale indipendente elastica ( $v_G$ ), equilibrato perchè la fune (AB) reagisce con sforzo di segno opposto alle altre.



Solo movimento ( $\varphi_{GS}$ )



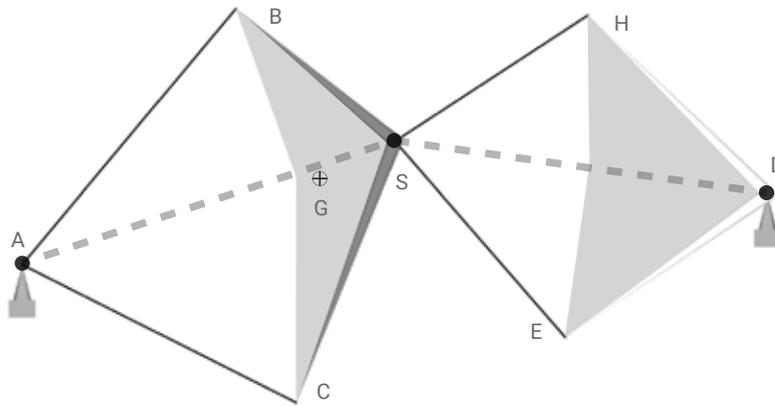
Schema statico deformato dalla sola rotazione piana indipendente elastica ( $\varphi_{GS}$ ), equilibrato perchè la fune (AC) reagisce con sforzo di segno opposto alle altre.



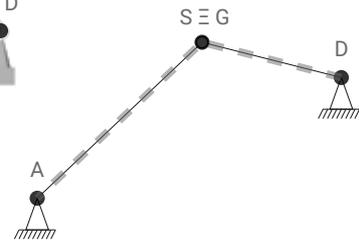
.Disegno sbagliato dello schema geometrico (1) e della III-condition globale corrispondente

Per almeno un movimento del sistema, tutte le funi sono obbligate a reagire con sforzo di compressione, requisito impossibile che provoca il collasso della struttura.

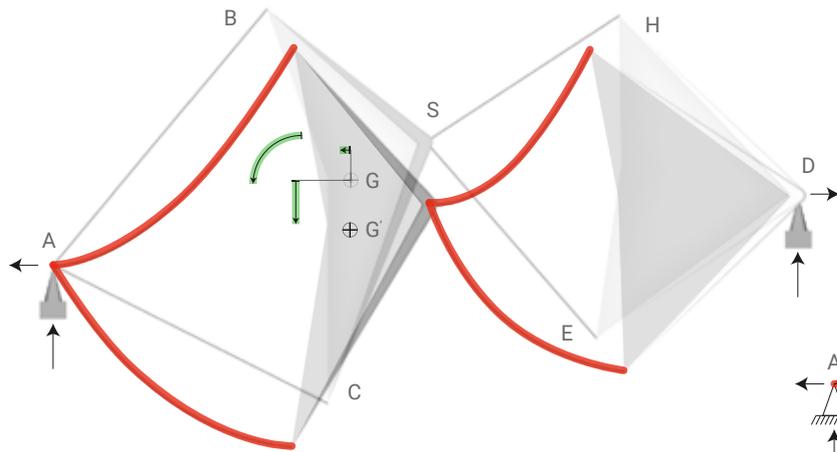
Sola geometria  
non equilibrata



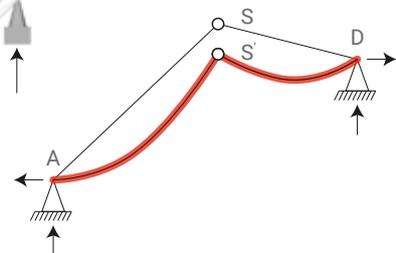
Schema geometrico indeformato, con nodi vincolarti (A, D) e nodo caricato (S), non allineati, quindi impossibile da equilibrare.



Meccanismo di collasso

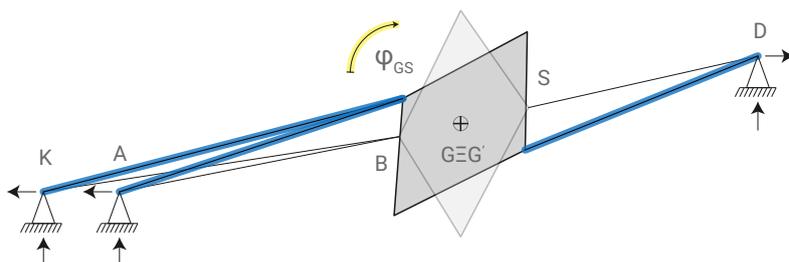


Schema statico collassato per il movimento cinematico composto del baricentro ( $u_G, v_G, \varphi_G$ ), non equilibrato perchè tutte le funi sono obbligate a reagire con sforzo di compressione.



.Disegno non opportuno dello schema geometrico (1)

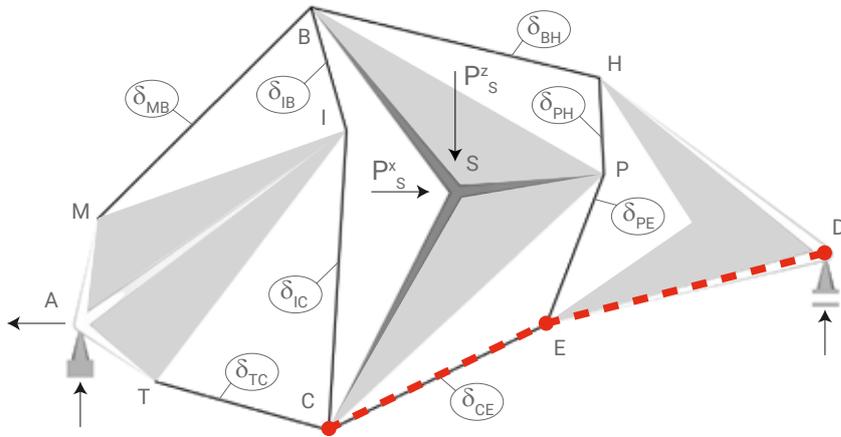
Per almeno un movimento indipendente elastico del sistema, tutte le funi sono obbligate a reagire con sforzo di trazione, requisito possibile ma non indicato, che entra in gioco solo per le rotazioni e non per le traslazioni. Cioè, quando il baricentro di un elemento infinitamente rigido (G), è allineato alle funi lungo i nodi di collegamento (B) ed (S), si generano delle III-condition locali (es: GS-SD). Pertanto, l'equilibrio globale finito non viene pregiudicato, ma il sistema subisce comunque, la caratteristica labilità infinitesima, che è meglio evitare sempre.



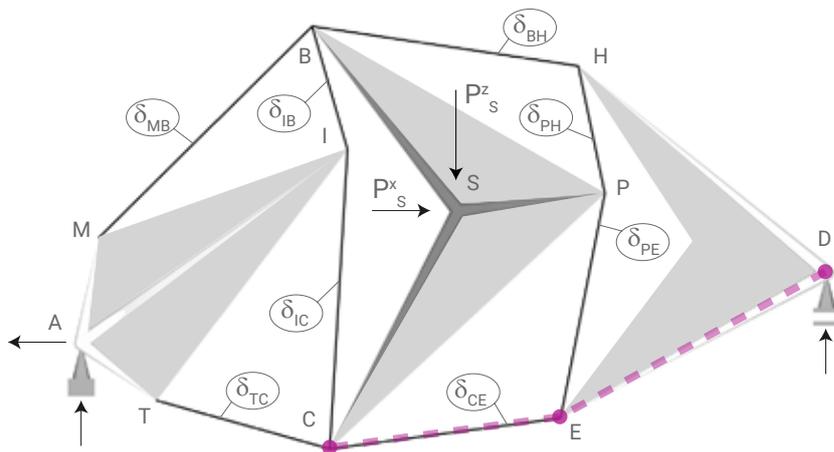
Funi chiamate a reagire in:

- COMPRESSIONE
- TRAZIONE

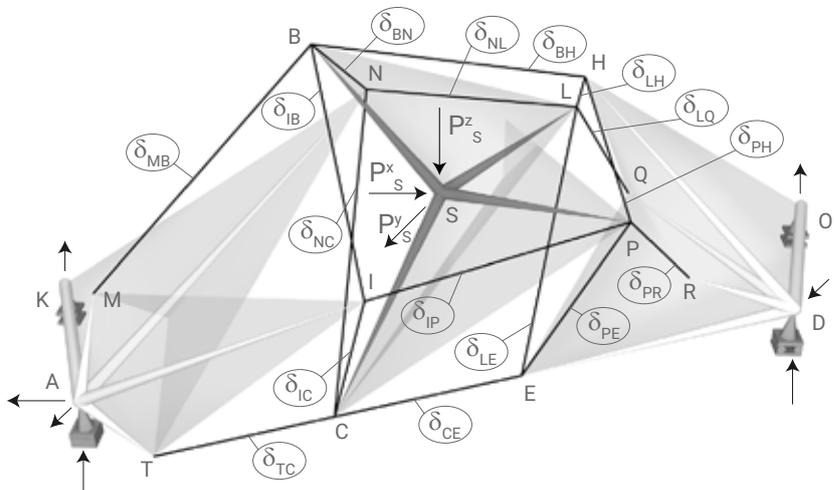
Modello strutturale (2)



F6 - disegno sbagliato  
 Disegno non corretto dello schema geometrico PIANO, per rischio di allineamento dei nodi (C), (E) e (D), tra cui potrebbe verificarsi la ill-condition locale degli elementi strutturali (CE) ed (ED) che sono tiranti. Essi inoltre, a causa della loro lieve curvatura verso l'alto, sono chiamati a reagire con sforzo normale di compressione, per carichi verticali verso il basso. Situazione non ottimale, in presenza di momento globale, che tende le fibre di sotto.

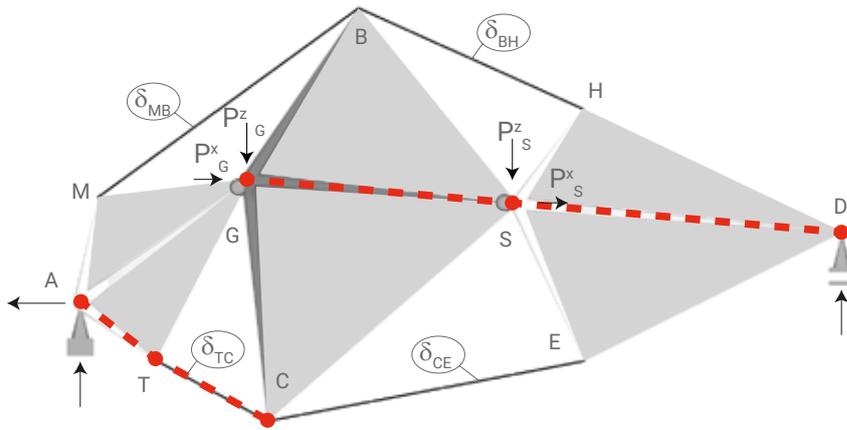


F7 - disegno giusto  
 Possibile disegno corretto dello schema geometrico piano, per disallineamento volontario dei nodi (C), (E) e (D), ottenuto tramite curvatura verso il basso, degli elementi strutturali (CE) ed (ED) che sono tiranti. Essi pertanto, sono chiamati a reagire con sforzo normale di trazione, per carichi verticali verso il basso. Situazione ottimale, in presenza di momento globale, che tende le fibre di sotto.

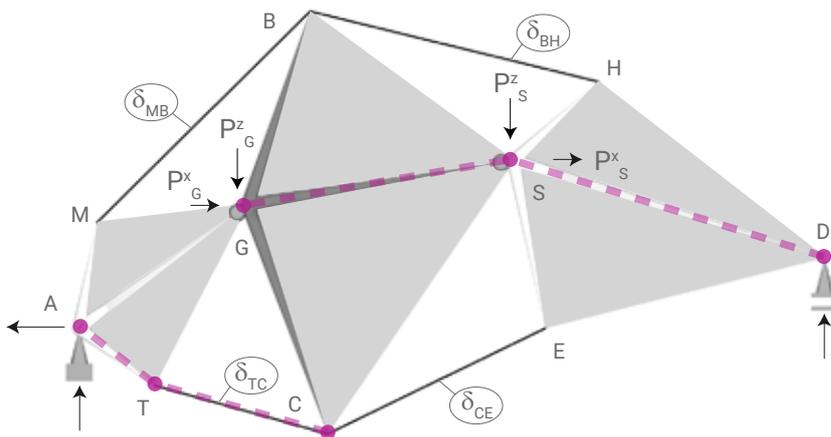


F8  
 Possibile disegno dello schema geometrico spaziale, eseguito tenendo conto delle considerazioni fatte, riguardo all'analogo caso piano.

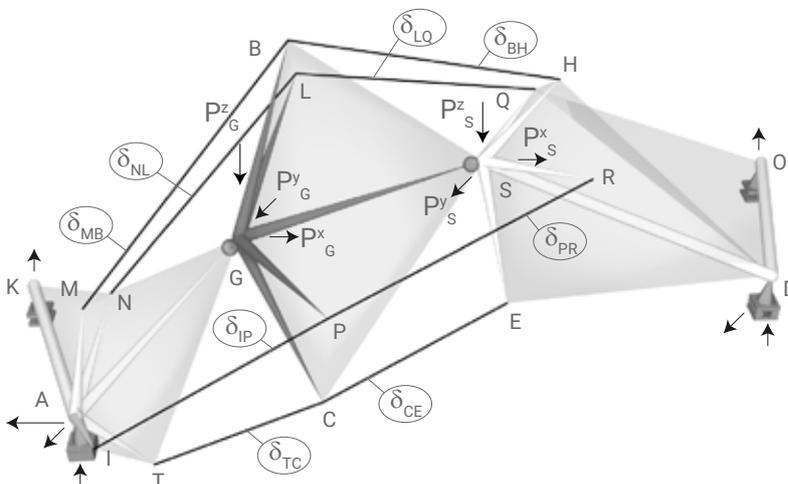
.Modello strutturale (3)



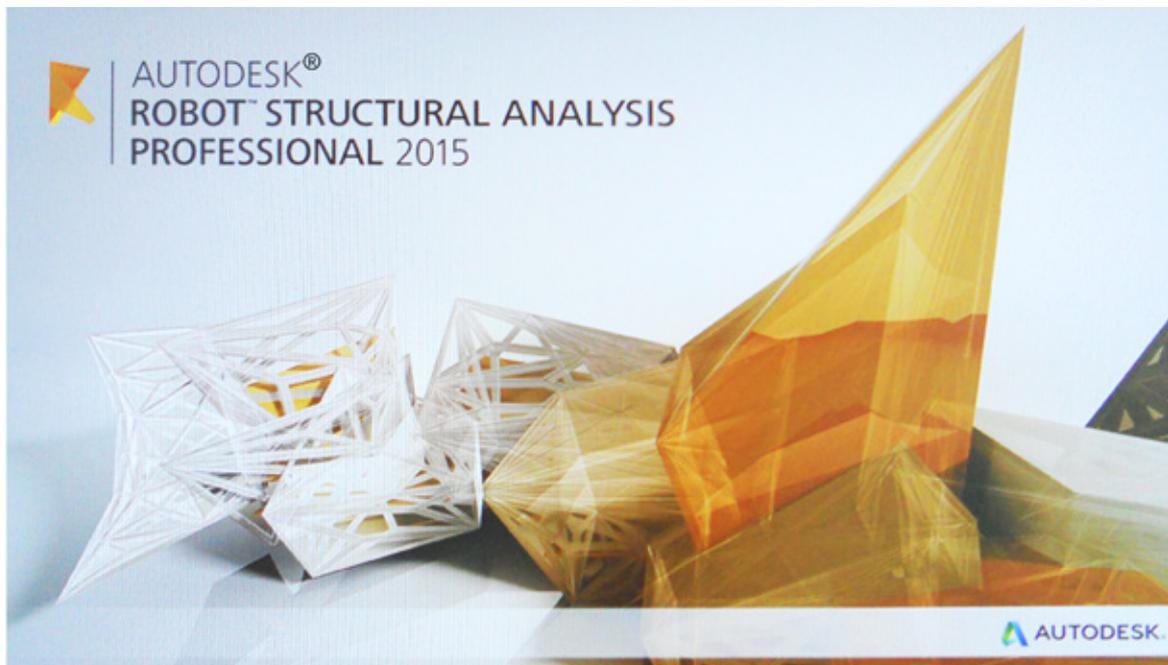
F9 - disegno sbagliato  
 Disegno non corretto dello schema geometrico PIANO, per allineamento dei nodi (G), (S) e (D), tra cui si verifica la ill-condition locale degli elementi strutturali (GS) ed (SD). Una situazione analoga inoltre, potrebbe verificarsi tra i nodi (A), (T) e (C).



F10 - disegno giusto  
 Possibile disegno corretto dello schema geometrico piano, per disallineamento volontario dei nodi (G), (S) e (D), ottenuto tramite curvatura verso l'alto, degli elementi strutturali (GS) ed (SD) che sono puntini. Essi pertanto, sono chiamati a reagire con sforzo normale di compressione, per carichi verticali verso il basso. Situazione ottimale, in presenza di momento globale, che tende le fibre di sotto.



F11  
 Possibile disegno dello schema geometrico spaziale, eseguito tenendo conto delle considerazioni fatte, riguardo all'analogo caso piano.



