ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea Magistrale

Interdisciplinarietà matematica-fisica: analisi di un Focus Group

Galileo, Newton, Keplero e la traiettoria dei corpi

Relatore
Prof.ssa Alessia Cattabriga

Candidato
Giordano Duo

Anno Accademico 2019-2020

Indice

Introduzione

Questa tesi nasce nell'ambito di una ricerca in Didattica della matematica, ed ha l'obiettivo di focalizzarsi sulla comprensione del concetto di interdisciplinarietà tra matematica e fisica tipica di alcuni studenti universitari iscritti al corso di laurea in Matematica . La tesi vuole indagare come questi studenti concepiscano il rapporto tra le due discipline, e quale modalità d'azione riconoscano per la matematica nel fornire un modello di una situazione fisica.

Le ricerche in didattica hanno evidenziato come spesso la visione tipica degli studenti circa il rapporto tra queste due discipline sia quella di una matematica che viene utilizzata come strumento al servizio della fisica, e di una fisica che assume il ruolo di contesto nel quale applicare le tecniche matematiche. A partire da questa problematica a livello didattico è nata una ricerca, guidata dalle professoresse Branchetti, Cattabriga e Levrini e presentata in [3], che vuole contribuire al dibattito su come sia possibile ideare attività didattiche che aiutino studenti ed insegnanti ad allargare il loro immaginario in merito, evidenziando che il ruolo della matematica nella costruzione di una teoria fisica va ben oltre il semplice essere strumento. Nell'ambito di questa ricerca si sono concentrate su un caso di studio particolare, il corpo nero di Planck, spesso trascurato a livello scolastico, e sui processi seguiti dallo stesso autore nel giungere alla rivoluzione quantistica, che ha costituito un punto di svolta nella storia della fisica.

L'obiettivo delle autrici non è fornire una descrizione del concetto di corpo nero, ma mostrare come esso costituisca un importante esempio di trattazione interdisciplinare, e come in esso si possano ritrovare differenti ruoli della matematica che vanno oltre il semplice essere strumento al servizio della fisica.

La ricerca descritta in [3] porta alla costruzione di un'attività sul corpo nero costruita a partire da articoli originali di Planck, che è stata proposta agli studenti in più anni accademici, nell'ambito dei corsi di laurea magistrale in Matematica e in Fisica, ed ha l'ulteriore obiettivo, oltre a quello descritto in precedenza, di fornire agli studenti strumenti per affrontare analoghi problemi interdisciplinari. Tale studio poggia su due domande di ricerca, e, all'interno della nostra tesi assume importanza la seconda: «Qual è l'effetto di questi materiali e di questa attività sulla comprensione e sullo sviluppo di abilità e competenze di tipo epistemologico da parte degli studenti?».

Questo elaborato, dunque, si lega indissolubilmente a tale indagine, e tenta di fornire un contributo per rispondere a questa domanda. Nello specifico, per ricercare una risposta, abbiamo strutturato un'attività di *Focus Group*, che abbiamo successivamente rivolto ad un piccolo numero di studenti selezionati tra quelli che avevano partecipato all'attività sul corpo nero durante l'anno 2018-2019, dividendoli in tre gruppi, per analizzare come e se tali studenti si fossero appropriati degli "strumenti interdisciplinari" che ci si aspettava acquisissero al termine dell'attività.

La modalità operativa del *Focus Group* consiste in un confronto di gruppo tra gli studenti, guidato da un moderatore che propone domande guida per sollecitare la discussione, e proprio a partire da essa abbiamo estrapolato i principali risultati, esposti al termine di questa tesi. Abbiamo costruito l'attività di *Focus Group* focalizzandoci su tre grandi scienziati, Galileo Galilei, Johannes Keplero e Isaac Newton, e presentando alcuni estratti originali provenienti da loro opere. Agli studenti è stato dunque richiesto di leggere questi brani originali, che abbiamo inserito, senza modifiche, all'interno di un testo che semplicemente ha la funzione di darne una breve contestualizzazione storica e di facilitarne la comprensione con frasi di collegamento; successivamente è stata intavolata una discussione a partire dal testo circa i contenuti e i processi presenti al loro interno, stimolata, come detto, mediante domande-guida poste dal moderatore. Chiaramente, tutti i brani selezionati possiedono un carattere interdisciplinare, e si possono ritrovare al loro interno alcune analogie con i ragionamenti seguiti da Planck, con i quali gli studenti avevano avuto a che fare l'anno precedente.

L'analisi fatta del transcript delle discussioni dei *Focus Group*, basata su tre "livelli di comprensione", ha l'obiettivo di valutare quanto gli studenti si siano appropriati degli strumenti dell'attività svolta sul corpo nero, e in che misura siano in grado di farli propri e riutilizzarli per la comprensione e l'analisi di argomenti e processi analoghi.

Il primo capitolo si apre con la presentazione del concetto di "discipline", i mattoni sui quali si basa l'organizzazione della didattica odierna. Successivamente vengono esposte alcune delle motivazioni per cui, negli ultimi anni, alla didattica sia stato richiesto un sempre maggiore sforzo verso una visione e un approccio interdisciplinare. Nella prima sezione vengono presentati alcuni contributi storici forniti da grandi pensatori circa la relazione tra le due discipline. Essi vogliono mettere in luce i possibili ruoli assunti dalla matematica in una visione interdisciplinare, e ripercorrere un pezzo della storia relativa alla relazione tra matematica e fisica. Nella seconda sezione, questi contributi vengono declinati all'interno di una visione didattica, esponendo quali possono essere le difficoltà tipiche del mondo scolastico, e quali sono le convinzioni che gli studenti possiedono circa il ruolo assunto dalla matematica nel modellizzare una situazione fisica. Il capitolo termina con la presentazione di tre modelli, tra cui l'importante *Modello di Uhden*, che vogliono fornire uno strumento utile ad analizzare la relazione tra le discipline, le modalità di approccio degli studenti ai problemi fisici e aiutarci nell'analisi dei processi interdisciplinari di alcuni testi.

Il Capitolo 2 è riservato alla presentazione dell'attività relativa al corpo nero di Planck, e, nella prima sezione, introduce al lettore le principali caratteristiche del ragionamento dello scienziato, sottolineandone i passaggi principali. Inoltre viene presentata anche la struttura dell'attività a cui gli studenti hanno partecipato. La seconda sezione del capitolo è dedicata ad una piccola analisi, fatta a partire da protocolli raccolti durante le lezioni e volta a ricercare quali siano le visioni degli studenti circa l'interdisciplinarietà, e che può essere utile nella successiva analisi del *Focus Group*.

Il Capitolo 3 è invece dedicato ad una breve presentazione delle modalità esecutive del *Focus Group*, e introduce l'attività sulla quale si basa la tesi.

L'attività di *Focus Group* vera e propria a cui sono sottoposti gli studenti, e che costituisce il fulcro di questa tesi, viene approfondita nel Capitolo 4. Viene presentata una descrizione dei vari estratti dei tre autori, e viene fornita al lettore una piccola spiegazione dei principali processi di ragionamento dello scienziato, per aiutarci nell'analisi della successiva discussione.

L'ultimo capitolo, il 5, è dedicato all'analisi della discussione. Nella prima parte viene presentata la modalità che abbiamo seguito per essa, e vengono esposti sia i risultati attesi circa le reazioni degli studenti, sia ciò che siamo andati a cercare all'interno della discussione. Nella seconda parte viene descritta in profondità l'analisi, basata su tre "livelli di comprensione", terminando il capitolo con alcune conclusioni personali.

Capitolo 1

L'interdisciplinarietà matematica-fisica

Obiettivo di questo capitolo è esplorare la relazione intercorrente fra la matematica e la fisica, cercando di comprendere le caratteristiche di un approccio interdisciplinare: a partire da alcuni contributi di ricerca su questo legame ci concentreremo successivamente sul piano didattico, andando ad analizzare il ruolo che la matematica assume nello studio della fisica.

Per parlare di interdisciplinarietà in un'ottica di insegnamento - apprendimento e fornirne una corretta definizione è necessario introdurre il concetto di disciplina. Questo termine è ben approfondito in [4]; le autrici definiscono le discipline, strutture portanti dell'organizzazione didattica, come «*delle forme di riorganizzazione della conoscenza, con lo scopo di trasmettere quest'ultima*» [4, p. 2]. La parola stessa disciplina deriva dal verbo latino "*discere*", cioè imparare.

In particolare, le discipline sono strutturate in maniera da rispondere all'esigenza che gli studenti, durante il loro processo formativo, acquisiscano competenze quali il problem solving, la modellizzazione, la rappresentazione, l'argomentazione, il sapersi spiegare, il saper porre domande, la comunicazione, la condivisione e la produzione.

Lo scopo delle discipline dovrebbe dunque essere quello di aiutare lo studente a comprendere gradualmente le diverse categorie di problemi che gli vengono proposti, gli approcci, gli strumenti e i criteri corretti per valutare la correttezza e l'efficacia di una procedura, di un ragionamento o di un'argomentazione.

Proprio queste competenze sono quelle che maggiormente vengono ricercate al giorno d'oggi nel mercato del lavoro, in un'epoca in continuo divenire e caratterizzata da un sempre più rapido sviluppo tecnologico. La società sempre più richiede agli individui l'acquisizione di competenze che possano essere ben spendibili in un ambiente lavorativo, coinvolgendo in ciò il mondo della didattica e le sue pratiche di insegnamento. Queste richieste mirano a far sì che gli studenti siano preparati ad affrontare i cambiamenti della società odierna (si pensi al cambiamento climatico, all'intelligenza artificiale o alle nanotecnologie). In un mondo in continuo cambiamento, in rapido ed incessante divenire, qual è il ruolo delle discipline scolastiche?

In [4] viene analizzata proprio la tensione esistente fra la rigida divisione scolastica e il potenziale educativo delle discipline: si evidenzia come le discipline falliscano nel loro obiettivo di portare all'acquisizione delle competenze richieste dalla società nel momento in cui vengono utilizzate con il solo scopo di "depositare un'informazione nella mente dello studente", e si giunge alla conclusione che per rendere più efficace in tal senso l'insegnamento sia necessario, senza accantonare le discipline, abbracciare una visione interdisciplinare. Così, le richieste della società si legano al focus didattico che guida la nostra tesi, nella quale si vuole analizzare in particolare la relazione che lega matematica e fisica, nel tentativo di approfondire la trattazione interdisciplinare di esse.

Il concetto di interdisciplinarietà, secondo la definizione data da Thompson [16, p. 16] comporta che le discipline «*interagiscano, si integrino e si fondino fra di loro*», e si differenzia dal più semplice concetto di multidisciplinarietà, secondo il quale le discipline sono semplicemente accostate e coordinate. Una prospettiva interdisciplinare a livello didattico permette alle discipline di sfruttare pienamente il loro potenziale educativo, mostrando che esse sono più efficaci a raggiungere il loro scopo. In linea con le richieste prima discusse, dalla governance e dal mondo del lavoro sono giunte forti raccomandazioni per una prospettiva educativa di tipo interdisciplinare. In particolare, rimanendo nel mondo scientifico, un approccio di questo tipo si può trovare nella "*STEM education*": l'acronimo STEM (dall'inglese, riferito alle quattro discipline "*Science, Tecnology, Engineering, Mathematics*") indica una prospettiva di insegnamento che passi dalla conoscenza di tipo S-T-E-M (con il trattino ad indicare la separazione tra le discipline, tipica della didattica scolastica) ad una interdisciplinare, abbracciando un insegnamento che permetta allo studente di orientarsi al meglio nella società e gli consegni strumenti efficaci per operare in essa.

Proprio per questi motivi questo elaborato affronta, in una prospettiva d'insegnamento - apprendimento, la relazione tra due discipline: la matematica e la fisica. In particolare, nella tesi tratteremo il ruolo che la matematica assume nello studio della fisica.

Per analizzare la relazione intercorrente tra queste due discipline a livello didattico sarà però utile prendere in considerazione il pensiero di alcuni scienziati vissuti tra '800 e '900 a riguardo dell'interdisciplinarietà, e alcuni contributi di ricerca in didattica della matematica e della fisica.

