

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

Scuola di Scienze  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Fisica

# Superfluidi, BEC e superconduttori

**Relatore:**  
**Prof. Elisa Ercolessi**

**Presentata da:**  
**Matteo Piraccini**

Anno Accademico 2019/2020

## Introduzione

L'analogia è uno strumento del pensiero molto potente e molto usato in fisica. Si tratta essenzialmente di prendere un modello preesistente e applicarlo a un altro fenomeno che sotto certi aspetti assomiglia al precedente o si comporta come esso. Si tratta di un metodo di comprensione quasi sempre fondamentale per l'approccio a fenomeni nuovi; si scopre qualcosa di nuovo e si cerca di ricondurlo a qualcosa già noto. Un esempio eclatante e storico è la luce. Infatti due modelli si scontrarono: quello che riconduceva la luce a un'onda e quello che si ricollegava alla meccanica newtoniana.

Questo elaborato si focalizza su tale concetto applicato ai superfluidi, quindi non si limiterà a discorrere della superfluidità e basta, ma si concentrerà sullo sforzo di mettere in relazione questo stato con la superconduttività e la Bose-Einstein Condensation, tutti e tre fenomeni quantistici. La superfluidità è un fenomeno estremamente interessante poiché fa parte di un campo in fase di esplorazione ovvero quell'universo dei fenomeni che manifestano proprietà quantistiche a livello macroscopico. Già solo questa affermazione evoca un fascino da indurre l'approfondimento di questo campo. Le leggi che regolano l'infinitesimamente piccolo si manifestano ai nostri occhi. Da far venire le vertigini. Esistono anche motivazioni più prosastiche quali possibilità applicative e aiuto nella comprensione di altri fenomeni, tra i quali quelli trattati nel seguente elaborato.

Questo lavoro si concentra sul fenomeno della superfluidità manifestato nell' $^4\text{He}$ , il primo superfluido scoperto. Dopo una breve introduzione storica, si passa all'esposizione della giustificazione teorica proposta da Landau, basata su un approccio quantistico. Poi si espongono le caratteristiche fisiche che sono coinvolte nell'origine di questo fenomeno. Dopodiché si illustra l'idrodinamica specifica per l'elio superfluido e si passano in rassegna le sue principali proprietà termodinamiche con alcuni esempi di particolari esperimenti attuabili per testare le singolari peculiarità del superfluido. Poi si approfondisce ulteriormente la proposta di Landau e si tratta delle quasiparticelle che possono formarsi nell'elio: i fononi e i rotoni. Entrambi erano presenti nell'approccio di Landau. Poi si mostrano i principali risultati riguardo a queste quasiparticelle nell'elio.

Dopodiché si passa al capitolo che tratta delle relazioni tra la BEC e l'elio superfluido. Entrambi i fenomeni sono caratterizzati da temperature estremamente basse e fin da subito si è pensato a una relazione tra i due. Innanzitutto si parte una caratteristica del superfluidi che permette di ricorrere a un particolare modello di transizione. Da qui si sviluppa la giustificazione teorica che permette di associare una funzione d'onda macroscopica precisamente come nella BEC e le conseguenze di ciò. Subito dopo si evidenziano le differenze tra i due attraverso l'analisi della distribuzione di momento.

Il terzo capitolo espone le somiglianze tra i superfluidi e i superconduttori a partire dal nome. Si comincia spiegando succintamente cosa sono i superconduttori e le principali caratteristiche di questo stato. Successivamente vengono presentati i primi due modelli storici proposti per spiegare gli effetti misurati: l'equazione di London e il

modello Ginzburg-Landau. Per entrambi verrà evidenziato quanto questi modelli sono debitori nei confronti della fisica dei superfluidi.

In chiusura vengono trattati i vortici, punto di unione di tutti e tre i fenomeni trattati. Prima si spiega in cosa consistono i vortici nell'elio superfluido con una breve e coincisa trattazione dal punto di vista matematico del fenomeno, partendo dall'evidenze sperimentali che hanno ipotizzato la presenza dei vortici nell'elio superfluido. Poi si passerà brevemente ai vortici nella BEC, con le foto del premio Nobel Ketterle. Infine si concluderà con i vortici nei superconduttori, le differenze e l'analogia tra questi e i vortici nel superfluido.

# Indice

<b>1</b>	<b>Superfluidità in <math>^4\text{He}</math></b>	<b>4</b>
1.1	Alle origini (storiche e fisiche) del fenomeno . . . . .	4
1.2	Proprietà idrodinamiche e termodinamiche . . . . .	8
1.3	Fononi e rotoni . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Superfluidi e BEC</b>	<b>15</b>
2.1	Il punto $\lambda$ . . . . .	15
2.2	Funzione d'onda macroscopica . . . . .	16
2.3	Distribuzione del momento . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Superfluidi e superconduttori</b>	<b>22</b>
3.1	Superconduttori . . . . .	22
3.2	Equazione di London . . . . .	25
3.3	Modello di Ginzburg-Landau . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Vortici</b>	<b>29</b>

# Capitolo 1

## Superfluidità in $^4\text{He}$

### 1.1 Alle origini (storiche e fisiche) del fenomeno

Nel dicembre del 1937 apparvero due articoli sulla rivista Nature; entrambi riguardavano esperimenti la viscosità dell'He-II, un particolare stato liquido dell'elio che si realizzava per temperature inferiori a  $T_\lambda = 2.17K$  e pressione inferiore a  $2.5MPa$ . Il primo era firmato dal fisico russo P. Kapitza mentre l'altro era dei fisici inglesi J.F. Allen e A.D. Misener. Entrambi misuravano la viscosità dell'He-II attraverso un capillare con una differenza di pressione ai suoi capi. Entrambi giungevano allo stesso risultato: la viscosità dell'elio crollava sotto  $T_\lambda$ . Kapitza battezzò questo nuovo fenomeno fisico superfluidità, ritenendolo correlato ai superconduttori. Ma perché un superfluido scorre senza attrito a differenza dei normali liquidi?[3]

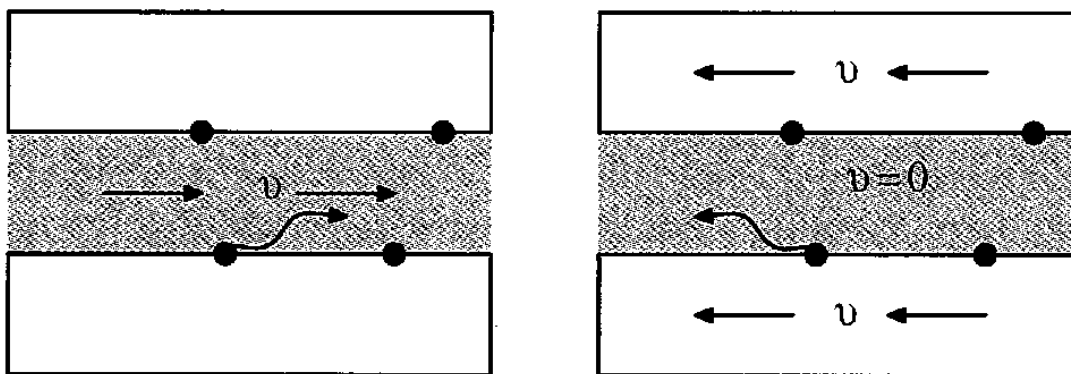


Figura 1.1: Il fluido che scorre, a sinistra (a) visto dal sistema di riferimento del laboratorio, a destra (b) dal sistema solidale al fluido [1]

Landau fornì un criterio teorico per stabilire se un fluido è un superfluido. Il punto di

partenza fu giustificare a livello formale l'assenza di attrito per questo particolare stato. Si immagini un capillare percorso da una certa corrente di un fluido (fig. (1.1a)). Tutte le particelle del fluido si muovono alla medesima velocità  $\mathbf{v}$ . La viscosità può essere modellizzata considerando che le particelle del fluido scambiano energia, sotto forma di urti, con le pareti del capillare. Pertanto parte dell'energia iniziale  $E_0$  del fluido passa al capillare sotto forma di calore e il risultato globale è la diminuzione di velocità del fluido. Nel caso della superfluidità questo processo è inibito. Sia  $\mathbf{p}$  l'eccitazione elementare di momento  $p$  di una particella e  $\epsilon(\mathbf{p})$  l'energia ad essa associata. Ci si ponga nel sistema di riferimento in cui il fluido è fermo, vale a dire che si muove a  $-\mathbf{v}$  rispetto al fluido (fig. (1.1b)). L'energia, in assenza di potenziali esterni, nel nuovo sistema di riferimento è data da

$$E' = E - \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} + \frac{1}{2}MV^2 \quad (1.1)$$

dove  $M$  è la massa totale del fluido,  $\mathbf{V}$  la velocità del sistema,  $E$  l'energia nel sistema di riferimento iniziale e  $\mathbf{P}$  il momento del fluido. Allora se una particella subisce un'eccitazione elementare  $\mathbf{p}$  si ha che la formula precedente diventa

$$E' = E_0 + \epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2}Mv^2 \quad (1.2)$$

dove  $E_0$  è l'energia dello stato fondamentale. Ora è evidente che l'energia dell'eccitazione in questo sistema di riferimento è pari a  $\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v}$ . Per far sì che l'eccitazione sia energeticamente accessibile è necessario che

$$\epsilon(\mathbf{p}) + \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} < 0 \quad (1.3)$$

Se è soddisfatta questa condizione, il fluido può trasferire il momento  $\mathbf{p}$  al capillare e pertanto si ha il fenomeno della viscosità. Landau definì la velocità critica come

$$v_c = \min_p \frac{\epsilon(\mathbf{p})}{p} \quad (1.4)$$

calcolata su tutti i valori di  $p$ . Pertanto il criterio di Landau per la superfluidità può essere scritto come

$$v < v_c \quad (1.5)$$

dove  $v$  è la velocità relativa tra capillare e fluido. Se il sistema rispetta questa condizione, lo scambio di energia tra fluido e capillare non avviene, dunque il fluido mantiene la sua velocità. In questo caso siamo dinanzi a un superfluido. In un fluido normale l'energia segue la relazione  $\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m}$  e pertanto le particelle scambiano sempre momento con le pareti del capillare generando attrito. Invece nell'He-II, che è un cosiddetto fluido quantico, presenta un particolare andamento dell'energia della singola eccitazione, che approfondiremo più in dettaglio successivamente. Per il momento basta sapere che, per bassi  $\mathbf{p}$ ,  $\epsilon(\mathbf{p})$  ha un andamento lineare ovvero

$$\epsilon(\mathbf{p}) = c|\mathbf{p}| \quad (1.6)$$

dove  $c$  è una costante. Tuttavia va detto che sperimentalmente la  $v_c$  di Landau risulta sovrastimata a causa dell'insorgere di fenomeni di turbolenza a velocità inferiori a  $v_c$ .