.Analisi scelta tra quelle sperimentate:

F.E.M. Elastica LINEARE

.Convenzione di segno sforzo normale (opposta a quella manuale):

(-) TRAZIONI , (+) COMPRESSIONI

.Verifiche di resistenza dello sforzo normale complessivo di ogni asta:

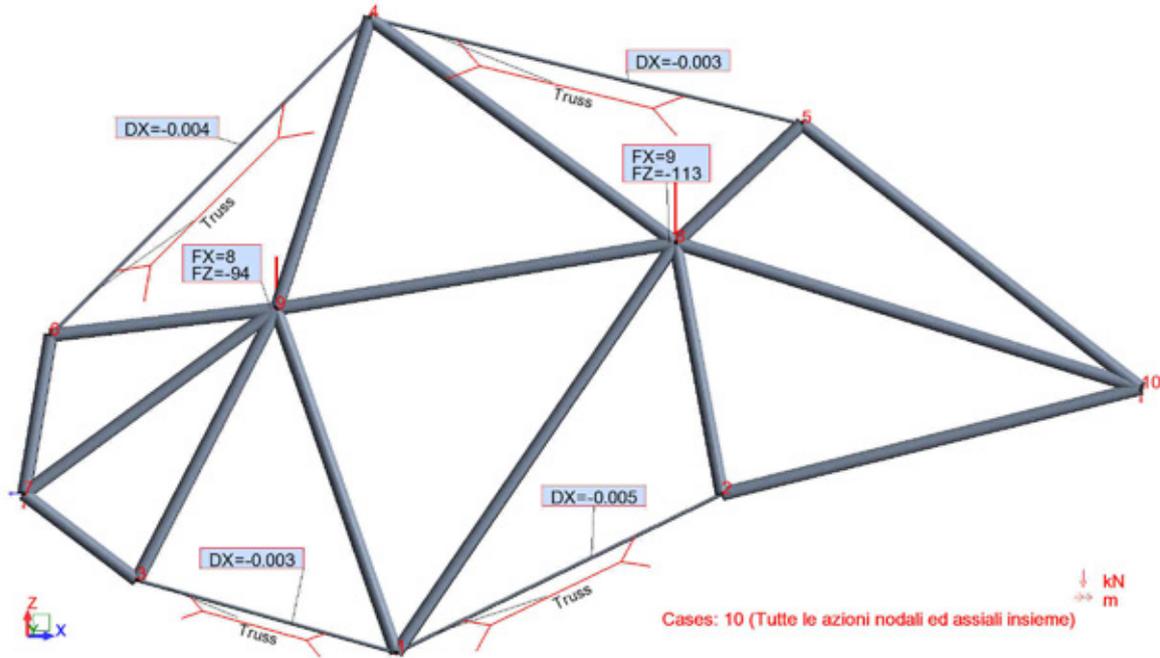
$$|S_{ij}| < S_{am} = (2/3)F_{R,d}$$

$$S_{ij} > 0$$

ANALISI AUTOMATICA DELLO SCHEMA STATICO  
TRAMITE IL SOFTWARE  
AUTODESK  
ROBOT STRUCTURAL ANALYSIS

SCHEMA STATICO (3) PIANO

.Modello di pendoli con sezione molto diversa (analisi elastica LINEARE)



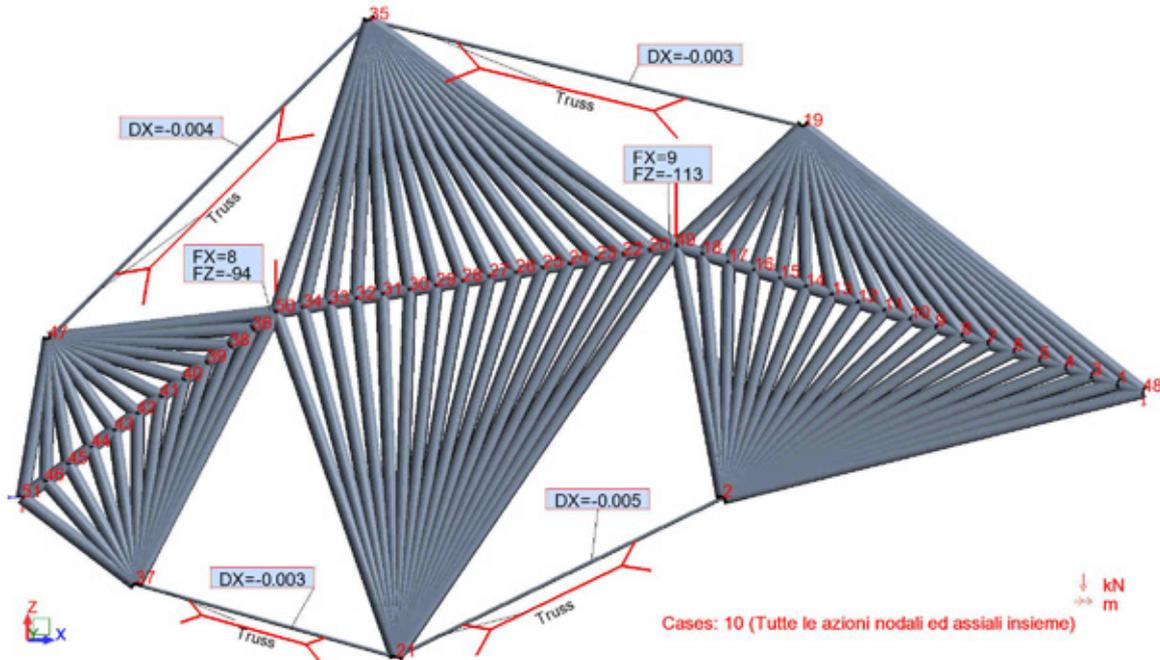
Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	7/ 10 (C)	-17	116
	10/ 10 (C)	0	91

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 10 (C)	-195
pendolo deformabile	1/ 2/ 10 (C)	-195
	2/ 3/ 10 (C)	-152
	2/ 1/ 10 (C)	-152
	3/ 4/ 10 (C)	-42
	3/ 5/ 10 (C)	-42
	4/ 6/ 10 (C)	-92
	4/ 4/ 10 (C)	-92

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (6-4)	24	-0,004	-92	330	220
	TC (3-1)	24	-0,003	-152	330	220
	BH (4-5)	24	-0,003	-42	330	220
	CE (1-2)	24	-0,005	-195	330	220

Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (mm)	UZ (mm)
	1/ 10 (C)	-0,3	-1,5
	2/ 10 (C)	0,9	-2,2
	3/ 10 (C)	-0,4	-0,6
	4/ 10 (C)	1,1	-1,5
	5/ 10 (C)	-0,4	-1,3
	6/ 10 (C)	0,6	-0,1
	7/ 10 (C)	0,0	0,0
	8/ 10 (C)	0,5	-2,3
	9/ 10 (C)	0,7	-1,2
	10/ 10 (C)	0,7	0,0

.Modello di pendoli molto fitti (analisi elastica LINEARE)



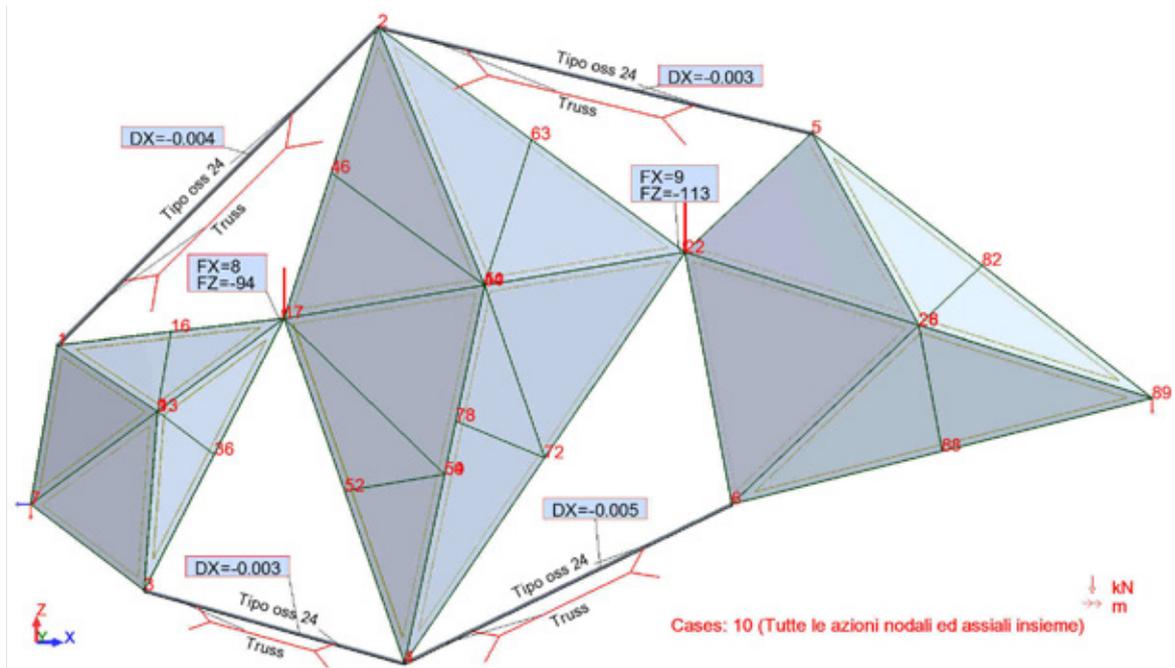
Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	48/ 10 (C)	0	91
	51/ 10 (C)	-17	116

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	139/ 47/ 10 (C)	-96
pendolo deformabile	139/ 35/ 10 (C)	-96
	140/ 35/ 10 (C)	-58
	140/ 19/ 10 (C)	-58
	141/ 37/ 10 (C)	-154
	141/ 21/ 10 (C)	-154
	142/ 21/ 10 (C)	-204
	142/ 2/ 10 (C)	-204

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (47-35)	24	-0,004	-96	330	220
	TC (37-21)	24	-0,003	-154	330	220
	BH (35-19)	24	-0,003	-58	330	220
	CE (21-2)	24	-0,005	-204	330	220

Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (mm)	UZ (mm)
	2/ 10 (C)	1,2	-1,8
	19/ 10 (C)	-0,0	-1,5
	21/ 10 (C)	-0,2	-1,3
	35/ 10 (C)	1,0	-1,2
	37/ 10 (C)	-0,3	-0,5
	47/ 10 (C)	0,6	-0,1
	48/ 10 (C)	0,9	0,0
	49/ 10 (C)	0,5	-1,9
	50/ 10 (C)	0,7	-1,1
	51/ 10 (C)	0,0	0,0

.Modello di gusci e di pendoli (analisi elastica LINEARE)

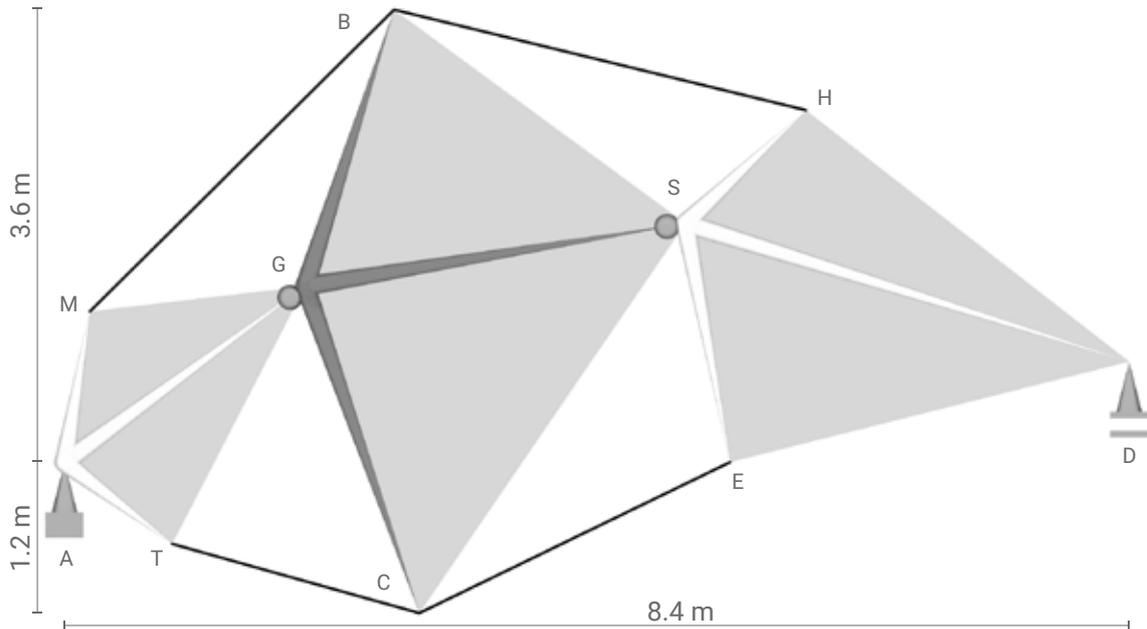


Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	7/ 10 (C)	-17	116
	89/ 10 (C)	-0	91

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	25/ 1/ 10 (C)	-92
pendolo	25/ 2/ 10 (C)	-92
	26/ 3/ 10 (C)	-152
	26/ 4/ 10 (C)	-152
	27/ 2/ 10 (C)	-55
	27/ 5/ 10 (C)	-55
	28/ 4/ 10 (C)	-203
	28/ 6/ 10 (C)	-203

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (1-2)	24	-0,004	-92	330	220
	TC (3-4)	24	-0,003	-152	330	220
	BH (2-5)	24	-0,003	-55	330	220
	CE (4-6)	24	-0,005	-203	330	220

.Dimensioni e considerazioni sulla deformata



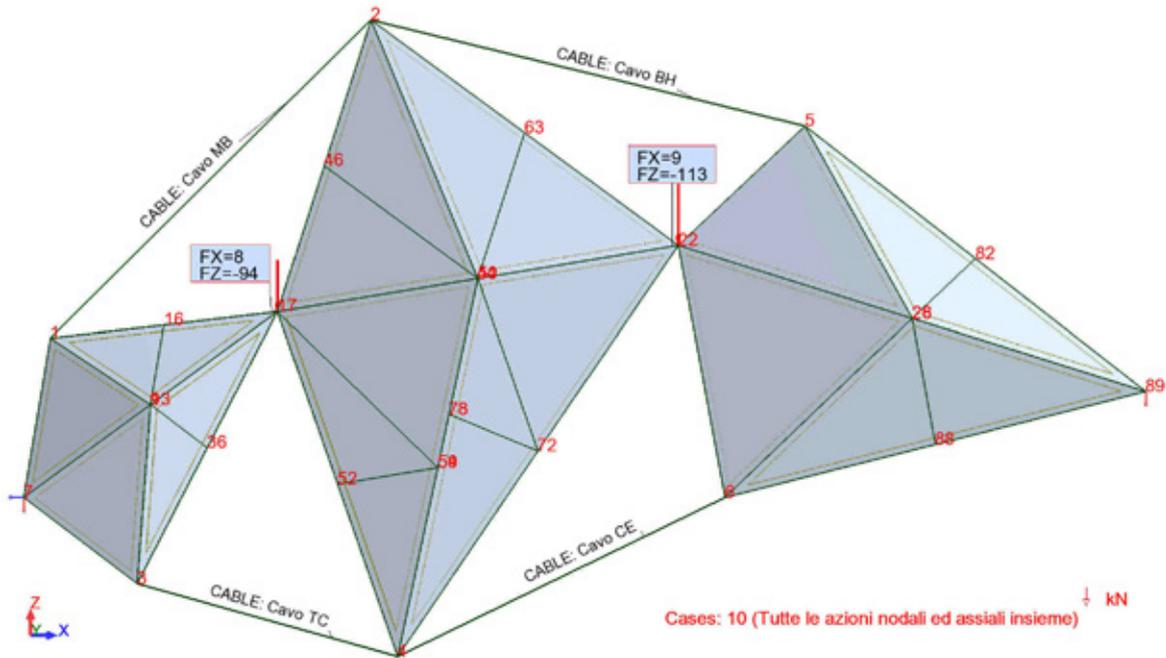
Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (mm)	UZ (mm)
	1/ 10 (C)	0,6	-0,1
	2/ 10 (C)	1,0	-1,4
	3/ 10 (C)	-0,2	-0,5
	4/ 10 (C)	-0,1	-1,3
	5/ 10 (C)	-0,1	-1,5
	6/ 10 (C)	1,2	-1,9
	7/ 10 (C)	0,0	0,0
	17/ 10 (C)	0,5	-1,1
	22/ 10 (C)	0,5	-2,0
	89/ 10 (C)	1,0	0,0

Si è scelto di iniziare l'analisi strutturale dei modelli, partendo dal sistema (3) piano, perchè essendo reticolare misto, risulta il più simile tra quelli oggetto di questa tesi, alle strutture rigide tradizionali, trattate in tecnica delle costruzioni. Pertanto, la risoluzione dello schema statico (3) piano, è stata condotta in cinque modi diversi, con lo scopo di trovare un modello strutturale valido, anche per gli altri sistemi da risolvere. Con piacevole sorpresa, i risultati dell'analisi automatica riscontrati nel modello di pendoli con sezione molto diversa, nel modello di pendoli molto fitti e nel modello di gusci e pendoli, sono molto simili tra loro. Invece, i risultati relativi al modello manuale lineare<sup>N1</sup>, affrontato con le equazioni di equilibrio, sono più simili a quelli trovati nel modello automatico non lineare, affrontato in seguito<sup>N2</sup>. La deformata invece, risulta per tutti analogamente, così impercettibile, da non necessitare nemmeno il suo tracciamento, caratteristica del sistema (3) piano, unica tra tutti i modelli trattati.

N1  
Risultati dell'analisi manuale  
condotta sul sistema (3)  
piano  
pg. 235 - 237

N2  
Risultati dell'analisi  
automatica non lineare  
condotta sul sistema (3)  
piano  
pg. 254 - 255

.Modello di gusci e di funi (analisi elastica NON LINEARE)



Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	7/ 10	-17	116
	89/ 10	-0	91

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	25/ 1/ 10	-69
pendolo	25/ 2/ 10	-69
	26/ 3/ 10	-141
	26/ 4/ 10	-141
	27/ 2/ 10	-32
	27/ 5/ 10	-32
	28/ 4/ 10	-189
	28/ 6/ 10	-189

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	OSS-D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (1-2)	24	-0,004	-69	330	220
	TC (3-4)	24	-0,003	-141	330	220
	BH (2-5)	24	-0,003	-32	330	220
	CE (4-6)	24	-0,005	-189	330	220

.Condizioni di carico

Case	Case name	List	Load values	Analysis type
1	PzG	17	FZ=-94(kN)	Static - Nonlin
2	PxG	17	FX=8(kN)	Static - Nonlin
3	PzS	22	FZ=-113(kN)	Static - Nonlin
4	PxS	22	FX=9(kN)	Static - Nonlin
5	PP escluso	1to28	PZ Negative Factor=1,0	Static - Nonlin

Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (mm)	UZ (mm)
	1/ 10	1,1	-0,2
	2/ 10	1,9	-2,2
	3/ 10	-0,5	-0,8
	4/ 10	0,0	-2,2
	5/ 10	0,3	-2,4
	6/ 10	2,6	-3,0
	7/ 10	0,0	0,0
	17/ 10	1,1	-1,9
	22/ 10	1,2	-3,2
	89/ 10	2,0	0,0

.Confronto dei metodi sperimentati<sup>Tab 1</sup>

Come ci si aspettava, i valori dello sforzo normale dei pendoli, sono leggermente diversi, a seconda del metodo usato e risultano in ordine crescente, da quello più raffinato a quello meno raffinato. Cioè, il modello manuale D.A.M. lineare e quello automatico F.E.M. non lineare, per motivi diversi, sono i più raffinati e quindi forniscono valori dei risultati, leggermente inferiori a quelli ottenuti dal modello F.E.M. lineare. Come detto in precedenza, il metodo manuale, anche se adotta la semplificazione per piccoli movimenti ( $\cos\varphi\sim 1$ ;  $\sin\varphi\sim\varphi$ ) è molto preciso, perchè si avvale di equazioni esatte<sup>N3</sup>. Viceversa, il metodo automatico, anche avvalendosi di equazioni non esatte, ma approssimate agli elementi finiti, non adotta alcuna semplificazione per piccoli movimenti. Se poi esso, applica pure l'analisi, in regime non lineare di carico/deformata, caratteristico delle funi, risulta ovviamente, ancor più preciso, rispetto alla risoluzione manuale<sup>N4</sup>. Tuttavia, si è scelto di condurre l'analisi strutturale dei modelli restanti, unicamente tramite il metodo automatico F.E.M. lineare, per varie motivazioni. In primo luogo, l'analisi manuale lineare e quella automatica non lineare, risultano entrambe molto dispendiose. In secondo luogo, il livello di progetto relativo a questa tesi, è approssimato e quindi può essere trattato, con un altrettanto approssimato stato di calcolo. In terzo luogo, essendo il motivo di queste analisi preliminari, la ricerca della deformata da usare come nuovo schema geometrico definitivo, è opportuno che il movimento dei nodi, avvenga in maniera palese e quindi, meglio se approssimato per eccesso e non per difetto. Infine, tutti i tre metodi sperimentati, danno uno stato di deformazione molto simile, pertanto appare lecito, adottare il più semplice.

