

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

MODELLO DI UNIVERSO FRATTALE E ACCELERAZIONE COSMOLOGICA

Relatore:
Prof. Alexandr Kamenchtchik

Presentata da:
Domingo Ranieri

Anno Accademico 2019/2020

Indice

Abstract	2
Introduzione	3
1 I frattali	6
1.1 Definizione e proprietà	6
1.2 Famiglie di frattali	8
1.2.1 Frattali lineari	8
1.2.2 Frattali non lineari	9
1.2.3 Frattali aleatori	10
2 La struttura frattale dell'Universo	12
2.1 Frattali e Universo	12
2.1.1 Densità condizionale	14
2.2 Il Principio Cosmologico Condizionale	16
3 Cosmologia standard ed espansione accelerata	18
3.1 La geometria di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	18
3.1.1 Geometria ed equazioni di Einstein	18
3.1.2 Le equazioni di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker	21
3.1.3 Redshift	23
3.1.4 Distanza di luminosità	24
3.2 Le supernovae Ia	27
3.3 Espansione accelerata ed energia oscura	29
3.4 Espansione accelerata: una spiegazione alternativa	32
4 Modello di Lemaître-Tolman-Bondi	34
4.1 Motivazioni	34
4.2 La metrica	35
4.3 Le sorgenti	37
4.4 Le equazioni	38

4.5	Distanza di luminosità	40
4.6	Modello di Lemaître-Tolman-Bondi con distribuzione di materia frattale .	43

Abstract

In questo lavoro di tesi mostriamo che l'accelerazione di espansione dell'Universo può essere spiegata senza introdurre un termine di energia oscura ma sfruttando la disomogeneità con cui è distribuita la materia. Diamo una soluzione esatta di un Universo di Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) basato sul presupposto che la metrica ad esso associata sia in grado di descrivere, in media, una distribuzione frattale della materia. Anche se il modello LTB ha un centro, ipotizziamo che, quando la dimensione frattale non è molto diversa dalla dimensione spaziale, questo modello si applichi a qualsiasi punto della struttura frattale che viene scelto come centro. In questo modo, in media, non vi siano punti o direzioni speciali, sfruttando dunque il Principio Cosmologico Condizionale. Utilizzando tale modello esaminiamo la relazione tra modulo di luminosità e redshift dei dati sperimentali delle supernovae di tipo Ia raccolti nel catalogo UNION2. L'analisi mostra che l'apparente accelerazione dell'espansione cosmica può essere interpretata come conseguenza della distribuzione frattale della materia se la sua dimensione frattale ha il valore $D = 2,87 \pm 0,02$ su scale di alcune centinaia di Mpc .

Introduzione

Il XX secolo è stato di fondamentale importanza per lo studio dell'Universo. Fra le scoperte più importanti che hanno avuto luogo ce ne sono alcune di elevato spessore. Tra questi basti citare il redshift cosmologico, la radiazione cosmica di fondo e la struttura su larga scala dell'Universo.

In particolare il redshift cosmologico ha permesso di scoprire che l'Universo è in continua espansione, un'espansione che ci si aspettava fosse di tipo decelerato per effetto dell'azione attrattiva della forza gravitazionale. Tuttavia, la fine del secolo scorso ha visto il verificarsi di una vera e propria rivoluzione cosmologica. Nel misurare il tasso di espansione dell'Universo attraverso dati di supernovae Ia, due gruppi di ricerca indipendenti ottennero risultati contrastanti rispetto alle predizioni teoriche. I dati sperimentali, infatti, mostravano che l'espansione fosse di tipo accelerato.

I fisici hanno cercato di spiegare questo fenomeno postulando l'esistenza di un'entità particolare detta energia oscura, avente pressione negativa ed energia maggiore rispetto a quella della materia oscura, che fosse in grado di controllare la dinamica dell'Universo e causarne l'espansione. Capire la natura e le proprietà fisiche di questa componente oscura che pervade il cosmo intero rappresenta uno dei principali argomenti di studio della Cosmologia moderna. L'interpretazione standard spiega questo effetto repulsivo mediante il modello della costante cosmologica, ovvero il termine Λ che compare nelle equazioni di Einstein e che viene interpretato come l'energia del vuoto. Il modello, noto come modello Λ -*Cold Dark Matter* si basa su un assunto fondamentale, detto Principio Cosmologico, che afferma che l'Universo è omogeneo e isotropo, ossia sempre uguale a grande scala da qualunque punto lo si osservi.

Il perfezionamento delle tecniche di rilevamento, tuttavia, ha mostrato, nel corso degli anni, che gli oggetti celesti si accorpano in ammassi, che a loro volta tendono ad unirsi per formare superammassi creando uno scenario in cui si ha il susseguirsi di bolle di vuoto quasi assoluto sulle cui superfici si ramificano filamenti di galassie. Nelle zone del cosmo in cui due bolle vengono a contatto aumenta la presenza degli ammassi e dei superammassi.

In questo contesto si colloca una nuova teoria ed una nuova interpretazione dei dati relativi alla distribuzione degli ammassi galattici su grandi scale, formulata dal fisico italiano Luciano Pietronero e dai suoi collaboratori. Questa ricerca tenta di spiegare

e descrivere la struttura su larga scala dell'Universo ricorrendo ai canoni dettati dalla geometria frattale. Applicando inoltre metodi propri dell'analisi statistica ed escludendo l'assunzione aprioristica di un Principio Cosmologico, tale teoria mostra che le strutture dell'Universo tendono ad ammassarsi generando zone di vuoto e filamenti, ovvero la materia segue una distribuzione intrinsecamente frattale. La possibilità che vi sia una distribuzione frattale su grandi scale nell'Universo è un fatto estremamente rilevante per la Cosmologia moderna. E' bene osservare che nell'ambito della Cosmologia frattale si fa riferimento alla materia visibile luminosa, questo tuttavia non esclude che la materia oscura possa seguire lo stesso andamento. Sulla base di queste considerazioni l'accelerazione dell'Universo e di conseguenza l'energia oscura non avrebbero modo di esistere.

Il presente lavoro di tesi è dedicato allo studio di un modello di Universo che prescindere dal Principio Cosmologico e, privilegiando un Principio Cosmologico Condizionale secondo cui ogni osservatore occupa un punto materiale della struttura, si pone lo scopo di mostrare che è possibile evitare l'introduzione dell'energia oscura, giustificando l'apparente espansione attraverso la distribuzione frattale della materia stessa. Il riscontro sperimentale sarà effettuato soltanto con i recenti dati di supernovae. Il lavoro di tesi è così strutturato, nel capitolo 1 si introdurranno i frattali ed i concetti basilari, nel capitolo 2 si analizzeranno le motivazioni per una struttura frattale dell'Universo. Il capitolo 3 studia la Cosmologia standard e l'accelerazione dell'Universo, mentre nel capitolo 4 si introdurrà il modello di Lemaitre-Tolman-Bondi e lo studio del medesimo considerando una distribuzione di materia frattale. Si analizzano infine i dati di UNION2 attraverso questo modello evidenziando i risultati principali.

Capitolo 1

I frattali

1.1 Definizione e proprietà

Il termine frattale, dal latino *fractus* con l'accezione di rotto o frammentato, viene usato per la prima volta da Benoit B. Mandelbrot nel 1975 nel libro *Les Objects Fractals : Forme, Hazard et Dimension* [1]. Con questo neologismo, il matematico indicava quegli oggetti e modelli altamente irregolari o complessi che fino ad allora avevano trovato poco spazio nello studio e nella descrizione di fenomeni naturali proprio a causa delle loro peculiarità. In natura esistono molteplici esempi di strutture estremamente irregolari ben lontane dalle usuali strutture previste dalla geometria euclidea: gli alberi, le formazioni rocciose, le coste, le nuvole, il sistema cardiovascolare, quello nervoso o quello respiratorio.

Attualmente per frattale si intende un oggetto matematico caratterizzato da una dimensione non intera e dotato di omotetia interna, ossia la sua forma si ripete in modo simile su scale di grandezza differenti. Questa proprietà, è detta anche di autosomiglianza e implica l'assenza di regolarità o analiticità nell'intero sistema. Per una struttura regolare, come ad esempio una curva, è sempre possibile definire, in maniera univoca, la tangente in ogni suo punto. Questo comporta che localmente, la curva può essere approssimata dalla sua tangente. Nel caso di un sistema frattale o autosimile, non si ha una regolarizzazione della struttura a nessun ordine di grandezza poiché la sua complessità e la sua regolarità non variano con la scala. Questa grande irregolarità non può essere descritta mediante i tradizionali metodi matematici, rendendo molti fenomeni fisici relegati ai margini della ricerca scientifica, proprio a causa della mancanza di un formalismo matematico che permette di studiarli accuratamente.

Il grado di irregolarità di questi oggetti è fornito dalla loro dimensione frattale. Questo è un parametro numerico, non necessariamente intero, usato per descrivere il modo in cui l'oggetto riempie lo spazio in cui è contenuto. Vi sono diverse definizioni di dimensione frattale, ma quella data da *Hausdorff* nel 1919 [3] risulta essere quella più nota ed importante, dal momento che si basa su metodi di misura relativamente facili da trattare.

Supponiamo di voler misurare un insieme di punti $S \in \mathbb{R}_n$, dove \mathbb{R}_n rappresenta lo spazio a n dimensioni che dividiamo in celle di lato ϵ (o, equivalentemente, in sferette di raggio $\epsilon/2$), dove ϵ rappresenta il passo di approssimazione. Definendo $N(\epsilon)$ il numero minimo di celle (o sferette) necessarie per ricoprire completamente l'insieme, la quantità:

$$S_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon)\epsilon \quad (1.1)$$

è detta misura dell'insieme soltanto se il limite esiste e converge a un valore finito. A questo punto possiamo definire la dimensione dell'insieme secondo *Hausdorff – Besicovitch* come il numero critico D per cui la misura M_d passa da zero ad un valore infinito nel limite di $\epsilon \rightarrow 0$, ovvero:

$$M_d = \sum \gamma(d)\epsilon^d = \gamma(d)N(\epsilon)\epsilon^d \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } d > D \\ \infty & \text{se } d < D \end{cases} \quad (1.2)$$

dove $\gamma(d)$ rappresenta un'opportuna funzione numerica introdotta per omogeneizzare il passo con l'insieme[4]. La grandezza D definita in questo modo, denominata *box counting fractal dimension* o dimensione frattale di *Hausdorff – Besicovitch*, permette di calcolare la dimensione frattale di un insieme misurabile (nel senso definito dalla 1.1). Infatti, manipolando in maniera opportuna l'Eq. 1.2, in particolare passando ai logaritmi, si ottiene che per $\epsilon \rightarrow 0$:

$$D = -\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon} = \frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} \quad (1.3)$$

Riportando in un grafico bilogarithmico il numero di celle $N(\epsilon)$ in funzione di ϵ (che rappresenta la risoluzione) la dimensione D corrisponde alla pendenza della retta interpolante.

Esiste tuttavia un metodo alternativo per calcolare la dimensione frattale, utilizzato soprattutto nel caso di una distribuzione di punti isolati, che non fa uso del passo di approssimazione ma consiste nel misurare la massa M di un oggetto in funzione di R , ovvero il passo dell'oggetto. Consideriamo quindi un punto P all'interno dell'oggetto e denotiamo con $M(R)$ la massa contenuta in una sfera di raggio R centrato in P . Se la massa segue una legge di potenza del tipo:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) \sim R^D \quad (1.4)$$

l'esponente D è detto dimensione di massa che, per un sistema autosimile coincide con la definizione di dimensione frattale data in precedenza. Si tratta di una definizione molto utile, come vedremo in seguito, soprattutto nel caso delle distribuzioni di galassie nell'Universo, per le quali è possibile calcolare $M(R)$ dal numero di galassie all'interno di una sfera centrata su un punto della distribuzione stessa.

1.2 Famiglie di frattali

A differenza degli oggetti della geometria euclidea che possono essere definiti da opportune equazioni, i frattali sono costruiti attraverso specifici algoritmi iterativi eseguiti un numero infinito di volte. Si tratta di un processo matematico basato su una procedura molto semplice in cui il risultato finale di ogni calcolo rappresenta l'inizio del calcolo successivo. Possiamo distinguere i frattali in varie famiglie a seconda delle caratteristiche degli algoritmi che li generano.

1.2.1 Frattali lineari

In questo caso la funzione che definisce l'algoritmo presenta solo termini al primo ordine dunque risulta essere lineare. Un esempio noto di questo tipo di frattale è il triangolo di Sierpinski. Questo frattale prende il nome da Waclaw Sierpinski che lo descrisse nel 1915. Un modo per ottenerlo è quello di partire dalla superficie di un triangolo equilatero, la si divide in quattro triangoli equilateri unendo i punti medi dei lati e si elimina la parte centrale. Dopodiché si ripete il procedimento su ognuno dei triangoli restanti e si reitera all'infinito. Quello che si ottiene è riportato in *Fig. 1.1*.

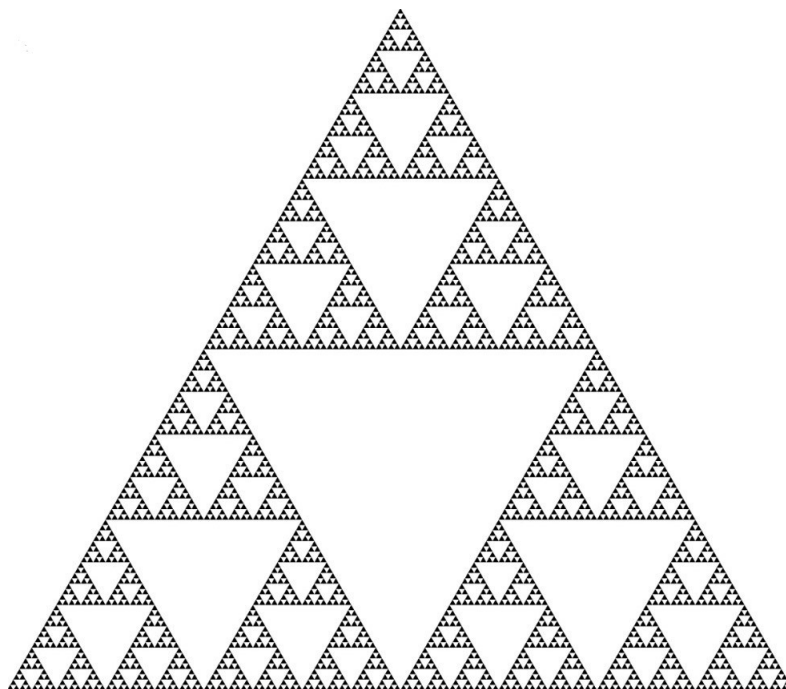


Figura 1.1: Triangolo di Sierpinski

Ad ogni passo del processo la superficie viene ridotta di un fattore $1/4$ rispetto al valore iniziale. Essendo il processo iterato un numero infinito di volte si ottiene un

oggetto che ha un valore della superficie secondo la misura di *Lebesgue* pari a zero. La struttura è autosimile e non differenziabile in alcun punto inoltre per le considerazioni fatte precedentemente la sua dimensione risulta:

$$D = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1.585 \quad (1.5)$$

1.2.2 Frattali non lineari

A differenza dei precedenti, l'algoritmo è definito da una funzione non lineare. Il più famoso frattale di questa famiglia è il frattale di Mandelbrot, anche noto come insieme di Mandelbrot, caratterizzato da una straordinaria ricchezza di dettagli. Le origini di questo frattale risalgono agli inizi del XX secolo grazie agli studi del matematico francese Gaston Julia e del suo rivale Pierre Fatou. Le loro ricerche erano finalizzate a studiare la successione di punti z_n del piano dei numeri complessi generati dalla trasformazione:

$$g(z) = z^2 + c \quad (1.6)$$

dove c è un numero complesso, scelto arbitrariamente, che svolge il ruolo di parametro di controllo. Partendo da un punto del piano e iterando la trasformazione 1.6, si ottengono i cosiddetti insiemi di Julia, ovvero delle frontiere frattali la cui forma dipende esclusivamente dal valore del parametro di controllo. Inoltre, a seconda del valore di tale parametro, si distinguono due possibili tipi di insiemi di Julia: quelli connessi e quelli costituiti da un numero infinito di punti non connessi, che, rappresentati graficamente, assumono l'aspetto di polvere. I lavori dei due matematici furono quasi dimenticati, fino al 1979, anno in cui Mandelbrot, usufruendo dei potenti calcolatori del *Thomas J. Watson Research Center* dell'IBM in cui lavorava, fu in grado di dare una rappresentazione grafica agli insiemi studiati precedentemente da Julia. Mandelbrot analizzò la stessa trasformazione studiata da Julia e Fatou, considerando come punto iniziale $z_0 = 0$. La successione, ottenuta iterando la trasformazione, può divergere o rimanere limitata. L'insieme di Mandelbrot, dunque, è definito come l'insieme dei punti c del piano complesso per cui tale trasformazione risulta limitata. Il frattale che si ottiene è riportato in *Fig. 1.2*.