1.1 Contributi storici sull'interdisciplinarietà

Ci concentriamo, in questa sezione, su alcuni tentativi di grandi pensatori di analizzare i legami presenti tra le due discipline, basandoci su un articolo pubblicato da Kragh sulla rivista "*Science and Education*" [25]. Successivamente, nella ricerca didattica di modelli che possano spiegare le interazioni tra matematica e fisica nel mondo scolastico, ci rifaremo ad alcune delle idee emerse, in quanto caratteristiche delle modalità di azione della matematica all'interno dello studio della fisica. In particolare, ci focalizziamo su alcuni scienziati vissuti tra la fine del '800 e i giorni nostri. In quest'epoca, un ruolo fondamentale viene giocato dall'idea di un'armonia prestabilita tra la matematica e la fisica, grazie alla quale vengono alla luce rilevanti teorie interdisciplinari.

Un importante contributo viene dal pensiero di David Hilbert (1862-1943), il quale, nella conferenza tenuta nel 1900 a Parigi durante il "Secondo congresso internazionale dei matematici" elencò 23 problemi, alcuni dei quali ancora irrisolti, ai quali riteneva che i matematici si sarebbero dovuti dedicare nel corso del secolo che stava iniziando. Il sesto problema era «*trattare alla stessa maniera (come la geometria), usando gli assiomi, queste scienze fisiche nelle quali la matematica gioca un ruolo importante*» [6, p. 101-110]; dunque si tratta dell'ambizioso tentativo di dotare la fisica di una struttura assiomatica, esattamente come si era fatto per la geometria. Il pensiero di Hilbert era sicuramente influenzato dalla filosofia di Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), secondo cui tutte le verità sono analitiche. Il filosofo tedesco non parla nello specifico di un'armonia prestabilita tra matematica e fisica, ma di un'armonia divina prestabilita tra ogni cosa reale: sostiene dunque che la matematica è il moderatore essenziale tra i principi logici e la realtà della natura, e che il mondo reale studiato dalla fisica dovrebbe seguire la pura ragione attraverso l'applicazione della matematica. Hilbert, in linea con questa corrente di pensiero, era convinto che i tempi fossero maturi per una completa matematizzazione della fisica, che "portasse a termine" il processo iniziato con Galileo e Newton. Egli vede la fisica da una prospettiva matematica: già prima del 1894 contrapponeva la struttura assiomatica, a suo dire magnifica, della geometria, ai metodi semi-empirici della maggior parte delle teorie più avanzate in fisica. Tale pensiero trova la sua espressione nella citazione, datata 1913: «*Credo che la più alta gloria che una scienza possa ottenere sia quella di essere assimilata alla matematica, e credo che la teoria fisica sia attualmente sul punto di ottenere tale gloria.*» [6, p. 280]. Era profondamente convinto, dunque, che per una qualsiasi scienza "la più alta gloria" fosse quella di essere paragonata alla struttura assiomatica della geometria, rimarcandolo, appunto, come sesto problema dei famosi ventitré, da risolversi nel secolo successivo. Nel tentativo di stabilire un'unica e assiomatica teoria della gravitazione e dell'elettromagnetismo, suggerì la possibilità di basare tutta la fisica su alcune "equazioni del mondo", che portassero alla deduzione di tutti i fatti sperimentali (quelli noti e quelli non ancora noti), senza la necessità di stipulare limiti o condizioni iniziali. Era convinto che queste "equazioni del mondo" potessero spiegare in modo completo e deduttivo ogni cosa.

Hilbert collabora con i matematici dell'Università di Göttingen[1], e stringe uno stretto rapporto con un altro famoso scienziato, Hermann Minkowski (1864-1909). La visione di Minkowski ben si accompagna con la teoria precedente, in quanto anch'egli considerava la matematica come la strada maestra per progredire nella teoria fisica. Egli sosteneva che il lavoro dei fisici fosse limitato dal dover verificare l'attuale esistenza di una verità che i matematici avevano già stabilito, e che il potere creativo della fisica stessa risiedesse nella matematica. In tal modo egli rivendicava l'importanza di quest'ultima, ponendola ad un livello superiore rispetto alla teoria fisica. Questa visione, forse fin troppo estrema, di una fisica "a priori" più che "a posteriori", che ben abbracciava l'idea di un'armonia prestabilita, fu molto in voga tra buona parte di studiosi, fisici e matematici tedeschi negli anni Venti del '900, e venne in parte accolta, nella fase terminale della sua carriera, persino da Albert Einstein (1879-1955), sul quale ebbe forte influenza un assistente di Hilbert, Eugene Wigner (1902-1995). Quest'ultimo, anch'esso legato alla scuola di Göttingen, pubblicò nel 1960 un articolo intitolato "*L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali*" [42]. In tale articolo egli evidenzia l'importanza che assume la matematica nell'essere "istigatrice di rivoluzioni scientifiche", mostrando come la struttura matematica di una teoria fisica porti a grandi progressi in tale teoria. Tale tesi sarà ripresa successivamente da Brush, come vedremo in seguito.

Einstein era convinto, negli anni della sua giovinezza, che, pur riconoscendo la potenza epistemica della matematica, le considerazioni matematiche non fossero sufficienti per decidere la validità di una teoria fisica: non pensava che le qualità di una teoria matematica si traducessero automaticamente in qualità fisiche, considerando come fondamentali gli esperimenti, i "soli criteri dell'utilità fisica".

Era affascinato dall'idea di un'armonia prestabilita fra le due discipline, ma generalmente scettico riguardo all'inserimento di una matematica avanzata all'interno della fisica, in quanto considerava la matematica come un utile strumento al servizio della fisica, diffidando dalla sua formalizzazione e sofisticatezza.

Fu intorno al 1920 che cambiò idea. Cominciò, sulla base di una discussione con Wigner a proposito dell'"irragionevole efficacia" precedentemente nominata, a riflettere sulla domanda: «*Come può la matematica, la quale proviene prima di tutto da una produzione del pensiero umano, il quale è indipendente dalle esperienze, essere così appropriata a descrivere in modo ammirevole gli oggetti della realtà?*» [14, p. 233]. Sebbene egli fosse molto impressionato dal potere e dalla certezza del formalismo matematico, non concluse che la natura fosse matematica in senso

[1] L'università di Göttingen, in Germania, accoglierà molti grandi scienziati dell'inizio del '900, e sarà un ambiente nel quale fioriranno importantissimi contributi riguardo l'idea di un'armonia prestabilita tra matematica e fisica.

intrinseco; a differenza di quanto sostenuto da Hilbert e Minkowski, sottolineò che l'assiomatizzazione andava riferita alla pura matematica («*per quanto le proposizioni matematiche si riferiscono alla realtà esse non sono certe, e per quanto sono certe non si riferiscono alla realtà*» [13, p. 209]).

L'elogio dell'armonia prestabilita ebbe forte rilevanza non solo in Germania, ma anche fra i cosmofisici inglesi nel periodo a cavallo delle due guerre mondiali. I britannici Arthur Eddington (1882-1944) ed Edward Milne (1896-1950) proposero sistemi cosmofisici differenti, nel tentativo di integrare la fisica quantistica alla cosmologia, ma basati entrambi su principi "a priori" dai quali le leggi della natura potrebbero essere dedotte con la pura ragione. Secondo il sistema proposto da Eddington: «*non vi è nulla nell'intero sistema di leggi della fisica che non possa essere dedotto senza ambiguità da considerazione epistemologiche*»; e ancora: «*le facoltà mentali umane dovrebbero essere in grado di ottenere tutta la conoscenza della fisica che abbiamo ottenuto dagli esperimenti*» [12, p. 327].

Anche Milne, come il suo collega, credeva di poter rendere razionalmente il mondo intero, senza lasciare fuori nulla e senza consentire leggi irriducibili o fatti contingenti: come Minkowski e Hilbert precedentemente, egli affermò la superiorità della matematica sulle altre scienze, individuando ancora una volta nella geometria l'ideale che la fisica avrebbe dovuto seguire, negando così quella che riteneva essere la visione tradizionale dei fisici inglesi, i quali consideravano la matematica come l'ancella delle scienze empiriche. La ragione per il suo estremismo, era, usando le sue parole, che: «*la matematica è la sola che conosce ogni cosa a riguardo della natura o dell'universo...ha l'intero spazio-tempo come suo abitante*» [35, p. 52].

Le idee di Eddington e Milne incisero senza dubbio sul pensiero di un terzo cosmofisico del '900, Paul Dirac (1902-1984), il quale passò la primavera del 1927 a Göttingen. La sua visione, influenzata certamente dalle idee su un'armonia prestabilita tra le due discipline, lo porterà a considerare, in una prospettiva estetica, l'associazione della semplicità matematica con la bellezza. Egli concorda con Hilbert circa il fatto che il ragionamento matematico astratto sia la chiave per progredire nella teoria fisica, affermando: «*Il metodo di avanzamento più potente che può essere suggerito è quello di impiegare tutte le risorse della matematica pura nel tentativo di perfezionare e generalizzare il formalismo matematico che costituisce le basi esistenti di fisica teorica, per cercare di interpretare le nuove caratteristiche matematiche in termini di entità fisiche*» [8, p. 60]; ma si distacca implicitamente dal suo programma di dedurre la fisica a partire da basi permanenti di assiomi matematici. Dirac "allargherà" la linea di pensiero di Eddington, arrivando a definire un "principio di abbondanza", secondo il quale ogni cosa che può esistere deve esistere, per giungere alla conclusione che l'esistenza potenziale si traduce in esistenza reale. In sostanza, Dirac abbraccia la tesi sull'armonia prestabilita donandogli un carattere proprio, una propria versione: «*Questo deve essere attribuito ad una qualità matematica in natura, una qualità di cui l'osservatore casuale della natura non* *sospetterebbe, ma che svolge comunque un ruolo importante nello schema della natura. Si può descrivere la situazione dicendo che il matematico gioca un gioco in cui egli stesso inventa le regole, mentre il fisico gioca un gioco in cui le regole sono fornite dalla natura, ma col passare del tempo diventa sempre più evidente che le regole che il matematico trova interessanti sono uguali a quelle che la natura ha scelto*» [9].

Crede che in futuro ogni branca della matematica pura avrà le sue applicazioni fisiche, e ipotizza una natura dell'universo che permetta a chi lo studia di analizzarlo totalmente dal punto di vista matematico. Dirac va oltre le "equazioni del mondo" di Hilbert, fornendo un'idea ancora più radicale: l'esistenza di un' "intelligenza di Laplace"[2] ancora più potente dell'originale, che descrive così: «*Significherebbe l'esistenza di uno schema in cui l'intera descrizione dell'universo ha la sua controparte matematica, e dobbiamo supporre che una persona con una completa conoscenza della matematica potrebbe dedurre non solo i dati astronomici, ma anche tutti gli eventi storici che si svolgono nel mondo, anche i più banali. Il regime non potrebbe essere soggetto al principio di semplicità, poiché dovrebbe essere estremamente complicato, ma potrebbe essere soggetto al principio di bellezza matematica*» [9, p. 129]. Nomina in questo passaggio quello che da lui viene chiamato il principio di bellezza matematica, ossia, essenzialmente, il fatto che la bellezza matematica dovrebbe governare la fisica nella sua ricerca delle verità fondamentali. Sfortunatamente non sarà mai in grado di specificare con precisione che cosa definisce "bella" una teoria matematica.