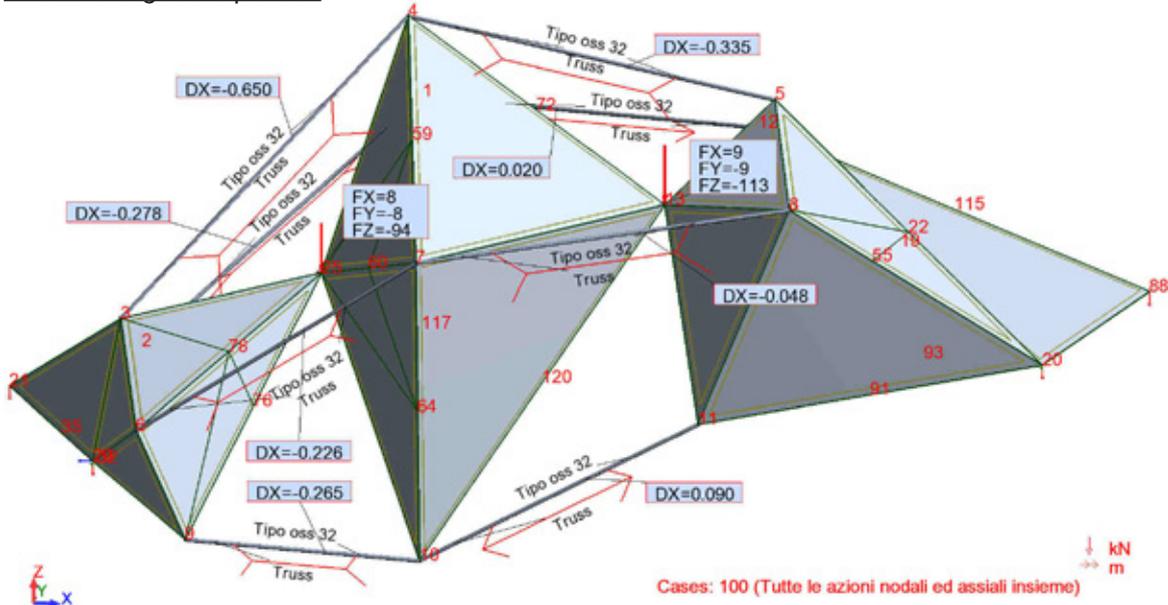
Metodo Modello	Pendolo (IJ)	Manuale Telai/PENDOLI	Automatico Gussci/FUNI	Automatico Gussci/ASTE
Analisi elastica	Tab 1	D.A.M lineare	F.E.M. NON lineare	F.E.M. lineare
Sforzo totale (kN)	MB	-83	-69	-92
	TC	-117	-141	-152
	BH	-72	-32	-55
(-)Trazione	CE	-120	-189	-203

N3  
Capitolo:  
'Analisi manuale della struttura'  
Paragrafo:  
'Studio dei cinematismi'  
pg. 185

N4  
Capitolo:  
'Ipotesi sulle tensostrutture miste discrete'  
pg. 52-59

SCHEMA STATICO (3) SPAZIALE

.Modello di gusci e pendoli

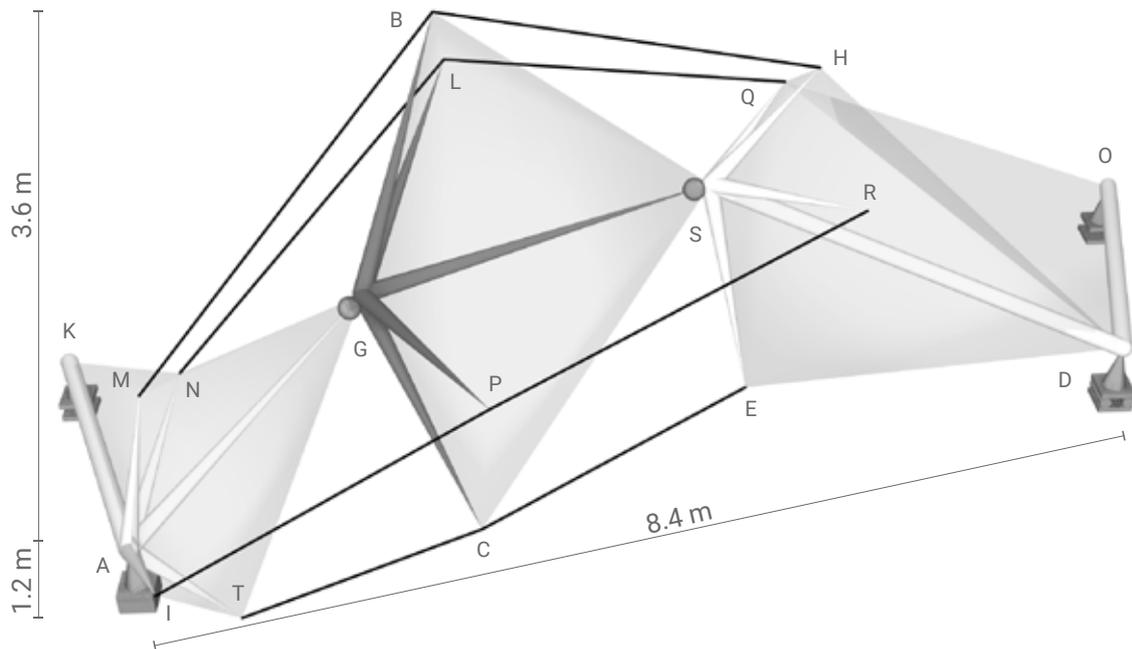


Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	20/ 100 (C)	-0	11	7
	21/ 100 (C)	-0	0	27
	29/ 100 (C)	-17	6	93
	88/ 100 (C)	0	-0	80

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 100 (C)	-30
pendolo	1/ 2/ 100 (C)	-30
	2/ 3/ 100 (C)	-26
	2/ 4/ 100 (C)	-26
	3/ 4/ 100 (C)	-40
	3/ 5/ 100 (C)	-40
	4/ 6/ 100 (C)	-21
	4/ 7/ 100 (C)	-21
	5/ 7/ 100 (C)	-200
	5/ 8/ 100 (C)	-200
	6/ 9/ 100 (C)	-89
	6/ 10/ 100 (C)	-89
	7/ 10/ 100 (C)	-295
	7/ 11/ 100 (C)	-295
	8/ 12/ 100 (C)	-360
	8/ 1/ 100 (C)	-360

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (3-4)	32	-0,650	-26	588	392
	TC (9-10)	32	-0,265	-89	588	392
	NL (2-1)	32	-0,278	-30	588	392
	IP (6-7)	32	-0,226	-21	588	392
	BH (4-5)	32	-0,003	-40	588	392
	CE (10-11)	32	0,090	-295	588	392
	LQ (1-12)	32	0,020	-360	588	392
	PR (7-8)	32	-0,048	-200	588	392

.Dimensioni e considerazioni sulla deformata



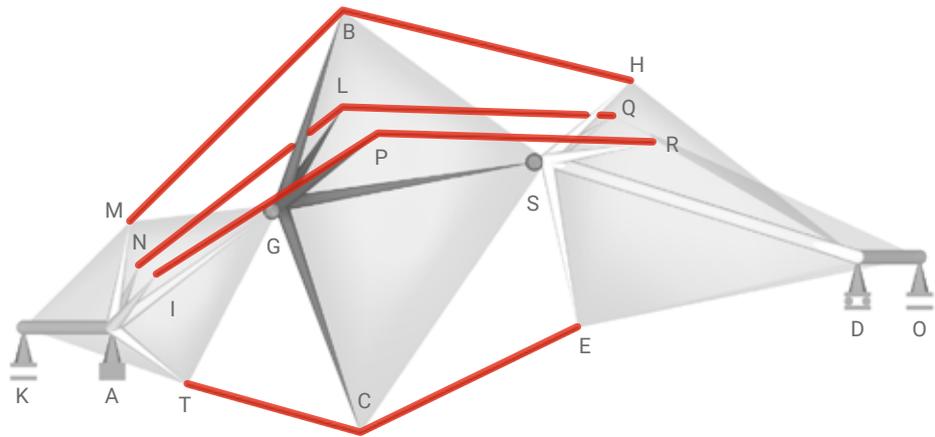
Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (cm)	UY (cm)	UZ (cm)
	1/ 100 (C)	84,7	429,7	-746,7
	2/ 100 (C)	-16,4	55,4	-103,7
	3/ 100 (C)	108,6	72,3	-48,2
	4/ 100 (C)	-72,4	692,4	-436,2
	5/ 100 (C)	19,7	141,0	-196,6
	6/ 100 (C)	151,6	65,0	-7,3
	7/ 100 (C)	-136,4	336,7	383,8
	8/ 100 (C)	16,9	118,0	-158,4
	9/ 100 (C)	-63,8	30,0	-92,8
	10/ 100 (C)	257,5	-464,6	-181,4
	11/ 100 (C)	169,0	115,4	-220,4
	12/ 100 (C)	66,9	142,0	-218,9
	13/ 100 (C)	63,2	163,9	-252,6
	20/ 100 (C)	91,0	0,0	0,0
	21/ 100 (C)	-180,1	-72,0	0,0
	25/ 100 (C)	60,6	204,3	-301,0
	29/ 100 (C)	0,0	0,0	0,0
	88/ 100 (C)	198,1	-28,8	0,0

Diversamente dall'analogia versione piana, il modello (3) spaziale, nella prima configurazione di tentativo, fornisce risultati chiaramente poco soddisfacenti, per un evidente sbaglio nel tracciamento della geometria iniziale. Cioè, le verifiche di resistenza risultano soddisfatte, solo a fronte di improponibili deformazioni assiali, impresse dalla pretensione. Come se non bastasse inoltre, i pendoli (CE) ed (LQ), devono addirittura essere allungati anzichè accorciati. Anche la deformata infine, risulta ovviamente priva di significato, fornendo spostamenti nodali dell'ordine del metro. E' doveroso pertanto, ottimizzare il modello strutturale, modificandone lo schema geometrico<sup>N5</sup>.

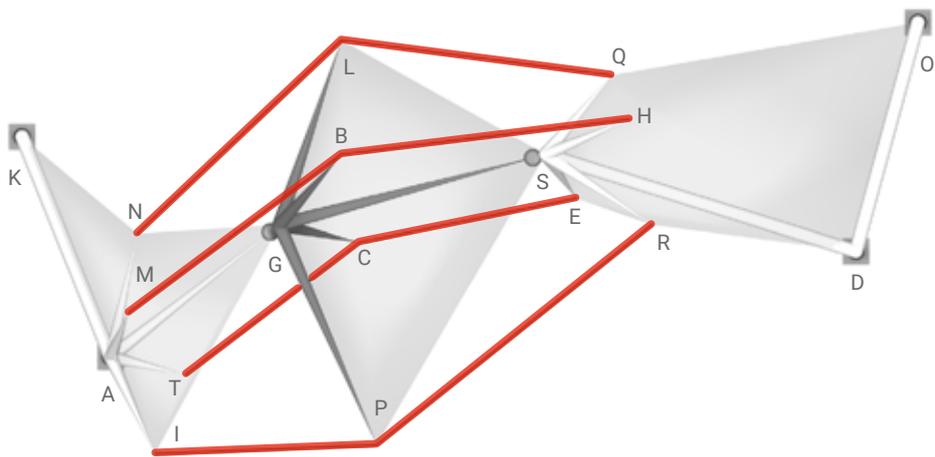
N5  
Possibile ottimizzazione del modello strutturale (3) spaziale  
F1-F6  
pg.258,259

.Modello strutturale (3) grezzo prima dell'analisi

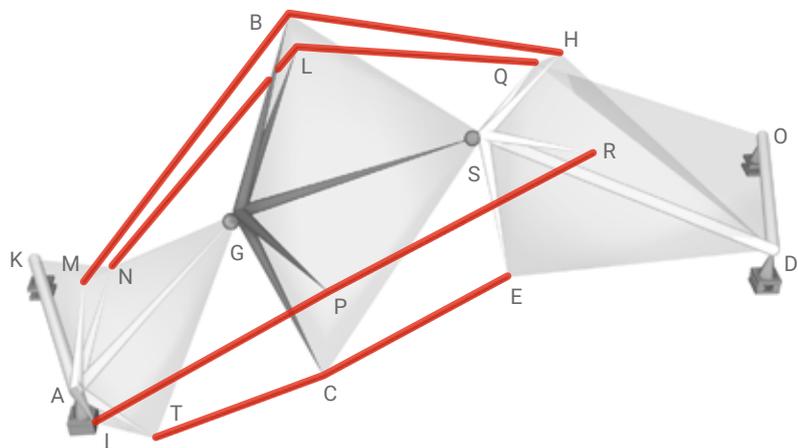
F1  
Prospetto  
longitudinale



F2  
Pianta

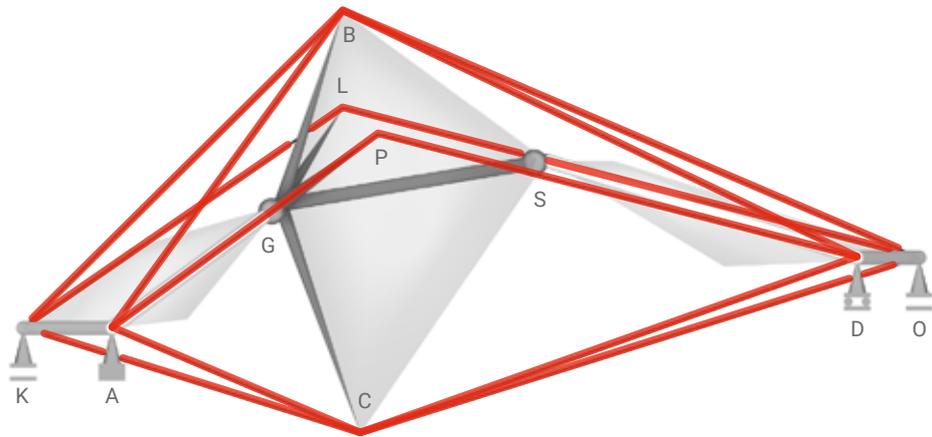


F3  
Prospettiva

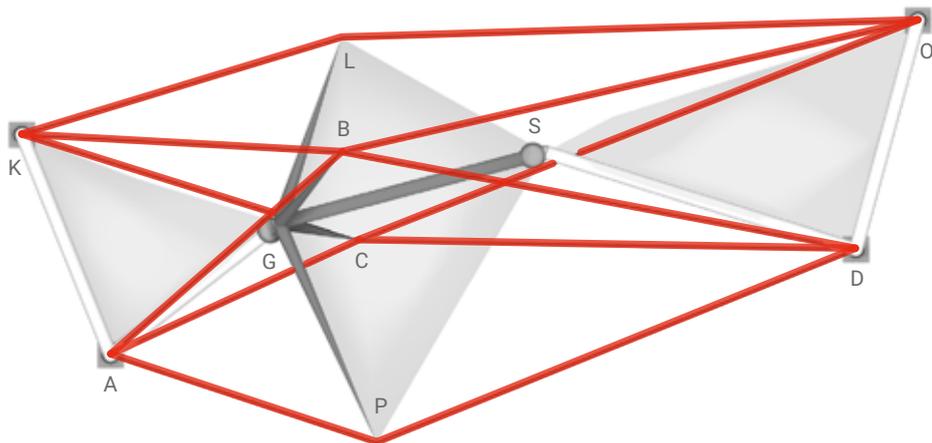


.Modello strutturale (3) ottimizzato dopo l'analisi

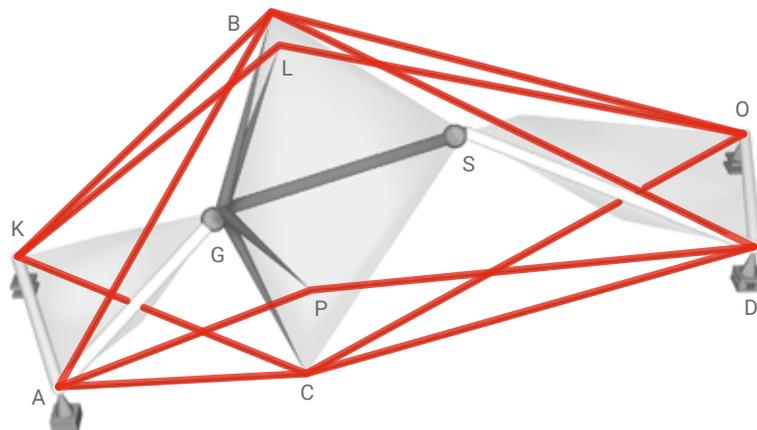
F4  
Prospetto  
longitudinale



F5  
Pianta

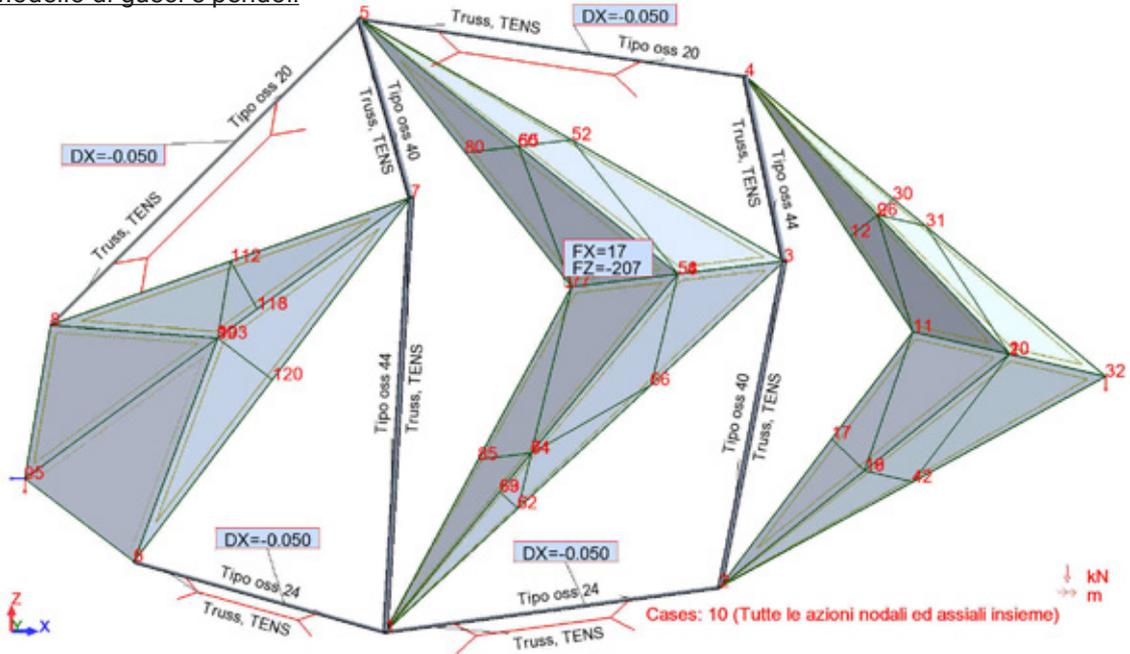


F6  
Prospettiva



SCHEMA STATICO (2) PIANO

Modello di gusci e pendoli

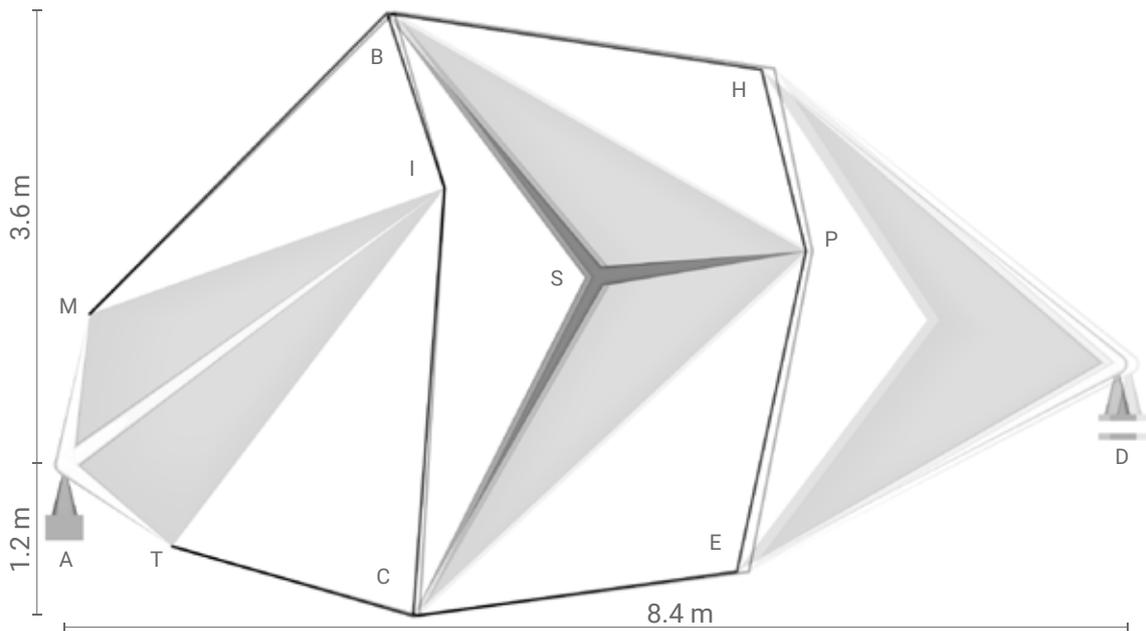


Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	32/ 10	0	108
	95/ 10	-17	99

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 10	-160
pendolo	1/ 2/ 10	-160
	2/ 3/ 10	-576
	2/ 2/ 10	-576
	3/ 4/ 10	-679
	3/ 3/ 10	-679
	4/ 5/ 10	-90
	4/ 4/ 10	-90
	5/ 6/ 10	-142
	5/ 1/ 10	-142
	6/ 7/ 10	-680
	6/ 1/ 10	-680
	7/ 5/ 10	-564
	7/ 7/ 10	-564
	8/ 8/ 10	-107
	8/ 5/ 10	-107

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{i,j}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (8-5)	20	-0,050	-107	230	153
	TC (6-1)	24	-0,050	-142	330	220
	BH (5-4)	20	-0,050	-90	230	153
	CE (1-2)	24	-0,050	-160	450	220
	BI (5-7)	40	0	-564	921	614
	IC (7-1)	44	0	-680	1115	743
	HP (4-3)	44	0	-679	1115	743
	PE (3-2)	40	0	-576	921	614