Prima si è accennato che l'He-II è un fluido quantico, ovvero un fluido in cui si hanno effetti macroscopici della meccanica quantistica. Infatti gli effetti quantistici sono rilevanti se le scale di lunghezze tipiche di questo liquido sono comparabili alla lunghezza d'onda di de Broglie termica, definita

$$\lambda_d B = \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

dove  $\hbar$  è la costante di Planck,  $m$  la massa della particella in questione,  $k_B$  la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura. Inserendo i dati dell'atomo di  ${}^4\text{He}$  liquido ( $T = 4\text{K}$ ,  $m = 4u$ ) otteniamo che  $\lambda_d B \approx 0.4\text{nm}$ . Confrontandolo con la distanza interatomica tipica,  $d \approx 0.27\text{nm}$ , si vede subito che risulta molto superiore. Perciò l' ${}^4\text{He}$  a basse temperature è dominato da effetti quantistici.

Inoltre il diagramma di fase dell'elio risulta molto particolare fig. (1.2).

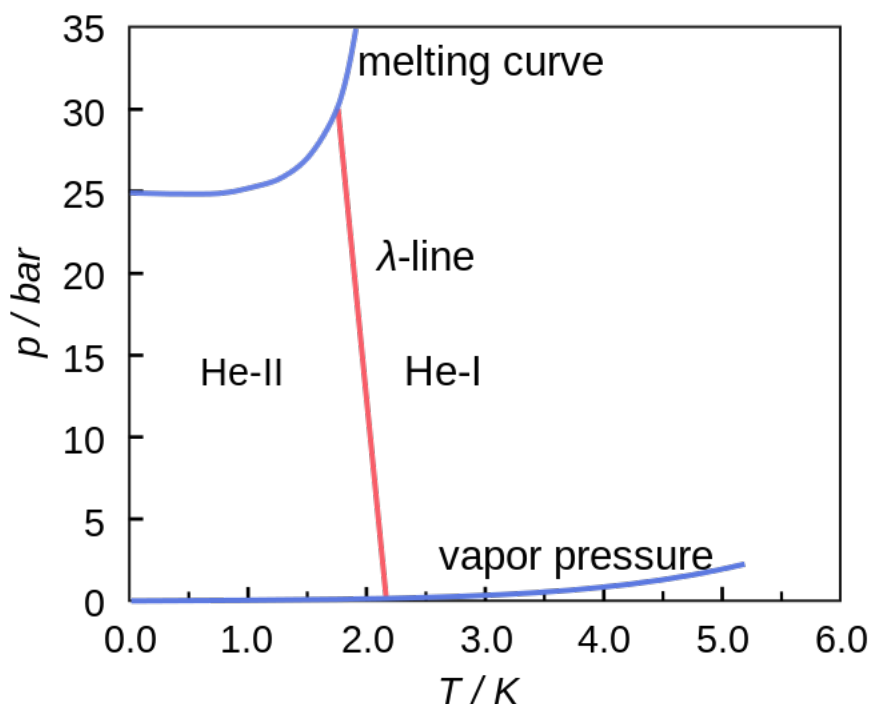


Figura 1.2: Diagramma di fase dell'elio. Si notano l'assenza del punto triplo. Inoltre al di sotto di una certa pressione è assente la fase solida. Le due fasi liquide He-I e He-II presentano caratteristiche diverse.[6]

Innanzitutto al di sotto di una certa pressione, l'elio non diventa mai solido nemmeno allo zero assoluto (dunque non presenta nemmeno un punto triplo); in secondo luogo lo stato liquido è suddiviso in due fasi distinte dette He-I e He-II. Solo la prima è un superfluido. Le due fasi sono separate dalla temperatura di  $T_C = 2.7K$ . Ai confini di queste due fasi si riscontra una singolarità nel calore specifico. Quest'ultimo fenomeno verrà ripreso più avanti, per adesso ci poniamo la domanda del perché l'elio rimanga liquido anche allo zero assoluto.

Si tratta di un punto fondamentale per il presentarsi della superfluidità. Le basse temperature sono essenziali per il manifestarsi degli effetti quantici da cui dipende la superfluidità. A  $0K$  i fluidi quantici hanno un'energia cinetica non nulla. Infatti, immaginando gli atomi di elio in un reticolo cristallino, devono avere un'incertezza di posizione  $\Delta x$ , inferiore alle distanze interatomiche del reticolo, pertanto ogni atomo ha un'incertezza sul momento  $\Delta p$ , per il principio di indeterminazione, e quindi hanno una certa energia cinetica. Si può fare una stima molto approssimativa di questa energia. Assumiamo che ogni atomo nel reticolo vibri intorno alla propria posizione come un oscillatore armonico quantistico. Pertanto l'energia di punto zero è

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_0 \quad (1.8)$$

con  $\omega_0$  stimato

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4k}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m} \frac{d^2V(r)}{dr^2}} \quad (1.9)$$

dove  $V(r)$  è il potenziale di Lennard-Jones. Usando i parametri per l'elio si ha che  $E_0 \approx 7meV$ . Ciò equivale all'agitazione termica per  $70K$ , che è troppo grande per permettere al liquido di condensare.

Ultima caratteristica da considerare a proposito dell' $^4\text{He}$  riguarda al tipo di particella quantistica che è. La materia è composta da fermioni, in altre parole da particelle con spin semintero. Questo ne determina le caratteristiche fondamentali, tra cui il principio di esclusione di Pauli. Il nucleo dell' $^4\text{He}$  è formato da quattro fermioni (due neutroni e due protoni) ognuno con spin  $\frac{1}{2}$ . Sommando gli spin, attraverso il calcolo spinoriale, otteniamo che lo spin totale del nucleo è intero. Lo spin intero è peculiarità dei bosoni, l'altro tipo di particelle che compongono l'universo, ma a differenza dei fermioni queste particelle non sottostanno al principio di Pauli. Si può dire approssimativamente che  $^4\text{He}$  si comporta come un bosone. Questa caratteristica è basilare per la superfluidità e permette l'analogia tra il superfluido  $^4\text{He}$  e il condensato di Bose-Einstein di cui si parlerà più avanti.



## 1.2 Proprietà idrodinamiche e termodinamiche

Ritorniamo<sup>1</sup> all'inizio della storia. L'esperimento che sancì la scoperta della fluidità consisteva, come è già stato detto, nel misurare la velocità del flusso dell'He-II attraverso un capillare stretto collegato a due recipienti pieni di elio(fig 1.3(a)). Approssimativamente si ha

$$\frac{\Delta P}{L} \sim \eta \frac{\nu}{R^2} \quad (1.10)$$

dove  $L$  e  $R$  sono rispettivamente la lunghezza e il raggio del capillare cilindrico,  $\Delta P$  la differenza di pressione tra i due contenitori,  $\nu$  la velocità di flusso,  $\eta$  la viscosità. Fu misurato che la  $\Delta P$  risultava sempre zero indipendentemente dalla velocità di flusso, pertanto  $\eta = 0$ . Tuttavia altri esperimenti sembravano dimostrare che la viscosità fosse finita. Un esempio è la misura del momento di inerzia di un disco oscillante immerso nell'He-II(fig 1.3(b)). Andronikashvili scoprì che una frazione del fluido contribuiva all'inerzia ma una parte no.

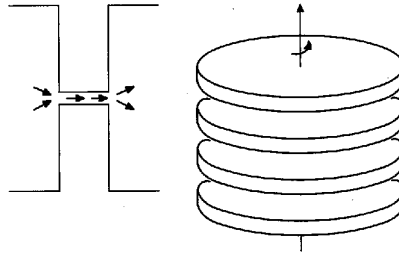


Figura 1.3: I due esperimenti iniziali sull'elio superfluido: (a) corrente spontanea lungo un capillare a sinistra, (b) inerzia di una serie di dischi oscillante [1]

Questo comportamento apparentemente contraddittorio fu spiegato dal modello a due fluidi sviluppata da Tisza nel 1940 e da Landau nel 1941. Se la densità totale delle particelle è  $n$ , si può dividere in due componenti

$$n = n_n + n_s \quad (1.11)$$

In questo modo si possono spiegare i due esperimenti, dove  $n_s$  rappresenta la componente superfluida della densità e  $n_n$  la componente normale. Nel primo esperimento è solo la componente  $n_s$  che scorre nel capillare, invece nel secondo l'aumento dell'inerzia è dovuto al contributo della componente normale  $n_n$ . La presenza prevalente dell'una e dell'altra è stata misurata sperimentalmente e dipende dalla temperatura (fig 1.4). Vicino allo zero assoluto si ha che  $n_s \approx n$  e  $n_n \approx 0$ , viceversa vicino alla temperatura  $T_C$

<sup>1</sup>Per i calcoli e le formule di questa sezione si veda [1] e [2]