La teoria di Dirac può sembrare un'estremizzazione assoluta riguardo l'armonia tra la matematica e la fisica, ma il cosmologo svedese Max Tegmark (1967-) si spinge oltre, ritenendo che il mondo fisico sia semplicemente una struttura matematica e null'altro e sostenendo così di poter ridurre completamente la realtà alla matematica. Egli è convinto del fatto che, sull'onda del pensiero di alcuni dei precedenti

[2]**Pierre-Simon Laplace** (1749-1827), avendo una forte credenza nel determinismo, aveva ipotizzato l'esistenza di un intelletto così potente da poter vedere contemporaneamente tutte le interazioni reciproche fra ogni particella dell'universo. Considerando i fenomeni del mondo come legati tra loro da precisi rapporti causa-effetto, era fermamente convinto che ogni teoria scientifica avesse un carattere di assoluta prevedibilità. Scrive lo stesso scienziato francese: «*Tutti gli avvenimenti anche quelli che per la loro piccolezza sembrano non ubbidire alle grandi leggi della natura, ne sono la conseguenza necessaria come lo sono le rivoluzioni del Sole [...] Gli avvenimenti attuali hanno coi precedenti un legame fondato sul principio evidente che nulla può cominciare ad essere senza una causa che lo produca. Quest'assioma, noto sotto il nome di principio della ragion sufficiente, si estende anche alle azioni che giudichiamo indifferenti [...] Dobbiamo dunque considerare lo stato presente dell'universo come l'effetto del suo stato anteriore e come la causa del suo stato futuro. Un'Intelligenza che, per un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui è animata la natura e la situazione rispettiva degli esseri che la compongono, se per di più fosse abbastanza profonda per sottomettere questi dati all'analisi, abbraccerebbe nella stessa formula i movimenti dei più grandi corpi dell'universo e dell'atomo più leggero: nulla sarebbe incerto per essa e l'avvenire, come il passato, sarebbe presente ai suoi occhi*» [28, p. 2-4].

scienziati tra cui Wigner, precedentemente citato, tutto ciò che esiste matematicamente debba esistere anche fisicamente. Il punto fondamentale, che pone Tegmark in una posizione più estrema rispetto ai suoi colleghi, riguarda il fatto che, siccome la matematica è immensamente più ricca della fisica, dalla descrizione della nostra natura si giunge alla conclusione che debbano esistere molti altri universi, che seguono quelle strutture matematiche che non hanno controparte fisica nel nostro universo. Nasce così l'ipotesi di un "multi-universo" che comprenda tutti gli universi paralleli che ampliano la nostra realtà fisica a tutte le realtà che la matematica può descrivere ma che non trovano controparte nel nostro mondo. Così, mentre Hilbert, Eddington e Dirac sognavano una completa matematizzazione della teoria fisica che potesse predire solamente la natura del nostro mondo, secondo Tegmark questo risulta impossibile, semplicemente perché il nostro mondo non è unico.

I pensieri di questi grandi scienziati sono stati oggetto di dibattito fino ai giorni nostri, e in quest'ottica vogliamo introdurre qualche altro articolo che approfondisce il ruolo assunto dalla matematica all'interno della fisica a partire da alcune di queste idee. Un primo contributo che prendiamo in considerazione proviene dall'articolo [5], in cui Brush riprende il pensiero di Wigner basandosi sulla tesi di quest'ultimo presentata in [42] e già citata in precedenza, la quale mette in luce il ruolo della matematica nell'"innescare rivoluzioni scientifiche". La tesi di Wigner lo porta a sostenere il fatto che si possa ricavare da un'equazione matematica molto più di quanto non si inserisca in essa. A partire da questa affermazione, Brush evidenzia come la matematica possa assumere un ruolo sempre più importante nella predizione dei fenomeni naturali, e come essa abbia la capacità di poter innescare delle rivoluzioni scientifiche. Nell'articolo sono riportati diversi interessanti casi storici, quali ad esempio il sistema Copernicano, la gravitazione di Newton o la rivoluzione quantistica di Planck, e per ciascuno di essi viene riconosciuto il contributo fondamentale della matematica.

A partire da questi casi storici, Brush mette in luce il ruolo assunto dalla matematica nelle rivoluzioni scientifiche, delineando la seguente struttura:

1. Il punto di partenza è un problema di ricerca, per il quale non c'è una soluzione ovvia basata su principi fisici accettati;

2. Lo scienziato formula una teoria semplice ed elegante, compatibile con alcuni principi e alcune teorie già accettate, che viene elaborata matematicamente nel tentativo di trovare una soluzione al problema (come il moto dei pianeti, la natura della gravità e la radiazione di corpo nero);

3. La teoria spiega/predice nel modo corretto i fatti empirici meglio delle teorie precedenti, anche se questo fatto contraddice uno o più principi fisici già accettati (come, ad esempio, l'impossibilità del moto della Terra, l'impossibilità di un'azione a distanza, l'esistenza di posizione e momento di una particella indipendente dalle altre particelle o dall'osservazione umana). La teoria viene

accettata provvisoriamente, con la condizione di essere puramente ipotetica (la natura si comporta "come se" il principio non fosse valido, e si assume che si possa trovare una teoria rivisitata che elimini la contraddizione);

4. Con il tempo, la teoria è così ben fondata che diventa necessario abbandonare il principio fisico contradditorio e rimpiazzarlo con il nuovo principio, consistente con la teoria matematica, in modo da completare la rivoluzione (come avviene nel caso del principio di inerzia, della gravità universale o della natura quantistica della radiazione).

Nel prossimo capitolo approfondiremo uno degli esempi citati da Brush, quello del corpo nero.

Un altro contributo che vogliamo discutere è [18], in cui l'autore, Gingras, parte da alcuni lavori di Einstein sulle fluttuazioni di energia, evidenziando come l'*analogia*, strumento potentissimo, permetta allo scienziato di "cambiare la prospettiva" del proprio studio, consentendogli di ragionare su nuovi fenomeni a partire da quelli conosciuti. All'interno dell'articolo egli mette in luce il ruolo assunto dalla matematica nel fornire "analogie formali" alla fisica. Il termine "analogia formale" contiene al suo interno la relazione matematica-fisica, in quanto la "formalità" vuole sottolineare il fatto che sono proprio le forme sintattiche delle equazioni ad essere confrontate ed utilizzate come "ponte euristico" per giungere alla comprensione di un nuovo sistema a partire da uno ben conosciuto. Due sistemi differenti dal punto di vista concreto e fisico potrebbero avere similarità in comune, messe in luce dalla forma sintattica delle equazioni matematiche. L'*analogia* è un metodo potente, ma possiede alcuni limiti: essa vuole stimolare un possibile modo di procedere o di interpretare un fenomeno, ma potrebbe non portare ad alcun risultato o essere inefficace nello studio del problema. Gingras, pur riconoscendo questi limiti, sottolinea come il ragionamento per analogia sia uno dei pochi metodi, se non addirittura il solo, che permette di passare da ciò che si conosce a ciò che non si conosce. L'*analogia* risulterà essere uno strumento molto caro per i grandi studiosi del passato (vedremo anche il fondamentale ruolo che tale metodo ha avuto all'interno degli studi di Newton), ma ritroviamo la sua importanza anche a livello puramente didattico, e la richiameremo successivamente, in quanto fondamentale ai fini di una trattazione interdisciplinare.

I contributi analizzati, sembrano dare implicitamente priorità epistemologica alla matematica rispetto alla fisica, per portare al messaggio che la matematica pura è obbligata, prima o poi, a guidare la fisica nella scoperta dei segreti della natura. Analizzando invece l'importanza e l'apporto della fisica all'interno della matematica, risulta particolarmente interessante l'articolo [24], in cui si mostra come la fisica possa avere un ruolo fondamentale nella "formazione di un concetto" matematico. L'esempio portato all'interno dell'articolo riguarda il concetto di funzione: viene sottolineato come, nel corso dei secoli, la definizione di funzione si sia evoluta fino alla moderna definizione[3], e come il ruolo della fisica sia stato portante per giungere fino ad essa. In origine, la funzione viene definita da Eulero come "un'espressione analitica" e da Dirichelet come una "variabile che dipende secondo una certa legge da un'altra variabile". Nel momento in cui i matematici si accorgono che le espressioni analitiche non sono sufficienti a rappresentare alcuni fenomeni fisici, come la vibrazione di una corda o la conduzione del calore, questo porta inevitabilmente ad una revisione del concetto di funzione. Inoltre nell'articolo viene mostrato come anche le distribuzioni, generalizzazione del concetto di funzione, provengano in buona parte dallo sviluppo di nuove teorie fisiche, le quali richiedono basi adeguate per essere descritte. In conclusione gli autori, riconducendosi al pensiero di Wigner, cercano di evidenziare come sia sbagliata l'idea, spesso assunta implicitamente, che la matematica sia una teoria "già pronta" che influenza il fenomeno fisico nella comprensione del concetto, o che sia solo una struttura assiomatica da utilizzare in caso di necessità. Spostando il focus verso una relazione che abbia come fulcro l'utilizzo della fisica all'interno della matematica, essi fanno riflettere sulla matematica che è presente nella formalizzazione della natura: la matematica deve essere derivata durante lo sviluppo del concetto, costruendosi passo dopo passo, astraendosi dal termine "applicazione". Riprendendo Hilbert, affermano che la "forza trainante" della matematica sono sempre stati i problemi di cui si cercava una soluzione, alcuni interamente matematici, ma la maggior parte derivanti dallo studio dei fenomeni naturali. L'incontro tra matematica e fisica viene così visto come un'interazione, un intreccio fra le due discipline, che si sviluppa e modella entrambe.

La trattazione dei vari contributi provenienti dal mondo scientifico sul legame fra queste due discipline, e in particolare sull'utilizzo della matematica all'interno della fisica, potrebbe proseguire ancora a lungo. Grazie alle considerazioni di questa sezione possiamo adesso introdurre la seconda parte del capitolo, nella quale queste idee ci aiuteranno ad analizzare in chiave didattica la relazione presente fra queste due discipline.

[3]La funzione, al giorno d'oggi, è definita come una relazione fra due insiemi. Dati due insiemi A e B non vuoti, una funzione f da A a B è una relazione, cioè un sottoinsieme di $A \times B$, tale che:

1) per ogni $x \in A$ esiste $y \in B$ tale che $(x, y) \in f$;
2) se $(x, y) \in f$ e $(x, y') \in f$, allora $y = y'$.

Per indicare che f è una funzione da A (chiamato dominio di f) a B (codominio di f) scriviamo $f : A \to B$.

1.2 La didattica e alcuni modelli

In questa sezione ci concentreremo sul ruolo giocato dalla matematica all'interno della fisica ad un livello scolastico, riprendendo in chiave didattica alcuni dei concetti precedenti. Al termine vedremo poi tre modelli, che vengono utilizzati nel tentativo di descrivere le dinamiche presenti all'interno delle lezioni scolastiche.

A partire dalle considerazioni della sezione precedente, si può notare come emerga un ruolo di co-costruzione delle teorie fisiche e matematiche. In particolare, soffermandoci sulla direzione che va dalla matematica verso la fisica, si nota come i concetti e i ragionamenti matematici hanno un ruolo *strutturale* nella costruzione della teoria fisica.

La matematica assume il ruolo di "istigatrice di rivoluzioni scientifiche", mostrando come una scoperta in campo scientifico possa essere "suggerita" da un approccio matematico, da una congettura o da una conseguenza, che non sono invece supportate inizialmente da osservazioni fisiche. Un altro importante ruolo assunto dalla matematica è quello che porta al concetto di "analogia formale": utilizzando l'*analogia*, la matematica riesce a fornire alla fisica strategie di ragionamento uniche, che portano la fisica stessa ad un'evoluzione. In tal modo, si ha una visione più profonda di determinate strutture fisiche, e si notano somiglianze non necessariamente evidenti al primo impatto. Una tale interazione della matematica all'interno della fisica è in linea con la definizione di interdisciplinarietà fornita da Thompson e introdotta in precedenza a pagina 2.

Secondo Karam questa non è la visione tipica degli studenti riguardo all'interazione fra le due discipline: come sostiene in [20], essi vedono una relazione prevalentemente strumentale o applicativa, la quale non corrisponde alla definizione corretta di interdisciplinarietà quanto piuttosto a quella di multidisciplinarietà. La prospettiva degli studenti li porta a vedere la fisica all'interno delle ore di matematica come un contesto in cui applicare le nozioni appena apprese, e a considerare la matematica durante le ore di fisica solamente come un utile strumento con il quale calcolare i risultati a partire dalle formule. Questa prospettiva, molto comune tra gli studenti, è importante da tener presente ed è un punto di discussione sia a livello di ricerca in didattica che all'interno di questa tesi.