.Dimensioni e considerazioni sulla deformata



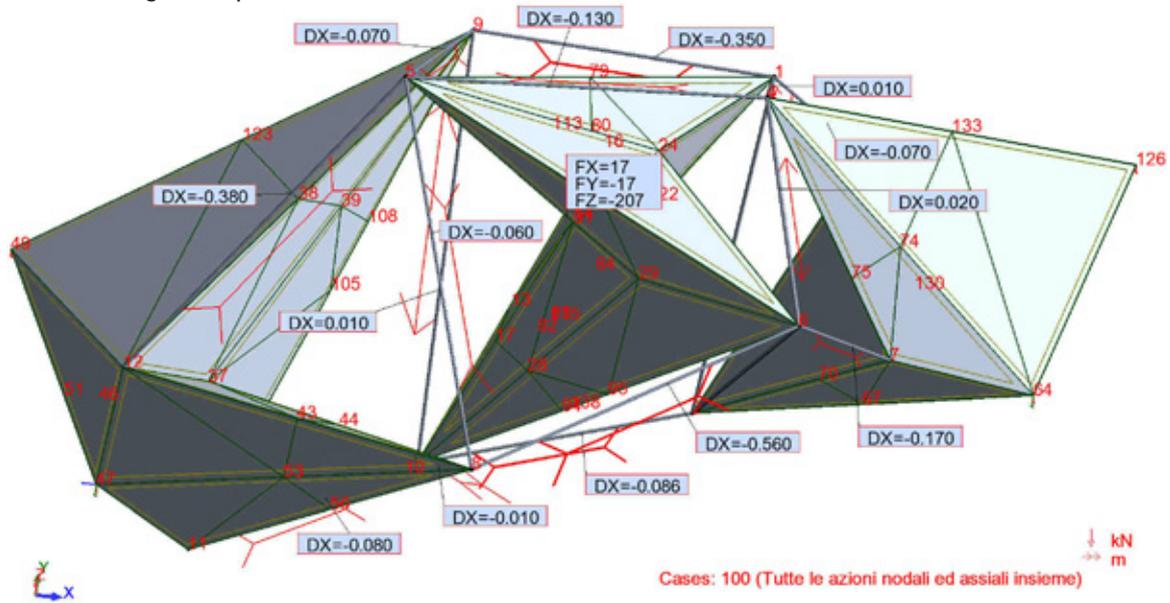
Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (cm)	UZ (cm)
	1/ 10	-4,9	-0,2
	2/ 10	-9,5	0,2
	3/ 10	-5,1	-0,1
	4/ 10	-10,1	-0,9
	5/ 10	-5,5	-0,9
	6/ 10	0,1	0,1
	7/ 10	-0,2	0,2
	8/ 10	-0,1	0,0
	11/ 10	-9,4	-0,1
	32/ 10	-9,4	0,0
	77/ 10	-5,0	-0,4
	95/ 10	0,0	0,0

Nel sistema (2) piano, come si può notare dalla verifica di resistenza, i pendoli pseudo orizzontali (MB), (TC), (BH) e (CE), hanno sforzi normali simili agli analoghi del sistema (3). Quelli pseudo verticali invece, devono sopportare sforzi, circa 5 volte più grandi. Pertanto, si capisce molto chiaramente che, nonostante il sistema (2) sia disegnato correttamente, senza sbagli geometrici e presenti una deformata del tutto accettabile, di per sè, risulta inutilmente molto dispendioso, rispetto al sistema (3). Tale difetto, risiede proprio nella necessità intrinseca, di sopperire alla mancanza della cerniera fisica, tra due pezzi infinitamente rigidi contigui. Quindi, le connessioni Tensegrity, risultano inevitabilmente poco inclinate tra loro e quindi, vicine alla III-condition<sup>N6</sup>. Occorre notare infine, l'assenza volontaria di pretensione nei pendoli pseudo verticali, poichè produrrebbe un ulteriore avvicinamento alla III-condition, non necessario.

N6  
Modello architettonico del sistema (2) in prospetto verticale  
pg.140,141

SCHEMA STATICO (2) SPAZIALE

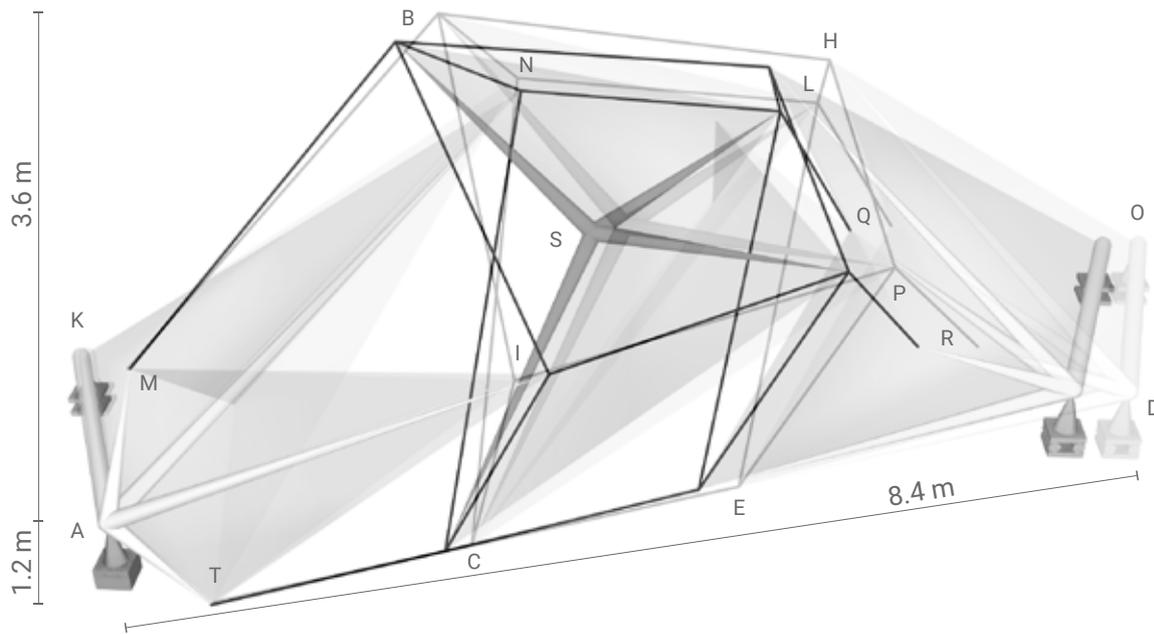
.Modello di gusci e pendoli



Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	47/ 100 (C)	-17	4	92
	49/ 100 (C)	0	-0	16
	64/ 100 (C)	-0	13	1
	126/ 100 (C)	0	0	98

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	MB (12-5)	32	-0,380	-23	588	392
	TC (11-10)	32	-0,080	-145	588	392
	BH (5-4)	32	-0,130	-100	588	392
	CE (10-2)	32	-0,086	-140	588	392
	NL (9-1)	32	-0,350	-22	588	392
	LQ (1-3)	32	-0,070	-47	588	392
	IP (8-6)	32	-0,560	-1	588	392
	PR (6-7)	32	-0,170	-3	588	392
	BI (5-8)	32	-0,060	-182	588	392
	IC (8-10)	32	-0,010	-62	588	392
	BN (5-9)	32	-0,070	-205	588	392
	NC (9-10)	32	0,010	-277	588	392
	HL (4-1)	40	0,010	-579	921	614
	LE (1-2)	32	0	-388	588	392
	HP (4-6)	40	0,020	-570	921	614
	PE (6-2)	32	0	-225	588	392

Dimensioni e considerazioni sulla deformata



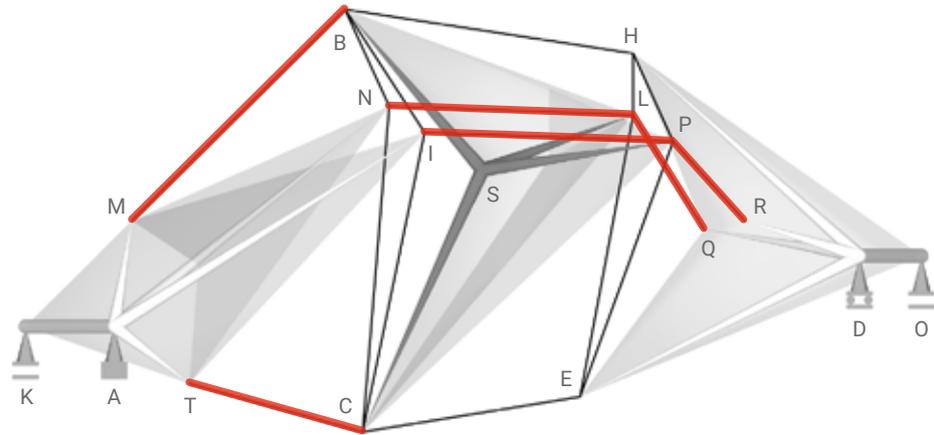
Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (cm)	UY (cm)	UZ (cm)
	1/ 100 (C)	-32,2	13,6	-15,0
	2/ 100 (C)	-36,7	11,5	-13,9
	3/ 100 (C)	-37,3	7,9	-10,4
	4/ 100 (C)	-49,8	13,7	-13,2
	5/ 100 (C)	-40,2	18,0	-32,4
	6/ 100 (C)	-33,5	15,0	-13,4
	7/ 100 (C)	-47,6	6,0	-5,5
	8/ 100 (C)	20,9	34,4	-16,8
	9/ 100 (C)	2,3	6,6	-15,5
	10/ 100 (C)	-27,5	13,9	-19,7
	11/ 100 (C)	-2,9	0,7	-4,0
	12/ 100 (C)	1,4	1,6	-1,0
	14/ 100 (C)	-28,7	30,7	-24,0
	47/ 100 (C)	0,0	0,0	0,0
	49/ 100 (C)	-5,1	-1,8	0,0
	64/ 100 (C)	-45,9	0,0	0,0
	126/ 100 (C)	-34,7	-3,0	0,0

In maniera simile al modello (3) spaziale, la prima configurazione di tentativo del (2), fornisce risultati chiaramente negativi, per un evidente sbaglio nel tracciamento della geometria iniziale. Cioè, le verifiche di resistenza risultano soddisfatte, solo imponendo degli allungamenti nei pendoli (NC), (HL) ed (HP). Essi invece, dovrebbero risultare privi di qualunque deformazione assiale impressa, in quanto sono connessioni Tensegrity, al pari del caso piano. Il risultato più indicativo tuttavia, è il valore dello sforzo normale dei pendoli (IP) e (PR). Esso cioè, nonostante sia correttamente di trazione, risulta vicinissimo allo zero. Tali pendoli quindi, rischiano di andare in compressione, suggerendo fortemente l'inversione totale della loro inclinazione reciproca, in sede di modifica dello schema geometrico, che risulta quindi necessaria<sup>N7</sup>. La deformata infine, contrariamente al sistema (3), risulta leggermente abbondante, ma comunque attendibile.

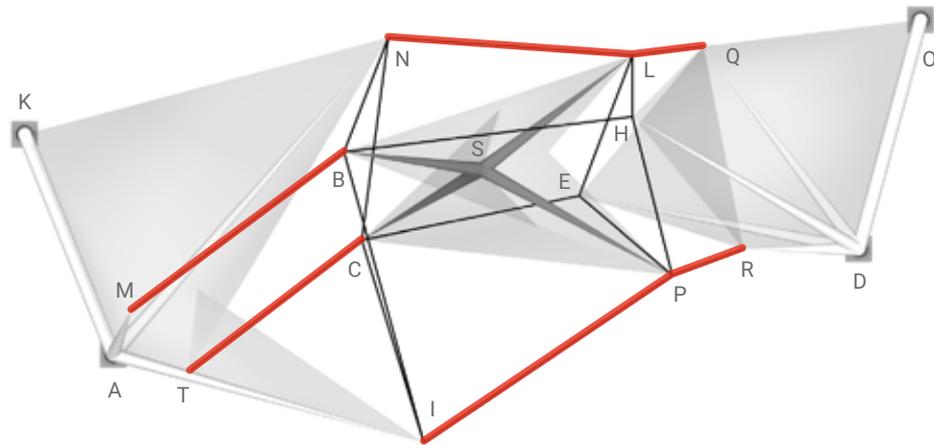
N7  
Possibile ottimizzazione del modello strutturale (2) spaziale  
F7-F12  
pg.264,265

.Modello strutturale (2) grezzo prima dell'analisi

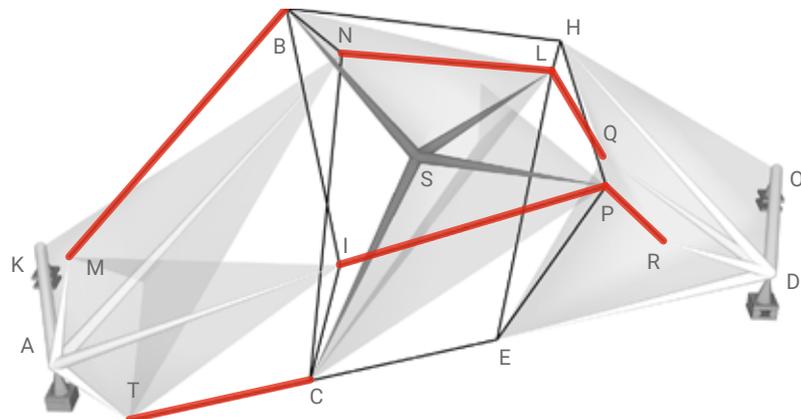
F7  
Prospetto  
longitudinale



F8  
Pianta

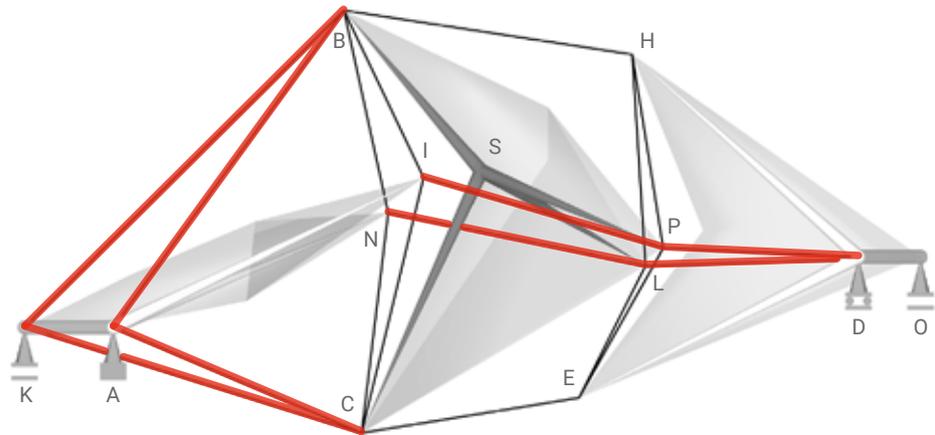


F9  
Prospettiva

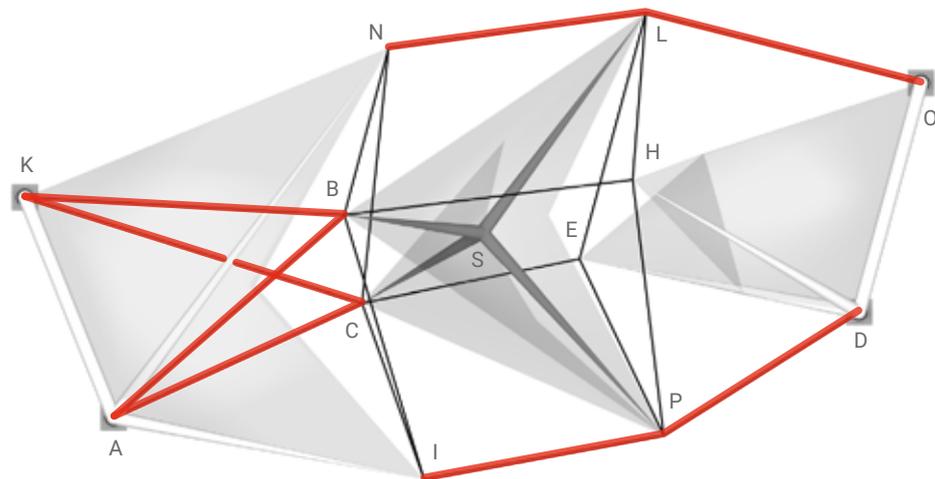


.Modello strutturale (2) ottimizzato dopo l'analisi

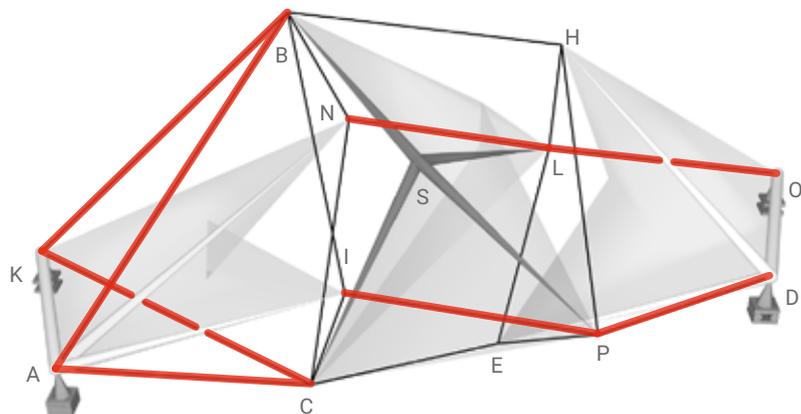
F10  
Prospetto  
longitudinale



F11  
Pianta

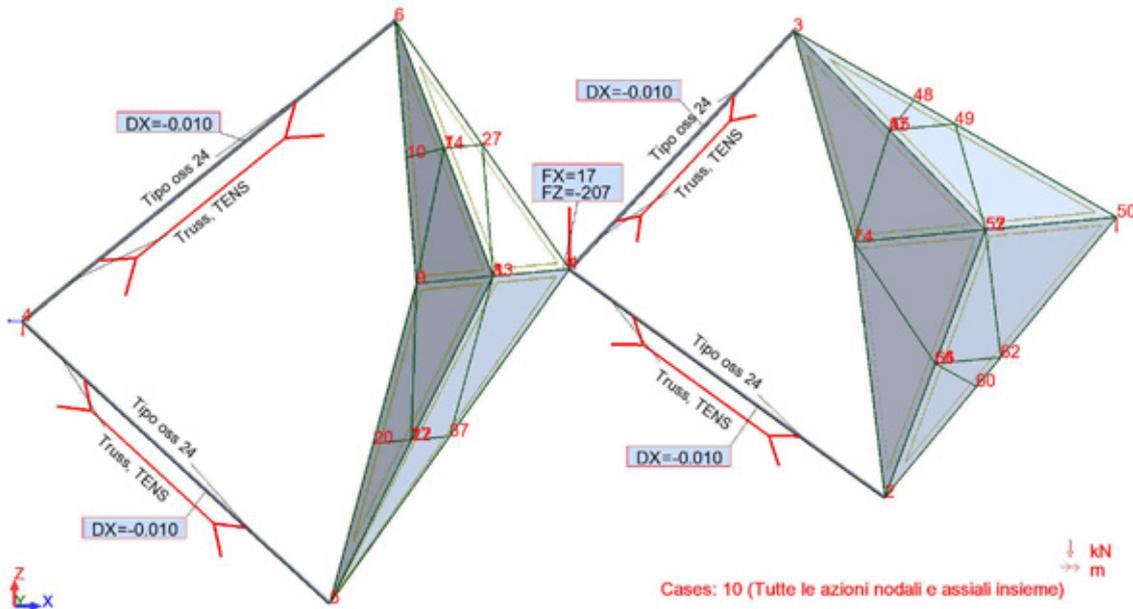


F12  
Prospettiva



SCHEMA STATICO (1) PIANO

.Modello di gusci e pendoli in III-condition globale



Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	4/ 10 (C)	29878	2891
	50/ 10 (C)	-29845	-2867

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 10 (C)	20128
pendolo	1/ 2/ 10 (C)	20128
	2/ 1/ 10 (C)	20017
	2/ 3/ 10 (C)	20017
	3/ 4/ 10 (C)	16750
	3/ 5/ 10 (C)	16750
	4/ 4/ 10 (C)	22630
	4/ 6/ 10 (C)	22630