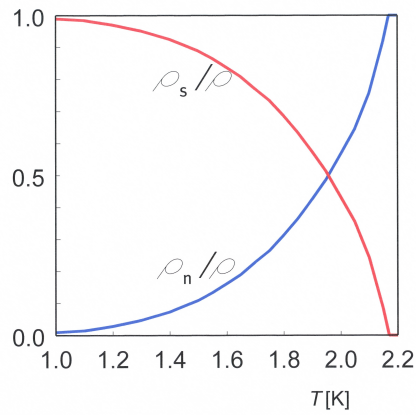


Figura 1.4: Grafico del contributo della parte normale e superfluida dell'elio alla densità totale in base alla temperatura[7]

si ha che  $n_s \approx 0$  e  $n_n \approx n$ . Tra questi estremi l'andamento è circa

$$n_s(T) \approx n - AT^4 \quad (1.12)$$

dove  $A$  è una costante. Inoltre si può parlare di un'idrodinamica di due fluidi dove si hanno due tipi di correnti  $j_s$  e  $j_n$  corrispondenti alle componenti superfluida e normale della densità di corrente. Infatti ripensando ai due esperimenti sopraccitati è ben evidente che le due componenti hanno velocità diverse e quindi densità di corrente distinte. Si definisce la densità superfluida come

$$\rho_s = mn_s \quad (1.13)$$

Questa particolare idrodinamica ha interessanti conseguenze. Mentre la componente

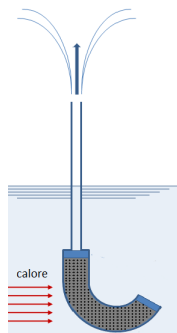


Figura 1.5: Lo spettacolare effetto a fontana dell'elio superfluido[8]

normale trasporta entropia, la superfluida no. Quindi solo la componente normale contribuisce allo scambio di calore. Questo spiega l'elevatissima conduttività dell'He. Inoltre

ciò porta a un'interessante effetto termo-meccanico. Se si collegano due volumi di superfluido a differenti temperature, la componente superfluida scorre tra i due volumi, ma la normale no. Dunque non c'è passaggio di calore e la differenza di temperatura rimane. Tuttavia questo flusso porta all'equilibrio dei due potenziali chimici  $\mu_1 = \mu_2$ . Tramite le relazioni termodinamiche

$$G = \mu N \quad (1.14)$$

$$dG = -SdT + VdP \quad (1.15)$$

( $G$  è l'energia libera di Gibbs), otteniamo che

$$\Delta P = s\Delta T \quad (1.16)$$

dove  $s$  è l'entropia per unità di volume. Si può sfruttare questo fatto in un altro modo. Se teniamo i due volumi a pressione costante e c'è un flusso dal primo al secondo allora la temperatura del secondo si abbasserà. Questo fenomeno può essere reso ancora più spettacolare se uno dei due contenitori è un tubo sottile immerso verticalmente nell'altro con un estremo fuori dalla superficie libera. In questo caso si avrà uno spettacolare effetto a fontana con il superfluido che uscirà dall'estremità libera del tubo (fig 1.5). Infine un bicchiere ricolmo di superfluido si svuoterebbe spontaneamente. Infatti la pellicola che si forma sulla superficie dei liquidi spontaneamente e previene l'evaporazione, non funziona siccome non c'è viscosità per il superfluido.

### 1.3 Fononi e rotoni

A<sup>2</sup> basse temperature ( $T \ll T_\lambda$ ) il calore specifico dell'He-II varia come  $T^3$ . Per spiegare questo tipo di comportamento, Landau interpretò gli stati eccitati a basse temperature come un gas di fononi che seguivano l'usuale relazione di dispersione già vista con l'eq. (1.6) Si ha che  $c \approx 238m/s$  è la velocità del primo suono. va aperta ora una breve parentesi. La definizione di  $c$  dipende dalla compressibilità  $\partial P/\partial n$ , dove  $n$  è la densità delle particelle. Il primo suono è pertanto un'oscillazione della densità  $n$  e della pressione. Nel caso invece in cui  $n_s$  e  $n_n$  oscillano fuori fase, la densità  $n$  rimane costante, si ha il cosiddetto secondo suono. Si può pensare come a un'onda di entropia e di temperatura, perciò solo la parte normale ne è affetta. Landau predisse che alle basse temperature la velocità del secondo suono fosse  $c_s = c/\sqrt{3}$ . La sua predizione, basata sulla teoria della propagazione dei suoni in un gas di fononi (la parte normale del superfluido), è stata confermata dagli esperimenti.

---

<sup>2</sup>Per le formule e i calcoli di questa sezione si veda [2] e [4]

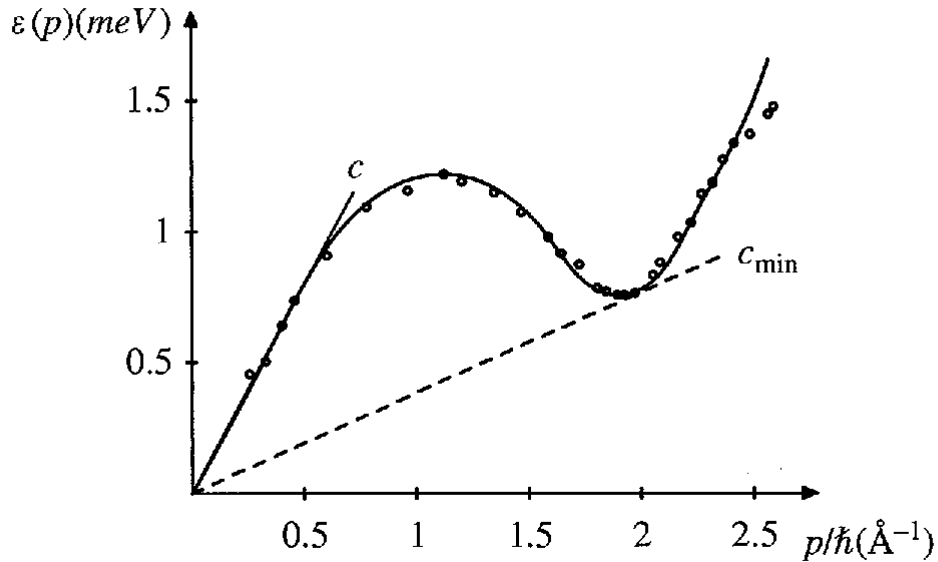


Figura 1.6: Relazione di dispersione per l'elio prevista da Landau, i punti sono i dati sperimentali[1]

Landau più in generale propose una relazione di dispersione dell'energia come mostrata in fig. (1.6), ed è stato confermato dai dati sperimentali degli scattering di neutroni. L'andamento lineare della prima parte corrisponde ai fononi come visto prima. Si vede che il grafico presenta un minimo locale intorno al punto detto  $p_0$ . Nell'intorno di questo si ha che

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \Delta + \frac{(p - p_0)^2}{2\mu} = \Delta + \frac{\hbar^2(k - k_0)^2}{2\mu} \quad (1.17)$$

dove  $\mu$  è la massa relativa,  $\Delta$  un gap energetico,  $k = p/\hbar$ . Le eccitazioni con questo tipo di dispersione vengono detti rotoni. Fononi e rotoni sono entrambi delle quasiparticelle ovvero complessi movimenti di corpi formati da più particelle. Nel caso dei fononi le particelle dell'elio si legano tra loro e il loro movimento è simile a quello di un corpo solido(fig. 1.7a). Invece nei rotoni si ha una particella centrale che si muove linearmente, mentre le particelle compattate intorno devono muoversi circolarmente per sgomberare la traiettoria(fig 1.7b). Feymann notò l'analogia tra questo tipo di movimento e gli anelli di fumo.

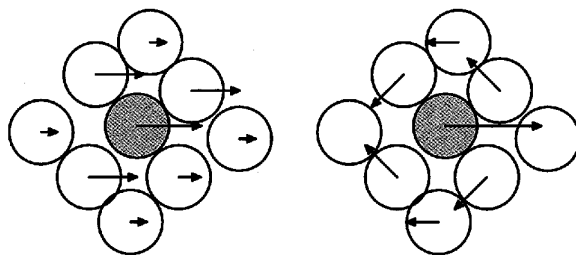


Figura 1.7: A sinistra (a) schema del movimento dei fononi, a destra (b) idem per i rotoni[1]

Il minimo corrispondente ai rotoni è fondamentale per il calcolo della velocità critica del superfluido. Infatti Landau affermò che al di sotto della tangente del minimo passante per l'origine, non insorgevano fenomeni di dissipazione dell'energia secondo l'argomento esposto nella sezione 1.1, siccome lo scambio quantizzato di energia non poteva avvenire pertanto la velocità critica dell'equazione (1.4) era pari a

$$v_c = c_{min} \quad (1.18)$$

dove  $c_{min}$  era la pendenza della tangente. Come già detto, questa si rivelò una sovrastima.

Il modello di Landau considerava che l'energia derivasse dalle quasiparticelle eccitate. Le considerò un gas di Bose ideale. Questo assunto è in parte giustificato dal fatto sopra esposto per cui l'He-II può essere considerato un bosone in base allo spin totale del nucleo. Dato che il numero di quasiparticelle  $N_{qp}$  non si conserva, allora lo si può ricavare minimizzando l'energia libera

$$\left( \frac{\partial F}{\partial N_{qp}} \right)_{T,V} = 0 \quad (1.19)$$

ma dato che

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} \quad (1.20)$$

( $\mu$  è il potenziale chimico) allora  $\mu$  deve essere nullo. Il potenziale termodinamico  $\Omega$  si riduce all'energia libera  $F$ , allora si ha (essendo bosoni) applicando il limite del continuo

$$F(T, V) = k_B T \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_k}) \quad (1.21)$$

$$N_{qp}(T, V) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1} \quad (1.22)$$

dove  $\epsilon_k$  è esattamente la relazione di dispersione in fig 1.6, e  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Tuttavia a basse energia solo la parte comprendente i rotoni e i fononi contribuisce in maniera

significativa. Pertanto si integra su  $k$  solo sulla parte delle quasiparticelle e possiamo separare le equazioni (1.21) e (1.22) in due parti indipendenti

$$F = F_{fo} + F_r \quad (1.23)$$

$$N_{qp} = N_{fo} + N_r \quad (1.24)$$

Inoltre assumiamo che le relazioni di dispersione dei fononi e dei rotoni rimangano separatamente per  $T \rightarrow 0$ . In pratica si prendono la (1.21) e la (1.22), si applica la (1.6) e si integra lungo la zona dei fononi. Si fa la medesima cosa con (1.17) nell'intorno di  $p_0$ . I calcoli ci portano a

$$N_{fo} = \frac{\zeta(3)}{\pi^2} V \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \quad (1.25)$$

$$F_{fo} = -\frac{\pi^2}{90} V k_B \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 \quad (1.26)$$

$$N_r = \frac{2V k_0^2}{\hbar (2\pi)^{3/2}} (\mu_r k_B T)^{1/2} e^{-\Delta/(k_B T)} \quad (1.27)$$

$$F_r = -k_B T N_r \quad (1.28)$$

Richiamando alla memoria le usuali relazioni per l'entropia e il calore specifico

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \quad (1.29)$$

$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \quad (1.30)$$

Si può vedere chiaramente che il calore specifico per i fononi va come  $T^3$  mentre quello dei rotoni si annulla esponenzialmente. Entrambi i fatti sono verificati sperimentalmente.

