

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

*DIPARTIMENTO di
INGEGNERIA INDUSTRIALE - DIN*

Corso di Laurea Magistrale in
Ingegneria Gestionale

TESI DI LAUREA
in

Manutenzione dei sistemi industriali

**MODELLI MATEMATICI PER L'OTTIMIZZAZIONE DELLE POLITICHE DI
MANUTENZIONE PREVENTIVA SU BASE STATISTICA**

CANDIDATO
Andrea Zanni

RELATORE
Prof. Ing. Alberto Regattieri

Anno Accademico 2019/20
Sessione I

INDICE

Abstract	1
I. Introduzione	3
1.1 Analisi della letteratura	7
1.2 Metodologia	8
1.4 Selezione dei documenti rilevanti.....	12
II. Classificazione delle principali politiche manutentive preventive	13
2.1 Politiche di sostituzione.....	13
2.1.1 Age-Replacement.....	14
2.1.2 Block replacement	15
2.1.3 Sostituzione periodica con riparazione minima al guasto.....	18
2.1.4 Sostituzione sequenziale su di un intervallo di tempo finito	19
2.2 Politiche manutentive dei sistemi a unità singola	20
2.2.1 Age – dependent PM policy	20
2.2.2 Periodic PM policy	24
2.2.3 Failure limit policy	27
2.2.4 Sequential PM policy	28
2.2.5 Repair limit policy	30
III. Sviluppo dei principali modelli manutentivi preventivi.....	32
3.1 Schema generale dei principali modelli preventivi.....	32
3.2 Minimal Repair Model - Barlow e Hunter, 1960	34
3.2.1 Modello preventivo ad età costante.....	34
3.2.2 Modello preventivo a data costante	35
3.3 Politiche preventive ottime per sistemi riparabili - Estensione delle politiche type I e type II.....	37
3.3.1 Modello.....	37

3.3.2 Generalizzazione della politica type I	40
3.3.3 Generalizzazione della politica type II.....	43
3.3.4 Conclusioni del modello	45
3.4 Manutenzione preventiva imperfetta	46
3.4.1 Modello di manutenzione imperfetta p-q	47
3.5 Modelli di manutenzione preventiva imperfetta per la <i>policy II</i> - Nakagawa, 1988: modello periodico e sequenziale.....	49
3.5.1 Introduzione.....	49
3.5.2 Sviluppo del modello periodico	50
3.5.3 Sviluppo del modello sequenziale.....	52
3.5.4 Esempio numerico per la distribuzione di Weibull	53
3.5.5 Conclusione del modello	56
3.6 Modello di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con due tipologie di modalità di fallimento - Lin, 2001	57
3.6.1 Introduzione.....	57
3.6.2 Modello ibrido	60
3.6.3 Due categorie di tipo di guasto	61
3.6.4 Sviluppo del modello	63
3.6.5 Approccio 1 alla determinazione degli intervalli di minimizzazione	64
3.6.6 Approccio 2 alla determinazione degli intervalli di minimizzazione	66
3.6.7 Conclusione del modello	67
3.7 Modello di manutenzione periodica imperfetta con due categorie di modalità di guasto concorrenti – Zequeira e Brenguen, 2005	68
3.7.1 Introduzione.....	68
3.7.2 Modello.....	70
3.7.3 Tasso di guasto del sistema	70
3.7.4 Analisi del modello	71

3.7.5 Conclusione del modello	75
3.8 Modello di manutenzione preventiva imperfetta con modalità di guasto dipendenti – Castro, 2009	75
3.8.1 Introduzione	76
3.8.2 Modello	77
3.8.3 Conclusione del modello	81
3.9 Modello esteso di manutenzione preventiva periodica imperfetta con modalità di guasto di tipo <i>age-dependent</i> – Sheu e Chang, 2009	81
3.9.1 Acronimi	82
3.9.2 Introduzione	83
3.9.3 Modello	85
3.9.4 Conclusioni del modello	87
3.10 Modello esteso di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con modalità di guasto di tipo <i>age-dependent</i> – Sheu e Chang, 2009	87
3.10.1 Introduzione	88
3.10.2 Modello	90
3.10.3 Conclusioni del modello	92
3.11 Modelli di manutenzione preventiva imperfetta di tipo <i>age-based</i> con age reduction - El Ferik e Ben-Daya, 2005/2008	93
3. 11.1 Introduzione	93
3.11.2 Modello Age-based	96
3.11.3 Modello	100
3.11.4 Procedura risolutiva	103
3.11.5 Conclusione del modello	104
3.12 Modelli di manutenzione preventiva a processo geometrico – Lam, 2006	104
3.12.1 Introduzione	104
3.12.2 Definizione della nuova classe di funzioni di distribuzione ERBLE	106

3.12.3 Modello di manutenzione a processo geometrico.....	107
3.12.4 Conclusioni del modello	111
3.13 Modello di manutenzione preventiva basata sul processo geometrico generalizzato - Wang, Zhang e Yam, 2017	112
3.13.1 Introduzione.....	113
3.13.2 Politica preventiva periodica con riparazione minima al guasto	117
3.13.3 Modello di politica preventiva sequenziale basato sul processo geometrico generalizzato (GGP).....	120
3.13.4 Conclusione del modello	121
IV. Modello di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con riduzione dell'intensità di guasto sul caso specifico di autobus urbani (Zhou, 2020)	123
4.1.1 Introduzione.....	123
4.1.2 Definizione del problema e assunzioni del modello	125
4.1.3 Modello di politica preventiva sequenziale di tipo imperfetto.....	130
4.1.4 Formulazione del modello mediante la memoria d'ordine p	133
4.1.5 Procedura del modello	134
4.1.6 Verifica del modello	135
4.1.7 Esempio numerico di Zhao: dati di guasto di una gru	136
4.1.8 Applicazione della politica preventiva proposta agli autobus urbani.....	138
4.1.9 Analisi di correlazione tra la PME ed i costi della politica preventiva	141
4.1.10 Conclusioni del modello	143
V. Conclusioni	146
Bibliografia.....	151

Indice delle figure

Figura 1 - Metodo impiegato per la selezione dei documenti rilevanti.....	12
Figura 2 - Politica manutentiva type I.....	34
Figura 3 - Politica manutentiva type II.....	36
Figura 4 - Ciclo di manutenzione preventiva imperfetta.....	57
Figura 5 – Confronto dei modelli di manutenzione preventiva riportati	61
Figura 6 – Funzione di <i>hazard rate</i> per il modello ibrido proposto.....	85
Figura 7 - diagramma di una possibile realizzazione del ciclo del sistema.....	108
Figura 8 – Modello manutentivo preventivo sequenziale con due tipi di manutenzione preventiva imperfetta.....	125
Figura 9 – Intensità di guasto con/senza interferenza della politica sequenziale.....	128
Figura 10 – Fit dei risultati e confronto.....	137
Figura 11 – Risultati del modello di fit e confronto con la memoria d’ordine p	140
Figura 12 – Analisi di correlazione fra la PME ed il costo.....	142
Figura 13 – Analisi di correlazione fra la PME ed il tempo di inattività della PM.....	142

Indice delle tabelle

Tabella di applicazione della metodologia.....	10
Tabella 1 - Riassunto delle politiche preventive di tipo <i>age-dependent</i>	24
Tabella 2 - Riassunto delle politiche preventive di tipo periodico.....	27
Tabella 3 – Riassunto delle politiche preventive di tipo <i>failure limit</i>	28
Tabella 4 - Riassunto delle politiche preventive di tipo <i>repair limit</i>	31
Tabella 5 - Grandezze principali dei modelli preventivi periodico e sequenziale di Nakagawa.....	55
Tabella 6 – Numeri di guasto fra gli intervalli sequenziali della politica preventiva imperfetta.....	126
Tabella 7 – Risultati numerici dell’analisi.....	136
Tabella 8 – Risultati del modello.....	139
Tabella 9 - costi della PM, costi della CM, e tempo di inattività dovuto alla PM.....	141

Abstract

“Prevenire è meglio che curare” recitava qualche anno fa una nota pubblicità televisiva di un dentifricio, in cui una giovane ragazza mostrava il suo bel sorriso addentando efficacemente e senza rischi una bella mela verde. Ma se l’uso del dentifricio non bastasse, varrebbe la pena “visitare” ogni tanto il medico dentista per un controllo dei propri denti? In tal caso, con quale frequenza conviene farsi visitare tenuto conto del costo di una visita di controllo, di quello di una visita “non solo di controllo” ma in cui si richiede al medico di intervenire a fronte di un “guasto” (e.g. una carie), della propensione al rischio e soprattutto delle abitudini alimentari e igieniche del paziente¹?

Negli scorsi decenni, sono stati ampiamente studiati nella letteratura scientifica i problemi di manutenzione e sostituzione dei sistemi soggetti a deterioramento, descritti in numerosi modelli, i quali possono essere classificati secondo determinate politiche manutentive: l’*age-replacement policy*, la *random age replacement policy*, la *block replacement policy*, la *repair cost limit policy*, *repair time limit policy*, *repair number counting policy*, *reference time policy*, *mixed age policy*, *group maintenance policy*, *opportunistic maintenance policy*, etc.

Ogni politica è descritta da differenti caratteristiche, vantaggi e svantaggi. In prima analisi andremo a classificare e comparare le diverse politiche esistenti per i sistemi mono componente². Entreremo quindi più nel dettaglio, mostrando modelli matematici di natura probabilistica di supporto alla pianificazione e programmazione degli interventi manutentivi nei sistemi di produzione, evidenziando le formule che permettono di confrontare i diversi modelli in termini numerici di costo atteso a lungo termine. Questi modelli hanno il vantaggio di essere “*cost based*”, orientati quindi all’obiettivo di minimizzare i costi globali della gestione manutentiva sfruttando al meglio le risorse produttive disponibili¹.

La ricerca può essere così riassunta:

Scopo: esposizione, analisi e confronto dei principali modelli matematici per l’ottimizzazione delle politiche preventive su base statistica, dai più obsoleti a quelli più recenti, noti ed impiegati nel settore industriale.

Metodologia: la metodologia impiegata include una revisione sistematica della letteratura esistente. L'insieme delle risorse utilizzate include articoli accademici, testi e manuali e report scientifici. La ricerca pone le basi nei primi passi della letteratura scientifica verso il mondo della manutenzione industriale, a partire dal 1960 circa attraverso le analisi e gli studi dei pionieri dell'approccio matematico alla manutenzione (*Barlow e Hunter*) per poi spingersi fino ai modelli specifici preventivi più recenti dei giorni nostri. Gli articoli ottenuti derivano dalla ricerca di parole chiave, prima fra tutte "*preventive maintenance*", su cataloghi online di articoli scientifici, portali specifici del mondo dell'ingegneria oltre che dalla consultazione di manuali e testi di natura più o meno recente.

Conclusioni: la ricerca mira a fornire un contributo alla letteratura esistente sulle politiche manutentive preventive, offrendo un'ampia prospettiva sulla situazione attuale di studio ed applicabilità dei modelli teorici di manutenzione analizzati.

I. Introduzione

L'automazione degli impianti industriali è stata largamente adottata dai moderni sistemi produttivi chiamati a competere in mercati fortemente dinamici e modellati su alti standard qualitativi. Detti impianti richiedono tipicamente alti costi d'investimento e conseguentemente necessitano di essere utilizzati più efficacemente possibile. Ciò è possibile solo qualora siano sempre disponibili, ovvero capaci di svolgere correttamente le attività loro assegnate, compatibilmente con le politiche manutentive adottate e contabilizzando opportunamente i costi di fermo impianto e di riparazione. Tutto ciò risulta ancora più vero per i sistemi produttivi operanti in *Just in Time* (JIT), i.e. in assenza di quei magazzini e buffer interoperazionali capaci di gestire le asincronie e le discontinuità della produzione.

Questo quadro introduttivo lascia intuire l'importanza strategica della manutenzione a garanzia della qualità di prodotto e della competitività delle iniziative di business, sia nei settori produttivi in senso stretto (e.g. industria di processo, industria manifatturiera, logistica distributiva, etc.) sia nei servizi (e.g. ospedali, banche, scuole, etc.).

Andremo ad introdurre, a comparare e applicare alcuni modelli matematici di supporto alla pianificazione, progettazione, gestione e controllo degli interventi manutentivi in un sistema produttivo¹.

I sistemi utilizzati per la produzione di beni e la consegna di servizi costituiscono la stragrande maggioranza del capitale industriale. Questi sistemi sono soggetti a deterioramento a causa del loro utilizzo e dell'età. La maggior parte di questi sono sistemi mantenuti o riparabili. Per alcuni di questi, come ad esempio i velivoli, sottomarini, sistemi militari e nucleari, è estremamente importante che si evitino rotture durante la normale operatività, pena conseguenze pericolose o catastrofiche. È pertanto necessario che venga eseguita una manutenzione ad hoc su di essi in modo tale da mantenerne e aumentarne l'affidabilità. L'importanza della manutenzione ha suscitato l'interesse nello sviluppo e nell'implementazione di

strategie manutentive ottimali atte al miglioramento dell'affidabilità dei sistemi, alla prevenzione per contenere i guasti, e a ridurre i costi di manutenzione generali.

Negli scorsi decenni, i problemi legati alla manutenzione e alla sostituzione sono stati oggetto di studio da parte di molti ricercatori del settore. In questa prima parte andremo a esporre in prima approssimazione una classificazione dei principali modelli manutentivi che sono stati studiati e sviluppati nel corso degli anni. Lo scopo primario sarà quello di classificare i modelli manutentivi in modo tale che chi dovrà prendere una decisione, potrà riconoscere il modello che meglio si addice al proprio problema manutentivo. Sebbene ne siano state pubblicate una enorme quantità, c'è un numero limitato di politiche sulle quali possono essere basati tutti i modelli manutentivi.

Per esempio, centinaia di modelli di manutenzione ricadono *nell'age-replacement policy*, molti altri nella *failure limit policy*. Possiamo distinguere politiche manutentive per sistemi a singola unità, o sistemi multi-componente. Noi ci concentreremo sulle politiche manutentive dei *single-unit systems*. Inoltre, in una prima classificazione, possiamo riassumere due grandi famiglie di politiche manutentive: la manutenzione correttiva (CM) e quella preventiva (PM). La manutenzione correttiva è quella branca della manutenzione che interviene quando un sistema è in guasto e si basa su tutte quelle azioni messe in atto quando questo viene rilevato, per far sì che un componente venga ripristinato a determinate condizioni specifiche di operatività. La manutenzione preventiva (PM) invece è la manutenzione che si occupa di un sistema quando questo è ancora in operatività.

La *preventive maintenance* si fonda su tutta una serie di azioni atte a mantenere un dispositivo in determinate condizioni di operatività e viene eseguita attraverso ispezioni sistematiche, investigazioni, e prevenzione di possibili rotture nascenti². Un'altra prima classificazione delle politiche manutentive principali distingue la manutenzione reattiva da quella proattiva. La manutenzione di tipo reattivo viene eseguita in risposta ad un'azione non pianificata, come conseguenza di un guasto. La manutenzione proattiva (o preventiva) viene invece pre programmata, ad istanti solitamente periodici, e prevede ispezioni, riparazioni, lubrificazioni, pulizia e aggiustamenti. Indipendentemente dal tipo di manutenzione, come per

l'affidabilità, la manutenzione è definita come un'attività caratterizzata da una probabilità con un tempo di riparazione specifico. Quando viene eseguita la manutenzione, le azioni di riparazione per una condizione specifica di un certo componente guasto sono stocastiche. In questo processo di riparazione stocastico, si definisce una funzione *tasso di riparazione* $\mu(t)$ come la probabilità che la riparazione sia completata entro un tempo t . Le forme di riparazione possono essere classificate in tre categorie:

- *Perfect repair*: quando un componente funziona come nuovo ed è portato ad uno stato chiamato "as good as new".
- *Imperfect repair*: quando il componente viene portato ad uno stato intermedio di operatività, chiamato "better than old but worse than new".
- *Minimal repair*: quando il componente ritorna allo stato in cui era appena prima della rottura, chiamato "as bad as old"³.

Infine, la manutenzione preventiva viene definita come un programma di azioni manutentive pianificate che devono essere eseguite al fine di evitare rotture, perdite di produzione e violazioni della sicurezza⁴.

Per sostituzione (*replacement*) si intende poi una manutenzione di tipo *perfect*. Una riparazione è invece un'azione correttiva su un componente o su un sistema quando questo è guasto, ed ha lo stesso significato della *corrective maintenance*².

Esistono quindi numerosi approcci alternativi alla manutenzione di un sistema di produzione. Nessuno di questi può definirsi il migliore in assoluto, poiché l'efficacia di una politica manutentiva è strettamente connessa alla natura del sistema cui è applicata.

Di seguito si classificano e definiscono più dettagliatamente le strategie manutentive più note nella letteratura scientifica:

- *Breakdown/corrective maintenance* (manutenzione a guasto): questa tipologia di intervento manutentivo viene eseguita qualora il sistema produttivo sia incapace di operare a fronte della rilevazione di un guasto. Questa strategia è nota come *run-to-failure strategy*, nel senso che non è prevista alcuna azione manutentiva volta ad allontanare l'accadimento dell'evento di fermo impianto.

- *Preventive maintenance* (manutenzione preventiva): come dice il nome, si tratta di una manutenzione basata su interventi preventivi ovvero che cercano di anticipare l'accadimento dell'evento "rottura del sistema". In particolare, si possono distinguere due categorie principali di intervento manutentivo di tipo preventivo:
 - *Statistically and reliability based maintenance* (manutenzione preventiva su base statistica): si tratta di una famiglia di modelli manutentivi basata sull'elaborazione dei principali parametri affidabilistici governanti il comportamento al guasto dei sistemi produttivi. In particolare, si considerino la *use-based preventive maintenance* e la *time-based*. Queste due politiche si basano sull'uso/consumo e sulla vecchiaia dei componenti produttivi: più precisamente considerano le ore di funzionamento (rif. *Used based*) o il calendario (rif. *Time based*). Pertanto, quando un sistema (e.g. impianto, attrezzatura, utensile, etc.) raggiunge un certo stato di vecchiaia, espressa in tempo di effettivo utilizzo/funzionamento (*used based strategy*) o età (*time based strategy*), si prevede una azione preventiva;
 - *Condition-based preventive maintenance* (manutenzione preventiva su condizione): si basa sul monitoraggio di parametri impiantistici i cui valori sono influenzati dalle condizioni operative e dalla salute dei sistemi produttivi.
- *Oppurtunity maintenance* (manutenzione opportunistica): il sistema produttivo nel corso della sua vita manifesta con una certa cadenza l'opportunità di essere mantenuto. Tale opportunità cresce durante i periodi di fermo impianto.
- *Fault funding* (manutenzione ispettiva): si intende l'attività orientata all'identificazione dei guasti mediante ispezione. Un esempio è rappresentato dalle attività di checking di un'automobile (i.e. controllo dei freni, della pressione dei pneumatici, del livello dei liquidi antigelo, etc.) eseguite dall'automobilista prima di compiere un lungo viaggio.
- *Overhaul* (revisione): si intende l'attività congiunta di analisi e aggiustamento (chiamata restoration) di un componente o insieme di componenti di un sistema per il raggruppamento (ripristino) di un'accettabile stato di funzionamento.
- *Replacement* (manutenzione per sostituzione): non si tratta di interventi

migliorativi (i.e. di aggiustamento, *performing maintenance*) ma di sostituzione programmata di una o più parti del sistema¹.

1.1 Analisi della letteratura

I moderni impianti di produzione sia di tipo industriale, cioè legati alla produzione di un bene, sia erogatori di servizi, devono affrontare una sfida che li vede coinvolti nella continua ricerca della produttività, ovvero di una produzione che remunerati velocemente e con ampi margini gli investimenti effettuati, della qualità dei prodotti e dei processi di produzione, ovvero della garanzia di soddisfacimento delle aspettative espresse ed inespresse del cliente e della sicurezza, per la salvaguardia della collettività e dell'ambiente.

Per ciascuno di questi tre aspetti la letteratura presenta ricerche e metodologie estremamente dettagliate e profonde che peraltro spesso presentano dei problemi significativi soprattutto per applicazioni non esclusivamente accademiche. In effetti i metodi proposti sono spesso focalizzati sulla ottimizzazione di un singolo aspetto, raggiungono ottimi locali che in realtà rappresentano sub-ottimi per il sistema complessivo. Inoltre, il raggiungimento di questi risultati spesso richiede un significativo consumo di risorse, per esempio in termini di potenza e durata di calcolo ovvero, conoscenza e tempo di formulazione del modello risolutivo.

I modelli analizzati si prepongono l'obiettivo di ricercare la condizione ottimale relativamente al soddisfacimento simultaneo di tutti e tre i requisiti sopra menzionati. Tale approccio risulta fondamentalmente basato sull'impiego integrato delle tecniche legate alla manutenzione degli impianti industriali, nell'accezione più ampia possibile, e delle tecniche di controllo statistico della qualità. Si cercherà per alcuni modelli di confrontare i risultati su casi numerici e/o dati provenienti dal mondo aziendale¹.

1.2 Metodologia

Al fine di fornire un documento di validità scientifica, per la nostra trattazione sono stati consultati e approfonditi numerosi articoli, report, survey e testi universitari. La metodologia applicata ha portato alla definizione di un insieme di fonti utili all'apprendimento della letteratura nota e ad una scrematura parziale volta all'identificazione degli specifici argomenti relativi alla nostra trattazione.

Le parole chiave utilizzate esprimono *cosa* stiamo studiando, e sono state applicate a siti di ricerca scientifica specifica quali:

- Engineering Village;
- JSTOR (The journal of the Operational Research Society);
- Scopus;
- Google scholar.

Le parole chiave utilizzate per la nostra ricerca sono principalmente le seguenti:

- Preventive maintenance;
- Age replacement policy;
- Statistically based PM models;
- Sequential PM models;
- Analytic models for PM.
- Survey

La ricerca mirata e selezionata dalle parole chiave ha portato all'identificazione di un ampio ma specifico set di articoli scientifici trattanti l'argomento in esame, i quali sono stati catalogati in una tabella costruita ad hoc al fine di ottenere un prospetto visivo ed immediato della letteratura approfondita. La tabella è concepita in modo tale da suddividere gli articoli per parole chiave menzionate, periodo storico di pubblicazione, posizione delle parole chiave all'interno dell'articolo, e rilevanza. In particolare, la suddivisione temporale scandisce tre periodi: il primo riguarda la letteratura edita fra il 1960 ed il 1980, il secondo quella fra il 1981 ed il 2000, ed il terzo quella pubblicata dal 2001 ai nostri giorni.

La rilevanza dell'articolo prevede una valutazione soggettiva con punteggio fra 0 e 3 punti, indicando con 0 un articolo di scarsissimo interesse per la trattazione, con 1 un articolo poco interessante, con 2 un articolo interessante, e con 3 un articolo molto interessante per la trattazione. È prevista infine una colonna relativa ad eventuali commenti sull'articolo per una miglior comprensione e identificazione visiva dell'articolo.

Si allega nel prossimo paragrafo la tabella ottenuta.

1.3 Applicazione della metodologia

Journal	Article	Authors	Keywords							Date			Keywords Position					Relevant ?(0-3)	Comments	
			Preventive maintenance	Age Replacement	sequential PM model	Barlow and Hunter	analytic models for preventive maintenance	survey	1960-1980	1981-2000	2001-2020	Title	Abstract	Body	References	Authors				
The Journal of the Operational Research Society	Model for imperfect Age-Based Preventive Maintenance with Age Reduction	El-Ferik, Ben-Daya	*	*									*	*	*	*			3	
SAE international	Optimal Preventive Maintenance Scheduled Based on Lifecycle Cost and Time-Dependent Reliability	Zi, Mourelatos, Singh	*				*			*	*	*	*	*					1	
Informs via JSTOR	Optimal Preventive Maintenance Policies for Repairable Systems	Nguyen, Murthy	*				*			*	*	*	*	*					3	
Journal for the society for industrial and applied mathematics, vol. 11, no. 4 (1963)	Optimum checking procedures	Barlow, Hunter, Proschan	*		*	*	*		*				*	*	*	*			1	
J. Appl. Probability Trust (1983)	Brown1983	Brown, Proschan							*				*	*	*	*	*		2	Articolo ottenuto tramite le parole chiave: <i>imperfect repair Brown and Proschan</i>
Journal of applied Probability, Vol. 23, No. 2 (Jun, 1986)	Nakagawa1986	Nakagawa	*		*	*	*		*				*	*					3	
The Journal of the Operational Research Society, Vol. 59, no. 12	Model for imperfect age-based preventive maintenance with age reduction	El-Ferik, Ben-Daya	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*					3	
Department of mechanical and industrial Engineering, University of Toronto, University of Alberta, University of Hong Kong	Lin2001	Lin	*	*	*	*	*		*	*	*	*	*	*					3	
Mathematical Theory of Reliability	Mathematical Theory of Reliability	Richard Barlow, Frank Proschan	*	*		*	*		*				*	*		*			2	
Journal of Applied Probability, Vol. 40, No. 4 (Dec., 2003)	LI2003		*				*	*		*	*	*	*	*						
European Journal Of Operational Research	A survey of maintenance policies of deteriorating systems	Wang	*	*			*		*	*	*	*	*	*					2	
King Fahd University of Petroleum and Minerals-The Journal of the Operational Research Society	age based imperfect preventive maintenance models	El-Ferik, Ben-Daya	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*					2	
IEEE TRANSACTIONS - King Fahd University of Petroleum and Minerals	age-based hybrid model for imperfect preventive maintenance	El-Ferik, Ben-Daya	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*					2	
Journal of Applied Probability, Vol. 40, No. 4 (Dec., 2003)	imperfect repair models with preventive maintenance	Li, Shaked	*	*		*	*		*	*	*	*	*	*					1	In questo articolo viene utilizzato il metodo di compensazione per confrontare il processo di guasto nei modelli di tipo imperfect rispetto ad una politica age o block, estendendo i risultati delle politiche di age e block replacement ad un modello di manutenzione preventiva con riparazione imperfetta.
JSTOR, University of Pittsburgh, Haifa University	comparisons for maintenance policies involving complete and minimal repair	Block, Langsberg, Savits	*			*	*		*	*	*	*	*	*					1	

1.4 Selezione dei documenti rilevanti

L'insieme dei documenti rilevanti ottenuti grazie alla scrematura dovuta alle parole chiave su specifici siti di ricerca scientifica deriva dall'applicazione dei seguenti passi:

1. Lettura del titolo dell'articolo; in caso di interesse si procede al passo 2.
2. Lettura dell'abstract; in caso di interesse si procede al passo 3.
3. Lettura dell'intero articolo.

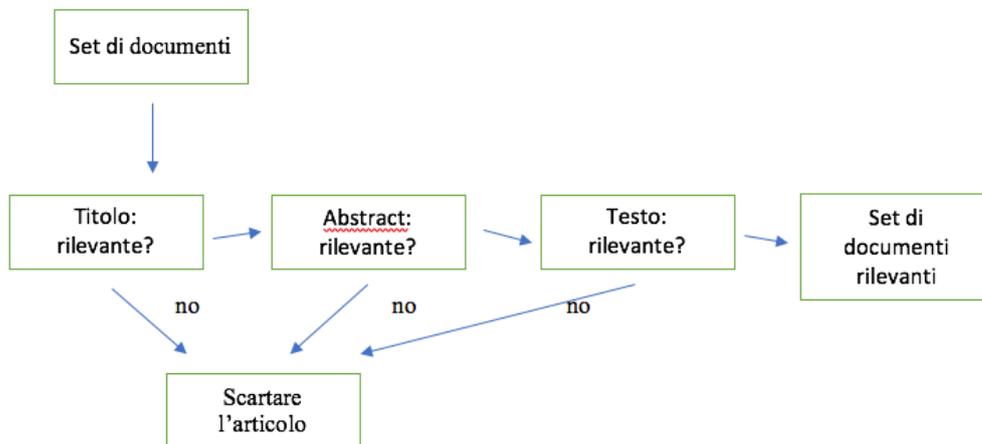


Figura 1 – Metodo impiegato per la selezione dei documenti rilevanti

Gli articoli considerati “rilevanti” sono articoli che includono il tema della manutenzione in senso lato, della manutenzione preventiva, e dei modelli analitici di manutenzione preventiva.

II. Classificazione delle principali politiche manutentive preventive

2.1 Politiche di sostituzione

Andiamo a specificare le politiche di sostituzione che bilanciano il costo di rottura di un componente durante la sua operatività in confronto al costo delle sostituzioni programmate. Le basi di queste analisi sono poste negli studi di Barlow e Proschan (1962). In tutti i modelli di sostituzione di seguito descritti, viene indicato con c_1 un costo relativo ad ogni componente guasto che viene sostituito, il quale include tutti i costi risultanti dalla rottura e dalla sostituzione. Si assume che i guasti e le sostituzioni siano istantanei. Con c_2 invece si intende un costo imputato ad ogni componente *non guasto* che viene sostituito. $c_2 < c_1$. Indicando con $N_1(t)$ il numero di rotture che avvengono nell'intervallo $[0; t]$ e con $N_2(t)$ il numero di sostituzioni di componenti *non guasti* nello stesso intervallo di tempo, possiamo esprimere il costo atteso in $[0; t]$ come:

$$C(t) = c_1 E N_1(t) + c_2 E N_2(t) \quad (1)$$

Si vuole dunque minimizzare questa funzione di costo per un intervallo di tempo finito o minimizzare $\lim_{t \rightarrow \infty} C(t)/t$ per un intervallo di tempo infinito entro ciascuna delle seguenti classi di politiche manutentive: (1) age replacement; (2) block replacement; (3) periodic replacement with minimal repair at failure; (4) sequential replacement.

I costi c_1 e c_2 possono essere interpretati anche come il tempo medio di sostituzione di un componente guasto e di un componente *non guasto* rispettivamente. $C(t)$ diviene, in questa chiave di lettura, il tempo previsto di inattività del componente in $[0; t]$. Nessuna delle politiche menzionate è adatta nel caso in cui la distribuzione di guasto sia di tipo DFR (*decreasing failure rate*), poiché in questo caso i componenti utilizzati tendono ad avere una vita rimanente più lunga delle loro sostituzioni⁵.

2.1.1 Age-Replacement

Una politica di *age-replacement* è definita come una politica sostitutiva tale per cui la sostituzione avviene al guasto o dopo un tempo T , a seconda di quale evento avvenga per primo. Se non diversamente specificato, T è considerato costante; se invece è una grandezza variabile, scelta indipendentemente da una fissata distribuzione per ogni sostituzione programmata, chiameremo la politica col nome di “*random age replacement policy*”².

La politica di *age replacement* per un intervallo di tempo infinito ha ricevuto molta attenzione nella letteratura passata. Morse (1958) mostrò come trovare l’intervallo di sostituzione tale da minimizzare il costo atteso per unità di tempo, quando un intervallo ottimo esiste. Barlow e Proschan (1962) provarono l’esistenza di una politica ottimale e mostrarono la procedura di calcolo per un caso specifico. Derman e Sacks (1960) ottennero una politica di sostituzione ottima per un componente di un sistema nel quale la decisione di sostituirlo dipende dallo stato di deterioramento del sistema stesso ad un preciso istante di tempo⁵.

Nella politica di tipo *age-replacement* è bene conoscere, per ogni specifica lunghezza di tempo, la distribuzione ed il valore atteso del numero di sostituzioni pianificate, il numero di rotture ed il numero totale di rimozioni causate da sostituzioni pianificate o sostituzioni dovute alla rottura del componente. Queste sono le grandezze operative di una specifica politica di sostituzione e costituiscono tutte le informazioni necessarie di base per poter confrontare politiche di sostituzione alternative e per determinare il numero di parti di ricambio da tenere a magazzino o il budget richiesto per mantenere l’attrezzatura.

Un’assunzione ragionevole in molte situazioni prevede che il meccanismo di rottura segua una caratteristica di usura per cui il tasso di guasto sia crescente (*increasing failure rate*) al passare del tempo.

Considerando un intervallo di tempo finito, Barlow e Proschan (1965) hanno enunciato e dimostrato un teorema per il quale, per una distribuzione continua F , esiste ed è unica una certa politica di sostituzione di minimo costo di tipo *age*, per ogni intervallo di tempo finito² $[0; t]$.

2.1.2 Block replacement

La politica di *block replacement* prevede che più componenti di una determinata tipologia siano rimpiazzati agli istanti di tempo kt ($k = 1, 2, \dots$) e al guasto. Questa politica prende il nome dal fatto che è basata sulla sostituzione di un blocco o di un gruppo di pezzi a precisi istanti di tempo kT , indipendentemente dalla storia dei guasti del sistema².

Savage (1956) studiò politiche ottimali di *block replacement* per un intervallo di tempo infinito all'interno di un'impostazione molto generale. Le sue formule non erano però prontamente applicabili in quanto l'espressione del costo atteso, nella sua formulazione generale, rimane funzione degli intervalli di sostituzione⁵.

Questa politica risulta apparentemente di maggiore immediatezza pratica rispetto alla *age-replacement* in quanto non richiede di tenere alcuna traccia dello stato di utilizzo dei componenti. Essa viene impiegata specialmente nei sistemi elettronici complessi, come ad esempio i computer. È utile confrontare le politiche di *age* e *block replacement* considerando per entrambe intervalli di tempo T .

Ad esempio, la *block replacement* è sicuramente più dispendiosa dal punto di vista economico, in quanto viene rimosso un numero di componenti *non guasti* maggiore rispetto a quanti ne vengano sostituiti con la politica di tipo *age-based*; il numero totale di rinnovi, dunque, è maggiore sia per i componenti guasti che per quelli sani. Come si può intuire, nel caso di tasso di guasto crescente (*increasing failure rate – IFR*), il numero atteso di rotture è minore mediante una politica di tipo *block*. Poiché vengono eseguiti esattamente $\frac{t}{T}$ sostituzioni in $[0; t]$ sotto la *block replacement*, con la *age-replacement policy* non possono essercene di più di $\frac{t}{T}$.

Indichiamo con $N_B(t)$ il numero di sostituzioni che avvengono con la *block replacement* in $[0; t]$ e con $N_A(t)$ il numero di sostituzioni per la *age-replacement policy* nello stesso intervallo di tempo. Possiamo enunciare il seguente teorema del quale viene omessa la dimostrazione.

Teorema 1: $P[N_A(t) \geq n] \leq P[N_B(t) \geq n]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Sia ora $N_A^*(t)$ [$N_B^*(t)$] il numero di roture in $[0; t]$ sotto la *age [block] replacement policy* al tempo T. Il prossimo teorema mostra che il numero di roture per unità di tempo, nel caso di *block replacement policy*, al tempo T è, al più:

$$\frac{M(T)}{T}$$

Con $M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} F^{(i)}(T)$

Teorema 2: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N_B^*(t)}{t} = \frac{M(T)}{T}$

Si ottiene la *: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_B^*(t)]}{t} = \frac{M(T)}{T}$

Poiché il numero di rinnovi, con la *block replacement*, è stocasticamente maggiore di quello con l'*age replacement policy*, dal Teorema 2 possiamo scrivere che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_B(t)]}{t} \geq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_A(t)]}{t}$$

Considerando la *:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_B(t)]}{t} = \frac{M(T)}{T} + \frac{1}{T}$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E[N_A(t)]}{t} = \frac{1}{\int_0^T \bar{F}(x) dx}$$

Si ottiene che:

$$\frac{M(T)}{T} + \frac{1}{T} \geq \frac{1}{\int_0^T \bar{F}(x) dx}$$

E quindi:

$$M(T) \geq \frac{T}{\int_0^T \bar{F}(x) dx} - 1. \quad (2)$$

la quale fornisce un limite inferiore alla *renewal function* per tutto T.

Si definisce la *renewal function* $M(t)$ come il numero atteso di rinnovi in $[0; t]$

$$M(t) = E[N(t)].$$

Per ottenere il valor medio di lungo periodo dei tempi tra i guasti, sotto la politica di *block replacement*, chiamiamo $\{Y_i\}$ l'insieme dei successivi istanti di tempo tra i guasti. Gli intervalli di sostituzione sono sempre dettati da T.

Teorema 3

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N_B^*(t)}}{N_B^*(t)} = \frac{T}{M(T)}$$

Il seguente teorema dimostra infine l'esistenza di un limite superiore a M(T).

Teorema 4

Se F è una funzione di distribuzione continua ad *increasing failure rate*

Allora: $P[N(t) \geq n] \geq P[N_A^*(t) \geq n] \geq P[N_B^*(t) \geq n]$, per $t \geq 0, T > 0, n = 0, 1, 2 \dots$

L'uguaglianza è determinata per la distribuzione di tipo esponenziale $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\mu_1}}$ dove μ_1 denota il valor medio di F.

Deriva che, per $T \geq 0, x > 0$ e $0 \leq t \leq T$

$$P[N(t, x) \geq n] \geq P[N_A^*(t, x) \geq n] \geq P[N_B^*(t) \geq n]$$

Un corollario importante del teorema precedente è il seguente:

Se una funzione di distribuzione F è ad *increasing failure rate*, allora

$$M(t) \leq \frac{tF(t)}{\int_0^t F(x)dx}, \forall t$$

Dai teoremi e corollari sopra citati, si dimostra che:

quando F è *Ifr* (*increasing failure rate*), vale:

$$\frac{t}{\int_0^t F(x)dx} - 1 \leq M(t) \leq \frac{tF(t)}{\int_0^t F(x)dx} \quad (3)$$

che permette di definire i limiti inferiore e superiore del costo della politica di tipo *block replacement*.

2.1.3 Sostituzione periodica con riparazione minima al guasto

Barlow e Hunter (1960) introdussero la nozione di sostituzione periodica o revisione con riparazione minima ad ogni guasto⁵.

In questo modello è assunto che il tasso di guasto del sistema rimane invariato ad ogni riparazione del guasto fra due sostituzioni successive. I due ricercatori mostrano come calcolare l'intervallo ottimale tra due sostituzioni o revisioni per un intervallo di tempo infinito. Inoltre, essi confrontano i risultati ottenuti con questa politica a quelli derivanti dall'applicazione dell'*optimum age-replacement policy*, fornendo le informazioni necessarie per poter scegliere quale strategia preventiva adottare in determinate situazioni specifiche. Questa politica di sostituzione discussa da Barlow e Hunter prende il nome di *policy II*, alla quale sarà dedicata una sezione successivamente in questa trattazione. Ci limitiamo qui a sottolineare che dopo ogni guasto viene eseguito un intervento di *minimal repair* tale per cui il tasso di guasto $\lambda(t)$ (corrispondente alla distribuzione di guasto $F(t)$, avente funzione densità di probabilità $f(t)$) non subisce variazioni.

Questa politica, che può essere applicata a sistemi complessi come computer, aerei, etc., prevede che la sostituzione, o revisione, avvenga quindi ad istanti di tempo periodici $T, 2T, 3T$ e così via; il problema verte dunque all'individuazione dell'intervallo T che minimizza il costo atteso totale a lungo termine².

$$C(T) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c_1 E N_1(t) + c_2 E N_2(t)}{t} \quad (4)$$

dove

- c_1 : costo di riparazione minima;
- c_2 : costo di sostituzione (non necessariamente $< c_1$)
- $N_1(t)$: numero di rotture in $[0; t]$;
- $N_2(t)$: numero di sostituzioni in $[0; t]$ ⁵.

Secondo Barlow, Hunter e Proschan, per definire una procedura di controllo occorre specificare una sequenza di variabili generiche $\{Y_k\}$, chiamate tempi di controllo intermedi. Se tali variabili sono identicamente distribuite, allora la procedura di controllo associata sarà di tipo *periodico*; se, al contrario, le variabili non sono identicamente distribuite, allora la procedura sarà detta *sequenziale*. Gli intervalli tra ogni controllo possono dipendere dal tempo per il quale il sistema è in operatività. È bene sottolineare che la classe di procedure sequenziali include quella delle procedure periodiche⁶. Se ad esempio, indichiamo con $N(t)$ il numero di ispezioni nell'intervallo $[0; t]$ e con σ_t il tempo per scoprire se il sistema fallisce all'istante t , allora, la perdita è pari a:

$$c_1[N(t) + 1] + c_2\sigma_t$$

se il sistema si guasta al tempo t , poiché deve essere controllato ancora una volta prima che il guasto venga scoperto. c_1 indica un costo fisso di ispezione, mentre c_2 rappresenta il costo connesso al tempo trascorso tra il guasto del sistema e la sua rilevazione all'ispezione successiva. Il punto focale è specificare una sequenza di istanti di ispezione tali per cui venga minimizzato il costo totale. Ogni procedura che minimizza la funzione obiettivo di costo totale è chiamata *optimum checking procedure*, e può essere caratterizzata sia da intervalli periodici che sequenziali⁶.

2.1.4 Sostituzione sequenziale su di un intervallo di tempo finito

La nozione di sostituzione sequenziale è rilevante solo per un intervallo di tempo finito. Sotto una politica di tipo sequenziale, l'età per la quale la sostituzione è schedabile non rimane la stessa nel procedere dei rinnovi successivi ma dipende dal tempo di utilizzo rimanente del componente. Questo ulteriore grado di flessibilità permette di ottenere una politica ottimale con costi attesi di lungo periodo inferiori rispetto ad una corrispondente politica di tipo *age-replacement*.

Nella sostituzione sequenziale, il successivo intervallo di sostituzione pianificato dopo ogni rimozione è scelto al fine di minimizzare il costo totale derivante nel tempo di utilizzo rimanente, ed è inferiore all'intervallo precedente. Pertanto, non è possibile, in questa politica, specificare sin da subito la durata dei successivi

intervalli pianificati, bensì, dopo ogni sostituzione, viene specificata solamente la durata dell'intervallo di tempo successivo.

Andiamo quindi a introdurre con un primo approccio i principali modelli di politiche manutentive per sistemi mono componente².