Tale visione dell'interazione fra le discipline viene richiamata anche in [37], nel quale Redish e Kuo pongono una domanda fondamentale per la didattica: «Perché gli studenti si trovano in difficoltà ad utilizzare la matematica durante le ore di fisica e non ad utilizzarla come matematica in sé?». La risposta che provano a darsi riguarda il fatto che la matematica usata in fisica e la matematica pura siano da considerarsi come due linguaggi differenti, giungendo alla conclusione che l'insistenza sulle esercitazioni di matematica non risolverà il problema, in quanto, come per l'apprendimento di una nuova lingua, sarà necessario fornire allo studente gli strumenti corretti per parlarla (dunque le istruzioni e le pratiche per unire i significati della fisica con le tecniche della matematica). Inoltre, si trova in questa affermazione un primo accenno al duplice ruolo, *tecnico* - ossia l'utilizzo della matematica come strumento di calcolo - e *strutturale* - ossia l'utilizzo della matematica come strumento di ragionamento -, della matematica, che verrà successivamente richiamato e approfondito.

Anche l'articolo di Karam e Krey [21] affronta questa questione. L'autore evidenzia l'importanza del chiedersi "perché?" nel momento in cui si affronta un'equazione, enfatizzando così quanto sia rilevante porre uno studente di fronte alla comprensione concettuale di quello che, solitamente, utilizza come puro calcolo. Tale pratica, secondo il parere degli autori, permette così di superare quello che viene chiamato *"Plug-and-Chug"* tipico della didattica della fisica, ossia una modalità che consiste nell'inserimento di valori all'interno di un'equazione nel momento in cui si affronta un problema, senza comprenderne le modalità o il significato, come approfondiremo a pagina 12 parlando di *Epistemic Games.*

Viene evidenziato anche il ruolo del ragionamento induttivo, la cui importanza nella comprensione di un concetto si affianca a quella dell'analogia formale: il paragonare strutture matematiche/fisiche conosciute ai fenomeni oggetto di studio può essere utile, così come il fissare nella mente i concetti scoperti con un ragionamento induttivo che poi si aggancia (o ricollega) alla teoria. Per tal motivo l'autore paragona i concetti teorici e i fatti sperimentali con le due gambe che collaborano nell'atto del camminare: la sperimentazione aiuta nella formazione di un concetto, così come entrambe le gambe sono necessarie all'essere umano per compiere il movimento. Azzardando, potremmo dire che le stesse discipline, matematica e fisica, possono essere paragonate a due gambe che insieme portano all'atto del camminare, alla comprensione del fenomeno.

È fondamentale che, nella mente degli studenti, il passaggio dalla matematica alla fisica venga inteso non come un cambiamento di direzione, ma come un supporto, un vicendevole aiuto per progredire insieme lungo la costruzione dei concetti, come già accennato al termine della sezione precedente. Così, nell'orientarsi dalla matematica verso la fisica, la matematica può essere considerata come il fondamento della fisica stessa: non deve essere solo uno strumento usato per esprimere, maneggiare e sviluppare i concetti, i metodi e le teorie fisiche in modo logico, ma deve assumere un ruolo essenziale o strutturale che permette agli stessi concetti di formarsi, di essere approfonditi, di estendersi o di intrecciarsi. Allo stesso modo, è importante che la fisica non sia solo un semplice esercizio, ma che costituisca un ambiente naturale per testare, applicare ed elaborare teorie, metodi e concetti matematici, o anche motivarli, istigarli, stimolarli e aiutare nella creazione di nuove scoperte matematiche. Solo entrando in quest'ottica, si riuscirà ad afferrare profondamente il concetto di interdisciplinarietà.

Presentiamo ora tre esempi di modelli tratti da articoli di ricerca in didattica, che cercano di fornire un contributo all'analisi delle dinamiche studentesche durante le lezioni di fisica.

Il primo modello che consideriamo e che espone un tentativo di schematizzare i processi che portano gli studenti ad affrontare un problema fisico si può trovare negli *Epistemic Games* di Tuminaro e Redish [40]: i ricercatori usano tale nozione per tentare di descrivere le strategie adottate dagli alunni nella risoluzione di problemi, in singole attività orientate verso un unico obiettivo. La ricerca sugli *Epistemic Games* si basa su un modello cognitivo più generale, denominato "*Resource Model*", proveniente da ricerche basate sulle neuroscienze, sulle scienze cognitive e sulle scienze comportamentali. Questo modello prevede l'esistenza di diversi elementi fondamentali alla base di ogni processo cognitivo, chiamati "*resources*" (risorse): tale termine vuole indicare gli elementi di base della conoscenza presenti nella memoria a lungo termine ("*knowledge elements*"), i modi in cui essi sono collegati ("*knowledge structures*") e le modalità con cui queste strutture vengono attivate ("*control structures*").

Le principali risorse vengono identificate nella conoscenza matematica intuitiva e nelle "*primitive fenomenologiche*" (dette anche "*p-primis*"). Questo termine vuole indicare lo sviluppo della conoscenza intuitiva di un individuo, le idee embrionali dei soggetti che dovranno poi essere maturate riguardo ad un fenomeno. Tali "idee" sono una concezione maturata a livello intuitivo fenomenologico, e quindi hanno una validità limitata; un processo cognitivo molto profondo porterà successivamente questi "*p-primis*" a diventare stabili e a fungere da base per dare un senso alle esperienze future, spiegando così i motivi per cui lo studente sia in gran parte inconsapevole della provenienza delle basi della sua comprensione di un fenomeno. Così, i "*p-primis*" non hanno una spiegazione all'interno della struttura di conoscenza di uno studente, e, radicandosi in profondità, possono essere molto resistenti al cambiamento in un contesto scolastico ed essere un forte ostacolo per l'apprendimento, nel caso in cui questa base consista in un errore o in un'idea immatura. In ogni caso, dalle "*p-primis*" derivano successivamente le "*primitive di ragionamento*", cioè l'astrazione delle esperienze quotidiane che generalizza e ingloba diverse "*primitive fenomenologiche*". L'apprendimento consiste infine nella modifica della rete di collegamenti (le "*structures*") tra i diversi elementi di base (le "*resources*"). Si suppone dunque, grazie a questa premessa, che gli studenti abbiano un patrimonio personale di risorse, e il problema affrontato dal modello degli *Epistemic Games* si traduce nella domanda: «Come vengono organizzate ed usate dagli studenti queste risorse per la risoluzione dei problemi in fisica?».

Le strategie vengono classificate in sei categorie, denominate appunto *Epistemic Games*: il termine "*epistemic*" indica che l'attività coinvolge forme pre-esistenti di conoscenza per costruire nuova conoscenza, mentre il termine "*game*" fa riferimento al fatto che si tratta di un'attività riconoscibile e coerente, dotata, come ogni gioco, di componenti dette "*ontologiche*" (si definiscono così una base di conoscenza e forme di rappresentazione di essa) e "*strutturali*" (un inizio, una fine, mosse e regole tipiche del "gioco"). Il "*game*" è coerente in quanto per un certo periodo di tempo (da pochi minuti fino a mezz'ora) gli studenti ragionano usando un insieme limitato di risorse associate. Le strategie utilizzate, tuttavia, alla luce di quanto affermato in precedenza, non vengono adottate consapevolmente, e spesso gli studenti non sono in grado di riconoscere quale sia il gioco che stanno mettendo in atto. Nell'elenco di questi giochi, fornito da Tuminaro e Redish, essi vengono catalogati in ordine decrescente di complessità, a partire da quello che coinvolge il processo cognitivo più elaborato. Presentiamo tale lista, nella quale per ciascun gioco vengono descritte le conoscenze di base, le mosse applicate e le forme epistemiche (ossia le rappresentazioni) prodotte:

1. "***Mapping Meaning to Mathematics***": è il più complesso, poiché gli studenti che "giocano a questo gioco" cominciano ad assumere una comprensione concettuale della situazione fisica descritta, e successivamente progrediscono verso una soluzione qualitativa, con l'uso corretto della matematica, *tecnico* e *strutturale* (questa divisione verrà approfondita a pagina 19).
   Le conoscenze di base necessarie per tale gioco consistono in una serie di risorse fisiche e matematiche, come possono essere alcuni principi fisici basilari, e alcune conoscenze matematiche, ma anche in strutture di ragionamento intuitive (i "*p-primis*" precedentemente citati), quali ad esempio gli agenti di causa-effetto. È importante notare che queste risorse possono essere attivate dallo studente a seconda della fase in cui si trova, e non necessariamente si attivano tutte in contemporanea.
   Identifichiamo 5 mosse basiche utilizzate per questo gioco:

   1) Sviluppare una storia attraverso la situazione fisica presente;
   2) Tradurre le quantità di tale storia in entità matematiche;
   3) Collegare tali entità matematiche in accordo con la storia fisica;
   4) Manipolare i simboli;
   5) Valutare ed interpretare la storia.

   La forma epistemica per questo gioco è solitamente racchiusa nelle mosse 2 e 3, nelle quali si raccolgono e si manipolano le entità matematiche che guidano la natura dell'indagine. Tale gioco risulta essere il più completo poiché trova il suo pieno sviluppo con l'interpretazione tipica delle mosse successive, e con l'ultima mossa porta lo studente a confrontare la soluzione qualitativa trovata con soluzioni date o con la propria storia concettuale iniziale;

2. "***Mapping Mathematics to Meaning***": in questo *game* gli studenti costruiscono una storia concettuale riferita ad una particolare equazione fisica. Le componenti ontologiche sono le stesse del gioco precedente (in particolare le conoscenze di base richieste sono invariate), così come la forma epistemica; le differenze tra le due sono dovute al punto di partenza: mentre nel primo gioco gli studenti traducono un concetto in un'espressione matematica interpretando successivamente, in questo caso l'origine è data da un'equazione

fisica che viene usata come base per la costruzione di un concetto.
Anche in questo caso individuiamo quattro mosse:

1) Identificare i concetti di interesse;
2) Trovare un'equazione che leghi tali concetti;
3) "Raccontare" una storia usando questa relazione;
4) Valutare la storia narrata.

3. "***Physical Mechanism Game***": gli studenti, tentano di costruire una storia fisica che sia descrittiva e coerente, e che sia basata sulla loro intuizione del meccanismo fisico, senza tuttavia utilizzare le regole della matematica. Questo gioco si basa su una forma di conoscenza legata solo a ragionamenti intuitivi, quindi la forma epistemica è differente: se nei primi due *games* vengono richieste esplicitamente equazioni fisiche, in questo viene richiesta solo una storia, una descrizione in termini di principi fisici, del fenomeno a cui hanno assistito. Sebbene vi sia differenza di forme epistemiche, le risorse attivate potrebbero essere le stesse dei *games* precedenti, ragion per cui tale gioco viene collocato solamente un gradino sotto nella "scala dei ragionamenti".
La struttura di questo *game*, infatti, ricorda molto la mossa 1 del primo gioco; la differenza risiede nel fatto che nel primo lo studente prosegue con le fasi successive e interpreta il lavoro eseguito, mentre in questo sviluppa la storia ma non trova mai realmente la soluzione poiché non utilizza una formula rigorosa. Le mosse sono dunque riassunte in:

   1) Sviluppare una storia attraverso la situazione fisica presente;
   2) Valutare la storia.

4. "***Pictorial Analysis***": in questo *game* gli studenti costruiscono una rappresentazione spaziale esterna che specifica la relazione tra le varie grandezze del problema in esame: tracciando uno schema, che costituisce la forma epistemica del gioco, lo studente si situa ad un livello inferiore rispetto alla trattazione matematica, ma mantiene un livello accettabile di comprensione del concetto. Le conoscenze di base rimangono invariate (al limite si potrebbe aggiungere il prerequisito della capacità di saper tradurre in un disegno un'interpretazione), mentre le mosse del gioco saranno determinate dalla particolare rappresentazione scelta. Un possibile percorso comune, pur ricordando che ogni rappresentazione prevederà mosse diverse, potrebbe essere il seguente:

   1) Identificare i concetti di interesse;
   2) Scegliere la rappresentazione esterna;
   3) Costruire una storia fisica fondata sulla relazione spaziale tra gli oggetti, coerente con la rappresentazione;
   4) Redigere il diagramma scelto.