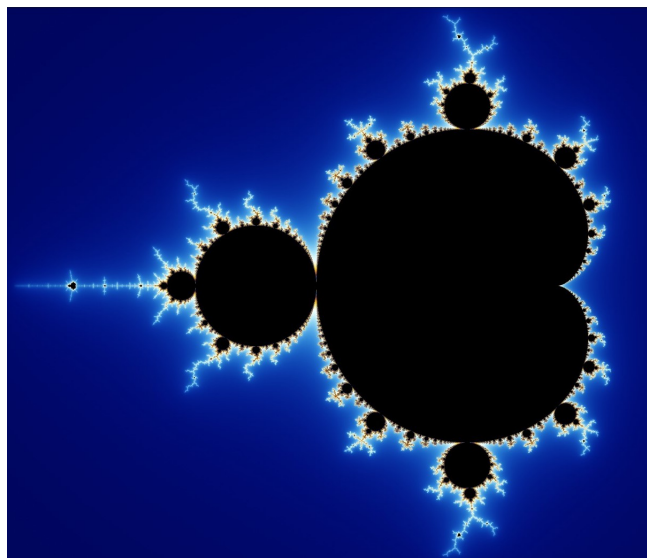


Figura 1.2: Insieme di Mandelbrot. I colori dipendono dall'entità della divergenza: verso il rosso quelli fortemente divergenti, verso il blu quelli meno divergenti. In nero i punti non divergenti

Una proprietà importante dell'insieme di Mandelbrot, diretta conseguenza della sua definizione, è la stretta corrispondenza con gli insiemi di Julia. In particolare, l'insieme di Mandelbrot funge da indice degli insiemi di Julia. Questo significa che, se il punto c appartiene all'insieme di Mandelbrot, l'insieme di Julia corrispondente è connesso. Gli insiemi di Julia non connessi, al contrario, sono quelli definiti da punti non appartenenti all'insieme di Mandelbrot. Osserviamo che l'insieme di Mandelbrot non è propriamente autosimile ma, se provassimo a ingrandire la sua frontiera, troveremmo su tutte le scale un numero infinito di copie dell'insieme originale. Inoltre ingrandendo l'insieme di Mandelbrot intorno a un punto c situato sulla sua frontiera, appaiono forme che sono anche elementi costitutivi dell'insieme di Julia corrispondente al punto c . Questa scoperta, tuttavia, non è stata ancora rivestita di tutto il necessario rigore matematico. Tan Lei, ricercatore dell'Università di Lione, ha dimostrato che l'insieme di Mandelbrot si comporta in questo modo per la maggior parte dei valori del parametro c situati esattamente sulla frontiera dell'insieme.

1.2.3 Frattali aleatori

I frattali analizzati nei paragrafi precedenti possono essere considerati deterministici. I frattali aleatori sono invece quei frattali il cui algoritmo prevede la presenza di elementi stocastici, ottenendo quindi oggetti simili ma non identici. I frattali appartenenti alle prime due classi possono essere considerati come dei paradigmi matematici che in natura

sono del tutto irrealizzabili in natura. Questi ultimi invece hanno proprio la caratteristica di riprodurre in modo abbastanza accurato i fenomeni naturali che presentano caratteristiche frattali. Infatti questi sono utilizzati nello studio e nella riproduzione di fenomeni o entità naturali. Molti software grafici utilizzano questi metodi per ottenere strutture rocciose, nuvole o piante con un livello di dettagli impossibile da ottenere con le tecniche tradizionali. Non è raro che modelli che sfruttano frattali aleatori, siano utilizzati in settori quali: economia, sociologia, biologia o in genere nello studio di sistemi complessi, in cui spesso insorgono fenomeni frattali.

Capitolo 2

La struttura frattale dell'Universo

2.1 Frattali e Universo

Nel paragrafo precedente abbiamo visto come molti fenomeni naturali siano caratterizzati da strutture estremamente irregolari, descrivibili soltanto in termini frattali.

Un compito fondamentale della Cosmologia consiste nello studiare come la materia si distribuisce nello spazio e come evolve nel tempo.

L'aspetto innovativo consiste nel fatto che probabilmente le irregolarità presenti in strutture su grandi scale dell'Universo, possono essere analizzate in termini frattali. Per capire brevemente come questo aspetto entri in Cosmologia basti pensare che se consideriamo la massa contenuta in un volume, essa cresce col cubo della dimensione lineare. Invece, per i frattali, dato che si hanno molti vuoti nel volume che li contiene, la massa diventa proporzionale ad una certa potenza $D < 3$ ovvero ad una dimensione frattale.

Su scale maggiori delle dimensioni della nostra galassia, infatti, le osservazioni mostrano la presenza di enormi agglomerati di galassie che si alternano a grandi vuoti. Per tale motivo è possibile pensare che la struttura dell'Universo possa essere spiegata ricorrendo ai metodi della geometria frattale.

Lo studio statistico della distribuzione delle galassie nello spazio si basa sull'utilizzo di cataloghi astronomici, in cui sono riportate le coordinate spaziali di una qualsiasi galassia. Inizialmente gli astronomi hanno utilizzato cataloghi bidimensionali, ottenuti riportando due coordinate angolari (la latitudine galattica e la longitudine galattica) che determinano la posizione della galassia nella volta celeste. La singola galassia viene successivamente indicata mediante un punto su una sfera di raggio unitario centrata sulla nostra galassia, assunta come origine del sistema di riferimento. Sebbene questi cataloghi non fossero in grado di fornire una proiezione tridimensionale del cielo, l'analisi effettuata mostrava la presenza di strutture su piccole scale e una distribuzione omogenea su scale più grandi.

Alla fine degli anni settanta furono introdotti i primi cataloghi tridimensionali, ottenuti riportando, in aggiunta alle coordinate angolari, due parametri caratteristici quali la magnitudine relativa m e il redshift z . La prima è un'unità di misura della luminosità di un oggetto celeste rilevata dal nostro punto di osservazione, da non confondere con la magnitudine assoluta che, invece, misura la luminosità intrinseca dell'oggetto stesso, mentre il redshift è una variabile strettamente legata alla distanza d di una galassia dalla relazione lineare:

$$z = \frac{H_0}{c}d \quad (2.1)$$

nota come legge di Hubble. Dove H_0 è la costante di Hubble e c è la velocità della luce.

In particolare, il redshift è una misura dello spostamento verso il rosso delle righe di emissione o assorbimento di una galassia, attribuibile ad un processo di allontanamento delle galassie, noto come recessione, dovuto alla fase di espansione che l'Universo sta attraversando. Per tale motivo il redshift è legato alla velocità di recessione delle sorgenti cosmologiche secondo la legge di proporzionalità diretta:

$$v = zc \quad (2.2)$$

Combinando le due formule si ottiene la forma più nota della legge di Hubble, ossia:

$$v = H_0d \quad (2.3)$$

L'avvento dei cataloghi tridimensionali e l'affinarsi delle tecniche di rilevazione del redshift, hanno permesso di investigare porzioni sempre più ampie e profonde di cielo. A differenza dei risultati ottenuti con i cataloghi bidimensionali, l'analisi tridimensionale ha rivelato l'esistenza di strutture su tutte le scale, negando l'ipotesi di omogeneità su cui la teoria cosmologica standard si fonda.

Ciò che Luciano Pietronero è riuscito a determinare è che la densità delle galassie e degli ammassi di galassie gode dell'autosimilarità. In particolare, Pietronero e Sylos Labini hanno rilevato che la densità della materia decresce al crescere della scala in base ad una legge di potenza, e questo comportamento lo si ritrova per distanze che vanno da 0.1 a 100 Mpc .

Invece se la materia avesse una distribuzione uniforme nell'Universo, la densità avrebbe un andamento costante. Questo vuol dire che non si può escludere che a distanze superiori a 100 Mpc si abbia omogeneità nel cosmo, in accordo quindi col Principio Cosmologico.

Assume un carattere primario capire i meccanismi che possono aver generato la struttura frattale dell'Universo. Non è del tutto chiaro come questi possano operare nel cosmo, certamente devono interagire con i due meccanismi antagonisti e cioè il flusso espansivo di Hubble e il fattore aggregante della gravità.

2.1.1 Densità condizionale

Sono diversi i metodi statistici che sono stati utilizzati per analizzare le distribuzioni angolari in due dimensioni e le distribuzioni spaziali in tre dimensioni dei cataloghi delle galassie. Non ci addentreremo in tali metodi che possono essere trovati in [5][6].

Lo studio della distribuzione degli oggetti celesti e l'individuazione delle strutture gerarchiche si fonda su metodi statistici e in particolare sull'utilizzo della funzione di correlazione a due punti $\xi(r)$, introdotta da Hiroo Totsuji e Taro Kihara [7] nel 1969 e ripresa successivamente da Peebles e i suoi colleghi [8] nel 1980. Essa fornisce una descrizione della propensione delle galassie a riunirsi in strutture più grandi e denota la deviazione dalla densità media del campione che si esamina. Consideriamo un campione di N galassie distribuite in maniera casuale ma omogenea nel volume V . Detta n la densità media del campione:

$$n = \frac{N}{V} \quad (2.4)$$

la probabilità congiunta di trovare galassie in due volumi dV_1 e dV_2 , separati dalla distanza r , è data dal prodotto delle singole probabilità:

$$dP = n^2 dV_1 dV_2 \quad (2.5)$$

Questa equazione, tuttavia, non tiene conto del fatto che la probabilità di trovare una galassia in un punto possa aumentare o diminuire a seconda della presenza di un'altra galassia nelle vicinanze. Pertanto possiamo correggerla nel seguente modo:

$$dP = n^2 dV_1 dV_2 [1 + \xi(r)] \quad (2.6)$$

dove $\xi(r)$ rappresenta proprio la funzione di correlazione. In altre parole, possiamo dire che la funzione di correlazione a due punti è definita come l'eccesso di probabilità di rivelare due galassie a distanza r , rispetto a quella che si avrebbe nel caso in cui le galassie seguissero una distribuzione di Poisson. In particolare, la correlazione risulta essere maggiore su scale molto piccole e diminuisce su scale più grandi. Osservazioni sperimentali, i cui dati sono riportati in *Fig. 2.1*

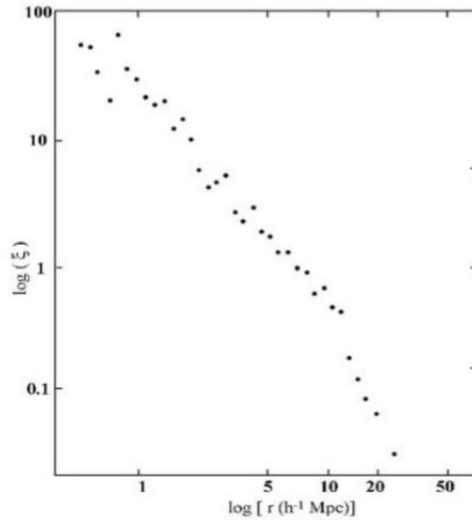


Figura 2.1: Funzione di correlazione a due punti in scala bilogarithmica per il catalogo *CfA1*

mostrano che la funzione di correlazione delle galassie ha un andamento a legge di potenza del tipo:

$$\xi(r) \approx \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma} \quad (2.7)$$

dove $\gamma \approx 1.8$ rappresenta la pendenza della curva e si chiama esponente di correlazione mentre $r_0 \approx 5Mpc/h$ si chiama unità di scala ed è una variabile statistica, detta anche lunghezza di correlazione, che definisce la scala oltre la quale si passa da un regime correlato ad uno non correlato. Oppure analogamente la si può interpretare come la distanza per cui la funzione di correlazione assume valore unitario e denota la lunghezza oltre la quale la distribuzione della galassie diventa omogenea e caratterizzata da una densità costante.

Dunque benché l'analisi dei cataloghi tridimensionali indicasse la presenza di strutture, lo studio del primo catalogo tridimensionale, il *CfA1*, ad opera di Davis e

Peebles [9], rivelava un valore della lunghezza di correlazione pari a $5Mpc$, lo stesso che si sarebbe trovato analizzando cataloghi bidimensionali. Il risultato, dunque, sembrava apparentemente risolvere il problema relativo alla presenza di strutture sul larga scala, ma ne introduceva uno nuovo. Ripetendo l'analisi per la distribuzione degli ammassi di galassie si trovava una lunghezza di correlazione pari a $25Mpc$, diversa da quella delle galassie.

Questo fenomeno, noto come *mismatch* o discrepanza fra galassie e ammassi, ha condotto Pietronero e altri[10] a rianalizzare i cataloghi astronomici in termini di un nuovo formalismo matematico. Essi hanno dimostrato che l'analisi fatta utilizzando la

funzione di correlazione $\xi(r)$ risultava essere inappropriata dal momento che si basava sul presupposto che la distribuzione delle galassie fosse omogenea e, di conseguenza, sul concetto di densità media, ovvero di una proprietà intrinseca del sistema.

Una distribuzione frattale, come la distribuzione della materia nell'Universo, è caratterizzata dall'assenza di grandezze di riferimento, pertanto non ha senso definire una densità media. Un'analisi opportuna dovrebbe basarsi sul concetto di densità condizionale che per una struttura irregolare è sempre definita e uguale in ogni punto.

Il nuovo modo di procedere basato sulla densità condizionale prevede di considerare un campione tridimensionale e di contare il numero di galassie presenti all'interno di una sfera di raggio r centrata su ogni galassia del campione. Si calcola la media aritmetica del numero di galassie all'interno della sfera al variare di r e lo si divide per il volume corrispondente, al fine di ottenere una densità, che è proprio la densità condizionale. Si ripete la procedura aumentando r fino ad un valore massimo corrispondente al raggio della più grande sfera contenuta nel campione.