2.2 Politiche manutentive dei sistemi a unità singola

Sebbene siano stati sviluppati migliaia di modelli manutentivi, essi possono essere classificati entro un numero ridotto di tipologie di politiche manutentive. Modelli manutentivi con differenti costi strutturali di manutenzione e/o diversi gradi di riparazione/ristorazione (minima, imperfetta, perfetta) sotto la stessa modalità manutentiva saranno classificati nella stessa politica. L'ipotesi alla base di tutto per i sistemi a unità singola sotto ogni politica manutentiva è che il componente abbia un *failure rate* (tasso di guasto) crescente (IFR).

2.2.1 Age – dependent PM policy

La politica manutentiva più diffusa e nota è l'*age-dependent PM policy*. Come già introdotto, sotto questa politica, un componente viene sempre sostituito ad un certo istante di tempo T o alla rottura, a seconda di quale evento si verifichi per primo, dove T è una grandezza temporale costante (Barlow e Hunter, 1960). Successivamente, poiché i concetti di *minimal repair* e specialmente di *imperfect maintenance* divennero via via più definiti (Pham and Wang, 1996), vennero studiate diverse estensioni della politica di *age-replacement* originaria. Questa classe di politiche, l'*age-replacement policy* e le sue estensioni, si ritrova col nome di *age-dependent PM policy* poiché i tempi di prevenzione sono dettati dal tempo di utilizzo del componente in considerazione. In queste politiche, il componente viene mantenuto preventivamente ad istanti di tempo scanditi dalla grandezza T , oppure viene riparato al guasto, fino a che non abbia ricevuto una manutenzione di tipo perfetto, preventiva o correttiva. Si evidenzia che la PM al tempo T e la CM al guasto possono essere entrambe di tipo *minimal*, *imperfect* o *perfect*. Ad esempio, la PM al tempo T può consistere in una sostituzione (riparazione perfetta) o essere

di tipo imperfetto, la CM al guasto può essere di tipo *minimal* o di tipo *imperfect*, il costo di manutenzione può essere infine costante oppure una funzione del tempo o del numero di interventi di riparazione. Troveremo informazioni più specifiche negli estratti di Pham e Wang (1996) e di Valdez-Flores e Feldman (1989).

Nell'*age-replacement policy*, i componenti vengono sostituiti se raggiungono dunque una certa età, la quale viene misurata a partire dall'istante di tempo relativo all'ultima sostituzione. Se viene considerata solo una riparazione minima al guasto, *l'age-replacement policy* equivale allora alla politica di tipo "*periodic replacement with minimal repair at failure*".

Alcuni ricercatori hanno prodotto risultati interessanti e significativi per diverse varianti dell'*age-replacement model*. Tahara e Nishida (1975), ad esempio, introdussero una politica manutentiva che prevede la sostituzione del componente dopo x ore dal guasto oppure quando viene raggiunto il numero totale di ore di operatività X , in termini di tempo trascorso T ($0 < x < T$), a seconda di quale evento accada per primo; i guasti in $[0, x]$ vengono riparati con la politica di tipo *minimal repair*. Si noti che se $x = 0$, questa politica ricade nell'*age-replacement policy*, e se invece $x = T$, essa si riconduce nuovamente a quella di tipo "*periodic replacement with minimal repair at failure*". Inoltre, x rappresenta un istante di tempo di riferimento, e le azioni manutentive nella realtà non vengono eseguite esattamente nell'istante x , ovvero, non è, nella realtà pratica, trascurabile il tempo di riparazione.

Nagawaka (1984) estende *l'age-replacement policy* ad una politica in cui un certo componente viene sostituito dopo un tempo T o dopo un numero N di guasti, a seconda di quale evento avviene per primo, e subisce interventi di riparazione minima al guasto nel caso in cui esso sopraggiunga tra due sostituzioni successive. Le variabili decisionali, in questo caso, sono T ed N . Questa politica pertanto combina i concetti di sostituzione dopo un certo intervallo di tempo T e dopo un numero di rotture N . Chiaramente, se $N = 1$, anche questa politica si riduce *all'age-replacement policy*. Da qui, questa politica prende il nome di *T – N policy*.

Altre due espansioni della politica di *age-replacement* sono state introdotte da Sheu ed altri ricercatori (1993), i quali esaminano una politica generalizzata di *age-*

replacement in cui, se un dispositivo giunge al guasto ad un tempo $y < t$, esso sarà soggetto ad un intervento di riparazione perfetta con $p(y)$, oppure subirà un intervento di riparazione imperfetta con $q(y) = 1 - p(y)$. Altrimenti, il dispositivo viene sostituito non appena avviene il primo guasto dopo un certo tempo t oppure se il tempo totale di operatività raggiunge una soglia T ($0 \leq t \leq T$), a seconda di cosa accada prima. Le variabili decisionali, in questa politica, saranno t e T . Anche qui, ovviamente, se $t = 0$, la politica rientra nel caso della politica *age-replacement*. Se invece $t = T$ e $q(y) = 1$, la politica sarà di tipo “*periodic replacement with minimal repair at failure*”.

Nel 1995 Sheu e altri ricercatori considerarono un’ulteriore estensione della politica di *age-replacement*. L’ipotesi sottostante prevede che un certo dispositivo incombano in due tipi di guasto, ad un certo istante di tempo z , nel quale viene sostituito dopo l’ennesimo guasto di tipo 1, oppure al primo guasto di tipo 2, a seconda di quale evento avvenga per primo. Il guasto di tipo 1 ha probabilità di accadimento pari a $p(z)$ e viene riparato con un intervento di *minimal repair*, mentre il guasto di tipo 2 avviene con probabilità $q(z) = 1 - p(z)$, e viene corretto con un intervento di riparazione perfetta. Chiaramente, se $p(z) = 0$, questa politica rientra nella politica di *age-replacement*. Se $p(z) = 1$ e $n = \infty$, allora questa politica si riconduce alla politica di tipo *periodic replacement with minimal repair at failure*. Le variabili decisionali, in questo caso, sono n e T . Anche questa politica si dimostra essere abbastanza generale, in quanto include sia la politica di *age-replacement* sia quella di tipo *periodic replacement with minimal repair at failure*.

Block (1993) introdusse un’altra generalizzazione della politica di *age-replacement*, ovvero quella che prende il nome di *repair replacement policy*, in cui i dispositivi vengono mantenuti in modo preventivo nel caso in cui sia trascorso un certo periodo di tempo dall’ultimo intervento di riparazione, il che significa che i dispositivi vengono riparati solo se sopraggiungono al guasto, e vengono sostituiti solo se sopravvivono per un certo periodo di tempo fissato dall’ultima riparazione o sostituzione. Le unità vengono riparate sia in modo imperfetto che in modo perfetto al guasto, oppure vengono sostituite se riescono a sopravvivere per un certo periodo di tempo trascorso rispetto all’ultima riparazione. Se ad un determinato

guasto sono permessi solamente interventi di riparazione di tipo perfetto, allora la politica di *repair replacement* si riduce nuovamente all'*age-replacement policy*. Di conseguenza, il concetto di una politica di *repair replacement* è anch'esso più generale di quello della semplice politica di tipo *age-replacement*.

Pham e Wang (1999) introdussero la "*mixed age PM policy*". In questa politica, dopo l' n -esimo intervento di riparazione imperfetta, si possono riscontrare due tipi di guasto. Il guasto di primo tipo è rappresentato da una rottura completa, mentre il guasto di tipo 2 può essere interpretato come un guasto di più leggera e facile risoluzione. Quando avviene il guasto, se questo è del primo tipo, allora avverrà con probabilità $p(t)$, se invece è del tipo 2 esso avrà probabilità di accadimento pari a $q(t) = 1 - p(t)$. I guasti di tipo 1 sono soggetti ad interventi di riparazione perfetta, mentre quelli di tipo 2 subiranno interventi di *minimal repair*. Pertanto, ogni riparazione è una riparazione perfetta con probabilità $p(t)$ e di tipo minimo con probabilità $q(t) = 1 - p(t)$. Dopo l' n -esimo intervento di manutenzione imperfetta, il dispositivo sarà soggetto a manutenzione perfetta dopo un periodo di tempo pari a T oppure, all'occorrenza del primo guasto di tipo 1, a seconda dell'evento che avviene per primo. Questo processo può continuare teoricamente per un periodo di tempo infinito. Le variabili decisionali, in questa politica, sono T ed n .

Se $p(t) = 0$ ed $n = 0$ questa politica rientra nella politica di tipo "*periodic replacement with minimal repair at failures*". Se $p(t) = 1$ e $n = 0$, esso rientra allora nella politica di tipo *age-replacement*.

Si può facilmente osservare dunque che le politiche preventive di tipo *age-dependent* sono state a lungo studiate nella letteratura scientifica dei modelli di manutenzione. Possiamo schematizzare quanto introdotto nella *tabella 1* sottostante, la quale mostra che la maggior parte delle politiche studiate sono di tipo generale e possono includere l'*age-replacement policy* e/o la politica di tipo "*periodic replacement with minimal repair at failure*" come casi particolari.

Policy	Typical reference	PM time points	Decision variables	Special cases
Age replacement	Barlow and Hunter (1960)	Fixed age T	T	
Repair replacement	Block et al. (1993)	Time since last maintenance	Fixed time	Age replacement
$T-N$	Nakagawa (1984)	Fixed age T or time	T, N	Age replacement periodic PM
(T, t)	Sheu et al. (1993)	Fixed age T or time	T, t	Age replacement periodic PM
(t_0, T)	Tahara and Nishida (1975)	Fixed age T	t_0, T	Age replacement periodic PM
Mixed age	Wang and Pham (1999)	Fixed age T or time	k, T	Age replacement periodic PM
(T, n)	Sheu et al. (1995)	Fixed age T	T, n	Age replacement periodic PM

Tabella 1 – Riassunto delle politiche preventive di tipo age-dependent

2.2.2 Periodic PM policy

Nella *periodic PM policy* un componente viene mantenuto preventivamente a determinati istanti di tempo kT ($k = 1, 2, \dots$), indipendentemente dalla storia dei guasti precedente, e viene riparato all'insorgere di guasti intermedi; T è una grandezza costante. In passato era stata approfonditamente esaminata la *block replacement policy* nella quale, come abbiamo visto, un insieme di componenti viene sostituito ad istanti di tempo prestabiliti kT ($k = 1, 2, \dots$) e alla rottura.

Una PM di tipo periodico è la politica di tipo *periodic replacement with minimal repair at failures* sotto la quale un componente viene sostituito a istanti di tempo prestabiliti kT ($k = 1, 2, \dots$) ed i guasti sono rimossi con la metodologia di *minimal repair* (Barlow e Hunter, 1960, Policy II).

Poiché i concetti di *minimal repair* e specialmente di manutenzione imperfetta (Pham e Wang, 1996) divennero via via più stabili, furono proposte diverse estensioni e variazioni di questi due tipi di politiche. Un'espansione della politica di tipo *periodic replacement with minimal repair at failure* è quella in cui un componente riceve manutenzione preventiva di tipo imperfetto ad ogni istante di tempo T , i guasti intermedi sono soggetti ad interventi di riparazione minima, ed il componente viene sostituito una volta che la sua vita ha raggiunto $(O + 1)T$ unità di tempo, dove con O indichiamo il numero di interventi di natura imperfetta che sono stati eseguiti (Liu, 1995). Se $O = 0$, significa che il componente sarà sostituito non appena esso abbia lavorato per T unità di tempo e non ci potranno essere ulteriori interventi preventivi di tipo imperfetto su di esso. Le variabili decisionali

di questa politica sono O e T . Naturalmente, se $O = 0$, questa politica ricade in quella meno generale di tipo “*periodic replacement with minimal repair at failure*”.

Berg ed Epstein (1976) hanno modificato la politica di *block replacement* ponendo un’età limite del componente in uso. Qui, il componente guasto viene sostituito da uno nuovo; tuttavia, i componenti la cui età di funzionamento è minore o uguale ad una grandezza t_0 ($0 \leq t_0 \leq T$) non vengono sostituiti, ma rimangono in funzione fino a rottura o fino al nuovo istante di schedulazione delle sostituzioni. Ovviamente, se $t_0 = T$, questa politica si riduce alla politica di tipo *block replacement*. Questa nuova politica modificata è migliore della politica di *block replacement* in termini di costo di manutenzione a lungo termine.

Tango (1978) suggerisce di sostituire alcuni componenti guasti con altri nuovi che sono stati collezionati prima degli istanti di tempo delle sostituzioni schedate. Sotto questa estensione della politica di *block replacement*, i componenti vengono sostituiti agli istanti periodici kT ($k = 1, 2, \dots$). I componenti guasti, tuttavia, vengono sostituiti da altri nuovi oppure utilizzati in base alle loro specifiche età di funzionamento al momento della rottura. In questa politica viene posto un limite di tempo r , simile al t_0 della politica introdotta da Berg e Epstein (1976). Se l’età di un componente rotto è minore o uguale a r , esso viene sostituito da uno nuovo; altrimenti, esso viene rimpiazzato da un altro componente già usato in precedenza. Questa politica si differenzia da quella di Berg e Epstein in quanto essa modifica la *block replacement* considerando nuove regole sui componenti guasti piuttosto che su quelli in operatività. Se $r = T$ questa politica si riduce nuovamente alla *block replacement policy*.

Nakagawa (1981) presenta tre modifiche importanti alla politica di tipo “*periodic replacement with minimal repair at failure*”, le quali enfatizzano l’aspetto rilevante dell’applicazione pratica di questa politica. Viene stabilito un istante di riferimento T_0 ed un tempo periodico T^* . Se avviene un guasto prima di T_0 , allora viene applicata una riparazione di tipo *minimal*. Se il dispositivo è ancora operativo al tempo T^* , allora viene applicata una sostituzione che, idealmente, avviene nello stesso istante. Se invece il guasto avviene tra T_0 e T^* , allora: (*Politica I*) il dispositivo non viene riparato e rimane guasto fino a T^* ; (*Politica II*) il dispositivo

guasto viene sostituito da uno di scorta tante volte quanto lo siano necessarie fino a T^* ; (*Politica III*) il dispositivo guasto viene sostituito da uno nuovo. In ognuna di queste tre politiche, le variabili decisionali sono T^* e T_0 . Chiaramente, se $T_0 = T^*$, tutte e tre le politiche ricadono nella politica di tipo “*periodic replacement with minimal repair at failure*”. Se $T_0 = 0$, la *Politica III* ricade nella *Block replacement policy*.

Nakagawa (1980), in un'altra estensione della politica di *block replacement*, espone un modello in cui un componente viene sostituito agli istanti kT ($k = 1, 2, \dots$), indipendenti dal tempo di utilizzo dello stesso. Un componente guasto rimarrà tale fino alla prossima sostituzione programmata. Nel 1986 introduce poi un'altra variante della politica “*periodic replacement with minimal repair*”, nella quale le sostituzioni sono schedate a precisi istanti di tempo kT ($k = 1, 2, \dots$), e il guasto viene rimosso attraverso la metodologia di *minimal repair*. Se il numero totale di guasti è uguale o maggiore di un certo numero n , allora la sostituzione dovrà essere eseguita al prossimo istante di tempo programmato; altrimenti, non dovrà essere fatta alcuna sostituzione. Le variabili decisionali sono quindi n e T . Questa politica, se $n = \infty$, ricade nel caso generale di “*periodic replacement with minimal repair at failure*”.

Wang e Pham (1999) estesero la politica di *block replacement* ad un altro caso più generale. Il componente viene riparato in modo imperfetto al guasto se il numero di riparazioni è minore di un certo numero intero N . La riparazione è imperfetta nel senso che il componente avrà vita rimanente via via più breve dopo ogni riparazione. All' N th riparazione di tipo imperfetto al guasto, il componente sarà mantenuto in modo preventivo agli istanti kT ($k = 1, 2, \dots$), dove T è una grandezza costante. La PM sarà imperfetta nel senso che il componente tornerà “*as good as new*” con probabilità p , e “*as bad as old*” con probabilità $(1 - p)$. Sotto la politica di PM di tipo perfetto, il processo di manutenzione si ripete in modo analogo. Le variabili decisionali sono, in questo caso, N e T . Questa politica si giustifica col fatto che un nuovo componente messo in operatività, subirà i primi N interventi di riparazione al guasto ad un costo contenuto e sostenibile. Ciò è applicabile in quanto il componente in questione è inizialmente giovane fino all' N th intervento, dopo il quale invece potrebbe trovarsi in condizioni peggiori dovute al

tempo trascorso di funzionamento, all'utilizzo, all'età e alle riparazioni imperfette, richiedendo pertanto una manutenzione di maggior impegno, e quindi di maggior costo. Se la riparazione al guasto e la PM sono di tipo perfetto, e se $N = \infty$, questa politica si riduce nuovamente alla *block replacement*. Se la riparazione al guasto è minima e la PM di tipo perfetto, con $N = \infty$, la politica ricade in quella di tipo “*periodic replacement with minimal repair at failure*”.

Riassumiamo quanto descritto nella *tabella 2*:

Policy	Typical reference	PM time points	Decision variables	Special cases
Block replacement	Barlow and Hunter (1960)	Periodic time	Periodic time	
Periodic replacement with minimal repair	Barlow and Hunter (1960)	Periodic time	Periodic time	
Overhaul and minimal repair	Liu et al. (1995)	Periodic time and its multiples	Fixed number of PMs/periodic time	Periodic replacement with minimal repair
(T_0, T^*) Policy I	Nakagawa (1981a,b)	Periodic time	Periodic time/reference time	Periodic replacement with minimal repair
(T_0, T^*) Policy II	Nakagawa (1981a,b)	Periodic time	Periodic time/reference time	Periodic replacement with minimal repair
(T_0, T^*) Policy III	Nakagawa (1981a,b)	Periodic time	Periodic time/reference time	Periodic replacement with minimal repair/block replacement
(n, T)	Nakagawa (1986)	Periodic time	Periodic time/number of failures	Periodic replacement with minimal repair
(r, T)	Tango (1978)	Periodic time	Periodic time/reference age	Block replacement
(N, T)	Wang and Pham (1999)	Periodic time and its multiples	Periodic time/number of repairs	Block replacement/periodic replacement with minimal repair
(t_0, T)	Berg and Epstein (1976)	Periodic time	Periodic time/reference age	Block replacement

Tabella 2 – Riassunto delle politiche preventive di tipo periodico

2.2.3 Failure limit policy

Sotto la Failure limit policy, la PM viene eseguita solamente quando il tasso di guasto o altri indici di affidabilità di un certo componente raggiungono un valore predeterminato e i guasti improvvisi vengono corretti mediante riparazione. Questa politica preventiva permette ad un certo componente di lavorare ad un livello, o sopra di esso, minimo accettabile di affidabilità. Ad esempio, Lie e Chun (1986) formularono una politica di costo manutentiva in cui la manutenzione preventiva viene eseguita ogni volta in cui un componente raggiunge un valore massimo di tasso di guasto predeterminato, e i guasti sino corretti mediante riparazioni di tipo minimo. Bergman (1978) studiò una failure limit policy nella quale le politiche di sostituzione sono basate sulle misurazioni di alcune variabili di stato crescenti, ad

esempio, danno e stress accumulato, o la propensione al guasto di un componente attivo, che viene descritta da una funzione a tasso di guasto crescente dipendente dallo stato. La politica di sostituzione ottimale in termini di costi medi manutentivi a lungo termine è una politica di tipo *failure limit*. Il modello di Bergman include ad esempio la politica di tipo *age replacement* come caso particolare. Altri ricerche relative alla *failure limit policy* si possono trovare negli studi di Malik (1979), Canfield (1986), Jay Abalan e Chaudhuri (1992, 1995), Chan e Shaw (1993), Suresh e Chaudhuri (1994), Monga (1997), Pham e Wang (1996). Inoltre, Love e Guo studiarono (1996) la *failure limit policy* per decisioni preventive strategiche per il caso della distribuzione di Weibull. Generalmente, il problema di questa classe di politiche risiede nel fatto che sono richiesti numerosi sforzi di calcolo. La *failure limit policy* e le sue estensioni sono riassunte nella Tabella 3.

Typical reference	Reliability index monitored	Optimality criterion	Planning horizon
Bergman (1978)	Failure rate through wear, accumulated damage or stress	Cost rate	Infinite
Malik (1979)	Reliability	Reliability	Infinite
Canfield (1986)	Failure rate	Cost rate	Infinite
Zheng and Fard (1991)	Failure rates	Cost rate	Infinite
Lie and Chun (1986)	Failure rate	Cost rate	Infinite
Jayabalan and Chaudhuri (1992a)	Failure rate	Total cost	Finite
Jayabalan and Chaudhuri (1992c)	Age others	Cost rate	Infinite
Jayabalan and Chaudhuri (1992d)	Age	Total cost	Finite
Chan and Shaw (1993)	Failure rate	Availability	Infinite
Suresh and Chaudhuri (1994)	Reliability and failure rate	Total cost	Finite
Jayabalan and Chaudhuri (1995)	Age	Total cost	Finite
Monga et al. (1997)	Reduction (age and failure rate)	Cost rate	Infinite
Love and Guo (1996)	Weibull failure rate	Cost rate	Infinite

Tabella 3 – Riassunto delle politiche preventive di tipo *failure limit*

2.2.4 Sequential PM policy

A differenza della *preventive maintenance* di tipo periodico, con la *sequential PM policy* un certo componente viene mantenuto in modo preventivo ad intervalli di tempo differenti. In genere, gli intervalli di tempo decrescono al passare del tempo, considerando che la maggior parte dei componenti necessita di maggior manutenzione col crescere dell'età di utilizzo.

Una prima politica PM di tipo sequenziale venne descritta per intervalli di tempo finiti da Barlow e Proschan nel 1965. In questa politica, i periodi di tempo per i quali la PM è schedulata non sono gli stessi per i successivi istanti di

funzionamento, ma dipendono dal tempo di utilizzo rimanente del componente. Sotto la PM sequenziale, i successivi intervalli vengono determinati in modo da minimizzare i costi attesi per il tempo rimanente di utilizzo. Questa politica non specifica già in origine quindi i futuri intervalli di tempo schedulati, ma solamente quello successivo all'istante di tempo nell'intervallo di operatività considerato. Ciò permette una riduzione dei costi attesi non trascurabile rispetto ad altre politiche.

Nguyen e Murthy (1981) introdussero una politica sequenziale la quale impone una manutenzione preventiva nel caso in cui un certo guasto non avviene ad istanti di tempo fissati t_i , dove t_i è il tempo massimo per il quale un componente può essere lasciato senza manutenzione dopo l' $(i - 1)$ -esima riparazione. In questa politica, un componente viene sostituito dopo $(k - 1)$ riparazioni. Esso viene riparato (o sostituito alla k -esima riparazione) al tempo di guasto oppure agli istanti t_i , a seconda di quale evento accada per primo. Le variabili decisionali sono k e t_i , per $i = 1, 2, 3, \dots, k$, considerando inoltre che la *preventive maintenance* aumenta il *failure rate* del componente. Se $k = 1$, questa politica di tipo sequenziale, si riduce all'*age-replacement policy*.

Nakagawa (1986, 1988) parla invece di una politica sequenziale in cui la PM avviene ad intervalli fissati x_k , per $k = 1, 2, \dots, N$. Il componente viene sostituito all' N -esima PM, mentre i guasti tra due PM consecutive sono gestiti attraverso interventi di tipo *minimal*, dato che il componente presenta distribuzioni di guasto differenti tra le varie PM (in particolare, il *failure rate* aumenta col numero di PM applicate). Le variabili decisionali sono in questo caso N e x_k . Nguyen e Murthy hanno esaminato questa politica, che chiameremo *Policy II*. Se $N = 1$, la politica sequenziale si riconduce a quella di tipo "*periodic replacement with minimal repair at failure*".

Queste politiche si sono dimostrate di ampio utilizzo pratico, in quanto la maggior parte dei componenti necessita inevitabilmente di maggiore manutenzione all'avanzare del tempo di utilizzo².

2.2.5 Repair limit policy

Quando avviene un guasto viene stimato un costo di riparazione, la quale viene eseguita se tal valore è inferiore ad un determinato valore prefissato; altrimenti, il componente guasto viene sostituito. In letteratura questa politica viene chiamata *repair cost limit policy*, e venne introdotta da Gardent e Nonant nel 1963, Drinkwater e Hastings nel 1967. Un limite importante di questa politica consiste nel fatto che la decisione di riparare il componente guasto, o sostituirlo, dipende solamente dal costo della singola riparazione. Le situazioni a lunga durata caratterizzate da riparazioni frequenti i cui costi sono inferiori ai limiti corrispondenti non influenzano direttamente il tempo di sostituzione, sebbene il tasso di costo di riparazione potrebbe giustificare persino una sostituzione. Considerando questo inconveniente, Beichelt (1982) esaminò la *repair cost limit policy* ed utilizzò il tasso di costo di riparazione (costo di riparazione per unità di tempo), come criterio di decisione fra la sostituzione e la riparazione: un componente viene sostituito non appena il tasso di costo di riparazione raggiunge o supera un valore fissato, altrimenti viene riparato. In questa politica (Beichelt, 1982), gli intervalli di sostituzione sono variabili generiche identicamente e indipendentemente distribuite. Yun e Bai (1987) proposero una politica nella quale quando un componente si guasta, viene stimato il costo di riparazione la quale viene intrapresa se il tasso di costo è inferiore ad un valore prefissato indicato con L , e la riparazione è di tipo *imperfect*. Questa politica di Yune e Bai (1987) è una versione generalizzata di quella di Drinkwater e Hastings (1967). Inoltre, Kapur (1989) estese la *repair limit policy* includendo fra la variabili decisionali della politica il numero di interventi di riparazione.

Nel 1974, Nakagawa e Osaki proposero la *repair time limit policy* nella quale un componente viene riparato al guasto: se la riparazione non viene completata entro un intervallo di tempo T specifico, il componente viene sostituito con uno nuovo; altrimenti il componente riparato viene posto nuovamente in operatività; T è chiamato *repair time limit*. Nguyen e Murty (1980) studiarono una politica di tipo *repair time limit* con riparazione imperfetta, nella quale ci sono due tipi di riparazione: locale e centrale. La riparazione locale è di tipo *imperfect* mentre quella centrale è di tipo *perfect*, e richiede un tempo maggiore. Koshimae (1976) considerò

un'altra politica di tipo *repair time limit*: quando il componente originale si guasta, la riparazione viene avviata istantaneamente. Se essa viene completata entro un tempo limite t_0 , il componente riparato viene reinstallato non appena la riparazione è terminata; in caso contrario, il componente guasto viene demolito e ordinato immediatamente un ricambio, il quale sarà consegnato ed installato dopo un certo tempo di consegna. In questo caso, la variabile decisionale della politica è proprio il tempo limite t_0 . La *repair limit policy* e le sue estensioni sono riassunte nella tabella 4. Si noti dunque che nella letteratura esistente, ci sono due tipi di *repair limit policy*: *repair cost limit policy* e *repair time limit policy*².

Reference	CM before limit	CM after limit	Limit	Optimality criterion	Planning horizon
Hastings (1969)	Minimal	Perfect	Cost	Cost rate	Infinite
Kapur et al. (1989)	Minimal	Perfect	Cost	Cost rate	Infinite
Beichelt (1982)	Perfect	Perfect	Cost rate	Cost rate	Infinite
Beichelt (1981a,b)	Minimal	Perfect	Cost rate	Cost rate	Infinite
Nguyen and Murthy (1980)	Imperfect	Perfect	Time	Cost rate	Infinite
Yun and Bai (1988)	Minimal	Perfect	Cost	Cost rate	Infinite
Koshimae et al. (1996)	Perfect	Perfect	Time	Cost rate	Infinite
Nguyen and Murthy (1980)	Minimal	Perfect	Time	Cost rate	Infinite
Dohi et al. (1997)	Minimal	Imperfect	Time	Cost rate	Infinite
Park (1979)	Minimal	Perfect	Cost	Cost rate	Infinite
Nakagawa and Osaki (1974)	Minimal	Perfect	Time	Cost rate	Infinite
Yun and Bai (1987)	Imperfect	Perfect	Cost	Cost rate	Infinite
Wang and Pham (1996d)	Imperfect	Imperfect	Cost	Availability/cost rate	Infinite

Tabella 4 – Riassunto delle politiche preventive di tipo *repair limit*

III. Sviluppo dei principali modelli manutentivi preventivi

Andiamo quindi a descrivere più nel dettaglio alcuni modelli rilevanti per la nostra relazione. La notazione utilizzata nei modelli di seguito presentati e riconducibili alla manutenzione preventiva è la seguente:

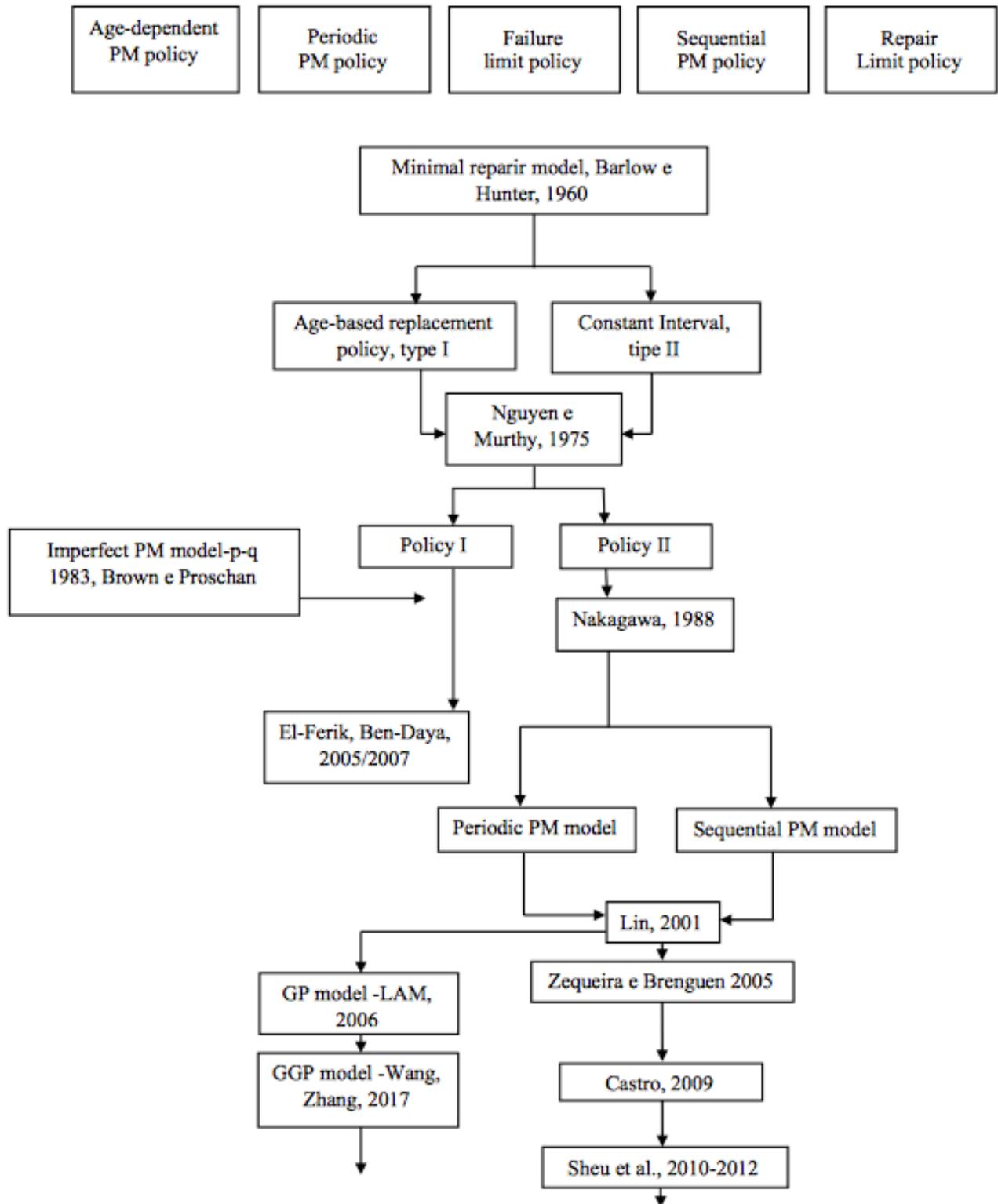
1. C_p : costo di un intervento manutentivo preventivo;
2. C_f : costo di un intervento manutentivo “a rottura” (i.e. breakdown maintenance);
3. $f(t)$: densità di probabilità di guasto della variabile aleatoria time to failure (TTF) del sistema;
4. $F(t)$: probabilità di guasto del sistema con riferimento al tempo di missione $T = [0; t]$;
5. $R(t)$: affidabilità del sistema con riferimento al tempo di missione $T = [0; t]$;
6. $\lambda(t)$: rateo di guasto condizionato del sistema;
7. $w(t)$: rateo di guasto non condizionato del sistema riparabile nei cicli di funzionamento, rottura e aggiustamento;
8. $N(t)$: variabile aleatoria misura del numero di guasti del sistema nell'intervallo $(0, t)$;
9. $W(t)$: numero di guasti attesi nell'intervallo $(0, t)$;
10. $EC(t)$: costo atteso della politica preventiva per il ciclo operativo del sistema. T indica l'ampiezza del ciclo.
11. UEC : costo atteso della politica manutentiva per unità di tempo.

Analizziamo di seguito due semplici modelli manutentivi di tipo preventivo sviluppati da Barlow e Hunter (1960) e noti come modelli di *replacement*.

3.1 Schema generale dei principali modelli preventivi

Nel precedente capitolo sono state classificate le principali politiche manutentive studiate nella letteratura. In questo capitolo andremo ad esplicitare nel dettaglio i principali modelli manutentivi preventivi seguendo lo schema sottostante, il quale rappresenta uno sviluppo cronologico e per tipologia dei principali modelli studiati

nella letteratura scientifica.



3.2 Minimal Repair Model - Barlow e Hunter, 1960

3.2.1 Modello preventivo ad età costante

Questa politica preventiva rientra nella classe delle strategie di tipo *time based* e, più precisamente, prende il nome di *age-based replacement policy* (spesso chiamata *type I*). Essa consiste nell'effettuare un intervento preventivo dopo t_p ore di operatività continua del sistema produttivo. Nell'ipotesi in cui il sistema si guasti prima di t_p , l'intervento (del tipo "al guasto") viene eseguito nell'istante in cui si manifesta il guasto e il successivo intervento pianificato e di natura preventiva viene rischedulato dopo t_p ore di operatività continua. L'ipotesi alla base è che il sistema sia "as good as new" dopo ogni azione manutentiva. La figura 2 illustra il funzionamento della politica *type I*, mostrando tre cicli di operatività: il primo di durata t_p poiché non vi è necessità di intervenire anticipatamente in ragione di un guasto improvviso; il secondo è interrotto da un guasto (rif. Intervento "al guasto" in figura); il terzo, come il primo, è di durata t_p .

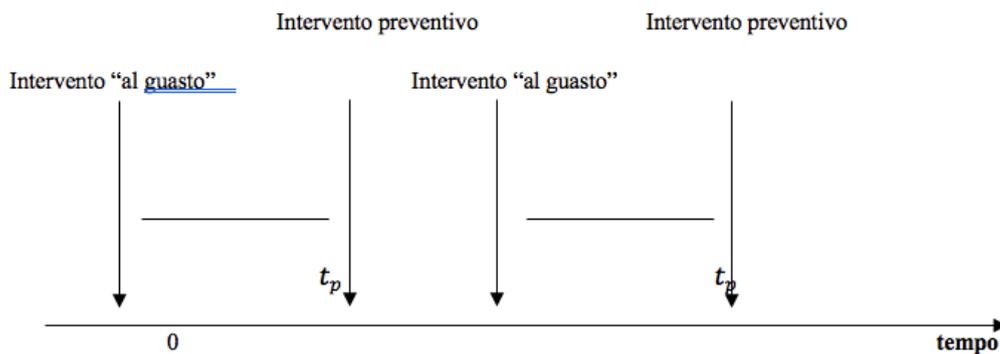


Figura 2 – Politica manutentiva *type I*

L'obiettivo del modello è stabilire il valore ottimale del tempo t_p capace di minimizzare il costo totale della gestione manutentiva trovando il miglior compromesso tra una manutenzione preventiva e quella correttiva al guasto. Si osservi che questa politica prevede sia sempre noto lo stato di salute del sistema al passare del tempo.

Il generico intervento manutentivo può essere pensato come una vera e propria sostituzione del componente/sistema oggetto dell'analisi: così le catene impiegate in una trasmissione meccanica possono essere sostituite dopo un tempo di utilizzo

prestabilito t_p o, anticipatamente, qualora sia necessario al sopraggiungere di un loro guasto.

L'obiettivo del presente modello si traduce nella minimizzazione del costo totale delle due politiche manutentive (preventiva e al guasto) gravante sull'unità di tempo di operatività del sistema. Il costo totale per ciclo è espresso dalla seguente (5):

$$EC(t_p) = C_p * R(t_p) + C_f[1 - R(t_p)] \quad (5)$$

Questa espressione misura il costo medio della gestione manutentiva pesando i costi di intervento preventivo e quelli "al guasto" rispettivamente con l'affidabilità del sistema e la probabilità di guasto misurate nel tempo di missione pari a t_p . La seguente espressione (6) misura il valore atteso della lunghezza del ciclo di funzionamento:

$$\hat{T} = t_p * R(t_p) + \int_{-\infty}^{t_p} t * f(t) dt = t_p * R(t_p) + \int_0^{t_p} t * f(t) dt \quad (6)$$

In particolare, il secondo addendo è il tempo medio di rottura *MTTF* del sistema qualora si rompa entro t_p . Ne consegue l'espressione del costo medio unitario (i.e. per unità di tempo) *UEC*, dipendente da t_p (7):

$$UEC(t_p) = \frac{C_p R(t_p) + C_f[1 - R(t_p)]}{t_p R(t_p) + \int_0^{t_p} t * f(t) dt} \quad (7)$$

La politica *age-based replacement policy (type I)* si rivela particolarmente appropriata quando il tasso di guasto $\lambda(t)$ è una funzione crescente, purché l'intervento manutentivo riporti il componente/sistema in stato "as good as new", come avviene spesso nella sostituzione preventiva o a guasto.

3.2.2 Modello preventivo a data costante

La *Constant-interval replacement policy* (chiamata anche politica *type II*) prevede un intervento preventivo sul sistema dopo un tempo operativo t_p indipendentemente dalla numerosità di interventi a guasto che si sono

eventualmente succeduti nel corso di t_p .

Si ricorda che l'ipotesi sottostante è che il sistema sia ancora una volta “*as good as new*” dopo la generica azione manutentiva “preventiva” (in generale l'azione correttiva non sarà *as good as new* del tipo “*minimal repair*”). Pertanto, il numero di interventi a guasto non incide sulla natura della funzione rateo di guasto del sistema.

Un esempio tipico di applicazione del presente modello è a componenti meccanici quali turbine e macchine operatrici. Anche questo modello si basa sulla minimizzazione di una funzione di costo unitario (i.e. riferita all'unità di tempo). L'espressione di questo costo è la seguente (8):

$$UEC(t_p) = \frac{C_p + C_f * W(t_p)}{t_p} \quad (8)$$

Dove:

$W(tp)$: numero stimato di interventi a guasto che il sistema richiede qualora si decida di intervenire preventivamente sul sistema ad intervalli di durata t_p .

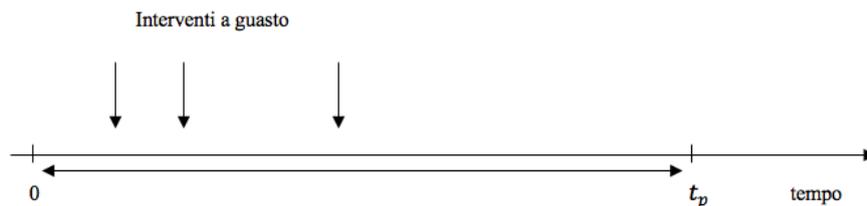


Figura 3 – politica manutentiva type II

Ora il numero di rotture previste con riferimento all'intervallo $[0, t_p]$ è il seguente (9):

$$E[N(t_p)] = W(t_p) = \int_0^{t_p} w(t) dt \quad (9)$$

Da questa deriva che la (8) è un'espressione funzione della variabile t_p . Ciò suggerisce di potere applicare i metodi risolutivi che presenteremo qui di seguito¹.

3.3 Politiche preventive ottime per sistemi riparabili - Estensione delle politiche type I e type II

Abbiamo visto il modello di Minimal Repair introdotto da Barlow e Hunter nel 1960. L'assunzione fondamentale alla base di questo modello riguarda, come abbiamo visto, il fatto che il *failure rate* permane indisturbato a prescindere dagli interventi di riparazione minima o dai guasti.

Nel 1973 Tahara e Nishida proposero un modello in cui un certo sistema può essere riparato ma non può recuperare totalmente la sua operatività dopo ogni riparazione. Più precisamente, nel loro modello si assume che la vita residua di un sistema riparato diminuisce col numero di interventi eseguiti. Tuttavia, nel loro modello, la riparazione è solamente di tipo correttivo e non viene introdotta una vera e propria politica manutentiva preventiva, motivo per cui ne omettiamo la stesura in questa trattazione.

Nei modelli seguenti, diversamente, si studiano due politiche preventive manutentive per sistemi riparabili introdotte da Nguyen e Murthy nel 1981. L'assunzione alla base di questi modelli risiede nel fatto che la *life distribution* del sistema cambia ad ogni riparazione in modo tale per cui la funzione di *failure rate* aumenta col numero di riparazioni eseguite⁷.

3.3.1 Modello

Il sistema che consideriamo può trovarsi in due stati: o funziona, o è rotto. Lo stato del sistema è sempre noto con certezza, per cui la riparazione o sostituzione inizia non appena avviene il guasto, con tempi di riparazione/sostituzione che consideriamo, per semplicità, trascurabili. Il sistema si deteriora nel tempo in funzione del numero di interventi che vengono eseguiti. Dopo ogni riparazione, il sistema è operativo ma la sua caratteristica di rottura non rimane costante. Più precisamente, indichiamo con $\lambda_i(t)$ il *failure rate* al tempo t (t ore dall'ultima riparazione) di un sistema soggetto a $i - 1$ interventi.