5. "***Recursive Plugh-and-Chug***": in questa modalità gli studenti identificano determinate quantità ignote e le inseriscono in equazioni fisiche ricavandone le relative risposte numeriche, senza tuttavia giungere ad una comprensione concettuale delle implicazioni fisiche dei loro calcoli. Gli studenti "giocano" basandosi solo sulla comprensione sintattica e non concettuale dei simboli fisici, dunque le risorse cognitive coinvolte nei *games* precedenti (intuizione matematica, ragionamenti intuitivi, interpretazione) non vengono utilizzate. L'unica conoscenza di base richiesta è la comprensione sintattica intuitiva (non concettuale) dei simboli fisici. La forma epistemica è simile o addirittura identica a quella dei *games* 1 e 2, ma le risorse attivate sono differenti; la caratteristica distintiva di tale gioco riguarda le risorse che non vengono utilizzate.
   Le mosse di tale gioco sono le seguenti:
   1) Identificare i concetti di interesse (ricorda la mossa 1 del secondo *game*, ma differisce da essa: nel *game* "*Mapping Mathematics to Meaning*" gli studenti tentano di comprendere concettualmente il significato fisico della quantità, mentre qua riconoscono solo la quantità e i suoi simboli corrispondenti);
   2) Cercare un'equazione che leghi la quantità richiesta ad altre quantità, senza però la creazione di una storia che giustifichi l'uso di tale equazione;
   3) Riconoscere quali quantità sono conosciute e quali no: se manca solo la risposta procedere a trovarla, se ne mancano altre scegliere un sotto-obiettivo e ripartire da questo (da qua la natura ricorsiva del gioco).

6. "***Translitteration to Mathematics***": è il *game* intellettualmente meno complesso. Gli studenti utilizzano esempi già conosciuti di problemi svolti per trovare le soluzioni di un problema nuovo, senza alcuna comprensione concettuale sia del problema che dell'esempio già svolto. Poiché gli studenti usano i simboli senza la loro comprensione, le uniche conoscenze di base richieste riguardano la struttura sintattica delle equazioni, e l'unica forma epistemica prodotta è il percorso risolutivo dell'esercizio già svolto, che fa loro da guida.
   Le mosse del gioco sono le seguenti:
   1) Identificare un tipo di quantità;
   2) Ricercare un procedimento di risoluzione che si leghi alla situazione del problema corrente;
   3) Riportare i concetti del problema attuale all'interno del modello risolutivo trovato;
   4) Valutare tale processo e calcolare.

Tali giochi possono costituire un'importante guida sia per le modalità utilizzate dal docente nello strutturare la risoluzione di problemi all'interno delle proprie lezioni, sia per gli studiosi interessati ai processi cognitivi che guidano i ragazzi nell'affrontare un problema fisico. Chiaramente questo elenco non esaurisce tutte le possibili strategie di risoluzione che un solutore può mettere in atto, ma è bene notare che dai risultati di questo studio si evince come le strategie preferite dagli studenti siano proprio quelle attivate nei *games* "*Recursive Plugh-and-Chug*" e "*Transliteration to Mathematics*".

Insieme al modello degli *Epistemic Games* consideriamo un secondo modello, orientato a studiare non le strategie messe in atto durante la risoluzione di problemi, ma più in generale l'utilizzo che gli studenti fanno della matematica nello studio della fisica e l'immagine che hanno della relazione matematica-fisica. Tale modello, sviluppato da Uhden, Karam, Pietrocola e Pospiech in [41], e chiamato per brevità *Modello di Uhden*, ben si inserisce nella sezione dedicata alla didattica, e fornisce un'importante strumento per l'analisi di attività interdisciplinari, come vedremo nei capitoli successivi. Il *Modello di Uhden* è inoltre un importante riferimento teorico che può essere utilizzato dai docenti nella progettazione di attività di apprendimento e insegnamento circa la relazione tra matematica e fisica e, fin dalla scuola secondaria, può contribuire nell'acquisizione di abilità volte a mettere in atto *Epistemic Games* sempre più raffinati.

In [41], gli stessi autori chiariscono le funzioni del proprio modello, scrivendo: «*Tale modello dovrebbe servire come strumento guida da utilizzarsi nell'affrontare aspetti relativi al ragionamento matematico nella didattica della fisica. Ciò si riferisce a molti aspetti: alle lezioni frontali in cui si spiegano concetti fisici, alla preparazione di lezioni da parte dei docenti, alla creazione di nuovi compiti da parte dei ricercatori (e anche degli insegnanti), o alla diagnosi dei processi di ragionamento degli studenti, solo per menzionarne alcuni*» [41, p. 499].

Il *Modello di Uhden* viene elaborato come modifica e sviluppo del "*modelling cycle*" di Borromeo Ferri e colleghi [15], che si basava su una distinzione netta tra modello matematico e modello fisico. Il *modelling cycle*, proveniente dal campo della modellizzazione matematica, viene definito come: «*il processo di traduzione tra il mondo reale e la matematica in entrambe le direzioni*» [1, p. 45]. Secondo lo stesso Borromeo Ferri, ci sono differenti manifestazioni del *modelling cycle*; comune a tutte è il modello matematico, che viene connesso al resto del mondo dai processi di matematizzazione e interpretazione. La più grande differenza tra questi modelli riguarda il loro poter modellizzare aspetti della realtà: alcuni si concentrano sui processi cognitivi tenendo conto dei processi mentali, come ad esempio avviene nel modello di Blum e Leiß [2] in Figura 1.1.

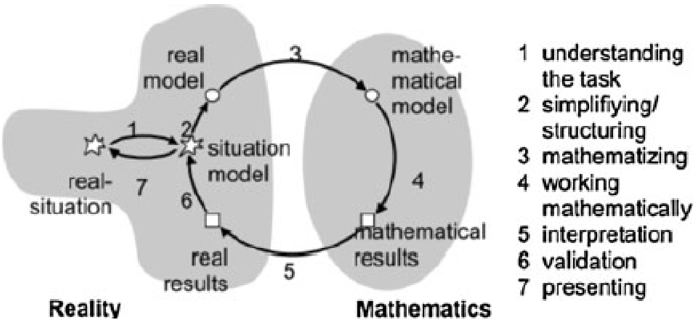


Figura 1.1: *Modelling cycle* di Blum e Leiß

Qui la realtà è descritta come una situazione reale accessibile da una rappresentazione mentale, che deve essere idealizzata in un modello della stessa situazione reale. Altri *modelling cycles*, invece, non si focalizzano sui modelli mentali, piuttosto si spostano direttamente dalla situazione reale a un modello di quella situazione, o anche direttamente dalla situazione reale al modello matematico. In ogni caso, come sostiene Prediger [34], il *modelling cycle*, ha diversi scopi.

Esso serve a:
- descrivere competenze;
- costruire nuovi obiettivi;
- diagnosticare problemi;
- migliorare abilità meta-cognitive e competenze di matematizzazione.

Quando si prova a tracciare un percorso cronologico dei processi di ragionamento degli studenti, si nota che essi preferiscono procedere lungo strade intricate piuttosto che seguire i passi ordinati del *modelling cycle*. Tuttavia, il modello va inteso come modello strutturale di un processo e non come un modello cronologico. Sembra dunque ragionevole trasferire tale modello nel campo della fisica. Tuttavia, i tentativi di trasferire il *modelling cycle* alla fisica continueranno a preservare la distinzione interna di tale modello fra modello matematico e modello fisico, come si vede nel tentativo di Redish e Bing [36] in Figura 1.2:

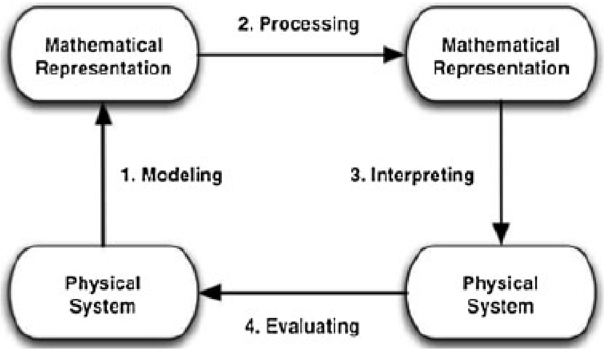


Figura 1.2: *Modelling cycle* nel campo della fisica di Redish e Bing

L'utilizzo del *modelling cycle* in fisica può essere efficace e aiuta a descrivere i ragionamenti matematici, tuttavia suscita qualche preoccupazione: tale modello trasferito alla fisica infatti non prevede una distinzione, invece necessaria, tra ruolo *tecnico* e *strutturale* della matematica. Inoltre non approfondisce i vari livelli di comprensione della matematica e il grado di matematizzazione che viene richiesto nel processo di traduzione. La revisione proposta da Uhden e colleghi, invece, supera questa netta distinzione tra modello fisico e matematico, e sottolinea quanto l'unione di questi due ambienti sia uno spazio interdisciplinare matematico-fisico dove poter applicare le abilità strutturali e poter considerare le abilità tecniche come esterne a tale rappresentazione.

Questo modello, visibile in Figura 1.3, rappresenta quindi un tentativo di analizzare i processi cognitivi che sono alla base del processo di traduzione di un concetto fisico.

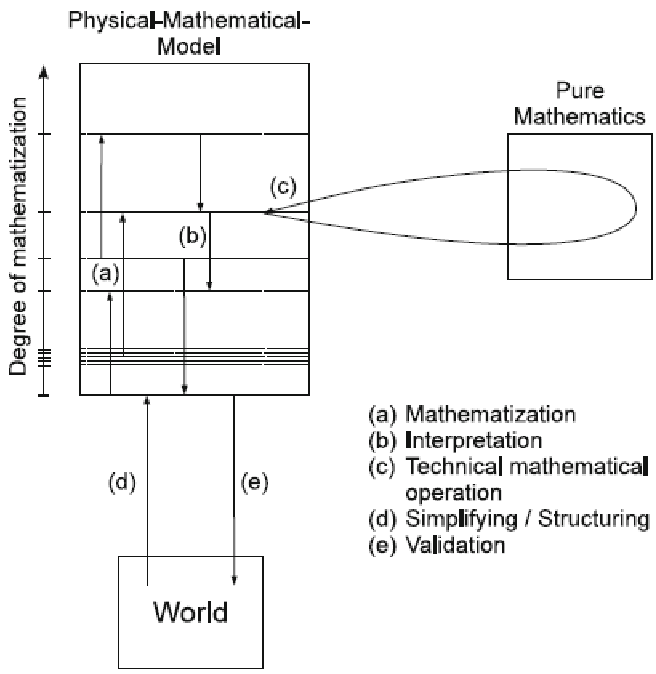


Figura 1.3: Modello di Uhden

Il livello più basso di tale modello è il livello "zero", nel quale si ha pura fisica qualitativa, e rappresenta il punto di partenza, ossia ciò che deve essere raggiunto per il passaggio da e per il mondo reale attraverso i processi di "idealizzazione" e "validazione".