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	AB (4-6)	24	-0,010	22630	330	220
	AC (4-5)	24	-0,010	16750	330	220
	SH (1-3)	24	-0,010	20017	330	220
	SE (1-2)	24	-0,010	20128	330	220

.Condizioni di carico

Case	Case name	List	Load values	Analysis type
1	PzS	1	FZ=-207(kN)	Static - Linear
2	PxS	1	FX=17(kN)	Static - Linear
3	dl AB -3cm	4	DIL=-0,030(m)	Static - Linear
4	dl AC -3cm	3	DIL=-0,030(m)	Static - Linear
5	dl SH -3cm	2	DIL=-0,030(m)	Static - Linear
6	dl SE -3cm	1	DIL=-0,030(m)	Static - Linear
7	PP escluso	1to20	PZ Negative Factor=1,0	Static - Linear

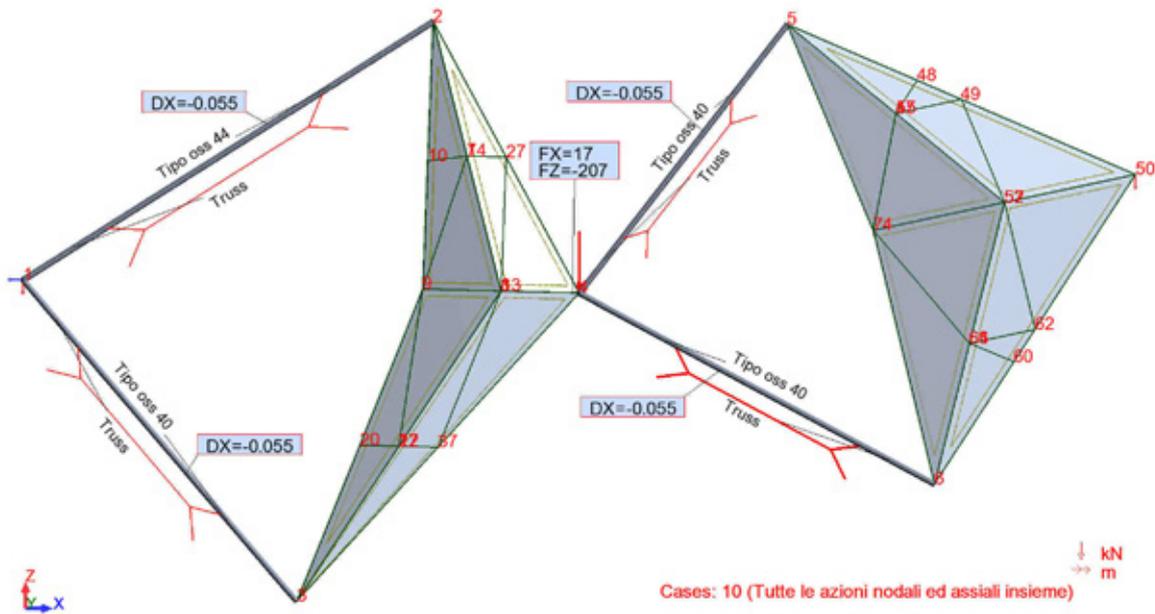
.Movimenti dei nodi e considerazioni sulla deformata

Node/Case	UX (cm)	UZ (cm)
1/ 10 (C)	1267805871130,3	-13311960844467,9
2/ 10 (C)	6846151685664,8	-5641735196322,1
3/ 10 (C)	-4564101060795,8	-7860394833475,0
4/ 10 (C)	0,0	0,0
5/ 10 (C)	-6909542106558,9	-7480053440488,5
6/ 10 (C)	7353273731181,2	-9064810755775,0
9/ 10 (C)	912820174184,2	-9584618820357,6
50/ 10 (C)	0,0	0,0
74/ 10 (C)	608546908962,2	-6389743865620,6

Nonostante si conosca già il risultato dell'analisi sul modello strutturale teorico di tipo Ill-condition, per il sistema (2) piano, si è scelto comunque di condurre l' analisi, anche sulla configurazione in cui i nodi (A), (S) e (D), risultano erroneamente allineati. Si riscontra pertanto, senza alcuna sorpresa, la tendenza ad infinito, sia degli sforzi normali dei pendoli, che degli spostamenti nodali<sup>N8</sup>. Risulta quindi confermata, la necessità di modificare qualunque geometria, locale o globale, che si presenta inizialmente in Ill-condition per errore, disallineando volontariamente tutti i nodi principali, collocati sulla stessa retta.

N8  
Modello teorico del sistema  
(1) piano (Ill-condition)  
F2 - pg.243

.Modello di gusci e pendoli in catenaria discreta globale

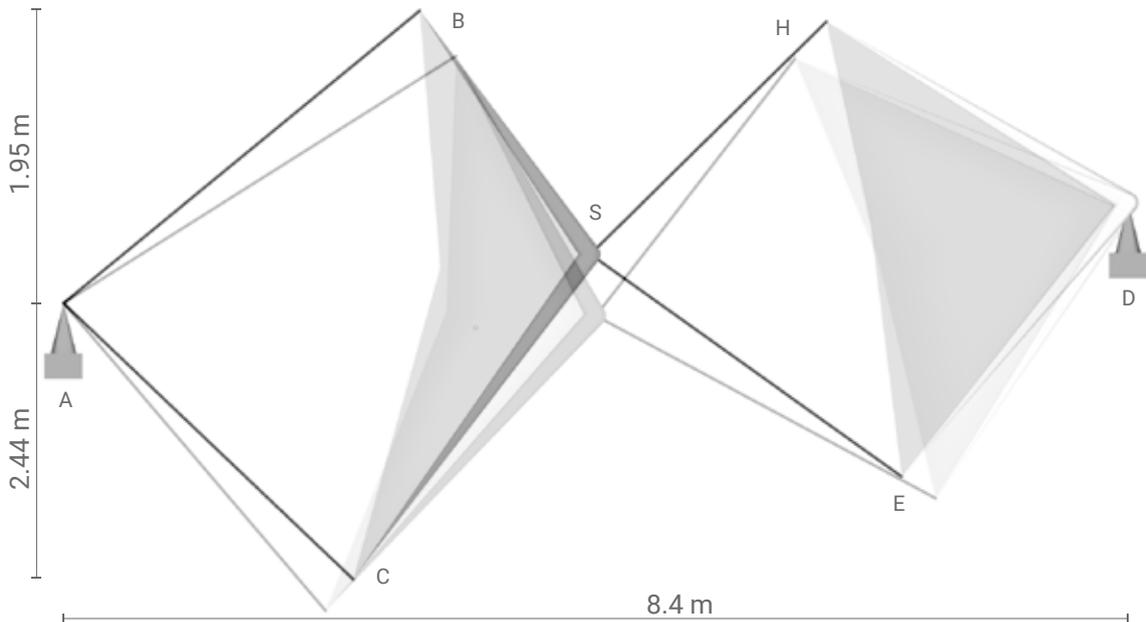


Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	1/ 10 (C)	-885	21
	50/ 10 (C)	868	186

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 10 (C)	-668
pendolo	1/ 2/ 10 (C)	-668
	2/ 1/ 10 (C)	-496
	2/ 3/ 10 (C)	-496
	3/ 4/ 10 (C)	-584
	3/ 5/ 10 (C)	-584
	4/ 6/ 10 (C)	-582
	4/ 4/ 10 (C)	-582

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	AB (1-2)	44	-0,010	-668	1115	743
	AC (1-3)	40	-0,010	-496	921	614
	SH (4-5)	40	-0,010	-584	921	614
	SE (4-6)	40	-0,010	-582	921	614

.Dimensioni e considerazioni sulla deformata



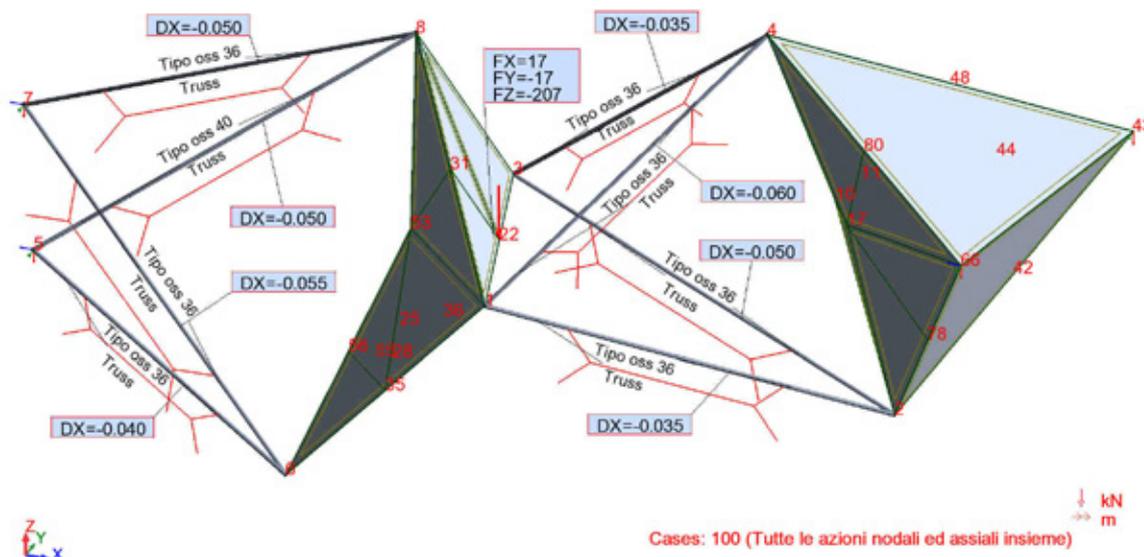
Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (cm)	UZ (cm)
	1/ 10	0,0	0,0
	2/ 10	-28,5	36,1
	3/ 10	21,8	24,9
	4/ 10	-4,3	48,9
	5/ 10	12,7	29,6
	6/ 10	-26,9	17,3
	9/ 10	-4,6	35,4
	50/ 10	0,0	0,0
	74/ 10	-4,8	22,4

Rispetto al caso precedente, il risultato dell'analisi sulla configurazione del modello (2) piano, in catenaria discreta globale, porta a considerazioni molto più rassicuranti. Cioè, se si sposta geometricamente verso il basso, il nodo caricato (S), di circa (1/20) della luce coperta dai nodi (A) e (D), rispetto al punto medio del segmento che li congiunge (III-contition), le verifiche di resistenza si possono soddisfare<sup>N9</sup>. Inoltre, la deformata, che risulta realistica e finita, può essere addirittura controllata, variando arbitrariamente lo sforzo di pretensione nei pendoli. Esso infatti, unicamente nella catenaria, non produce alcuna sensibile variazione degli sforzi normali complessivi, ma soltanto una inversamente proporzionale riduzione della freccia, del nodo caricato (S). Per esercizio infatti, nella combinazione di carico applicata a questo specifico modello, si è aumentato l'accorciamento impresso sui pendoli, producendo una freccia positiva verso l'alto, fino ad annullare completamente l'abbassamento geometrico del nodo (S), imposto all'inizio.

N9  
Modello di calcolo del sistema (1) piano (catenaria discreta)  
F4 - pg.243

SCHEMA STATICO (1) SPAZIALE

.Modello di gusci e pendoli in catenaria discreta

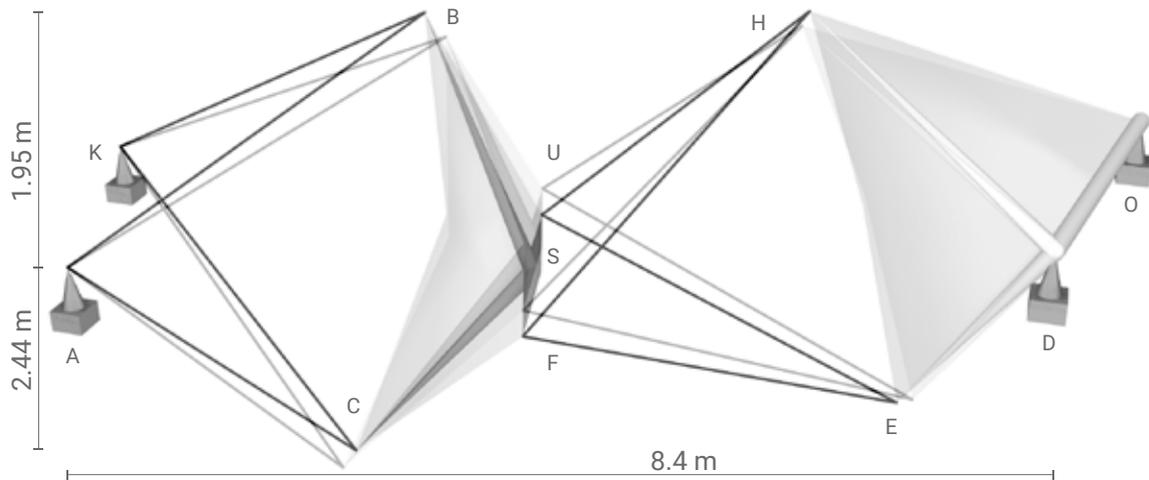


Reazioni	Node/Case	FX (kN)	FY (kN)	FZ (kN)
vincolari esterne	5/ 100 (C)	-607	-339	-20
	7/ 100 (C)	-318	102	39
	43/ 100 (C)	795	611	131
	66/ 100 (C)	113	-357	58

Sforzo normale	Bar/Node/Case	FX (kN)
complessivo di ogni	1/ 1/ 100 (C)	-256
pendolo	1/ 2/ 100 (C)	-256
	2/ 3/ 100 (C)	-313
	2/ 2/ 100 (C)	-313
	3/ 1/ 100 (C)	-371
	3/ 4/ 100 (C)	-371
	4/ 3/ 100 (C)	-266
	4/ 4/ 100 (C)	-266
	5/ 5/ 100 (C)	-325
	5/ 6/ 100 (C)	-325
	6/ 7/ 100 (C)	-201
	6/ 6/ 100 (C)	-201
	7/ 5/ 100 (C)	-542
	7/ 8/ 100 (C)	-542
	8/ 7/ 100 (C)	-193
	8/ 8/ 100 (C)	-193

Verifiche di resistenza	Pendolo: (IJ)	D (mm)	$\delta$ (m)	$S_{IJ}$ (kN)	$F_{R,d}$ (kN)	$S_{am}$ (kN)
	KB (7-8)	36	-0,050	-193	745	496
	KC (7-6)	36	-0,055	-201	745	496
	AB (5-8)	40	-0,050	-542	921	614
	AC (5-6)	36	-0,040	-325	745	496
	UH (3-4)	36	-0,035	-266	745	496
	UE (3-2)	36	-0,050	-313	745	496
	FH (1-4)	36	-0,060	-371	745	496
	FE (1-2)	36	-0,035	-256	745	496

.Dimensioni e considerazioni sulla deformata



Movimenti dei nodi	Node/Case	UX (cm)	UY (cm)	UZ (cm)
	1/ 100	-1,4	1,9	27,2
	2/ 100	-14,5	3,3	8,2
	3/ 100	-1,5	1,5	30,7
	4/ 100	6,5	-2,8	15,4
	5/ 100	0,0	0,0	0,0
	6/ 100	11,1	8,2	17,2
	7/ 100	0,0	0,0	0,0
	8/ 100	-17,1	-5,2	23,2
	10/ 100	-0,4	0,2	12,5
	22/ 100	-2,0	1,5	29,0
	43/ 100	0,0	0,0	0,0
	53/ 100	-1,7	1,6	23,3
	66/ 100	0,0	0,0	0,0

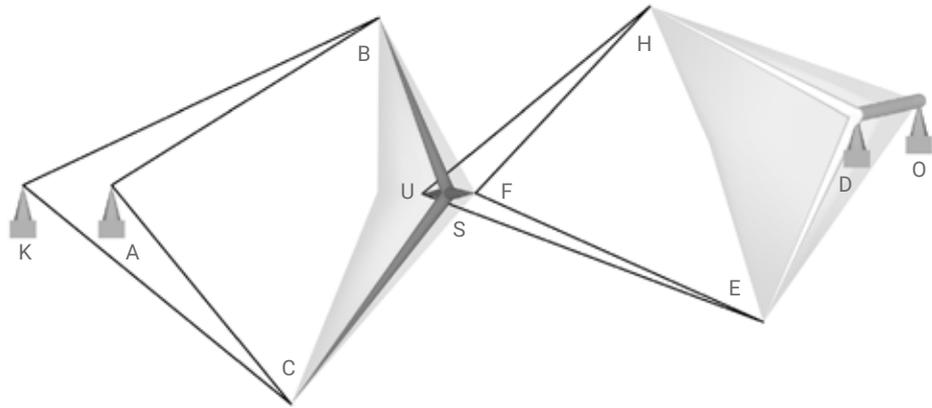
Il modello (1) spaziale di catenaria discreta, non presenta grandi differenze rispetto a quello piano e sembra funzionare come ci si aspettava, dopo aver seguito le regole sul tracciamento del suo schema geometrico, imposte nel capitolo precedente<sup>N10</sup>. Con piacevole sorpresa inoltre, lo spostamento verticale dei nodi laterali (F) e (U) è molto simile, nonostante la presenza di carichi orizzontali e trasversali. Indicazione che dimostra cioè, una particolare stabilità del modello, probabilmente indotta dalla scelta di disporre tutti i nodi esterni vincolati, sullo stesso piano, escludendo ogni tipo di deformazione cinematica di assestamento, non necessaria. Analoga considerazione vale anche, per aver disposto in maniera complanare, tutti i nodi pseudo verticali (B), (C), (S), (H) ed (E). Qualora infine, si desideri ridurre drasticamente l'abbassamento verticale del pezzo infinitamente rigido centrale, senza agire sulla pretensione, è possibile irrigidire l'intero modello, inserendo due ulteriori pendoli orizzontali tra i nodi (B), (H) e (C), (E)<sup>N11</sup>.