Come espresso nel testo "Manutenzione dei sistemi di produzione" di Regattieri A.

e Manzini R., le politiche manutentive (type I e type II della politica *Minimal Repair* – *Barlow e Hunter*) sopra presentate si basano sull'ipotesi che i componenti (o il sistema) ritornino nello stato “*as good as new*” a seguito di un qualunque intervento manutentivo. Nelle generalizzazioni ai due modelli sopra illustrati che andiamo a descrivere, invece, il sistema/componente cambia comportamento a seguito del generico intervento. Come abbiamo detto, il rateo di guasto cresce al passare del tempo e al susseguirsi delle azioni manutentive secondo le seguenti assunzioni:

- $\lambda_i(t)$: rateo di guasto condizionato di un sistema già oggetto di $(i-1)$ interventi riparativi. t è il tempo trascorso dall'ultima riparazione. Si tratta di una funzione strettamente crescente e tale per cui:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = \infty$$

Questo significa che nel generico ciclo operativo, inizializzato dalla messa in funzione del componente/sistema dopo una riparazione, il medesimo componente/sistema invecchia progressivamente. Per altro l'invecchiamento è tanto più gravoso man mano che passa il tempo. In altre parole, la velocità di rottura cresce.

$$\begin{cases} \lambda_{i+1}(t) \geq \lambda_i(t), & t > 0 & * \\ \lambda_{i+1}(0) \geq \lambda_i(0) & & ** \end{cases}$$

Quest'ultima ipotesi, descritta dalle equazioni (10), prevede che il componente/sistema degradi dopo un generico intervento di riparazione e invecchi più rapidamente, ovvero con una velocità superiore rispetto a quella con cui degradava prima dell'ultima riparazione. Si noti l'uso del simbolo $\lambda(t)$ per indicare il generico rateo di guasto condizionato, pur avendo a che fare con componenti riparabili. Il motivo è che $\lambda(t)_i$ rappresenta la velocità di rottura istantanea dopo $i - 1$ interventi di riparazione e lungo il ciclo operativo che inizia dopo l'ultima riparazione $(i - 1)$ e termina con l' i -esimo intervento: t è il tempo trascorso dall'ultima riparazione.

La caratteristica di rottura del sistema può essere descritta dalla funzione di distribuzione $F_i(t)$, dalla *survival function* $\bar{F}_i(t)$, o dalla funzione di densità $f_i(t)$.

Lemma:

La * implica che $\bar{F}_i(t) \geq \bar{F}_{i+1}(t), \forall t$.

Pertanto, la vita media di un sistema riparabile diminuisce col numero di riparazioni eseguite.

Dalle * e **, e dal Lemma 1, si possono facilmente dimostrare le seguenti, (11):

$$MTTF_i \geq MTTF_{i+1}$$

$$R_i(t) \geq R_{i+1}(t)$$

Quest'ultima relazione è corretta quando per $R_i(t)$ non si intende in senso stretto l'affidabilità come è definita con riferimento ad un componente (e/o sistema) non riparabile ma la "funzione di sopravvivenza" (i.e *survival function*) meglio definita in questo modo:

$$\bar{F}_i(t) = 1 - F_i(t) \quad (12)$$

Dove:

$F_i(t)$ è la probabilità di guasto del sistema nel ciclo operativo $i+1$.

Ogni ciclo operativo si caratterizza infatti per un tempo al guasto (*time to failure - TTF*) cui sono associabili grandezze affidabilistiche proprie dei componenti non riparabili, considerando la prima rottura come un evento che non lascia via di scampo per il sistema.

I modelli manutentivi discussi in seguito si basano sulla gestione delle seguenti variabili, gradi di libertà del sistema:

- k : identifica l'intervento in corrispondenza del quale il componente oggetto dell'azione manutentiva viene sostituito;
- T_i : intervallo di tempo che separa due interventi manutentivi eseguiti sul sistema.

Si considerino inoltre le seguenti voci di costo:

- C_r : costo di sostituzione del componente (*replacement cost*);
- C_p : costo di manutenzione preventiva (*repair cost*);

- C_f : costo di intervento a guasto (*breakdown cost*): si tratta di un costo aggiuntivo rispetto a C_p e da sostenere al manifestarsi e all'identificazione di un guasto al sistema.

Anche con riferimento ai modelli di seguito illustrati vale l'ipotesi base che, istante per istante, lo stato del componente/sistema sia noto con certezza assoluta: qualora si manifesti un guasto, questo è immediatamente rilevato¹.

3.3.2 Generalizzazione della politica type I

La presente politica manutentiva preventiva, sviluppata da Nguyen e Murthy (1981) e nota anche come *type I general*, prevede di sostituire il sistema dopo $k - 1$ riparazioni.

Il modello si basa sull'identificazione di un ciclo di ripristino (i.e. sostituzione, *replacement cycle*) in corrispondenza del quale il componente è oggetto di k interventi manutentivi di cui l'ultimo è il tipo sostitutivo. La cosiddetta *policy I* consiste dunque nella sostituzione del sistema dopo $(k - 1)$ riparazioni, e nella riparazione (o sostituzione se $i = k$), all'istante di guasto o al tempo T_i , il quale indica il numero di ore passate dall'ultima riparazione o sostituzione, a seconda di quale evento avvenga per primo⁷. Pertanto, T_i è un tempo pianificato per l'esecuzione di un intervento manutentivo: quello programmato per la "prossima visita" preventiva¹. Nel caso in cui $k = 1$, sarà eseguita solo la sostituzione.

Poiché l'intervento sul sistema avviene a fronte della rilevazione di un guasto o dopo un tempo T_i , qualora il sistema abbia già subito $(i - 1)$ interventi, il costo atteso della politica manutentiva per l'intervento i -esimo è il seguente:

$$C_p(T_i) = (C_p + C_f)F_i(T_i) + C_p[1 - F_i(T_i)] = C_p + C_f F_i(T_i) \quad (13)$$

Questo valore è dato dal costo C_p associato all'azione preventiva "pura" e da C_f , extracosto da sostenere nell'ipotesi la prima sia anticipata da un intervento richiesto a fronte della rilevazione di un guasto inatteso, la cui misura di probabilità di accadimento è data da $F_i(T_i)$, probabilità di guasto nel tempo di missione T_i . Con riferimento all'intero ciclo di sostituzione (nel quale in generale, per come è definito, si esplicano più interventi di natura preventiva e correttiva), si può

quantificare il seguente costo:

$$EC(k, T_i) = (k - 1)C_p + C_r + C_f \sum_{i=1}^k F_i(T_i) \quad (14)$$

Il ciclo si caratterizza infatti per k interventi manutentivi di cui uno di sostituzione e i restanti idealmente di tipo preventivo, ma in corrispondenza di ciascuno dei quali il sistema può richiedere anticipatamente un'azione correttiva (di costo C_f) a seguito di un guasto.

La seguente espressione misura il tempo medio del valore della variabile casuale X_i misura del tempo che separa l'istante di ripristino del funzionamento di un componente da quello in cui si effettuerà l'intervento manutentivo successivo:

$$\mu_i = T_i \bar{F}_i(t) + \int_0^{T_i} x \cdot f(x) dx = \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt \quad (15)$$

Da questa espressione vale che:

$$\mu_i \leq T_i$$

Pertanto, si può dedurre la lunghezza attesa del ciclo di sostituzione:

$$L[k, \{T\}] = \sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt \quad (16)$$

Si può notare che questa espressione equivale ad una somma di tempi medi le cui medie sono effettuate entro gli intervalli $[0, T_i]$.

Dalle relazioni sopra riportate si può esprimere il costo totale della gestione manutentiva riferito all'unità di tempo:

$$UEC[k, T_1, \dots, T_k] = \frac{EC[k, \{T_i\}]}{L[k, \{T_i\}]} = \frac{(k - 1)C_p + C_r + C_f \sum_{i=1}^k F_i(T_i)}{\sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt} \quad (17)$$

Si deduce che la politica manutentiva ottimale è il risultato della scelta del valore di k e dei tempi $\{T_i(k)\}_i$ minimizzanti l'equazione appena riportata. In particolare, si dimostra che per ciascun valore di k esiste un vettore $\{T^*(k)\}_i$ ottimo e in cui $T_i^* \geq T_{i+1}^*$. Si assiste cioè ad un progressivo restringimento del tempo programmato

per il “prossimo intervento manutentivo”. Differenziando l’equazione appena riportata ed eguagliando a zero l’espressione ottenuta:

$$\lambda_i(T_i^*) = \frac{UEC[k, \{T_i^*\}]}{C_f} \quad **$$

Dove:

- $1 \leq i \leq k$;
- $\lambda_i(t) = \frac{f_i(t)}{1-F_i(t)}$ rateo di guasto condizionato;
- t tempo trascorso dall’ultima riparazione.

La ** può essere riscritta in questo modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i(T_i) = \lambda_1(T_1), \quad 1 < i \leq k \\ \sum_{i=1}^k \left\{ \lambda_1(T_1) * \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt - F_i(T_i) \right\} = \frac{[(k-1)C_p + C_r]}{C_f} \end{array} \right. \quad (18)$$

da cui si evince che il modello propone istanti di tempo in cui effettuare gli interventi preventivi sul sistema/componente tali da essere accompagnati dalla stessa velocità di rottura (rateo di guasto condizionato) a conclusione di ogni intervallo T_i . Ne consegue un avvicinamento di questi istanti di tempo man mano che il componente invecchia, condizione che rispecchia la definizione di politica di tipo *sequenziale*.

Nguyen e Murthy hanno così quantificato il valore della disponibilità del componente oggetto degli interventi manutentivi in linea con la politica type II:

$$A[k, \{T_i\}] = \frac{\sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt}{(k-1)C_p + C_r + C_f * \sum_{i=1}^k F_i(T_i) + \sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} \bar{F}_i(t) dt} \quad (19)$$

Massimizzare questa espressione equivale a massimizzare l’espressione che esprimere il costo totale della gestione manutentiva, sopra riportata.

Algoritmo di calcolo

Viene introdotto ora un algoritmo risolutivo applicabile al presente modello e descritto dai seguenti passi:

- (i) Set $k=1$;
- (ii) Si risolva la ** per $\{T_i^*(k)\}$
- (iii) Se $T_1^*(k) \geq T_1^*(k-1)$ go to (v)
- (iv) Set $k=k+1$ e go to (ii)
- (v) $k^* = k - 1$. Si calcoli $UEC[k, \{T_i^*\}]$

Ora si può definire la variabile aleatoria Z_k , lunghezza casuale del ciclo operativo, secondo la seguente:

$$Z_k = X_1 + X_2 + \dots + X_k$$

Si ricorda che vale questa relazione:

$$X_i \leq T_i$$

dove:

X_i variabile aleatoria la cui ddp è $f_i(t)$;

$F_i(t)$ probabilità di guasto della variabile casuale X_i .

3.3.3 Generalizzazione della politica type II

Come abbiamo già scritto, la presente politica manutentiva preventiva è stata sviluppata da Nguyen e Murthy (1981). Pure questa, nota come politica *type II general* o *policy II*, prevede di sostituire il componente (sistema) dopo $k - 1$ riparazioni. Con riferimento alla $(i - 1)$ -esima riparazione, il sistema sarà sempre riparato (oppure sostituito se $i = k$) dopo un tempo T_i trascorso dall'ultima riparazione (o sostituzione)¹. In caso di guasto viene eseguita una riparazione di tipo *minimal*⁷.

La natura del modello appena descritto prevede non sia più lecito ragionare in termini di rateo di guasto condizionato $\lambda_i(t)$ assegnato al generico intervallo

operativo, ma sia più opportuno introdurre il rateo di guasto $w_i(t)$ introdotto per i componenti riparabili e misura della loro velocità istantanea di rottura. Ne consegue che se t è il tempo trascorso dall'ultimo intervento manutentivo preventivo il numero atteso di guasti entro l'intervallo T_i vale:

$$E[N(T_i)] = W(0, T_i) = \int_0^{T_i} w_i(t) dt \quad (20)$$

Si osservi che la lunghezza del ciclo di sostituzione non è una grandezza casuale ma è pari a:

$$\sum_{i=1}^k T_i$$

Il costo atteso per unità di tempo è il seguente:

$$UEC[k, T_1, \dots, T_k] = \frac{(k-1)C_p + C_r + C_f \sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} w_i(t) dt}{\sum_{i=1}^k T_i} \quad (21)$$

Vale la pena sottolineare che nel modello *type II generalizzato* la voce di costo C_f prende spesso il nome di *minimal repair cost*. Essa è tipicamente inferiore a quella di costo al guasto, già chiamata C_f con riferimento al modello prima illustrato. L'azione di *minimal repair* è tipicamente giustificata dall'uscita del componente dal suo stato di controllo (*in control*), senza che lo stesso si rompa e senza che la funzione $f(t)$ distribuzione di probabilità del *time to failure* subisca alcuna modifica. In tal caso $w_i(t)$ è sostituibile da $\lambda_i(t)$, in analogia con il modello *type I*.

Anche in questo modello la politica manutentiva ottimale è il risultato della scelta del valore da assegnare a k e dei tempi $\{T_i(k)\}_i$ minimizzanti l'equazione di UEC.

Differenziando questa equazione ed uguagliandola a 0, si ottiene la seguente:

$$w_i(T_i^*) = \frac{UEC[k, \{T_i^*\}]}{C_f} \quad (22)$$

La quale può essere riscritta nel seguente modo:

$$\left\{ \sum_{i=1}^k \left\{ T_i w_1(T_1) - \int_0^{T_i} w_i(t) dt \right\} \right\} = \frac{[(k-1)C_p + C_r]}{C_f} \quad (23)$$

L'algoritmo risolutivo può essere quello già presentato in occasione della discussione del modello *type I general*.

Il valore della disponibilità del componente oggetto della presente politica manutentiva preventiva generalizzata è¹:

$$A[k, \{T_i\}] = \frac{\sum_{i=1}^k T_i}{(k-1)C_p + C_r + C_f \sum_{i=1}^k \int_0^{T_i} w_i(t) dt + \sum_{i=1}^k T_i} \quad (24)$$

3.3.4 Conclusioni del modello

Abbiamo visto le politiche di *optimal preventive maintenance* per sistemi riparabili introdotte da Nguyen e Murthy attraverso due sotto politiche generalizzate. Ci sono casi in cui le due sotto politiche, *policy I* e *policy II*, possono essere impiegate indistintamente. Tuttavia, poiché la soluzione ottima dipende da molti parametri, dai costi di manutenzione e dalle caratteristiche di rottura del sistema, queste due politiche possono essere confrontate numericamente solo per una determinata situazione specifica⁷.

Estensioni possibili

1. In questo modello, il *failure rate* dipende deterministicamente dal numero di riparazioni. Inoltre, esso è funzione del tempo a partire dall'ultima azione manutentiva. Una situazione più realistica è quella in cui il *failure rate* dipenda stocasticamente dal numero di riparazioni e dalla reale età del sistema.
2. In questo modello, i costi di manutenzione sono assunti come costanti. Potrebbero essere in realtà funzione dell'incremento dell'età reale del sistema.
3. Infine, nella *policy II*, è assunto che sia sempre possibile restaurare il sistema dopo un guasto attraverso un'azione di *minimal repair*. È però saggio considerare che esista una probabilità $P > 0$ per la quale un guasto non può essere rimosso attraverso un'azione di tipo minimo⁷.

3.4 Manutenzione preventiva imperfetta

I guasti di un sistema possono essere classificati in più tipologie basate sui livelli di gravità: guasti significativi, guasti comuni e guasti minori. Le strategie manutentive correttive corrispondenti sono quelle, come abbiamo visto, di riparazione di tipo perfetta, imperfetta e minima. Al fine di ridurre i guasti del sistema e rallentare il processo di degradazione, sono state introdotte diverse strategie manutentive, alcune delle quali di tipo sequenziali. L'effetto di miglioramento dell'affidabilità del sistema dopo la politica preventiva è definito come efficienza manutentiva preventiva (PME). Si tratta di un importante indicatore di performance per la gestione di un sistema. In seguito all'applicazione della manutenzione preventiva, la PME può essere distinta secondo cinque scenari differenti: *better than new* (BTN), *as-good-as-new* (AGAN), *worse-than-new but better-than-old* (WNBO), *as-bad-as-old* (ABAO), e *worse-than-old* (WTO), dove AGAN significa che il sistema potrà essere riportato ad un nuovo stato dopo che le azioni preventive sono state eseguite. Se l'intensità di guasto del sistema non cambia dopo la manutenzione, la PME è di tipo ABAO. Ad ogni modo, la maggior parte dei sistemi, dopo l'azione preventiva, si trova nello stato WNBO. Questo tipo di manutenzione è detta di tipo *imperfect*⁸.

Le ipotesi sottese ai modelli di MP precedentemente illustrate sono:

- *As good as new*, dopo un'azione preventiva il componente torna nuovo;
- *Bad as old*, i.e. il generico componente dopo un intervento di *minimal repair* non modifica il suo rateo di guasto.

Si parla di manutenzione preventiva imperfetta qualora a fronte di un intervento preventivo, e non di sostituzione (*replacement*), si transiti verso uno stato intermedio a quelli sopra richiamati: il componente migliora ma non torna nuovo. Alcuni degli approcci utilizzabili per simulare un intervento di tipo imperfetto sono qui elencati:

- Il componente a fronte dell'intervento ha lo stesso rateo di guasto che aveva prima dell'esercizio dell'azione manutentiva, oppure è nuovo con differenti

valori di probabilità. Esiste cioè una probabilità nota che il componente torni nuovo piuttosto che resti vecchio quanto prima di essere riparato;

- L'età del componente si riduce di X unità di tempo a seguito di ogni azione preventiva;
- L'età e il rateo di guasto del componente vengono ricondotti ai valori originali assunti prima di ogni intervento ed in proporzione ai costi sostenuti per effettuare la manutenzione preventiva¹.

3.4.1 Modello di manutenzione imperfetta p-q

Brown e Proschan (1983) hanno introdotto il modello di manutenzione imperfetta per il quale un dispositivo guasto viene riparato con un intervento di riparazione perfetta (o sostituzione) con probabilità p , riportandolo allo stato "as good as new", e viene riparato con un intervento di tipo imperfetto con probabilità $q = 1 - p$, portandolo ad uno stato di funzionamento di qualità solamente pari ad un dispositivo della sua stessa età al momento appena prima della rottura. La riparazione è considerata di tempo trascurabile⁹.

La seguente esprime il costo totale sostenuto tra 0 e l'istante jT , corrispondente al j -esimo intervento preventivo.

In corrispondenza di jT il componente stesso è as good as new:

$$jC_p + C_f \int_0^{jT} \lambda(t) dt \quad (25)$$

Alcune notazioni ed assunzioni:

- Rateo di guasto condizionato (*failure rate*): $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$;
- Istanti di manutenzione preventiva: kT , dove $k = 1, 2, \dots$, e $T > 0$;
- L'intervento di *minimal repair* non cambia il *failure rate*;
- Il tempo di riparazione è trascurato;
- C_p costi intervento preventivo di tipo imperfetto (*minimal repair*);
- C_f costo di riparazione.

L'integrale della (25) misura il numero atteso di guasti registrati nel sistema durante l'intervallo $[0, jT]$. La (25) va moltiplicata per il termine qp^{j-1} pari alla probabilità che il componente sia sopravvissuto sino a jT .

Si ottiene così il costo atteso per ciclo operativo:

$$EC[p, T] = \sum_{j=1}^{\infty} qp^{j-1} [jC_p + C_f \int_0^{jT} \lambda(t) dt] \quad (26)$$

La durata del ciclo manutentivo vale:

$$E[Cycle] = \sum_{j=1}^{\infty} qp^{j-1} (jT) \quad (27)$$

Si osservi che si tratta del valor medio di una variabile casuale discreta $y=jT$ di ddp $f(y) = qp^{j-1}$. Il costo atteso unitario vale:

$$UEC[P, T] = \frac{EC[P, T]}{E[Cycle]} = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} qp^{j-1} [jC_p + C_f \int_0^{jT} \lambda(t) dt]}{\sum_{j=1}^{\infty} qp^{j-1} (jT)} \quad (28)$$

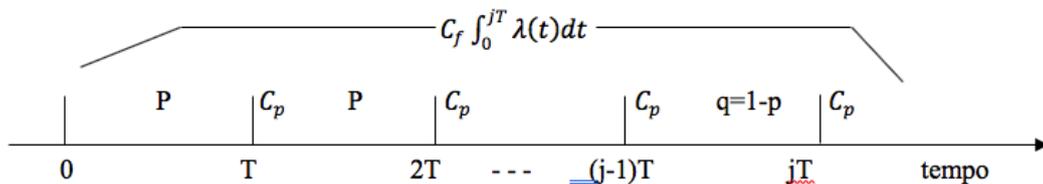


Figura 4 - ciclo di manutenzione preventiva imperfetta

Si ottiene il costo atteso unitario nella forma seguente:

$$UEC[P, T] = \frac{C_p + C_f q^2 \sum_{j=1}^{\infty} p^{j-1} \int_0^{jT} \lambda(t) dt}{T} \quad (29)$$

Si tratta di una funzione complessa la cui minimizzazione può essere non banale¹.

3.5 Modelli di manutenzione preventiva imperfetta per la *policy II* **- Nakagawa, 1988: modello periodico e sequenziale**

Introduciamo il modello di Nakagawa, relativo ad una politica preventiva di tipo periodico e sequenziale per sistemi con riparazione minima al guasto; l'azione preventiva viene eseguita (i) ad istanti di tempo periodici kx e (ii) ad intervalli costanti x_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Il sistema presenta distribuzioni di guasto differenti tra le varie azioni preventive e viene sostituito all' N -esimo intervento. Sono dunque discusse le politiche che minimizzano i tassi di costo attesi. Si calcolano gli istanti x ed il numero N di intervalli periodici della politica preventiva ottimali e l'insieme $\{x_k\}$ di intervalli per un caso di distribuzione di *Weibull*.

3.5.1 Introduzione

Lo scopo della manutenzione preventiva è quello di ridurre al più possibile il numero di rotture durante la normale operatività dei componenti. In particolare, con l'invecchiare dei sistemi, essi necessitano via via di maggior manutenzione nella misura in cui i costi e le circostanze lo permettono.

Barlow e Hunter (1960) hanno, come abbiamo visto, considerato due tipi di politiche manutentive. Diversi modelli assumono che il sistema subisca interventi manutentivi ad istanti di tempo periodici che lo riportino ogni volta nella condizione "as good as new". Questa ipotesi non è purtroppo vera per i sistemi reali. La maggior parte delle azioni preventive migliorano il sistema, ma il miglioramento dipende dall'età del sistema così come dal costo e dall'istante in cui vengono eseguite le manutenzioni. Di conseguenza, il sistema subirà interventi preventivi ad intervalli di tempo diversi e presenterà distribuzioni di guasto diverse tra le varie azioni preventive, mentre il tasso di guasto cresce con la frequenza degli interventi preventivi.

Nel modello che andiamo a presentare vengono considerate queste due politiche: (i) le azioni preventive vengono eseguite ad istanti di tempo periodici kx o (ii) ad intervalli di tempo costanti x_k ($k = 1, 2, \dots, N$). Una procedura simile viene applicata ad una politica di tipo ispettivo introdotta da Barlow e Proschan nel 1965.

Il sistema viene sostituito da uno nuovo all' N -esimo intervento preventivo. Se sopraggiunge un guasto tra due azioni preventive, allora il sistema subisce un intervento di riparazione minima ed il tasso di guasto rimane indisturbato.

3.5.2 Sviluppo del modello periodico

Il sistema viene mantenuto preventivamente ad istanti di tempo periodici kx ($k = 1, 2, \dots, N$) e viene sostituito all' N -esimo intervento preventivo. Il sistema subisce solamente interventi di riparazione minima al guasto ed il *failure rate* rimane invariato dopo ogni intervento tra due azioni preventive.

Si suppone che il sistema abbia un tasso di guasto che indichiamo con $r_k(t)$ al k -esimo periodo di manutenzione preventiva ($k = 1, 2, \dots, N$) e che $r_k(t) < r_{k+1}(t)$, $\forall t > 0$. Ciò significa che il *failure rate* aumenta col numero di interventi preventivi eseguiti. Pertanto, se il tempo per gli interventi preventivi, le riparazioni minime e le sostituzioni non sono trascurabili, il tasso di costo è facilmente ottenibile come segue (30):

$$C_1(x, N) = \frac{c_1 \sum_{k=1}^N \int_0^x r_k(t) dt + (N-1)c_2 + c_3}{N_x}$$

Dove c_1 è il costo di riparazione minima, c_2 quello della manutenzione preventiva e c_3 è il costo di sostituzione del componente, con $c_3 \geq c_2$.

Il nostro scopo è quello di cercare sia l'istante di tempo ottimo x^* che il numero ottimo N^* di interventi preventivi che minimizzano $C_1(x, N)$. Per ricavare N^* andiamo a considerare le disequazioni $C_1(x, N+1) \geq C_1(x, N)$ e $C_1(x, N) < C_1(x, N-1)$, le quali implicano le (31):

$$L_1(x, N) \geq (c_3 - c_2)/c_1 \text{ e } L_1(x, N-1) < (c_3 - c_2)/c_1$$

Dove

$$L_1(x, N) = \begin{cases} N \int_0^x r_{N+1}(t) dt - \sum_{k=1}^N \int_0^x r_k(t) dt & (N = 1, 2, \dots), \\ 0 & (N = 0) \end{cases} \quad (32)$$

Dall'ipotesi sopra definita per cui $r_k(t) < r_{k+1}(t)$, $\forall t > 0$, si ha:

$$L_1(x, N) - L_1(x, N - 1) = N \int_0^x [r_{N+1}(t) - r_N(t)] dt > 0 \quad (33)$$

$$L_1(x, N) \geq \int_0^x r_{N+1}(t) dt - \int_0^x r_1(t) dt \quad (34)$$

Se $\lim_{N \rightarrow \infty} r_N(t) = \infty$ allora $L_1(x, N)$ è una funzione crescente di N e tende ad infinito; quindi esiste una soluzione ottima ed unica di N^* che soddisfa la (31), per ogni $x > 0$.

Differenziando quindi l'espressione di $C_1(x, N)$ rispetto ad x e ponendola uguale a 0, si ottiene la (35):

$$\sum_{k=1}^N [x r_k(x) - \int_0^x r_k(t) dt] = [(N - 1)c_2 + c_3]/c_1$$

Se si assume che $r_k(t)$ sia differenziabile e strettamente crescente a infinito, allora è facile vedere che il membro a sinistra dell'equazione precedente è altrettanto strettamente crescente a infinito;

poiché

$$\left\{ \sum_{k=1}^N [x r_k(x) - \int_0^x r_k(t) dt] \right\}' = x \sum_{k=1}^N r_k'(x) > 0,$$

$$\sum_{k=1}^N [x r_k(x) - \int_0^x r_k(t) dt] \geq \sum_{k=1}^N [x_1 r_k(x) - \int_0^{x_1} r_k(t) dt] \quad (36)$$

per $x_1 < x$. Pertanto, deve esistere una soluzione unica e finita x^* che soddisfa la (35) per ogni numero intero N , e il tasso di costo risultante sarà dato dalla:

$$C_1(x^*, N) = \left(\frac{c_1}{N}\right) \sum_{k=1}^N r_k(x^*) \quad (37)$$

Si può dunque, con questo modello, calcolare i valori ottimi di x^* ed N^* che soddisfino le equazioni (35) e (36) attraverso l'algoritmo di Nakagawa (1984).

3.5.3 Sviluppo del modello sequenziale

Il sistema viene mantenuto preventivamente ad intervalli costanti kx ($k = 1, 2, \dots, N$) e viene sostituito all' N -esima azione preventiva, cioè: la manutenzione preventiva viene eseguita a istanti di tempo successivi $0 < x_1 < x_1 + x_2 < \dots < x_1 + x_2 + \dots + x_N$ ed il sistema viene sostituito all'istante di tempo $x_1 + x_2 + \dots + x_N$. Le altre ipotesi sono le stesse della politica periodica sopra descritta; pertanto, il tasso di costo è dato dalla (38):

$$C_2(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{c_1 \sum_{k=1}^N \int_0^{x_k} r_k(t) dt + (N-1)c_2 + c_3}{x_1 + x_2 + \dots + x_N}$$

La condizione necessaria per cui una sequenza $\{x_k\}$ di valori determini una schedulazione di costo minimo è che $\frac{dC_2}{dx_k} = 0, \forall k$. Pertanto, differenziando $C_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$ rispetto ad x_k e ponendo l'equazione uguale a 0, si ottengono (39) e (40):

$$r_1(x_1) = r_2(x_2) = \dots = r_N(x_N)$$

$$c_1 r_k(x_k) = C_2(x_1, \dots, x_N), \text{ per } k = 1, 2, \dots, N$$

Se poniamo $r_k = A$ ($k = 1, 2, \dots, N$), allora ogni x_k è determinato da una funzione unica di A dove il *failure rate* $r_k(x_k)$ è continuo e strettamente crescente tendente a infinito. Sostituendo ogni x_k , quell'equazione diviene solamente una funzione di A , che può essere così espressa:

$$(41) \quad A(x_1 + x_2 + \dots + x_N) - \sum_{k=1}^N \int_0^{x_k} r_k(t) dt = [(N-1)c_2 + c_3]/c_1$$

Dove ogni x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) è dato dalla funzione inversa di $r_k(x_k) = A$.

Se esiste una soluzione unica A all'equazione (41), allora una sequenza $\{x_k\}$ deve dare un minimo per $C_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$, poiché $C_2(x_1, \dots, x_N) \rightarrow \infty$ per qualsiasi $x_k \rightarrow \infty$.

Inoltre, si suppone che x_1, x_2, \dots, x_N siano determinati dalle (39) e (41). Allora, dalla (40), il tasso di costo risultante è $c_1 A$, che è una funzione di N .

Per completare una schedulazione ottimale delle azioni preventive, occorre cercare un numero ottimale N che minimizzi A .

Algoritmo risolutivo

Viene descritta una procedura di calcolo per ottenere una schedulazione ottima della politica preventiva:

- (i) Risolvi $r_k(x_k) = A$ ed esprimi x_k ($k = 1, 2, \dots, N$) come una funzione di A .
- (ii) Sostituisci x_k nella (41) e risolvi rispetto ad A .
- (iii) Determina N che minimizza A .

3.5.4 Esempio numerico per la distribuzione di Weibull

Si suppone che il tempo di guasto del sistema segua una distribuzione di Weibull;

$r_k(t) = \alpha_k \beta t^{\beta-1}$ e $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_N$. Il tasso di guasto $r_k(t)$ diviene via via maggiore col numero di azioni preventive per il tempo operativo dall'azione preventiva al tempo t , ed è strettamente crescente e tendente ad infinito per $t \rightarrow \infty$. Si possono calcolare x^* ottimo e N^* ottimo della politica preventiva periodica, e la schedulazione ottima $\{x_k\}$ della politica sequenziale.

Dal modello preventivo periodico, dalle (31) e (35), un valore ottimo di N^* è determinato da un minimo unico tale per cui:

$$\frac{[(N-1)c_2 + c_3]}{\beta - 1} \left[\frac{N\alpha_{N+1}}{\sum_{k=1}^N \alpha_k} - 1 \right] \geq c_3 - c_2 \quad (42)$$

Ed un valore di x^* ottimo è:

$$x^* = \left[\frac{(N^* - 1)c_2 + c_3}{c_1(\beta - 1) \sum_{k=1}^{N^*} \alpha_k} \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad (43)$$

Quindi, il tasso di costo atteso è:

$$C_1(x^*, N^*) = \left(\frac{c_1}{N^*}\right)\beta(x^*)^{\beta-1} \sum_{k=1}^{N^*} \alpha_k \quad (44)$$

Per la politica preventiva sequenziale, abbiamo che il valore di x_k che risolve l'equazione $r_k(x_k) = A$ è:

$$x_k = \left[\frac{A}{\alpha_k \beta} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

Sostituendo questo valore nella (41) si ottiene:

$$A = \left(\frac{(N-1)c_2 + c_3}{c_1 \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{\alpha_k \beta} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \quad (45)$$

Poi, si considera il problema che minimizza:

$$B(N) = \frac{(N-1)c_2 + c_3}{\sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{\alpha_k} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}} \quad (N = 1, 2, \dots) \quad (46)$$

che è lo stesso problema della minimizzazione di A , cioè, $C_2(x_1, \dots, x_N)$. Per semplificare, si suppone che $B(0) = \infty$. Quindi, una condizione necessaria per cui esiste un valore finito di N^* che minimizza $B(N)$ è quel valore che soddisfa $B(N+1) \geq B(N)$ and $B(N) < B(N-1)$ per $(N = 1, 2, \dots)$. Queste disequaglianze forniscono (47):

$$L_3(N) = \begin{cases} \sum_{k=1}^N \left[\frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_k} \right]^{\frac{1}{\beta-1}} - (N-1) & (N = 1, 2, \dots), \\ 0 & (N = 0) \end{cases}$$

È evidente che

$$L_3(N) - L_3(N-1) = [(\alpha_{N+1})^{\frac{1}{\beta-1}} - (\alpha_N)^{\frac{1}{\beta-1}}] \sum_{k=1}^N \left[\frac{1}{\alpha_k} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

$$> 0 \quad (48)$$

Esiste pertanto una soluzione unica e finita di N^* per la quale $L_3(N) \leq \frac{c_3}{c_2}$ se

$$L_3(1) < \frac{c_3}{c_2} < L_3(\infty),$$

$N^* = 1$ se $L_3(1) \geq \frac{c_3}{c_2}$ ed $N^* = \infty$ se $L_3(\infty) \leq \frac{c_3}{c_2}$, dove $L_3(\infty) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} L_3(N)$.

Pertanto, se $\alpha_N \rightarrow \infty$ come $N \rightarrow \infty$, allora esiste unicamente un valore finito di N^* poiché

$$L_3(N) \geq \left[\frac{\alpha_{N+1}}{\alpha_1} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

E gli intervalli ottimi sono:

$$x_k = \left[\frac{A}{\alpha_k \beta} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}$$

$$A = \left(\frac{(N^* - 1)c_2 + c_3}{c_1 \left(1 - \frac{1}{\beta} \right) \sum_{k=1}^{N^*} \left[\frac{1}{\alpha_k \beta} \right]^{\frac{1}{\beta-1}}} \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \quad (50)$$

		c_3/c_1					
		3	5	10	20	50	100
periodic PM	N^*	1	2	3	4	5	6
	x^*	17.32	18.92	20.63	22.68	27.90	32.58
	$C_1(x^*, N^*)/c_1$	0.346	0.423	0.517	0.639	0.889	1.176
sequential PM	N^*	1	2	4	6	9	11
	x_1	17.32	21.02	25.18	30.44	40.67	52.34
	x_2		17.03	20.39	24.66	32.95	42.40
	x_3			16.52	19.97	26.69	34.34
	x_4			13.38	16.18	21.62	27.82
	x_5				13.10	17.51	22.53
	x_6				10.62	14.18	18.25
	x_7					11.49	14.78
	x_8					9.31	11.97
	x_9					7.54	9.70
	x_{10}						7.86
	x_{11}						6.36
	$C_2(x_1, x_2, \dots, x_N)/c_1$	0.346	0.420	0.503	0.609	0.813	1.047

Tabella 5 - Grandezze principali dei modelli preventivi periodico e sequenziale di Nakagawa

Questa tabella fornisce i valori ottimi di x^* e di N^* della politica preventiva periodica e gli intervalli ottimi x_1, x_2, \dots, x_N della politica sequenziale per $\frac{c_3}{c_1} = 3, 5, 10, 20, 50, 100$, dove $\frac{c_2}{c_1} = 3$,

$\beta = 2$ e $\frac{1}{\alpha_k} = 100 * (0,81)^{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots$). Il *MTTF* al k -esimo periodo della politica preventiva è:

$$\mu_k = 5\sqrt{\pi}(0,9)^{k-1}$$

Che diventa il 10% più basso ad ogni intervento preventivo.

Questo mostra che il numero di interventi preventivi della politica sequenziale è maggiore di quello della politica periodica, ma il tasso di costo atteso della politica sequenziale è inferiore del corrispondente costo nella politica periodica preventiva.

3.5.5 Conclusione del modello

Il modello di Nakagawa propone una politica preventiva di tipo periodico e sequenziale per un sistema in operatività, il quale potrebbe risultare più pratico rispetto ai precedenti modelli. L'esempio numerico mostra che il calcolo ottimale è molto semplice per il caso della distribuzione di *Weibull*. Un aspetto che emerge in questo modello, di grande interesse per la letteratura scientifica a riguardo, è il fatto che viene provato in linea teorica che la manutenzione preventiva può essere eseguita allo stesso livello del tasso di guasto. Inoltre, i risultati della politica preventiva di tipo periodico potrebbero essere utili come calcoli appropriati per la politica sequenziale. L'unico problema di questa politica riguarda la determinazione del *failure rate* fra le diverse PM. Si potrebbe considerare di studiare la variazione del *failure rate* ad ogni PM. Infine, il sistema non presenta tassi di guasto differenti fra le varie PM, ma ha lo stesso *failure rate* fino alla sostituzione. Tuttavia, l'età dopo la k -esima PM si riduce a $a_k t$ ($0 < a_k < 1$), con t considerato prima di PM, i.e., l'età va da A_{k-1} dopo la $(k-1)$ -PM a $x_k + A_{k-1}$ prima della k -esima PM ($k=1, 2, \dots, N$), dove $A_0 \equiv 0$ e $A_{k-1} \equiv a_{k-1}x_{k-1} +$

$$a_{k-1}a_{k-2}x_{k-2} + \dots + a_{k-1}a_{k-2} \dots a_2a_1x_1, \quad (k = 2, 3, \dots, N).$$

Il tasso di costo atteso è¹⁰:

$$C_2(x_1, \dots, x_N) = \frac{c_1 \sum_{k=1}^N \int_{A_{k-1}}^{x_k + A_{k-1}} \lambda(t) dt + (N-1)c_2 + c_3}{x_1 + x_2 + \dots + x_N} \quad (51)$$

3.6 Modello di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con due tipologie di modalità di fallimento - Lin, 2001

In questo articolo viene introdotto il concetto relativo a due categorie di tipi di guasto: il primo tipo riguarda una modalità di guasti gestibili, ed il secondo quelli non gestibili, nelle diverse politiche di attività preventive. Il modello ibrido proposto da Lin è noto per modellare l'effetto di un'attività preventiva sulla funzione del tasso di guasto per la tipologia di guasti gestibili. Tuttavia, la manutenzione preventiva non modifica la funzione di *hazard rate* dei sistemi a guasto non gestibili. Le azioni preventive sono eseguite attraverso una sequenza di intervalli e lo scopo sarà determinare la schedulazione ottima della politica preventiva stessa che minimizza il costo atteso medio.

3.6.1 Introduzione

La determinazione di una politica preventiva è un problema importante per la pianificazione di un'ottima attività manutentiva. Come abbiamo visto, le politiche manutentive preventive di tipo periodico si definiscono per sistemi manutenibili a periodi interi multipli di un determinato intervallo di tempo e subiscono solamente riparazioni di tipo *minimal repair* al guasto tra le varie azioni preventive. La riparazione minima riporta il sistema solamente alla sua funzionalità, ma non cambia la sua condizione di salute generale. Le politiche preventive sequenziali sono come quelle periodiche a parte il fatto che il sistema viene mantenuto a sequenze di intervalli che possono avere lunghezza temporale differente. La manutenzione preventiva di tipo periodico è più facile da programmare, ma quella sequenziale è più realistica all'atto pratico in quanto il sistema richiede maggior

manutenzione col passare del tempo.

La condizione di salute generale di un componente viene valutata attraverso la funzione di *hazard rate* ed attraverso l'età effettiva. Maggiore è il valore della funzione di *hazard rate*, peggiore sarà la condizione di salute del componente/sistema. Per i sistemi la cui condizione di salute peggiora con l'età, il termine "età effettiva" viene utilizzato per misurare la sua condizione di salute. Per sistemi in deterioramento quindi, maggiore è l'età effettiva, peggiore sarà la condizione di salute del sistema stesso.

Come abbiamo visto, i modelli manutentivi preventivi tradizionali assumono che il sistema, dopo ogni intervento preventivo, ritorni nello stato "as good as new" o "as bad as old". L'assunzione più realistica è tuttavia quella per cui il sistema, dopo l'azione preventiva, si stali su una condizione intermedia di questi due stati; in questo caso, come sappiamo, si parla di riparazione imperfetta, introdotta precedentemente nel modello di Brown e Proschan del 1983 (*imperfect preventive maintenance*). Ci sono due principali alternative per modellare un'attività manutentiva preventiva imperfetta. La prima opzione assume che l'azione preventiva sia equivalente ad una riparazione di tipo minimo con probabilità p , ed equivalente alla sostituzione con probabilità pari a $1 - p$. La seconda alternativa invece modella gli effetti delle azioni preventive direttamente nel termine in cui il tasso di guasto o l'età effettiva vengono cambiati dalle azioni preventive stesse. Utilizzando il concetto di età effettiva, possiamo dire ad esempio che una certa politica preventiva riporta la condizione di salute di un componente di un sistema con un'età di calendario di 5 anni allo stato "as good as a 4-year old". Una constatazione di questo tipo indica che una certa politica preventiva ha reso il sistema più giovane e quindi più in salute.