La fondamentale caratteristica di questo modello riguarda dunque la netta separazione tra la componente *tecnica* e quella *strutturale* della matematica: così, mentre la parte *strutturale* e la parte fisica sono inseparabili, è possibile vedere la matematica *tecnica*, il puro calcolo matematico, come una struttura esterna, utilizzabile solo in alcuni momenti. Utilizzando le parole degli autori: «*Le abilità tecniche sono associate alla pura manipolazione matematica. Sono legate al mondo delle regole algoritmiche (come ad esempio il saper isolare una variabile, l'operare con le frazioni, il saper derivare/integrare una funzione e il saper risolvere un'equazione), alla semplice consultazione di una relazione in una lista data (come le regole di derivazione, le identità trigonometriche e i momenti di inerzia) o alla citazione di proprietà e teoremi come argomenti di autorità (come il teorema di Pitagora o di Stokes, o le proprietà associative)*» [41, p. 498]. Le abilità *strutturali*, invece: «*sono relative alla capacità di impiegare la conoscenza matematica per dare una struttura alle situazioni fisiche*» [41, p. 493]. In tal modo, partendo dalla base, la pura fisica, e procedendo verso il modello matematico-fisico, il processo cognitivo è rappresentato dalla matematizzazione del concetto, che può avere diversi livelli (a seconda della lunghezza delle frecce) e dalla matematica pura (solo per manipolare il concetto, senza "avanzare" nella comprensione: si noti infatti come, dopo l'utilizzo di una matematica tecnica, si ritorni al punto di partenza). In questo modo viene risolto il problema del trasferimento del *modelling cycle* alla fisica, nel quale non si teneva conto dei diversi gradi di matematizzazione coinvolti durante il processo. Inoltre, la lunghezza delle frecce risolve anche questo problema, mostrando come, a seconda della lunghezza della freccia, venga richiesta una certa abilità matematica di tipo *strutturale*.

Allo stesso modo, a partire dal modello fisico-matematico, con il processo di *interpretazione*, si può giungere (usando ancora i diversi gradi di matematizzazione e la matematica pura) alla comprensione del puro concetto fisico, procedendo in direzione opposta. Questa abilità è legata «*alla capacità di "saper leggere equazioni", comprendere il loro significato con l'uso di parole e schemi, identificare casi particolari e ricavare predizioni in campo fisico a partire dal formalismo*» [41, p. 498].

Questi due processi opposti, detti appunto "*matematizzazione*" e "*interpretazione*" sono entrambi legati alle abilità strutturali della matematica e richiamano fortemente gli *Epistemic Games* "*Mapping Meaning to Mathematics*" e "*Mapping Mathematics to Meaning*", con la differenza che essi intendono descrivere il meccanismo attivato nella comprensione di un concetto fisico e non le strategie risolutive di un problema.

Tale modello sarà la lente con la quale potremo introdurre ed analizzare il problema di studio presentato nel capitolo successivo: il corpo nero. Inoltre sarà, oltre alle precedenti considerazioni sulle possibili interazioni tra matematica e fisica, un utile strumento per affrontare l'analisi che effettueremo nei capitoli successivi.

L'ultimo modello che andiamo a considerare proviene da uno studio condotto da Hansson L, Hannson O., Juter e Redfors [19] in una scuola superiore svedese. A partire dall'analisi di alcune lezioni di fisica, svolte in diverse classi, gli autori si focalizzano sui collegamenti che vengono fatti durante le lezioni, nelle interazioni tra studenti e insegnanti, fra *Realtà*, *Modello Teorico* e *Matematica*, schematizzando la loro analisi con un triangolo, come riportato in Figura 1.4

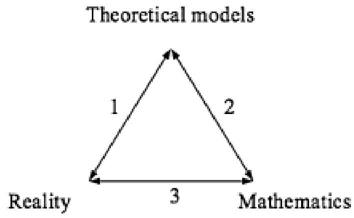


Figura 1.4: Triangolo Realtà-Modello Teorico-Matematica

I vertici di questo modello sono collegati da alcune frecce, che vogliono simboleggiare i collegamenti che vengono fatti dagli studenti e dagli insegnanti. La *Realtà* si riferisce a oggetti fisici o fenomeni (o osservazioni di essi) appartenenti al mondo reale. Essa comprende sia gli oggetti, i fenomeni e gli eventi ben conosciuti, con i quali gli studenti hanno esperienza tutti i giorni, sia i fenomeni osservati (più o meno direttamente, o utilizzando complessi strumenti di misura) durante le lezioni di fisica e i laboratori. Il *Modello Teorico* si riferisce ai modelli teorici in fisica e ai concetti relativi ad essi. La *Matematica* si riferisce ai concetti matematici, ai teoremi, alle rappresentazioni, al ragionamento e ai metodi matematici.

Il collegamento fra *Realtà* e *Modello Teorico* viene chiamato dagli autori "collegamento di tipo 1" e viene messo in atto nel momento in cui la teoria è usata per riferirsi o legarsi ad osservazioni o predizioni, o quando un concetto viene collegato ai suoi riferimenti nel mondo reale. Il collegamento fra *Modello Teorico* e *Matematica* viene detto "collegamento di tipo 2", e permette di separare la matematica nelle sue componenti *tecniche* e *strutturali*. Potrebbe sembrare problematico, da un punto di vista filosofico, come abbiamo visto parlando del *Modello di Uhden*, dividere la matematica dai modelli teorici in fisica, poiché spesso la matematica è una parte inerente di essi. Tuttavia, gli autori hanno scelto di separare i due collegamenti nel modello analitico per essere in grado di vedere i differenti ruoli che può assumere la matematica all'interno delle lezioni di fisica. Durante le lezioni tale collegamento viene messo in atto nel momento in cui un modello teorico viene descritto in termini matematici, o quando un problema fisico viene trasferito ad un problema matematico (ad esempio nella manipolazione di formule, nella risoluzione di equazioni o nella costruzione di grafici). In particolare, un utilizzo *strutturale* significa che la matematica viene usata per i ragionamenti in relazione ad un modello teorico, mentre un uso *tecnico* è caratterizzato dalla manipolazione di formule senza discussione del significato teorico o dalla ricerca della formula corretta mediante l'utilizzo del "*Plug-and-Chug*", di cui abbiamo parlato in precedenza. Gli autori quindi differenziano il "collegamento di tipo 2" in "collegamento di tipo 2, strutturale" e "collegamento di tipo 2, tecnico". Il "collegamento di tipo 3" è quello che avviene fra *Realtà* e *Matematica*; esso è presente durante le lezioni nel momento in cui le osservazioni di un fenomeno vengono discusse da un punto di vista matematico (senza alcuna contestualizzazione di concetti fisici). In generale i collegamenti di questo tipo avvengono quando studenti o docenti legano un'osservazione tra due entità ad una rappresentazione matematica.

A partire da questo strumento, gli autori hanno analizzato diverse lezioni su argomenti differenti, soffermandosi sui tipi di collegamento che avvengono durante le lezioni "frontali", nelle quali l'insegnante spiega la teoria fisica, e durante le attività di laboratorio, nelle quali gli studenti entrano a contatto con la realtà. In particolare vengono analizzate una lezione svolta in prima superiore sulla conservazione dell'energia, e due lezioni svolte in due classi terze, rispettivamente sul campo elettrico e sull'interferenza.

I risultati di questo studio fanno emergere come le lezioni frontali siano permeate dai "collegamenti di tipo 2", ossia quelli fra *Modello Teorico* e *Matematica*, con una predominanza quasi totale dell'utilizzo tecnico della matematica, mentre le attività di laboratorio vengono caratterizzate dai "collegamenti di tipo 3".

Tale tendenza si ritrova anche nelle azioni dei docenti, i quali focalizzano le lezioni laboratoriali sulla raccolta di dati a partire da esperimenti ("collegamenti di tipo 3") e le successive lezioni in classe sull'utilizzo di questi dati all'interno di formule standard, basandosi dunque su "collegamenti tecnici di tipo 2" (viene mostrato inoltre come i docenti stimolino questo tipo di collegamento con frasi del tipo «Ora che hai i dati riesci a ricavare l'energia?», o anche «Ti senti più a tuo agio con le formule ora?»).

Questo focus sulla manipolazione di formule aiuta, secondo gli autori, a comprendere i motivi per cui gli insegnanti vedano gli studenti poco esperti nelle abilità matematiche come "svantaggiati" nell'apprendimento di concetti fisici. Inoltre, a causa di tali concezioni, spesso è sufficiente per un ragazzo essere in grado di manipolare le formule matematiche all'interno di problemi fisici per essere considerato molto capace nello studio della materia. In questi casi, a causa dell'assenza di collegamenti tra realtà e teoria, gli studenti vedono tali problemi come estranei al proprio mondo e al proprio vissuto, e si riconducono ad un semplice utilizzo della matematica che comporti l'abilità nel manipolarla nella maniera corretta, senza tuttavia fare proprio il concetto.

Le conclusioni degli autori portano al fatto che sono necessari maggiori "collegamenti di tipo 1" e "di tipo 2" (questi ultimi di tipo *strutturale*), ed è necessario che una tale visione sia portata avanti dai docenti oltre che dagli studenti. Il triangolo fornisce così al docente un importante strumento di analisi oltre che un'indicazione su come programmare le proprie lezioni e le proprie richieste agli studenti.

A livello scolastico dunque, la convinzione da superare è proprio questa: è necessario che la scuola riveda i propri obiettivi a livello di didattica, e che anche gli insegnanti abbiano ben chiaro quale dovrebbe essere il risultato finale. È fondamentale che la scuola non dia allo studente l'input che per essere abili in fisica sia sufficiente manipolare le formule per ottenere i risultati richiesti, ma che renda ben chiara la distinzione fra i diversi utilizzi della matematica. Una volta resi chiari questi ruoli, l'obiettivo della didattica deve essere quello di aiutare gli studenti a servirsene al meglio a seconda della situazione, e, soprattutto, deve metterli in grado di trasferire le proprie conoscenze teoriche ad una situazione specifica e a fare importanti collegamenti con la realtà, di modo che i lati del triangolo assumano nella mente di docenti e alunni la stessa importanza.

Capitolo 2

Un importante esempio interdisciplinare: il corpo nero di Planck

Le considerazioni del capitolo precedente ci hanno aiutato a comprendere meglio il ruolo che può assumere la matematica all'interno della fisica e la visione che gli studenti spesso hanno di esso; inoltre, ci hanno fornito alcuni importanti strumenti per analizzare situazioni didattiche, come il *Modello di Uhden* o il modello degli *Epistemic Games*.

In questo capitolo entreremo più nello specifico, analizzando uno studio condotto a livello universitario per approfondire il tema dell'interdisciplinarietà fra matematica e fisica. Seguendo l'articolo di ricerca [3], pubblicato dalle professoresse Branchetti, Cattabriga e Levrini, mostreremo l'interesse che può avere lo studio del caso del corpo nero di Planck, e quali possono essere le sue implicazioni a livello di interdisciplinarietà. Descriveremo un'attività condotta durante l'A.A. 2018-2019 dalle stesse professoresse e rivolta agli studenti iscritti ai corsi di laurea magistrale in Fisica e in Matematica. Vedremo, nella seconda parte del capitolo, un breve riassunto sulle idee iniziali che accomunano gli studenti in merito all'interdisciplinarietà matematica-fisica, e come e se, in seguito a questa attività, si sia modificata la loro concezione della relazione fra le due discipline.

2.1 Approccio al corpo nero

L'interesse per il caso del corpo nero è legato al suo profondo carattere interdisciplinare, che emerge dall'analisi dei ragionamenti che hanno portato lo stesso Planck a formulare la sua teoria. Richiamiamo di seguito il contesto e le fasi essenziali di tali ragionamenti.

Il 14 Dicembre 1900 lo scienziato Max Planck (1858-1947) presentò alla *German Physical Society* un articolo intitolato "*Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung in Normalspektrum*" ("Sulla Teoria della Legge di Distribuzione dell'Energia nello Spettro Normale") [30], con il quale proponeva la propria personale risoluzione al problema della radiazione del corpo nero. Questo giorno viene convenzionalmente riconosciuto come il giorno in cui nacque la fisica quantistica.