N10  
Modello di calcolo del sistema (1) spaziale (catenaria discreta) F3, F5 - pg.243

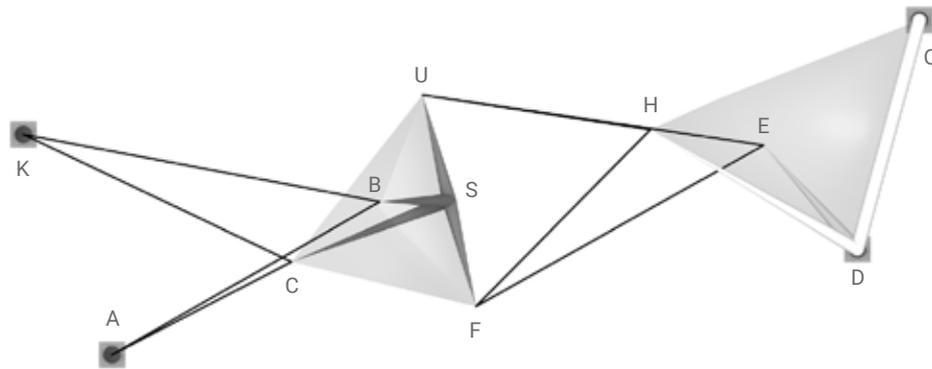
N11  
Possibile ottimizzazione del modello strutturale (1) spaziale F13-F18 pg.272,273

.Modello strutturale (1) grezzo prima dell'analisi

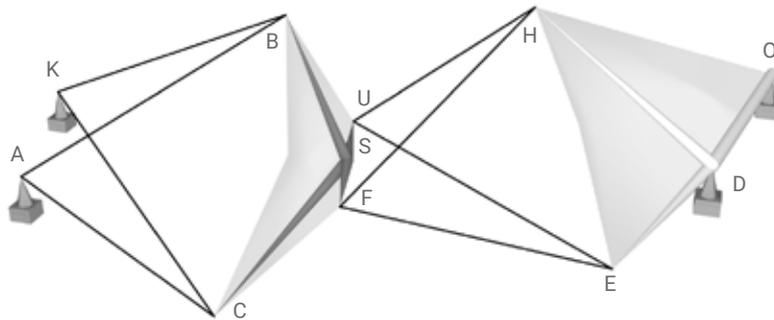
F13  
Prospetto  
longitudinale



F14  
Pianta

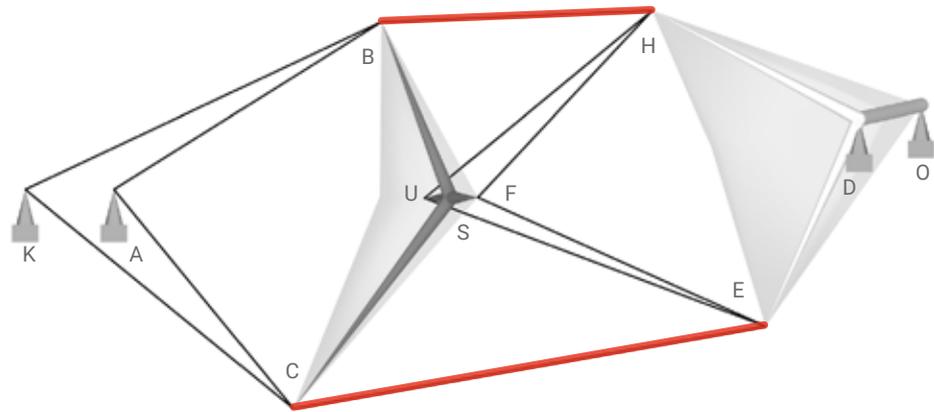


F15  
Prospettiva

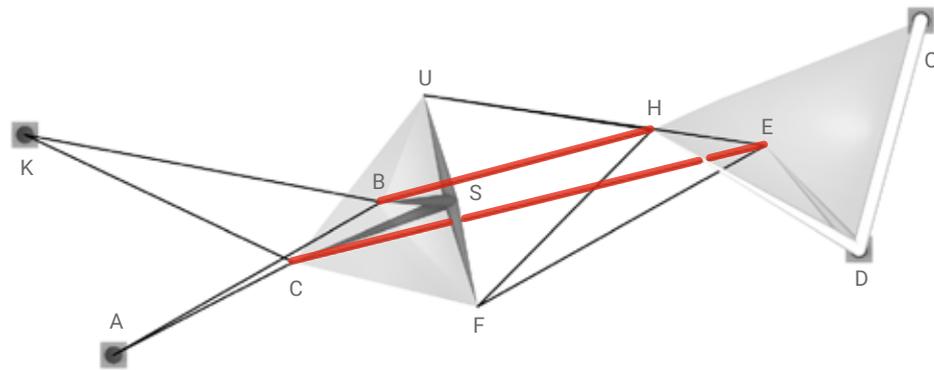


.Modello strutturale (1) ottimizzato dopo l'analisi

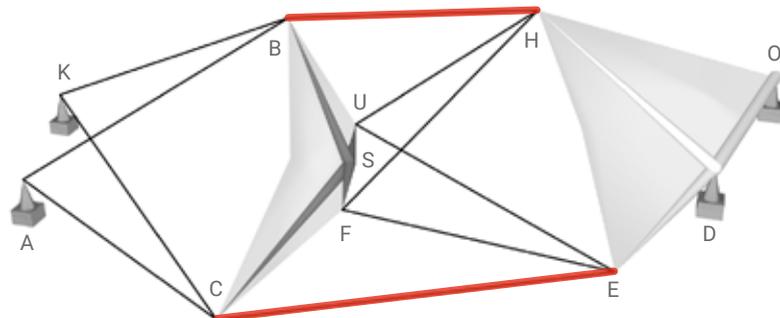
F16  
Prospetto  
longitudinale



F17  
Pianta



F18  
Prospettiva





## CONCLUSIONI

## RIFLESSIONI FINALI

Non essendo l'argomento di questa tesi, il progetto definitivo inerente ad un caso reale, ma la sua procedura progettuale generale, si è deciso di non concluderla, con un'ipotetica configurazione scelta. Essa infatti, sarebbe propria del progetto finito e non dei suoi modelli minimi. Pertanto, si conclude con l'indicazione sull'ultima modifica necessaria, in ciascuno dei tre sistemi studiati. Cioè, il guscio infinitamente rigido, con cui si è condotta l'analisi approssimata, volta a ricercare la configurazione definitiva dei pendoli, deve essere ovviamente sostituito, da un telaio che possa realmente soddisfare, l'esigenza architettonica della struttura. Pertanto, come preannunciato in precedenza, il modello strutturale iniziale, obbligatoriamente modificato dai presidi inerenti alla fruibilità architettonica, come ad esempio l'impalcato, dovrà essere nuovamente analizzato. Con le seguenti riflessioni allora, si intende mettere in luce gli aspetti che influenzeranno maggiormente, l'analisi finale di ogni sistema studiato, in modo da poterlo confrontare definitivamente con gli altri.

### .Modello (1), Catenaria discreta mista<sup>N1</sup>

Diversamente dagli altri, il modello (1), al momento della sostituzione dei gusci, con telai architettonicamente fruibili, presenta un limite fisico riguardo al passaggio delle persone. Cioè, nonostante l'altezza utile della struttura, asse (BC), sia circa 5m ed essi siano già più che sufficienti per un ponte pedonale di lunghezza entro i 100m, il portale (FUB), non risulta abbastanza ampio. Tuttavia, la soluzione più semplice di alzare il nodo di collegamento delle funi al pezzo centrale più alto (B), non sembra opportuna, perchè aumenterebbe l'altezza della sezione complessiva, senza che ce ne sia necessità strutturale. Occorre invece, spostare notevolmente il gruppo di nodi centrali (U) ed (F), in verticale verso il basso, allontanandoli poi l'uno dall'altro, nel piano orizzontale.

Tra tutti, il sistema (1) è caratterizzato dal minor impiego di parti rigide, impegnando maggiormente le funi, infatti utilizza il beneficio di funzionamento globale a catenaria e quindi in prevalenza a sforzo normale di trazione. Il modello (1) Inoltre, è il più predisposto al controllo della freccia in mezzeria, tramite modifica della pretensione, senza aumento significativo degli sforzi normali delle funi e senza effetti negativi sul comportamento locale della struttura<sup>N2</sup>. Il sistema (1) però, ha il difetto inevitabile, di rendere necessaria la presenza di fondazioni, che sopportino una reazione orizzontale, diversamente dall'arco, in cui essa può essere eventualmente eliminata.

### .Modello (2), Tensegrity misto<sup>N3</sup>

Diversamente dal modello (1), il (2) al momento della sostituzione dei gusci, con telai architettonicamente fruibili, non presenta alcun limite fisico riguardo al passaggio delle persone. Anzi, Il modello (2)

N1

Modello strutturale (1), prima e dopo l'inserimento dei necessari presidi architettonici, al posto del guscio di calcolo, in prospetto longitudinale, in pianta e in prospettiva.

prima: F1-F3 pg. 278

dopo: F4-F6 pg. 279

N2

Vedere risultati dell'analisi relativi allo schema statico (1) piano. pg.269

N3

Modello strutturale (2), prima e dopo l'inserimento dei necessari presidi architettonici, al posto del guscio di calcolo, in prospetto longitudinale, in pianta e in prospettiva.

prima: F7-F9 pg. 280

dopo: F10-F12 pg. 281

N4

Vedere risultati dell'analisi relativi allo schema statico (2) piano.  
pg.260, 261

permette qualunque configurazione del nuovo telaio, senza modificare le prestazioni degli altri elementi strutturali, purchè esso rimanga all'interno del vecchio guscio.

Tra tutti, il sistema (2) è negativamente caratterizzato dal maggior impiego di parti rigide, e dal maggior valore delle caratteristiche della sollecitazione, di tutti gli elementi strutturali, cioè sia delle funi che dei telai. Come detto in precedenza<sup>N4</sup>, il motivo del maggiore impegno strutturale del sistema (2) rispetto al (3), è proprio nella sua caratteristica, di non usare cerniere fisiche interne, tra i pezzi rigidi, nonostante ce ne sia bisogno. Quindi, l'enorme sforzo normale delle funi pseudo verticali, produce inevitabilmente, un grande momento flettente negli incastri laterali del telaio, in (P) e in (L). Scaturisce pertanto, lo spunto di prevedere una sezione alla base di ogni mensola, complessivamente a T, in cui le ali verticali andrebbero disposte all'interno del passaggio e l'anima orizzontale, al suo esterno. Riassuntivamente, il sistema (2) è così poco performante perchè non utilizza, nè il beneficio di funzionamento globale a catenaria, caratteristico del sistema (1), nè quello ad arco, caratteristico del sistema (3).

#### .Modello (3), Reticolare misto<sup>N5</sup>

Analogamente al modello (2), il (3) al momento della sostituzione dei gusci, con telai architettonicamente fruibili, potrebbe presentare un limite fisico al passaggio delle persone, sul tratto (BG) o su qualunque sua modifica architettonica. Si è notato tuttavia, che l'intera armatura sostenuta da tale mensola, è solo superiore e si aggiunge alle altre due già presenti (KLO) e (APD), adibite al contrasto di carichi verticali verso l'alto. Quindi, siccome essi sono prevalentemente verso il basso, non appare utile inserire anche la mensola (BG) e i pendoli da lei sostenuti, pertanto nel modello finale di telai e funi, essi non verranno considerati. Poi, un'altra possibile modifica del sistema (3), che lo rende singolare rispetto agli altri, riguarda l'inserimento dell'impalcato. I bordi di quest'ultimo cioè, nei sistemi (1) e (2), sono pendoli chiamati a reagire prevalentemente in trazione, e quindi possono essere prodotti in maniera ottimale con funi. Nel sistema (3) invece, gli elementi strutturali di bordo dell'impalcato, sono chiamati a reagire prevalentemente in compressione, esattamente come i suoi pezzi rigidi. Appare utile quindi, produrre anch'essi con aste e non con funi. Pertanto, il sistema (3) viene notevolmente irrigidito anche trasversalmente, per effetto dei puntoni longitudinali (KUO) e (AFD), diventando di fatto, un arco reticolare spaziale rigido monostrato, armato con funi sopra e sotto e quindi autoancorato.

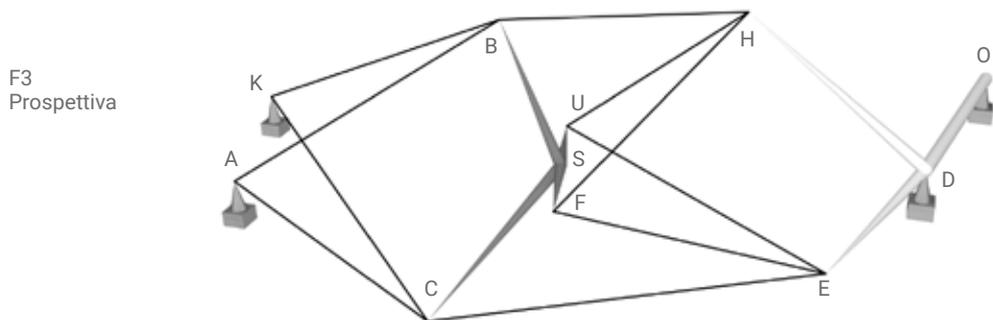
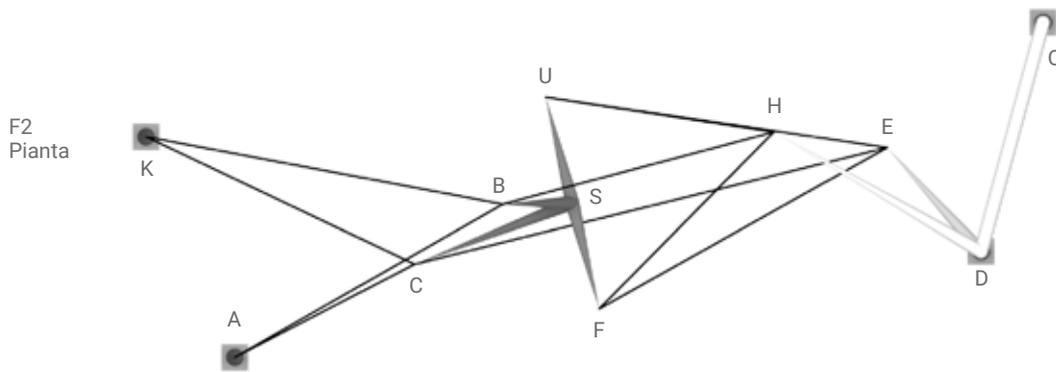
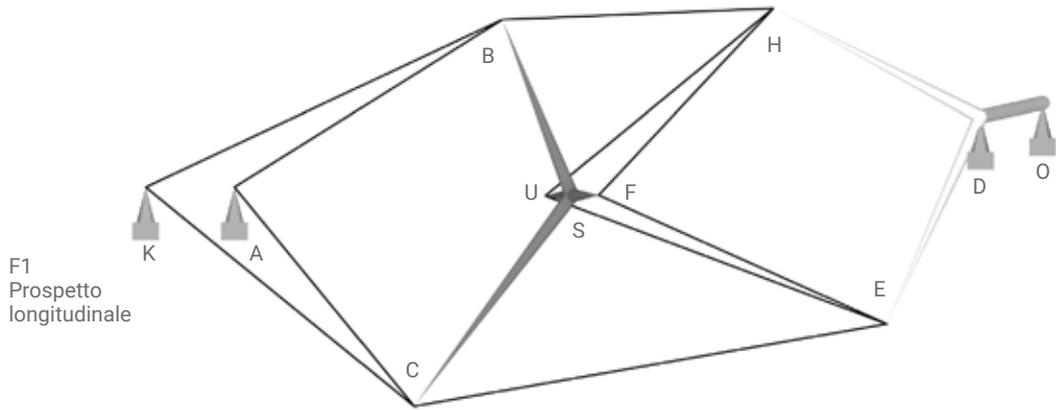
Tra tutti, il sistema (3) è sicuramente il più rigido e analogamente al (2), sfrutta la presenza preponderante di sforzo normale. Diversamente da esso però, i vincoli esterni non devono sopportare alcuna reazione orizzontale, perchè l'arco reticolare risulta appunto, autoancorato.

N5

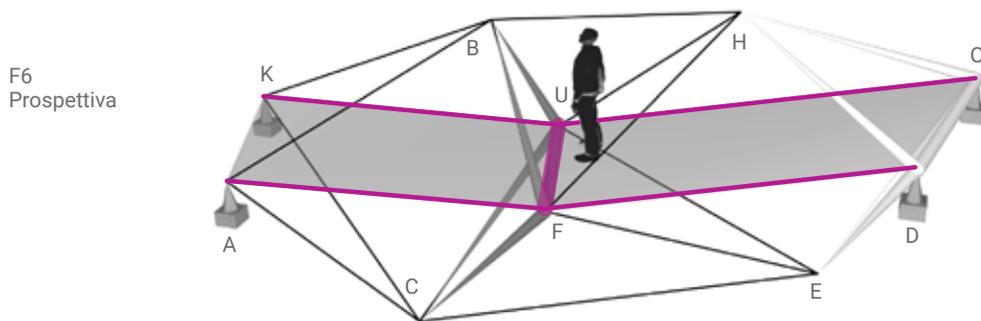
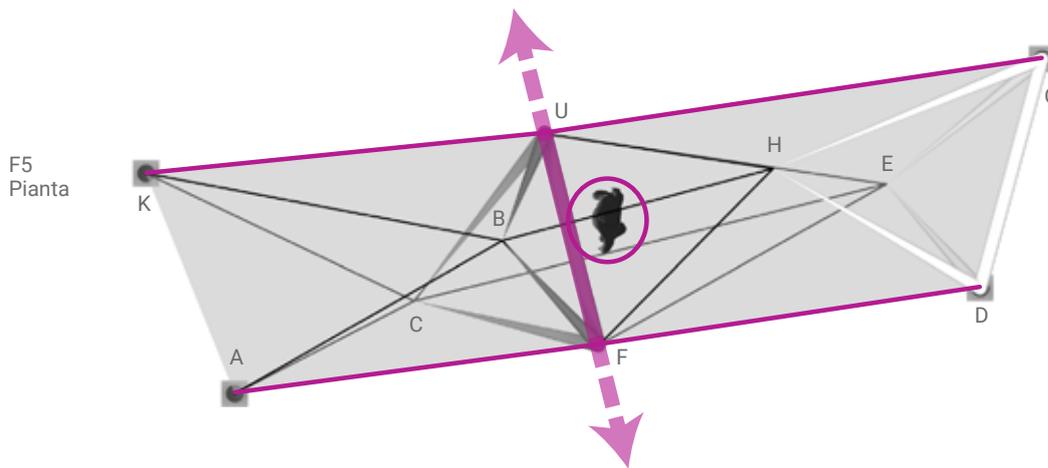
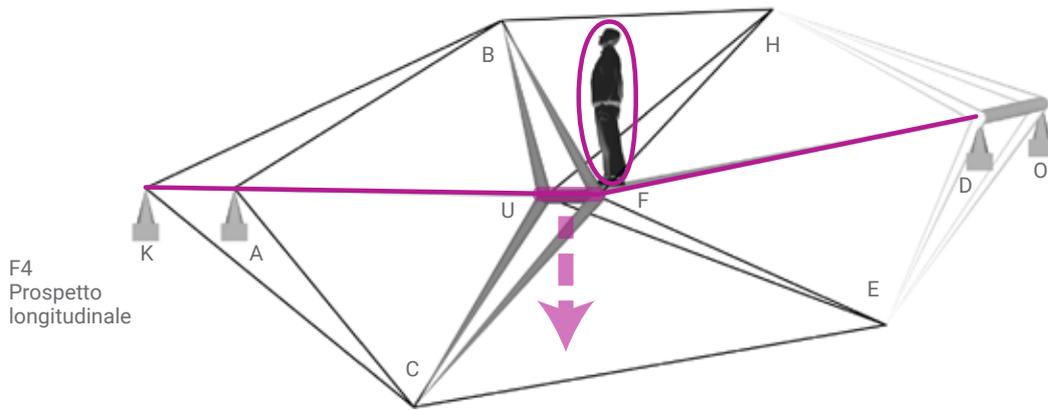
Modello strutturale (3), prima e dopo l'inserimento dei necessari presidi architettonici, al posto del guscio di calcolo, in prospetto longitudinale, in pianta e in prospettiva.