Inoltre questo modello giustifica il quello a due fluidi e permette il calcolo della densità normale. Si parte col porsi nel sistema di riferimento in cui le quasiparticelle hanno una velocità media  $\mathbf{v}$  mentre il resto del fluido è in quiete. La distribuzione all'equilibrio è  $f(\epsilon_k - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ , dove  $f(\epsilon) = (e^{\beta \epsilon} - 1)^{-1}$  è la funzione di distribuzione per i bosoni. In questo sistema il momento totale delle quasiparticelle è

$$\begin{aligned} P &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \hbar k f(\epsilon_k - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \approx \\ &\approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k \hbar k \left[ f(\epsilon_k) - \hbar \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial f(\epsilon_k)}{\partial \epsilon_k} + \dots \right] \approx \\ &\approx \frac{V \hbar^2}{6\pi^2} \mathbf{v} \int_0^\infty dk k^4 \left[ -\frac{\partial f(\epsilon_k)}{\partial \epsilon_k} \right] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Dunque il flusso di quasiparticelle è accompagnato da un flusso netto di momento. Dalla definizione di densità segue che

$$\rho_n = \frac{\hbar^2}{6\pi^2} \int_0^\infty dk k^4 \left[ -\frac{\partial f(\epsilon_k)}{\partial \epsilon_k} \right] \quad (1.32)$$

e pertanto la densità superfluida risulta

$$\rho_s(T) = \rho - \rho_n(T) \quad (1.33)$$

Questo risultato è molto simile alla densità dei superelettroni nei superconduttori come si vedrà tra qualche capitolo.

La separazione della densità normale nel contributo fononico e rotonico dà

$$\rho_{nfo} = \frac{2\pi^2\hbar}{45c} \left( \frac{k_B T}{\hbar c} \right)^4 \quad (1.34)$$

$$\rho_{nr} = \frac{\hbar^2 k_0^2 N_r}{3k_B T V} \quad (1.35)$$

che sono in perfetto accordo con i dati sperimentali e mettono quindi in luce la bontà della relazione empirica equazione (1.12).

# Capitolo 2

## Superfluidi e BEC

### 2.1 Il punto $\lambda$

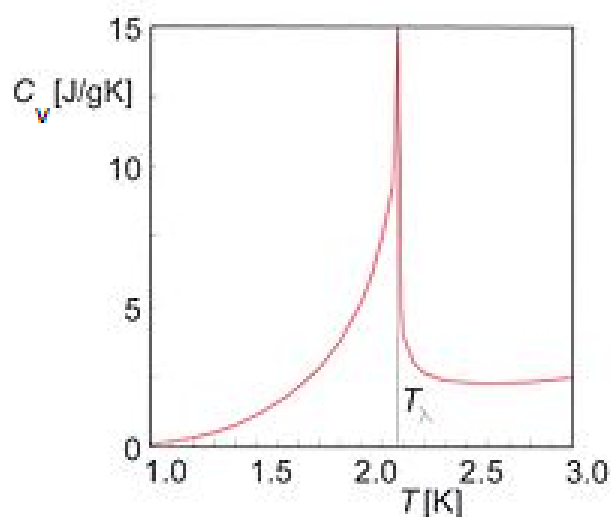


Figura 2.1: Grafico del calore specifico per l'elio con in evidenza il punto  $\lambda$  in corrispondenza della  $T_c$ [9]

Come<sup>1</sup> è già stato ripetuto più e più volte l'elio ha due fasi liquide distinte. Si ha He-I che si comporta come un fluido normale, mentre al di sotto della temperatura critica  $T_C$ , si ha il superfluido He-II. Ma sul confine di queste due fasi avviene qualcosa di particolare. Osservando il grafico del calore specifico  $C_V$  dell'<sup>4</sup>He(fig 2.1) è ben evidente che c'è una singolarità tra le due fasi. La transizione è detta punto lambda per la rassomiglianza

<sup>1</sup>Per le formule in questa sezione si veda [1]



con la lettera greca. Vicino alla temperatura critica il  $C_V$  assume un andamento quasi logaritmico. Ha una forma caratteristica

$$C_V = \begin{cases} C(T) + A_+ |T - T_C|^{-\alpha} & (T > T_C) \\ C(T) + A_- |T - T_C|^{-\alpha} & (T < T_C) \end{cases}$$

dove  $C(T)$  è una funzione continua in  $T$  nell'intorno di  $T_C$ . Il parametro  $\alpha$  è un esponente critico, il cui valore misurato è  $-0.009$ . Questa legge è in perfetto accordo con le predizioni teoriche della classe di modelli-XY tridimensionali, una classe di transizioni di fase. Questo modello è caratterizzato da sistemi in cui il parametro di ordine può essere descritto da un vettore bidimensionale unitario

$$\mathbf{n}(\mathbf{r}) = (n_x, n_y) = (\cos \theta, \sin \theta) \quad (2.1)$$

per un certo angolo  $\theta$  per qualsiasi angolo nello spazio  $\mathbf{r}$ . Il punto lambda rappresenta un confine tra due fasi (fig. 1.2) in cui  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  ha  $\theta$  casuale (He-I) e una in cui  $\theta$  assume lo stesso valore, pertanto anche  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ , in tutto lo spazio (He-II). Qual è l'interpretazione fisica di questo  $\mathbf{n}(\mathbf{r})$  e del suo angolo  $\theta$ ? Per dare una risposta a questa domanda c'è bisogno di due cose: un passo indietro e un concetto che unirà superfluidi e BEC. Infatti anche la BEC presenta una transizione di fase molto particolare (fig. 2.2) per quanto sia un tipo di transizione diverso dall'elio.

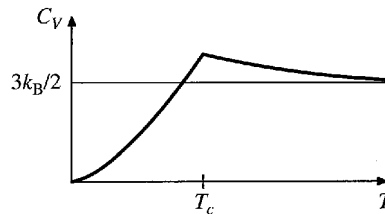


Figura 2.2: Calore specifico della BEC in funzione della temperatura [1]

## 2.2 Funzione d'onda macroscopica

E' necessario partire da una breve presentazione della BEC ovvero il condensato di Bose-Einstein. Si è già parlato dei bosoni e del loro comportamento diverso dai fermioni. Ciò porta una statistica apposta e peculiare quando si considerano sistemi a più corpi. Va notato che in tal caso si prende in considerazione un gas di bosoni non interagenti. In particolare avviene una sorta di transizione di fase in assenza di interazioni. Al di sotto di una certa temperatura i bosoni vanno ad occupare tutti insieme lo stato quantistico fondamentale, lo stato di momento zero. Si dice che si forma il condensato. Si tratta di uno dei fenomeni quantistici più spettacolari, infatti si ha a livello macroscopico (il

condensato può essere formato da un numero arbitrariamente grande di particelle) un effetto quantistico. Le particelle del condensato hanno un elevato livello di coerenza a tal punto che possono essere modellizzate con una funzione d'onda macroscopica; ciò è intuitivamente possibile siccome tutti i bosoni hanno la medesima dinamica avendo in comune lo stesso stato quantico. Si immagini di poter associare allo stato dell'elio una funzione d'onda  $\psi_0(\mathbf{r})$  in tutto lo spazio. Questa funzione descrive un numero macroscopico di particelle e perciò si può parlare di un condensato. Normalizziamo la funzione d'onda

$$n_0 = |\psi_0(\mathbf{r})|^2 \quad (2.2)$$

dove  $n_0$  è la densità delle particelle nel condensato. Il numero di particelle nel condensato sarà ovviamente nullo per  $T > T_C$ , altrimenti una frazione non trascurabile di particelle si troverebbe nel condensato. E' possibile determinare questa funzione d'onda risolvendo un'equazione fenomenologica detta equazione di Gross-Pitaevsii, che però qui non tratteremo.

Ora essendo  $\psi_0(\mathbf{r})$  una funzione d'onda complessa può essere riscritta come

$$\psi_0(\mathbf{r}) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} e^{i\theta(\mathbf{r})} \quad (2.3)$$

dove  $\sqrt{n_0(\mathbf{r})}$  è il modulo e  $\theta(\mathbf{r})$  è la fase. Questa corrisponde all'angolo  $\theta$  dell'equazione (2.1). Quindi si può postulare che la temperatura critica è la temperatura sotto la quale la funzione d'onda del fluido si "ordina". Va notato che nel caso in cui il modulo della funzione d'onda è nullo, non è possibile definire la fase e perciò questa non ha significato fisico. Come spiegato prima riguardo alla BEC, le particelle del condensato si trovano allo stato fondamentale, questo vuol dire che hanno momento nullo. Pertanto la funzione di stato è semplicemente una costante  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  a meno di una fase arbitraria costante  $e^{i\theta}$ . Ma cosa succede nel caso in cui non si avesse una  $\theta$  costante? Succede che si ha un superflusso ovvero un flusso coerente e senza attrito. Infatti se si ha una funzione d'onda allora si può calcolare un flusso associato tramite la formula della densità di corrente per le particelle

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{2mi} [\psi_0^*(\mathbf{r}) \nabla \psi_0(\mathbf{r}) - \psi_0(\mathbf{r}) \nabla \psi_0^*(\mathbf{r})] \quad (2.4)$$

Si tratta del flusso di particelle del condensato per unità di area. Sostituendo (2.3) in (2.4) si ha che

$$\mathbf{j}_0 = \frac{\hbar}{m} n_0 \nabla \theta \quad (2.5)$$

Ora la densità di corrente ce la si può figurare come la quantità di particelle del condensato per unità di volume che passa attraverso una superficie per unità di tempo. Dividendo per la densità  $n_0$  otteniamo una velocità media che associamo al condensato

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (2.6)$$

Questa velocità può essere interpretata come la velocità superfluida nel modello a due fluidi dell'He-II. Si tratta di un risultato teorico di estrema importanza perché mostra un legame palpabile tra questi due fenomeni. Sono state fatte assunzioni molto semplificate, un approccio più valido avrebbe necessitato l'utilizzo della teoria quantistica dei campi[5]. Ma il risultato sarebbe stato il medesimo, vale a dire un legame tra la variazione di fase della funzione d'onda e la velocità superfluida. A proposito del modulo, va sottolineato che non bisogna confondere densità del condensato  $mn_0$  con la densità del superfluido  $\rho_s$ , si tratta di due quantità ben distinti. Infatti come si vedrà più avanti a  $T = 0K$  il fenomeno della superfluidità riguarda tutte le particelle, mentre solo una frazione delle particelle entra a far parte del condensato.