Tale problema, che aveva costituito uno dei grandi temi di ricerca della fisica del XIX secolo, era relativo alla densità spettrale di energia emessa da un corpo nero. Per introdurre al lettore la questione è bene ricordare che tutti i corpi all'equilibrio termodinamico emettono energia sotto forma di una radiazione: a basse temperature la radiazione emessa è invisibile (si parla di "infrarosso"), mentre a temperature elevate, oltre il centinaio di gradi, diventa visibile ("incandescenza"). L'energia emessa da un corpo di volume unitario è associata ad una funzione $u(\nu, T)$, chiamata *densità spettrale di energia*, dove ν indica la frequenza alla quale viene emessa l'energia e T la temperatura. Se questa densità di energia viene valutata per unità di volume è possibile ricavare l'energia totale, mentre se viene valutata per unità di tempo, superficie ed angolo solido, l'energia media emessa viene detta *potere emissivo* e può essere misurata dalla funzione $e(\nu, T)$. Si definisce invece *potere assorbente*, denotato con $a(\nu, T)$, «*la frazione dell'energia alla frequenza ν incidente ad un corpo alla temperatura T da esso assorbita*» [27, p. 7], ossia il rapporto tra la potenza elettromagnetica assorbita dal corpo e quella incidente allo stesso. Tale funzione è adimensionale e può essere solo minore o uguale a 1; sarà uguale a 1 nel caso in cui la totalità della radiazione venga assorbita.

A partire da questa premessa si può introdurre il concetto di *corpo nero*. Un fondamentale contributo venne da Gustave Kirchhoff (1824-1887) [23], il quale dimostrò che, ad una data frequenza ν e ad una certa temperatura T il rapporto tra il potere emissivo e il potere assorbente è lo stesso per tutti i corpi (dunque tale rapporto non dipende né dal tipo di corpo né dalla sua composizione chimica), e questo rapporto definisce una funzione universale $f(\nu, T)$:

$$\frac{e(\nu, T)}{a(\nu, T)} = f(\nu, T). \tag{2.1}$$

Successivamente Kirchhoff definì il *corpo nero* come un oggetto fisico ideale in grado di assorbire tutta la radiazione elettromagnetica incidente, senza rifletterne o rifrarne alcuna parte, quindi che si comporta come un oggetto avente potere assorbente uguale a 1. Nel caso del corpo nero, dunque, la ricerca della funzione universale $f(\nu, T)$ equivale a ricercare il potere emissivo $e(\nu, T)$, e quindi a determinare la densità spettrale di energia $u(\nu, T)$. Sarà questo il problema teorico che Planck risolverà, avviando una delle più importanti rivoluzioni scientifiche del secolo e della storia della fisica.

Il lavoro di Planck lo porterà a definire ben due nuove costanti fondamentali: h e k, chiamate rispettivamente *costante di Planck* e *costante di Boltzmann*, e a scrivere l'equazione finale per la densità come:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \tag{2.2}$$

In [3] si osserva come, nonostante il ruolo fondamentale che assume la rivoluzione portata da Planck all'interno della fisica e la rilevanza storica che possiede il corpo nero, questo argomento viene spesso trattato nei manuali scolastici in maniera superficiale e poco fedele alla sua ricostruzione storica, e risulta poco approfondito nell'insegnamento scolastico. Forse a causa della sua difficoltà e di una volontà eccessiva di semplificazione, i libri di testo si limitano ad essere informativi piuttosto che argomentativi. Riconoscendo Planck come uno dei padri della fisica quantistica, gli autori dei libri scolastici scrivono frasi del tipo: «*Introducendo la costante h, Planck ha mostrato che l'energia emessa da un corpo nero si può dividere in quanti*», che non contengono alcun riferimento al processo che ha portato Planck ad ottenere il suo risultato, ma semplicemente sostituiscono all'argomentazione un riferimento storico. I libri universitari, solitamente, entrano più nei dettagli, ma anche in questo caso i ragionamenti di Planck passano sottotraccia.

Un'altra strategia utilizzata per introdurre il lavoro di Planck è quella di riconoscere al fisico di avere introdotto la costante h per risolvere il problema della catastrofe dell'ultravioletto[1], e così aver riadattato le leggi di Wien e di Rayleigh-Jeans, che erano valide in differenti zone dello spettro. Tale interpretazione, oltre che incompleta, è storicamente inaccurata, poiché il lavoro di Rayleigh-Jeans è una reazione al lavoro di Planck, ma soprattutto trascura il vero problema a cui quest'ultimo si interessò. Questi esempi, quindi, mostrano come i testi siano solitamente caratterizzati da parti di informazioni che formano una narrazione cronologica di *ciò* che Planck ha ricavato, senza tuttavia soffermarsi su *come* il ragionamento dello scienziato tedesco abbia portato ad una rivoluzione scientifica.

Proprio a partire da queste problematiche a livello didattico nasce lo studio riportato in [3], che si pone tra gli obiettivi, oltre a quello di tentare di colmare questa lacuna, quello di suggerire un modo per analizzare gli articoli originali pubblicati da Planck nel 1900 e nel 1901 per far emergere la natura interdisciplinare del ragionamento che ha portato ad una grande rivoluzione scientifica. L'articolo vorrebbe quindi mostrare come il caso del corpo nero offra un'importante opportunità per trattare con un argomento interdisciplinare. Inoltre, da esso emerge come la difficoltà degli studenti nel comprendere il ruolo della matematica nello sviluppo di certi concetti in fisica dipenda proprio dal fatto che la matematica gioca un ruolo

[1]Secondo il modello classico dato dalla legge di Wien che esporremo a breve, un corpo nero ideale in equilibrio termico avrebbe dovuto emettere radiazione elettromagnetica con potenza infinita, per frequenze elevate. La soluzione di Planck permise di riadattare la legge classica e di risolvere questo problema

strutturale nel ragionamento fisico, collegandoci alle problematiche messe in luce nel Capitolo 1.

Perciò, partendo dal caso emblematico del corpo nero, la ricerca vuole mettere in luce l'importanza e la necessità didattica di costruire competenze interdisciplinari per poter comprendere il ruolo giocato dalla matematica nello sviluppo di teorie fisiche. La principale domanda di ricerca di questo studio, così, va oltre il caso specifico ed è: «Quali materiali didattici, scelte curricolari e attività possono supportare l'insegnamento universitario per guidare gli studenti verso la comprensione del ruolo autentico che possiede la matematica nello sviluppare nuove idee in fisica?» [3, p. 3]. Tale questione è articolata in due "sotto-domande":

a) Quali materiali didattici e quali attività possono aiutare l'insegnamento universitario ad evidenziare il ruolo strutturale della matematica nello sviluppo di nuove idee in fisica e a superare la tendenza a ridurla ad un semplice strumento tecnico?

b) Qual è l'effetto di questi materiali e di queste attività sulla comprensione e sullo sviluppo di abilità e competenze di tipo epistemologico da parte degli studenti?

Nell'articolo ci si concentra sulla prima domanda, cercando di dare importanti risposte e fornire un contributo alla didattica, mentre si apre solo la strada per la seconda domanda. Tale domanda, come affermato nell'introduzione, sarà quella a cui la nostra tesi vorrà fornire un, seppur parziale, contributo. Lo studio, avente come lente didattica il *Modello di Uhden* introdotto in precedenza, si focalizza non tanto sui risultati ottenuti da Planck, quanto sul ragionamento dello scienziato, mettendo in luce come emergano i possibili ruoli della matematica nella fisica richiamati nel capitolo precedente. Infatti, all'interno dell'articolo [3], il ragionamento dello scienziato viene diviso in due "macro-fasi", ognuna delle quali viene seguita da una sezione denominata "*M-I-T analysis*". All'interno di essa i vari passaggi che guidano Planck durante il suo ragionamento, vengono descritti in maniera più approfondita ed "etichettati" con una sigla M, I o T, corrispondente ai tre passaggi fondamentali descritti dal *Modello di Uhden*: la *Mathematization* (la *matematizzazione*), l'*Interpretation* (l'*interpretazione*), o le *Technical mathematical operation* (la matematica *tecnica*). In questo modo il modello aiuta i docenti e i ricercatori nell'analisi dell'approccio degli studenti, e fornisce uno strumento utile a rispondere alle domande di ricerca di questo studio.

All'interno dell'articolo viene descritta inoltre un'attività proposta agli studenti dell'Università di Bologna, svoltasi nel corso degli A.A. 2016-2017 e 2017-2018, basata su un tutorial costruito a partire dall'analisi M-I-T del ragionamento di Planck. L'attività viene riproposta l'anno successivo (2018-2019) dalle professoresse Cattabriga e Levrini, rivolgendosi sia agli studenti del corso di laurea magistrale in Matematica che a quelli del corso di laurea magistrale in Fisica, nell'ambito di una serie di lezioni di Didattica della matematica e di Didattica della fisica. Siccome ai fini della nostra tesi siamo interessati ad analizzare, come vedremo nei capitoli successivi, i contributi forniti da questo ultimo gruppo di studenti, e soprattutto dagli studenti di matematica, ci concentriamo solamente sull'attività del 2018-2019, tralasciando l'analisi dei risultati degli anni precedenti, che invece viene brevemente discussa in [3].

Tale attività è stata divisa in tre momenti, ciascuno dei quali della durata di circa due ore.

1) Nella prima parte, dedicata ad una lezione frontale, le insegnanti presentano brevemente il concetto di interdisciplinarietà e cercano di indagare la concezione che gli studenti hanno di essa. Viene quindi rivolto agli studenti un breve questionario, della durata di 15 minuti, che presentiamo nella sezione successiva, nella quale si analizzano le risposte date. Successivamente, viene introdotto il *Modello di Uhden*, che vuole aiutare lo studente ad acquisire una "lente interdisciplinare" per indagare la relazione fra le due discipline. Viene quindi introdotto l'esempio del corpo nero, esponendo le criticità didattiche descritte in precedenza ed evidenziando la sua valenza interdisciplinare. Per presentarlo si parte dalla descrizione della figura di Max Planck, per ricondursi successivamente al problema oggetto di studio che guida lo stesso scienziato: la ricerca della densità spettrale di radiazione di un corpo nero. Tale presentazione assume un carattere simile a quella esposta precedentemente in questa tesi. Prima di concludere viene lasciato agli studenti un "tutorial", riportato in Appendice A, sul quale dovranno lavorare il giorno successivo: viene assegnato loro il compito di leggerlo attentamente e di provare a rispondere per iscritto alle seguenti domande:

    a) Hai capito o scoperto qualcosa di nuovo rispetto a quello che sapevi leggendo questo testo? Cosa? Evidenzialo nel testo.
    b) Quali sono i punti fondamentali del testo per la tua comprensione del ragionamento di Planck? Evidenziali nel testo e spiega perché su un foglio a parte.
    c) Quali sono i passaggi meno chiari e che vorresti approfondire? Perché? Evidenziali nel testo e spiega perché su un foglio a parte.

   Le risposte a tali domande vengono raccolte dagli insegnanti il giorno successivo, prima di iniziare la seconda attività, e saranno riprese nella terza parte.

2) La seconda parte costituisce la fase centrale dell'attività, e consiste in un lavoro di gruppo e in una successiva discussione. Gli studenti vengono divisi in gruppi composti da tre o quattro persone, nei quali si cerca di inserire almeno un matematico ed almeno un fisico, viene loro richiesto di analizzare

il tutorial (che descriveremo in seguito) e di svolgere insieme vari “compiti”, completando alcune parti del testo lasciate appositamente vuote. La durata di questa attività è di circa 90 minuti.

3) L’ultima parte si svolge nel pomeriggio dello stesso giorno e consiste in una discussione di gruppo. Ai ragazzi vengono fornite alcune domande sull’interdisciplinarietà relative all’attività appena svolta, e viene richiesto loro di discuterne prima in gruppo e poi in classe collettivamente per analizzare quali idee abbiano concepito a riguardo. La discussione vuole raccogliere le idee emerse dai lavori di gruppo e richiede circa un’ora.

Descriviamo ora il tutorial presentato agli studenti nella seconda parte dell’attività e riportato in Appendice A, mostrando come esso voglia far riflettere gli studenti circa il ruolo assunto dalla matematica all’interno di un fenomeno fisico, come avviene, appunto, nel caso del corpo nero. Il testo, come detto in precedenza, è costruito a partire dall’analisi M-I-T dei tre articoli originali di Planck:

- “*On an Improvement Of Wien’s Equation for Spectrum*” (Su un Miglioramento dell’Equazione di Wien per lo Spettro) [33];
- “*The Theory of the Energy Distribution Law of the Normal Spectrum*” (La Teoria della Legge di Distribuzione dell’Energia dello Spettro Normale) [30] ;
- “*On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum*” (Sulla Legge di Distribuzione dell’Energia nello Spettro Normale) [31].