Lin, Chun e Nakagawa hanno introdotto i concetti relativi ai fattori di aggiustamento nella funzione di hazard rate e di età effettiva per modellare più realisticamente gli effetti delle azioni preventive. Nakagawa ha proposto due modelli di politiche preventive assumendo che il tempo richiesto per la loro esecuzione sia trascurabile. Indichiamo con t_i l'istante di tempo in cui l' i -esima azione preventiva viene eseguita sul sistema ($i \geq 1$). Assumeremo che un nuovo

componente del sistema viene messo in funzione al tempo $t_0 = 0$. Questi due modelli manutentivi preventivi sono così descritti:

1. **Hazard rate PM model:** la funzione del tasso di guasto dopo l' i -esimo intervento preventivo è descrivibile come $a_i h_{i-1}(x)$ per $x \in (0, t_{i+1} - t_i)$, mentre valeva $h_{i-1}(x)$ per $x \in (0, t_i - t_{i-1})$, dove $a_i > 1$ è il fattore di aggiustamento della funzione di hazard rate a causa dell' i -esimo intervento preventivo. Nakagawa assume che, per un nuovo componente del sistema, la funzione di *hazard rate* sia pari a zero. Basandoci su queste assunzioni, possiamo dire che l'hazard rate PM model rappresenta la situazione entro la quale la funzione tasso di guasto del sistema non è crescente nel tempo qualora non vengano eseguiti interventi di natura preventiva, ogni intervento preventivo riporta la funzione di guasto a zero, e il tasso di crescita della suddetta funzione aumenta dopo ogni intervento preventivo aggiuntivo.
2. **Age reduction PM model:** l'età effettiva dopo l' i -esimo intervento preventivo si riduce ad essere $b_i E_i$ se l'effettiva età del sistema era E_i appena prima di questo intervento preventivo, dove $b_i < 1$ è il fattore di aggiustamento nell'età effettiva del sistema a causa dell' i -esimo intervento preventivo. L'età effettiva del sistema è la stessa dell'età attuale prima che il primo intervento preventivo sia eseguito. In altre parole, al tempo $t_1 -$ (appena prima di t_1), l'età effettiva del sistema e quella attuale sono entrambe pari a t_1 . All'istante $t_1 +$ (appena dopo che il primo intervento sia completato), l'età effettiva diviene $b_1 t_1$ mentre l'età attuale del sistema rimane la medesima. La condizione di salute del sistema appena dopo la prima manutenzione preventiva è rappresentata dal valore della sua funzione di guasto che è dello stesso valore di quando l'età attuale del sistema era pari a $b_1 t_1$. Se utilizziamo $h_0(x)$ per rappresentare la funzione tasso di guasto prima della prima azione preventiva per $x \in (0, t_1)$, allora $h_1(x) = h_0(b_1 t_1 + x)$ per $x \in (0, t_2 - t_1)$ rappresenta la funzione del tasso di guasto del sistema nell'intervallo di tempo (t_1, t_2) . La funzione di *hazard rate* del sistema è quindi una funzione della sua età effettiva e ogni azione preventiva riduce, in una certa misura, l'età effettiva del sistema stesso.

Basandoci sulla descrizione di questi due modelli, possiamo dire che il secondo

modello ha il vantaggio di determinare il valore istantaneo della funzione di *failure rate* appena dopo un'azione preventiva. In altre parole, possiamo scrivere $h(t_1 +) = h(b_1 t_1)$ se utilizziamo $h(t)$ per indicare la funzione di *hazard rate* di un sistema in funzione della sua età attuale. D'altro lato, il primo modello ha il vantaggio di permettere di conoscere come il tasso di crescita della funzione di *hazard rate* aumenta via via dopo che ogni azione preventiva è eseguita sul sistema.

3.6.2 Modello ibrido

Da queste osservazioni, Lin, Zuo e Yam hanno proposto il modello preventivo ibrido che combina i vantaggi del modello di *age reduction* e quelli dell'*hazard rate PM model*. Nel modello ibrido viene assunto che gli effetti di ogni politica preventiva sono modellati sotto due aspetti: il primo per i suoi effetti immediati dopo che la politica preventiva viene completata e l'altro per gli effetti duraturi riscontrabili quando il sistema viene messo nuovamente in funzione. Questo modello ibrido rileva sia la riduzione dell'età effettiva nel momento in cui la politica preventiva viene completata, sia la velocità con cui la funzione di *hazard rate* aumenterà una volta che il sistema verrà posto in funzione nuovamente. In questo modello preventivo ibrido, la funzione di *failure rate* dopo la prima azione preventiva può essere scritta come:

$$h(t_1 + x) = a_1 h(b_1 t_1 + x), \text{ per } x > 0$$

Utilizzando questo modello ibrido, possiamo ancora servirci del concetto di età effettiva dicendo che essa diviene pari a $b_1 t_1$ appena dopo il primo intervento preventivo. Tuttavia, il *failure rate* in questo momento non è lo stesso di quando l'età del sistema è pari a $b_1 t_1$. Essa è invece pari a $a_1 h(b_1 t_1)$. Il fattore di aggiustamento a_1 che viene utilizzato nell'*Hazard Rate PM Model* è utilizzato anche qui per trovare il giusto valore della funzione di *failure rate* dopo che la politica preventiva viene completata. La figura sottostante raffronta questi tre modelli prima e dopo che la politica preventiva viene eseguita, assumendo un andamento lineare per la funzione di *hazard rate* quando non vengono eseguiti interventi di tipo manutentivo preventivo.

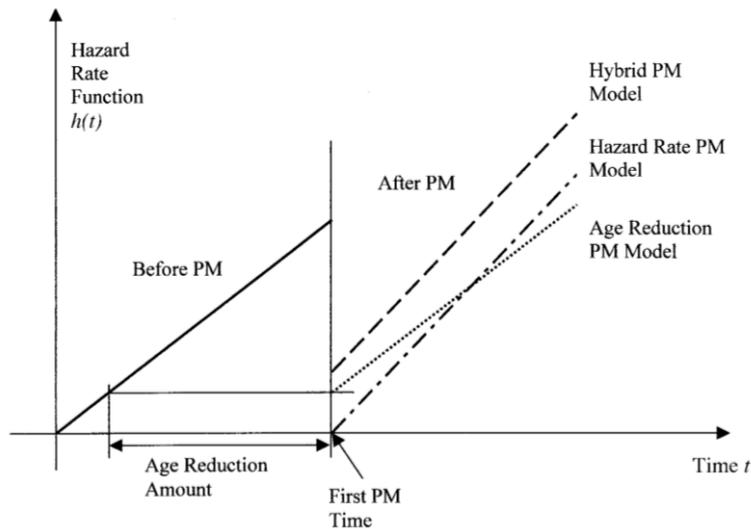


Figura 5 - confronto dei modelli di PM riportati

Due approcci popolari utilizzati per determinare gli intervalli di manutenzione per una politica preventiva sequenziale sono il metodo *reliability-based* ed il metodo di ottimizzazione. Per quel che riguarda il primo metodo, la politica preventiva viene eseguita ogni volta che l'affidabilità del sistema (o il tasso di rischio del sistema) raggiunge un livello predeterminato. Il secondo metodo seleziona gli intervalli ottimali che permettono di minimizzare il costo medio o il costo totale del ciclo di vita.

3.6.3 Due categorie di tipo di guasto

È ragionevole assumere che le modalità in cui il sistema incombe nel guasto possano essere raggruppate in due categorie: le modalità di guasto gestibili e quelle non gestibili. La politica preventiva può ridurre l'*hazard rate* delle modalità di fallimento gestibili ma non può cambiare quello della categoria di guasti non gestibili. Per esempio, la manutenzione preventiva di una macchina può includere l'oliatura, le viti di serraggio, la pulizia, etc. ma questo tipo di attività preventive può solamente migliorare le modalità di rottura che sono affette dalle condizioni ambientali di lavoro della macchina. Le categorie di rotture determinate dal solo progetto intrinseco della macchina, tuttavia, non possono essere migliorate attraverso la manutenzione preventiva. Andremo quindi ad utilizzare il modello PM

ibrido per modellare gli effetti delle politiche preventive sulle modalità di guasto gestibili.

Nel modello viene sviluppata una politica preventiva ottima ad intervalli attraverso due alternative: (1) lasciando gli intervalli preventivi come variabili decisionali e (2) permettendo che gli intervalli di manutenzione preventiva siano determinati dall'*hazard rate* o dal limite di affidabilità. Le funzioni obiettivo in entrambi i casi andranno a minimizzare il tasso di costo medio.

Notazioni:

- $h_a(t)$: *hazard rate* di una modalità di guasto non gestibile del sistema;
- $h_b(t)$: *hazard rate* di una modalità di guasto gestibile del sistema;
- $H_a(t)$: *hazard rate* cumulato di una modalità di guasto non gestibile del sistema;
- $H_b(t)$: *hazard rate* cumulato di una modalità di guasto gestibile del sistema;
- $h_k(t)$: *hazard rate* del sistema tra il $(k - 1)$ –esimo intervento preventivo ed il k -esimo.
- $H_k(t)$: *hazard rate* cumulato del sistema tra il $(k - 1)$ –esimo intervento preventivo ed il k -esimo.
- λ = valore accettabile predeterminato dell'*hazard rate*;
- x_k = intervalli preventivi schedulati, $k=1, 2, \dots, N$
- $t_k = x_1 + x_2 + \dots + x_k, k = 1, 2, \dots, N$
- y_k = età effettiva del sistema appena prima del k -esimo intervento preventivo, $k = 1, 2, \dots, N$.
- N = numero schedulato di intervalli della politica preventiva (l' N -esimo intervento preventivo coincide con una sostituzione).
- a_k = fattore di aggiustamento dell'*hazard rate* per la modalità di guasto gestibile dopo il k -esimo intervento preventivo, $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N-1}$.
- $A_k = \prod_{i=0}^{k-1} a_i, \quad k = 1, 2, \dots, N$
- b_k = fattore di aggiustamento dell'età effettiva dovuto al k -esimo intervento preventivo, $0 = b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{N-1} < 1$
- c_m = costo di riparazione minima

- c_p = costo dell'intervento di manutenzione preventiva
- C = tasso di costo medio del sistema
- $d_k = \left[\frac{(1-b_k)^\alpha}{\beta_1 + A_k \beta_2 - (\beta_1 + A_{k+1} \beta_2) b_k^\alpha} \right]^{1/(\alpha-1)}$

Assunzioni:

1. L'orizzonte temporale è infinito.
2. Le funzioni di *hazard rate* delle modalità di guasto non gestibili e gestibili del sistema, $h_a(t)$ e $h_b(t)$, sono continue e strettamente crescenti se non ci sono interventi preventivi manutentivi.
3. I tempi di intervento preventivo di tipo minimo o di sostituzione sono considerati trascurabili
4. La politica preventiva viene eseguita agli istanti t_1, t_2, \dots, t_{N-1} ed il sistema viene sostituito in t_N .
5. Dopo ogni sostituzione, il sistema viene rigenerato allo stato "as good as new".
6. Le modalità di guasto gestibili e non gestibili sono indipendenti e sono in competizione alla causa di guasto del sistema.
7. Il modello PM ibrido proposto da Lin, Zuo e Yam sarà utilizzato per modellare gli effetti della politica preventiva sulle modalità di guasto gestibili del sistema.

3.6.4 Sviluppo del modello

Consideriamo la situazione in cui un dato sistema viene mantenuto agli istanti t_1, t_2, \dots, t_{N-1} e sostituito all'istante t_N . I guasti tra due interventi preventivi sono gestiti con riparazioni di tipo *minimal repair*. La sostituzione del sistema lo riporta ad uno stato "as good as new". Il sistema presenta un *hazard rate* relativo ad un guasto gestibile pari a $A_k h_b(t)$ tra il (k-1)-esimo intervento ed il k-esimo, ovvero nell'intervallo (t_{k-1}, t_k) . L'*hazard rate* di un tasso relativo ad un guasto non gestibile in questo intervallo è $h_a(t)$. Pertanto, l'*hazard rate* del sistema nell'intervallo (t_{k-1}, t_k) è $h_k(t) = h_a(t) + A_k h_b(t)$. In base alla descrizione del modello, abbiamo:

$$y_k = x_k + b_{k-1}x_{k-1} + \dots + b_{k-1}b_{k-2} \dots b_2b_1x_1$$

$$y_k = x_k + b_{k-1}y_{k-1}$$

$$x_k = y_k - b_{k-1}y_{k-1}$$

Dunque, il tasso di costo medio è dato da:

$$C = \frac{c_r + c_p(N - 1) + c_m \sum_{k=1}^N [H_k(y_k) - H_k(b_{k-1}y_{k-1})]}{[\sum_{k=1}^{N-1} (1 - b_k) y_k + y_N]} \quad (52)$$

Ci sono due principali alternative per determinare gli intervalli preventivi nella letteratura. Uno è volto alla selezione degli intervalli che minimizzano il tasso di costo medio, ovvero, lasciare che gli intervalli preventivi siano variabili decisionali nel problema di ottimizzazione. L'altro consiste nel determinare gli intervalli della politica preventiva attraverso la funzione di *hazard rate* o il limite di affidabilità. Andiamo a vedere entrambi gli approcci.

3.6.5 Approccio 1 alla determinazione degli intervalli di minimizzazione

In questo modello, gli interventi preventivi agli istanti t_1, t_2, \dots, t_{N-1} e l'istante di sostituzione t_N sono trattati come variabili decisionali indipendenti. Alternativamente, le variabili decisionali sono N e y_k , ($k = 1, 2, \dots, N$). Lo scopo in questo modello è la determinazione dei valori ottimali di N e di y_k , ($k = 1, 2, \dots, N$) al fine di minimizzare il tasso di costo medio espresso nell'equazione (52).

Differenziando l'equazione (52) rispetto a y_k e ponendola uguale a 0, si ottiene:

$$h_k(y_k) - b_k h_{k+1}(b_k y_k) = (1 - b_k)[h_a(y_N) + A_N h_b(y_N)] \quad k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (53)$$

$$e c_m [h_a(y_N) + A_N h_b(y_N)] = C \quad (54)$$

Si dimostra che esiste ed è unica la soluzione all'equazione (53) rispetto ad y_k .

Inoltre, vale che il fattore di aggiustamento dell'*hazard rate* $a_k (> 1)$ dovrebbe essere minore del reciproco del fattore di riduzione di età b_k . Questa è una condizione ragionevole dal momento che la politica preventiva tende a migliorare la condizione del sistema. L'estensione del miglioramento dato dalla politica

preventiva è determinato attraverso i valori di a_k e b_k . Minore è il valore di questi due termini, maggiore sarà il miglioramento dato dalla manutenzione ideata. Affinché la soluzione all'equazione (2) sia univoca e determinata, deve valere la condizione $1 - a_k b_k > 0$. Segue che i valori y_k ottimali possono essere raggiunti ai valori limite o possono non esistere. Di seguito, viene assunto che la condizione $1 - a_k b_k > 0$ è soddisfatta.

Sostituendo ogni soluzione dell'equazione (53), y_k ($k = 1, 2, \dots, N - 1$), all'equazione (54), si ottiene:

$$h_N(y_N) \left[\sum_{k=1}^{N-1} (1 - b_k) y_k + y_N \right] - \sum_{k=1}^N [H_k(y_k) - H_k(b_{k-1} y_{k-1})] = \frac{c_r + c_p(N - 1)}{c_m} \quad (55)$$

Dove ogni y_k ($k = 1, 2, \dots, N - 1$) è una certa funzione di y_N .

Algoritmo risolutivo per l'approccio 1

È mostrato un algoritmo per determinare la schedulazione ottima della politica preventiva presentata:

- step 1. Risolvere l'equazione (53) rispetto a y_k ($k = 1, 2, \dots, N - 1$). Le soluzioni saranno funzione di y_N .
- Step 2. Sostituire le soluzioni dello step 1 nell'equazione (55) e risolverla rispetto ad y_N .
- Step 3. Scegliere il valore di N che minimizzi $[h_a(y_N) + A_N h_b(y_N)]$, dove y_N è la soluzione ottenuta allo step 2.
- Step 4. Calcolare gli y_k , $k = 1, 2, \dots, N$ dalle espressioni ottenute agli step 1 e 2 per il valore di N ottenuto allo step 3.
- Step 5. Calcolare x_k da $x_k = y_k - b_{k-1} y_{k-1}$ $k = 1, 2, \dots, N$.

Occorre infine notare che questo modello 1 si riduce ad un puro modello di riduzione dell'*hazard rate* quando $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$ e ad un modello puro di *age-reduction* quando $a_k = 1$, $k = 1, 2, \dots, N$.

3.6.6 Approccio 2 alla determinazione degli intervalli di minimizzazione

In questo modello, la manutenzione preventiva viene eseguita ogni volta che l'*hazard rate* del sistema raggiunge il livello predeterminato λ e la variabile decisionale è N . Ciò implica che l'*hazard rate* al tempo t_i ($i=1, 2, \dots, N$) deve essere uguale a λ .

$$h_k(y_k) = h_a(y_k) + A_k h_b(y_k) = \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (56)$$

Risolvendo l'equazione (56) rispetto a y_k ($k = 1, 2, \dots, N$), si ottengono le soluzioni come espressioni di λ . Si sostituiscono dunque queste espressioni di λ nell'equazione (52). Quindi C diviene in funzione di λ . Differenziando C rispetto a λ e ponendo l'equazione uguale a 0, si ottiene:

$$\frac{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{h_k(y_k) - b_k h_{k+1}(b_k y_k)}{h'_k(y_k)} + \frac{h_N(y_N)}{h'_N(y_N)}}{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1 - b_k}{h'_k(y_k)} + \frac{1}{h'_N(y_N)}} = \frac{C}{c_m} \quad (57)$$

Dove y_k ($k = 1, 2, \dots, N$) è una funzione di λ .

Risolvendo l'equazione (57) rispetto a λ , si ottiene λ come una funzione di N . Infine, possiamo trovare N che minimizza:

$$\frac{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{h_k(y_k) - b_k h_{k+1}(b_k y_k)}{h'_k(y_k)} + \frac{h_N(y_N)}{h'_N(y_N)}}{\sum_{k=1}^{N-1} \frac{1 - b_k}{h'_k(y_k)} + \frac{1}{h'_N(y_N)}} \quad (58)$$

Dove y_k ($k = 1, 2, \dots, N$) è una funzione di λ , e quindi una funzione di N .

Algoritmo risolutivo per l'approccio 2

Basandoci su queste discussioni, possiamo delineare un algoritmo per ottenere la politica preventiva schedulata ottimale come segue:

- **step 1.** Risolvere l'equazione (56) rispetto ad y_k ($k = 1, 2, \dots, N - 1$). Le soluzioni sono funzioni di λ .

- **Step 2.** Sostituire le soluzioni dallo step 1 nell'equazione (57) e risolverle rispetto a λ .
- **Step 3.** Scegliere N in modo tale da minimizzare la funzione nell'espressione (58) dove y_k ($k = 1, 2, \dots, N$) è l'espressione ottenuta negli step 1 e 2.
- **Step 4.** Calcolare y_k dalle espressioni ottenute negli step 1 e 2 per il valore di N ottenuto allo step 3.
- **Step 5.** Calcolare x_k da $x_k = y_k - b_{k-1}y_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, N$.

Può essere dimostrato che le equazioni (56) e (57) sono equivalenti alle equazioni (53) e (54) rispettivamente, dove $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, N$. Ciò significa che, per una pura politica di riduzione dell'*hazard rate*, le schedulazioni ottime per la preventiva nei modelli 1 e 2 sono le stesse.

3.6.7 Conclusione del modello

In questo modello è stata presentata una politica preventiva generale che assume che le azioni preventive riducano l'*hazard rate* solamente per la modalità di guasti gestibili, ma non abbiano alcuna influenza sulla funzione di guasto delle modalità di guasto non gestibili. Per ottenere la schedulazione preventiva ottimale sono stati dunque osservati due modelli. Generalmente, le soluzioni ottime nei due modelli non sono uguali. Quando l'*hybrid PM model* si riduce all'*hazard rate PM model* ($b_k = 0$), tuttavia, si può mostrare che le schedulazioni ottimali ottenute per il modello 1 ed il modello 2 sono esattamente le stesse. Si osserva che x_k diminuisce per tutti i valori di k ad eccezione dell'ultimo valore. Pertanto, possiamo concludere che il modello 1 è più pratico rispetto al modello 2, nel quale, il tasso di guasto ad ogni azione preventiva rimane inalterato (uguale a λ). Il valore predeterminato λ è scelto per minimizzare la funzione di costo medio. Un modo alternativo e ragionevole è quello di determinare λ andando incontro agli aspetti pratici e applicativi dei sistemi riparabili, ovvero, scegliendo λ pari ad un valore specifico λ_0 noto. Si osserva infine che il tasso di costo medio C è una funzione solamente di N , pertanto, possiamo ricavare il valore di N che minimizza C e ottenere in definitiva la schedulazione preventiva ottimale¹¹.

3.7 Modello di manutenzione periodica imperfetta con due categorie di modalità di guasto concorrenti – Zequeira e Brenguen, 2005

Viene qui studiata una politica manutentiva per un sistema soggetto a due modalità di guasto: gestibili e non gestibili. La qualità delle azioni manutentive è modellata sugli effetti che esse hanno sul *failure rate* del sistema. Tali azioni riportano lo stato di salute del sistema ad una condizione intermedia fra quella “as good as new” e “as bad as immediately before the maintenance action”, ovvero tra una condizione di salute pari al nuovo e la condizione del sistema appena prima dell’azione manutentiva. Questo modello permette lo studio del miglioramento della condizione del sistema (*improvement factor*) come funzione del tempo dell’azione manutentiva eseguita. È esaminata dunque la determinazione della politica manutentiva che minimizza il tasso di costo atteso per un intervallo temporale infinito. Le condizioni date sono tali per cui la soluzione ottimale esiste ed è unica.

3.7.1 Introduzione

Questo modello prende in considerazione il concetto di *failure mode*, ovvero della modalità di guasto. Mosleh definisce la *failure mode* come una “descrizione della rottura di un componente in termini di quale funzione del componente era attualmente o potenzialmente disponibile. Hoyland e Rausand stanziano che “tutti i componenti tecnici sono progettati per adempire a diverse funzioni. Una modalità di guasto è definita quindi come un non-adempimento di una di queste funzioni”. Lin introdusse, come abbiamo precedentemente visto, il concetto di due categorie di guasti: i guasti gestibili e quelli non-gestibili. Similmente, le modalità di guasto di un sistema sono suddivise in modalità di guasto manutenibili e non-manutenibili (o gestibili). Ci sono cioè funzioni dei sistemi (modalità di guasto gestibili) per le quali la degradazione del sistema che porta alla sua inaffidabilità può essere evitata con un’accurata manutenzione preventiva. La rimozione della degradazione relativa ad altre funzioni del sistema (modalità di guasto non manutenibili) è possibile solamente attraverso una revisione completa che riporta l’intero sistema

ad una condizione pari al nuovo.

Il modello qui presentato è relativo a modelli di rischio in competizione. Le modalità di guasto gestibili e non-gestibili competono cioè a provocare la rottura del sistema. Sono considerate tre tipologie di azioni manutentive: manutenzione preventiva imperfetta, riparazione minima e sostituzione. Tale modello può essere applicato a sistemi serie multi-componente nei quali alcuni di essi sono rimpiazzati frequentemente mentre altri sono sostituiti con frequenza inferiore. Le modalità di guasto gestibili dovrebbero corrispondere quindi alle sostituzioni frequenti dei componenti. Le modalità di guasto non-gestibili riguardano invece le sostituzioni dei componenti ricambiati con minor frequenza. Anche se un componente viene rimpiazzato frequentemente, la sua degradazione può dipendere dal grado di deterioramento dei componenti sostituiti meno frequentemente a causa, ad esempio, delle interazioni fisiche come le vibrazioni o le alte temperature. Poiché il comportamento del tasso di guasto può essere utilizzato per caratterizzare la degradazione del sistema, la dipendenza delle modalità di guasto gestibili e non-gestibili può essere rappresentata proprio in termini di *failure rate function*. In questo modello si utilizza proprio questo approccio, volto cioè al considerare come le modalità di guasto gestibili dipendano dalle modalità di guasto non gestibili e viceversa. Possibili applicazioni pratiche del modello possono ad esempio essere implementate su sistemi come motori elettrici per camion. Si tratta infatti di complessi sistemi serie con elevata interazione fra i componenti, includendo vibrazioni e alte temperature, che provocano insieme una forte degradazione del sistema stesso.

Il maggior contributo dell'articolo di Zequeira ai modelli preventivi per l'ottimizzazione della politica preventiva imperfetta di un sistema è che: 1) le modalità di guasto in competizione sono dipendenti e 2) i fattori di miglioramento al tasso di guasto del sistema dovuti alla manutenzione preventiva dipendono dal tempo in cui quelle azioni vengono eseguite. L'approccio presentato offre un'alternativa all'utilizzo dell'età effettiva, ai fattori di aggiustamento o ai differenti processi di guasto prima e dopo le sostituzioni del sistema, per modellare gli effetti delle azioni manutentive sui tassi di guasto del sistema.

3.7.2 Modello

Al guasto, un componente viene riportato ad una condizione di operatività attraverso un'azione di riparazione di tipo minimo. Lo stato cui viene riportato è quindi quello di tipo "as basas immediately before the failure". Il sistema viene mantenuto preventivamente agli istanti di tempo kT , con $k=1, 2, \dots, N-1$, $N=2, 3, \dots$. Al termine di ogni ciclo N il sistema viene sostituito. L'azione preventiva riporta la condizione del sistema rispetto alle modalità di guasto gestibili ad una condizione pari al nuovo.

Alla sostituzione, ogni NT , il sistema viene riportato alla condizione "as good as new".

Assunzioni

- 1) I tempi per le azioni preventive, le riparazioni di tipo minimo e le sostituzioni sono trascurabili.
- 2) Le modalità di guasto gestibili e non-gestibili sono competitive al provocare il guasto del sistema.
- 3) La funzione di *hazard rate* della modalità di guasto gestibile è $\lambda(t - (k - 1)T + p_k(t)h(t), (k - 1)T \leq t \leq kT, p_k(t) \geq 0, t \geq 0$, con $\lambda(t)$ funzione di *hazard rate* per la modalità di guasto gestibili e $h(t)$ funzione di *hazard rate* per le modalità di guasto non-gestibili.
- 4) Le funzioni di *hazard rate* sono continue e crescenti con t .
- 5) $h'(t), h''(t), \lambda'(t)$ e $p'(t)$ esistono
- 6) c_m, c_p e c_r (costi di riparazione minima, dell'azione preventiva e di sostituzione del sistema rispettivamente), sono valori positivi e finiti. Il costo di sostituzione del sistema è maggiore rispetto agli altri due costi.

3.7.3 Tasso di guasto del sistema

L'*hazard rate* delle modalità di guasto gestibili al tempo $t-(k-1)T$ dopo la $(k-1)$ -esima azione manutentiva in un ciclo, $k=2, 3, \dots, N-1$, o dopo la sostituzione del sistema ($k=1$) è uguale alla somma dei dell'*hazard rate* $\lambda(t - (k - 1)T)$ più un valore positivo $p_k(t)h(t). corrisponde al tasso di guasto$

manutenibile del sistema sostituito al tempo $(k-1)T$ se le due modalità di guasto sono indipendenti. Il termine $p_k(t)h(t)$ deriva dalla dipendenza tra le modalità di guasto e può essere interpretato come l'incremento dell'*hazard rate* delle modalità di guasto mantenibili come conseguenza della degradazione delle modalità di guasto non mantenibili. Quando $p_k(t) = 0, t \geq 0$, le modalità di guasto mantenibili e non mantenibili sono indipendenti.

$h(t)\Delta x$ è approssimativamente la probabilità per cui il sistema presenta un guasto di tipo I nell'intervallo $(t, t + \Delta t)$ considerato il fatto che il sistema non ha subito alcun guasto di tipo I prima di t . Questa approssimazione è migliore per piccoli valori di Δt . Pertanto, se $p_k(t)$ è assunto essere un valore di probabilità, allora tale valore può essere interpretato come il tasso di guasto dei guasti di tipo II provocati dai guasti di tipo I. Ovvero, se il sistema presenta un guasto di tipo I al tempo t , allora, esso subirà un guasto di tipo II con probabilità $p_k(t)$ oppure non subirà un guasto di tipo II con probabilità pari a $1-p_k(t)$. Infine, il *failure rate* del sistema sarà dato dalla seguente:

$$r_{k,T}(t) = h(t) + \lambda(t - (k - 1)T) + p_k(t)h(t), (k - 1)T \leq t \leq kT \quad (59)$$

3.7.4 Analisi del modello

Si suppone che il costo della riparazione minima dovuto alle due tipologie di fuorso sia lo stesso, e pari a c_m . Si suppone che quando i guasti di tipo I e II avvengono simultaneamente, allora, il costo totale della riparazione minima del sistema è pari a $2c_m$. Non c'è dipendenza economica nelle riparazioni del sistema. L'estensione del modello presentato include costi di riparazione differenti per i guasti di tipo I, tipo II e i guasti multipli (ovvero, l'avvenimento simultaneo dei guasti di tipo I e di tipo II). Il costo della politica manutentiva per unità di tempo su di un orizzonte temporale infinito è dato da:

$$C(T, N) = \frac{1}{NT} [c_r + (N - 1)c_p + c_m \sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} r_{k,T}(t)dt], T > 0 \quad (60)$$

Dove

$$\sum_{k=1}^N \int_{(k-1)T}^{kT} r_{k,T}(t) dt$$

$$= H(NT) + N\Lambda(T) + \sum_{k=1}^N \int_0^T p(t)h((k-1)T+t) dt \quad (61)$$

$\Lambda(T)$ = funzione di hazard rate cumulata dei guasti manutenibili se $p_k(t) = 0, t \geq 0, \Pi(k, T) = \int_{(k-1)T}^{kT} r_{k,T}(t) dt, k = 1, 2, \dots, N, N = 1, 2, \dots$

$p_k(t)$ = funzione che modella la dipendenza tra le modalità di guasto gestibili e non gestibili.

Derivando l'espressione del costo totale rispetto a T e ad N, si ottengono i valori ottimali T^* ed N^* che minimizzano la politica manutentiva presentata.

Posto $C_c(T, N)$ pari al costo totale atteso in un ciclo manutentivo in funzione di T ed N, si ottiene che, per un fissato valore di N, esiste ed è unico il valore ottimale T^* per cui:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial T} C_c(T, N)|_{T=T^*} = C(T^*, N) \quad (62)$$

Se $h(t), \lambda(t)$ e $p(t)$ sono funzioni continue e $c_r > 0$, allora esiste ed è unica la soluzione ottimale T^* .

Per ricavare il valore ottimale N, invece, si utilizza l'approccio di Nakagawa; deve essere soddisfatta la seguente condizione (1):

$$C(T, N + 1) \geq C(T, N)$$

Inoltre, se il valore ottimo di N è maggiore di 1, allora deve essere verificata anche la condizione seguente (2):

$$C(T, N - 1) \geq C(T, N)$$

Definiamo la funzione $L(N, T)$ nel seguente modo (63):

$$L(N, T) = \begin{cases} N \prod(N + 1, T) - \sum_{k=1}^N \prod(k, T) & \text{se } N = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{se } N = 0 \end{cases}$$

La condizione (1) è equivalente a

$$L(N, T) \geq \frac{c_r - c_p}{c_m}$$

La condizione (2) è equivalente a

$$\frac{c_r - c_p}{c_m} > L(N - 1, T)$$

Quindi, per il valore ottimale di N deve valere la condizione seguente (3):

$$L(N, T) \geq \frac{c_r - c_p}{c_m} > L(N - 1, T)$$

Considerando il valore T fissato, si ottiene che:

$$\begin{aligned} & \prod(k+1, T) - \prod(k, T) \\ &= \Delta H(k+1, T) - \Delta H(k, T) \\ &+ \int_0^T p(t) [h(kT+t) - h((k-1)T+t)] dt \quad (64) \end{aligned}$$

Dove $\Delta H(k, T) = \int_{(k-1)T}^{kT} h(t) dt$

Se $h(t)$ è crescente allora per $T > 0$ fissato si ottiene che $\Delta H(k, T)$ è crescente quando k cresce, e $h(kT+t) - h((k-1)T+t) > 0, t \geq 0$

Pertanto,

$$L(N, T) - L(N - 1, T) = N [\prod(N+1, T) - \prod(N, T)] > 0 \quad (65)$$

Pertanto, per un valore fissato di T, $L(N, T)$ è crescente quando N cresce ed esiste, per T fissato, un valore unico di N per il quale la condizione (3) è soddisfatta. Pertanto se $h(t)$ è crescente, allora, per $T > 0$ fissato, c'è una soluzione unica $N = N^* \geq 1$ per la quale la condizione (3) è verificata.

Scelta di $p(t)$

È naturale supporre che la probabilità per cui un tipo I di guasto provochi un guasto

di tipo II dipenda dell'esistenza di un meccanismo di accoppiamento e possibilmente anche la degradazione con rispetto alle modalità di guasto manutenibili. Perciò, possiamo scrivere una forma di $p(t)$ nel seguente modo (66):

$$p(t) = p_0 + \delta_0 \lambda(t - (k - 1)T),$$

$$(k - 1)T \leq t < kT, \quad \delta_0 p_0 \geq 0$$

p_0 e δ_0 modellano l'effetto del meccanismo di accoppiamento e $\lambda(t)$ incarna l'effetto di degradazione delle modalità di guasto manutenibili in relazione all'incombenza di guasti multimi, di tipo I, II, e simultanei.

Si può supporre che il contributo del meccanismo di accoppiamento alla probabilità di accadimento dei guasti multipli sia, in prima approssimazione, costante. Il termine p_0 vuole considerare il caso in cui i guasti multipli dipendono solamente da alcuni tipi di meccanismi di accoppiamento (e non dalla degradazione dovuta ai guasti manutenibili). Si noti che se $p(t)$ ha la forma espressa nella (4) ed essa è supposta essere una probabilità allora le politiche di manutenzione (T , N) dovrebbero essere ristrette a valori di T per i quali $0 \leq p(T) \leq 1$.

Possiamo dire che $p(t)$ può essere interpretato come una misura della vulnerabilità delle modalità di guasto manutenibili rispetto ai guasti di tipo I. Ci si può aspettare che questa vulnerabilità sia funzione del tasso di guasto $\lambda(t)$ delle modalità di guasto manutenibili.

Una specifica sui guasti che abbiamo chiamato "simultanei": in pratica, essi corrispondono ai guasti di componenti differenti che avvengono in un periodo di tempo molto ristretto. Essi possono fornire informazioni circa l'accoppiamento dei due tipi di guasto permettendo di determinare al meglio la modalità ed il meccanismo di accoppiamento che si verifica. Si noti che se $\delta_0 = 0$ nell'espressione (66), allora una stima di p_0 può essere ottenuta come il numero totale dei guasti simultanei diviso il numero totale dei guasti non-manutenibili. Per stimare δ_0 sono necessari dati relativi alle modalità di guasto multiple dopo che è stata eseguita la politica preventiva di tipo imperfetto, poiché nella (66), δ_0 e $\lambda(t)$ appaiono moltiplicati¹².

3.7.5 Conclusione del modello

È stato presentato un modello che considera le politiche preventive di tipo imperfetto per sistemi che possono guastarsi secondo due modalità: gestibile, e non gestibile. Queste due modalità sono subordinate, dipendenti le une dalle altre. È stato studiato come l'azione preventiva impatta sul *failure rate* del sistema e quali condizioni devono essere soddisfatte affinché la soluzione ottimale possa esistere. In questo modello inoltre è possibile calcolare il fattore di miglioramento dell'azione manutentiva preventiva imperfetta come funzione del tempo dell'azione manutentiva stessa. È stata utilizzata una struttura di dipendenza specifica per mezzo dei *failure rates* dei guasti gestibili e non gestibili. La ricerca futura deve porsi l'obiettivo di analizzare il problema qui esposto attraverso l'utilizzo di altre strutture di dipendenza. Il modello periodico qui presentato può essere esteso alle politiche preventive di tipo sequenziale¹².

3.8 Modello di manutenzione preventiva imperfetta con modalità di guasto dipendenti – Castro, 2009

In linea con il modello di Zequeira sopra presentato, consideriamo un sistema soggetto alle due modalità di guasto introdotte: parleremo quindi di guasti gestibili e non gestibili. Ogni modalità di guasto è rappresentata da una specifica funzione di *failure rate*. Quando il sistema incombe in un guasto, esso verrà riparato attraverso un'azione di riparazione di tipo minimo. Le due modalità di guasto sono, come abbiamo visto, dipendenti nel seguente modo: dopo ogni azione preventiva, il tasso di guasto relativo ai guasti manutenibili dipende dall'insieme dei guasti non-manutenibili. Il problema verte alla determinazione della lunghezza ottimale di ogni periodo manutentivo e del numero ottimale di azioni preventive da eseguire prima della sostituzione del sistema, al fine di minimizzare il tasso di costo totale. Nel modello di Castro si ottengono le schedulazioni della politica preventiva ottimale per tassi di *failure rate* non-decrescenti.

3.8.1 Introduzione

In molti casi, la manutenzione di un sistema guasto è molto costosa e a volte implica guasti non programmati. Per evitare questa situazione, come sappiamo, viene pianificata ed eseguita la manutenzione preventiva. I modelli tradizionali suppongono che il sistema, dopo che è stata eseguita la manutenzione preventiva, ritornino “as good as new”. Tuttavia, il sistema non è in grado di tornare realmente a tale stato e l’azione manutentiva su di esso eseguita è detta, come abbiamo visto, manutenzione preventiva imperfetta.

In questo modello di Castro, la manutenzione preventiva è modellata sotto l’assunzione per la quale i guasti del sistema possono essere raggruppati in due categorie, o modalità: modalità di guasto gestibili e non gestibili; ad ogni modalità di guasto è associata una funzione di *failure rate*. La manutenzione preventiva è di tipo imperfetto perché essa può solamente ridurre il *failure rate* relativo ai guasti gestibili ma non dei guasti non gestibili. Per esempio, la manutenzione preventiva può includere attività come l’oliatura, la pulizia, la sostituzione parziale del sistema, ... che possono solamente migliorare alcuni stati di guasto ma che non possono eliminare altre rotture relative ad esempio alla progettazione intrinseca del sistema. Lin, nel modello che abbiamo visto, ha modellato gli effetti della manutenzione preventiva attraverso la riduzione del *failure rate* dei guasti gestibili e l’età effettiva del sistema utilizzando i fattori di aggiustamento. In questo modello, l’i-esima azione preventiva è eseguita dopo un tempo fisso X_i e la sostituzione del sistema è eseguita dopo la (N-1)-esima azione manutentiva. El-Ferik e Ben-Daya, come vedremo, considerarono un modello simile a questo assumendo che le modalità di guasto siano, però, indipendenti. Nel caso più realistico sopra citato di Zequeira e Bérenguer invece le modalità di guasto sono correlate. La dipendenza viene espressa in termini del *failure rate*: il *failure rate* dei guasti manutenibili dipende dal *failure rate* dei guasti non manutenibili. Assumendo che la manutenzione preventiva è eseguita agli istanti di tempo kT , dove $k = 0, 1, 2 \dots$ e $T > 0$, il *failure rate* relativo ai guasti gestibili dopo ogni azione preventiva è data da:

$$r_{k,T}(T) = r(t - kT) + p_k(t)h(t) \quad kT \leq t \leq (k + 1)T \quad (67)$$

Dove $r(t)$ indica il *failure rate* prima della prima azione preventiva, $h(t)$ è il *failure rate* relativo ai guasti non gestibili, e $p_k(t)$ è interpretato come una probabilità, in questo

senso: se il sistema presenta un guasto non-gestibile al tempo t , allora, esso subirà anche un guasto gestibile con probabilità pari a $p_k(t)$.

In Castro si assume che le due modalità di rottura siano indipendenti. Le azioni manutentive sono eseguite agli istanti kT , $k=1, 2, \dots$ e incidono sul *failure rate* dei guasti gestibili. Rispetto a Zequeira però, in questo modello vi è una differenza nel modello di dipendenza. Si assume infatti che l'incombenza di guasti gestibili dipenda dalla totalità dei guasti non-gestibili a partire dall'installazione del sistema. Assumendo che il *failure rate* dei guasti gestibili sia zero per un nuovo sistema, il *failure rate* relativo ai guasti gestibili dopo la k -esima azione preventiva è:

$$r_{1,k}(t) = r_{1,0}(t - kT)a^{N_2(kT)}, kT \leq t \leq (k + 1)T, a > 1 \quad (68)$$

Dove $N_2(kT)$ rappresenta il numero di guasti non-gestibili in $[0, kT]$ e $r_{1,0}(t)$ rappresenta il *failure rate* relativo ai guasti manutenibili per un nuovo sistema. Pertanto, dopo ogni azione preventiva, il *failure rate* dei guasti manutenibili si resetta a zero, ma tal valore dipende dai guasti non-gestibili subiti dal sistema. Il fattore di aggiustamento $a^{N_2(kT)}$ è utilizzato per rappresentare l'effetto di usura del sistema (dovuta ai guasti non-gestibili) all'incombenza dei guasti gestibili. In questo lavoro, le azioni preventive sono eseguite agli istanti di tempo kT , con $k=1, 2, \dots$ e il sistema viene sostituito non appena esso raggiunge l'età in corrispondenza di NT dall'ultimo rinnovo. Quando il sistema si guasta, viene eseguita la riparazione di tipo minimo. I costi sono associati alle azioni di preventiva, alle riparazioni e alle sostituzioni. Lo scopo, anche in questo modello, converge nel determinare la lunghezza ottimale fra due azioni preventive e il numero ottimale di interventi preventivi fra le sostituzioni successive del sistema.

3.8.2 Modello

Consideriamo un modello manutentivo per un sistema soggetto a due possibili modalità di guasto, dove la manutenzione correttiva e preventiva hanno luogo secondo il seguente schema:

1. Prima della prima azione manutentiva preventiva, i guasti gestibili avvengono secondo la funzione di intensità $r_{1,0}(t)$ e la funzione cumulata di intensità di guasto

$H_1(t) = \int_0^t r_{1,0}(u)du$, dove t è l'età del sistema. I guasti gestibili vengono sempre riparati con un intervento correttivo di tipo minimo, ed il tempo di riparazione è trascurabile. Assumiamo che $r_{1,0}(t)$ sia continua, non-decrescente in t e pari a zero per un nuovo sistema, cioè, $r_{1,0}(0) = 0$.