Poiché il numero di galassie contenute nella sfera di raggio R cresce secondo la legge $N \propto R^D$ notiamo che la densità $n = \frac{N}{V} \propto R^{(D-3)}$ decresce all'aumentare del raggio con una legge di potenza con esponente $D - 3$. Alla luce di quanto detto, Pietronero ha rianalizzato il catalogo *CfA1* ottenendo come risultato che la distribuzione delle galassie segue una legge di potenza e quindi frattale fino ai limiti del campione studiato ($80 Mpc$).

Lo stesso risultato è stato ottenuto per i cataloghi di ammassi di galassie che permettono di investigare porzioni di spazio maggiori a causa della luminosità intrinseca maggiore rispetto a quella di una singola galassia. Questo ha permesso di concludere che, a causa della proprietà di invarianza di scala delle galassie, la distribuzione degli ammassi di galassie è la stessa delle galassie, ma osservata a scale maggiori.

2.2 Il Principio Cosmologico Condizionale

Sappiamo che il modello cosmologico standard si basa sull'ipotesi che nell'Universo non vi siano direzioni privilegiate e che la distribuzione della materia sia omogenea. La prima ipotesi va sotto il nome di isotropia locale mentre l'ipotesi di omogeneità presuppone che tutti i punti dell'Universo siano essenzialmente equivalenti in modo che non vi siano osservatori privilegiati. Si tratta di un principio noto come Principio Cosmologico, formulato da Einstein nel 1917 e successivamente rielaborato da Milne nel 1930.

Tale principio, contiene inoltre l'assunzione implicita che la distribuzione della materia sia regolare. E' possibile provare che l'ipotesi di omogeneità si ottiene soltanto se sono verificate, nel contempo, le condizioni di isotropia e analiticità o regolarità della distribuzione della materia [11]. A tal proposito, osservando la *Fig. 2.2*,

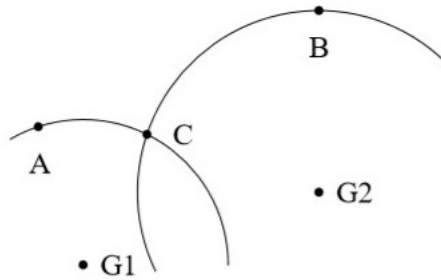


Figura 2.2: Schema rappresentativo del legame tra isotropia in ogni punto ed omogeneità. G_1 e G_2 rappresentano due galassie.

possiamo notare che l'isotropia intorno ad ogni punto garantisce che tutti i punti appartenenti alla circonferenza centrata sulla prima galassia abbiano la stessa densità, condizione valida anche per i punti della circonferenza centrata sulla seconda galassia. Poiché le due circonferenze possiedono un punto in comune, la densità risulterà essere uguale per entrambe le circonferenze, ovvero la materia è distribuita in maniera uniforme.

E' opportuno specificare che l'ipotesi di regolarità permette una descrizione in termini di funzioni matematiche continue e analitiche ed assicura l'esistenza di una densità in ogni punto. Alla luce di quanto sopra esposto, le caratteristiche di una distribuzione irregolare, come quella di un frattale, permettono di asserire che essa gode della proprietà di isotropia locale, ma non risulta omogenea. C'è da aggiungere che non esiste una isotropia locale attorno a qualunque osservatore, e ancora meno in una distribuzione frattale.

L'analisi di Pietronero mostra che la struttura dell'Universo è simile a quella di un frattale. In quanto tale, godrà della proprietà di isotropia locale nel senso che tutti i punti sono equivalenti e non vi sono osservatori privilegiati, ma la distribuzione di questi punti non risulterà essere omogenea. Dunque è lecito chiedersi se sia possibile estendere il Principio Cosmologico ad una distribuzione non analitica di materia. La risposta è fornita dal Principio Cosmologico Condizionale proposto di Mandelbrot [2] il quale non presuppone che la distribuzione di materia sia regolare e pertanto non implica l'assunzione a priori dell'ipotesi di omogeneità.

Esso semplicemente assume che la posizione di un generico osservatore risulta irrilevante purché esso si trovi in un punto appartenente alla distribuzione. Se questo avviene, l'osservatore sarà in grado di osservare che la distribuzione della materia segue un andamento frattale. In caso contrario, se l'osservatore si trova in una regione di vuoto, sarà in grado di osservare la decrescita frattale della densità solo su scale più grandi di quella del vuoto.

Capitolo 3

Cosmologia standard ed espansione accelerata

3.1 La geometria di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Nel seguente capitolo vengono esposti i risultati principali del modello di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker. Sottolineiamo che prenderemo c , velocità della luce pari a 1. Si spiega i seguito il motivo per cui le supernovae Ia siano utilizzate per studiare l'espansione dell'Universo. Si introduce infine il concetto di energia oscura e il motivo della sua teorizzazione.

3.1.1 Geometria ed equazioni di Einstein

La Cosmologia standard si fonda sul Principio Cosmologico, il quale afferma che l'Universo è omogeneo ed isotropo su grandi scale. Questo è confermato da un gran numero di osservazioni. Si pensi ad esempio ai fotoni della radiazione cosmica di fondo che, pur provenendo da differenti direzioni nel cielo, presentano una temperatura costante. Le ipotesi di isotropia ed omogeneità permettono di parametrizzare la geometria dello spazio-tempo attraverso la carta comovente. In questo caso, l'intervallo spazio-temporale può essere espresso nel seguente modo:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = b^2(t) dt^2 - a^2(t) d\sigma^2 \quad (3.1)$$

dove $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ è il tensore metrico, $a(t)$ e $b(t)$ sono generiche funzioni del tempo. In particolare la funzione $a(t)$, detta fattore di scala, viene determinata risolvendo le equazioni di Einstein per questa metrica. Il fattore $d\sigma^2$, invece, rappresenta l'elemento di linea di uno spazio tridimensionale con raggio di curvatura costante e che, in coordinate stereografiche $\{x_1, x_2, x_3\}$, può essere espresso come:

$$d\sigma^2 = dx_i dx^i + k \frac{(x_i dx^i)^2}{1 - k x_i x^i} \quad (3.2)$$

in cui il prodotto scalare è fatto secondo la metrica Euclidea δ_{ij} . Si noti l'uso degli indici latini riferirsi alla sola parte spaziale, quelli greci per riferirsi a tutte le componenti. La curvatura può essere positiva, negativa o nulla e k , detto parametro di curvatura, assume rispettivamente il valore 1,0 o -1.

L'Eq. 3.1 può essere riscritta in coordinate polari $\{r, \theta, \phi\}$. Ponendo $x_1 = r \sin\theta \cos\phi$, $x_2 = r \sin\theta \sin\phi$, $x_3 = r \cos\theta$ e differenziando per calcolare il $d\sigma^2$, si ottiene la forma generale della metrica di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 = b^2(t) dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} - a^2(t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.3)$$

A questo punto serve specificare un *gauge* opportuno per la coordinata temporale. Una caratteristica della carta comovente consiste nel fatto che osservatori statici, con quadrivettore velocità $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (1, 0, 0, 0)$, risultano anche geodetici. Questo equivale a dire che tutte le componenti del quadrivettore velocità u^μ , sia spaziali che temporale, soddisfano l'equazione geodetica:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.4)$$

dove

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\alpha g_{\beta\nu} + \partial_\beta g_{\nu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\beta}) \quad (3.5)$$

rappresentano i simboli di Christoffel che nell'ambito della relatività generale, coincidono con la connessione, mentre τ rappresenta il tempo proprio. L'esistenza di questi osservatori geodetici statici permette di definire un'opportuna coordinata temporale, detta tempo cosmico, che coincide col tempo proprio dell'osservatore statico e si ottiene dalla condizione $b(t) = 1$. Tale scelta di coordinate è detta *gauge* sincrono e corrisponde alla condizione $g_{00} = 1$. Questa scelta del *gauge* permette di riscrivere l'Eq. 3.3 nella forma più tradizionale della metrica FLRW, ossia:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} - a^2(t) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.6)$$

A questo punto è necessario determinare l'evoluzione temporale del fattore di scala $a(t)$. Per farlo si ricavano le equazioni dinamiche del moto a partire dalle equazioni di Einstein. Dalla metrica $g_{\mu\nu}$ si ricavano i simboli di Christoffel 3.5 e si definisce il tensore di Ricci:

$$R_{\nu\alpha} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\mu - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \quad (3.7)$$

contraendolo opportunamente si ottiene lo scalare di Ricci, anche detto curvatura scalare,

$$R = R_{\nu}^{\nu} = g^{\nu\alpha} R_{\nu\alpha} \quad (3.8)$$

Combinando il tensore di Ricci e la curvatura scalare si ottiene il tensore di Einstein,

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (3.9)$$

che costituisce uno dei termini principali nelle equazioni del campo gravitazionale. La dinamica cosmologica può essere dunque ottenuta risolvendo le equazioni di Einstein:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.10)$$

dove G é la costante gravitazionale mentre con $T_{\mu\nu}$ si indica il tensore energia-impulso di un fluido perfetto, introdotto per descrivere le sorgenti gravitazionali su scala cosmologica. Infatti le sorgenti del campo gravitazionale possono essere descritte come un fluido perfetto barotropico con tensore energia-impulso:

$$T_{\mu}^{\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u^{\nu} - p\delta_{\mu}^{\nu} \quad (3.11)$$

dove u^{ν} rappresenta la quadrivelocità dell'elemento di fluido in coordinate comoventi, mentre p e ρ indicano rispettivamente pressione e densità di energia del fluido. Queste sono solo funzioni del tempo e non delle coordinate spaziali a causa dell'isotropia e dell'omogeneità della geometria FLRW. Pressione e densità sono inoltre legate dall'equazione di stato:

$$\frac{p}{\rho} = \gamma = \text{costante} \quad (3.12)$$

Se si assume che il fluido sia a riposo nel sistema comovente, in cui $u^{\nu} = (1, 0, 0, 0)$, l'equazione 3.11 assume la forma:

$$T_{\mu}^{\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p) \quad (3.13)$$

Notiamo che p e ρ rappresentano pressione e densità totale del fluido. Nel modello cosmologico standard, tuttavia, si assume che il tensore energia-impulso appena definito, descriva una miscela di fluidi barotropici, composta da n componenti disaccoppiate tra loro, con diversi parametri di stato γ_n dipendenti dal tipo di fluido considerato. Pertanto è possibile scrivere:

$$p = \sum_n p_n \quad (3.14a)$$

$$\rho = \sum_n \rho_n \quad (3.14b)$$

$$p_n = \gamma_n \rho_n \quad (3.14c)$$

E' opportuno specificare le componenti principali che costituiscono il fluido cosmico: la materia (caratterizzata da parametro di stato $\gamma_{mat} = 0$, ha di conseguenza pressione nulla), e la radiazione (con parametro di stato $\gamma_{rad} = 1/3$ ed equazione di stato $p_{rad} = \rho_{rad}/3$). Mentre la prima descrive le sorgenti gravitazionali macroscopiche quali stelle, galassie, gas interstellare, eventualmente materia oscura, la seconda componente rappresenta il contributo di tutte le particelle con massa nulla (o molto piccola) quali fotoni e neutrini.

3.1.2 Le equazioni di Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

Dall'Eq. 3.7 si ricava che per la metrica FLRW le componenti non nulle del tensore di Ricci sono:

$$R_0^0 = -3\frac{\ddot{a}}{a} \quad (3.15)$$

$$R_1^1 = R_2^2 = R_3^3 = -\frac{\ddot{a}}{a} - 2H^2 - 2\frac{k}{a^2} \quad (3.16)$$

mentre la curvatura scalare definita dall'Eq. 3.8 assume la forma:

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2}\right] \quad (3.17)$$

Il punto indica la derivata rispetto al tempo cosmico, e

$$H = \frac{\dot{a}}{a} \quad (3.18)$$

è detto parametro di Hubble e descrive il tasso di espansione dell'Universo. Dall'Eq. 3.10 insieme alla condizione $G_\mu^\nu = g^{\nu\alpha}G_{\mu\alpha}$, si ottengono le seguenti equazioni:

$$G_0^0 = 8\pi T_0^0 \Rightarrow H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (3.19a)$$

$$G_1^1 = 8\pi T_1^1 \Rightarrow 2\frac{\ddot{a}}{a} + H^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi G p \quad (3.19b)$$

la prima delle quali è nota come equazione di Friedmann e risulta essere indipendente dalla pressione. Le due equazioni possono essere combinate per ottenere l'equazione

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (3.20)$$

nota come equazione di accelerazione del fluido. Notiamo che $\ddot{a} < 0$ se ρ e p sono entrambe positive; pertanto la richiesta che $\ddot{a} > 0$ è verificata dalla condizione:

$$p < -\frac{\rho}{3} \rightarrow \gamma < -\frac{1}{3} \quad (3.21)$$

dove si assume che ρ sia positiva.

Differenziando l'equazione di Friedmann ed usando l'Eq. 3.19b si ottiene:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \quad (3.22)$$

che descrive l'evoluzione temporale della densità di energia ed è nota come equazione di continuità o di conservazione. Abbiamo visto nel paragrafo precedente che è possibile ipotizzare che il fluido barotropico sia formato da n componenti disaccoppiate tra loro. Si può assumere in aggiunta che ognuna di esse soddisfi separatamente l'equazione di continuità 3.22, ossia:

$$\dot{\rho}_n + 3H\rho_n(1 + \gamma_n) = 0 \quad (3.23)$$

in cui si è utilizzata l'ultima relazione di 3.14c. Dalla definizione del parametro di Hubble e separando le variabili si ottiene:

$$\rho_n = \rho_{n0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma_n)} \quad (3.24)$$

dove ρ_{n0} e a_0 rappresentano i valori di densità e fattore di scala attuali. Dunque l'equazione di Friedmann 3.20 può essere riscritta nella seguente forma:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \sum_n \rho_{n0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+\gamma_n)} \quad (3.25)$$

o, in alternativa, in forma adimensionale:

$$\sum_n \Omega_n + \Omega_k = 1 \quad (3.26)$$

dove

$$\Omega_n = \frac{8\pi G}{3H^2} \rho_n \quad \Omega_k = -\frac{k}{(aH)^2} \quad (3.27)$$

Ricordando la definizione di densità critica ρ_c ,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (3.28)$$

si può affermare che l'Eq. 3.26 rappresenta una relazione fra i vari contributi alla densità totale espressi in frazioni di densità critica.

3.1.3 Redshift

Nel paragrafo 2.1 è stato introdotto il concetto di redshift come parametro strettamente legato alla distanza di un oggetto luminoso. Per definire tale quantità consideriamo una particella di massa nulla (ad esempio un fotone) con energia E e quadrimpulso p^μ che si propaga lungo una geodetica nulla di una varietà spazio-temporale descritta dalla metrica FLRW. Se il fotone viene emesso e ricevuto da due osservatori geodetici e statici situati lungo la geodetica nulla, rispettivamente nei punti x_{em} e x_{oss} , l'energia misurata da ciascun osservatore si ottiene dal prodotto scalare tra il quadrimpulso del fotone e la quadrivelocità dell'osservatore. Si definisce allora il parametro di redshift nel seguente modo:

$$1 + z \equiv \frac{(g_{\mu\nu}p^\mu u^\nu)_{em}}{(g_{\mu\nu}p^\mu u^\nu)_{oss}} = \frac{E(t_{em})}{E(t_{oss})} = \frac{\omega_{em}}{\omega_{oss}} = \frac{\lambda_{em}}{\lambda_{oss}} \quad (3.29)$$

Si può tuttavia definire il parametro di redshift in funzione del fattore di scala.