prima: F13-F15 pg. 282  
dopo: F16-F18 pg. 283

.Modello strutturale (1) spaziale

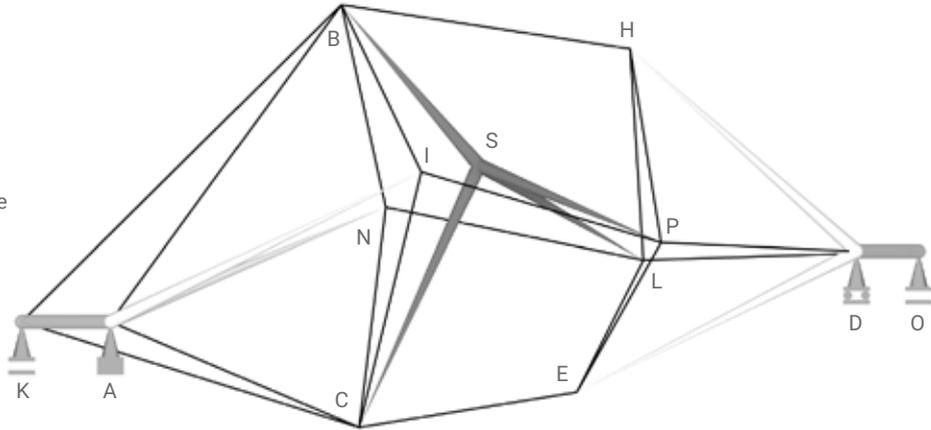


.Modello architettonico (1) spaziale

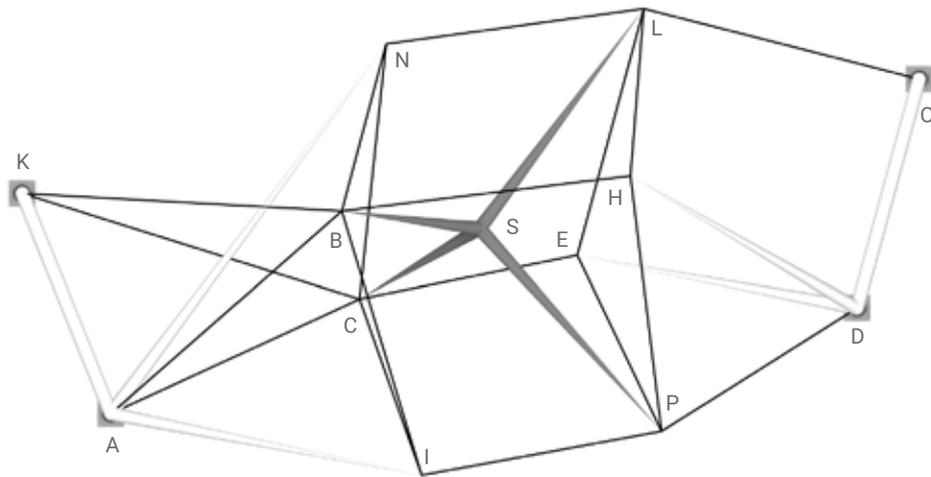


.Modello strutturale (2) spaziale

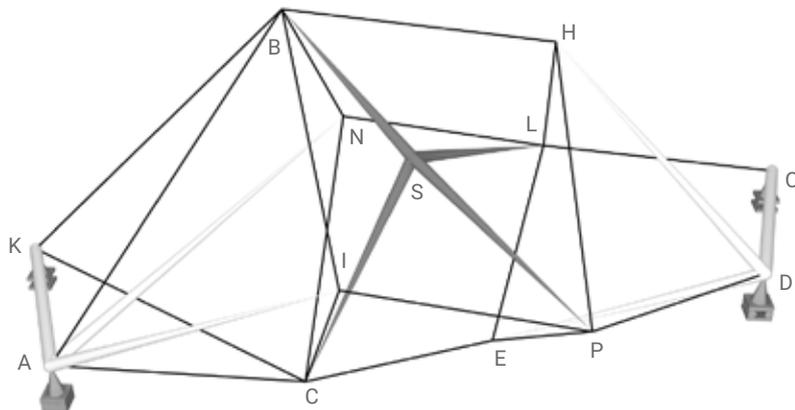
F7  
Prospetto  
longitudinale



F8  
Pianta

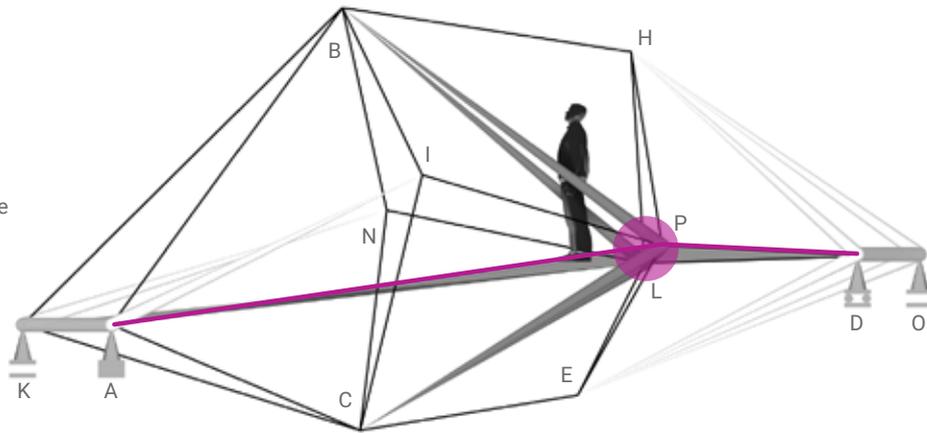


F9  
Prospettiva

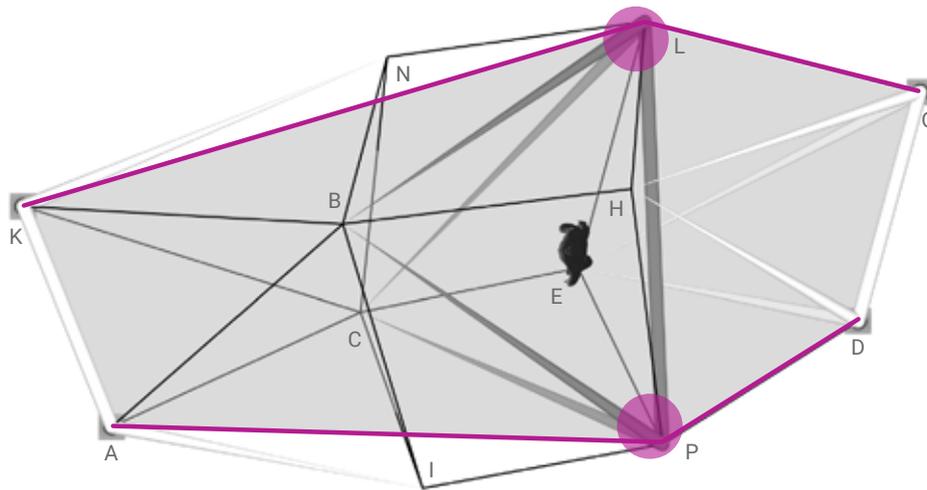


.Modello architettonico (2) spaziale

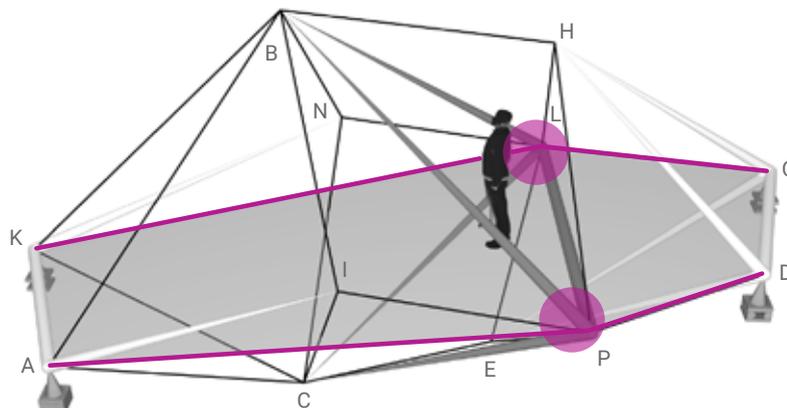
F10  
Prospetto  
longitudinale



F11  
Pianta

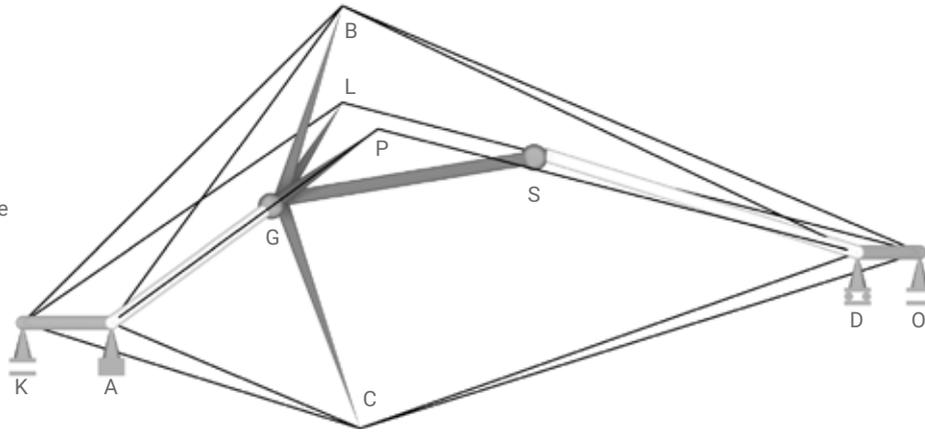


F12  
Prospettiva

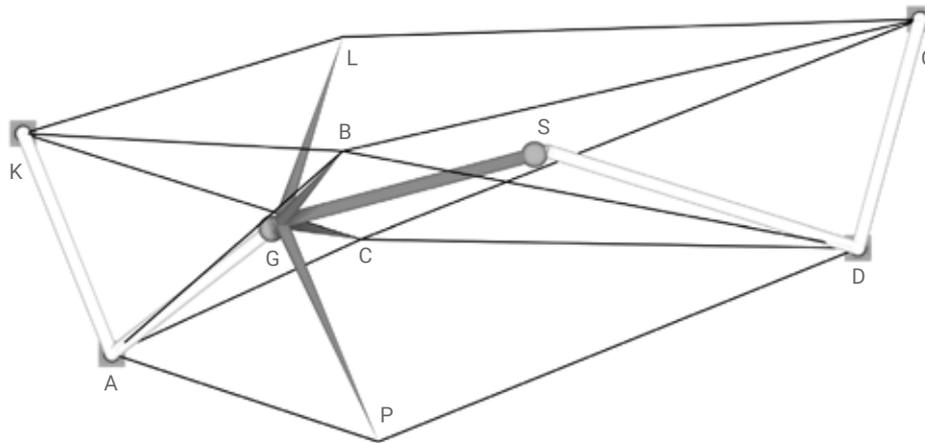


.Modello strutturale (3) spaziale

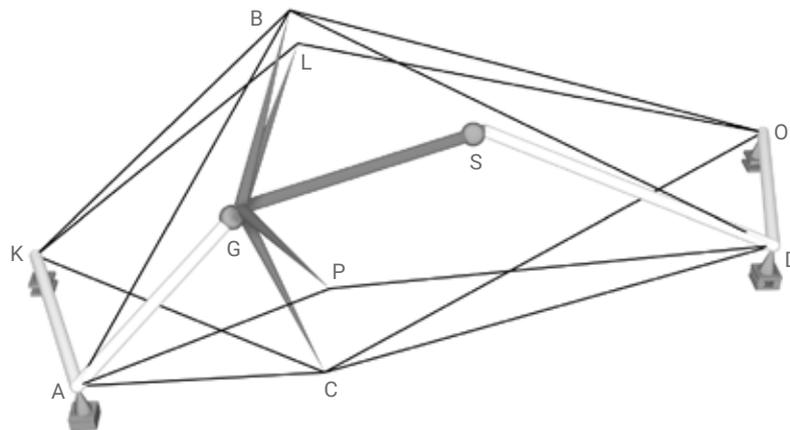
F13  
Prospetto  
longitudinale



F14  
Pianta

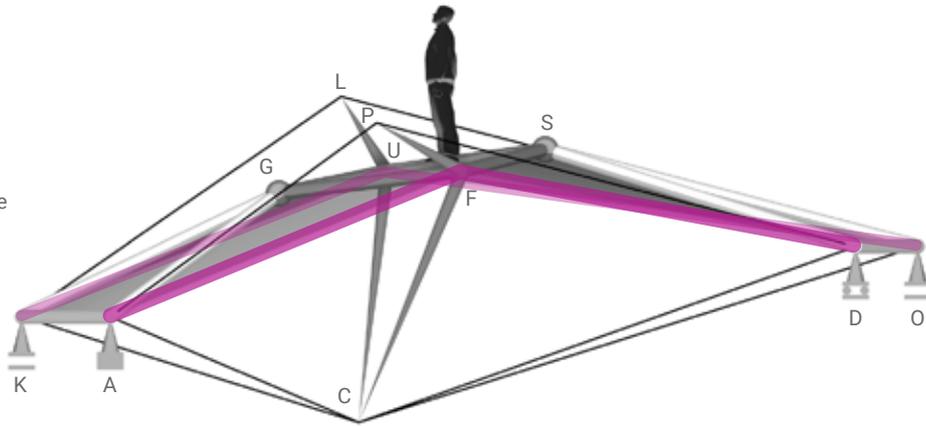


F15  
Prospettiva

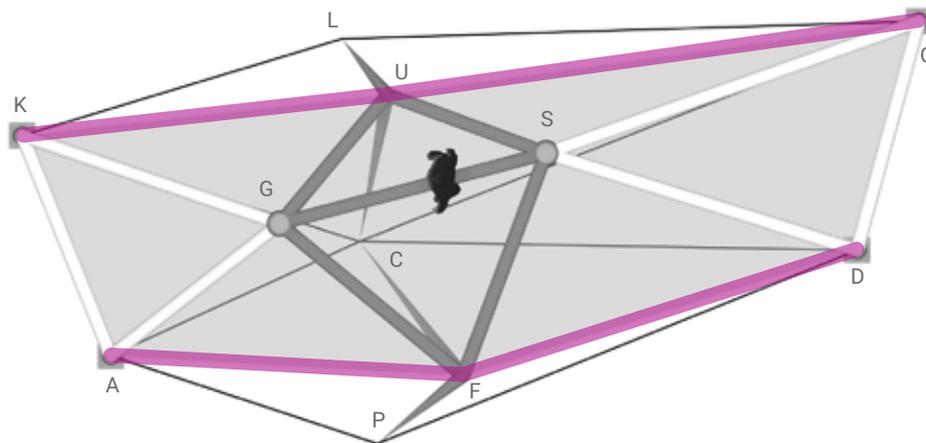


.Modello architettonico (3) spaziale

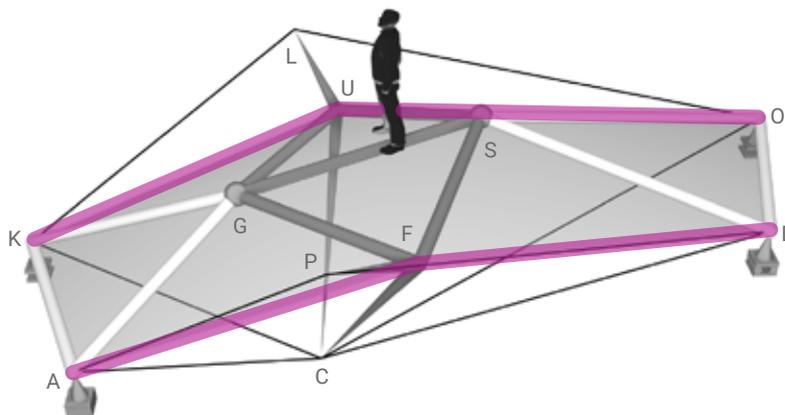
F16  
Prospetto  
longitudinale



F17  
Pianta



F18  
Prospettiva

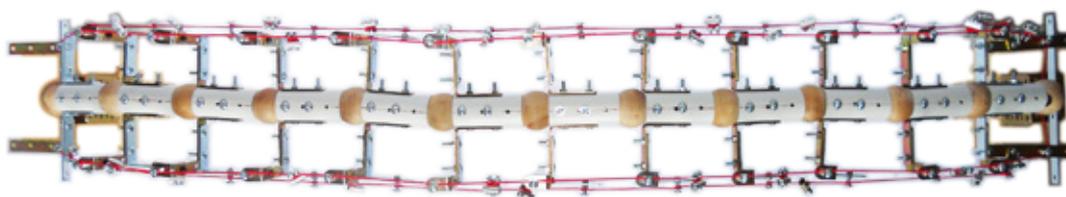


### MODELLO FISICO (3) DI UN IPOTETICO PROGETTO REALE

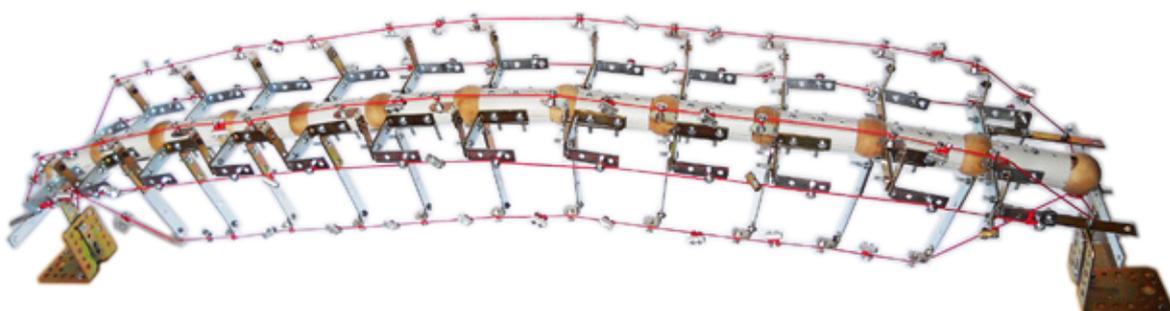
.Configurazione ad asse rettilineo



F1  
Prospetto  
longitudinale

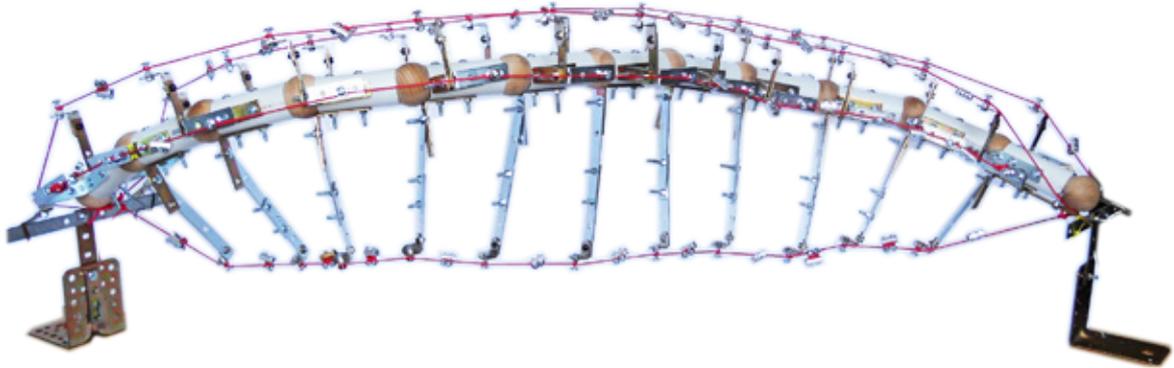


F2  
Pianta



F3  
Prospettiva  
longitudinale

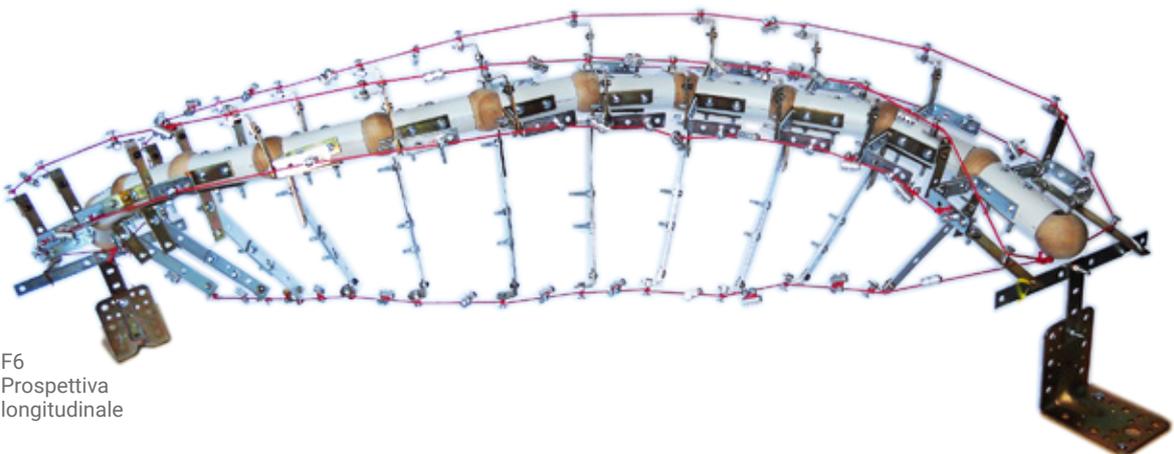
.Configurazione ad asse curvilineo



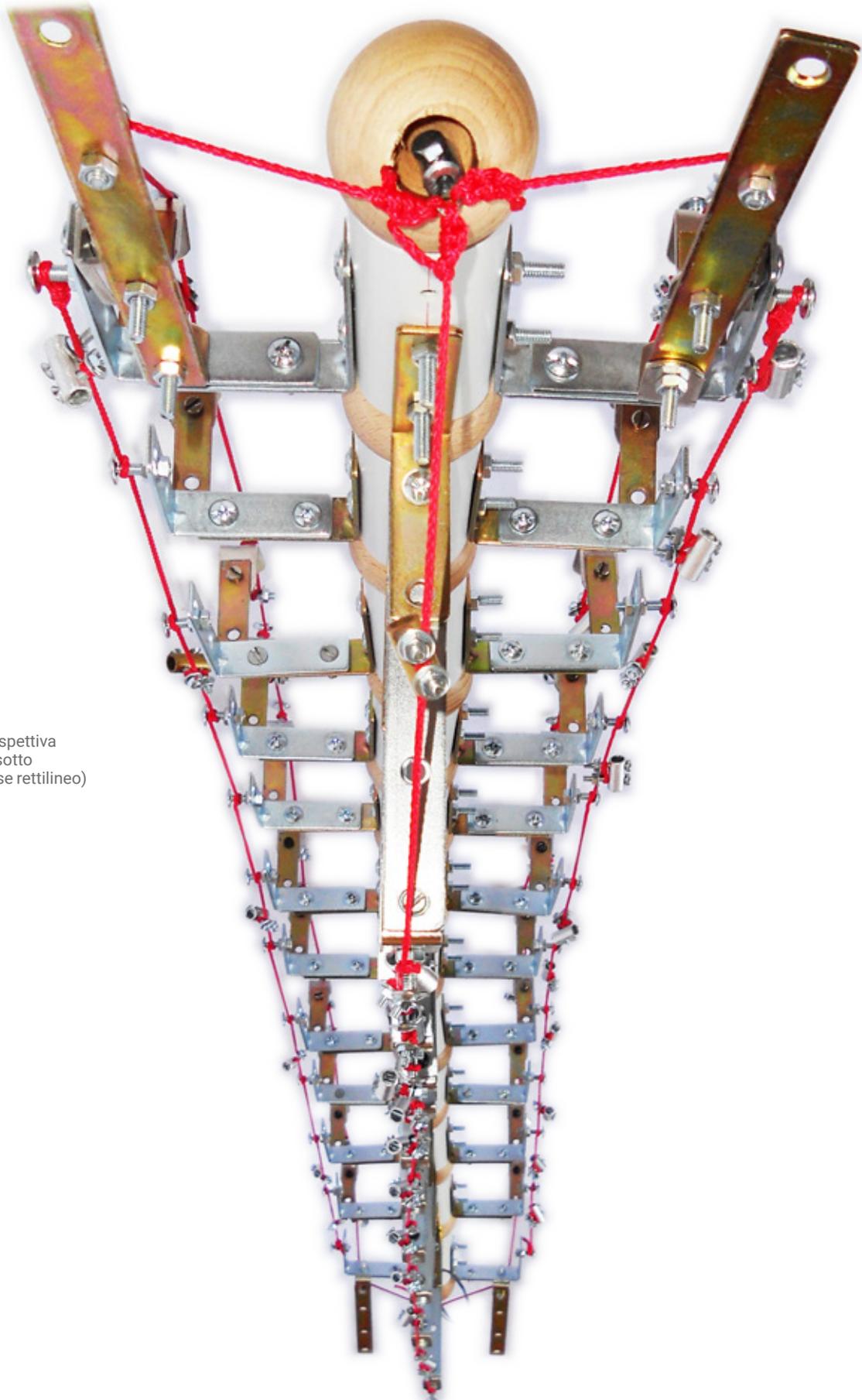
F4  
Prospetto  
longitudinale



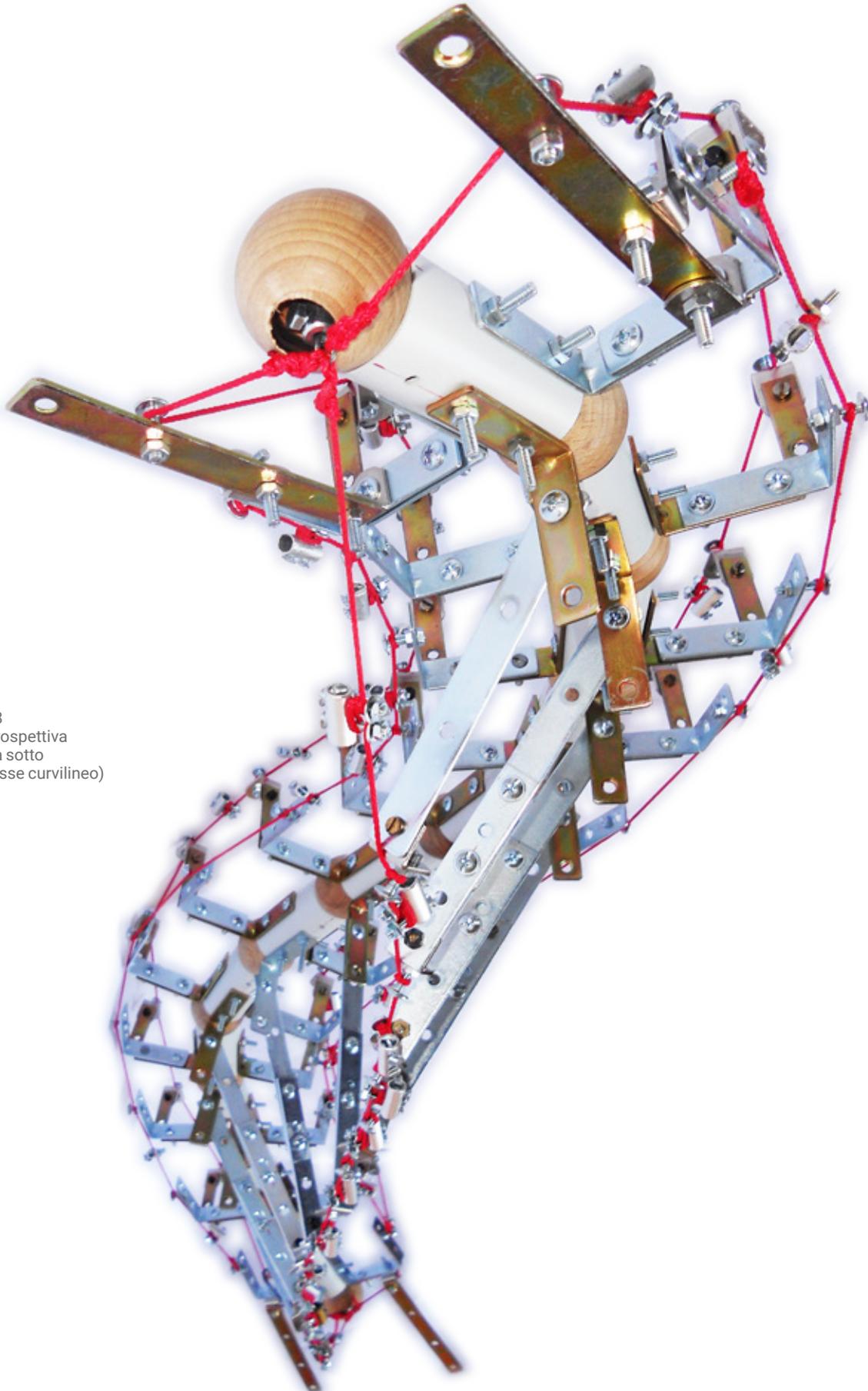
F5  
Pianta



F6  
Prospettiva  
longitudinale



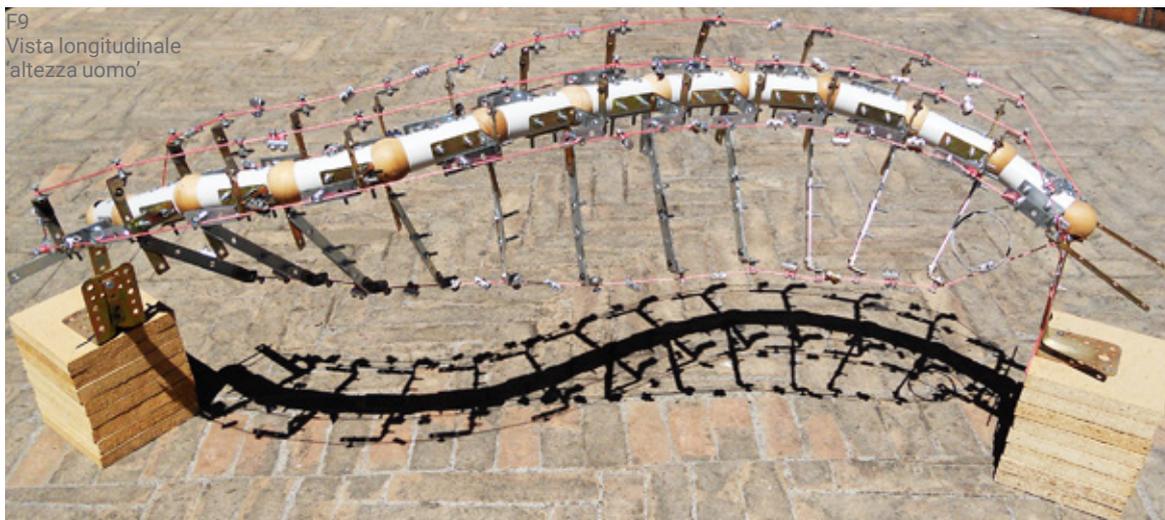
F7  
Prospettiva  
da sotto  
(asse rettilineo)



F8  
Prospettiva  
da sotto  
(asse curvilineo)

Inserimento in un contesto<sup>N1</sup>

F9  
Vista longitudinale  
'altezza uomo'

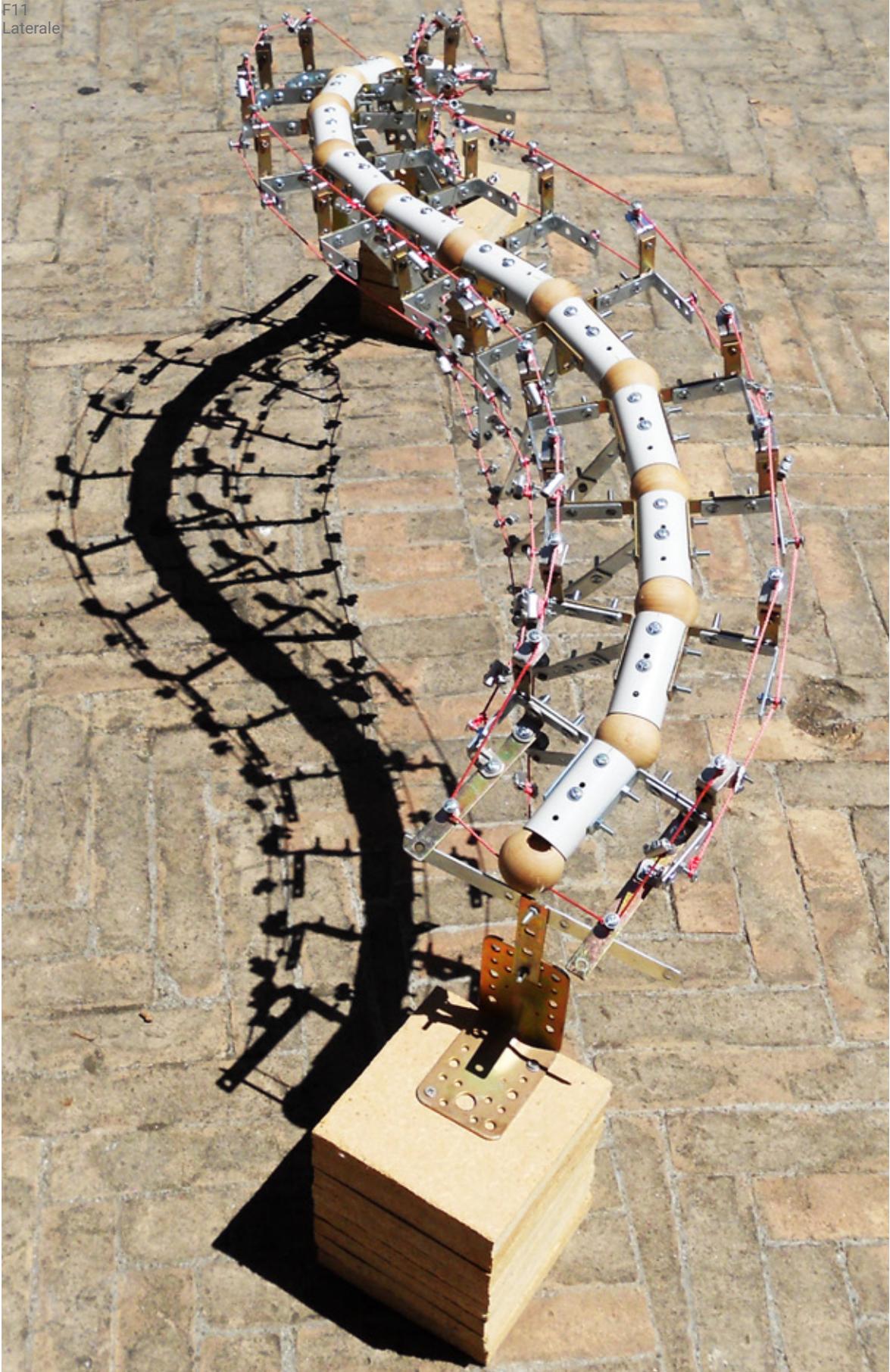


F10  
Vista longitudinale  
dall'alto



N1  
Questo modello fisico è  
ispirato all'opera 'Flexible  
column' di P.Frei Otto  
realizzata nel 1963.  
L.GLAESER,  
The Work of Frei Otto, The  
museum of modern art, New  
York, 1972, pg. 83

F11  
Laterale



# SITOGRAFIA

## SITI INTERNET

[\\_http://nomadphotographer.com](http://nomadphotographer.com)  
[\\_http://happyontist.blogspot.it/2013/02/manchester-bridges-22-spinningfields.html](http://happyontist.blogspot.it/2013/02/manchester-bridges-22-spinningfields.html)  
[\\_http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa\\_bridge\\_a\\_tensegrity\\_world\\_first](http://www.oasys-software.com/casestudies/casestudy/kurilpa_bridge_a_tensegrity_world_first)  
[\\_http://www.redaelli.it](http://www.redaelli.it)  
[\\_http://www.aluscalae.it](http://www.aluscalae.it)  
[\\_http://www.intensiondesigns.com/model\\_quick\\_reference\\_sheets/intension\\_vertebral\\_masts\\_1.3.pdf](http://www.intensiondesigns.com/model_quick_reference_sheets/intension_vertebral_masts_1.3.pdf)  
[\\_http://calvino.polito.it/~lancelotti/didattica/analisi1\\_new/approfondimenti/equazioni\\_terzo\\_grado.pdf](http://calvino.polito.it/~lancelotti/didattica/analisi1_new/approfondimenti/equazioni_terzo_grado.pdf)

## ARTICOLI SCIENTIFICI

\_M.SARMIENTO-C, A.M.RUIZ-T, A.C.CAPARICIO, State of the art of spatial arch bridges, 2012  
\_T.FITZPATRICK, The London Millennium Footbridge, 2001  
\_C.LAVERY, University of Limerick "Living" Bridge: A Design Response to Sensitive Landscape, Ireland, 2011  
\_WILKINSON EYRE, Living Bridge, University of Limerick, 2009  
\_J.JORQUERA, Structural behaviour of spatial arch bridges, 2009  
\_J.JORQUERA, Estudio del comportamiento resistente de los puentes arco espaciales, 2007  
\_V.MARKELJ, Some aspects of footbridge design, 2014  
\_K.R.HEATH, A critical analysis of ponte della costituzione, Venice, 2011  
\_G.ROMANO-C.ROMANO-L.ZIERO, Il IV ponte sul canal grande a Venezia, 2007  
\_BAULDERSTONE PTY LTD, COX RAYANER, ARUP, ACAA entry form, The kuripla bridge, 2010  
\_C.R.CALLADINE, Buckminster Fuller's "Tensegrity" structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames, Int.J. solid structures Vol. 14, 1978  
\_A. MICHELETTI, Strutture pieghevoli che ricercano una forma di equilibrio, Università degli studi di Roma, Tor Vergata, 1999

# BIBLIOGRAFIA

## LIBRI

### Scienza e Tecnica delle costruzioni:

- \_M.MAJOWIECKI, Tensostrutture: progetto e verifica, CREA, 1991
- \_P.POZZATI, Teoria e tecnica delle strutture, Vol.1-3, UTET, 1972