2. I guasti non-riparabili relativi al secondo ciclo $\{N_2(t), t \geq 0\}$, hanno una funzione di intensità pari a $r_2(t)$ ed una funzione di intensità di guasto cumulata $H_2(t) = \int_0^t r_2(u)du$. Un guasto non-gestibile viene sempre corretto con un intervento di riparazione minima ed il tempo di riparazione è considerato trascurabile. Si assume che $r_2(t)$ sia continua e non decrescente in t .
3. Il sistema viene mantenuto in modo preventivo agli istanti di tempo kT , dove $k=1, 2, \dots$ e $T>0$. Le azioni preventive riducono solamente il *failure rate* dei guasti gestibili, ma non hanno influenza sul *failure rate* dei guasti non-gestibili. Ciò significa che il *failure rate* dei guasti non-gestibili rimane indisturbato nelle successive manutenzioni preventive che il sistema subisce.
4. I guasti non-manutenibili incidono sul *failure rate* dei guasti gestibili nel seguente modo. Indichiamo con $r_{1,k} = 0, 1, 2, \dots$ il *failure rate* dei guasti gestibili in $[kT, (k+1)T]$, $r_{1,k}$ è dato da:

$$r_{1,k}(t) = r_{1,0}(t - kT)a^{N_2(kT)}, kT \leq t < (k+1)T \quad (69)$$

dove $a > 1$.

5. Il sistema viene sostituito all' N -esima azione preventiva, $N \in \{1, 2, \dots\}$ dopo la sua installazione. Dopo la sostituzione, il sistema torna allo stato "as good as new" e il tempo di sostituzione è trascurabile.
6. I costi associati alle riparazioni minime per i guasti manutenibili e non manutenibili sono C_1 e C_2 , rispettivamente. Il costo di ogni manutenzione preventiva è C_m ed il costo di sostituzione è C_r , ($C_m < C_r$).

Il problema è quello di determinare la lunghezza ottimale fra le politiche preventive ed il numero totale di interventi preventivi prima della sostituzione del sistema. Il problema di ottimizzazione viene formulato in termine del tasso di costo atteso.

Dalle assunzioni 3 e 4, le azioni manutentive preventive sono di tipo imperfetto in ambo i sensi. Per prima cosa, la manutenzione preventiva non incide sul *failure rate* dei guasti non gestibili. Inoltre, l'usura dovuta ai guasti non-gestibili incide sul *failure rate* dei

guasti gestibili. L'usura accumulata non viene eliminata mediante le azioni preventive; ciò è osservabile nella costante a . Se $a = 1$, i guasti non-gestibili e quelli gestibili sono indipendenti.

Sappiamo che $H_1(t)$ indica la funzione di intensità di guasto cumulata di $r_{1,0}(t)$. Indicando con $N_1(t)$ il numero di guasti gestibili in $[0, t]$, e con $H_2(t)$ il *failure rate* accumulato dei guasti non-gestibili, possiamo scrivere che il numero atteso di guasti gestibili tra la k -esima azione preventiva e la $(k+1)$ -esima è:

$$E[N_1(kT, (k + 1)T)] = H_1(T) \exp((a - 1)H_2(kT)), k = 0, 1, 2, \dots (70)$$

Da questa espressione si ottiene il numero atteso di guasti tra la k -esima e la $(k+1)$ -esima azione preventiva nel seguente modo:

$$\begin{aligned} N_T(k) &= E[N(kT, (k + 1)T)] \\ &= H_1(T) \exp((a - 1)H_2(kT)) + \int_{kT}^{(k+1)T} r_2(u) du, k = 0, 1, 2, \dots (71) \end{aligned}$$

Per un tempo $T > 0$ fissato, e considerando la monotonia di $r_{1,0}$ e di r_2 , la funzione $N_T(k)$ è data dalla (6) ed è non decrescente in k , per $a > 1$. Ciò significa che il miglioramento dovuto alle azioni di manutenzione preventiva decresce quando il numero di azioni preventive aumenta. Ciò giustifica la sostituzione del sistema dopo un certo numero di azioni preventive eseguite. Indicando con $C(T, N)$ il tasso di costo atteso, possiamo scrivere l'equazione del modello descritto nel seguente modo:

$$\begin{aligned} C(T, N) \\ = \frac{C_1(\sum_{k=0}^{N-1} H_1(T) \exp((a - 1)H_2(kT))) + C_2 H_2(NT) + C_r + (N - 1)C_m}{NT} (72) \end{aligned}$$

Dove il numeratore rappresenta il costo atteso tra due sostituzioni successive del sistema (ciclo) ed il denominatore l'intervallo di tempo che intercorre fra le due sostituzioni (lunghezza attesa del ciclo).

Occorre a questo punto ricavare i valori di T e di N che minimizzano la funzione di costo appena descritta. Anzitutto, è necessario analizzare l'ottimizzazione del problema in ogni variabile. Introduciamo i Lemma 1 e 2:

Lemma 1: per ogni valore di $T > 0$ fissato, la funzione $A(T, N)$ data da

$$A(T, N) = C_1 H_1(T) (N g_N(T) - \sum_{k=0}^{N-1} g_k(T)) + C_2 [N H_2((N+1)T) - (N+1) H_2(NT)], \quad (73)$$

$$\text{dove } g_k(T) = \exp((a-1)H_2(kT)), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N$$

è positiva e non decrescente in N.

Lemma 2: quando N è fissato, la funzione B(T, N) è data da:

$$B(T, N) = C_1 \left(\sum_{k=0}^{N-1} g_k(T) \{r_{1,0}(T)T + H_1(T)(a-1)kT r_2(kT) - H_1(T)\} \right) + C_2 (N T r_2(NT) - H_2(NT)), \quad (74)$$

dove g_k è positivo e non decrescente.

Teorema 1: per un tempo $T > 0$ fissato, il valore finito di N che minimizza C(T, N) è ottenuto per $N = N_{opt}^T$, dato da:

$$N_{opt}^T = \min_{N \geq 0} \{A(T, N) > C_r - C_m\} \quad (75)$$

Se esiste un valore di N^* per cui $A(T, N^*) = C_r - C_m$, allora N_{opt}^T non è unico. Inoltre, se $T_1 < T_2$, allora $N_{opt}^{T_1} \geq N_{opt}^{T_2}$.

Teorema 2: quando N è fissato, il valore di T che minimizza C(T, N) viene ottenuto per $T = T_{opt}^N$, dove T_{opt}^N è il valore che verifica $B(T_{opt}^N, N) = C_r + (N-1)C_m$ (76).

Nel problema di ottimizzazione dato, i valori T_{opt} ed N_{opt} devono soddisfare le equazioni (75) e (76). In generale, da una parte non è possibile ottenere una soluzione analitica esplicita per queste equazioni, ed esse devono essere calcolate numericamente. Tuttavia, è possibile ridurre la ricerca dei valori ottimali di N e di T ad un set di valori finiti della variabile N. A tale scopo, possiamo utilizzare il risultato seguente.

Lemma 3: indichiamo con $T^* = \frac{C_m}{C(T_{opt}^1, 1)}$ ed indichiamo con $N_{opt}^{T^*}$ il valore che ottimizza $C(N, T^*)$. Assumendo che $r_{1,0}$ o r_2 siano illimitati, il problema di ottimizzazione di $C(T, N)$ presenta dei valori di soluzioni ottime tali per cui:

$$C(T_{opt}, N_{opt}) = \min_{1 \leq N \leq N_{opt}^{T^*}} \{ \min_{T > 0} C(T, N) \} \quad (77)$$

3.8.3 Conclusione del modello

In un sistema con due modalità di guasto si è studiato il problema di trovare la lunghezza ottima T tra gli intervalli di preventiva ed il numero ottimo di interventi preventivi $N-1$ prima della totale sostituzione del sistema. Le due modalità di guasto sono dipendenti e la loro classificazione dipende dalla riduzione del tasso di guasto dopo ogni azione preventiva eseguita. Per un tempo fissato T , viene ottenuto un numero ottimo finito di interventi preventivi prima della totale sostituzione del sistema. Analogamente, quando N viene fissato, viene ottenuta la lunghezza ottimale tra due successivi interventi preventivi¹³.

3.9 Modello esteso di manutenzione preventiva periodica imperfetta con modalità di guasto di tipo *age-dependent* – Sheu e Chang, 2009

Modello di manutenzione periodica estesa preventiva imperfetta di un sistema soggetto a guasti: questo articolo tratta della manutenzione preventiva imperfetta applicata ad un sistema soggetto a shocks randomici (guasti improvvisi). Quando lo shock incombe, il sistema può reagire secondo due modalità di tipi di guasto: guasto di tipo I (minore) e guasto di tipo II (catastrofico)¹⁴. I guasti di tipo I sono rettificati con riparazione di tipo minimo. Il sistema viene mantenuto in seguito all'accadimento del guasto di secondo tipo o dopo un età pari a T , a seconda di quale evento avvenga per primo. Dopo l' N -esimo intervento preventivo il sistema viene sostituito. Viene proposto un approccio che generalizza i lavori esistenti a riguardo della manutenzione preventiva di tipo imperfetto. Il modello proposto è di

tipo ibrido, nel senso che esso non va solamente a ridurre l'età effettiva del sistema ma considera anche l'alterazione il tasso di guasto del sistema. Prendendo in considerazione i costi variabili di riparazione minima, l'obiettivo consiste nel trovare la politica preventiva ottimale ed una schedulazione delle sostituzioni che minimizzino il costo medio atteso per unità di tempo rispetto ad un orizzonte temporale infinito¹⁴.

3.9.1 Acronimi

- X: time to failure di un sistema
- $r(x)$: funzione di *hazard rate* del sistema
- t: tempo dall'ultimo intervento preventivo
- a: fattore di miglioramento nell'*hazard rate* dopo l'azione preventiva, $a \geq 1$.
- b: fattore di miglioramento nell'età effettiva appena dopo la manutenzione preventiva, $0 \leq b \leq 1$
- y: età effettiva del sistema appena prima della manutenzione preventiva.
- N: numero di schedulazioni della preventiva per li quali il sistema viene sostituito
- T: intervalli di schedulazione fra le preventive
- *: implica un valore ottimo
- $p_i(t)$: probabilità del guasto di tipo II se un sistema in operatività soggetto all'(i-1)-esimo intervento preventivo si guasta al tempo t, $i=1, 2, \dots, N$
- $q_i(t) = 1 - p_i(t)$: probabilità del guasto di tipo I se un sistema in operatività soggetto all'(i-1)-esimo intervento preventivo si guasta al tempo t, $i=1, 2, \dots, N$
- $r_i(t)$: funzione di *hazard rate* al tempo t
- $F_i(t)$: funzione di distribuzione cumulata
- a_i : fattore di miglioramento dell'*hazard rate* dopo l'i-esimo intervento preventivo, $1 = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_{N-1}$
- b_i : fattore di miglioramento dell'età effettiva dopo l'i-esimo intervento preventivo, $0 = b_0 \leq b_1 \leq \dots \leq b_{N-1} \leq 1$

- y_i : età effettiva del sistema appena prima dell' i -esimo intervento preventivo, $i=1, 2, \dots, N$
- $A_i = \prod_{j=0}^{i-1} a_j (i = 1, 2, \dots, N)$, $1 = A_1 \leq A_2 \leq \dots A_N$
- $B_i = \prod_{l=1}^{i-1} \prod_{j=l}^{i-1} b_j (i = 1, 2, \dots, N)$
- c_o costo della manutenzione preventiva programmata
- c_B costo aggiuntivo dovuto alla manutenzione preventiva non pianificata o alla sostituzione
- $c_o + c_B$ costo della manutenzione preventiva non pianificata
- c_R costo della sostituzione pianificata, $c_R > c_o > 0$
- $c_R + c_B$ costo della sostituzione non pianificata
- $g_i(C_i(t), c_{i,k}(t))$ costo della riparazione minima relativa al k -esimo intervento sul sistema soggetto alla $(i-1)$ -esima manutenzione preventiva al tempo t ; funzione positiva non decrescente e continua.
- $C_i(t)$ parte variabile di tipo *age-dependent*
- $c_{i,k}(t)$ parte deterministica che dipende dall'età
- Y_i numero di riparazioni di tipo minimo tra l' $(i-1)$ -esima e l' i -esima azione preventiva (o sostituzione)
- $\bar{F}_{i,p_i}(t)$ survival function, $Sf[Y_i]$
- $E[R]$ s-costo totale atteso nell'intero ciclo di sostituzione.
- $E[Z]$ s-lunghezza attesa del ciclo di sostituzione successivo
- $C(N, T)$ costo atteso totale per unità di tempo
- $h_i(t)$ costo di riparazione minimo atteso del sistema soggetto all' $(i-1)$ -esimo intervento preventivo al tempo t , $i=1, 2, \dots, N$.

3.9.2 Introduzione

Si considera un modello periodico imperfetto in cui avviene riparazione di tipo minimo, manutenzione o sostituzione, secondo il seguente schema:

- 1) Il sistema può incombere in due tipi di guasto: il primo, di tipo I, è un guasto minore; il secondo, di tipo II, è considerato catastrofico e viene rettificato mediante una manutenzione non programmata (o sostituzione se $i=N$). Il

sistema viene sostituito dopo (N-1) interventi preventivi.

- 2) Un sistema soggetto a (i-1) interventi viene mantenuto (o sostituito se i=N) all'istante di accadimento del guasto di tipo II o dopo un tempo T, a seconda di quale evento accada per primo. Un intervento di tipo preventivo (o la sostituzione) eseguito all'istante di accadimento del guasto di tipo II è identificato come intervento *non pianificato* (o sostituzione *non pianificata*), mentre l'intervento (o sostituzione) eseguito all'istante programmato T viene identificato come intervento preventivo *programmato* (o sostituzione preventiva *programmata*).
- 3) Se il guasto del sistema soggetto all'(i-1)-esimo intervento preventivo avviene ad un istante $t < T$, il sistema subisce un intervento *non pianificato* (o una sostituzione *non pianificata*, se $i=N$) (guasto di tipo II) con probabilità $p_i(t)$, oppure subirà un intervento di tipo minimo (guasto di tipo I) con probabilità $q_i(t) = 1 - p_i(t)$. Si assume che $p_i(t)$ sia crescente con i , e t .

Il sistema si degrada nel tempo e col numero di interventi preventivi che vengono su di esso applicati. Dopo ogni manutenzione preventiva il sistema ritorna operativo, ma la sua caratteristica di guasto risulta alterata. Assumiamo che le caratteristiche di guasto vengano alterate nel seguente modo:

- 1) La funzione di *hazard rate* diviene $a_{i-1}r(b_{i-1}y_{i-1})$ appena dopo l'(i-1)-esimo intervento preventivo, mentre è pari a $r(y_{i-1})$ appena prima dell'intervento preventivo. Dopo l'(i-1)-esimo intervento, la funzione di *hazard rate* è espressa con la seguente: $a_{i-1}r(b_{i-1}y_{i-1} + t)$, per $t > 0$.
- 2) Fra l'(i-1)-esimo e l'i-esimo intervento preventivo, la funzione di *hazard rate* è pari a $A_i r(x)$, nell'intervallo $((i-1)T, iT)$. L'età effettiva del sistema diviene pari a $b_{i-1}y_{i-1}$ appena prima dell'(i-1)-esimo intervento preventivo, e poi diviene $y_i = T + b_{i-1}T + \dots + b_{i-1}b_{i-2} \dots b_2b_1T$ immediatamente appena prima dell'i-esimo intervento preventivo; ovvero, l'età effettiva del sistema cambia da un valore $b_{i-1}y_{i-1}$ ad un valore y_i nell'intervallo $((i-1)T, iT)$. Ovviamente, abbiamo che $b_{i-1}y_{i-1} = B_iT$, o $y_i = T + B_iT$.
- 3) L'*hazard rate* $r_i(t)$ dopo l'(i-1)-esimo intervento preventivo diviene pari a $r_i(t) = A_i r(b_{i-1}y_{i-1} + t) = A_i r(B_iT + t)$, $t \in (0, T)$, che è il tempo passato dall'ultimo intervento preventivo.

La funzione di *hazard rate* prima e dopo la politica preventiva, in questo modello ibrido presentato, è rappresentata nella seguente figura¹⁵:

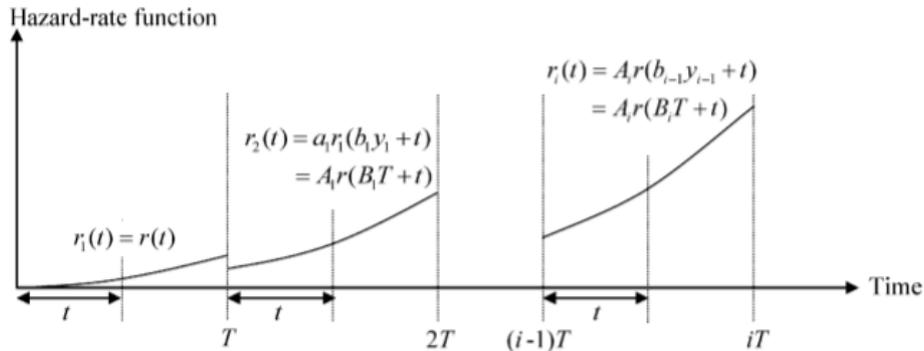


Figura 6 - funzione di hazard rate per il modello ibrido proposto

Il motivo della pianificazione manutentiva di tipo periodico deriva da due fatti principali:

- 1) Il costo della sostituzione non pianificata (unplanned PM) di un sistema guasto è generalmente maggiore del costo della sostituzione programmata di un sistema non guasto;
- 2) Dopo un certo numero di interventi preventivi eseguiti, la continua manutenzione preventiva su di un sistema è spesso equiparabile, a livello di costo, alla sostituzione dello stesso.

Infine, possiamo formulare le seguenti ipotesi:

- 1) Dopo una sostituzione, la procedura viene ripetuta. Le sostituzioni sono eseguite perfettamente, e non incidono sulle caratteristiche del sistema.
- 2) Tutti i guasti sono rilevati e riparati istantaneamente.
- 3) Tutte le sostituzioni e gli interventi di riparazione minima sono eseguiti in un tempo considerato trascurabile.

3.9.3 Modello

Omettendo la procedura di calcolo, con l'obiettivo di ottenere il numero ottimale

N^* e T^* , che insieme minimizzano la funzione di costo $C(N, T)$, avremo che il costo totale per unità di tempo è espresso dalla seguente (78):

$$C(N, T) = \frac{E[R]}{E[Z]} = \frac{(N-1)c_o + c_R + \sum_{i=1}^N c_B F_{i,p_i}(T) + \sum_{i=1}^N V_i(T)}{\sum_{i=1}^N \int_0^T \overline{F_{i,p_i}}(t) dt}$$

Occorre dunque minimizzare $C(N, T)$ rispetto ad (N, T) ; ci avvaliamo delle seguenti assunzioni:

A1) $r_i(t) = A_i r(B_i T + t)$ è continua, e crescente; inoltre tende ad infinito, per t che tende ad infinito.

A2) $r_{i+1}(t) > r_i(t)$ per $t > 0$

Si vedano le disequaglianze $C(N+1, T) \geq C(N, T)$ e $C(N, T) < C(N-1, T)$, se e solo se

$$L(N, T) \geq c_R \text{ e } L(N-1, T) < c_R \quad (79)$$

Dove (80):

$$L(N, T) = \begin{cases} \frac{[c_o + c_B F_{N+1,p_{N+1}}(T) + V_{N+1}(T)] \sum_{i=1}^N \int_0^T \overline{F_{i,p_i}}(t) dt}{\int_0^T \overline{F_{N+1,p_{N+1}}}(t) dt} - \\ [(N-1)c_o + c_R + \sum_{i=1}^N (c_B F_{i,p_i}(T) + V_i(T))], N = 1, 2, 3, \dots, \\ 0, \quad N = 0 \end{cases}$$

Con $V_i(T) = \int_0^T \overline{F_{i,p_i}}(t) h_i(t) q_i(t) r_i(t) dt$ che può essere interpretato come il costo atteso totale della riparazione minima fra l' $(i-1)$ -esimo e l' i -esimo intervento preventivo.

Inoltre,

$$\begin{aligned} L(N, T) - L(N-1, T) &= \left[\frac{c_o + c_B F_{N+1,p_{N+1}}(T) + V_{N+1}(T)}{\int_0^T \overline{F_{N+1,p_{N+1}}}(t) dt} - \frac{c_o + c_B F_{N,p_N}(T) + V_N(T)}{\int_0^T \overline{F_{N,p_N}}(t) dt} \right] \\ &\quad * \sum_{i=1}^N \int_0^T \overline{F_{i,p_i}}(t) dt \quad (81) \end{aligned}$$

È dimostrabile che la soluzione ottima N che minimizza il tasso di costo atteso totale di lungo periodo esiste ed è unica sotto determinate condizioni (si veda Sheu2009).

Infine, si differenzia l'espressione di $C(N, T)$ della (78) rispetto a T e la si pone uguale a 0. È altresì dimostrabile che esiste ed è unica la soluzione ottima per la quale T minimizza la funzione di costo totale $C(N, T)$ sotto determinate condizioni (si veda Sheu2009).

3.9.4 Conclusioni del modello

È stato introdotto un modello generalizzato di manutenzione preventiva periodica di tipo imperfetto con l'approccio ibrido, e analizzato per un sistema con guasto di tipo *age-dependent*. È stata formulata l'espressione di costo totale atteso di lungo periodo il quale incorpora i costi relativi alla riparazione di tipo minimo, alla sostituzione e ai differenti stati di manutenzione preventiva. I risultati di questo modello possono essere estesi a casi di studio futuri considerando il concetto di politica di tipo sequenziale, o di sistema multi-componente. Nel prossimo paragrafo andremo a vedere un modello generalizzato di questo tipo applicato ad una politica manutentiva di tipo sequenziale¹⁵.

3.10 Modello esteso di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con modalità di guasto di tipo *age-dependent* – Sheu e Chang, 2009

Questo articolo riguarda una generalizzazione della politica manutentiva preventiva imperfetta di tipo sequenziale con riparazione minima. Analogamente al modello di Sheu visto sopra, quando avviene un guasto, il sistema incombe in due tipi di guasto: il guasto di tipo I (minore), rettificato con un intervento di tipo minimo; o il guasto di tipo II (catastrofico) che necessita di una manutenzione che non era stata pianificata. In ogni periodo manutentivo, il sistema viene mantenuto in seguito all'incombenza di un guasto di tipo II o dopo un periodo di tempo prestabilito, a

seconda di quale evento accade per primo. All' N -esima manutenzione, il sistema viene sostituito piuttosto che mantenuto. Il modello manutentivo preventivo adottato in questo studio incorpora i fattori di miglioramento all'interno della funzione di *hazard rate*. Considerando i costi di riparazione minima della politica *age-dependent*, lo scopo consiste nel trovare una politica preventiva ottimale ed una schedulazione per le sostituzioni che minimizzino il costo totale per unità di tempo su di un orizzonte temporale infinito¹⁶.

3.10.1 Introduzione

In questo modello si estende in senso generalizzato l'*hazard-rate PM model* di Nakagawa (1988) precedentemente discusso. In particolare, il modello considerato è di tipo sequenziale ed include i fattori di miglioramento alla funzione del tasso di guasto. La caratteristica principale di questo modello ricade nella presa in considerazione sia del costo di riparazione minima tipico della politica *age-dependent* che della tipologia di guasto stocastico che può accadere (tipo I o tipo II). È ragionevole pensare che il costo di riparazione sia dipendente dall'età del sistema piuttosto che costante. Inoltre, supponendo che il guasto del sistema possa essere di tipo minore o catastrofico con probabilità stocastica, la decisione di riparare o mantenere il sistema al guasto dipende dall'ordine di gravità, rispettivamente, del guasto. Nella realtà pratica, quando avviene un guasto all'interno di un periodo della politica preventiva, l'azione manutentiva dovrebbe forse sottostare ad una schedulazione al fine di evitare ulteriori perdite o guasti. Nella prossima sezione viene proposto il modello e le sue formulazioni. Viene ottenuto il costo atteso totale per unità di tempo su di un orizzonte temporale infinito e viene discussa la politica manutentiva di tipo (N, T) che minimizza tale costo.

Nella manutenzione preventiva, come sappiamo, la sostituzione avviene quando il numero di interventi manutentivi raggiunge un certo valore N . si definisce il ciclo di sostituzione come l'intervallo di tempo che intercorre tra l'installazione del sistema e la prima sostituzione, o come l'intervallo di tempo fra due sostituzioni successive. Il ciclo di sostituzione è considerato essere un processo rigenerativo. Valgono le notazioni riportate nel modello periodico soprastante.

Si considera un modello di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta in cui la riparazione minima, la manutenzione o la sostituzione avvengono secondo il seguente schema:

- 1) Il sistema può incombere in due tipi di guasto: il primo, di tipo I, è un guasto minore; il secondo, di tipo II, è considerato catastrofico e viene rettificato mediante una manutenzione non programmata (o sostituzione se $i=N$). Il sistema viene sostituito all' N -esimo intervento preventivo.
- 2) Un sistema soggetto a $(i-1)$ interventi viene mantenuto (o sostituito se $i=N$) all'istante di accadimento del guasto di tipo II o dopo un tempo T_i (T_i è il tempo dall'ultima manutenzione o sostituzione), a seconda di quale evento accada per primo. Un intervento di tipo preventivo (o la sostituzione) eseguito all'istante di accadimento del guasto di tipo II è identificato come intervento *non pianificato* (o sostituzione *non pianificata*), mentre l'intervento (o sostituzione) eseguito all'istante programmato T_i viene identificato come intervento preventivo *programmato* (o sostituzione preventiva *programmata*).
- 3) Se il guasto del sistema soggetto all' $(i-1)$ -esimo intervento preventivo avviene ad un istante $t < T_i$, il sistema subisce un intervento *non pianificato* (o una sostituzione *non pianificata*, se $i=N$) (guasto di tipo II) con probabilità $p_i(t)$, oppure subirà un intervento di tipo minimo (guasto di tipo I) con probabilità $q_i(t) = 1 - p_i(t)$.

Il sistema si degrada col tempo tanto quanto si degrada col numero di interventi manutentivi subiti. Dopo ogni azione preventiva, il sistema torna operativo, ma il suo *failure rate* è ovviamente alterato come segue:

- 1) La funzione di *hazard rate* diviene $a_{i-1}r(t)$ appena dopo l' $(i-1)$ esimo intervento preventivo, mentre era pari a $r_{i-1}(t)$ appena prima; a_{i-1} è il fattore di miglioramento nella funzione di *hazard rate* dopo l' $(i-1)$ -esima azione preventiva;
- 2) Fra l' $(i-1)$ -esimo e l' i -esimo intervento preventivo, la funzione di *hazard rate* è pari a $r_i(t) = A_i r(t)$, dove $A_i = \prod_{j=0}^{i-1} a_j$ e $t \in (0, T_i)$ è il tempo trascorso dall'ultima manutenzione.

La motivazione per la politica preventiva di tipo sequenziale deriva dai seguenti

due fatti:

1. Il costo della sostituzione non pianificata (o manutenzione non programmata) di un sistema guasto è solitamente maggiore del costo di sostituzione pianificata di un sistema non guasto.
2. Dopo un certo numero di manutenzioni, continuare a performare la manutenzione su di un sistema è spesso comparabile, a livello di costo, alla sua sostituzione.

Infine, possiamo fare le seguenti tre ipotesi:

1. Dopo la sostituzione la procedura viene ripetuta. Le sostituzioni sono eseguite perfettamente e non alterano le caratteristiche del sistema.
2. Tutti i guasti sono istantaneamente rilevati e riparati.
3. Tutte le sostituzioni, manutenzioni ed interventi di riparazione minima avvengono in tempo trascurabile.

3.10.2 Modello

Se non ci sono azioni manutentive pianificate, allora la *survival function* dei tempi Y_i fra l'(i-1)-esima e l'i-esima azione non pianificata è data dalla seguente:

$$\bar{F}_{i,p_i}(t) = \exp \left\{ - \int_0^t p_i r_i(x) dx \right\} = \exp \left\{ - \int_0^t p_i A_i r(x) dx \right\} \quad (82)$$

Il costo atteso per unità di tempo può essere espresso con la seguente:

$$C[N, \{T_i\}] = \frac{E[R]}{E[Z]}$$

La lunghezza attesa del ciclo può essere così formulata:

$$E[Z] = E \left[\sum_{i=1}^N Y_i^* \right] = \sum_{i=1}^N \int_0^{T_i} \bar{F}_{i,p_i}(t) dt \quad (83)$$

Mentre $E[R]$ si ottiene essere pari a (84):

$$E[R] = (N - 1)c_o + c_R + \sum_{i=1}^N c_B F_{i,p_i}(T_i) + \sum_{i=1}^N \int_0^{T_i} \bar{F}_{i,p_i}(t) h_i(t) q_i A_i r(t) dt$$

Dove $h_i(t) = E[C_i(t)]$, per $i=1, 2, \dots, N$

Questa espressione è stata ricavata considerando un processo di Poisson non-omogeneo con intensità $r_i(t)$. (Si veda Sheu2012).

È possibile dunque ottenere il numero ottimale N^* dei cicli della politica preventiva considerata e gli intervalli ottimali $\{T_i^*(N)\}$ che minimizzano $C[N, \{T_i\}]$, il costo totale atteso per unità di tempo (85):

$$C[N, \{T_i\}] = \frac{(N - 1)c_o + c_r + \sum_{i=1}^N c_B F_{i,p_i}(T_i) + \sum_{i=1}^N \int_0^{T_i} \bar{F}_{i,p_i}(t) h_i(t) q_i A_i r(t) dt}{\sum_{i=1}^N \int_0^{T_i} \bar{F}_{i,p_i}(t) dt}$$

Occorre dunque minimizzare l'espressione ottenuta rispetto ad $(N, \{T_i\})$ secondo le seguenti assunzioni:

A1. $r(t)$ è continua, differenziabile, crescente, tendente ad infinito per t che tende ad infinito, e $r(0) = 0$.

A2. $c_B p_i A_i r(t) + h_i(t) q_i A_i r(t)$ è continua, differenziabile, crescente con i , e crescente a infinito per t che tende ad infinito.

Per ogni $N \geq 1$, è dimostrabile che esiste ed è unica una soluzione ottima di $\{T_i^*(N)\}$ per la politica preventiva in considerazione. Differenziando l'espressione di $C[N, \{T_i\}]$ rispetto a T_i ed eguagliandola a 0, si ottiene una condizione per il minimo costo atteso totale per unità di tempo (86):

$$c_B p_i r(T_i^*) + h_i(T_i^*) q_i A_i r(T_i^*) = c_B p_1 r(T_1^*) + h_1(T_1^*) q_1 r(T_1^*), \text{ per } i = 2, 3, \dots, N$$

e (87):

$$c_B p_1 r(T_1^*) + h_1(T_1^*) q_1 r(T_1^*) = C[N, \{T_i^*\}]$$

Dalle assunzioni A1 e A2 abbiamo il seguente risultato. Per ogni $N \geq 1$ e per un T_1^* ($0 < T_1^* < \infty$) fissato, la soluzione alla (86) rispetto a T_i^* ($0 < T_i^* < T_1^*$, $i = 2, 3, \dots, N$) esiste ed è finita, unica e decrescente con i .

Sostituendo tale soluzione all'equazione (86) nella (87) si ottiene:

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \int_0^{T_i^*} [c_B p_1 r(T_1^*) + h_1(T_1^*) q_1 r(T_1^*) - c_B p_i A_i r(t) - h_i(t) q_i A_i r(t)] \bar{F}_{i,p_i}(t) dt \right\} = (N-1)c_o + c_R \quad (88)$$

dove ogni T_i^* ($i = 1, 2, 3, \dots, N$) è una funzione di T_1^* .

Se le assunzioni A1 e A2 sono soddisfatte, allora esiste ed è unica la soluzione all'equazione (88) rispetto a T_1^* ($T_1^* > 0$).

$T_1^*(N)$ è l'età alla quale un nuovo sistema è soggetto alla manutenzione preventiva *pianificata*. Si denota il costo atteso totale per unità dei tempo, per un dato numero N di cicli, con $C[N, T_1^*(N)]$.

N.B. $c_B A_i r(t)$ e $h_i(t) A_i r(t)$ possono essere considerati come le funzioni di costo atteso marginali della politica preventiva considerata e della politica di riparazione minima all' i -esimo periodo manutentivo rispettivamente. Pertanto, $c_B p_i A_i r(t) + h_i(t) q_i A_i r(t)$ può essere interpretata come il costo atteso marginale della politica preventiva proposta all'istante di tempo t . Poiché il *failure rate* $r_i(t) = A_i r(t)$ è crescente sia con t che con i , è ragionevole che il costo marginale sia aumentato una volta che il numero di manutenzioni o il tempo operativo sono incrementati. La schedulazione ottimale della politica preventiva presentata $\{T_i^*(N)\}$, che porta alla minimizzazione di $C[N, \{T_i\}]$, deve soddisfare quindi la: $c_B p_i A_i r(T_i^*) + h_i(T_i^*) q_i A_i r(T_i^*) = C[N, \{T_i^*(N)\}]$.

3.10.3 Conclusioni del modello

È stato proposto un modello sequenziale generalizzato di manutenzione imperfetta che tiene in considerazione il fattore di miglioramento dell'*hazard rate*. Si è ottenuto il costo atteso di lungo periodo includendo il costo di riparazione minima, sostituzione, e differenti stati manutentivi. Sono stati ottenuti il numero ottimale di interventi preventivi N^* e gli intervalli sequenziali $\{T_i^*\}$ che minimizzano la funzione di costo ottenuta. I risultati possono essere estesi a studi futuri che possono includere la trattazione dei concetti di riparazione imperfetta o di sistema multi-

componente.

3.11 Modelli di manutenzione preventiva imperfetta di tipo age-based con age reduction - El Ferik e Ben-Daya, 2005/2008

L'effetto dell'età sul tasso di deterioramento della maggior parte dei sistemi riparabili non può essere ignorato. La manutenzione preventiva viene eseguita con l'ottica di rinnovare pienamente la performance di questi sistemi. Tuttavia, nella maggior parte dei casi reali, le attività di *preventive maintenance* sono in grado di restaurare la performance dei componenti solamente parzialmente.

Nel modello seguente si cerca di colmare il gap fra gli studi teorici ed i casi pratici, realizzando un modello realistico basato sugli effetti della PM sulle caratteristiche di rottura dei sistemi manutenibili, con lo scopo di ottenere un modello di tipo *age-based for imperfect PM*. Il modello proposto incorpora il fattore di adattamento relativo all'età effettiva del sistema, il quale subisce manutenzione preventiva al guasto oppure dopo un intervallo di tempo programmato anticipatamente, a seconda di quale evento capiti per primo. Dopo un certo numero di manutenzioni di tipo preventivo, il sistema viene sostituito. Il problema volge alla determinazione sia del numero ottimale di interventi preventivi sia del numero ottimale di schedulazioni di tipo preventivo che minimizzino il costo atteso di lungo periodo. Viene descritto quindi un modello analitico relativo all'esistenza e all'unicità delle soluzioni ottime da adottare

3. 11.1 Introduzione

Nell'industria attuale, le aziende sono costrette ad ottimizzare la propria gestione delle risorse e a mantenere o aumentare il proprio vantaggio competitivo. Molte industrie stanno investigando su nuove tecnologie software al fine di aumentare le proprie capacità diagnostiche e di migliorare attraverso la schedulazione programmata le proprie attività manutentive. L'effetto dell'età sul tasso di deterioramento della maggior parte dei sistemi riparabili non può essere ignorato.

Come abbiamo già accennato, le attività di manutenzione preventiva che vengono chiamate di tipo *imperfect* riportano il sistema mantenuto ad uno stato intermedio fra quello “as good as new” e quello “as bad as old”.

Nel 1979, Malik introdusse il concetto di età virtuale, il quale dice sostanzialmente che le attività di manutenzione preventiva aiutano i sistemi a tornare più giovani di quanto lo fossero prima dell'azione manutentiva a certi istanti di tempo specifici. Nguyen e Murthy, come abbiamo visto, nel 1981 esposero il loro modello noto come “*Optimal PM policies for repairable systems*”. Nel modello di seguito, si assume che dopo ogni riparazione, l'età del sistema viene resettata a 0, il che implica che la vita trascorsa dello stesso è stata recuperata. Tuttavia, gli autori di questo modello (El Ferik e Ben-Daya) assumono che la *life distribution* del sistema venga alterata in quanto il tasso di guasto aumenta in proporzione al numero di interventi che il sistema stesso subisce. In particolare, vengono considerate due politiche di tipo preventivo così definite:

- Policy I: il sistema subisce interventi di manutenzione preventiva ad intervalli di tempo predeterminati o al guasto, a seconda di quale evento avvenga per primo¹⁷; l'azione preventiva è di tipo *age-based*. Il sistema è sottoposto all'*i*th intervento preventivo al guasto o all'età T_i , con T_i pari al numero di ore dall'ultima sostituzione o intervento, a seconda di quale evento avvenga per primo. Dopo $N-1$ interventi preventivi il sistema viene sostituito. Se incombe un guasto allora ci sarà un costo addizionale da considerare¹⁸.
- Policy II: la manutenzione preventiva viene sempre eseguita dopo un certo intervallo di tempo predeterminato, e, in caso di guasto, il sistema viene riparato con un'operazione di tipo *minimal*¹⁷.

In entrambe le politiche, il sistema viene sostituito dopo un certo numero di interventi preventivi, considerato come una variabile decisionale. Queste due politiche possono essere viste come, al pari di quelle di Nguyen e Murthy, delle generalizzazioni delle politiche di *block* (a intervalli costanti) ed *age-based replacement* teorizzate da Barlow e Proschan (1965). Successivamente, Nakagawa (1988), presentò due modelli di manutenzione imperfetta per la Politica II (come sopra descritto). Nel primo modello Nakagawa assume che, mentre l'età del sistema

viene azzerata, il tasso di guasto dopo k interventi preventivi diviene pari a $a_k h(t)$; $1 = a_0 < a_1 < \dots < a_{N-1}$. Nel secondo modello, l'età del sistema dopo k interventi manutentivi preventivi si riduce a $b_k t$; $0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{N-1} < 1$.

Questo tipo di modelli PM relativi ai sistemi riparabili sono stati applicati diverse volte a sistemi complessi come generatori di propulsione integrati per aerei, motori di autobus e turbine a gas.

I modelli per la politica I, in cui la manutenzione preventiva è di tipo *age-based*, non hanno ricevuto molta attenzione nella letteratura scientifica. In questo paragrafo si vuole colmare questo gap e cercare di definire un modello di manutenzione preventiva relativo a questa politica, parallelamente a quanto Nakagawa propose nel 1988 per la politica di tipo II.

El Ferik e Ben-Daya sostengono che la politica di tipo *age-based* è più convincente rispetto a quella ad intervalli costanti in quanto, sotto quest'ultima politica, la manutenzione preventiva può essere bene eseguita solo dopo una riparazione di tipo minimo, il che comporta dispersione di tempo e risorse. Inoltre, la politica di tipo *age-based* prevede interventi preventivi al guasto che possono essere visti anche come interventi di tipo opportunistico. La politica che andiamo a delineare ora viene rischedulata dopo che l'azione manutentiva viene eseguita.

Andiamo quindi a vedere un metodo sequenziale di manutenzione preventiva imperfetta in cui la azione preventiva è eseguita dopo un certo intervallo di tempo programmato o al guasto, a seconda di quale evento avvenga per primo. Per modellare l'effetto delle azioni di manutenzione preventiva sulle caratteristiche di rottura del sistema, si assume che dopo ogni PM l'età effettiva del sistema si riduce di un certo fattore. Inoltre, la riduzione di età è decrescente col numero di interventi preventivi. Ciò è in linea con le osservazioni pratiche sui casi sperimentali. Poiché un sistema invecchia, l'efficacia delle azioni di manutenzione preventiva per rinnovarlo diminuisce, ed eventualmente il sistema necessita di essere sostituito dopo un certo numero di interventi, il che rappresenta una variabile decisionale del problema. Verrà ottenuto il costo atteso totale per unità di tempo ed un modello analitico di risoluzione. In particolare, l'autore individua i risultati relativamente all'esistenza e unicità delle soluzioni ottime per il modello di costo sviluppato.

Vediamo dunque ora il modello analitico proposto.

3.11.2 Modello Age-based

Si ricorda che, sotto una politica di tipo *age-based*, le attività di manutenzione di tipo preventivo sono da intendersi a istanti di tempo programmati o al guasto, a seconda di quale evento accada per primo. In caso di guasto, c'è un costo aggiuntivo di riparazione da sostenere. Dopo N interventi preventivi, il sistema viene sostituito da uno nuovo ed il ciclo ricomincia. Il problema è determinare il numero di interventi preventivi e la lunghezza di ogni intervallo in modo tale che il costo totale atteso per unità di tempo sia minimo. L'azione manutentiva preventiva è di tipo imperfetto, quindi, il sistema dopo ogni intervento non viene riportato nella condizione "as good as new", ma anzi, l'età effettiva del sistema si riduce dopo ogni intervento. Tuttavia, tale riduzione è decrescente col numero di interventi manutentivi eseguiti. Pertanto, dopo un certo numero di interventi preventivi, è comunque necessaria una sostituzione del sistema.