## 2.3 Distribuzione del momento

Ma<sup>2</sup> tra la BEC e l'<sup>4</sup>He c'è una diversità che porta a differenze sostanziali tra i due: l'elio è un liquido quantico fortemente interagente. Adesso si vedrà perché. La descrizione quanto-meccanica di un sistema formato da più particelle è l'operatore Hamiltoniano

$$\hat{H} = \sum_{i=0}^N \frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.7)$$

facilmente derivabile dall'hamiltoniana classica (basta sostituire il momento con  $-i\hbar\nabla$ ). Questo operatore agisce su una funzione d'onda di N-particelle

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (2.8)$$

Questa deve essere simmetrica a causa della natura bosonica dell'<sup>4</sup>He. Le possibili funzioni del sistema sono gli autostati dell'Hamiltoniana a cui sono associati degli autovalori ovvero i livelli di energia  $E_n^{(N)}$  delle particelle. In linea di principio queste seguono una distribuzione statistica nei livelli d'energia determinata dalla probabilità di Boltzmann

$$P_n = \frac{1}{Z_N} e^{-E_n^{(N)}/k_B T} \quad (2.9)$$

dove  $Z_N$  è la funzione di partizione

$$Z_N = \sum_n e^{-E_n^{(N)}/k_B T} \quad (2.10)$$

---

<sup>2</sup>Per le formule e i calcoli di questa sezione si veda [1] e [5]

Partendo da (2.10) è possibile, sempre in linea di principio, ricavare tutte le variabili termodinamiche. Ed è effettivamente possibile nel caso di particelle non interagenti, anzi in tal caso si può risolvere tutto esattamente. Nel caso in cui  $V(\mathbf{r})$  sia debole (un esempio è un gas molto diluito) è possibile far ricorso alla teoria perturbativa. Ma purtroppo, per somma sfortuna, l'elio è fortemente interagente. Infatti il potenziale è debole a grandi distanze, ma è forte per le corte. In pratica si può immaginare l'elio come un gas di sfere rigide ammassate strettamente. Per fortuna il metodo numerico QMC (il metodo di Monte Carlo Quantistico) permette di calcolare i valori degli osservabili per sistemi con un numero di particelle grande. Grazie a questa tecnica è stato possibile mostrare in maniera diretta che nell'elio superfluido si forma un condensato di atomi nella stato fondamentale. Ma non si tratta come nel caso della BEC a  $T = 0K$  di un condensato in cui sono presenti la totalità delle particelle, bensì di un condensato che contiene una frazione macroscopica delle particelle ma non tutte. Allo scopo di rendere più precisa questa affermazione è necessario introdurre la matrice della densità di singola particella

$$\rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) = N \int \Psi_0^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) \Psi_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) d^3r_2, \dots, d^3r_N \quad (2.11)$$

[5] Questa è una funzione di correlazione della funzione d'onda del sistema a più corpi tra le coordinate  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$  e  $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . Se integriamo su tutte le coordinate meno la prima, stiamo mediando su tutte le configurazioni esclusa la prima.

Ci sono alcune semplici proprietà per questa matrice di densità. Innanzitutto essa dipende solo da  $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1$  poiché traslando tutto il sistema gli osservabili non cambierebbero. In più la normalizzazione della funzione d'onda implica che nel caso in cui  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}'_1$

$$\int \rho_1(0) d^3r_1 = N \quad (2.12)$$

da cui segue

$$\rho_1(0) = \frac{N}{V} = n \quad (2.13)$$

ovvero sarebbe pari alla densità delle particelle.

Per un gas bosonico non interagente per  $T = 0K$  la funzione d'onda diventa

$$\Psi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \Psi_0(\mathbf{r}_1) \Psi_0(\mathbf{r}_2) \dots \Psi_0(\mathbf{r}_N) \quad (2.14)$$

Poiché tutte le particelle si trovano nello stato fondamentale,  $\Psi_0(\mathbf{r})$ . Sostituendo ciò nella (2.11) otteniamo

$$\rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) = N \Psi_0^*(\mathbf{r}_1) \Psi_0(\mathbf{r}'_1) \quad (2.15)$$

Di solito lo stato fondamentale corrisponde a un'onda piana di momento nullo, che si riduce a una costante

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}} \quad (2.16)$$

Sostituendo (2.16) in (2.14), si ottiene che in un gas bosonico non interagente a  $T = 0K$  la matrice di densità è pari alla densità delle particelle

$$\rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) = \frac{N}{V} = n \quad (2.17)$$

Ma tutto questo non vale per l'elio siccome le interazioni tra particelle non sono trascurabili. Pertanto la matrice di densità va calcolata tramite QMC. Quello che si ottiene non è un valore costante a  $T = 0K$  per tutte le distanze, bensì un valore che tende a diventare costante per le grandi distanze come in fig. 2.3.

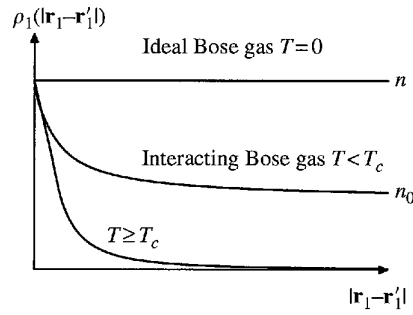


Figura 2.3: Andamento di  $n_0$  in base alla temperatura nella BEC e nell'elio superfluido [1]

Da ciò si può ricavare la corretta definizione di densità del condensato espressa come

$$n_0 = \lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| \rightarrow \infty} \rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \quad (2.18)$$

Si tratta di una definizione rigorosa a differenza del caso in cui si ha introdotto tale quantità per la prima volta. Infatti da questa è possibile derivare una funzione d'onda macroscopica adatta. Considerando il caso più generale di particelle interagenti, possiamo definire  $\psi_0(r)$  come

$$\rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) \sim \psi_0^*(\mathbf{r}_1)\psi_0(\mathbf{r}'_1) \quad (2.19)$$

Nel limite  $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| \rightarrow \infty$ , sicché la funzione d'onda è normalizzata avremmo esattamente la (2.2).

La situazione si ripete per le altre temperature sotto la  $T_C$ . Per ogni temperatura inferiore si ha lo stesso comportamento a grandi distanze, cambia il valore della costante. Pertanto la densità del condensato è definibile in funzione della temperatura  $n_0(T)$ . Inoltre è nullo per  $T \leq T_c$  con il seguente andamento

$$\lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1| \rightarrow \infty} \rho_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) = \begin{cases} n_0(T) & T \leq T_c \\ 0 & T > T_c \end{cases} \quad (2.20)$$

come mostrato in fig. 2.3. La conferma sperimentale di tutto questo quadro teorico viene dalla misura della distribuzione di momento. Per un liquido quantico ha un valore di aspettazione per  $T = 0$

$$P(\mathbf{p})d^3p = \frac{Vd^3p}{(2\pi\hbar)^3} \langle \Psi | \hat{n}_{\mathbf{k}} | \Psi \rangle \quad (2.21)$$

dove  $|\Psi\rangle = \Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  è la funzione d'onda e  $\hat{n}_k$  è l'operatore numero per lo stato quantico  $\mathbf{k}$ . Il valore di aspettazione può essere ricavato dalla matrice di densità. Con una trasformazione di Fourier

$$n_{\mathbf{k}} = \langle \Psi | \hat{n}_{\mathbf{k}} | \Psi \rangle = \int \rho_1(r) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (2.22)$$

# Capitolo 3

## Superfluidi e superconduttori

### 3.1 Superconduttori

All'inizio del primo capitolo si accennato al fatto che il nome di superfluido ebbe origine da una presunta relazione con i superconduttori. Questa previsione si è rivelata sostanzialmente corretta. Nel capitolo presente si vedranno i tratti salienti di questa correlazione.

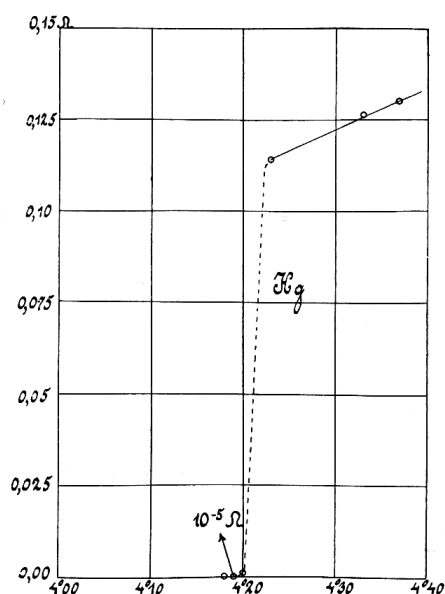


Figura 3.1: Resistività nel mercurio[10]

Innanzitutto è necessaria un'introduzione ai superconduttori. Si tratta di materiali, solitamente metalli, che a determinate condizioni assumono un comportamento assai

peculiare. Il primo materiale per cui fu visibile il nuovo fenomeno fu il mercurio nel 1911.[1] Fu notato che al disotto della temperatura critica  $T_C = 4.1K$  la resistività del materiale crollava repentinamente a zero (fig 3.1). In seguito venne appurato che la struttura cristallina del materiale non cambiava e pertanto fu ritenuta una transizione elettronica dove gli elettroni entravano in uno stato ordinato.