- \_O.BELLUZZI, Scienza delle costruzioni, Vol.1-4, Zanichelli, 1974
- \_J.STRASKY, Stress ribbon and cable-supported pedestrian bridges, ICE, 2011
- \_P.MARCELLINI, C.SBORDONE, Analisi matematica uno, Liguori, 1998
- \_E.VIOLA, Scienza delle costruzioni Vol.1, Pitagora, 1991
- \_A.DI TOMMASO, L.BOSCOTRECASE, Statica applicata alle costruzioni, Patron, 1976
- \_D.SCHODEK, M.BECHTHOLD, Structures, Pearson, 2014
- \_L.GLAESER, The Work of Otto Frei, Themuseum of modern art, New York, 1972

### Anatomia:

- \_H.A.NICHOLSON, Advanced text book of zoology for the use of schools, 1899
- \_W.ELLENBERGER, H.BAUM, H.DITTRICH, An atlas of animal anatomy for artists, 1956
- \_C.J.TREW, Tabulae osteologicae, 1769
- \_W.E.FLOWER, Description of the skeleton of the chinese white dolphin, 1869
- \_V.BENEDEN, P.GERVAIS, Ostéographie des cétacés vivant et fossiles, Atlas, 1879
- \_J.SOBOTTA, Atlas and text book of human anatomy, Vol.I, 1914
- \_R.D.SINELNIKOV, Atlas of human anatomy, Vol.I, 1988
- \_H.GRAY, Anatomy of the human body, 1918
- \_J.E.S. FRAZER, The anatomy of the human skeleton, 1920

## NORMATIVE

- \_EN 10210 (profilati a sezione circolare formati a caldo)
- \_NTC n.30, 2008

## RINGRAZIAMENTI

- 1) In primo luogo ringrazio il prof. Silvestri Stefano, per avermi sopportato con grande pazienza durante tutti questi anni, senza mai dubitare sul risultato di questa tesi, che invece ha turbato me per parecchio tempo, appassionandomi ed ossessionandomi contemporaneamente. Senza il prof. Silvestri, non sarei mai arrivato al giorno di consegna della tesi ed ho apprezzato tantissimo il suo atteggiamento incoraggiante nei miei confronti e soprattutto le sue revisioni, pratiche, chiare e senza perdite di tempo. Non so quanti altri professori avrebbero accettato di assistermi, dopo essere sparito all'improvviso per qualche anno, cosa che in realtà è dipesa dalla grande difficoltà delle procedure studiate in questa tesi. Ho scelto infatti, senza rendermene conto, di affrontare parte della ricerca completamente da solo, per poi confrontarmi con il prof. Silvestri, solo dopo aver scritto una montagna di carta.
- 2) In secondo luogo ringrazio il prof. Massimo Majowiecki e l'ing. Giovanni Berti, per avermi permesso di svolgere il tirocinio universitario nello studio del professore, nonostante i loro innumerevoli impegni. E' stato proprio grazie alla loro frequentazione e al loro corso di 'Design of large scale structures', che mi sono interessato ai progetti strutturali speciali. Solo a seguito di tali esperienze infatti, mi è venuta l'idea di fare la tesi sulle tensostrutture miste discrete, trattandole secondo le mie modeste possibilità intellettuali.
- 3) In terzo luogo ringrazio il prof. Alessio Erioli, per avermi aperto la mente sulla progettazione computazionale, durante il corso di Architettura e composizione architettonica 3 e per avermi dedicato una mattina intera, spiegandomi come si disegnano le reticolari spaziali. Infatti, il documento che il prof. Erioli mi ha insegnato a produrre, è stato il primo codice serio, su cui ho avuto l'occasione di mettere le mani e senza il quale, non avrei mai imparato ad usare G.H.
- 4) In quarto luogo, ma solo perchè non potevo scrivere due volte in primo, ringrazio l'ing. Alessandro Conte, per avermi insegnato la scienza e la tecnica delle costruzioni, da dietro le quinte. Senza di lui cioè, non sarei mai riuscito a snocciolare, sebbene lentissimamente, i difficilissimi testi di quei due esami, che per superarli ho impiegato un tempo pari a quello dell'intero corso di laurea, anche se in realtà, li ho dati una volta sola.
- 5) In quinto luogo ringrazio, a pari merito, i prof. Erasmo Viola e Pierpaolo Diotallevi, per avermi messo alla prova di fronte al duro mondo delle strutture, che continua ad influenzare ogni mia scelta, come se dovessi ancora dare il loro esami.
- 6) In sesto luogo ringrazio i miei genitori, per avermi dato la possibilità di fare ingegneria Edile/ Architettura, con la consapevolezza che ci avrei messo una vita. Infatti, non sono mai stato una cima, nemmeno a scuola, ma ho semplicemente avuto spirito di sacrificio ed interesse per le strutture non tradizionali.
- 7) In settimo luogo ringrazio tutti i miei cugini e i miei amici, per avermi preso per matto senza dirmelo, vedendo che il giorno della laurea non arrivava mai, ma assicurandomi comunque, che prima o poi sarebbe arrivato.