Ricordiamo che per un fotone che si muove lungo una geodetica, il quadrimpulso p^μ viene trasportato parallelamente a se stesso, ossia deve essere soddisfatta l'equazione:

$$Dp^\mu \equiv dp^\mu + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu dx^\alpha p^\beta = 0 \quad (3.30)$$

Se supponiamo che il fotone si propaghi radialmente, il suo quadrimpulso può essere espresso nella forma $p^\mu = (E, p_r, 0, 0)$. Dalla condizione $p^2 = g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ si ricava che per la metrica FLRW 3.6:

$$g_{00}E^2 + g_{11}p_r^2 = 0 \Rightarrow p_r = \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)}E \quad (3.31)$$

Assumiamo inoltre che il fotone si propaghi lungo una geodetica radiale nulla della metrica ($ds^2 = 0, d\theta = d\phi = 0$), ossia:

$$dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2}dr^2 = 0 \Rightarrow dr = \frac{\sqrt{1 - kr^2}}{a(t)}dt \quad (3.32)$$

Inserendo le equazioni 3.31 e 3.32 nell'equazione geodetica 3.30, valutata per $\mu = 0$, si ottiene (notando che l'unico coefficiente di Cristoffel non nullo é $\Gamma_{11}^0 = \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}$):

$$\frac{dE}{E} = -\frac{da}{a} \quad (3.33)$$

Questa esprime una relazione di proporzionalità inversa fra l'energia propria del segnale luminoso e il fattore di scala della metrica FLRW. Perciò l'Eq. 3.29 può essere riscritta nella forma:

$$1 + z = \frac{a(t_{oss})}{a(t_{em})} = \frac{a_0}{a(t)} \quad (3.34)$$

dove a_0 e $a(t)$ si riferiscono rispettivamente ai valori del fattore di scala attuale e al tempo di emissione.

3.1.4 Distanza di luminosità

In astronomia la quantità più nota per misurare le distanze è la distanza di luminosità d_L , che costituisce un parametro molto utilizzato nelle osservazioni di supernovae Ia in quanto permette di confrontare la luminosità di una supernova con il tasso di espansione dell'Universo. Per poterla definire occorre introdurre il concetto di distanza propria. A tal proposito si considera un segnale che si propaga in direzione radiale verso l'origine e che pertanto soddisfa la condizione differenziale:

$$\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}} = -\frac{dt}{a(t)} = \frac{dz}{a_0 H(z)} \quad (3.35)$$

dove l'ultimo passaggio è stato ottenuto differenziando l'Eq. 3.34 e ricordando la definizione di H data nel paragrafo 3.1.2. Se assumiamo che il segnale venga emesso a distanza r_{em} e ricevuto nell'origine al tempo t_0 l'integrazione della precedente equazione, nell'ipotesi di curvatura nulla, conduce al seguente risultato:

$$\int_0^{r_{em}} dr = \int_0^z \frac{dz'}{a_0 H(z')} \Rightarrow a_0 r_{em} \equiv d_0 = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')} \quad (3.36)$$

che rappresenta effettivamente la distanza propria. Consideriamo adesso una sorgente posta a distanza r_{em} dall'origine, che emette radiazione con una potenza:

$$L_{em} = \left(\frac{dE}{dt} \right)_{em} \quad (3.37)$$

Sia F il flusso osservato nell'origine al tempo t_0 , ovvero la potenza ricevuta a distanza propria $d_0 = a_0 r_{em}$ per unità di tempo e di superficie, definito da

$$F = \frac{L_{oss}}{4\pi d_0^2} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r_{em}^2} \left(\frac{dE}{dt} \right)_{em} \quad (3.38)$$

Dunque si definisce distanza di luminosità la quantità:

$$d_L^2 \equiv \frac{L_{em}}{4\pi F} \quad (3.39)$$

Ricordiamo che nella metrica FLRW esiste una legge di proporzionalità inversa fra energia e fattore di scala che conduce all'espressione:

$$\frac{dE_{oss}}{dE_{em}} = \frac{1}{1+z_{em}} \quad (3.40)$$

Per effetto della dilatazione temporale tale risultato si estende anche agli intervalli di tempo, perciò:

$$\frac{dt_{oss}}{dt_{em}} = \frac{dE_{em}}{dE_{oss}} = 1+z_{em} \quad (3.41)$$

Sotto queste condizioni il flusso assume la forma:

$$F = \frac{L_{em}}{4\pi a_0^2 r_{em}^2 (1 + z_{em})^2} \quad (3.42)$$

da cui si ottiene:

$$d_L = (1 + z)a_0 r_{em} \quad (3.43)$$

Usando l'Eq. 3.36 e ricavando l'espressione di $H(z)$ dalla 3.25, si giunge al risultato finale:

$$d_L(z) = \frac{1 + z}{H_0} = \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\sum_n \Omega_{n0}(1 + z')^{3(1+\gamma_n)} + \Omega_{k0}(1 + z')^2}} \quad (3.44)$$

dove H_0 rappresenta l'attuale valore della costante di Hubble mentre $\Omega_{n0} \equiv \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{n0}$ e $\Omega_{k0} \equiv -\frac{k}{(a_0 H_0)^2}$ sono parametri che definiscono lo stato cosmologico attuale e che possono essere ottenuti direttamente dalle osservazioni sperimentali. Tuttavia per il confronto fra modello teorico e dati osservativi, si utilizza generalmente un parametro, detto modulo di distanza, definito nel modo seguente:

$$\mu \equiv 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{10} \right) \quad (3.45)$$

dove la distanza di luminosità viene espressa in *pc*. I dati sperimentali con cui effettuare un confronto sono quelli relativi al catalogo UNION2 ottenuto nell'ambito del *Supernova Cosmology Project* [12]. Si tratta di un catalogo che consiste in 557 supernovae Ia relative a valori di redshift nel range $z \in [0.015; 1.4]$, ottenuto estendendo il catalogo UNION con l'aggiunta di nuovi dati relativi a supernovae Ia con valori del redshift bassi e intermedi, trovati nell'ambito di progetti quali il *CfA3* e il *SDSS - II Supernova Search*, e di nuove supernovae Ia con alti valori di z scoperte attraverso il telescopio spaziale Hubble. In *Fig. 3.1* viene mostrata la distribuzione nel cielo delle supernovae Ia appartenenti al catalogo UNION2, mentre in *Fig. 3.2* i dati sperimentali dello stesso catalogo.

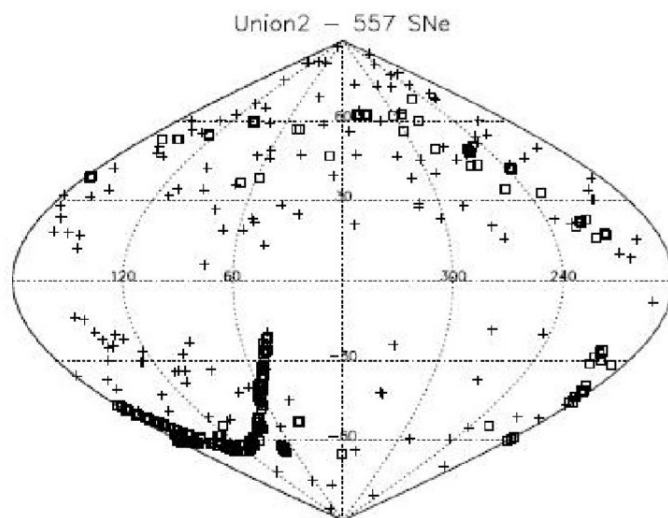


Figura 3.1: Distribuzione nel cielo delle 557 supernovae Ia del catalogo UNION2. Le supernovae con redshift $z < 0.1$ sono indicate col simbolo più, mentre il quadratino individua quelle con $z > 0.1$.

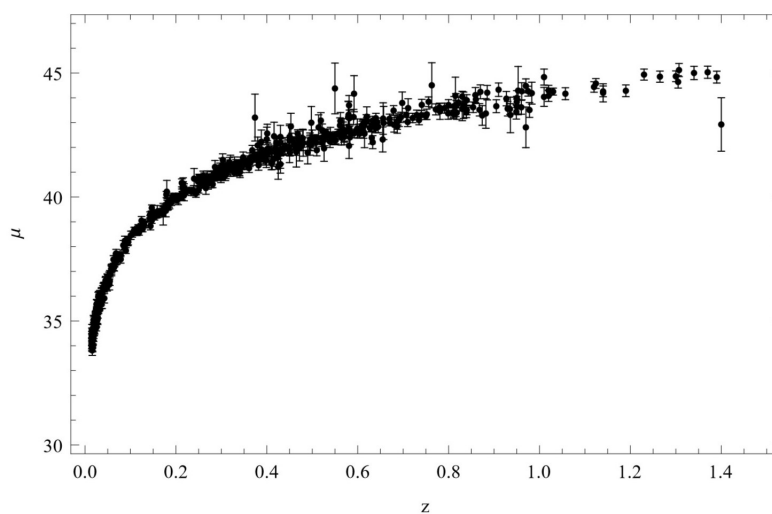


Figura 3.2: Dati sperimentali delle 557 supernovae del catalogo UNION2. Si riporta il modulo di distanza in funzione del redshift

3.2 Le supernovae Ia

Le supernovae sono esplosioni stellari estremamente energetiche la cui luminosità è elevata a tal punto da eguagliare quella della galassia che la ospita. Le supernovae sono classificate in base alle caratteristiche del loro spettro elettromagnetico. In particolare, le supernovae di tipo I sono caratterizzate dall'assenza delle linee dell'idrogeno, altrimenti, laddove tali linee sono presenti, si parla di supernovae di tipo II. Le prime possono a loro volta essere suddivise in ulteriori categorie a seconda della presenza di linee spettrali aggiuntive. Si definiscono supernovae di tipo Ia quelle che mostrano linee di assorbimento del silicio, di tipo Ib quando prevalgono le linee di assorbimento dell'elio mentre quando vi è l'assenza di questi tipi di linee, ma si osservano delle righe del calcio, del ferro e di altri elementi intermedi, si parla di tipo Ic.

Ad eccezione del tipo Ia, le supernovae si originano dal collasso gravitazionale di una stella massiccia, a cui segue un'esplosione nucleare che distrugge la stella. Una supernova di tipo Ia, non ha origine da una singola stella ma da un sistema stellare binario, ossia un sistema formato da due stelle orbitanti intorno al loro comune centro di massa. Inoltre, i sistemi binari che possono dar origine ad una supernova Ia sono quelli costituiti da una nana bianca composta da carbonio e ossigeno e da una stella compagna.

In un sistema binario, la stella più massiva evolve più velocemente e diventa una nana bianca prima che l'altra raggiunga lo stato di gigante rossa. Quando ciò si verifica, se le stelle sono abbastanza vicine, si può assistere al trasferimento di massa dalla gigante rossa alla nana bianca, come mostra la *Fig. 3.3*

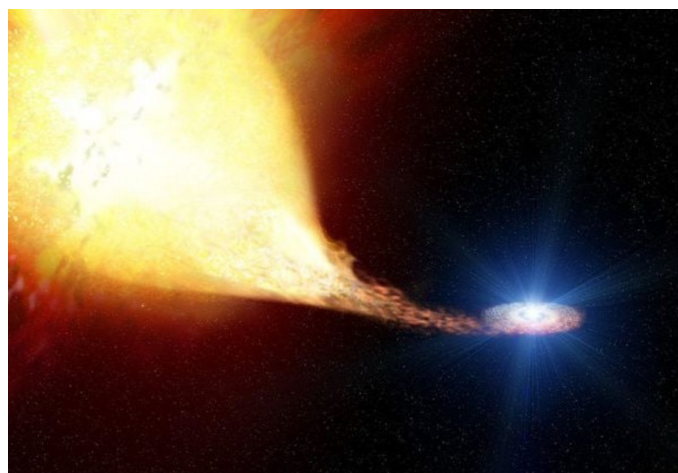


Figura 3.3: Trasferimento di massa da una gigante rossa ad una nana bianca

La nana bianca risulta stabile poichè la pressione degli elettroni degenerati, che ha origine dal principio di esclusione di Pauli, bilancia il collasso gravitazionale a cui la nana bianca sarebbe naturalmente soggetta. Questo equilibrio permane fintanto che la massa

della nana bianca risulta inferiore alla massa di Chandrasekhar [13] , pari a 1.44 volte la massa del Sole.

Nel caso in cui il trasferimento di massa sopra citato è tale da oltrepassare il limite di Chandrasekhar, il collasso gravitazionale predomina, la stella si contrae aumentando drasticamente la temperatura provocando l'accensione esplosiva del carbonio, nota col nome di deflagrazione. Dal momento che l'esplosione avviene ad un valore di massa fissato, è ragionevole affermare che la quantità di energia rilasciata in questi fenomeni sia sempre la stessa. Tale energia è sufficiente per far esplodere completamente la stella. La fusione nucleare nelle supernovae di tipo Ia converte il carbonio e l'ossigeno presenti nel nucleo della nana bianca in ^{56}Ni , che successivamente decade in ^{56}Co e infine in ^{56}Fe . La presenza delle linee di assorbimento del silicio nello spettro delle supernovae di tipo Ia è giustificato dal fatto che non tutto il materiale è convertito in ^{56}Ni . Dai modelli teorici la quantità di ^{56}Ni prodotta è di $\approx 0.5M_{\odot}$. L'analisi delle curve di luce forniscono importanti informazioni relative ai meccanismi che regolano la formazione della supernova. Come si osserva in *Fig. 3.4* , la luminosità delle supernovae aumenta rapidamente nelle prime due o tre settimane dopo l'esplosione fino a raggiungere un valore massimo, e poi decresce lentamente nei mesi successivi. Il picco di luminosità ha un valore molto elevato, confrontabile con quella della galassia ospitante. Inoltre, in accordo con quanto detto precedentemente, le curve di luce delle supernovae hanno andamenti molto simili, tanto da poter essere sovrapposte come in *Fig. 3.4*

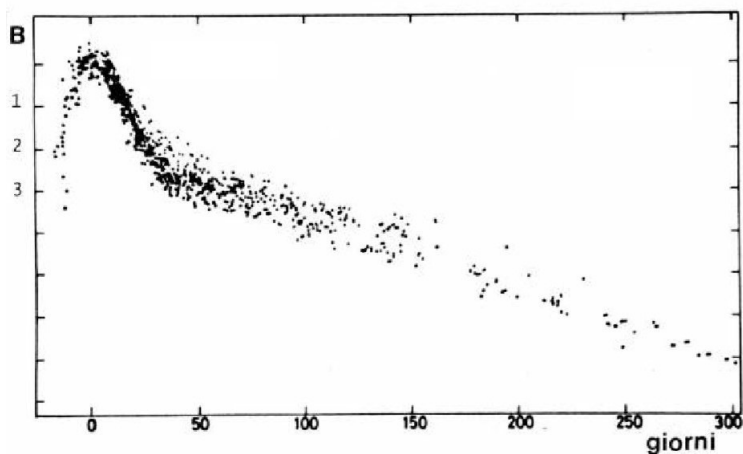


Figura 3.4: Curve di luce di 38 supernovae Ia. Si osserva la luminosità in funzione dei giorni che precedono e seguono l'esplosione

Queste caratteristiche permettono di utilizzare le supernovae Ia come candele standard, ovvero oggetti di cui si conosce con precisione la luminosità assoluta e di cui si può facilmente derivare la distanza facendo un confronto tra la luminosità assoluta e quella apparente.