Sebbene l'effetto più ovvio sia che la resistività si annulli, il vero cuore del fenomeno sta negli effetti magnetici. Se si mette un superconduttore in un campo magnetico uniforme e lo si raffredda fin sotto alla temperatura critica, il flusso magnetico viene espulso dall'interno del superconduttore(fig. 3.2). Questo è detto l'effetto Meissner, dal nome di uno degli scopritori. Si tratta del vero discriminante per stabilire se si ha a che fare con un superconduttore o meno.

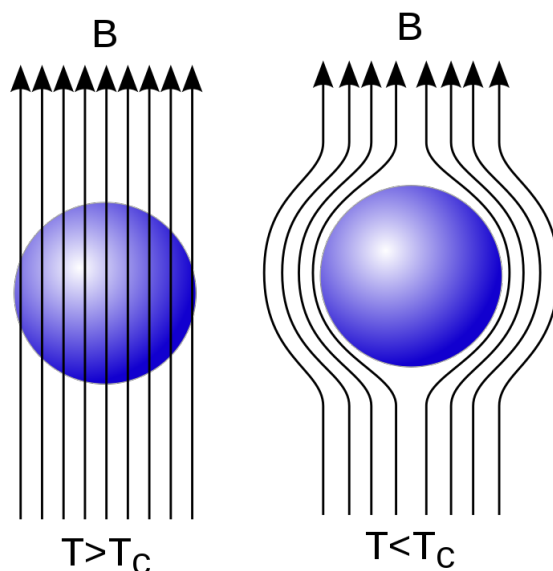


Figura 3.2: Effetto Meissner[11]

L'effetto Meissner si manifesta solo per campi magnetici sufficientemente deboli. Si prenda un cilindro di materiale superconduttore e si applichi un campo magnetico  $\mathbf{H}$  omogeneo parallelo. Se a  $T$  il cilindro è superconduttore per  $\mathbf{H}$  nullo, allora esiste ed è unico un campo magnetico critico  $H_C(T)$  al di sopra del quale il cilindro ritorna normale. Il processo è invertibile, infatti non appena si ritorna sotto al campo critico la superconduttività riaffiora. Dai dati sperimentali (fig. 3.3) si ricava che la curva di  $H_C(T)$  ha un andamento approssimativamente parabolico a livello empirico



$$H_C(T) = HC_c(0) \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^2 \right] \quad (3.1)$$

Un altro peculiare fenomeno magnetico si presenta se posizioniamo un anello di metallo

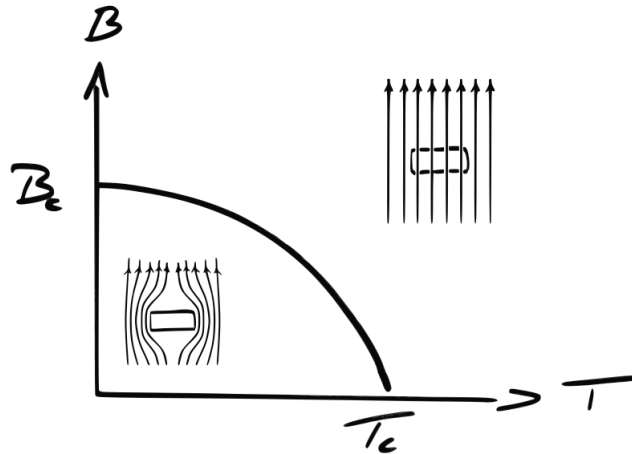


Figura 3.3: Andamento di  $H_c(T)$  con evidenziate i due stati del materiale[12]

in un campo magnetico perpendicolare al suo piano(fig. 3.4). Raffreddando il metallo questi diventa superconduttore ed il flusso viene espulso. Adesso si immagina di eliminare il campo esterno; a questo punto non c'è flusso attraverso il metallo e quello intrappolato all'interno dell'anello rimane costante. Ciò è possibile siccome nell'anello è presente una supercorrente. È stato osservato che queste correnti possono persistere per lunghi periodi.

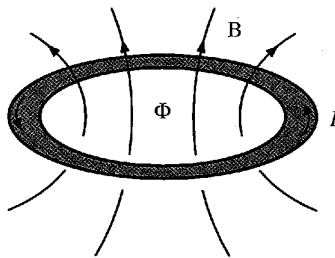


Figura 3.4: Corrente in una spira di superconduttore generata da un campo magnetico [1]

Inoltre i superconduttori hanno specifiche proprietà termiche. Se non è applicato nessun campo magnetico, la transizione superconduttore-normale risulta di secondo ordine,

ciò implica un calore specifico discontinuo ma nessun calore latente. In più nello stato normale il calore specifico  $C_n$  varia linearmente con la temperatura, mentre nello stato di superconduzione il calore specifico  $C_s$  inizialmente ha un'impennata per poi andare a zero esponenzialmente per  $T \rightarrow 0$ . si ha un andamento del tipo

$$C_s \propto \exp\left(\frac{-\Delta}{k_B T}\right) \quad (3.2)$$

Questo comportamento indica che esiste un gap nello spettro energetico che separa lo stato eccitato da quello fondamentale di un'energia pari a  $\Delta$ . Già da questa ultima caratteristica si comincia a intravedere un legame tra superconduttori e superfluidi (vedi (1.17)).

## 3.2 Equazione di London

La prima modellizzazione teorica dei superconduttori in grado di tenere conto dell'effetto Meissner si ha a opera dei fratelli London nel 1935.[1] Il contributo più rilevante di questo modello fu l'equazione di London

$$\mathbf{j} = -\frac{n_s e^2}{m_e} \mathbf{A} \quad (3.3)$$

dove  $\mathbf{j}$  è la densità di corrente elettrica,  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore,  $e$  e  $m_e$  carica e massa dell'elettrone. Per arrivare a questa formula presero spunto dal modello a due fluidi dell' $^4\text{He}$ , infatti da lì viene il termine  $n_s$  (vedi (1.11)). Adesso si vedrà come.

Il punto di partenza dell'equazione di London è il modello della conduttività di Drude. In particolare si prenda il caso di campi magnetici a frequenza finita. Usando la rappresentazione complessa della corrente alternata, la formula della corrente continua diventa

$$\mathbf{j}e^{-i\omega t} = \sigma(\omega)e^{-i\omega t} \quad (3.4)$$

[1] Entrando nello specifico, la parte reale della conduttività rappresenta la corrente in fase con il campo elettrico (resistiva) invece la parte immaginaria alla corrente fuori fase (induttiva e capacitiva)

$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m} \frac{1}{1 - i\omega\tau} \quad (3.5)$$

dove  $\tau$  è il tempo di smorzamento ovvero il tempo medio tra le collisioni degli elettroni.

Ora immaginando di avere a che fare con un conduttore perfetto; questo vuol dire che gli elettroni non dissipano tramite collisioni. Possiamo tradurre formalmente questa idea ponendo il limite  $\tau^{-1} \rightarrow 0$  nel modello. In tal caso si ha che la conduttività è puramente immaginaria. Tuttavia la parte reale non può essere nulla siccome il suo integrale è

indipendente dal tempo di smorzamento. Pertanto la parte reale diventa una delta di Dirac per  $\omega = 0$  con un opportuno coefficiente.

Partendo dal modello a due fluidi, i fratelli London assunsero che la densità totale degli elettroni potesse essere composta da due contributi: una frazione di elettroni normali e una di elettroni superfluidi, esattamente come in (1.11). Tramite queste due assunzioni la (3.5) diventa

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi n_s e^2}{m_e} \delta(\omega) + \frac{n_s e^2}{i\omega m_e} \quad (3.6)$$

Da sottolineare che definirono  $n_s$  in base al peso della funzione delta e usarono la massa dell'elettrone nel vuoto.

A livello sperimentale fu confermata la presenza di un picco per  $\omega = 0$ . Tuttavia si vide anche che per certi aspetti il modello dei due fluidi non era corretto. Ciò è chiaramente visibile in fig. 3.5. Per frequenza nulla si ha il picco, ma al di sotto di una certa frequenza, corrispondente a  $\hbar\omega = 2\Delta$ , per cui la parte reale della conduttività è nulla, per poi ritornare finita a frequenze superiori.  $2\Delta$  è il gap energetico, fondamentale per la successiva teoria BCS.