Prima di sviluppare il modello di costo, riportiamo le variabili chiave implicate e le loro definizioni:

- $f(t)$: funzione di densità di probabilità o del tempo di guasto. t rappresenta l'età effettiva del sistema;
- $F(t)$: funzione di distribuzione; $\frac{dF}{dt} = f(t)$
- $R(t)$: funzione di affidabilità, $R(t) = \bar{F}(t) = 1 - F(t)$
- $\lambda(t)$: *hazard rate* $= \frac{f(t)}{R(t)}$
- y_k : età effettiva del sistema appena prima del k -esimo intervento preventivo, $k=1, 2, \dots, N$;
- Y_k : variabile generica che rappresenta l'età del sistema appena prima del k -esimo intervento preventivo, $k=1, 2, \dots, N$;
- x_k : intervalli di manutenzione preventiva programmata/schedulata, $k=1, 2, \dots, N$;
- X_k : variabile generica che rappresenta la lunghezza del k -esimo intervallo

preventivo, $Y_k - b_{k-1}y_{k-1}$;

- N : numero di intervalli di tipo preventivo;
- b_k : fattore di aggiustamento per l'età effettiva a causa del k -esimo intervento preventivo, $0 = b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{N-1} < 1$;
- C_f : extracosto da sostenere nell'ipotesi di riparazione del guasto;
- C_p : costo dell'azione preventiva;
- C_r : costo di sostituzione;
- $E[\cdot]$: valore atteso;
- $EC[N, \{y_i\}]$: costo atteso della politica preventiva per ciclo operativo del sistema;
- $L[N, \{y_i\}]$: lunghezza attesa del ciclo;
- $UEC[N, \{y_i\}]$: costo totale atteso per unità di tempo.

Ipotesi:

1. L'orizzonte temporale è considerato infinito;
2. Il tempo di manutenzione preventiva, di riparazione di tipo minimo e di sostituzione sono considerati trascurabili;
3. Il sistema, all'inizio del ciclo, ha un'età effettiva nulla;
4. Il sistema viene mantenuto al guasto o all'età y_k a seconda di quale evento accada prima;
5. Dopo N interventi di tipo preventivo il sistema viene sostituito e torna alla condizione "as good as new", iniziando quindi un nuovo ciclo operativo;
6. Dopo il k -esimo intervento preventivo, l'età effettiva del sistema è data da $b_k y_k$, col valore di y_k appena prima dell'intervento preventivo. $0 = b_0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_{N-1} < 1$.
7. La funzione densità di probabilità $f(t)$ rimane invariata dopo ciascun intervento preventivo.

Definiamo alcune variabili chiave sopra menzionate:

- La lunghezza effettiva del k -esimo intervallo è data dalla variabile generica (89):

$$X_k = Y_k - b_{k-1}y_{k-1}$$

- La probabilità che il sistema non fallisca all'età y_k è data da:

$$\begin{aligned} Prob[Y_k \geq y_k] &= Prob[Y_k \geq y_k | Y_k \geq b_{k-1}y_{k-1}] Prob[Y_k \\ &\geq b_{k-1}y_{k-1}] \quad (90) \end{aligned}$$

$$Prob[Y_k \geq y_k | Y_k \geq b_{k-1}y_{k-1}] = \frac{Prob[Y_k \geq y_k, Y_k \geq b_{k-1}y_{k-1}]}{Prob[Y_k \geq b_{k-1}y_{k-1}]} \quad (91)$$

$$\exp\left(-\int_{b_{k-1}y_{k-1}}^{y_k} \lambda(\tau) d\tau\right) \quad (92)$$

$$\equiv R^c(y_k) \quad (93)$$

Per ottenere l'espressione della lunghezza del ciclo attesa, necessitiamo prima del seguente *lemma*:

Lemma 1

Sia X_k variabile generica che rappresenta la lunghezza del k -esimo intervallo preventivo e sia $y_k = x_k + b_{k-1}y_{k-1}$ l'età effettiva sotto una specifica realizzazione di X_k ,

1. $E[X_k] = \int_{b_{k-1}y_{k-1}}^{y_k} R(t) dt.$
2. Il valore atteso "condizionale" (the conditional expectation) è dato da:

$$E[X_k | Y_k > b_{k-1}y_{k-1}] = \int_{b_{k-1}y_{k-1}}^{y_k} R^c(t) dt$$

dove $R^c(t)$ è dato dalla (93).

La lunghezza attesa del ciclo è pari a:

$$L[N, \{y_i\}] = \sum_{i=1}^N E[X_i] \quad (94)$$

Utilizzando il Lemma 1, possiamo scrivere:

$$L[N, \{y_i\}] = \sum_{i=1}^N \int_{b_{i-1}y_{i-1}}^{y_i} R(t) dt \quad (95)$$

Di seguito, deriviamo l'espressione del costo totale atteso per ciclo. Indichiamo con

EC_k il costo totale atteso sostenuto durante il k -esimo intervallo manutentivo. Il costo atteso totale per ciclo sarà allora dato dalla seguente (96):

$$EC[N, \{y_k\}] = \sum_{i=k}^N EC_k$$

Dopo $(k - 1)$ interventi di tipo preventivo, con $k < N$, e sotto la politica di *age-replacement*, in cui, ribadiamo, il sistema viene mantenuto al guasto o all'età y_k a seconda di quale evento avvenga prima, il costo totale atteso nell'intervallo k -esimo è dato da:

- $C_p + C_f$, se il sistema si guasta entro l'intervallo $[b_{k-1}y_{k-1}, y_k]$
- C_p , se il sistema non incontra alcun guasto fino all'età effettiva $y_k, k = 1, 2, \dots, N - 1$

Ciò può essere espresso come segue:

$$EC_k = C_p + C_f \text{Prob}[b_{k-1}y_{k-1} < Y_k \leq y_k], \text{ per } k = 1, 2, \dots, N - 1 \quad (97)$$

Per $k = N$, il sistema viene sostituito all'istante di tempo di manutenzione preventiva programmata, o al guasto, in base a quale evento accade per primo. Pertanto (98):

$$EC_N = \begin{cases} C_R + C_f \\ C_R \end{cases}$$

Il primo caso è da considerarsi quando il sistema si guasta entro l'intervallo $[b_{N-1}y_{N-1}, y_N]$, mentre il secondo se il sistema non incontra alcun tipo di guasto fino al raggiungimento dell'età effettiva y_N .

Quindi,

$$EC_N = C_R + C_f \text{Prob}[Y_N \leq y_N, Y_N > b_{N-1}y_{N-1}] \quad (99)$$

Mediante la (96), il costo totale per ciclo di sostituzione è dato da (100):

$$EC[N, \{y_k\}] = (N - 1)C_p + C_R + C_f \sum_{k=1}^N (R(b_{k-1}y_{k-1}) - R(y_k))$$

Attraverso le espressioni descritte è possibile stimare il costo atteso totale per unità

di tempo nel seguente modo (101):

$$\begin{aligned}
 UEC[N, \{y_k\}] &= \frac{EC[N, \{y_k\}]}{L[N, \{y_k\}]} \\
 &= \frac{(N-1)C_p + C_R + C_f \sum_{k=1}^N (R(b_{k-1}y_{k-1}) - R(y_k))}{\sum_{k=1}^N \int_{b_{k-1}y_{k-1}}^{y_k} R(y) dy}
 \end{aligned}$$

Di seguito andremo ad analizzare il costo medio per ciclo e ad esprimere le condizioni necessarie a determinare la schedulazione della politica preventiva.

3.11.3 Modello

Il problema volge al trovare la schedulazione ottimale della preventiva, ovvero, i valori ottimali di N e $\{y_i\}; i = 1, 2, \dots, N$, in modo tale che la funzione di costo attesa $UEC[N, \{y_i\}]$ sia minimizzata. Per un fissato valore di N , si derivano questi tre risultati principali:

1. Le condizioni sotto le quali le soluzioni esistono: teorema 1.
2. Le condizioni sotto le quali i valori di y_k esistono e sono unici: teorema 2.
3. Le condizioni sotto le quali il valore di y_N esiste ed è unico: teorema 3.

Questi tre risultati sono utili allo sviluppo di una procedura efficiente per risolvere il modello di politica preventiva proposto. Differenziando le equazioni (95) e (100), si ottengono le condizioni di ottimo del primo ordine (102):

$$\frac{\partial EC[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} = \begin{cases} C_B [h(y_k)R(y_k) - b_k h(b_k y_k)R(b_k y_k)] & \text{for } k = 1, 2, \dots, N-1 \\ C_B [h(y_N)R(y_N)] & \text{for } k = N \end{cases}$$

$$\frac{\partial L[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} = \begin{cases} R(y_k) - b_k R(b_k y_k) & \text{for } k = 1, 2, \dots, N-1 \\ R(y_N) & \text{for } k = N \end{cases} \quad (103)$$

Differenziando il costo atteso totale per unità di tempo rispetto ad y_k ed eguagliando a 0, si ottiene:

$$\frac{\partial UEC[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} = \frac{\frac{\partial EC[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} L[N, \{y_i\}] - EC[N, \{y_i\}] \frac{\partial L[N, \{y_i\}]}{\partial y_k}}{L[N, \{y_i\}]^2} = 0 \quad (104)$$

Che è equivalente a:

$$\frac{\partial EC[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} L[N, \{y_i\}] - EC[N, \{y_i\}] \frac{\partial L[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} = 0 \quad (105)$$

$$\frac{\partial EC[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} = UEC[N, \{y_i\}] \frac{\partial L[N, \{y_i\}]}{\partial y_k} \quad (106)$$

Le condizioni ottimali possono essere riordinate per $k=1, 2, \dots, N-1$, come segue:

$$\begin{aligned} & [h(y_k)R(y_k) - b_k h(b_k y_k)R(b_k y_k)] \\ & = \frac{UEC[N, \{y_i\}]}{C_B} [R(y_k) - b_k R(b_k y_k)] \end{aligned} \quad (107)$$

e per $k = N$:

$$h(y_N) = \frac{UEC[N, \{y_i\}]}{C_B} \quad (108)$$

per $y_k < \infty$, definiamo:

$$\lambda_k(y_k) = \frac{R(b_k y_k)}{R(y_k)} \quad (109)$$

Sostituendo la (109) nella (107) e nella (108), si ottiene:

$$[h(y_k) - \lambda_k(y_k) b_k h(b_k y_k)] = h(y_N) [1 - \lambda_k(y_k) b_k] \quad (110)$$

Quando è ≥ 1 , il rapporto $\lambda(y_k)$ dato dalla (109) può essere visto come il gain in affidabilità acquisito grazie all'esecuzione della politica preventiva. D'altro canto, assumeremo nel resto della trattazione che il termine $[1 - \lambda(y_k) b_k]$ nell'equazione (110) è diverso da zero.

Pertanto, nel caso in cui $[1 - \lambda(y_k) b_k]$ sia uguale a 0, la condizione di ottimo (110) si riduce a:

$$h(y_k) - h(b_k y_k) = 0 \quad (111)$$

che rappresenta il caso in cui l'azione preventiva non aggiunge alcun miglioramento alla condizione del sistema e, pertanto il sistema è nello stato "as bad as old". La seguente proposizione caratterizza la variazione del rapporto $\lambda(y_k)$ in funzione di y_k .

Proposizione 1

Sotto l'assunzione per cui $1 - b_k > 0$, se $h(y)$ è differenziabile e $h'(y)$ è strettamente crescente, allora $\lambda_k(y_k)$ è una funzione strettamente crescente rispetto ad $y_k > 0$. Inoltre, $\lambda_k(y_k) > 1$.

Se $1 - b_k \lambda_k(y_k) \neq 0$, utilizzando la (108), la condizione di ottimo (110) può essere scritta come:

$$\frac{h(y_k) - \lambda_k(y_k) b_k h(b_k y_k)}{[1 - \lambda(y_k) b_k]} = (h(y_N)) \quad (112)$$

Il teorema seguente stabilisce l'esistenza della soluzione all'equazione (112).

Teorema 1: Per un valore di y_N fissato, finito e positivo, esiste la soluzione all'equazione di ottimo (112) rispetto ad $y_k, k = 1, 2, \dots, N - 1$.

Questo teorema stabilisce l'esistenza della soluzione per l'equazione di ottimo (di ricerca dell'ottimo) (112). Immaginiamo che y_k sia una possibile soluzione a questa equazione; il seguente teorema asserisce l'intervallo entro il quale essa è unica.

Teorema 2: Si assume che y_k sia una soluzione candidata dell'equazione di ottimo (23). Se $[1 - \lambda_k(y_k) b_k] > 0$ per $k=1, 2, \dots, N-1$, allora y_k è la unica soluzione nell'intervallo $[0, \delta]$, dove δ è tale per cui:

$$H(\delta) - b_k H(b_k \delta) = \ln \left(\frac{1}{a_k b_k} \right) \quad (113)$$

Di seguito, si definisce un teorema che fornisce le condizioni sotto le quali y_N esiste ed è unica. Attraverso l'equazione (108), è possibile scrivere:

$$h(y_N) \sum_{k=1}^N \int_{b_{k-1} y_{k-1}}^{y_k} R(y) dy - \sum_{k=1}^N (R[b_{k-1} y_{k-1}] - R[u_k]) = \frac{(N-1)C_p + C_R}{C_B} \quad (114)$$

Poiché $y_k, k = 1, 2, \dots, N - 1$ è determinato come funzione di y_N , l'equazione (114) è funzione solamente di y_N . L'esistenza della soluzione per quest'ultima equazione è garantita dal terzo ed ultimo teorema:

Teorema 3: Se $h(t)$ è una funzione differenziabile con $h(0) = 0$ e $h'(t)$ è strettamente crescente, allora esiste ed è unica la soluzione all'equazione (114) rispetto ad y_N .

3.11.4 Procedura risolutiva

Le equazioni (107) e (110) sono molto complesse e non possono essere risolte in modo analitico facilmente. In particolare, l'equazione (112) include il termine non lineare $\lambda_k(y_k)$. È pertanto richiesta una procedura numerica per risolvere queste equazioni al fine di ottenere la soluzione ottimale del problema, ovvero, i valori di y_k per $k = 1, 2, \dots, N^*$, con N^* pari al numero ottimo di interventi della politica preventiva studiata. Nel caso generale, le soluzioni ottime y_k dell'equazione (112) per un particolare valore di y_N possono essere non necessariamente uniche. Un algoritmo simile al *bisection model* potrebbe essere un buon strumento per individuare i diversi intervalli in cui possibili soluzioni all'equazione (112) possono esistere per un valore fissato di y_N . Il primo intervallo viene dato dal Teorema 2 in cui $y_k < \delta$. Una volta selezionato l'intervallo giusto, è possibile utilizzare un algoritmo migliore (*the secant method*) per determinare la soluzione all'interno di quell'intervallo. La soluzione ottima $y_k, k = 1, 2, \dots, N$, è quella che dà il costo minimo. Per ogni intervallo candidato generato, proponiamo la seguente procedura risolutiva:

Algoritmo

Inizializzazione: sia $N = 1$ e sia y_N^0 un valore arbitrario iniziale di y_N . Sia ε un criterio di terminazione.

- **Step 1.** Trovare i valori ottimi $y_i, i = 1, 2, \dots, N - 1$, soluzioni dell'equazione () attraverso il metodo della secante.
- **Step 2.** Utilizzando i valori y_i ottenuti allo step 1, trovare un nuovo valore di y_N, y'_N , dell'equazione ().
- **Step 3.** Se $|y'_N - y_N| > \varepsilon$, andare allo step successivo.
- **Step 4.** Ricavare $UEC[N, \{y_i\}]$ per la soluzione corrente.
- **Step 5.** Se $UEC[N, \{y_i\}] > UEC[N - 1, \{y_i\}]$ andare allo step successivo;

altrimenti, tornare allo step 1 con $y_N = y'_N$ ed $N=N+1$.

- **Step 6.** La soluzione ottima è $N^* = N - 1$, con i valori ottimi $y_i, i = 1, 2, \dots, N$ corrispondente ad N^* .

3.11.5 Conclusione del modello

Abbiamo visto che nella letteratura scientifica sono stati sviluppati diversi modelli di manutenzione preventiva di tipo sequenziale ma ben pochi di questi sono applicabili alle politiche di tipo *age-based*. Quest'ultimo modello, parallelo a quello di Nakagawa (1988), permette l'individuazione delle soluzioni ottime e ne verifica l'esistenza e unicità. Gli autori El-Ferik e Ben-Daya hanno poi approfondito altri modelli che trattano l'effetto della politica preventiva imperfetta relativamente a contesti di tipo *age-based*. Il modello sopra proposto fornisce una politica preventiva applicata ai sistemi riparabili più realistica dei successivi modelli sviluppati, e apre la strada all'ottimizzazione delle politiche preventive programmata/schedulate a future applicazioni pratiche¹⁹.

3.12 Modelli di manutenzione preventiva a processo geometrico – Lam, 2006

3.12.1 Introduzione

Viene di seguito presentato un modello manutentivo preventivo a processo geometrico. Sappiamo che una politica manutentiva (T, N) consiste nella riparazione del sistema quando questo incombe nel guasto o ad intervalli temporali scansionati da T, a seconda di quale evento accade per primo. Verrà determinato il costo medio atteso di lungo periodo.

Questo modello, insieme agli altri modelli manutentivi più recenti, volge un maggiore sguardo al lato applicativo della manutenzione; pertanto, quando un componente si guasta, il suo stato di salute dopo la riparazione non è considerato *as good as new* ma presenta un *failure rate* ed un'età effettiva pari all'istante precedente al guasto. A causa dell'età, dell'utilizzazione e dell'influenza

ambientale, i sistemi industriali si deteriorano. Conseguentemente, i periodi di funzionamento successivi ad ogni riparazione diminuiscono, mentre gli intervalli di tempo relativi alle riparazioni conseguenti ai guasti aumentano via via. Diamo di seguito alcune definizioni:

Definizione 1: siano date due variabili generiche X e Y . Se $P(X > t) \geq P(Y > t)$ per tutti i valori reali di t , allora X è detta stocasticamente maggiore di Y , o Y è stocasticamente minore di X .

Definizione 2: sia dato un processo stocastico $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$, se per ogni valore di n , Z_n è stocasticamente minore (maggiore) di Z_{n+1} , allora $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ è detto processo stocasticamente crescente (decrescente).

Definizione 3: Un processo stocastico $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ è detto processo geometrico (GP) se esiste un valore reale $a > 0$ tale per cui $\{a^{n-1}Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ costituisce un processo di rinnovamento. Il numero reale a è detto rapporto del processo geometrico. Ovviamente, dato un processo geometrico $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ con rapporto a , se $a \geq 1$, il processo geometrico sarà stocasticamente decrescente; se $0 < a \leq 1$, il processo geometrico sarà stocasticamente crescente; se $a = 1$, il processo geometrico si riduce ad un processo *renewal*.

NB: nei modelli a processo geometrico (GP), il rapporto a è una costante, a differenza di quanto vedremo nel prossimo paragrafo in cui viene considerato il processo geometrico generalizzato (GGP), nel quale, a è variabile dopo ogni riparazione.

Nei problemi di manutenzione per sistemi riparabili, viene solitamente adottata la riparazione preventiva per migliorare l'affidabilità del sistema e implementare il sistema in maniera più economica possibile. La riparazione preventiva è una misura molto potente, in quanto essa estende la vita del sistema e permette un guadagno in affidabilità ad un tasso di costo di buon compromesso. Si assuma che la riparazione preventiva venga adottata quando il tempo di operatività di un sistema raggiunge il valore T . Dunque, verrà applicata una politica sostitutiva di tipo N mediante la quale il sistema verrà rimpiazzato da uno nuovo identico ad esso, in seguito all'istante relativo all' N -esimo guasto. Si vuole rendere la ricerca tale per cui non sia possibile

scegliere solamente il valore di N che minimizza il tasso di costo atteso, ma anche del valore di T . Anche in questo studio, dunque, si vuole combinare la scelta della politica di tipo (T, N) che minimizza in modo ragionevole il tasso di costo atteso di lungo periodo.

Andiamo quindi a vedere un modello di manutenzione a processo geometrico con riparazione preventiva per un sistema che segue la politica di tipo (N, T) . Nel prossimo paragrafo andremo però prima ad introdurre una nuova classe di funzioni di distribuzione le quali tengono conto dell'effetto della riparazione preventiva. In seguito, verrà esplicitata la formula per l'ottimizzazione del tasso di costo atteso di lungo periodo.

3.12.2 Definizione della nuova classe di funzioni di distribuzione ERBLE

Andiamo a studiare una nuova classe di funzioni di distribuzione. Sia F la distribuzione del tempo di operatività X di un sistema. Si assume che la riparazione preventiva avvenga sempre quando il tempo di operatività del sistema raggiunge un certo valore T , e il sistema, dopo ogni riparazione preventiva, torni allo stato *as good as new*. Sia M il numero di riparazioni preventive che avvengono precedentemente ad un guasto del sistema e presenta una distribuzione geometrica.

$$M \sim G(p)$$

Con $P(M = i) = q^i p, i = 0, 1, 2, \dots,$

dove $p = P(X \leq T) = F(T)$ e $q = P(X > T) = 1 - p$. Dunque, $E = \frac{q}{p}$.

Con la riparazione preventiva agli istanti T , il tempo operativo totale precedente ad un guasto del sistema è dato da:

$$X_T = \sum_{i=1}^M T + X^{(M+1)} = MT + X^{(M+1)} \quad (115)$$

Dove $X^{(M+1)} \leq T$ è il tempo di operatività del sistema dopo la M -esima azione di riparazione preventiva. Ovviamente, $X_T = X^{(M+1)} \leq T$, se $M = 0$ e $X_T \geq T$.

Pertanto, il tempo operativo atteso totale con riparazione preventiva al tempo T è dato da:

$$E(X_T) = \frac{1}{F(T)} \int_0^T \{1 - F(t)\} dt \quad (116)$$

Possiamo dunque introdurre una nuova classe di funzioni distribuzione basata sulla monotonia di $E(X_T)$.

Definizione: sia F la distribuzione del tempo di operatività X di un sistema. Allora, F è di tipo “earlier preventive repair better (worse) than later in expectation” (ERBLE (ERWLE)) se il tempo operativo atteso totale $\mu(t) = \frac{1}{F(t)} \int_0^t \{1 - F(x)\} dx$ è non crescente (non decrescente) in t . Ciò si indica con $F \in ERBLE$ (ERWLE).

Teorema: se una funzione di distribuzione continua F è di tipo IFR (DFR), allora $F \in ERBLE$ (ERWLE).

La classe di funzioni di distribuzione di tipo ERBLE (ERWLE) è una nuova classe di funzioni di distribuzione, più grande della classe IFR (DFR) (a *failure rate* crescente/decrescente), la quale tiene conto dell’effetto della riparazione preventiva. Questa classe di funzioni di distribuzione è quella considerata per il modello geometrico proposto. Si rimanda ad ulteriori dettagli di questa classe di funzioni di distribuzione all’articolo di Lam “A geometric process maintenance model with preventive repair” del 2006²⁰.

3.12.3 Modello di manutenzione a processo geometrico

Per introdurre il modello GP, si assume che venga installato un sistema nuovo al quale venga applicata una politica manutentiva di tipo (T, N) . Non appena il sistema si guasta o viene raggiunto il tempo operativo T , il sistema viene riparato, a seconda di quale evento accade per primo. All’ N -esimo intervento preventivo eseguito il sistema viene sostituito con uno nuovo ed identico.

L’intervallo di tempo fra l’installazione del sistema e la prima sostituzione o le due seguenti sostituzioni del sistema viene chiamato ciclo. Per $n = 1, 2, \dots, N - 1$, l’intervallo di tempo tra il completamento dell’ $(n - 1)$ -esima riparazione e l’ n -

esima in un ciclo è chiamato n -esimo periodo di ciclo. Siano $X_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$ le variabili che indicano i tempi di operatività del sistema dopo l'($i-1$)-esimo intervento preventivo all' n -esimo periodo. Siano $Y_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots$ gli intervalli di riparazione preventivi del sistema ad ogni periodo. Indichiamo il tempo di riparazione del guasto del sistema all' n -esimo periodo con Z_n . Poiché il numero di interventi preventivi all' n -esimo periodo è pari a $M_n, n = 1, 2, \dots, N$, è possibile realizzare un diagramma del ciclo del sistema espresso come nella figura seguente:

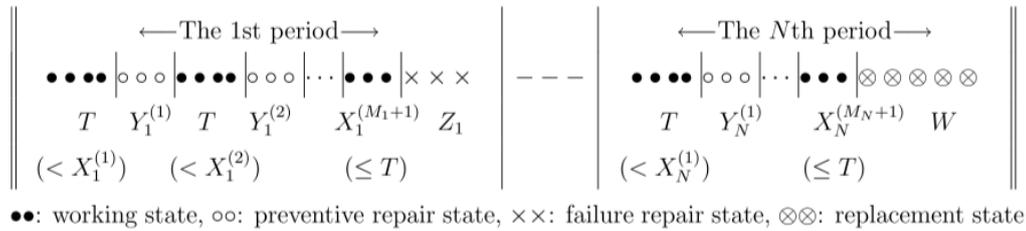


Figura 7 - diagramma di una possibile realizzazione del ciclo del sistema

Consideriamo le seguenti assunzioni:

1. Nell' n -esimo periodo di un ciclo, $\{X_n^{(i)}, i = 1, 2, \dots\}$ sono generiche variabili indipendenti ed identicamente distribuite; allo stesso modo, $\{Y_n^{(i)}, i = 1, 2, \dots\}$. Tuttavia, gli istanti di tempo di funzionamento successivi $\{X_n^{(1)}, n = 1, 2, \dots\}$ alla riparazione del guasto, costituiscono un processo geometrico di rapporto a e $E(X_1^{(1)}) = \lambda$. Gli istanti di riparazione di guasto consecutivi $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ costituiscono un processo geometrico GP con rapporto b e $E(Z_1) = \mu$. Infine, gli istanti di riparazione della preventiva $\{Y_n^{(1)}, n = 1, 2, \dots\}$ nei periodi successivi costituiscono un processo geometrico GP di rapporto b_p ed $E(Y_1^{(1)}) = v$. L'istante di sostituzione W in un ciclo è una variabile generica con $E(W) = \tau$.
2. I processi $\{X_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots\}$, $\{Y_n^{(i)}, n = 1, 2, \dots, i = 1, 2, \dots\}$ e $\{Z_n, n = 1, 2, \dots\}$ sono indipendenti e tutti indipendenti rispetto a W .
3. Il tasso di costo di riparazione del guasto è c , il tasso di costo di riparazione preventiva è c_p , il tasso "di ricompensa" quando il sistema è operativo è r . Il costo di sostituzione è comprensivo di due parti: la prima è data dal costo base

di sostituzione, R , mentre la seconda è proporzionale al tempo di sostituzione W al tasso c_1 .

4. Si assume che T abbia un limite inferiore, $T_0 > 0$, cioè $T \geq T_0$.

Nella pratica, molti sistemi si deteriorano per l'età e per l'usura accumulata, oltre che per l'influenza dell'ambiente. In generale, per sistemi in deterioramento, i tempi di funzionamento successivi alla riparazione possono essere modellati secondo un processo geometrico decrescente, mentre i tempi di riparazione consecutivi al guasto secondo un processo geometrico crescente. Per un sistema in miglioramento, invece, gli istanti di operatività successivi del sistema possono essere modellati secondo un processo geometrico crescente, mentre gli istanti di riparazione consecutivi secondo un processo geometrico decrescente. Per questo motivo si introduce la manutenzione a processo geometrico. Sotto le assunzioni riportate sopra, consideriamo un modello di manutenzione a processo geometrico con riparazione preventiva. Poiché la riparazione preventiva viene adottata col sistema in operatività, è ragionevole assumere che i tempi di operatività successivi alla riparazione preventiva siano considerati come generiche variabili indipendenti e identicamente distribuite. Questa è la ragione per cui nell'assunzione 1 si assume che il sistema, dopo la riparazione preventiva, sia *as good as new*. D'altro lato, però si ritiene che la riparazione di un guasto non sia *as good as new* poiché i tempi successivi di operatività dopo la riparazione andranno a costituire un processo geometrico così come i tempi di riparazione del guasto consecutivi. Questa è la differenza tra i due tipi di riparazione. Questo modello è a processo geometrico per un sistema in deterioramento, se $a \geq 1$ e $0 < b \leq 1$; è un modello per sistemi in miglioramento, invece, se $0 < a \leq 1$ e $b \geq 1$. Pertanto, il modello presentato è un modello generale a processo geometrico che può essere applicato, con flessibilità, a sistemi in deterioramento o a sistemi in miglioramento.

L'assunzione 4 dice, infine, che deve esserci un intervallo di pausa T_0 tra due riparazioni consecutive per recuperare le strutture di riparazione e prepararsi ad un nuovo guasto. Una riparazione può cominciare solamente dopo l'intervallo di *break* T_0 , che può essere visto come un limite inferiore a T . Possiamo scegliere un limite inferiore θ_0 tale per cui: $P(X_1^{(1)} \leq T_0) \leq \theta_0$. Si noti che se $\theta_0 = \infty$, il nostro

modello si riduce ad un modello di manutenzione a processo geometrico senza riparazione preventiva, già considerato da Lam in due suoi modelli precedenti²¹.

Per determinare il costo medio di lungo periodo per unità di tempo $C(T, N)$, sia X_n il tempo operativo totale del sistema nell' n -esimo periodo di un ciclo di funzionamento. Indichiamo la funzione di distribuzione e la funzione di densità di $X_n^{(i)}$ con $F_n(x) = F(a^{n-1}x)$ e $a^{n-1}f(a^{n-1}x)$ rispettivamente. Supponiamo che venga adottata una politica manutentiva (T, N) ; il costo medio $C(T, N)$ è dato da:

$$\begin{aligned}
C(T, N) &= \frac{\text{costo atteso per ciclo}}{\text{lunghezza attesa di un ciclo}} \\
&= \frac{E(c_p \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{M_n} Y_n^{(i)} + c \sum_{n=1}^{N-1} Z_n - r \sum_{n=1}^N X_n + R + c_r W)}{E(\sum_{n=1}^N X_n + \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^{M_n} Y_n^{(i)} + \sum_{n=1}^{N-1} Z_n + W)} \\
&= \frac{c_p \sum_{n=1}^N \frac{v}{b_p^{n-1}} E(M_n) + c \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} - r \sum_{n=1}^N E(X_n) + R + c_r \tau}{\sum_{n=1}^N E(X_n) + \sum_{n=1}^N \frac{v}{b_p^{n-1}} E(M_n) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} + \tau} \quad (117)
\end{aligned}$$

Per ottenere un'espressione esplicita per $C(T, N)$, occorre studiare la distribuzione di (M_n) , che è il numero delle riparazioni preventive in un periodo.

Poiché abbiamo precedentemente detto che M_n segue una distribuzione di tipo geometrico, $M_n \sim G(p_n)$, dove $p_n = P(X_n^{(1)} \leq T) = F(a^{n-1}T)$ e $q_n = P(X_n^{(1)} > T) = 1 - p_n$, di conseguenza si ha che $E(M_n) = \frac{q_n}{p_n}$.

Il tempo di operatività atteso totale X_n nell' n -esimo periodo è dato da:

$$E(X_n) = \lambda(T, n) = \frac{1}{F(a^{n-1}T)} \int_0^T \{1 - F(a^{n-1}t)\} dt \quad (118)$$

Allora, l'espressione del costo atteso totale può essere scritta come:

$$\begin{aligned}
C(T, N) &= \frac{c_p \sum_{n=1}^N \frac{v}{b_p^{n-1}} \frac{q_n}{p_n} + c \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} - r \sum_{n=1}^N \lambda(T, n) + R + c_r \tau}{\sum_{n=1}^N \lambda(T, n) + \sum_{n=1}^N \frac{v}{b_p^{n-1}} \frac{q_n}{p_n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} + \tau} \\
&= A(T, N) + c_p \quad (119)
\end{aligned}$$

Dove $A(T, N) = \frac{I(T, N)}{J(T, N)}$

Con $I(T, N) = (c - c_p) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} - (r + c_p) \sum_{n=1}^N \lambda(T, n) + R + (c_r - c_p)\tau$

e $J(T, N) = \sum_{n=1}^N \lambda(T, n) + \sum_{n=1}^N \frac{v}{b_p^{n-1}} \frac{q_n}{p_n} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\mu}{b^{n-1}} + \tau$.

Di conseguenza, una politica ottimale (T^*, N^*) può essere ottenuta analiticamente o numericamente minimizzando l'espressione di $C(T, N)$ o, equivalentemente, quella di $A(T, N)$. Poiché il modello di Lam (2006) presenta un limite pratico derivante dal fatto che il rapporto geometrico a è considerato come una costante, e poiché questa criticità viene risolta nel modello riportato nella prossima sezione, in cui si considera la manutenzione preventiva basata sul processo geometrico generalizzato, si rimanda a Lam²⁰ lo studio dell'algoritmo risolutivo noto come *grid method* il quale permette di ottenere i valori ottimali di T ed N che minimizzano l'espressione del costo atteso di lungo periodo.

3.12.4 Conclusioni del modello

Questo modello studia una manutenzione preventiva basata su un processo geometrico per sistemi riparabili e può essere applicato a sistemi in deterioramento se $a \geq 1$ e $0 < b, b_p \leq 1$, e a sistemi in miglioramento, se $0 < a \leq 1$ e $b, b_p \geq 1$. Dall'esperienza dei ricercatori di questo modello si evince che una politica ottimale nel modello a processo geometrico esiste ed è verificata dagli esempi numerici riportati nell'articolo di Lam²⁰. Tuttavia, la criticità derivante dalla costante a , rapporto del processo geometrico, deriva dal fatto che dopo ogni riparazione tale valore non può, nella pratica, rimanere tale; questo fatto costituisce un aspetto che non può essere ignorato e che verrà affrontato nella prossima sezione attraverso il modello basato sul GGP. Inoltre, è stata introdotta la classe di funzioni di distribuzione ERBLE la quale considera l'effetto della riparazione preventiva. ERBLE è una classe più ampia rispetto all'IFR ed è sicuramente oggetto di studio per la ricerca futura²⁰.

3.13 Modello di manutenzione preventiva basata sul processo geometrico generalizzato - Wang, Zhang e Yam, 2017

Sulla base del processo geometrico generalizzato sono stati studiati due modelli preventivi imperfetti. In primo luogo, si assume che il sistema venga mantenuto in modo preventivo periodicamente dopo ogni intervallo di tempo T , preso come unità temporale di riferimento, e riparato al guasto, attraverso un intervento correttivo. Questo intervento è di tipo minimo in quanto riporta il sistema alla condizione tale per cui possa riprendere il funzionamento, ma non allo stato “as good as new”, mentre la politica preventiva si tramuta in un processo geometrico generalizzato, il che significa che la sequenza vitale del sistema dopo ogni politica preventiva costituisce un GGP decrescente. Si ottiene il costo medio atteso di lungo periodo $C(N, T)$ del sistema e, attraverso la sua minimizzazione, viene individuata la politica ottimale (N^*, T^*) , dove N è il numero di interventi preventivi che vengono eseguiti prima della sostituzione. In seconda istanza, viene studiata una politica sequenziale per un sistema con un intervallo temporale adeguato alla preventiva considerata. Nel modello viene proposto anche un algoritmo risolutivo per la determinazione di N^* e di T^* .

Nomenclatura

- GP: processo geometrico
- GGP: processo geometrico generalizzato
- PM: manutenzione preventiva
- CDF: funzione di distribuzione cumulata
- ACR: tasso di costo medio (*average cost rate*)
- $\lambda(t)$: funzione di failure rate
- $\lambda_j(t)$: funzione di failure rate del sistema dopo il (j-1)-esimo intervento preventivo
- $\Lambda(t)$: funzione di guasto cumulata
- $\Lambda_j(t)$: funzione di guasto cumulata dopo il (j-1)-esimo intervento preventivo
- a_n : rapporto geometrico dell'n-esimo intervento preventivo.
- $A_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$

- c_m costo di riparazione minima
- c_p costo della manutenzione preventiva
- c_r costo di sostituzione
- N numero di interventi preventivi prima della sostituzione
- T intervallo di tempo della politica preventiva nel modello periodico
- $C(N, T)$ tasso di costo atteso di lungo periodo nel modello preventivo periodico
- x_i i -esimo intervallo di tempo nel modello sequenziale
- $x = (x_1, \dots, x_N)$.
- $C(N, x)$ tasso di costo medio di lungo periodo nel modello preventivo sequenziale.

3.13.1 Introduzione

Per la maggior parte dei sistemi, gli intervalli di lavoro successivi alla riparazione divengono via via più brevi, mentre gli intervalli consecutivi di riparazione divengono sempre più lunghi. Per descrivere questo fenomeno, abbiamo visto il modello a processo geometrico di Lam, il quale suggerisce due politiche di sostituzione, ovvero, la T policy, basata sugli intervalli di operatività del sistema, e la N policy, sulla base del numero di guasti del sistema. Al modello di Lam sono seguiti alcuni modelli sviluppati da altri ricercatori. Nel modello a processo geometrico, il rapporto a è una costante, il che significa che il sistema si deteriora uniformemente dopo ogni riparazione. Purtroppo, questa considerazione non è realistica poiché il livello di deterioramento del sistema dopo ogni riparazione è affetto dallo stato di salute del sistema al guasto, dalla qualità della riparazione e da altre condizioni di circostanza. Zhang e Wang hanno proposto un'estensione al modello geometrico di Lam per caratterizzare il processo di degradazione di alcuni sistemi nei quali il sistema, dopo ogni riparazione, si degrada con probabilità p e non si degrada con probabilità $1 - p$. Wang e Yam hanno proposto dunque un modello geometrico generalizzato, in cui il rapporto geometrico varia col numero di riparazioni. Il sistema in considerazione degrada sia in seguito alle riparazioni preventive che correttive.

Per un sistema in deterioramento, il costo di operatività è crescente e la disponibilità del sistema è decrescente con l'utilizzo e l'usura. Per mantenere il sistema in buono stato di lavoro e ridurre il costo di funzionamento, viene programmata su di esso la manutenzione preventiva. Dai lavori esistenti sui modelli preventivi imperfetti studiati, possiamo evincere che il *failure rate* del sistema dopo ogni azione preventiva aumenta più rapidamente rispetto a quanto avveniva prima della politica preventiva. In altre parole, un sistema post riparazione si deteriora più velocemente rispetto ad uno nuovo. Il processo geometrico introdotto da Lam è adatto a descrivere proprio questo fenomeno. Tuttavia, tale modello si concentrava sulle proprietà geometriche di decremento/incremento della vita media residua del sistema in esame. Un altro ricercatore, Seldom, ha studiato maggiormente la variazione del *failure rate* del sistema. Infatti, si trova che il *failure rate* di un sistema dopo la k -esima riparazione in un modello geometrico generalizzato può essere scritto come $\lambda_k(x) = A_k \lambda(A_k x)$, che è di una forma simile a quella espressa da Nakagawa. Risulta pertanto di interesse pratico approfondire il modello preventivo a processo geometrico generalizzato con riparazione minima al guasto.

In questo studio vengono proposti due modelli preventivi, uno di tipo periodico, in cui il sistema viene riparato con interventi di tipo minimo al guasto e in modo preventivo ad istanti di tempo periodici kT , ed uno di tipo sequenziale in cui devono essere determinati il numero N ottimale di politiche preventive e una sequenza di intervalli per la preventiva.

Riportiamo una definizione di processo geometrico nel seguente modo:

la sequenza di variabili generiche non negative $\{Z_k, k \geq 1\}$ costituisce un processo geometrico (GP) con rapporto $a, a > 0$, se:

- Le variabili generiche sono indipendenti;
- La relazione $F_k(t) = F(a^{k-1}t)$ vale per tutti i numeri interi $k \geq 1$, dove $F(t)$ è una funzione di distribuzione cumulata di Z_1 ed F_k è la funzione di distribuzione cumulata (CDF) di Z_k .

Si può dire che $\{Z_k, k \geq 1\}$ è un processo geometrico decrescente per $a > 1$, un processo geometrico crescente per $0 < a < 1$, e si riduce ad un *renewal process* per $a = 1$.

Dalla definizione di processo geometrico, il rapporto a è una costante positiva per $k \geq 1$. Nello studio della manutenzione, ciò significa che la vita di un sistema si deteriora uniformemente dopo ogni riparazione. Nella pratica, l'efficacia delle riparazioni di un sistema può, come abbiamo detto poco sopra, variare col numero di riparazioni eseguite sul sistema stesso. Pertanto, il processo geometrico generalizzato proposto è stato studiato proprio per colmare questa lacuna.

Definizione 2: la sequenza di variabili generiche non negative $\{Z_k, k \geq 1\}$ costituisce un processo geometrico generalizzato con rapporti a_1, a_2, \dots , se:

- 1) Le variabili generiche sono indipendenti;
- 2) $a_k > 0$ vale per tutti i valori interi $k \geq 1$.
- 3) La relazione $F_k(t) = F(a_0 a_1 \dots a_{k-1} t)$ vale per tutti i valori interi $k \geq 1$, dove $a_0 = 1$, $F(t)$ è la funzione di distribuzione cumulata di Z_1 e $F_k(t)$ è la funzione di distribuzione cumulata di Z_k .

Indichiamo con $A_k = a_0 a_1 \dots a_{k-1}$; per cui, possiamo scrivere: $F_k(t) = F(A_k t), k \geq 1$.

Se $a_k \geq 1$ per tutti i valori di $k \geq 1$, allora $\{Z_k, k \geq 1\}$ costituisce un processo geometrico generalizzato (GGP) decrescente. Se $a_n \leq 1$ per tutti gli interi $k \geq 1$, allora $\{Z_k, k \geq 1\}$ è un GGP crescente. Se $a_1 = a_2 = \dots = a$ costante, allora il processo geometrico generalizzato GGP si riduce ad un semplice processo geometrico GP.

NB: per un processo geometrico generalizzato (GGP) decrescente $\{Z_k, k \geq 1\}$, un'assunzione comune è che $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$. Se $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ è la serie vitale di un sistema dopo le varie riparazioni, allora l'assunzione $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ implica che il sistema si deteriora più rapidamente con un numero di riparazioni crescente. Similmente, sia $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ la serie di tempi di riparazione del sistema. La sequenza $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ costituisce un GGP crescente se i rapporti soddisfano la disuguaglianza $1 \geq a_1 \geq a_2 \geq \dots$, il che significa che il tempo di

riparazione è stocasticamente crescente sempre più rapidamente con un numero di riparazioni crescente.