3.3 Espansione accelerata ed energia oscura

Il modello cosmologico standard permette di spiegare in modo corretto diversi fenomeni ma allo stesso tempo presenta dei problemi. Tra questi, uno dei più importanti è legato proprio allo studio delle supernovae prima illustrato. Infatti per un Universo omogeneo ed isotropo, con solo radiazione e materia, il paragone con i dati sperimentali mette in evidenza un fatto molto interessante: mentre per piccoli redshift l'accordo è praticamente perfetto, si nota che ad alti z i valori misurati sono più grandi di quelli predetti. Di fatto ciò significa che il flusso misurato per le supernovae più lontane è minore di quanto atteso. Tale discrepanza è stata rilevata alla fine del 1998 da due collaborazioni indipendenti di cosmologi guidati da Saul Perlmutter [14], negli USA (*Supernova Cosmology Project*), e da Brian Schmidt [15], in Australia (*High - Z Supernovae Search Team*), che ha segnato un vero e proprio punto di svolta nella comprensione del cosmo.

L'impiego delle supernovae fornisce un punto cardine per l'interpretazione di μ poiché, come già detto, esse hanno una potenza di emissione uguale per tutte, indipendentemente dall'istante in cui sono esplose, dunque, supernovae con un flusso misurato inferiore alle aspettative sono più distanti di quanto atteso. Questo può essere spiegato dicendo che il cosmo, attualmente, si sta espandendo con un ritmo superiore a quello predetto, in particolare, per riprodurre le osservazioni, è necessario che tale espansione debba essere addirittura accelerata.

L'usuale forza di gravità agisce sulla materia in maniera attrattiva, quindi forza deve comportarsi come deterrente nei confronti di un'espansione, che può essere al più decelerata. Un'aumento del ritmo di espansione dell'universo, allora, richiede inevitabilmente la presenza di un nuovo tipo di sorgente, per la quale la forza di gravità ha un carattere sufficientemente repulsivo da dominare sull'attrazione di tutto il resto della materia ordinaria. Tale entità prende il nome di energia oscura poiché la sua natura non è chiara e la sua esistenza non è richiesta da nessun'altra evidenza in fisica. La Cosmologia standard introduce nelle equazioni di Einstein un termine detto di costante cosmologica che riesce a spiegare i dati sperimentali in questione. In particolare come abbiamo visto per il computo di d_L e del conseguente modulo di distanza, occorre specificare quali siano le componenti dell'Universo che intervengono nell'*Eq.* 3.44. A tal proposito ricordiamo che oltre alle componenti di materia e curvatura, rispettivamente Ω_m e Ω_k , occorre considerare anche la componente di energia oscura. Il modello più semplice utilizzato dalla Cosmologia standard per spiegare gli effetti dell'energia oscura è quello basato sulla costante cosmologica Λ e va sotto il nome di modello Λ -*Cold Dark Matter* (Λ CDM).

In *Fig.* 3.5 è mostrata la percentuale con cui sono presenti le principali componenti dell'Universo secondo tale modello.

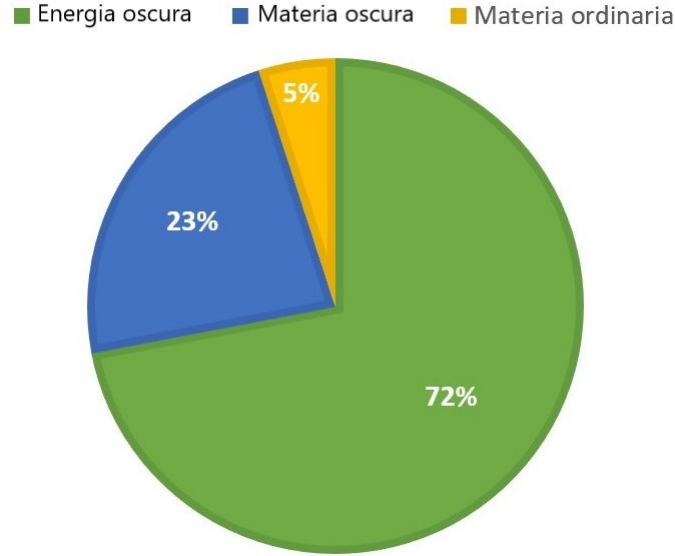


Figura 3.5: Grafico a torta relativo alla composizione dell'Universo secondo il modello Λ CDM.

Il significato fisico della costante cosmologica è associato alla densità di energia del vuoto che risulta costante nello spazio e nel tempo. Il vuoto cosmologico può essere infatti interpretato come un'entità con energia positiva e pressione negativa. E' proprio questa la caratteristica che permette di generare una forza repulsiva. Denotando con ρ_Λ la densità di questa energia oscura, la sua equazione di stato può essere scritta nella forma $p_\Lambda = -\rho_\Lambda = -\Lambda$, con conseguente parametro di stato $\gamma_\Lambda = -1$. Se indichiamo con $T_{\mu\nu} = \Lambda\delta_\mu^\nu$ il tensore energia-impulso che descrive gli effetti gravitazionali di tale costante e lo confrontiamo con l'equazione 3.13, troviamo effettivamente che esso corrisponde ad un fluido perfetto barotropico con densità di energia $\rho = \Lambda$ ed equazione di stato nella forma appena scritta.

Sotto queste condizioni possiamo riscrivere l'Eq. 3.26 nella forma:

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \quad (3.46)$$

Se assumiamo che il contributo di curvatura sia trascurabile, utilizzando i valori $\Omega_{m0} = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda0} = 0.7$ forniti dalle attuali osservazioni, siamo in grado di calcolare il valore di d_L e di conseguenza quello di μ . L'andamento del modulo di distanza in funzione del redshift per il modello descritto in confronto ai dati relativi al catalogo UNION2 è invece riportato in Fig. 3.6, da cui si evince chiaramente che andamento teorico e dati sperimentali sono in buon accordo.

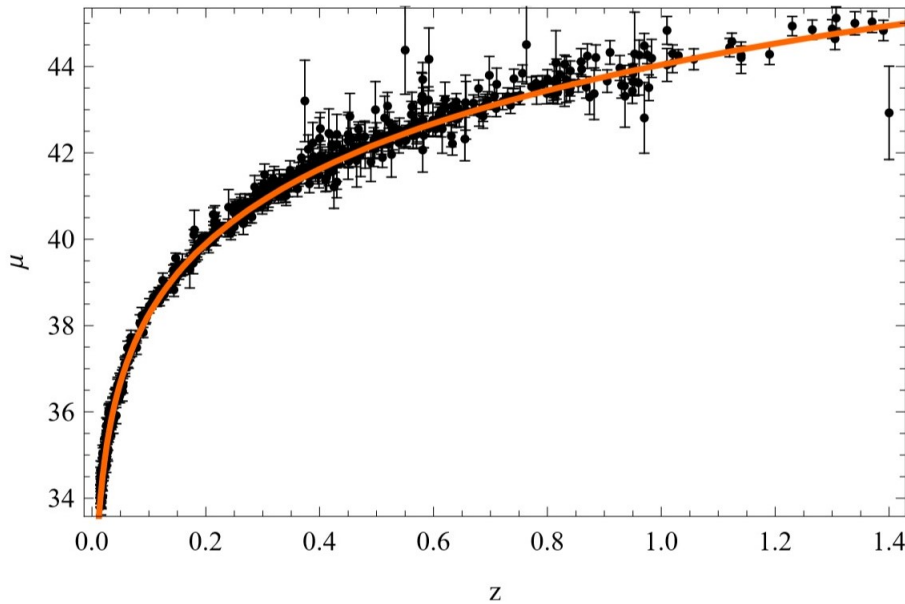


Figura 3.6: Modulo di distanza in funzione del redshift per le 557 supernovae Ia del catalogo UNION2. Si nota in arancione il fit ottenuto con il modello Λ CDM in buon accordo con i dati sperimentali.

Una possibile spiegazione dell'origine di questa energia va ricercata nel principio di indeterminazione di Heisenberg secondo cui il vuoto sia pieno di fluttuazioni quantistiche che creano coppie di particelle e antiparticelle virtuali che si annichiliscono in un tempo inversamente proporzionale alla propria energia.

Tuttavia, se si calcola la densità di energia del vuoto si ottiene un valore estremamente piccolo, molto simile al valore della densità critica, ovvero $\rho \approx 10^{-29} g/cm^3$, valore decisamente in contrasto con quello sperimentale che è $\rho \approx 10^{-29} g/cm^3$. Questa enorme discrepanza di circa 123 ordini di grandezza fra risultato teorico e sperimentale, è alla base di uno dei problemi principali della fisica teorica, noto come problema della costante cosmologica [11].

In aggiunta andrebbe considerato anche il problema della coincidenza, ovvero il fatto singolare che la densità di energia del vuoto sembra aver iniziato a dominare rispetto alla densità di materia pressapoco nell'epoca attuale. Si tratta di un problema che caratterizza non soltanto il modello della costante cosmologica, ma tutti i modelli riguardanti l'energia oscura.

3.4 Espansione accelerata: una spiegazione alternativa

Esiste un'ulteriore spiegazione al fenomeno dell'espansione cosmica in accordo con i dati delle supernovae Ia a grandi redshift e che non richiede l'introduzione di una forma esotica di energia, quale l'energia oscura. Come sappiamo, la Cosmologia standard si fonda sul Principio Cosmologico, generalizzazione del principio copernicano secondo cui a grandi scale l'Universo risulta uniforme ed omogeneo. Supponiamo di trascurare il Principio Cosmologico, a favore di un'espansione non omogenea dell'Universo, come quella mostrata in *Fig. 3.7*. Osserviamo che la distribuzione su grande scala dell'Universo è composta da aggregati di materia, filamenti, ma anche vuoti cosmici.

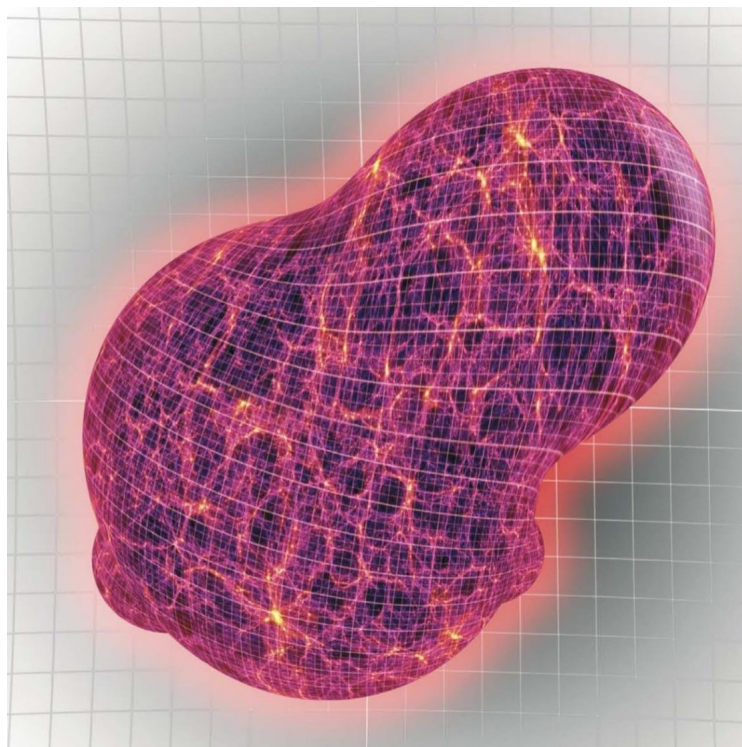


Figura 3.7: Rappresentazione di espansione non uniforme dello spazio

In questo contesto possiamo immaginare che la posizione della Terra non sia del tutto irrilevante, ma che questa si trovi in una posizione privilegiata, ad esempio in un gigantesco vuoto cosmico, ovvero in una depressione nella distribuzione delle galassie caratterizzata da una minore densità di materia,

Come sappiamo, la materia frena lo spazio-tempo facendo diminuire il tasso di espansione. Ma se si considera una regione di spazio in cui la densità di materia è estremamente

piccola, l'effetto di frenamento dell'espansione risulterà essere minore rispetto ad altre regioni dell'Universo. Pertanto in ogni istante di tempo, regioni diverse dello spazio si espanderebbero a tassi diversi. In particolare, il tasso risulta essere massimo al centro dei vuoti, e si riduce in prossimità dei bordi, laddove si avvertono gli effetti della densità di materia esterna.

In questo contesto, i dati relativi all'osservazione di supernovae sono fortemente dipendenti dalla posizione in cui avviene l'emissione. Se una supernova esplose in una regione lontana, la luce emessa attraverserà zone in cui sono presenti vuoti e zone più omogenee. In particolare, se la nostra posizione fosse al centro del vuoto, l'espansione dello spazio sarebbe più rapida nelle regioni limitrofe rispetto al punto in cui si trova la supernova.

L'onda luminosa, attraversando quindi zone che si espandono a velocità sempre più elevata, subisce un allungamento che produce lo spostamento verso il rosso osservato sperimentalmente. Se l'Universo si comportasse in questo modo, la luce dovrebbe percorrere una distanza maggiore per ottenere lo stesso redshift che si avrebbe nel caso in cui l'Universo si espandesse in maniera omogenea e con un tasso costante.

L'esistenza di un vuoto cosmico gigantesco in grado di produrre gli stessi effetti dell'energia oscura è ritenuta altamente improbabile, ma studi risalenti ai primi anni novanta hanno mostrato che la probabilità che gli osservatori si trovino in una struttura simile a quella appena descritta non è del tutto trascurabile. Osservazioni future saranno in grado di risolvere la questione tra energia oscura e modelli di vuoto e determinare quale sia il modello più opportuno per descrivere la fase di espansione che l'Universo sta attraversando.

E' importante mettere in evidenza che entrambe i modelli non sono predittivi, ma contengono parametri liberi che vengono fissati in modo da riprodurre al meglio i risultati sperimentali. L'ipotesi delle disomogeneità nel cosmo prende piede essenzialmente per una questione di economia intellettuale sulla descrizione dell'Universo, al fine di evitare l'introduzione dell'energia oscura ed il problema della sua interpretazione.

Capitolo 4

Modello di Lemaître-Tolman-Bondi

4.1 Motivazioni

Come abbiamo visto nel precedente capitolo un universo omogeneo e isotropo è descritto dal modello Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW). Questo descrive la geometria dell'universo in termini di una singola funzione, il fattore di scala, che obbedisce all'equazione di Friedmann. In questo quadro si assume l'esatta invarianza traslazionale e rotazionale.

Quando vengono introdotte le fluttuazioni di densità, le loro possibili compatibilità con il suddetto modello dipendono dalle proprietà statistiche delle fluttuazioni. Se la distribuzione della materia è una realizzazione di un processo stocastico stazionario, essa è statisticamente omogenea e isotropa, soddisfacendo così ancora il requisito copernicano dell'assenza di punti o direzioni speciali. Tuttavia il processo può non essere di tipo stocastico stazionario e dunque spazialmente omogeneo e in quest'ultimo caso la distribuzione della materia non soddisfa il Principio Cosmologico.

Infatti come abbiamo visto nel capitolo 2, l'isotropia attorno a ciascun punto insieme all'ipotesi che la distribuzione della materia sia una funzione regolare della posizione, cioè che sia analitica, implica omogeneità spaziale.