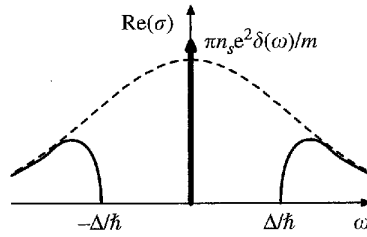


Figura 3.5: Corrente in una spira di superconduttore generata da un campo magnetico [1]

Ora si considerino le frequenze inferiori al gap energetico. Partendo dalla (3.4), adoperando l'algebra lineare, portando tutto al caso limite  $\omega = 0$  e applicando l'equazione di Maxwell e la definizione di potenziale vettore è possibile ricavare l'equazione di London. Il contributo diretto di questo metodo è di poter spiegare l'effetto Meissner, il più caratteristico dei superconduttori. Infatti qualsiasi campo magnetico risulta schermato all'interno del materiale secondo

$$B = B_0 e^{-x/\lambda} \quad (3.7)$$

dove  $x$  è la profondità rispetto alla superficie del superconduttore e  $\lambda$  è la cosiddetta profondità di penetrazione

$$\lambda = \left( \frac{m_e}{\mu_0 n_s e^2} \right)^{1/2} \quad (3.8)$$

### 3.3 Modello di Ginzburg-Landau

Il<sup>1</sup> modello empirico successivo per i superconduttori fu il cosiddetto modello Ginzburg-Landau (GL), sviluppato da Landau negli anni '30 del secolo scorso. Questo modello partiva dall'approccio generale alle transizioni di fase di second'ordine. Si tratta di transizioni in cui la differenza di entropia tra le due fasi è nulla in caso di assenza di campi esterni e quindi non c'è calore latente. Landau notò che questo tipo di transizioni sottintendeva un cambio di simmetria del sistema. Per esempio un ferromagnete al di sopra di della temperatura di Curie non ha un momento magnetico, mentre al disotto di essa sì. Questo può essere interpretato con la scelta di una direzione preferenziale da parte dei vari momenti degli atomi del materiale. E' sostanzialmente lo stesso discorso tenuto nel paragrafo 2.2. Appunto GL postulò l'esistenza di un parametro d'ordine nullo al di sopra di una certa temperatura dipendente dalla posizione. Tale parametro  $\psi(\mathbf{r})$  descriveva pertanto lo stato del sistema. Inoltre ipotizzarono che si trattasse di un numero complesso, immaginandolo come una funzione d'onda macroscopica in perfetta analogia con l'<sup>4</sup>He. In pratica nel superconduttore gli elettroni transivano a uno stato ordinato dove questi elettroni erano parzialmente condensati in un superfluido senza attrito. Questo condensato veniva descritto da  $\psi(\mathbf{r})$ . Anche in questo caso si ha un grafico del calore specifico con una singolarità come nella BEC e nell'<sup>4</sup>He, ma si tratta di transizioni diverse (fig. 3.1).

Tuttavia c'era una differenza rilevante immediata col superfluido. Nel superconduttore si ha delle particelle cariche elettricamente, gli elettroni, e quindi la presenza di un campo magnetico influenza il materiale, a differenza delle particelle neutre dell'<sup>4</sup>He. La densità di energia libera totale nello stato di superconduttività in un campo magnetico fu postulata come

$$F_s(T) = F_n(T) + \int \left( \frac{\hbar}{2m^*} \left| \left( \frac{\hbar}{i} \nabla + e^* \mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + a |\psi|^2 + b/2 |\psi|^4 \right) d^3r + \frac{1}{2\mu_0} \int B(\mathbf{r})^2 d^3r \quad (3.9)$$

dove  $m^*$  è una massa effettiva e  $e^*$  un qualche multiplo intero della carica dell'elettrone,  $\mathbf{A}$  è il potenziale vettore. L'energia libera minima si trova minimizzando rispetto a  $\psi(\mathbf{r})$  e al suo coniugato. Da ciò si ricava un'equazione di Schrödinger per  $\psi(\mathbf{r})$  nonlineare

---

<sup>1</sup>Per le formule i calcoli di questa sezione si veda [1] e [2]

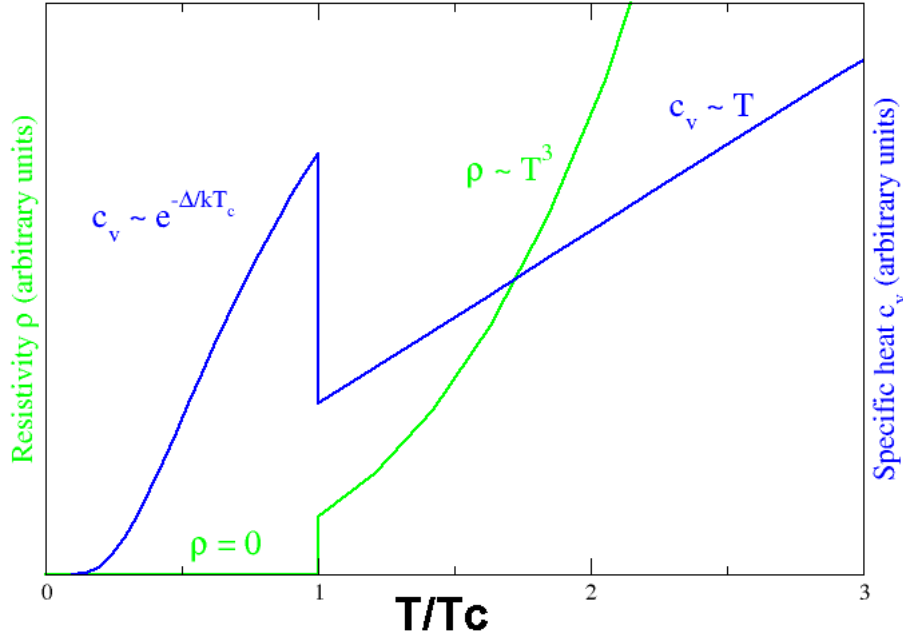


Figura 3.6: Resistività e calore specifico nei superconduttori[13]

$$-\frac{\hbar^2}{2m^*} \left( \nabla + \frac{e^*i}{\hbar} \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + (a + b|\psi|^2) \psi(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.10)$$

Questa equazione porta alla supercorrente

$$\mathbf{j}_s = -\frac{e^*\hbar i}{2m^*} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{(e^*)^2}{m^*} |\psi|^2 \mathbf{A} \quad (3.11)$$

Salta subito all'occhio la straordinaria somiglianza con la (2.4); le differenze sono l'aggiunta di un termine magnetico, dovuto alla carica delle particelle del superconduttore, e ai misteriosi  $e^*$  e  $m^*$ . E quanto valgono questa massa e questa carica? Gli esperimenti ci dicono che si ha  $m^* = 2m_e$  e  $e^* = 2e$ . Cosa vuol dire fisicamente? Supponendo di avere come nel caso dei superfluidi  $|\psi|^2 = n_s^*$ , allora questo può essere interpretato fisicamente così: nel superconduttore c'è una parte superfluida composta di particelle con massa e carica doppia di un singolo elettrone. Si tratta delle cosiddette coppie di Cooper, punto di partenza della BCS, la teoria più accurata dei superconduttori. Sotto certe condizioni gli elettroni si legano a coppie quasi a formare un'unica particella. E quindi  $n_s^*$  non è altro che la densità di queste coppie che vale  $n_s^* = 1/2n_s$ , con  $n_s$  la densità degli elettroni in fase superfluida. Ecco che si realizza la previsione di Kapitza, ma al contrario.

# Capitolo 4

## Vortici

Ormai<sup>1</sup> in dirittura d'arrivo, si tratterà di un fenomeno che accomuna tutti e tre gli stati sopracitati: i vortici. Partiamo dai vortici nei superfluidi che useremo come pietra di paragone per gli altri due casi.

Riprendendo la definizione della velocità superfluida (2.6) è subito evidente che il superflusso è irrotazionale siccome

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = 0 \tag{4.1}$$

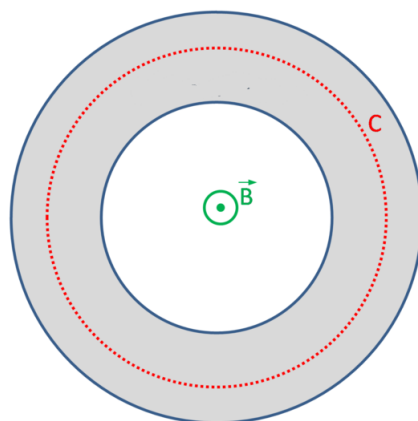


Figura 4.1: Circuitazione di un tubo circolare[14]

---

<sup>1</sup>Per le formule e i calcoli di questa sezione si veda [1]

Ora consideriamo un tubo chiuso a forma circolare e tracciamo un percorso chiuso che lo percorre tutto (fig. 4.1). In tal caso avremo che la circuitazione è

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} \quad (4.2)$$

lungo il percorso chiuso. Poiché si tratta di un flusso irrotazionale, il valore dell'integrale dovrà essere indipendente dal percorso. Sostituendo nell'integrale la (2.6) si ha che

$$\kappa = \frac{h}{m} \oint \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{h}{m} \Delta\theta \quad (4.3)$$

Qui  $\Delta\theta$  è il cambiamento di fase dopo un giro completo. Tuttavia sappiamo che l'equazione d'onda è definita univocamente e pertanto dovremmo avere che

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r})e^{i\Delta\theta} \quad (4.4)$$

e dunque

$$\Delta\theta = 2\pi n \quad (4.5)$$

In questa espressione  $n$  è un intero, che rappresenta il numero di volte che  $\theta$  compie un "angolo"  $2\pi$ . Da tutto ciò segue che la circuitazione è quantizzata

$$\kappa = \frac{h}{m} n \quad (4.6)$$

Questa quantizzazione è rilevabile a livello sperimentale. Si parte dal tubo chiuso a forma circolare a riposo e pertanto  $\kappa = 0$ . Ruotando il tubo, la parte normale comincerà ad accelerare fino ad avere la stessa velocità angolare dell'apparato, mentre la parte superfluida rimarrà in quiete. A questo punto, se il sistema verrà raffreddato lentamente delle particelle passeranno dalla componente normale alla componente superfluida. In questo modo verrà trasferito del momento angolare al condensato che comincerà a ruotare. Ma la circuitazione non crescerà in modo continuo ma a gradini di  $\hbar/m$ .

Se ruotassimo un cilindro contenente elio liquido, al posto del tubo, l'irrotazionalità del superfluido ci suggerisce che non ci sarà alcun tipo di circolazione. Quindi ci si aspetta che la superficie libera del fluida rimanga piatta, non essendo presenti forze centrifughe. Alla prova dei fatti la superficie libera dell'elio si incurva esattamente come un liquido classico che ruota. Come è possibile? L'integrale di circuitazione dovrebbe essere nullo per ogni percorso chiuso e pertanto non dovrebbe manifestarsi alcuna rotazione macroscopica. Il paradosso è risolto sapendo che il liquido contiene dei vortici.