Assumendo che $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ formi un GGP, la variabile Z_1 ha una funzione di distribuzione $F(t)$ ed una funzione di densità di probabilità $f(t)$; allora, la funzione densità di probabilità della variabile Z_k è:

$$f_k(t) = \frac{dF_k(t)}{dt} = A_k f(A_k t) \quad (120)$$

Il valor medio di Z_k è: $\mu_k = E[Z_k] = \int_0^\infty t A_k f(A_k t) dt = \frac{\mu_1}{A_k}, k = 2, 3, \dots$ (121)

Dove μ_1 è il valor medio di Z_1 .

Se $\lambda(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ rappresenta il tasso di guasto di Z_1 , allora il tasso di guasto di Z_k è:

$$\lambda_k(t) = \frac{f_k(t)}{\bar{F}_k(t)} = A_k \lambda(A_k t) \quad (122)$$

e la funzione cumulata di guasto è:

$$\Lambda_k(t) = \int_0^t \lambda_k(y) dy = \Lambda(A_k t), k = 1, 2, \dots \quad (123)$$

Si pone $S_k = \sum_{i=1}^k Z_i$; S_k rappresenta il tempo totale di lavoro di un sistema prima della k -esima riparazione, o il tempo totale per le prime k riparazioni.

Lemma 1:

1) se $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ è un GGP con rapporti che soddisfano $a_1 > 1, a_k \geq a_1, k = 2, 3, \dots$, allora:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[S_k] = \sum_{k=1}^{\infty} E[Z_k] \leq \frac{a_1 \mu_1}{a_1 - 1} < \infty \quad (124)$$

2) se $\{Z_k, k = 1, 2, \dots\}$ è un GGP con rapporti che soddisfano $a_k \leq 1, k = 1, 2, \dots$, allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[S_k] = \sum_{k=1}^{\infty} E[Z_k] = \infty \quad (125)$$

3.13.2 Politica preventiva periodica con riparazione minima al guasto

Vieni qui proposto un modello preventivo periodico basato sul processo geometrico generalizzato.

Assunzioni del modello e analisi:

assunzione 1: un nuovo sistema viene messo in operatività al tempo $t = 0$. Il *failure rate* $\lambda(t)$ del nuovo sistema è crescente in t , con $t > 0$.

Assunzione 2: il sistema viene preventivamente mantenuto ad istanti periodici nT , con $n = 1, 2, \dots$ e dopo $(n-1)$ periodi preventivi la *lifetime* X_n ha una funzione di distribuzione di guasto cumulata $F(A_n t)$. Pertanto, la sequenza di variabili $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ forma un processo geometrico generalizzato GGP decrescente.

Assunzione 3: il sistema viene riparato con manutenzione correttiva al guasto; le azioni correttive sono di tipo minimo, il che non varia il *failure rate* del sistema dopo la riparazione.

Assunzione 4: il tempo impiegato per l'azione correttiva o preventiva è considerato trascurabile.

Assunzione 5: viene impiegata la politica (N, T) , dove N è il numero di preventive eseguite prima della sostituzione.

Assunzione 6: il costo di riparazione minima è indicato con c_m , il costo della preventiva è c_p , ed il costo di sostituzione è c_r . Tali valori soddisfano la relazione $c_m < c_p < c_r$.

Denotiamo l'intervallo di tempo fra la $(k - 1)$ -esima preventiva e la k -esima come il k -esimo ciclo di lavoro, e l'intervallo di tempo tra due sostituzioni consecutive del sistema come un ciclo di rinnovo.

Il costo medio atteso di lungo periodo può essere dato dalla seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 C(N, T) &= \frac{c_r + (N - 1)c_p + c_m \sum_{j=1}^N \int_{(j-1)T}^{jT} \lambda_j(t - (j-1)T) dt}{NT} \\
 &= \frac{c_r + (N - 1)c_p + c_m \sum_{j=1}^N \Lambda(A_j T)}{NT} \quad (126)
 \end{aligned}$$

Dove $\lambda_j(t)$ è il *failure rate* della funzione X_j e $\int_{(j-1)T}^{jT} \lambda_j(t - (j-1)T) dt = \Lambda(A_j T)$ è il numero medio di guasti che incombono durante l'intervallo di tempo $[(j-1)T, jT]$. Lo scopo è quello di determinare la politica ottimale (N^*, T^*) tale da minimizzare l'espressione di costo riportata.

Politica ottimale N^* : lo scopo è quello di trovare il numero ottimale di cicli con un intervallo di tempo T fissato della politica preventiva in modo tale da minimizzare $C(N, T)$. Non è difficile comprendere che $C(N, (N+1), T) < (>) C(N-1, T)$ se e solamente se:

$$L(N-1, T) < \frac{c_r - c_p}{c_m} \text{ e } L(N, T) > \frac{c_r - c_p}{c_m}$$

$$\text{Dove } L(N, T) = N \Lambda(A_{N+1} T) - \sum_{j=1}^N \Lambda(A_j T) \quad (127)$$

Poiché $L(N, T) - L(N-1, T) = N[N \Lambda(A_{N+1} T) - \Lambda(A_N T)] > 0$, è possibile concludere che la funzione $L(N, T)$ aumenta con N .

Teorema 1: se A_N è strettamente crescente con N e $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N = +\infty$, allora esiste una politica di sostituzione N^* ottima ed è unica, e minimizza la funzione di costo atteso medio, soddisfacendo la seguente espressione:

$$L(N^*, T) > \frac{c_r - c_p}{c_m} \text{ e } L(N^* - 1, T) < \frac{c_r - c_p}{c_m} \quad (128)$$

NB: per un modello preventivo basato sul processo geometrico, i rapporti geometrici soddisfano $a_1 = a_2 = \dots = a > 1$, e $A_N = a^N \rightarrow \infty$ per N che tende ad infinito. Pertanto, è verificata la condizione del teorema 1. Se il $\lim_{N \rightarrow \infty} A_N < +\infty$, allora esiste solamente un numero finito di a_n che è maggiore di 1, il che implica che il sistema studiato sta realmente degradandosi con le riparazioni subite.

Politica ottimale T^* : supponendo che la politica di sostituzione $N > 0$ sia fissa, dobbiamo trovare il T^* che minimizza il costo medio atteso di lungo periodo. Anche in questo caso si andrà a derivare $C(N, T)$ rispetto a T , ponendo l'espressione pari a 0.

Si ottiene che $\frac{\partial C(N, T)}{\partial T} = 0$, se e solo se:

$$\frac{c_m \sum_{j=1}^N A_j \lambda(A_j T)}{N} = C(N, T) \quad (129)$$

Che è equivalente a

$$Q(N, T) = \frac{(N-1)c_p + c_r}{c_m} \quad (130)$$

$$\text{Dove } Q(N, T) = T \sum_{j=1}^N A_j \lambda(A_j T) - \sum_{j=1}^N \Lambda(A_j T) \quad (131)$$

Teorema 2: dato un numero $N \geq 1$, i risultati seguenti valgono per un sistema a *failure rate* crescente $\lambda(t)$.

- 1) Se $\sum_{j=1}^N A_j \int_0^{\infty} [\lambda(\infty) - \lambda(A_j t)] dt > \frac{(N-1)c_p + c_r}{c_m}$, allora esiste ed è unica la politica ottimale T^* che minimizza l'ACR $C(N, T)$ e soddisfa: $Q(N, T^*) = \frac{(N-1)c_p + c_r}{c_m}$ (15)
- 2) Se $\sum_{j=1}^N A_j \int_0^{\infty} [\lambda(\infty) - \lambda(A_j t)] dt < \frac{(N-1)c_p + c_r}{c_m}$, allora la politica ottimale di $T^* = +\infty$.

L'articolo di Wang²² propone un algoritmo risolutivo per ottenere N^* e T^* di questa politica preventiva.

Algoritmo:

Input: $c_p, c_m, c_r, \lambda, a_k, k = 1, 2, \dots$

- 1) si pone $k = 1, N_k = 1$
- 2) si pone $N = N_k$ e si determina T_k con la (15)
- 3) si pone $T = T_k$ e si determina N_{k+1} dalla (8)
- 4) Se $N_{k+1} = N_k$, allora vai a 5), altrimenti poni $k = k + 1$ e torna a 2)
- 5) $T^* = T_k, N^* = N_k$

Output: $T^*, N^*, C(T^*, N^*)$.

Stop.

3.13.3 Modello di politica preventiva sequenziale basato sul processo geometrico generalizzato (GGP)

Poiché le variabili $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ dopo la riparazione formano un GGP decrescente, l'intervallo di tempo fra le azioni preventive dev'essere via via minore con l'aumento del numero di riparazioni. Pertanto, dev'essere programmata una sequenza di periodi pianificati per i quali il sistema viene preventivamente riparato. Al guasto, il sistema viene riparato con azioni di tipo *minimal repair*, e sostituito all' N -esimo ciclo preventivo da un sistema nuovo. Per distinguere questo modello da quello periodico, l'assunzione 2 precedentemente riportata dev'essere sostituita dalla seguente:

assunzione 2': il sistema viene preventivamente mantenuto secondo una sequenza di periodi pianificati $t_n, n = 1, 2, \dots$, e le variabili X_k dopo la $(k - 1)$ -esima azione preventiva hanno una funzione di guasto cumulata $F(A_k x)$, dove $A_n = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$. La sequenza $\{X_n, k = 1, 2, \dots\}$ forma dunque un GGP decrescente.

Denotando con $\{x_n, n = 1, 2, \dots\}$ la sequenza di intervalli temporali tra le varie preventive, si ha che $t_n = x_1 + \dots + x_n$ o $x_n = t_n - t_{n-1}$ per $n = 1, 2, \dots$. Dalla (123), si può dedurre che il numero medio di riparazioni minime nell' n -esimo intervallo preventivo $[t_{n-1}, t_n]$, è $\Lambda(A_n x_n)$.

Il costo medio atteso di lungo periodo della politica sequenziale basata sul GGP può essere così espresso:

$$C(N, x_1, \dots, x_N) = \frac{(N - 1)c_p + c_r + c_m \sum_{n=1}^N \Lambda(A_n x_n)}{x_1 + \dots + x_N} \quad (132)$$

Lo scopo è quello di determinare il numero ottimale N^* e la sequenza ottimale degli intervalli temporali $x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*$ tali da minimizzare l'espressione di costo riportata.

Si deriva dunque l'espressione di $C(N, x_1, \dots, x_N)$ rispetto ad x_N e la si pone uguale a 0.

$$\frac{\partial C(N, x_1, \dots, x_N)}{\partial x_N} = 0, n = 1, 2, \dots, N \quad (133)$$

Alcune analisi mostrano che $c_m A_n \lambda(A_n x_n) = C(N, x_1, \dots, x_N), n = 1, 2, \dots, N$ (134)

Che implica $A_1 \lambda(A_1 x_1) = A_2 \lambda(A_2 x_2) = \dots = A_N \lambda(A_N x_N)$ (135)

Supponendo che $\lambda(x)$ sia strettamente crescente in x , la procedura di calcolo per ottenere la soluzione ottimale per gli intervalli temporali pianificati può essere specificata come segue:

- 1) Risolvendo $A_n \lambda(A_n x_n) = D(N), n = 1, 2, \dots, N$, si ottiene $x_n = \varphi_n(D(N))$;
- 2) sostituire x_n nella (21) e risolvere per $D(N)$;
- 3) determinare N^* minimizzando $D(N), N=1, 2, \dots$;
- 4) calcolare x_n^* dalla relazione $x_n^* = \varphi_n(D(N^*)), n = 1, 2, \dots, N^*$.

Si rimanda all'articolo di Wang²² per l'applicazione di questa politica ottimale alla distribuzione di Weibull.

3.13.4 Conclusione del modello

Il processo geometrico generalizzato è una generalizzazione del processo geometrico con rapporti geometrici differenti, il quale è più flessibile nella modellazione del tempo di vita rimanente di un sistema soggetto ad attività manutentive preventive. Nella letteratura, l'effetto della manutenzione preventiva sui sistemi manutenibili può essere descritto con la riduzione dell'età effettiva del sistema, o con una forma di variazione del *failure rate*. Qui, si è trovato che la sequenza vitale che segue un processo geometrico generalizzato può essere descritta dal suo *failure rate* con alcuni fattori di cambiamento. Come abbiamo visto, dal lavoro di ricerca di Nakagawa, sono stati studiati due modelli preventivi basati sul GGP, uno dei quali è di tipo periodico, l'altro sequenziale. Sono derivati alcuni risultati teorici e algoritmi per determinare la politica ottimale. Le politiche preventive ottimali per sistemi con guasti gestibili e non gestibili sono state studiate e approfondite da Nakagawa, Zequeira, Bérenguer, Castro e Sheu. Questo modello è un ulteriore generalizzazione del lavoro di Nakagawa, visto e considerato dal punto di vista del processo geometrico generalizzato. Per ulteriori estensioni di questo lavoro, si potrebbe considerare la situazione relativa a due tipologie di

guasto, in cui i guasti gestibili sono riparati attraverso la manutenzione basata sul GGP²².

IV. Modello di manutenzione preventiva sequenziale imperfetta con riduzione dell'intensità di guasto sul caso specifico di autobus urbani (Zhou, 2020)

In questo articolo viene presentato un modello di manutenzione preventiva sequenziale di tipo imperfetto per quantificare l'efficienza manutentiva sui bus urbani. Il modello proposto definisce l'efficienza manutentiva come una proporzione della differenza tra il valore attuale e quello atteso dell'incremento dell'intensità di guasto. Poiché questo delta può variare da valori negativi a positivi, il modello proposto può quantificare tutti i tipi di efficienza manutentiva presentati nella letteratura esistente. Viene infine presentato un caso di studio relativo ai bus urbani in Cina per dimostrare l'effettiva implementazione del modello.

4.1.1 Introduzione

I guasti di un sistema possono essere classificati in più tipologie basate sui livelli di gravità: guasti significativi, guasti comuni e guasti minori. Le strategie manutentive correttive corrispondenti sono quelle, come abbiamo visto, di riparazione di tipo perfetta, imperfetta e minima. Al fine di ridurre i guasti del sistema e rallentare il processo di degradazione, sono state introdotte diverse strategie manutentive, alcune delle quali di tipo sequenziali. L'effetto di miglioramento dell'affidabilità del sistema dopo la politica preventiva è definito come l'efficienza manutentiva preventiva (PME). Si tratta di un importante indicatore di performance per la gestione di un sistema. In seguito all'applicazione della manutenzione preventiva, la PME può essere distinta secondo cinque scenari differenti: *better than new* (BTN), *as-good-as-new* (AGAN), *worse-than-new but better-than-old* (WNBO), *as-bad-as-old* (ABAO), e *worse-than-old* (WTO), dove AGAN significa che il sistema potrà essere riportato ad un nuovo stato dopo che le azioni preventive sono state eseguite. Se l'intensità di guasto del sistema non cambia dopo la manutenzione, la PME è di tipo ABAO. Ad ogni modo, la maggior parte dei sistemi, dopo l'azione preventiva, si trova nello stato WNBO. Questo tipo di manutenzione è detta di tipo *imperfect*. Lo scenario di tipo WTO rappresenta lo stato in cui il sistema si trova nella condizione peggiore possibile. Sono stati studiati ed esaminati

dunque molti modelli di manutenzione preventiva imperfetta al fine di ridurre la probabilità di guasto ed il costo manutentivo della politica. Due step importanti riguardano il quantificare l'efficienza manutentiva e la costruzione di una relazione fra la qualità di efficienza manutentiva che si vuole ottenere ed il costo della politica preventiva. Ci sono diversi modelli per valutare la PME, i quali possono essere riassunti e generalizzati entro due categorie: misurazione di *age reduction*, e misurazione della riduzione di intensità del guasto. Siano $t_k (k = 1, 2, 3, \dots)$ gli intervalli manutentivi. La misura di *age reduction* assume che la k -esima azione manutentiva ridurrà l'età virtuale $t_k - t_{k-1}$ ad un'età inferiore $q(t_k - t_{k-1})$. Il modello di misura della riduzione di intensità del guasto assume che la politica preventiva riduca l'intensità di guasto con un certo decremento o proporzionalmente al valore di intensità dell'ultimo guasto subito. Queste due tipologie di modelli sono state studiate da diversi ricercatori, fra i quali, come abbiamo riportato, Lin (2001) ed altri che presentarono un modello ibrido di *age reduction* e di riduzione di intensità del guasto combinando i modelli proposti precedentemente da Nakagawa. Zhou e i suoi collaboratori hanno mostrato, nel seguente modello, che per valutare al meglio l'efficienza manutentiva, il modello che si presta in via migliore è quello di riduzione dell'intensità di guasto. In particolare, applicando il modello ai bus urbani di alcune città della Cina, si è visto che dopo l'azione preventiva l'intensità di guasto può essere ridotta o aggravata, e che l'ammontare della variazione è proporzionale alla differenza di intensità tra le osservazioni di guasto iniziali e finale. Poiché la proporzionalità varia da negativa a positiva, il modello di seguito proposto può descrivere tutti e cinque gli scenari della PME, e può, inoltre, modellare l'efficienza manutentiva di una politica preventiva su differenti livelli di intensità. Al fine di illustrare l'efficacia del modello, sono riportati, nell'articolo di Zhou, diversi esempi numerici con un dataset fornito dalla letteratura precedente. Il modello presentato rientra dunque nella categoria dei modelli di manutenzione preventiva di tipo sequenziale imperfetto ed è la manifestazione più recente della letteratura scientifica a riguardo in ambito preventivo⁸.

4.1.2 Definizione del problema e assunzioni del modello

I bus urbani, così come in generale i sistemi più o meno complessi, sono soggetti a due tipologie di azioni manutentive: correttiva e preventiva. La manutenzione correttiva è normalmente eseguita in loco, al fine di correggere e aggiustare i guasti rilevati, riportando il bus ad una condizione di operatività con il minimo costo e l'impiego del minimo tempo. Poiché un autobus è costituito da molti componenti e parti, è generalmente assunto che la manutenzione correttiva non cambi l'intensità di guasto. Di conseguenza, la manutenzione correttiva di un bus urbano implica solamente riparazioni di tipo minimo. La manutenzione preventiva per gli autobus urbani consiste invece di tre livelli distinti di azioni manutentive di tipo *time-based*, che andremo ad indicare con *type I*, *type II*, e *type III*.

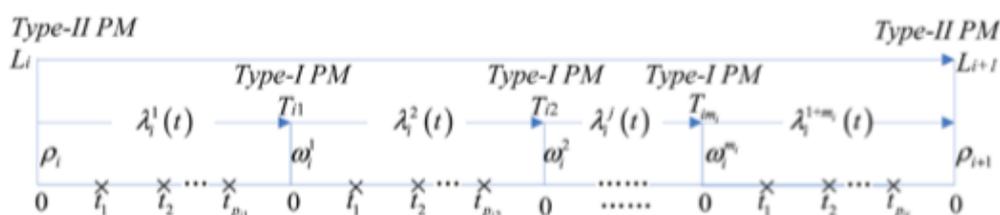


Figura 8 – modello manutentivo preventivo sequenziale con due tipi di manutenzione preventiva imperfetta

La manutenzione preventiva di primo tipo si focalizza prevalentemente sulla pulizia, la lubrificazione ed il fissaggio. La manutenzione di tipo II consiste nell'ispezione e nell'aggiustamento del sistema frenante, dei filtri per la pulizia, e nella sostituzione di parti e componenti logore. La PM di terzo tipo infine si focalizza sulla revisione del motore. Ovviamente, tutti e tre i livelli di manutenzione preventiva mirano al miglioramento dello stato dei bus urbani. Nessuna di queste tipologie di manutenzione è di tipo perfetto, e nessuna può riportare i bus allo stato AGAN. In altre, parole, la PME è di tipo WNBO. In ciò che segue si presenta un modello di manutenzione imperfetta di tipo sequenziale con riduzione dell'intensità di guasto. Per semplicità, si assume che un sistema è soggetto a due tipi di manutenzione preventiva imperfetta. Si noti che, sebbene la formulazione del modello viene presentata in termini delle due sole modalità di manutenzione preventiva, essa può essere estesa al fine di includere più tipologie della stessa. Il

guasto del sistema, e la manutenzione preventiva imperfetta di tipo sequenziale, sono esplicitati nella figura sopra.

Si suppone che la manutenzione preventiva di tipo II venga eseguita in modo sequenziale agli istanti L_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Per la manutenzione preventiva periodica, si avrebbero gli intervalli tutti uguali, ovvero $L_2 - L_1 = L_3 - L_2 = \dots = L_n - L_{n-1}$. Fra ognuno dei successivi intervalli preventivi di tipo II, vengono eseguiti in via sequenziale interventi preventivi di tipo I m_i , agli istanti di tempo T_{ij} ($j = 1, 2, \dots, m_i$). Se la politica preventiva di tipo I viene eseguita periodicamente, allora si ha: $\Delta T = T_{i2} - T_{i1} = T_{i3} - T_{i2} = \dots = T_{im_i} - T_{im_{i-1}}$. Sia t una variabile non negativa, con $0 \leq t \leq \Delta T$. Quando viene eseguita un'azione preventiva di tipo I, t ritorna nuovamente a 0. In caso di guasto fra due azioni preventive successive di tipo I, il sistema viene riportato ad uno stato normale mediante il costo di riparazione minimo in un tempo trascurabile. Si assume che l'azione di riparazione minima non cambia l'intensità di guasto, pertanto il processo di guasto del sistema può essere modellato mediante un processo di conteggio. Siano t_k ($k = 1, 2, \dots, p_{ij}$) i punti temporali di osservazione del guasto durante il ($j-1$)-esimo intervallo di preventiva di tipo I $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$, dove $0 \leq t_k \leq t$. Pertanto t_k divide il ($j-1$)-esimo intervallo preventivo di tipo I $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$, in p_{ij} segmenti di egual lunghezza Δt . Si noti che se gli intervalli preventivi di tipo I sono strettamente uguali, allora, si avrà $p_{i1} = p_{i2} = \dots = p_{ij}$. In questo caso, si considera il dataset che compone la tabella seguente.

Failure number between sequential imperfect PMs.

t	PM interval (L_0, T_{i1})	(T_{i1}, T_{i2})	(T_{i2}, T_{i3})	...	($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)	...	($T_{im_{i-1}}, T_{im_i}$)	(T_{im_i}, L_{i+1})
t_1	1	1	2	...	$N^j(t_1)$...	1	3
t_2	2	3	4	...	$N^j(t_2)$...	5	6
...
t_k	$N^j(t_k)$	$N^j(t_k)$	$N^j(t_k)$...	$N^j(t_k)$...	$N^m(t_k)$	$N^{1+m}(t_k)$
...
$t_{p_{ij}}$	17	20	23	...	$N^j(t_{p_{ij}})$...	null	32

Tabella 6 – numeri di guasto fra gli intervalli sequenziali della politica preventiva imperfetta

In questa tabella, $N_i^j(t_k)$ denota il numero di guasti alla k-esima osservazione di guasto nel (j-1)-esimo intervallo preventivo di tipo I, all'i-esimo intervallo preventivo di tipo II $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$. Sia $M_i^j(t_k)$ il numero di guasti cumulati, allora:

$$M_i^j(t_k) = N_i^j(t_1) + N_i^j(t_2) + \dots + N_i^j(t_k) = \sum_{k=1} N_i^j(t_k) \quad (136)$$

Sia $\lambda_i^j(t_k)$ l'intensità di guasto dopo la (j-1)-esima azione preventiva di tipo I nell'i-esimo intervallo preventivo di tipo II $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$. Considerando la funzione $M_i^j(t)$ del processo di conteggio dei guasti $\{M_i^j(t_k)\}$, la stima dell'intensità di guasto $\hat{\lambda}_i^j(t)$ può essere ottenuta come:

$$\hat{\lambda}_i^j(t) = \frac{dE[M_i^j(t)]}{dt} \quad (137)$$

L'intensità di guasto prima del primo intervento preventivo di tipo I è chiamata intensità di guasto iniziale, indicata col simbolo $v_1^1(t)$. Si noti che è praticamente impossibile ottenere il valore dell'intensità di guasto iniziale. Se non possiamo ottenere il valore dell'intensità di guasto prima della prima azione manutentiva preventiva di tipo I, è ragionevole definire il primo valore dell'intensità di guasto che è possibile ottenere come il valore dell'intensità di guasto iniziale. Per distinguere tale valore da $\lambda_i^j(t_k)$ in riferimento alle azioni manutentive, indichiamo il valore dell'intensità di guasto iniziale durante l'intervallo $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$ con $v_i^j(t)$. Il numero di guasti cumulato con intensità di guasto iniziale viene indicato con $W_i^j(t)$. Questo simbolo rappresenta il numero di guasti cumulati di un sistema che dovrebbero incombere nell'intervallo $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$ senza alcun intervento preventivo applicato. Come mostrato in figura 2, l'intensità di guasto del sistema, senza l'interferenza della prima manutenzione preventiva, dovrebbe essere la linea continua $v_1^2(t)$.

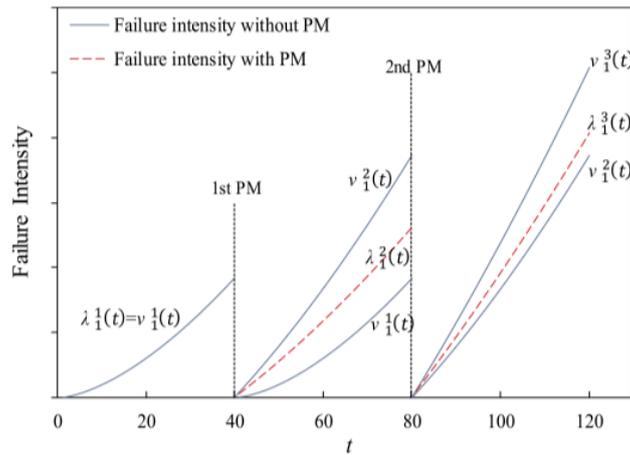


Figura 9 – intensità di guasto con/senza interferenza della politica preventiva sequenziale

Con l'interferenza della prima azione manutentiva, l'intensità di guasto osservata è rappresentata dalla linea tratteggiata $\lambda_1^2(t)$. Dopo l'azione preventiva, il risultato della PME più atteso è $\lambda_1^2(t) < v_1^2(t)$ o $\lambda_1^2(t) = v_1^2(t)$, il che implica che il sistema si trovi nello stato BTN o AGAN. Contrariamente alle aspettative, la peggior PME è la WTO o ABAO, pertanto $\lambda_1^2(t) > v_1^2(t)$ o $\lambda_1^2(t) = v_1^2(t)$. Ciò significa che le azioni preventive *povere* risultano in una maggiore o uguale frequenza dei guasti del sistema rispetto a prima. Infatti, il caso più comune è WNBO, noto come manutenzione preventiva imperfetta, e $v_1^1(t) < \lambda_1^2(t) < v_1^2(t)$. Come sopra menzionato, se si vuole capire il cambio di trend dell'intensità di guasto del sistema, occorre considerare la PME. In questo articolo la PME è considerata come una variabile. Sia ρ_i la PME relativa all'i-esima azione preventiva di tipo II, ω_i^j la PME del j-esimo intervento preventivo di tipo I nel periodo i-esimo della manutenzione preventiva del secondo tipo. Si presentano di seguito i modelli sequenziali imperfetti nel dettaglio. Riportiamo prima, però, le notazioni utili nel modello.

PME: efficienza della manutenzione preventiva

SSE: somma dei quadrati per gli errori

AGAN: as good as new

AGAO: as good as old

WNBO: worse than new but better than old

BTN: better than new

WTO: worse than old

MTBF: mean time between failures

L_i : istanti della politica preventiva di tipo II

T_{ij} : istanti della politica preventiva di tipo I

n : numero degli interventi preventivi di tipo II nella vita del sistema

m_i : numero degli interventi di tipo I nell' i -esimo intervallo preventivo della politica di tipo II (L_i, L_{i+1}).

t : variabile temporale non negativa

$t_{p_{ij}}$: istanti temporali di osservazione del guasto durante l'intervallo ($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)

$N_i^j(t_k)$: numero di guasti nell'intervallo ($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)

$M_i^j(t_k)$: numero cumulato di guasti nell'intervallo ($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)

$M_i^j(t)$: funzione del processo di conta dei guasti $\{M_i^j(t_k)\}$

$\lambda_i^j(t)$: intensità di guasto durante l'intervallo ($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)

$v_i^j(t)$: valore dell'intensità di guasto iniziale durante l'intervallo ($T_{i(j-1)}, T_{ij}$)

senza l'interferenza delle azioni preventive sequenziali

$W_i^j(t)$: numero di guasti cumulati sotto l'intensità di guasto iniziale $v_i^j(t)$

ρ_i : la PME dell' i -esimo intervento preventivo di tipo II

ω_i^j : la PME del j -esimo intervento preventivo di tipo I nel periodo i -esimo della manutenzione preventiva del secondo tipo (L_i, L_{i+1}).

α, β, γ : parametri

p : l'ordine di memoria del modello preventivo.

4.1.3 Modello di politica preventiva sequenziale di tipo imperfetto

Per quanto ne sappiamo, le azioni preventive convenzionali non possono cambiare fondamentalmente il trend di affidabilità intrinseca dei sistemi complessi, come gli autobus urbani. Pertanto, assumiamo che l'aumento dell'intensità di guasto avvenga in base al trend della stessa intensità di guasto dell'ultimo intervallo preventivo eseguito. Nel mentre, il cambio di quantità è proporzionale alla differenza nell'intensità di guasto tra le osservazioni iniziali e finali del guasto. In base alle assunzioni sopra riportate, il modello formulato in questo studio assume che l'intensità di guasto può essere ridotta o peggiorata dopo l'attività preventiva, mentre l'ammontare del cambiamento può essere proporzionale alla differenza nell'intensità di guasto tra le osservazioni di guasto iniziale e finale. In base a questa formulazione, l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ alla j -esima azione preventiva di tipo I dell' i -esimo periodo manutentivo di tipo II può essere rappresentata come la somma di $\lambda_i^{j-1}(t)$ e dell'incremento $\omega_i^{j-1}[v_i^j(t) - \lambda_i^{j-1}(t)]$. A causa dell'influenza dell'azione preventiva di tipo I di tipo I durante l' $(i-1)$ -esimo intervallo preventivo di tipo II, $\lambda_i^1(t)$ può essere presentato come la somma dell'ultima osservazione di guasto $\lambda_{i-1}^{1+m_{i-1}}(t)$ e l'incremento $\rho_i[v_i^1(t) - \lambda_{i-1}^{1+m_{i-1}}(t)]$. Di conseguenza, il modello proposto può essere formulato come segue:

$$\lambda_i^j(t) = \begin{cases} \lambda_{i-1}^{1+m_{i-1}}(t) + \rho_i[v_i^1(t) - \lambda_{i-1}^{1+m_{i-1}}(t)], & j = 1 \\ \lambda_i^{j-1}(t) + \omega_i^{j-1}[v_i^j(t) - \lambda_i^{j-1}(t)], & j = 2, \dots, m_i + 1 \end{cases} \quad (138)$$

In questa equazione, la PME può essere determinata quando le azioni preventive sono eseguite in modo sequenziale. Per un sistema in deterioramento, $v_i^j(t) - \lambda_i^{j-1}(t) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m_i + 1$) è sempre verificata. Nel modello manutentivo preventivo proposto, ρ_i o ω_i^j sono variabili generiche. Se $\omega_i^{j-1} = 0$, $\lambda_i^j(t) = \lambda_i^{j-1}(t) + \omega_i^{j-1}[v_i^j(t) - \lambda_i^{j-1}(t)] = \lambda_i^{j-1}(t)$. Ciò significa che, dopo il j -esimo intervento preventivo di tipo I durante l' i -esimo periodo manutentivo di tipo II, l'intensità di guasto del sistema $\lambda_i^j(t)$ può essere riportata allo stato $\lambda_i^{j-1}(t)$. La PME relativa viene detta dunque AGAN. Similmente, le azioni preventive manutentive possono riportare il sistema allo stato ABAO quando $\rho_i = 1$ o $\omega_i^j =$

1, WNBO quando $0 < \rho_i < 1$ o $0 < \omega_i^j < 1$. Sfortunatamente, il sistema incomberà in intensità di guasto peggiori rispetto a prima se $\rho_i > 1$ o $\omega_i^j > 1$; se $\rho_i < 0$ o $\omega_i^j < 0$, il sistema sarà nello stato “better than new”, il che significa che il sistema è ad uno stato di miglioramento dell'affidabilità. Per tutti i valori di ρ_i o di ω_i^j , avremo:

$$PME \text{ è } \begin{cases} BTN \text{ se } \rho_i < 0 \text{ o } \omega_i^j < 0 \\ AGAN \text{ se } \rho_i = 1 \text{ o } \omega_i^j = 1 \\ WNBO \text{ se } 0 < \rho_i < 1 \text{ o } 0 < \omega_i^j < 1 \\ ABAO \text{ se } \rho_i = 1 \text{ o } \omega_i^j = 1 \\ WTO \text{ se } \rho_i > 1 \text{ o } \omega_i^j > 1 \end{cases}$$

Durante l'i-esimo intervallo preventivo di secondo tipo, possiamo definire il seguente lemma e corollario.

Lemma 1: se $v_i^1(t)$, ρ_i e ω_i^{j-1} sono dati, l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ dopo il j-esimo ($j = 1, 2, \dots, m_i + 1$) intervallo preventivo di tipo I nell'i-esimo intervallo preventivo di tipo II, può essere data da:

$$\lambda_i^j(t) = \begin{cases} \rho_i v_i^1(t) + (1 - \rho_i) \lambda_{i-1}^{1+m_i-1}(t) & j = 1 \\ \prod_{q=2}^j (1 - \omega_i^{q-1}) M_i^1(t) + \omega_i^{j-1} v_i^j(t) + \\ \sum_{q=3}^j \omega_i^{q-2} \prod_{l=q}^j (1 - \omega_i^{l-1}) v_i^{l-1}(t) & j = 2, \dots, m_i + 1 \end{cases} \quad (139)$$

Corollario: dopo il j-esimo intervento preventivo di tipo I, il numero di guasti cumulato $M_i^j(t)$ durante l'intervallo $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$ sarà:

$$M_i^j(t) = \begin{cases} \rho_i W_i^1(t) + (1 - \rho_i) M_{i-1}^{1+m_i-1}(t) & j = p = 1 \\ \prod_{q=2}^j (1 - \omega_i^{q-1}) M_i^1(t) + \omega_i^{j-1} W_i^j(t) + \\ \sum_{q=3}^j \omega_i^{q-2} \prod_{l=q}^j (1 - \omega_i^{l-1}) W_i^{l-1}(t) & j = 2, \dots, m_i + 1 \end{cases} \quad (140)$$

Dove il numero di guasti cumulato $M_i^j(t)$ nell'intervallo $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$ è la stima matematica dell'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$.

$$M_i^j(t) = E[\lambda_i^j(t)], W_i^j(t) = E[v_i^j(t)] \quad (141)$$

Se inoltre, le tipologie di manutenzione preventiva possono essere ignorate, il modello manutentivo ottimale può essere descritto dalla seguente:

$$\begin{aligned} \lambda_i(t) = & \prod_{q=2}^i (1 - \omega_{q-1}) \lambda_1(t) + \omega_{i-1} v_i(t) \\ & + \sum_{q=3}^i \omega_{q-2} \prod_{l=q}^j (1 - \omega_{l-1}) v_{l-1}(t) \end{aligned} \quad (142)$$

mentre il numero di guasti cumulato sarà:

$$\begin{aligned} M_i(t) = & \prod_{q=2}^i (1 - \omega_{q-1}) M_1(t) + \omega_{i-1} W_i(t) \\ & + \sum_{q=3}^i \omega_{q-2} \prod_{l=q}^j (1 - \omega_{l-1}) W_{l-1}(t) \end{aligned} \quad (143)$$

Lemma 2:

sia $\rho_i = \omega_{i+1}^0 \cdot \rho_0 = \omega_1^0 = 1$. Se $v_1^1(t)$, ρ_i e ω_i^{j-1} sono dati, allora l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ dopo il j -esimo ($j = 1, 2, \dots, m_i + 1$) intervento preventivo di tipo I nell' i -esimo periodo preventivo di tipo II è:

$$\begin{aligned} \lambda_i^j(t) = & \sum_{q=1}^j \omega_i^{q-1} v_i^q(t) \prod_{l=1}^{j-q} (1 - \omega_i^{j-l}) \\ & + \left[\sum_{k=1}^{i-1} \sum_{q=1}^{m_k} \omega_k^{q-1} v_k^q(t) \prod_{l=1}^{m_k-q} (1 - \omega_k^{m_k-l}) \right. \\ & \left. \sum_{k+1}^{i-1} \sum_{q=1}^{m_{k+1}} (1 - \omega_{k+1}^{q-1}) \prod_{q=1}^j (1 - \omega_i^{q-1}) \right] \end{aligned} \quad (144)$$

Questa equazione si può facilmente ottenere mediante il metodo matematico di induzione.

4.1.4 Formulazione del modello mediante la memoria d'ordine p

Proviamo ad introdurre il concetto della memoria d'ordine come segue. Si suppone che le prime p azioni preventive debbano influenzare l'intensità di guasto attuale, cioè, p è definita "memoria d'ordine". Pertanto, dopo la j -esima ($j = 1, 2, \dots, m_i$) azione preventiva di tipo I, l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ basata sull'equazione 3 con la memoria d'ordine p può essere discussa nei seguenti casi.

Caso 1:

se $p = 1$, significa che l'intensità di guasto è affetta solamente dalle ultime azioni preventive. Pertanto, si ha la (145):

$$\lambda_i^j(t) = \begin{cases} \begin{cases} \rho_i v_i^1(t) + (1 - \rho_i) \lambda_{i-1}^{1+m_i-1}(t) & j = p = 1 \\ v_i^1(t) \text{ è calcolato con } \lambda_{i-1}^{1+m_i-1}(t) \end{cases} \\ \begin{cases} \omega_i^{j-1} v_i^2(t) + (1 - \omega_i^{j-1}) \lambda_i^{j-1}(t) & m_i + 1 \geq j \geq 2 \\ v_i^1(t) \text{ è calcolato mediante } \lambda_i^{j-1}(t) \end{cases} \end{cases}$$

Nel caso 1, se le j -esima azione preventiva di tipo I vengono eseguite nell' i -esimo periodo manutentivo $(T_{i(j-1)}, T_{ij})$, sia $v_i^1(t)$ assimilato all'intensità di guasto $\lambda_i^{j-1}(t)$ dopo la $(j - 1)$ -esima azione preventiva eseguita. In accordo all'equazione (138), in questo caso, si ha l'equazione (145).

Caso 2: se $p \geq j$, l'intensità di guasto iniziale $v_i^1(t)$ dovrebbe essere posta uguale all'intensità di guasto $\lambda_z^h(t)$ dell' h -esima azione preventiva di tipo I o tipo II durante il periodo $(T_{z(h-1)}, T_{zh})$. In accordo al lemma 2, l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ dovrebbe essere:

$$\begin{aligned}
\lambda_i^j(t) = & \sum_{q=1}^j \omega_i^{q-1} v_i^q(t) \prod_{l=1}^{j-q} (1 - \omega_i^{j-1}) \\
& + \sum_{q=h}^{m_z} \omega_z^{q-1} v_z^q(t) \prod_{l=1}^{j-q} (1 - \omega_i^{j-1}) \\
& + \left[\frac{\sum_{k=z+1}^{i-1} \sum_{q=1}^{m_k} \omega_k^{q-1} v_k^q(t) \prod_{l=1}^{m_k-q} (1 - \omega_k^{m_k-1})}{\prod_{k+1}^{i-1} \prod_{q=1}^{m_k+1} (1 - \omega_{k+1}^{q-1}) \prod_{q=1}^j (1 - \omega_i^{q-1})} \right] \quad (146)
\end{aligned}$$

Dove $v_1^1(t) = \lambda_z^h(t)$ e $h = (1 + m_z - p + j + \sum_{z+1}^{i-1} m_q)$. Nel caso 2, se la memoria d'ordine p , $v_1^1(t)$, ρ_i e ω_i^{j-1} sono noti, allora l'intensità di guasto $\lambda_i^j(t)$ con la memoria d'ordine p può essere facilmente determinata dall'equazione appena riportata.

4.1.5 Procedura del modello

In accordo alle assunzioni precedenti, la riparazione del guasto non cambia l'intensità di guasto. Pertanto, il processo di rottura può essere modellato utilizzando un processo di conteggio dei guasti. Considerando la funzione continua $M_i^j(t)$ del processo di conteggio dei guasti $\{M_i^j(t_k)\}$, l'intensità di guasto stimata $\hat{\lambda}_i^j(t)$ può essere ottenuta da $M_i^j(t)$.

Il processo di conteggio dei guasti più comune è il cosiddetto "Power-Law Process". Tal processo, con il parametro di locazione, è descritto da:

$$E[M_i^j(t)] = [(t + \gamma_i^j)/\alpha_i^j]^{\beta_i^j} \quad (147)$$

Pertanto, la PME può essere determinata sequenzialmente utilizzando il seguente processo di modellazione.

Step 1. Trasformazione dei dati e pre-processo. L'input richiesto è il conteggio dei dati di guasto. Se i dati registrati sono i tempi di guasto, essi devono essere trasformati in dati di conteggio del guasto come espresso nella tabella 6.

Step 2. Omogeneizzazione dei dati. Dai valori in tabella, il tempo tra due azioni preventive successive di tipo 1 è eterogeneo, per cui non tutti gli intervalli

$p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{ij}$ sono uguali. Il problema di eterogeneità può essere risolto con l'interpolazione o l'estrapolazione. Per esempio, una semplice relazione lineare di interpolazione può essere descritta in questo modo:

$$M_i^j(t_k) = M_i^j(t_{k-1}) + (t_k - t_{k-1}) \frac{M_i^j(t_{k+1}) - M_i^j(t_{k-1})}{t_{k+1} - t_{k-1}} \quad (148)$$

Step 3. Determinazione del processo di guasto intrinseco. In questo step, il primo processo di rottura ottenuto può essere considerato come un processo di rottura intrinseco.