Questo non è più il caso di una struttura non analitica, per la quale l'ostacolo all'applicazione delle soluzioni FLRW ha di fatto a che fare solo con la mancanza di omogeneità spaziale. Di recente, i tentativi di costruire modelli cosmologici che tengano conto delle disomogeneità spaziali, hanno riscontrato un rinnovato interesse per quanto riguarda sia la rilevazione di una complessa rete di ammassi di galassie, fasci e vuoti sia perché potrebbero spiegare l'espansione accelerata dell'universo in maniera alternativa. In effetti, la deduzione dell'esistenza di energia oscura si basa sul presupposto che l'universo abbia una geometria FLRW.

L'idea alla base di modelli disomogenei è quella di interpretare l'accelerazione derivata dalle osservazioni delle supernovae Ia come un effetto apparente che si presenta in una

soluzione troppo semplificata delle equazioni di campo di Einstein, vale a dire quelle derivate con una densità e una pressione costanti nello spazio e dipendenti solo dal tempo.

È possibile distinguere tra due approcci principali a un Universo disomogeneo: considerare la media spaziale delle disomogeneità oppure usare modelli che collocano l'osservatore in un punto speciale dell'Universo locale. L'energia oscura può quindi essere considerata un artefatto causata dalla disomogeneità. È in corso un dibattito sul fatto che un modello disomogeneo possa quindi evolversi, in media, come la soluzione FLRW omogenea in accordo con le osservazioni [16].

Nel secondo tipo di approccio si utilizza invece un comportamento molto ad hoc della densità spaziale che implica una scomposizione dell'assunzione copernicana sulla scala di Hubble: in particolare si suppone che siamo vicini al centro di una zona sfericamente simmetrica e a bassa densità. In questo contesto, i modelli nell'ambito della relatività generale più semplici sono le soluzioni Lemaître-Tolman-Bondi (LTB) sfericamente simmetriche con un osservatore centrale che rappresentano chiaramente una drastica semplificazione del problema.

I modelli LTB senza energia oscura possono adattarsi ai dati misurati dalle supernovae Ia, spiegando l'apparente accelerazione dell'Universo dovuto a un vuoto in scala dei *Gpc* intorno a noi, che richiede quindi assunzioni precise e ad hoc sulle proprietà della distribuzione della materia. In questo lavoro tratteremo un modello intermedio ai due casi proposti. Nella trattazione seguente assumeremo c , velocità della luce pari a 1.

4.2 La metrica

Affrontiamo, dunque, lo studio di metriche non omogenee a simmetria sferica. Per via di quest'ultima caratteristica, è opportuno adottare un sistema di coordinate polari, in cui le disomogeneità presenti possono essere esclusivamente radiali: in questi termini, dunque, la forma più generale possibile della metrica cercata è la seguente

$$ds^2 = A_1(r, t)^2 dt^2 - A_2(r, t)^2 dr^2 - A_3(r, t)^2 dr dt - A_4(r, t)^2 d\Omega^2 \quad (4.1)$$

Si noti che la 4.1, a prima vista, appare decisamente complicata, per via della presenza dei termini *off-diagonal* g_{10} . Tuttavia, è possibile semplificarla

senza perdere generalità, ridefinendo il raggio e il tempo tramite opportuni cambi di coordinate

$$\begin{cases} r \rightarrow r' = f_1(r, t) \\ t \rightarrow t' = f_2(r, t) \end{cases} \quad (4.2)$$

dove f_1 ed f_2 devono soddisfare delle particolari condizioni che rimuovono alcuni gradi di libertà legati alla scelta del *gauge*. Così facendo, la 4.1 può essere riespressa

nella seguente forma:

$$ds^2 = dt^2 - X(r, t)^2 dr^2 - A(r, t)^2 d\Omega^2 \quad (4.3)$$

dove $X(r, t)$ e $A(r, t)$ sono delle nuove funzioni, combinazioni delle precedenti $A1$, $A2$, $A3$ e $A4$ e $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. Siamo riusciti, così, ad eliminare il termine non diagonale e, inoltre, abbiamo richiesto che $g_{00} = 1$, il che equivale a dire, anche in questo caso, che t è un tempo cosmico valido per tutti gli osservatori statici. Infatti, anche per la 4.3, gli osservatori statici sono geodetici, dal momento che $\Gamma_{00}^\mu = 0$ (vedi 3.7). Rimane, tuttavia, il fatto che in questo caso le dipendenze di $g_{\mu\nu}$ da r e da t non sono fattorizzate, almeno in linea di principio. A questo punto, è possibile calcolare le componenti necessarie per le equazioni di Einstein. Introduciamo la notazione $f' \equiv \frac{\partial f}{\partial r}$ e $\dot{f} \equiv \frac{\partial f}{\partial t}$. Le componenti del tensore di Ricci non nulle sono le seguenti:

$$R_1^0 = 2 \left(\frac{A' \dot{X}}{A X} - \frac{\dot{A}'}{A} \right) \quad (4.4a)$$

$$R_0^0 = -\frac{\ddot{X}}{X} - 2\frac{\ddot{A}}{A} \quad (4.4b)$$

$$R_1^1 = -\frac{\ddot{X}}{X} + \frac{2}{X^2} \frac{A''}{A} - 2\frac{\dot{A} \dot{X}}{A X} - \frac{2}{X^2} \frac{A' X'}{A X} \quad (4.4c)$$

$$R_2^2 = R_3^3 = -\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{\ddot{A}}{A} - \frac{\dot{A} \dot{X}}{A X} + \frac{1}{X^2} \left[\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + \frac{A''}{A} - \frac{A' X'}{A X} - 1 \right] \quad (4.4d)$$

mentre la curvatura scalare assume la seguente forma:

$$R = -2\frac{\ddot{X}}{X} - 4\frac{\ddot{A}}{A} - 4\frac{\dot{A} \dot{X}}{A X} - 2\left(\frac{\dot{A}}{A}\right)^2 - \frac{2}{A^2} + \frac{1}{X^2} \left[2\left(\frac{A'}{A}\right)^2 + 4\frac{A''}{A} - 4\frac{A' X'}{A X} \right] \quad (4.5)$$

Lo studio delle sorgenti sarà affrontato nel successivo paragrafo; tuttavia, sottolineato che si tratta sempre di fluidi perfetti descritti da osservatori statici, T_μ^ν è dato ancora una volta dall'espressione 3.13. Poiché esso è diagonale, dovrà essere $R_1^0 = 0$, a seguito delle equazioni di campo 3.10; vale, dunque:

$$\frac{A' \dot{X}}{A X} = \frac{\dot{A}'}{A} \Rightarrow \frac{\dot{X}}{X} = \frac{\dot{A}'}{A'} \Rightarrow X(r, t) = F(r) A'(r, t) \quad (4.6)$$

dove $F(r)$ è una funzione che deriva dall'integrazione in t . La metrica in esame prevede che sia:

$$F(r) \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - k(r)}} \quad (4.7)$$

per cui si ottiene:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{A'(r, t)^2}{1 - k(r)} dr^2 - A(r, t)^2 [d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2] \quad (4.8)$$

Il tensore metrico 4.8 fu trovato quasi contemporaneamente da Lemaître nel 1933 [17] e da Tolman un anno dopo [18], e fu successivamente ripreso e sistematizzato nel 1947 da Bondi [19]; per questo motivo é anche noto come metrica di Lemaître-Tolman-Bondi. La scelta 4.7 risulta particolarmente utile poiché permette di riferirsi immediatamente al caso limite della metrica Friedmann-Robertson-Walker con le seguenti sostituzioni:

$$A(r, t) \rightarrow ra(t) \quad k(r) \rightarrow Kr^2 \quad (4.9)$$

4.3 Le sorgenti

Come anticipato nel precedente paragrafo, anche in questo modello scegliamo, in qualità di sorgenti gravitazionali, fluidi perfetti barotropici e non interagenti; tuttavia, differentemente dal caso precedente, per via della disomogeneità, adesso densità e pressioni dipendono anche dalla coordinata radiale, per cui l'equazione di stato sarà $p_n(r, t) = \gamma_n \rho_n(r, t)$. Questa modifica ha importanti conseguenze; consideriamo, infatti, l'identità di Bianchi:

$$\nabla_\nu T_\mu{}^\nu \equiv \partial_\nu T_\mu{}^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}{}^\nu T_\mu{}^\alpha - \Gamma_{\nu\mu}{}^\alpha T_\alpha{}^\nu = 0 \quad (4.10)$$

che, nel nostro caso, può essere studiata anche per $\mu = 1$: si ottiene

$$\begin{aligned} \partial_\nu T_1^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_1^\alpha - \Gamma_{\nu 1}^\alpha T_\alpha^\nu &= 0 \Rightarrow \partial_1 T_1^1 + \Gamma_{\nu 1}^\nu T_1^1 - \Gamma_{11}^1 T_1^1 - \Gamma_{21}^2 T_2^2 - \Gamma_{31}^3 T_3^3 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow - \sum_n p_n' - \left(\frac{X'}{X} + 2 \frac{A'}{A} \right) \sum_n p_n + \frac{X'}{X} \sum_n p_n + 2 \frac{A'}{A} \sum_n p_n = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sum_n p_n'(r, t) = 0 \Rightarrow \sum_n \gamma_n \rho_n'(r, t) = 0 \Rightarrow \gamma_n \rho_n'(r, t) = 0 \quad \forall n \end{aligned} \quad (4.11)$$

dove l'ultimo passaggio è valido poiché i fluidi non interagiscono. In questo modo, tutti i fluidi per cui $\gamma_n \neq 0$ devono avere $\rho_n'(r, t) = 0$, ovvero devono essere distribuiti omogeneamente nello spazio. L'unica situazione in cui si possono presentare delle effettive disomogeneità radiali si presenta per il fluido di materia per cui $\gamma_{mat} = 0$. Per queste ragioni, con la metrica Lemaître-Tolman-Bondi., le disomogeneità diventano molto importanti ai giorni nostri, nella fase cosmica dominata appunto dalla materia; al contrario, si può ritenere che la descrizione dell'Universo precedente all'età dell'equilibrio sia correttamente fornita dal modello Friedmann-Robertson-Walker poiché, in tali condizioni, il fluido dominante era di radiazione il quale, per quanto visto, deve essere omogeneo e deve, quindi, dare luogo ad un potenziale gravitazionale omogeneo.

Il fatto che le disomogeneità diventano rilevanti proprio durante la fase attuale può essere la soluzione di un annoso problema legato all'energia oscura; di fatto, nel modello di Friedmann-Robertson-Walker con radiazione, materia ed energia oscura si osserva che, proprio al tempo attuale, si sta passando dalla fase dominata dalla materia a quella dominata dall'energia oscura (infatti Ω_{m0} e $\Omega_{\Lambda 0}$ sono dello stesso ordine di grandezza).

La questione su cui ci si interroga è perché stia avvenendo proprio ora. Potrebbe semplicemente trattarsi di una cosmica coincidenza, oppure potrebbe essere solamente un fenomeno apparente. In un Universo di Lemaître-Tolman-Bondi senza energia oscura, tale questione semplicemente non si pone, dal momento che, come già spiegato, il ruolo dell'energia oscura è soppiantato da quello delle disomogeneità, che assumono maggiore rilevanza nella fase contemporanea.

Per quanto detto finora, dunque, nell'Universo di Lemaître-Tolman-Bondi consideriamo come unica sorgente gravitazionale rilevante il fluido di materia per il quale l'identità di Bianchi, per $\mu = 0$, dà:

$$\partial_\nu T_0^\nu + \Gamma_{\nu\alpha}^\nu T_0^\alpha - \Gamma_{\nu 0}^\alpha T_\alpha^\nu = 0 \Rightarrow \partial_0 T_0^0 + \Gamma_{\nu 0}^\nu T_0^0 = 0 \Rightarrow \dot{\rho} + \left(2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{X}}{X}\right)\rho = 0 \quad (4.12)$$

che, con la sostituzione 4.6 diventa:

$$\dot{\rho} + \left(2\frac{\dot{A}}{A} + \frac{\dot{A}'}{A'}\right)\rho = 0 \quad (4.13)$$

Notiamo, dunque, che l'evoluzione nel tempo della densità di materia non dipende in alcun modo dalla particolare forma funzionale $F(r)$.

4.4 Le equazioni

Dopo aver determinato la forma della metrica e le sorgenti, è finalmente possibile scrivere le equazioni di Einstein per il modello in esame, che sono:

$$\frac{\dot{A} + k}{A^2} + \frac{2\dot{A}\dot{A}' + k'}{AA'} = 8\pi G\rho \quad (4.14a)$$

$$\frac{\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + k}{A^2} = 0 \quad (4.14b)$$

Da queste è possibile comprendere meglio l'interpretazione fisica di alcuni termini; in particolare, prendendo $A \neq 0$, possiamo riscrivere la 4.14b così:

$$\dot{A}^2 + 2\ddot{A}A + k = 0 \Rightarrow \dot{A}^3 + 2A\dot{A}\ddot{A} = -k(r)\dot{A} \quad (4.15)$$

Il primo membro dell'ultima uguaglianza nelle (4.14) è pari a $\frac{\partial A \dot{A}^2}{\partial t}$ per cui, integrando, si ottiene:

$$\frac{\partial A \dot{A}}{\partial t} = -k(r) \frac{\partial A}{\partial t} \Rightarrow A \dot{A}^2 = -k(r)A + \alpha(r) \Rightarrow \dot{A}(r, t)^2 = -k(r) + \frac{\alpha(r)}{A(r, t)} \quad (4.16)$$

dove $\alpha(r)$ deriva dall'integrazione in t . L'espressione 4.16 è familiare: esaminiamo, infatti, in un contesto di gravità newtoniana, un corpo di massa m che si muove radialmente all'interno di un'ammasso omogeneo di densità $\rho(r, t)$: la sua energia sarà

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{GM_N(r, t)m}{r} \Rightarrow \dot{r}^2 = \frac{2E}{m} - \frac{GM_N(r, t)}{r} \quad (4.17)$$

dove M_N è la massa contenuta entro il raggio r , data da

$$M_N(r, t) = \int_0^r d\tilde{r} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(\tilde{r}, t) \tilde{r}^2 \sin\theta \quad (4.18)$$

Un confronto tra la 4.16 e la 4.17 permette di chiarire il significato di alcuni termini; in particolare: $A(r, t)$ corrisponde alla distanza radiale effettiva nell'Universo di Lemaitre-Tolman-Bondi. Questo è facilmente comprensibile anche guardando direttamente la metrica in esame $k(r)$, oltre a rappresentare la curvatura spaziale locale, è legato anche alla densità di energia per unità di massa; $\alpha(r)$ è legato alla massa del fluido considerato. Tuttavia, è interessante notare che la stessa massa ha una espressione leggermente differente nel contesto della metrica LTB, data da:

$$M_{LTB}(A(r, t)) = \int_0^r d\tilde{r} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(\tilde{r}, t) \frac{A'(\tilde{r}, t)}{\sqrt{1 - k(\tilde{r})}} A(\tilde{r}, t)^2 \sin\theta = \int_0^{A(r, t)} dA \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(A, t) \frac{A^2 \sin\theta}{\sqrt{1 - k(A)}} \quad (4.19)$$

Questa caratteristica è nota come difetto di massa relativistico, ed è legata al fatto che la gravità newtoniana è formulata nell'ambito di uno spazio piatto. L'ultimo aspetto da analizzare prima di affrontare lo studio della distanza di luminosità riguarda la possibilità di espansioni accelerate. Combinando le equazioni 4.14a e 4.14b, è possibile determinare l'equivalente della 3.22 per il modello di LTB, data da:

$$\frac{1}{3} \frac{\ddot{A}'}{A'} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{A}}{A} = -\frac{4\pi G}{3} \rho \quad (4.20)$$

Dal momento che ρ è positivo, si ha che la somma delle accelerazioni deve essere negativa; in particolare, si possono presentare i seguenti casi:

$$\begin{aligned}
\frac{\ddot{A}'}{A'} < 0 & \quad \frac{\ddot{A}}{A} < 0 \\
\frac{\ddot{A}'}{A'} < 0 & \quad \frac{\ddot{A}}{A} > 0 \\
\frac{\ddot{A}'}{A'} > 0 & \quad \frac{\ddot{A}}{A} < 0
\end{aligned}
\tag{4.21}$$

dove le ultime due situazioni devono essere tali da rispettare 4.20. Si noti come, anche in presenza di sola materia, le espansioni radiali, date da $\frac{\dot{A}'}{A'}$, possono essere accelerate, così come possono esserlo anche quelle trasversali $\frac{\dot{A}}{A}$. Tuttavia, l'esistenza di due moti concorrenti annebbia l'interpretazione di accelerazione in generale. In altre parole, il concetto di espansione accelerata diventa ambiguo in presenza di disomogeneità.