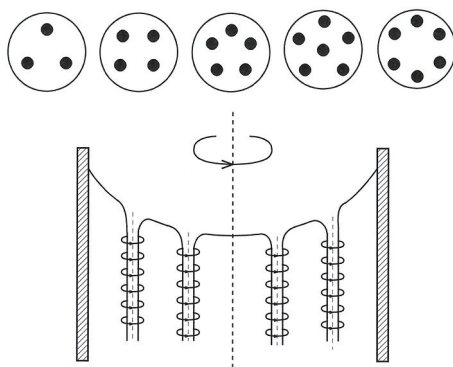


Figura 4.2: He-1 in rotazione[15]

Un vortice è un flusso circolare di corrente che soddisfa la condizione (4.1) quasi ovunque e tuttavia permette una circolazione netta. In coordinate cilindriche polari

$$\nabla \times \mathbf{v}_s = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\phi & v_z \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

dove  $r, \phi, z$  sono le coordinate canoniche tali che  $\mathbf{r} = (r, \phi, z)$ ,  $v_i$  la componente  $i$ -esima della velocità. Ora vogliamo trovare per che condizione si ha (4.1) per una corrente circolare. Ricordandoci che le componenti della velocità sono tutte nulle eccetto quella angolare, si ha che

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\phi) = 0 \quad (4.8)$$

Dunque la velocità del flusso intorno al vortice dovrà avere la seguente forma

$$\mathbf{v}_s = \frac{\kappa}{2\pi r} \mathbf{e}_\phi \quad (4.9)$$

dove  $\kappa$  è la circuitazione netta. La quantizzazione del flusso ci garantisce che  $\kappa = n \frac{h}{m}$ . Empiricamente sono osservati solo i vortici con  $n = \pm 1$  siccome hanno minor energia.

Va detto che l'equazione precedente soddisfa (4.1) eccetto per  $r = 0$ . In pratica il vortice ha una piccola regione centrale il cui raggio è dell'ordine di  $1\text{\AA}$  dove la funzione d'onda macroscopica  $\psi_0(\mathbf{r})$  è nulla e per cui la fase è indefinita. Ciò evita che ci siano singolarità al centro del vortice anche il flusso è nullo in questa zona. La velocità radiale varia come  $1/r$  rispetto alla regione centrale.

Sono questi vortici che fanno sì che sia presente un flusso macroscopico nell'elio dentro al cilindro e quindi si incurvi la superficie libera(fig. 4.2). Il cilindro di elio superfluido deve contenere una gran numero di vortici perché si manifestino fenomeni così macroscopici. Ognuno di questi contribuisce  $h/m$  alla circuitazione generale. Se il cilindro ha



raggio  $R$  e velocità angolare  $\omega$  allora la circuitazione totale lungo il bordo del cilindro sarà

$$\kappa = \oint \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = (2\pi R)(\omega R) \quad (4.10)$$

Siccome la circuitazione è quantizzata si ha che

$$\kappa = \frac{h}{m} N_v \quad (4.11)$$

dove  $N_v$  è il numero di vortici nel liquido rotante. Inserendo la (4.11) nella (4.10)

$$\frac{N_v}{\pi R^2} = \frac{2m\omega}{h} \quad (4.12)$$

Per lente rotazioni i vortici tendono a disporsi in schemi triangolari ben ordinati.

I vortici sono stati osservati anche nella BEC. In questo caso si impartiva il momento angolare alle particelle facendo ruotare i campi magnetici della trappola potenziale. I vortici si dispongono con schemi molto simili a quelli del superfluido, come è facile vedere in queste celebri foto ottenute da Ketterle (fig. 4.3).

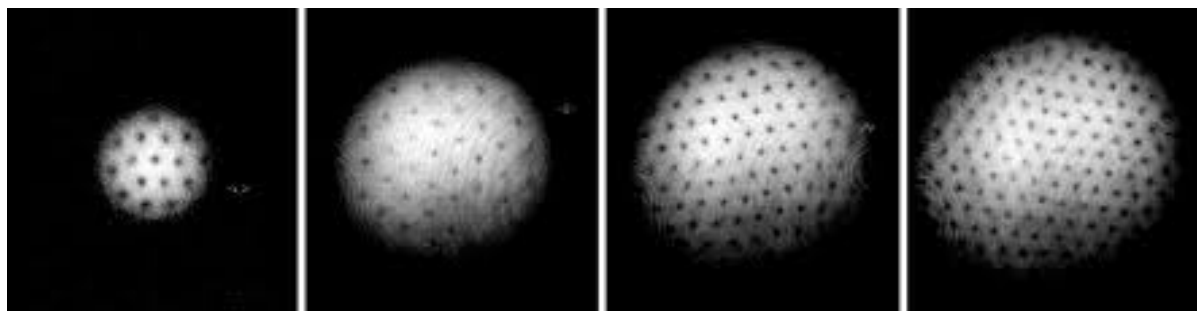


Figura 4.3: Vortici nella BEC[16]

Il concetto di vortice nei superconduttori è diverso rispetto a quello dei superfluidi. Mentre nell'elio superfluido si aveva una corrente del fluido "intero", nei superconduttori abbiamo che si ha una corrente di soli elettroni che si muovono a guisa di un superfluido cioè praticamente senza attrito.

Sperimentalmente si è osservato un tipo particolare di superconduttori, i cosiddetti superconduttori di tipo II (fig. 4.4). I superconduttori di tipo I sono quelli di cui si ha trattato fino ad adesso. Esistono materiali tali che possono presentare solo la fase di tipo II al di sotto di una certa temperatura. In altri materiali invece la fase di tipo II rappresenta una fase di transizione tra lo stato normale e lo stato di tipo I.

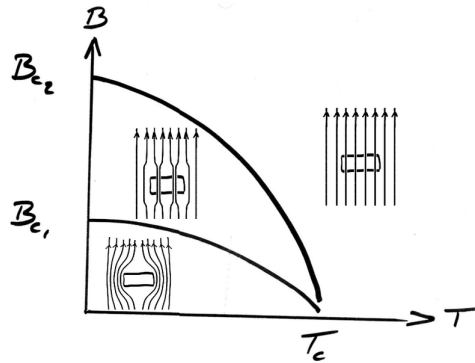


Figura 4.4: Fasi in un superconduttore di tipo II[17]

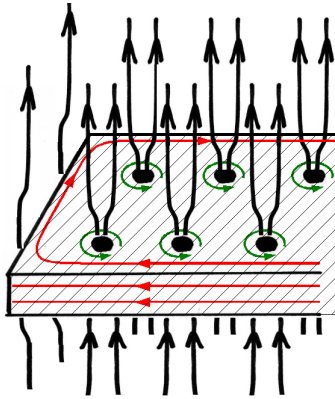


Figura 4.5: Vortici in un superconduttore. In nero le linee di flusso del campo magnetico, in verde le correnti generate dal flusso attraverso i vortici[18]

La caratteristica peculiare dei superconduttori di tipo II è quella che non tutto il materiale è soggetto all'effetto Meissner. Immaginando un campione a forma di disco e un campo magnetico perpendicolare ad esso, accadrà che non ci sarà flusso del campo per la stragrande maggioranza della superficie, tuttavia ci saranno dei punti della superficie in cui si concentreranno le linee del campo, quasi che il disco fosse bucherellato (fig. 4.5). Questi sono i vortici per i superconduttori. Al centro di questi vortici passano le linee di flusso siccome in quella regione il materiale ha le caratteristiche normali, invece per la parte restante il materiale è superconduttore. Infatti allontanandosi dal centro si ha delle correnti circolari indotte dal campo stesso, che schermano il resto del materiale dal flusso. Se si hanno  $N_v$  vortici in un campione di area  $A$  allora si avrà che la densità di flusso magnetico media  $B$  vale

$$B = \frac{N_v h}{A 2e} \quad (4.13)$$

che può essere riformulata

$$\frac{N_v}{A} = \frac{2eB}{h} \quad (4.14)$$

Confrontandola con la (4.12) e appare evidente la similitudine. Questa viene dal fatto che c'è un'analogia matematica tra l'effetto di una rotazione uniforme a frequenza angolare  $\omega$  in un superfluido elettricamente neutro e l'effetto di un campo magnetico  $B$  in un superconduttore.

# Bibliografia

- [1] James F. Annett, *Superconductivity, Superfluids and Condensates*, Oxford University Press, 2004
- [2] Alexander L. Fetter, John Dirk Walecka, *Quantum Theory of Many-particle Systems*, McGraw-Hill Book Company, 1971
- [3] Sebastien Babilar, *The Discover of Superfluidity*, HAL, 2006, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00113242>
- [4] R. P. Feymann, *Statistical Mechanics*, The benjamin/cummings publishing company, inc., 1982
- [5] Lev Pitaevskii, Sandro Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford Science Pubblcation, 2016
- [6] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Phase\\_diagram\\_of\\_4He\\_01.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Phase_diagram_of_4He_01.svg)
- [7] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Normal\\_and\\_superfluid\\_density\\_01.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Normal_and_superfluid_density_01.jpg)
- [8] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Effet\\_Fontaine.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Effet_Fontaine.png) (modificata)
- [9] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heat\\_capacity\\_of\\_4He-02.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Heat_capacity_of_4He-02.jpg) (modificata)
- [10] Boston Studies in the Philosophy of Science volume 124
- [11] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EXPULSION.png>
- [12] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagramme\\_de\\_phase\\_d'un\\_supraconducteur\\_de\\_type\\_I.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagramme_de_phase_d'un_supraconducteur_de_type_I.png)
- [13] <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cvandrhovst.png>
- [14] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contour\\_pour\\_quantification\\_du\\_flux.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Contour_pour_quantification_du_flux.png) (modificata)

- [15] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vortex\\_lines\\_in\\_rotating\\_helium01.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vortex_lines_in_rotating_helium01.jpg)
- [16] <https://www.nobelprize.org/uploads/2018/06/ketterle-symp.pdf>
- [17] [https://commons.wikimedia.org/wiki/  
File:Diagramme\\_de\\_phase\\_d'un\\_supraconducteur\\_de\\_type\\_II.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagramme_de_phase_d'un_supraconducteur_de_type_II.png)
- [18] [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vortex\\_dans\\_un\\_supraconducteur.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vortex_dans_un_supraconducteur.png)