Step 4. Modellazione di $M_i^j(t_k)$ con un processo a conteggio di guasto, ad esempio il processo detto "Power-Law". I parametri del modello possono essere stimati minimizzando la somma degli errori al quadrato (SSE):

$$SSE = \sum_{k=1}^{p_{ij}} [M_i^j(t_k) - E[M_i^j(t_k)]]^2 \quad (149)$$

Dove $E[]$ è il valore atteso.

Minore è il valore di SSE, maggiore è il fit fra i parametri del modello ed i dati. Possono essere utilizzati anche altri modelli di *point process* di guasto, come il metodo del "χ quadro".

Step 5. Stima della PME, ρ_i e ω_i^j . In accordo con l'equazione (139), l'efficienza manutentiva può essere valutata minimizzando la SSE, che è espressa come:

$$SSE = \sum_{k=1}^{p_{ij}} [\widehat{M}_i^j(t_k) - M_i^j(t_k)]^2 \quad (150)$$

Dove $\widehat{M}_i^j(t_k)$ è il numero cumulato di guasti in accordo con l'equazione (147).

4.1.6 Verifica del modello

Per un migliore fit dei dati, si introduce il miglioramento nel MTBF (mean time between failure), che viene denotato con $\Delta MTBF$.

$$\Delta MTBF_i^j = MTBF_i^j - MTBF_i^{j-1} \quad (151)$$

Il miglioramento nel MTBF può essere considerato come una manifestazione subordinata all'efficienza manutentiva. Se il cambio dei trend del $\Delta MTBF$ e dell'efficienza manutentiva sono consistenti, allora possiamo concludere che il metodo di modellazione proposto è efficace. Inoltre, la somma minima degli errori al quadrato tra $\Delta MTBF$ e l'effetto di manutenzione, dove va eseguita una normalizzazione 0-1, può anche essere utilizzata per misurare la bontà del fit, espressa come:

$$SSE = \sum_j [\Delta MTBF_i^j - \rho_i - \omega_i^j]^2 \quad (152)$$

Minore è il valore dell'SSE, migliore sarà l'efficacia del modello.

4.1.7 Esempio numerico di Zhao: dati di guasto di una gru

Per illustrare il processo sopra menzionato, si presenta un esempio numerico basato sui dati di guasto relativi ad una gru; i dati sono estratti dall'articolo di Zhao²³.

Step 1. Trasformazione dei dati e pre-processo. Il dato originario è il *time between failure* di una gru con cassone a doppio portale con capacità di sollevamento nominale pari a 10 tonnellate. Questi dati originari vengono dunque trasformati in dati di conteggio del guasto. I risultati sono poi riportati nell'appendice B.

Step 2. Modellazione del numero cumulato di guasti mediante un processo di conteggio del guasto. Il modello *power-law* con il parametro di locazione è quello che meglio si addice all'esempio numerico in questione; i valori stimati dei parametri sono riportati in tabella 7.

Time/PM	1st PM	2nd PM	3rd PM	4th PM	5th PM	6th PM	SSE
MTBT*	83.51	77.69	70.73	65.14	60.42	55.81	—
Improvement	0.00	5.82	6.96	5.59	4.72	4.61	—
α	319.97	229.06	286.77	405.54	369.23	226.82	—
β	1.53	1.38	1.58	1.87	1.9091	1.60	—
γ	244.36	153.33	181.98	437.27	287.40	159.00	—
Proposed model	—	0.1202	0.1702	0.1346	0.1166	0.1005	0.0021
Zhao et al. [39]	—	0.0720	0.1633	0.1523	0.1580	0.0562	0.0095
Jiang [14]	—	0.0677	0.0837	0.8080	0.0560	0.1028	0.0080

MTBT* Given by the reference Zhao et al. [39].

Tabella 7 – risultati numerici dell'analisi

Step 3. Omogeneizzazione dei dati. Nell'esempio numerico, per ricavare la stima dei valori relativi, viene utilizzato il metodo di estrapolazione. I valori stimati sono riportati nella tabella 7.

Step 4. Determinazione del processo di guasto intrinseco. In questo step, poniamo il processo di primo guasto come il processo di guasto intrinseco. Pertanto, il processo di guasto intrinseco di questo esempio è:

$$M_i(t_k) = [(t_k + 244.36)/319.97]^{1.53}$$

Step 5. Stima dell'efficienza manutentiva (PME). Per dimostrare la fattibilità ed efficienza del modello proposto, occorre effettuare un confronto ed una verifica, di seguito riportati.

Nell'articolo di Zhao viene indicato sol simbolo δ_i una misurazione integrata, la quale considera sia la progettazione iniziale che la qualità della produzione, il clima, l'ambiente e la manutenzione eseguita. Questo indice viene calcolato nel seguente modo:

$$\delta_i = 1 - \frac{MTBF_{i+1}}{MTBF_i}$$

In altre parole, l'efficienza manutentiva è definita come il tasso di deterioramento, il quale è rappresentato in figura 3. Jiang²⁴ nel suo articolo del 2012 propone un fattore chiamato "di accelerazione" $k(z)$ per descrivere il processo di deterioramento, tale per cui:

$$\varphi_i = \frac{k(z_{i+1}) - k(z_i)}{k(z_{i+1})} \quad (153)$$

Dove φ_i può essere utilizzato per descrivere l'efficienza manutentiva, come presentato in figura 10.

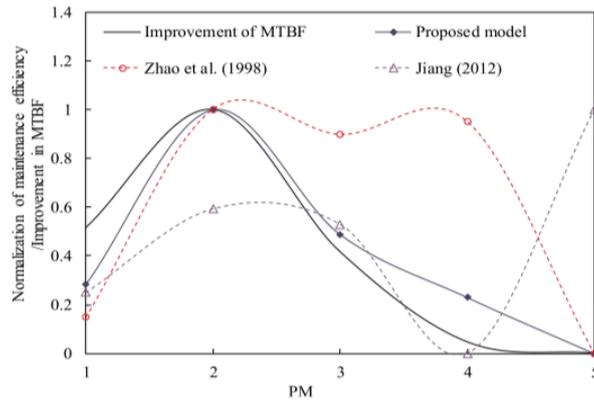


Figura 10 – fit dei risultati e confronto

Dalla figura si osserva che il modello più coerente è quello proposto con il miglioramento del MTBF, pertanto si può concludere che è il modello più appropriato. Inoltre, la SSE del modello proposto è quello più basso riportato dalla tabella 3. Anche questo fattore indica che questo modello è migliore degli altri comparati.

4.1.8 Applicazione della politica preventiva proposta agli autobus urbani

Ad oggi (2020), la vita media progettata per un autobus urbano delle città cinesi pari a 8 anni. Per migliorare l'affidabilità operativa e la sicurezza, le aziende produttrici adottano tre tipologie di manutenzione preventiva. Le azioni preventive di tipo III sono eseguite sugli autobus due volte nel loro intero ciclo di vita. Il primo periodo di tempo tra le azioni manutentive successive è pari a quattro anni, mentre il secondo è di due anni. La frequenza delle azioni preventive di tipo II è pari a tre volte l'anno. Inoltre, durante il ciclo di manutenzione preventiva di tipo II, vengono eseguite azioni preventive di tipo I due volte al mese. Nell'intervallo di tempo fra due azioni preventive consecutive, avvengono alcuni guasti operazionali, dopo i quali l'autobus viene riportato al suo stato di funzionamento normale mediante interventi correttivi di tipo minimo. Gli autori dell'articolo di Zhao hanno raccolto i dati operazionali relativi a 22 autobus posti in operatività il 24 agosto del 2005. I dati raccolti includono il *failure time*, il costo di riparazione, il tempo di inattività e le informazioni circa la preventiva eseguita a partire dal primo di settembre del 2006 fino al 31 dicembre del 2009. Considerando come esempio il bus numero 2,

l'appendice C riporta il numero di guasti cumulati, mentre l'appendice D il numero medio di guasti cumulati dell'intera flotta di autobus. A causa del numero limitato di guasti durante i periodi di preventiva di tipo I e del ridotto numero di politiche manutentive relative, si modella l'efficienza manutentiva relativa alle azioni preventive di tipo II senza considerare l'effetto della preventiva di tipo I.

Dall'appendice C è possibile osservare che il numero cumulato di guasti relativi al bus numero 2 è eterogeneo. In questo caso, ci sono due metodi possibili per modellare l'efficienza manutentiva dell'intera flotta di autobus. Il primo metodo consiste nel valutare l'efficienza manutentiva preventiva (PME) di ogni bus, e di calcolare la PME media complessiva. Il vantaggio di questo metodo risiede nel fatto che è così possibile ottenere la PME di ogni autobus. Tuttavia, dopo diversi tentativi, risulta che raccogliere informazioni accurate su ciascun autobus porta a dati con caratterizzati da elevata incertezza. Pertanto, si considera l'intera flotta di autobus per modellare l'oggetto della preventiva e, la PME media, può essere ottenuta come segue:

step 1. Omogeneizzazione dei dati. Dall'appendice C, si osserva che il numero di guasti cumulato è eterogeneo. Utilizziamo un metodo di estrapolazione delle informazioni relative agli autobus urbani considerati. Il numero medio di guasti relativi all'intera flotta è contenuto nell'appendice D. Al fine di ridurre gli errori causati dalle previsioni, verranno considerati solamente i dati relativi ai primi 22 istanti di osservazione.

Step 2. Determinazione del processo di guasto intrinseco. In questo step, il primo processo di guasto ottenuto può essere considerato come il processo di guasto intrinseco. Si seleziona il modello di *power-law* con parametro di locazione per modellare i dati di guasto conteggiati.

Time/PM	1st PM	2nd PM	3rd PM	4th PM	5th PM	6th PM	SSE**
MTBF Improvement	2.30	1.42	2.00	-1.75	2.44	0.25	—
Normalization	0.96	0.76	0.89	0.00	1.00	0.48	—
Jiang [14]	0.39	0.06	0.23	-0.23	0.08	0.32	0.52
<i>P</i> = 6	0.21	0.05	0.18	-0.14	0.14	0.22	0.38
SSE*	42.36	7.63	5.06	8.21	133.29	167.37	(363.92)
<i>P</i> = 5	0.21	0.05	0.18	-0.14	0.14	-0.55	0.53
SSE*	42.36	7.63	5.06	8.21	133.29	543.28	(739.83)
<i>P</i> = 4	0.21	0.05	0.18	-0.14	-0.89	1.54	1.98
SSE*	42.36	7.63	5.06	8.21	190.86	275.94	(530.06)
<i>P</i> = 3	0.21	0.05	0.18	0.63	5.74	0.38	2.40
SSE*	42.36	7.63	5.06	4.27	207.95	513.97	(781.24)
<i>P</i> = 2	0.21	0.05	-1.49	1.63	0.52	-0.66	2.22
SSE*	42.36	7.63	10.17	1.68	148.18	653.37	(863.39)
<i>P</i> = 1	0.21	-0.35	6.13	-1.57	-1.94	0.07	1.87
SSE*	42.36	16.50	36.29	37.11	253.39	265.02	(650.66)

SSE*: calculated by Equation [17]. SSE**: calculated by Equation [19] with normalized values. () is the summarized SSE*.

Tabella 8 – risultati del modello

Step 3. Stima della PME. Nel processo di stima, sono stati utilizzati i dati di conteggio relativi ai primi 21 istanti di osservazione. Dall'equazione (139), si ottiene la PME relativa alla preventiva di tipo II, come presentato nella tabella appena riportata. Per verificare l'efficacia del modello, sono presentati i confronti fra il miglioramento standardizzato in MTBF e la PME; i risultati sono mostrati in figura 4. Inoltre, i risultati di Jiang sono riportati nella tabella 8.

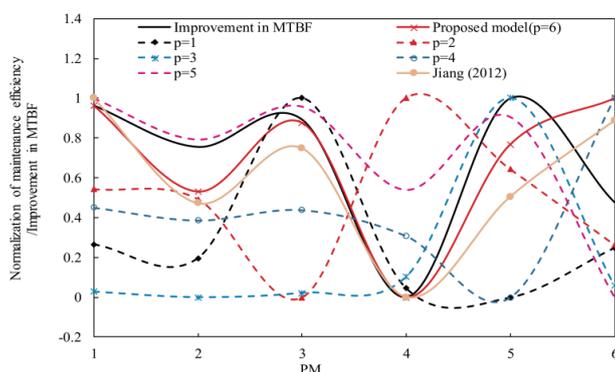


Figura 11 – risultati del modello e confronto con la memoria d'ordine *p*

Dalla tabella 8, in cui i risultati ottimali sono riportati in grassetto, si nota che il modello proposto fornisce i valori ottimali della SSE per l'equazione (152). La figura (11) mostra che le variazioni ed i cambi di trend tra il miglioramento normalizzato in MTBF e la PME stimata dal modello proposto sono molto coerenti, ad eccezione del caso relativo alla sesta preventiva applicata. Il modello proposto presenta un valore di SSE più piccolo rispetto ai risultati riportati da Jiang nel 2012. È ragionevole concludere che il metodo proposto è molto efficace.

Nel modello manutentivo preventivo sequenziale imperfetto proposto, la misura della PME è un valore arbitrario. In questa applicazione agli autobus urbani, l'efficienza della quarta azione preventiva di tipo II è -0.14. Per un sistema in deterioramento, un valore di PME minore di 0 significa che l'intensità di guasto del sistema è migliorata. Valori compresi tra 0 ed 1 indicano che le azioni preventive riportano i bus ad uno stato *better than before but worse than new*. Dalla tabella 8, il miglioramento in MTBF relativo alla quarta azione manutentiva di tipo II è solo pari a -1.75. Ovviamente, la PME stimata è coerente con il cambio di trend del miglioramento in MTBF ad eccezione del sesto intervento preventivo. Inoltre, la tabella mostra anche la stima della PME con la memoria d'ordine p . Per quanto si osserva, il risultato migliore di fit coi dati di guasto è quello con la più ampia memoria d'ordine p . Queste conclusioni sono coerenti coi risultati di Toledo, Freitas, Colosimo e Gilardoni²⁵.

4.1.9 Analisi di correlazione tra la PME ed i costi della politica preventiva

In tabella 9 sono raccolti i dati relativi ai costi della politica preventiva, di quella correttiva e del tempo di inattività per cinque o sei azioni preventive.

PME	PM cost (CNY)	CM cost (CNY)	Total cost (CNY)	PM downtime (Minute)
-0.14	301.41	358.64	660.05	54.99
0.05	169.85	410.27	580.12	59.56
0.14	220.26	445.00	665.26	60.80
0.18	248.29	459.31	707.59	48.80
0.20	281.23	500.00	781.23	44.49

Tabella 9 – costi della PM, costi della CM e tempo di inattività dovuto alla PM

I costi della politica preventiva (o tempi di inattività) sono i costi osservati relativamente all' i -esima azione preventiva di tipo II. Il costo della politica correttiva è il costo osservato nell'intervallo (T_{i-1}, T_i) della manutenzione preventiva eseguita. Le relazioni fra i costi, i tempi di inattività e la PME sono rappresentati nelle figure 12 e 13.

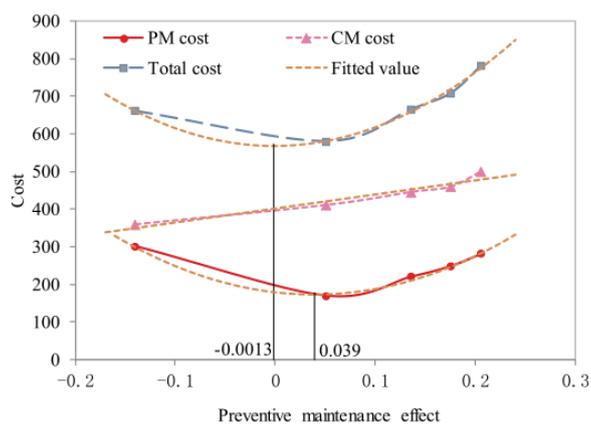


Figura 12 – analisi di correlazione tra la PME e il costo

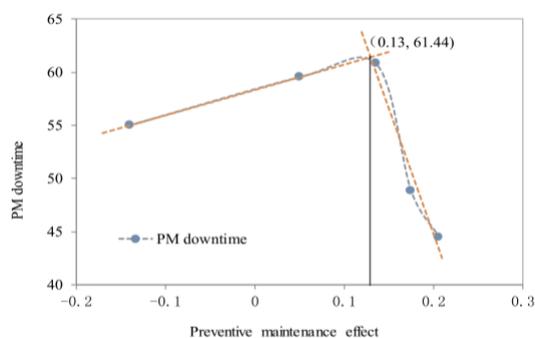


Figura 13 – analisi di correlazione fra la PME ed il tempo di inattività della PM

Per quel che riguarda i costi di manutenzione, le azioni preventive mal riuscite si riversano in un numero di guasti crescente e in un maggior costo della politica correttiva. La figura 10 mostra che il costo della manutenzione correttiva aumenta con valori della PME crescenti. Il costo della preventiva ed il costo totale (dovuto alla somma della politica preventiva e di quella correttiva) inizialmente diminuiscono, ma poi aumentano con valori crescenti dell'efficienza manutentiva PME. Nel mentre, i costi della preventiva aumentano rapidamente dopo che la PME diminuisce al di sotto di un certo valore. È possibile rappresentare le curve di costo della politica preventiva e del costo totale con una distribuzione polinomiale $f(x) = ax^2 + bx + c$, con a, b e c parametri del modello di valore rispettivamente pari a (3939.61, -307.59, 180.82) e (4837.60, 12.74, 567.51).

Nel mentre, la curva relativa alla politica correttiva può essere rappresentata dalla seguente $f(x) = 307.71x + 402.84$. Si nota che il costo più basso della politica preventiva (o il costo totale) viene ottenuto quando la PME è -0.0013 (o 0.039).

Da un'altra prospettiva, il tempo di inattività della preventiva prima aumenta e poi diminuisce per valori crescenti della PME, come rappresentato in figura 11. Tale figura mostra inoltre che minore è il tempo di inattività investito per la preventiva, peggiore sarà il valore della PME. Quando il tempo di inattività investito per la preventiva è maggiore, si riescono ad ottenere valori più elevati della PME. I risultati pratici di questo modello ci pongono l'attenzione sulla ricerca del giusto *trade-off* tra il valore della PME che si vuole ottenere ed il costo della manutenzione preventiva da sostenere, o il tempo di inattività per la preventiva da dedicare.

4.1.10 Conclusioni del modello

In questo studio è stato presentato un metodo per la modellazione della PME secondo più tipologie di politiche preventive da implementare per un sistema complesso, con caso applicativo relativo ad autobus di linea in una città della Cina.

La prima menzione del modello proposto va alla considerazione della PME come una variabile e non come una costante. In particolare, i cambiamenti del valore dell'intensità di guasto dovrebbero avere luogo sugli ultimi intervalli della politica preventiva. Il cambio di qualità è proporzionale alla differenza nel valore dell'intensità di guasto tra le osservazioni di guasto iniziali e finali, e la proporzione può variare da valori negativi a valori positivi. La seconda menzione del modello proposto è relativa al fatto che esso può essere utile nella trattazione di diverse situazioni con diversi valori di efficacia delle azioni manutentive preventive eseguite. I risultati derivano dall'applicazione al caso reale di una flotta di autobus urbani ed i dati sono stati raccolti da Zhao e altri collaboratori.

Ci sono alcune limitazioni di questo studio che potrebbero essere affrontate in futuro. La prima riguarda il fatto che la misura della PME può assumere valori arbitrari. Tuttavia, l'efficienza manutentiva ha comunque dei valori limite che sono forniti dall'equazione (138).

In seconda istanza, i dati della manutenzione sono un prerequisito necessario per il modello proposto. Considerando l'esempio proposto, non ci sono stati abbastanza dati per descrivere la manutenzione preventiva di tipo I, pertanto, la PME relativa

alla preventiva di primo tipo è difficile da definire. L'accuratezza dei risultati di questo modello dipende dunque dal numero di dati che si hanno a disposizione.

La terza limitazione riguarda il fatto che per ottenere una politica manutentiva appropriata, il modello manutentivo ottimale prevede la giusta considerazione dei *trades-off* fra i costi di manutenzione, i tempi di inattività per la preventiva e la PME. Infine, sono stati presentati due metodi per confrontare l'efficacia del buon fit coi dati; uno è relativo all'osservazione della coerenza fra la PME ed il miglioramento del MTBF, l'altro riguarda il confronto con la SSE. Tuttavia, metodi di modellazione differenti derivano da misure di affidabilità diverse e ogni modello è da adeguare al contesto applicativo relativo. Il modello proposto, pertanto, vuole essere un completamento e allo stesso tempo un supplemento dei modelli presentati ed esistenti⁸.

Appendix B

Transformation data of crane from Zhao et al. [39] is as follows:

Time/PM	1st PM	2nd PM	3rd PM	4th PM	5th PM	6th PM
90	1	0	0	1	1	1
180	1	2	2	2	1	2
270	1	2	2	3	2	4
360	3	2	3	4	3	4
450	3	4	4	5	4	5
540	5	5	4	5	5	6
630	5	6	5	6	6	7
720	5	6	7	7	7	8
810	6	8	7	8	8	9
900	8	9	8	9	9	11
990	8	10	9	11	11	13
1080	9	10	10	12	12	15
1170	10	12	11	13	13	17
1260	11	13	13	14	16	19
1350	12	14	14	15	17	22
1440	13	14	16	18	19	24
1530	14	15	18	19	21	25
1620	15	16	19	21	23	27
1710	16	17	20	23	25	29
1800	17	18	21	24	27	30
1890	18	20	22	26	30	33.6844
1980	19	21	24	28	31.9778	36.0795
2070	20	23	26	30	34.4447	38.5357
2160	21	24	28	32.0363	36.9988	41.0519
2250	23	26	30	34.1399	39.6397	43.6271
2340	25	27	31.2784	36.3054	42.3672	46.2606
2430	27	29	33.0644	38.5327	45.1809	48.9514
2520	28	30	34.8866	40.8214	48.0807	51.6987
2610	29	30.9315	36.7446	43.1713	51.0663	54.5017
2700	30	32.3283	38.6379	45.5821	54.1373	57.3598

Appendix C

Cumulative number of failures of Bus No. 2 is as follows:

Time/PM	1st PM	2nd PM	3rd PM	4th PM	5th PM	6th PM	7th PM
1	1	3	1	1	0	2	2
2	1	4	1	1	0	3	2
3	1	4	1	1	2	3	3
4	1	4	2	1	2	4	5
5	1	6	5	2	2	5	9
6	1	7	6	3	3	7	10
7	1	8	6	3	3	7	12
8	1	9	8	3	3	7	14
9	1	9	10	4	3	7	14
10	1	9	10	5	3	7	16
11	1	9	10	5	4	7	17
12	1	11	11	5	5	7	20
13	1	11	12	7	6	8	21

9

Y. Zhou, et al.

Reliability Engineering and System Safety 198 (2020) 106871

14	1	11	14	8	8	10	21
15	1	12	14	10	10	10	24
16	1	12	14	11	12	11	25
17	1	12	16	11	14	11	26
18	2	11	17	13	14	17	27
19	3		19	14	16	21	28
20	3		21	14	18		30
21	4		23	15	19		31
22	4		24				
23	4						
24	4						
25	5						
26	7						

Appendix D

Cumulative number of failures of Bus fleet is as follows:

Time/PM	1st PM	2nd PM	3rd PM	4th PM	5th PM	6th PM	7th PM
1	0.57	0.95	0.76	0.86	1.14	0.86	1.76
2	0.95	1.71	1.48	2.48	2.10	1.71	2.71
3	1.38	2.62	2.38	3.00	2.90	2.43	4.05
4	1.76	3.24	3.43	4.33	3.62	2.95	5.57
5	2.19	4.10	4.43	5.67	4.71	3.86	7.38
6	2.43	5.10	5.33	6.95	5.57	4.90	8.81
7	3.05	5.71	6.19	8.24	6.71	6.48	10.14
8	3.48	6.86	6.95	8.76	7.43	7.14	11.33
9	4.10	7.90	7.81	9.90	8.05	7.90	13.19
10	4.43	8.71	8.14	11.24	8.90	8.62	14.81
11	5.00	9.48	9.05	12.71	10.33	9.71	16.30
12	5.48	10.57	10.38	13.57	11.33	10.76	17.83
13	6.10	11.19	11.19	14.57	12.00	11.71	18.94
14	6.76	11.57	12.29	15.48	12.76	12.90	20.81
15	7.39	12.24	12.95	16.71	13.71	13.95	22.81
16	7.95	12.86	14.14	18.05	14.57	15.19	23.80
17	8.64	13.29	15.05	19.33	15.43	17.29	25.29
18	9.33	14.00	15.48	20.70	16.33	19.47	27.77
19	10.14	15.00	16.71	22.11	17.32	21.35	29.31
20	11.18	15.35	17.62	23.05	18.41	25.69	29.36
21	12.07	15.33	18.60	24.06	19.43	27.17	30.10
22	12.99	17.50	19.17	26.75	18.60	31.50	31.67
23	14.08	19.67	19.81	29.00	24.00	33.33	27.67
24	15.28	24.00	20.89	31.00	25.00	35.67	31.00
25	16.56		22.80		26.00	44.00	20.00
26	18.00		15.00			45.00	20.00

V. Conclusioni

In questa trattazione sono stati analizzati nel dettaglio diversi modelli di manutenzione preventiva, a partire dai primi approcci matematici sviluppati dai pionieri delle politiche preventive, Barlow e Hunter, fino a quelli più recenti e di natura più applicativa ai casi pratici, i quali modelli, sebbene implicino l'utilizzo di nuovi fattori e siano descrivibili da formulazioni più complesse e specifiche, devono la loro natura essenziale proprio agli studi dei ricercatori citati, i quali, impiantando le basi del loro lavoro nella teoria dell'affidabilità, hanno battuto la giusta strada per la ricerca futura nel campo della manutenzione in senso lato, e preventiva su base statistica in particolare.

Naturalmente, fa da sfondo agli studi della manutenzione lo sviluppo dei processi produttivi che, a partire dalla metà del secolo scorso, si è avvalso via via di mezzi tecnologici sempre più sofisticati e costosi. Diventa così necessaria una corretta gestione delle risorse produttive disponibili, degli investimenti che ne derivano e dell'adozione di politiche manutentive adeguate, le quali diventano così di grande importanza per l'economia complessiva di un'azienda.

L'analisi condotta evidenzia l'iter cronologico, teorico e analitico dei modelli presentati. Si è visto, ad esempio, come le prime politiche di sostituzione a blocchi (*Block replacement policy*) risultassero di facile applicazione teorica ma, allo stesso tempo, come presentassero evidenti lacune sotto il punto di vista pratico-economico, in quanto nelle politiche di questo tipo si vanno a rimuovere e sostituire un certo numero di componenti di un sistema a precisi istanti di tempo periodici, indipendentemente dalla storia dei guasti precedente. La conseguenza diretta è quella per cui si tendono ad eliminare sia componenti guasti, che componenti sani, in numero maggiore e maggiormente dispendioso rispetto alle politiche di tipo *age-based*. Queste politiche infatti hanno ricevuto una forte attenzione nella letteratura, e le formulazioni ottenute sono più dettagliate e precise rispetto alle politiche di *block replacement*. Tuttavia, sono le nozioni di politiche periodiche e sequenziali sulle quali la ricerca futura ha davvero improntato il proprio interesse, insieme alle considerazioni, essenziali, relative alle funzioni del tasso di guasto. L'ipotesi alla base dello studio affrontato sulle politiche manutentive preventive dei modelli più

recenti è che i componenti presentino un *failure rate* crescente, a conferma del fatto che i sistemi complessi si deteriorano nel tempo, per le circostanze ambientali e di lavoro in cui operano, in seguito all'applicazione della manutenzione preventiva e correttiva. Nella quasi totalità dei modelli affrontati, la riparazione al guasto (manutenzione correttiva) è di tipo *minimal*, il che comporta che il sistema possa tornare ad uno stato di funzionalità tale per cui esso può riprendere a lavorare, ma che è ben distante da uno stato di salute pari al nuovo. Una menzione di nota va in questo senso al modello di manutenzione imperfetta introdotto da Barlow e Proschan a metà degli anni ottanta del secolo scorso. Si tratta forse della prima vera considerazione del lato pratico dei modelli manutentivi preventivi studiati, che tiene conto cioè dell'aspetto realistico dello stato di salute dei componenti subito dopo il guasto, e quindi, la riparazione.

Le politiche sequenziali studiate, a partire dai modelli di Barlow e Proschan (1965) fino a quelli fondati sul processo geometrico generalizzato più recenti, si basano sull'assunzione che i periodi di tempo di schedulazione della politica preventiva diminuiscono via via con l'età di utilizzo del componente e con il numero di interventi di riparazione. Il sistema viene quindi mantenuto a sequenze di intervalli che possono avere lunghezza temporale differente. Tale considerazione va a tenere conto indirettamente anche del tempo di utilizzo rimanente del componente, a differenza della politica preventiva di tipo periodico, gli intervalli di schedulazione, nella politica sequenziale, sono verificati solo per i successivi istanti di funzionamento, e non, quindi, a priori, per tutta la vita di utilizzo del componente. Sebbene le politiche di tipo periodico risultino di più facile progettazione e immediata applicabilità, le politiche sequenziali permettono di ottenere risultati più soddisfacenti in termini di *preventive maintenance efficiency* (PME), e quindi di costi, motivo per cui sono state largamente approfondite nel corso degli ultimi anni da ricercatori di diversi paesi, soprattutto quelli appartenenti alle comunità più avanzate tecnologicamente e prospettate al futuro dell'industria produttiva. A partire dal nuovo millennio infatti, anche i modelli periodici e sequenziali sono diventati più dettagliati e sofisticati; ad esempio, vengono introdotti i fattori di aggiustamento nella funzione di *hazard rate* e nell'età effettiva, al fine di modellare più realisticamente gli effetti delle politiche preventive. Analogamente, è stato

introdotto il concetto di *failure mode* per descrivere la rottura di un componente in termini di quale funzione del componente stesso era attualmente o potenzialmente disponibile. Questo concetto, sul quale sono stati sviluppati, ad esempio, i modelli di Zequeira e Brenguen (2005), ha evidenziato l'importanza di un'accurata manutenzione preventiva, la quale, se progettata con criterio, permette di evitare o limitare la degradazione dei sistemi per quel che riguarda le modalità di guasto cosiddette *gestibili*. Tuttavia, la rimozione della degradazione relativa ad altre funzioni (modalità di guasto "*non gestibili*") è invece possibile solamente attraverso una revisione completa (*overhaul*) del sistema, che permette di riportarlo ad uno stato di salute pari al nuovo e che implica però costi maggiori. La distinzione fra modalità di guasto gestibili e non gestibili è molto importante; infatti, questi diversi tipi di guasto, concorrono in realtà alla rottura generale del sistema; sono cioè dipendenti. Tuttavia, per come specificato, è possibile, attraverso la manutenzione preventiva, limitare solamente una delle due modalità di guasto menzionate (quella relativa ai "guasti gestibili"), il che costituisce comunque un fattore positivo per la gestione di sistemi complessi con elevata interazione fra i diversi componenti. In termini affidabilistici, la dipendenza tra le modalità di guasto nei sistemi viene interpretata come un incremento della funzione di guasto per quel che riguarda le modalità dei guasti *gestibili*, come conseguenza della degradazione relativa alle modalità dei guasti *non gestibili*.

Inoltre, la manutenzione preventiva pianificata permette di osservare facilmente che il costo che deriva da una sostituzione non programmata di un sistema guasto è generalmente maggiore del costo della sostituzione programmata a fine ciclo dello stesso sistema; d'altro canto, dopo un certo numero di interventi preventivi eseguiti, la continua manutenzione preventiva è spesso equiparabile, a livello di costo, alla sostituzione del sistema stesso. Pertanto, è importante definire la lunghezza ottimale del ciclo di funzionamento al termine del quale il componente o sistema viene sostituito, per iniziare nuovamente un altro ciclo di manutenzione preventiva, ottimizzando la funzione di costo per lo specifico modello considerato. Per considerare questi aspetti, alcuni dei modelli studiati suddividono i guasti in due tipologie, guasti "minimi" e "catastrofici", i primi dei quali affrontabili con interventi lievi, ed i secondi con un certo tipo di manutenzione che non viene

pianificata, e quindi, più costosa. Lo scopo rimane sempre quello di ottenere una schedulazione della preventiva ottimale che minimizzi il costo totale per unità di tempo del modello considerato, tenendo conto delle due tipologie di guasto che possono avvenire, e quindi, delle manutenzioni necessarie al funzionamento in ambo i casi. Infine, i recenti modelli preventivi basati sul processo geometrico e geometrico generalizzato, sono ancor più generali in quanto possono essere applicati sia a sistemi in deterioramento (e quindi a *failure rate* crescente) che a sistemi in miglioramento, in funzione del valore del rapporto del processo geometrico, costante, nel primo caso, e variabile nei diversi intervalli di tempo della politica preventiva nel secondo. Il modello basato sul processo geometrico generalizzato (2017) tiene conto del fatto che gli intervalli di lavoro successivi alle riparazioni divengono via via più brevi, mentre i tempi richiesti per la riparazione sono sempre più lunghi; i sistemi cioè, nella pratica, non si deteriorano in modo uniforme, ma il livello di degradazione dopo ogni riparazione è affetto dallo stato di salute peggiorato del sistema al guasto, dalla qualità della riparazione e da altre condizioni di circostanza. Pertanto, il rapporto del processo geometrico è da considerarsi variabile col numero di riparazioni eseguite sul sistema, il che significa che si cerca di tenere conto di come, nella pratica, il *failure rate* aumenta dopo ogni intervento correttivo e dopo ogni azione preventiva eseguita. Si riesce in definitiva a tenere conto, con questo recente modello, del fatto che il sistema si deteriora più rapidamente con un numero di riparazioni crescente, così come il tempo di riparazione necessario al guasto aumenta nella stessa direzione. La flessibilità nella modellazione del tempo di vita restante per un sistema soggetto ad attività manutentive preventive è sicuramente un potenziale oggetto di studio per la ricerca futura, insieme allo studio della variazione dell'età effettiva e del processo di cambiamento del *failure rate* nel corso della vita dei componenti soggetti a manutenzione preventiva. La ricerca sta approfondendo la considerazione della *preventive maintenance efficiency* come una grandezza variabile e non come una costante. È importante infatti comprendere i vantaggi che si possono ottenere attraverso un'accurata analisi delle correlazioni fra i costi della politica preventiva, i tempi di inattività per la schedulazione e progettazione, e la variazione della PME. A seconda delle circostanze d'impiego è quindi opportuno valutare il giusto *trade-*

off tra l'investimento che si vuole sostenere per la politica preventiva, i tempi di inattività dei sistemi per la progettazione e schedulazione, e l'efficienza della *preventive maintenance* che si desidera ottenere.

È bene sottolineare tuttavia, che il requisito necessario per una buona e accurata progettazione della manutenzione preventiva è spesso e volentieri un ampio campione di dati sufficiente per la programmazione futura, aspetto non sempre risolvibile in maniera immediata in quanto in molti casi sono necessari perfino diversi anni per raccogliere informazioni di qualità in quantità tale da poter lavorare in modo preventivo con un certo grado di efficienza.

Si vuole infine ricordare che, secondo la filosofia affermata della *total productive maintenance*, la sola manutenzione preventiva non è sufficiente e che la chiave risiede nella determinazione del mix ottimale di politiche manutentive da implementare. La manutenzione del presente e del futuro dovrà essere fortemente integrata ed organica con il sistema di produzione, con l'ambizione di operare su tutti gli aspetti attinenti alla gestione tecnica delle attrezzature, prevedendo, ove possibile, il comportamento al guasto, attivando politiche di riduzione della probabilità del suo accadimento e ottimizzando altri fattori, come la gestione dei ricambi e la pianificazione degli interventi, tutti elementi di grande rilevanza per l'ottenimento del massimo vantaggio complessivo. Il presente ed il futuro sono caratterizzati da una spinta "proattiva" della manutenzione, che avrà l'obbligo di tendere sempre più ad "anticipare" il comportamento delle attrezzature, stimando le possibili cause dei problemi con il fine di eliminarle prima che possano originare conseguenze negative. La teoria affidabilistica, su cui si basa lo sviluppo e l'ottimizzazione dei modelli affrontati, si pone come mezzo operativo primario per lo studio e l'approfondimento delle politiche preventive, le quali faranno via via sempre più parte di un ampio insieme di strumenti supportati da un efficiente sistema informativo impiegati per fissare preventivamente le *performance* richieste ed attese dalle macchine, sollecitando eventuali modifiche dell'impiantistica attuate dai fornitori, ovvero eseguendo internamente interventi atti ad eliminare le cause di problemi futuri e prevedendo, infine, il consumo dei materiali di ricambio attraverso le migliori politiche per la loro gestione.

Bibliografia

1. Regattieri, A. & Manzini, R. *Manutenzione dei sistemi di produzione*. (2007).
2. Wang, H. A survey of maintenance policies of deteriorating systems. *Eur. J. Oper. Res.* **139**, 469–489 (2002).
3. Alsina, E. F., Cabri, G. & Regattieri, A. An agent-based approach to simulate production, degradation, repair, replacement and preventive maintenance of manufacturing systems. *IEEE SSCI 2014 - 2014 IEEE Symp. Ser. Comput. Intell. - CIPLS 2014 2014 IEEE Symp. Comput. Intell. Prod. Logist. Syst. Proc.* 24–31 (2014) doi:10.1109/CIPLS.2014.7007157.
4. Li, J., Mourelatos, Z. & Singh, A. Optimal Preventive Maintenance Schedule Based on Lifecycle Cost and Time-Dependent Reliability. *SAE Int. J. Mater. Manuf.* **5**, 87–95 (2012).
5. Barlow, R. E. & Proschan, F. *Mathematical Theory of Reliability*.
6. Mathematics, A. Optimum Checking Procedures Author (s): Richard E . Barlow , Larry C . Hunter and Frank Proschan Published by : Society for Industrial and Applied Mathematics Stable URL : <https://www.jstor.org/stable/2946496>. **11**, 1078–1095 (2019).
7. Optimal Preventive Maintenance Policies for Repairable Systems Author (s): D . G . Nguyen and D . N . P . Murthy Published by : INFORMS Stable URL : <http://www.jstor.org/stable/170369> REFERENCES Linked references are available on JSTOR for this article . **29**, 1181–1194 (2016).
8. Zhou, Y., Kou, G., Xiao, H., Peng, Y. & Alsaadi, F. E. Sequential imperfect preventive maintenance model with failure intensity reduction with an application to urban buses. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **198**, 106871 (2020).
9. Brown, M. & Proschan, F. Imperfect Repair. *J. Appl. Probab.* **20**, 851–859 (1983).
10. Trust, A. P. & Probability, A. Periodic and Sequential Preventive Maintenance Policies Author (s): Toshio Nakagawa Reviewed work (s): Source : Journal of Applied Probability , Vol . 23 , No . 2 (Jun . , 1986), pp . 536-542 Published by :

Applied Probability Trust Stable URL : [http](http://). **23**, 536–542 (2013).

11. Liu, T. Bin, Kang, J. S., Li, Y. Y. & Luo, G. K. Imperfect preventive maintenance model with two modes of failure. *Proceeding 2012 Int. Conf. Inf. Manag. Innov. Manag. Ind. Eng. ICIII 2012* **3**, 492–495 (2012).
12. Zequeira, R. I. & Bérenguer, C. Periodic imperfect preventive maintenance with two categories of competing failure modes. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **91**, 460–468 (2006).
13. Castro, I. T. A model of imperfect preventive maintenance with dependent failure modes. *Eur. J. Oper. Res.* **196**, 217–224 (2009).
14. Sheu, S. H. & Chang, C. C. Extended periodic imperfect preventive maintenance model of a system subjected to shocks. *Int. J. Syst. Sci.* **41**, 1145–1153 (2010).
15. Sheu, S. H. & Chang, C. C. An extended periodic imperfect preventive maintenance model with age-dependent failure type. *IEEE Trans. Reliab.* **58**, 397–405 (2009).
16. Sheu, S. H., Chang, C. C. & Chen, Y. L. An extended sequential imperfect preventive maintenance model with improvement factors. *Commun. Stat. - Theory Methods* **41**, 1269–1283 (2012).
17. El-Ferik, S. & Ben-Daya, M. Model for imperfect age-based preventive maintenance with age reduction. *J. Oper. Res. Soc.* **59**, 1644–1651 (2008).
18. El-Ferik, S. & Ben-Daya, M. Age-based hybrid model for imperfect preventive maintenance. *IIE Trans. (Institute Ind. Eng.* **38**, 365–375 (2006).
19. El-Ferik, S. & Ben-Daya, M. Model for imperfect age-based preventive maintenance with age reduction. *J. Oper. Res. Soc.* **59**, 1644–1651 (2008).
20. Lam, Y. A geometric process maintenance model with preventive repair. *Eur. J. Oper. Res.* **182**, 806–819 (2007).
21. Yeh, L. A repair replacement model. *Adv. Appl. Probab.* **22**, 494–497 (1990).
22. Wang, G. J., Zhang, Y. L. & Yam, R. C. M. Preventive maintenance models based on the generalized geometric process. *IEEE Trans. Reliab.* **66**, 1380–1388 (2017).
23. Zhao, Y., Gao, Q. & Wang, J. A general isodegrading model for predicting

mechanical equipment reliability and performance degradation. *Microelectron. Reliab.* **38**, 427–434 (1998).

24. Jiang, R. A general proportional model and modelling procedure. *Qual. Reliab. Eng. Int.* **28**, 634–647 (2012).
25. Toledo, M. L. G. De, Freitas, M. A., Colosimo, E. A. & Gilardoni, G. L. ARA and ARI imperfect repair models: Estimation, goodness-of-fit and reliability prediction. *Reliab. Eng. Syst. Saf.* **140**, 107–115 (2015).