4.5 Distanza di luminosità

Adesso, poniamo l'attenzione sulla determinazione della distanza di luminosità in un Universo non omogeneo. Poiché adesso non c'è più invarianza per traslazioni, il computo della superficie S nella 3.39 non può più essere effettuato come nel paragrafo 3.1.4, ma deve essere valutata direttamente. Tuttavia, in generale, questo calcolo non è affatto banale. Introduciamo, pertanto, alcuni concetti che permettono di valutare direttamente la distanza di luminosità senza dover valutare S .

Definiamo la *angular diameter distance* d_A nel seguente modo:

$$d_A^2 \equiv \frac{\delta S}{\delta \Omega} \tag{4.22}$$

dove δS è l'estensione areale propria di un qualsiasi oggetto nel cosmo e $\delta \Omega$ è l'angolo solido sotteso tra l'oggetto in esame e l'osservatore. Da un punto di vista sperimentale, le supernovae Ia sono troppo lontane per cui risulta molto difficile determinarne l'estensione apparente. Tuttavia, esiste una relazione teorica, detta relazione di dualità per le distanze, che lega d_A a d_L riportata di seguito:

$$d_L = (1 + z^2 d_A) \tag{4.23}$$

Essa è legata esclusivamente alla conservazione del numero di fotoni durante la loro propagazione nell'Universo, e dal momento che consideriamo sempre fluidi non interagenti, tale ipotesi è valida anche nella nostra descrizione. Dal punto di vista dei calcoli, la relazione di dualità è di grande importanza poiché esiste una relazione che permette di determinare d_A in tutta generalità, data da

$$\frac{d(d_A)}{d_A} = \frac{1}{2} \nabla_\alpha p^\alpha d\tau \quad (4.24)$$

dove τ è un parametro temporale affine, p_α è il quadrivettore impulso del segnale che si propaga e ∇_α è l'usuale derivata covariante. Nel caso della metrica di Lemaître-Tolman-Bondi, valutiamo la 4.24 considerando segnali di tipo luce che si propagano in maniera radiale dalla sorgente fino all'osservatore posto nell'origine del sistema di coordinate; in questo modo, si ha che $p_2 = p_3 = 0$, per cui:

$$\nabla_\alpha p^\alpha = \partial_\alpha p^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu}^\alpha p^\mu = \partial_\alpha p^\alpha + \frac{\partial_\mu \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} p^\mu = \partial_0 p^0 + \partial_1 p^1 + \frac{\partial_0 \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} p^0 + \frac{\partial_1 \sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} p^1 \quad (4.25)$$

dove, come sempre, $\sqrt{-g} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = X(r, t)A(r, t)^2 \sin\theta$. In questo modo, dunque, si ha che:

$$\partial_0 \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{\dot{X}}{X} + 2 \frac{\dot{A}}{A} \quad (4.26a)$$

$$\partial_1 \frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}} = \frac{X'}{X} + 2 \frac{A'}{A} \quad (4.26b)$$

Per valutare $\partial_0 p^0$ e $\partial_1 p^1$, consideriamo l'equazione del trasporto parallelo per il quadrivettore impulso, che nel nostro caso diventa:

$$dp^0 + \Gamma_{\mu\nu}^0 dx^\mu p^\nu = 0 \Rightarrow dp^0 = -\Gamma_{11}^0 dx^1 p^1 \quad (4.27a)$$

$$dp^1 + \Gamma_{\mu\nu}^1 dx^\mu p^\nu = 0 \Rightarrow dp^1 = -[\Gamma_{10}^1 (dx^1 p^0 + dx^0 p^1) + \Gamma_{11}^0 dx^1 p^1] \quad (4.27b)$$

da cui si ottiene:

$$\begin{cases} \partial_0 p^0 = 0 \\ \partial_1 p^1 = -(\Gamma_{10}^1 p^0 + \Gamma_{11}^1 p^1) = -\frac{\dot{X}}{X} p^0 - \frac{X'}{X} p^1 = -\frac{d \ln X}{d\tau} \end{cases} \quad (4.28)$$

A questo punto, combinando le relazioni 4.25, 4.26b e 4.28 si ottiene, integrando la 4.24:

$$d_A = A(r, t) \quad (4.29)$$

per cui la distanza di luminosità è:

$$d_L = (1 + z)^2 A(r, t) \quad (4.30)$$

Poiché stiamo considerando esclusivamente segnali luce radiali, il redshift sarà dato riferendosi alla 3.29

$$\begin{aligned} dp^0 + \Gamma_{11}^0 p^1 dx^1 = 0 &\Rightarrow dp^0 + X \dot{X} \frac{p^0}{X} \frac{dt}{X} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\dot{E}}{E} = -\frac{\dot{X}}{X} = -\frac{\dot{A}'}{A} \Rightarrow 1 + z = \frac{A'(r_{oss}, t_{oss})}{A'(r_{em}, t_{em})} \end{aligned} \quad (4.31)$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che $\Gamma_{11}^0 = X\dot{X}$ e $g_{00} = 1$.

Diversamente da quanto accadeva per FRW, il redshift dipende anche dalla posizione di emissione dal momento che, come già detto, nel fattore di espansione le dipendenze da r e da t in generale non sono più disaccoppiate. Consideriamo, perciò, due segnali luce ($ds^2 = 0$) che si propagano radialmente ($d\theta = d\phi = 0$) e che partono dalla stessa posizione in due istanti t e $t + \delta t$ leggermente distanziati; per quanto detto, devono valere:

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{A'(r, t)}{\sqrt{1 - k(r)}} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.32a)$$

$$\frac{t + \delta t}{d\tau} = -\frac{A'(r, t + \delta t)}{\sqrt{1 - k(r)}} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.32b)$$

dove ancora una volta τ è un parametro temporale. Poiché δt è piccolo, possiamo sviluppare in serie di Taylor la 4.32b e combinarla successivamente con la 4.32a, per cui:

$$\frac{dt}{d\tau} + \frac{d\delta t}{d\tau} \approx -\frac{A'(r, t) + \delta t \dot{A}'(r, t)}{\sqrt{1 - k(r)}} \frac{dr}{d\tau} \Rightarrow \frac{d\delta t}{d\tau} = -\delta t \frac{\dot{A}'(r, t)}{\sqrt{1 - k(r)}} \frac{dr}{d\tau} \quad (4.33)$$

La necessità del confronto con i dati in *Fig. 3.2* richiede che r e t debbano essere espressi in funzione di z ; per fare ciò, notiamo che, dalla 3.29, si ha:

$$1 + z = \frac{\delta t_{oss}}{\delta t(\tau)} \quad (4.34)$$

Per cui, derivando rispetto ad un tempo proprio τ e combinando con la 4.33 abbiamo:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\delta t_{oss}}{\delta t(\tau)^2} \frac{d\delta t}{d\tau} = (1 + z) \left(-\frac{\dot{A}'(r, t)}{\sqrt{1 - k(r)}} \frac{dr}{d\tau} \right) \quad (4.35)$$

Così facendo, le relazioni tra t , r e z si ottengono sviluppando dt/dz dr/dz e sostituendo le 4.32a, 4.35 come segue:

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{A'(r, t)}{(1 + z)\dot{A}'(r, t)} \quad (4.36a)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{\sqrt{1 - k(r)}}{(1 + z)\dot{A}'(r, t)} \quad (4.36b)$$

Queste due equazioni differenziali regolano le dipendenze $r(z)$ e $t(z)$, che permettono di esprimere la 4.30 come:

$$d_L(z) = (1 + z)^2 A(r(z), t(z)) \quad (4.37)$$

Ricordiamo, ancora una volta, che la 4.37 è stata ottenuta considerando esclusivamente segnali radiali di tipo luce.

4.6 Modello di Lemaître-Tolman-Bondi con distribuzione di materia frattale

In questo lavoro adottiamo un approccio che consiste nel modellare le disomogeneità spaziali deducendole dalle osservazioni delle strutture delle galassie. In effetti, l'analisi statistica delle indagini tridimensionali delle galassie ha dimostrato che la loro distribuzione è caratterizzata, nell'Universo locale, da correlazioni che seguono una legge di potenza [20, 21, 22]. In particolare, è stato riscontrato che la densità condizionale media decade come $\langle n(r) \rangle_p \approx r^{-\gamma}$ dove $\gamma = 0,9 \pm 0,1$ per $r \in [0.1; 20] Mpc/h$ e $\gamma = 0,2 \pm 0,1$ per $r \in [20; 100] Mpc/h$ [23]. Dove $\langle n(r) \rangle_p$ rappresenta il valore medio del numero di galassie a distanza r nel punto p .

Il decadimento delle correlazioni sulle scale $r > 100 Mpc/h$ e il crossover della distribuzione verso l'uniformità sono ancora oggetto di considerevoli discussioni [22]. Il comportamento della legge di potenza che regola la densità condizionale può essere interpretato come distribuzione di galassie con proprietà frattali su piccola scala. In questo caso intendiamo per frattale una distribuzione non analitica dei punti.

Notiamo che $\langle n(r) \rangle$ decade solo in media come una legge di potenza. Dunque la densità condizionale decade come $n_i(r) \approx f_i(r)r^{-\gamma}$ dove la correzione per ridimensionare $f_i(r)$ è tale che $\sigma_p(r) = \langle n_i(r)^2 \rangle - \langle n(r) \rangle_p^2 = \langle (f(r) - 1)^2 \rangle \approx const$ [6]. Quindi $\sigma_p(r)$ è la varianza del numero di galassie misurate da un certo punto p in una sfera di raggio r . Se $\sigma_p(r) < 1$, come per le strutture della galassia reale [23], possiamo approssimare il campo sorgente della materia discreta come:

$$\rho_d(r) = \sum_i m_i \delta^D(\bar{r} - \bar{r}_i) \approx \langle n(r) \rangle \quad (4.38)$$

ovvero si attribuisce ad ogni punto del frattale una massa m_i , riprendendo dunque il concetto di densità condizionale espresso nel paragrafo 2.1.1 Questa situazione ci consente di utilizzare una metrica LTB regolare per descrivere il decadimento spaziale della densità senza assumere l'esistenza di una posizione speciale nell'Universo. Nei modelli LTB l'isotropia è valida solo per l'osservatore privilegiato che effettua misurazioni dal centro del sistema di coordinate. Qualsiasi altro osservatore in un Universo LTB lontano dal centro sperimenterà un'anisotropia dipolare e quindi il Principio Cosmologico non è valido in tale quadro. Notiamo che per una distribuzione frattale caratterizzata da una dimensione $D < 3$, la densità ha un andamento del tipo:

$$\rho = \frac{M}{V} \approx \frac{R^D}{R^3} \approx R^{D-3} \quad (4.39)$$

dunque:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \rho = 0 \quad (4.40)$$

Questo equivale a dire che la densità media non è una quantità ben definita per un frattale in quanto nel limite di un volume infinito essa tende asintoticamente a zero. Questo risultato ci dice che la densità frattale sta decrescendo a partire da ogni punto del frattale. Dunque sembra che ogni punto del frattale rappresenti il centro del nostro sistema a partire dal quale la densità decresce.

Ma allora vi sarà una scala oltre la quale la densità della materia, o di una generica componente uniforme, sarà maggiore della densità della nostra componente frattale. E' oltre questa scala che l'Universo può essere considerato omogeneo nel senso classico del Principio Cosmologico. Nella regione locale invece possiamo dire che vale dunque il Principio Cosmologico Condizionale riportato nel capitolo 2.

Questa situazione è approssimativamente verificata se $\sigma_p(r) < 1$ e quindi vale l'Eq. 4.38. Ciò ha un chiaro vantaggio rispetto all'ipotesi di una singola sottodensità dell'ordine dei *Gpc*. Infatti, mentre il modello LTB ha un centro, speculiamo che questa metrica si applica a qualsiasi punto della struttura frattale quando viene scelta come centro in modo che, in media, non vi siano punti o direzioni speciali. Non siamo in grado di quantificare le perturbazioni trascurate facendo questo assunto, ma possiamo presumere che, fintanto che le fluttuazioni spaziali attorno al comportamento medio rimarranno limitate, appunto $\sigma_p(r) < 1$, questo modello fornisce una descrizione ragionevole della metrica locale di un oggetto frattale.

In questa situazione il tasso di espansione locale intorno a noi sarebbe inferiore al tasso di espansione medio in background, perciò i raggi di luce che si propagano da fonti distanti verso di noi (o verso qualsiasi osservatore situato in una sovra-densità locale) sentirebbero un tasso di espansione disomogeneo lungo il loro cammino rendendo conto dell'effetto di accelerazione osservato.

Proseguendo con la nostra trattazione, sostituiamo la 4.38 nell'Eq. 4.14a e otteniamo le due equazioni indipendenti di Einstein che descrivono il modello:

$$\frac{\dot{A} + k(r)}{A^2} + \frac{2\dot{A}\dot{A}' + k'}{AA'} = 8\pi G\langle n(r) \rangle \quad (4.41a)$$

$$\frac{\dot{A}^2 + 2A\ddot{A} + k}{A^2} = 0 \quad (4.41b)$$

Integrando l'Eq. 4.41b otteniamo:

$$\left(\frac{\dot{A}}{A}\right) = -\frac{k(r)}{A^2} + \frac{\alpha(r)}{A^3} \quad (4.42)$$

che per $k = 0$ può essere integrata. Qui adottiamo la scelta semplificata $k = 0$ perché supportata dal valore della curvatura spaziale su scala cosmologica. Questa ipotesi implica che il comportamento disomogeneo su larga scala non è dovuto a perturbazioni della curvatura. In questo modo si ottiene:

$$A(r, t) = A_0(r) \left[1 + \frac{3}{A_2} \sqrt{\frac{\alpha(r)}{A_0^3(r)}} t \right]^{2/3} \quad (4.43)$$

dove $A_0(r)$ e $\alpha(r)$ sono due funzioni libere a causa della doppia integrazione in t . Definiamo ora la massa comovente:

$$M(r, t) = \int_{S_P^3(r)} \langle n(r) \rangle A' A^2 4\pi r^2 dr \quad (4.44)$$

dove $S_P^3(r)$ è la sfera tridimensionale con raggio r e centrata nella posizione dell'osservatore P . Inserendo l'Eq. 4.43 nell'Eq. 4.41a e integrando sulla sfera abbiamo:

$$\alpha(r) = 2GM(r) = 2G \int_{S_P^3(r)} \langle n(r) \rangle A' A^2 4\pi r^2 dr \quad (4.45)$$

$M(r)$ dipende solo da r . Quindi dall'Eq. 4.42 abbiamo:

$$2GM(r) = A_0^3(r) H_0^2(r) \quad (4.46)$$

dove $H_0(r) \equiv H(r, 0)$. Quindi otteniamo che la soluzione è:

$$A(r, t) = A_0(r) \left[1 + \frac{3}{2} H_0(r) t \right]^{2/3} \quad (4.47)$$

e la funzione di Hubble in questo momento è intimamente correlata alla distribuzione di massa mediante:

$$H_0(r) = \sqrt{\frac{2GM(r)}{A_0^3(r)}} \quad (4.48)$$

Quest'equazione appare naturalmente dalla soluzione delle equazioni di Einstein ed è completamente generale e si riferisce sostanzialmente al flusso di Hubble disomogeneo del contenuto di massa. Per un frattale puro abbiamo $M(r) \approx r^D$ dove $D = 3 - \gamma < 3$ è la dimensione frattale. L'ultima funzione libera $A_0(r)$ può essere scelta sfruttando la libertà residua che abbiamo nel ridefinire la coordinata radiale r nell'equazione della metrica in coordinate polari. Infatti, grazie a ciò possiamo sempre specificare la funzione $A(r, t)$ in un dato momento t_* . Grazie a ciò possiamo scegliere $A_0(r) = r$. Essendo questo solo a causa di una ridefinizione delle coordinate che ci lascia all'interno della metrica LTB, questa scelta non può influenzare alcun osservabile. Possiamo scrivere la massa $M(r)$ come

$$M(r) = \Phi r^D \quad (4.49)$$

dove Φ è l'ampiezza della distribuzione frattale, correlata alla distanza media tra le galassie più vicine. Pertanto, possiamo riscrivere la funzione di Hubble in un modo più intuitivo come

$$H_0(r) = Br^{\frac{D-3}{2}} \quad (4.50)$$

dove $B \equiv \sqrt{2G\Phi}$. Dal punto di vista matematico, notiamo che la nostra espressione per $H_0(r)$ diverge quando $r \rightarrow 0$. Tuttavia, discuteremo più avanti che questo cattivo comportamento può essere facilmente risolto richiedendo un adeguato cutoff. Per confrontare questo modello con le osservazioni dei dati delle supernovae Ia, consideriamo l'Eq. 4.37 ricavata nel paragrafo precedente della relazione della modulo di distanza in funzione del redshift per i modelli LTB.

e riportiamo le equazioni 4.36a e imponendo $k(r) = 0$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{dt}{d\tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{A'(r, t)}{(1+z)\dot{A}'(r, t)} \quad (4.51a)$$

$$\frac{dr}{dz} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dz} = -\frac{1}{(1+z)\dot{A}'(r, t)} \quad (4.51b)$$

Notiamo che per $z = 0$ otteniamo $d_L(0) = A(r(0), t(0)) = A_0(r) = r$. Data l'elevata non linearità dell'Eq. 4.47, le equazioni 4.51a possono essere risolte solo numericamente fino a valori grandi di redshift. Tuttavia, questo è già sufficiente ai fini di questo lavoro. Questo è importante per sottolineare che in una pura distribuzione frattale, il centro è stabilito solo dopo l'integrazione sulla sfera. Consideriamo quindi il modulo di distanza in funzione del redshift:

$$\mu(z) = 5 \log_{10} \left[\frac{d_l(z)}{1Mpc} \right] + 25 \quad (4.52)$$

che è immediatamente paragonabile ai dati sperimentali, del catalogo UNION2. Facciamo analisi di verosimiglianza con parametri liberi B e D al fine di trovare i migliori valori di fit. Facciamo il confronto tra i $\mu_{obs}(z_i) \pm \Delta\mu(z_i)$ osservati e il modulo di distanza teorico μ_{th} eseguendo un'analisi χ^2 standard con

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{557} \left[\frac{\mu_{obs}(z_i) - \mu_{th}(z_i, \Delta H, r_0, \Delta)}{\Delta\mu(z_i)} \right]^2 \quad (4.53)$$

troviamo i valori migliori richiedendo la minimizzazione di χ^2 . La minimizzazione è stata ottenuta utilizzando il pacchetto MINUIT di CERLIB. I risultati sono mostrati in Fig. 4.1

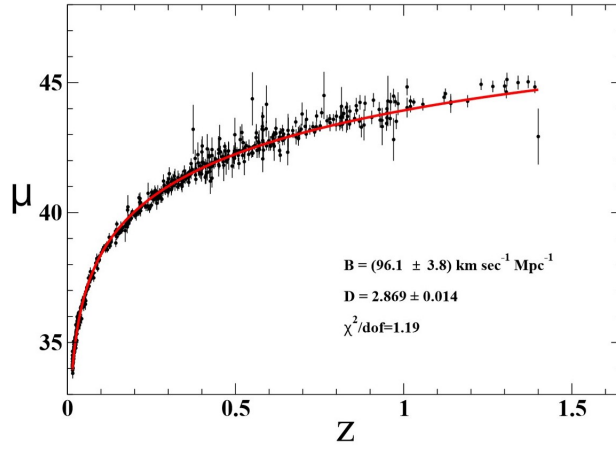


Figura 4.1: Modulo di distanza in funzione del redshift. Dati del catalogo UNION2 analizzati secondo il modello LTB con distribuzione di materia frattale

La curva rossa corrisponde ai migliori valori di *fit* per il nostro modello, ovvero $D = 2,87 \pm 0,02$ e $B = 96 \pm 4 \frac{km}{sec \cdot Mpc}$ con un $\chi^2/dof = 1,19$. Pertanto, introducendo un esponente frattale diverso da 3, ma come ipotizzato non eccessivamente, siamo in grado di riprodurre i dati della supernova senza fare riferimento a nessuna energia oscura. Sottolineiamo che la nostra soluzione non prevede accelerazione dell'espansione cosmologica, che risulta essere solo un apparente effetto dovuto alla disomogeneità. Infatti, come mostrato in *Fig.* 4.2.

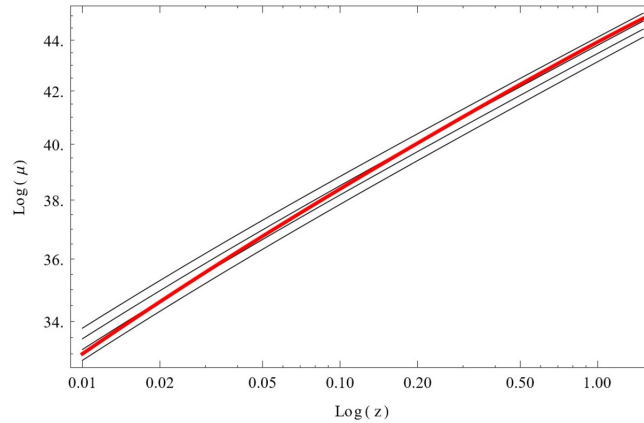


Figura 4.2: Grafico bilogarithmico delle modulo di distanza in funzione del redshift. La curva rossa si riferisce al modello frattale e inomogeneo. Le curve nere si riferiscono a modelli FLRW di pura materia con differenti valori di $H_0(r)$ da $r = 1Mpc$ a $r = 10000Mpc$

La nostra soluzione (curva rossa) è la sovrapposizione di diversi modelli FLRW - CDM omogenei con diverso H_0 (curve nere); in particolare, a bassi redshift, la curva è prossima a quella ottenuta da un modello FLRW con $H_0 = H_0(1Mpc)$ ma, con redshift elevati, la curva LTB è ben descritta da un modello FLRW con $H_0 = H_0(10000Mpc)$. La validità del nostro studio deve essere compresa in questo senso: le osservazioni effettive su una distribuzione frattale della materia coinvolgono strutture fino a $100 Mpc$. In questo regime, tutte le distanze cosmologiche sono degenerate, quindi una distribuzione della materia considerata nell'*Eq. 4.49* può imitare in modo sicuro la distribuzione osservata. Quindi l'applicazione del nostro risultato in questo intervallo per supernovae la porta alla *Fig. 4.3*.

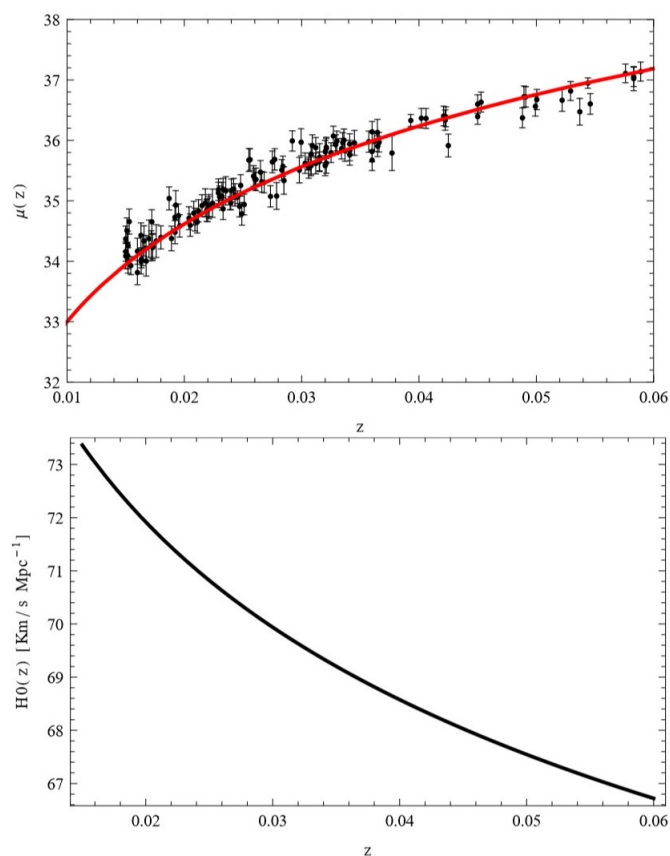


Figura 4.3: In alto modulo di distanza in funzione del redshift. In basso funzione di Hubble in funzione del redshift. Entrambi i grafici sono dettagli relativi a bassi valori di redshift

Secondo quanto abbiamo detto fino a qui, una precisazione deve ancora essere affrontata, cioè la divergenza non fisica di H_0 . Notiamo che, nel nostro modello, H_0 è finito con redshift basso ($0,01 < z < 0,05$). In effetti, facciamo riferimento alla *Fig.*

4.3, dove abbiamo considerato i dati di redshift più bassi dal catalogo UNION2. Come possiamo vedere, H_0 cambia il suo valore da 72 a 67 Km/sMpc nell'intervallo dei valori di z riportato in *Fig 4.3*. Quindi presumiamo che fino a pochi Mpc la legge di Hubble sia piccola e che su piccola scala la nostra semplice descrizione venga meno. Tuttavia, abbiamo trovato un ottimo accordo con i dati delle supernovae Ia anche alla scala più piccola del catalogo UNION2, come mostrato in *Fig. 4.3*.

In sintesi, abbiamo fornito una soluzione analitica per una distribuzione frattale della materia nell'ambito di un modello LTB. Questo risultato non è affatto triviale ed è stato raggiunto prestando la dovuta attenzione all'equivalenza statistica della posizione dell'osservatore.

In effetti, questo è molto diverso dall'omogeneità della distribuzione della materia, che consiste in un'ipotesi più forte, anche se di solito non si apprezza questa differenza concettuale. Inoltre, abbiamo usato questo scenario semplificato, ma supportato dai dati osservati, per dimostrare che è possibile spiegare l'apparente accelerazione dell'Universo per mezzo di disomogeneità radiali senza introdurre energia oscura. Inoltre, utilizzando il modello LTB per calcolare la relazione tra il modulo di distanza in funzione del redshift, abbiamo scoperto che il miglior adattamento ai dati delle supernovae Ia corrisponde a una dimensione frattale $D = 2,87$ su larga scala, che è in buon accordo con i dati della galassia[22].

Inoltre, sottolineiamo che la nostra descrizione non è in contraddizione con il Principio Copernicano, poiché il punto centrale del modello LTB può essere scelto per essere in qualsiasi galassia, cioè in qualsiasi piccolo locale della densità condizionale.

Bibliografia

- [1] B.B. Mandelbrot (1977), *Fractals: Form, Chance and Dimension*. W.H.Freeman
- [2] B.B. Mandelbrot (1982), *The Fractal Geometry of Nature*. W.H.Freeman
- [3] F. Hausdorff (1919), *Mathematische Annalen LXXIX*. 157 A.S. Besicovitch (1935) *Mathematische Annalen CX*. 321
- [4] S.B. Ratti (2011), *Introduzione ai frattali in fisica*. Springer
- [5] F. Sylos Labini, M. Montuori, L. Pietronero (1998), *Scale Invariance of galaxy clustering*. Physics Reports 293, 61-226
- [6] A. Gabrielli, F. Sylos Labini, M. Joyce, L. Pietronero (2004), *Statistical physics for cosmic structures*. Springer-Verlag
- [7] H. Totsuji, T. Kihara (1969), *The Correlation Function for the Distribution of Galaxies*. Publications of the Astronomical Society of Japan 21, 221
- [8] P.J.E. Peebles(1980), *Large scale structure of the Universe*. Princeton University Press
- [9] M. Davis and P.J.E. Peebles(1983), *A survey of galaxy redshifts. V - The twopoint position and velocity correlations*. Astrophys. J. 267, 465
- [10] P.H. Coleman, L. Pietronero(1992), *The Fractal Structure of The Universe*. Physics Reports 213, 311
- [11] S. Weinberg (1989), *The cosmological constant problem*. Rev. Mod. Phys. 61,1-23.
- [12] R. Amanullah, C. Lidman, D. Rubin, G. Aldering, P. Astier (2010), *Tet al., Spectra and Light Curves of Six Type Ia Supernovae at $0.511 < z < 1.12$ and the Union2 Compilation*. Astrophys.J. 716, 712-738.
- [13] S. Chandrasekhar(1931), *The maximum mass of ideal white dwarfs*. Astrophys. J. 74, 81-82.

- [14] S. Perlmutter et al(1999), *Measurement of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae* Astrophys. J. 517, 565.
- [15] B. P. Schmidt et al(1998), *The High Z supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae.* Astrophys.J., 507, 46-63.
- [16] Marie-Noelle Celerier(2007), *The accelerated expansion of the Universe challenged by an effect of the inhomogeneities.* A review. New Adv.Phys
- [17] G. Lemaitre(1993), *L'Univers en expansion* Ann. de la Soc. Scient. de Bruxelles., A53:51
- [18] R. C. Tolman (1934), Proc. Nat. Acad. Sci., 20:169
- [19] H. Bondi(1947), Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 107:410
- [20] F. Sylos Labini et al(1998), Phys.Rep. 293, 66
- [21] D. W. Hogg et al(2005), Astrophys.J., 624, 54
- [22] F. S. Labini, (2011), Class. Quant. Grav. 28, 164003
- [23] T. Antal, F. S. Labini, N. L. Vasilyev and Y. V. Baryshev(2009), Europhys. Lett. 88, 59001