Il primo di essi contiene la congettura matematica che ha portato Planck a formulare la sua versione della legge per la densità spettrale, e fornisce un importante esempio di *matematizzazione* (la freccia che portava dal mondo fisico al modello matematico-fisico nel *Modello di Uhden*); il secondo è l’articolo nominato all’inizio del capitolo e presentato alla *German Physical Society*, mentre il terzo propone un riassunto dei passaggi della sua “rivoluzione”, soffermandosi maggiormente sulle parti di matematica *tecnica*. La struttura del tutorial vuole dunque seguire uno sviluppo logico del pensiero di Planck, cercando di essere più fedele possibile ai testi originari dello stesso scienziato tedesco, pur guidando lo studente attraverso la sua lettura tramite alcuni commenti e richieste inserite dai docenti. L’analisi del ragionamento di Planck che viene proposta nel tutorial si può dividere in due macro-fasi, la prima corrispondente al primo articolo, la seconda ai due rimanenti.

La prima fase riguarda il “*Miglioramento matematico della legge di Wien*”. Viene presentato il problema affrontato inizialmente da Planck, ossia i primi risultati relativi ad approcci classici, di tipo elettromagnetico o meccanico, al problema del corpo nero. Partendo dall’idea che le pareti della cavità di corpo nero fossero costituite da oscillatori armonici detti *risonatori*, i quali mantengono l’equilibrio assorbendo e riemettendo radiazione, Wien, grazie a considerazioni di tipo elettromagnetico, fornisce una legge per la densità espressa da:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu, T), \tag{2.3}$$

dove $U(\nu, T) = a\nu e^{-b\nu/T}$ rappresenta l'energia media dei risonatori di frequenza ν all'interno della cavità. Il bisogno di migliorare tale legge diventa evidente nel tardo 1900, quando Planck viene informato dai fisici Heinrich Rubens (1865-1922) e Ferdinand Kurlbaum (1857-1927) circa i loro esperimenti sull'energia di radiazione del corpo nero. Questi esperimenti mostravano che la funzione di Wien non descriveva correttamente le sperimentazioni sul corpo nero eseguite con materiali come fluorite, salgemma e quarzo, e dunque non era adatta a descrivere le distribuzioni su grandi lunghezze d'onda. Il tutorial mette così in luce l'idea che portò Planck a riscrivere la storia scientifica. Egli cambiò prospettiva, e passo da un approccio elettromagnetico al problema ad uno termodinamico: invece che concentrarsi su come l'energia del singolo risonatore dipendesse da ν e da T, focalizzò la sua attenzione sul concetto di entropia e cercò una nuova espressione che si basasse sulla relazione tra entropia ed energia del singolo risonatore.

La prima fase del tutorial vuole dunque porre l'attenzione sul cambio di prospettiva effettuato da Planck, come lo stesso fisico afferma: «*Le analisi hanno mostrato ancora più chiaramente che manca ancora un importante elemento di connessione, essenziale per afferrare completamente il cuore del problema. Così non mi era rimasto che affrontare il problema dal lato opposto, quello termodinamico, con il quale, inoltre, mi sentivo più in confidenza*» [32]. Planck arriverà così ad ottenere un "miglioramento" della legge di Wien, con l'espressione:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{a\nu}{e^{b\nu/T} - 1}, \tag{2.4}$$

dove la costante a ($\simeq 6{,}626 \cdot 10^{34} J \cdot s$) verrà poi ribattezzata *costante di Planck* ed indicata con il valore h, mentre il rapporto a/b ($\simeq 1{,}380 \cdot 10^{23} J \cdot K^{-1}$) verrà chiamato dallo stesso Planck *costante di Boltzmann*, indicata con k.

La seconda macro-fase coinvolge la "*Costruzione di un modello in analogia con l'approccio di Boltzmann*". Tale fase segue il ragionamento di Planck posteriore alla scoperta dell'equazione precedente. Planck è alla ricerca di una spiegazione teorica di tale formula, che aveva ricavato da una congettura matematica formulata in un contesto di tipo termodinamico, senza tuttavia avere trovato un modello fisico microscopico che ne giustificasse la validità. La rivoluzione portata da Planck nel campo della fisica è presente proprio in questa ricerca, in quanto propone un'idea quasi sconvolgente: suppone che l'energia sia assorbita o emessa dai risonatori non in maniera continua ma in pacchetti discreti. All'interno di questa macro-fase vengono dunque presentati i passi cruciali che guidano Planck in questa ipotesi, nella quale suppone che l'energia non sia uno spettro continuo ma che sia costituita da un numero P di "pacchetti" di una piccola quantità ϵ di energia, in modo che $P \cdot \epsilon = E$. In tal modo le possibili distribuzioni di energia sui risonatori di frequenza ν rimangono in numero finito, e il numero di modi in cui questi pacchetti si possono distribuire vengono chiamati *complessioni*, riconducendosi così al calcolo combinatorio. Il termine *complessione* era stato già introdotto da Boltzmann, che aveva lavorato con la distribuzione di energia di un gas all'equilibrio in modo simile.

L'idea che si cerca di evidenziare è come questa ipotesi sia venuta alla luce, durante gli studi di Planck, grazie ad un'analogia con il lavoro di Boltzmann nell'ambito della meccanica statistica sulla connessione tra entropia e probabilità. Come lo stesso Planck affermò durante una *Nobel Lecture* nel 1920 [32]: «*Anche se la formula di radiazione dovesse dimostrarsi assolutamente accurata, avrebbe solamente un valore limitato assumendo il significato di una formula di interpolazione scelta in maniera efficace. Per questo motivo da allora, dal giorno in cui stabilii la formula, mi sono impegnato nel compito di fornire ad essa un vero carattere fisico, e questo problema mi ha guidato automaticamente a considerare una connessione tra l'entropia e la probabilità, ossia la direzione delle idee di Boltzmann; dopo alcune settimane del più duro lavoro della mia vita, trovai la luce nelle tenebre, e si aprì sopra di me una nuova prospettiva mai sognata prima d'allora*». Queste parole, che ben spiegano l'importanza di questo parallelismo, non sono riportate nel tutorial, nel quale invece vengono presentati i passaggi tecnici cruciali che porteranno lo stesso Planck a giustificare fisicamente la sua legge e, contemporaneamente, a spianare la strada alla teoria dei quanti di energia.

All'interno del tutorial vengono lasciati al lettore degli "spazi da completare" che corrispondono alle parti di matematica *tecnica* presenti dietro al ragionamento del fisico tedesco. Il lavoro di gruppo è dunque basato principalmente su questi compiti, che gli studenti devono svolgere in cooperazione, cercando di procedere verso la soluzione corretta. È bene evidenziare che nessuna di queste "sottosezioni tecniche" è fondamentale per progredire nel ragionamento di Planck, che rimane legato alla parte *strutturale* della matematica, in perfetta analogia con il *Modello di Uhden*, mostrando così il tentativo di aiutare gli studenti a comprendere questa importante differenza.

Dal tutorial, come già affermato a partire dall'analisi M-I-T degli articoli originali, emergono tutti i ruoli della matematica elencati nel capitolo precedente, e ciò permette di comprendere i motivi per cui il caso del corpo nero è stato evidenziato dalle autrici dell'articolo come un importante contributo di ricerca in Didattica della fisica, che va oltre lo specifico esempio e permette di aiutare anche i docenti nella costruzione di materiali didattici. Sono ben visibili infatti, oltre al contributo *tecnico*, i ruoli che, in base a quanto emerso nel Capitolo 1, caratterizzano un approccio interdisciplinare: la matematica "*istiga una rivoluzione scientifica*" avviando una delle più importanti rivoluzioni nella storia della fisica e portando alla nascita della teoria quantistica; è presente inoltre l'utilizzo dello strumento potentissimo e creativo dell'*analogia formale*, che permette di associare la teoria termodinamica a quella probabilistica. La matematica assume così un ruolo *strutturale nella creazione di un modello fisico*, aiutando lo stesso Planck a dare una forma fisica al suo ragionamento, e riportandoci un'idea di interdisciplinarietà in linea con la definizione data. Il percorso di Planck è sì complicato, ma ciò avviene perché esso esprime davvero qual è il ruolo di un'autentica prospettiva interdisciplinare, e conferma che tale prospettiva è necessaria per afferrare al meglio il meccanismo che giace dietro a questa rivoluzione.

Le domande rivolte agli studenti nella terza e ultima parte dell'attività dunque si concentrano su questo: sull'analizzare come possa essere cambiata la loro visione dell'interdisciplinarietà alla luce del lavoro appena svolto, e su come possa essersi modificata la loro concezione del ruolo della matematica all'interno di una teoria fisica. Le domande, alle quali devono rispondere singolarmente prima di affrontare la discussione in gruppo, e poi in classe, sono:

- Ci sono alcuni passaggi matematici rilevanti per la tua comprensione? Sono, riferendosi al *modello di Uhden*, tecnici, strutturali o entrambi?

- Confronta i passaggi che hai evidenziato nella domanda c) della parte 1 con quelli che hai menzionato nella domanda precedente. Ci sono dei punti comuni? Le attività ti hanno aiutato a chiarire i tuoi dubbi?

- Le attività matematiche hanno cambiato la tua visione dell'interdisciplinarietà tra matematica e fisica? Se sì, come e perché?

- Pensando alle modalità di lettura e alle strategie di comprensione di un testo scientifico che avevi prima di questo tutorial, hai trovato qualcosa di nuovo in questo testo? Le attività hanno influenzato il tuo approccio?

2.2 Questionario iniziale

In questa sezione analizzeremo alcuni dati emersi dall'attività sopra descritta:

- I protocolli delle risposte date dagli studenti al questionario proposto nella prima parte e finalizzato ad indagare quale sia la loro idea di interdisciplinarietà e la loro esperienza di attività interdisciplinari;

- Il transcript della discussione collettiva semi-guidata dagli insegnanti nella parte finale dell'attività a partire dalle risposte date individualmente e discusse in gruppo sulle domande della terza parte di attività.

Il questionario, svolto individualmente in 15 minuti, è suddiviso in tre domande che presentiamo, provando a fornire una breve analisi delle risposte.

1. Cosa intendi per interdisciplinarietà (tra matematica e fisica)?

2. Quali immagini associ a tale espressione, pensando in particolar modo a matematica e fisica?

3. Pensando alla tua carriera scolastica e universitaria ti vengono in mente dei momenti interdisciplinari? Se sì, quali?

Per la successiva analisi delle risposte, alla ricerca di un'idea primitiva di interdisciplinarietà, abbiamo preso in considerazione i questionari di 28 studenti di fisica e 14 studenti di matematica.

Analizzando le risposte, soprattutto alle prime due domande, si possono individuare tre "livelli di consapevolezza" nei quali si ritrovano spesso alcune parole chiave.

Il primo livello è corrispondente alla classica visione didattica, evidenziata anche nel primo capitolo, che è solita vedere la matematica come un mero strumento al servizio della fisica e la fisica come un semplice contesto in cui applicare la matematica. Tale livello si ritrova quasi nel 50% degli studenti coinvolti ed è legato a termini quali: *Applicazione*, *Capacità*, *Possibilità*. Questi ultimi sono i vocaboli che più ricorrono nelle formulazioni che vengono consegnate al docente da questa "tipologia" di studenti. Tipiche frasi di questa concezione sono: «*Interdisciplinarietà è la* ***possibilità*** *di confrontare le due materie, di attribuire una base matematica a fenomeni fisici, e viceversa è il poter confrontare le conoscenze acquisite e migliorarle o correggerle attraverso la partecipazione a corsi complementari*»; «*Interdisciplinarietà è la* ***capacità*** *di collegare tra loro materie simili. Tra matematica e fisica il legame è più lampante, basti pensare alla trigonometria: va formalizzata in ambito matematico ma viene usata in maniera massiccia in fisica. Senza la formalizzazione matematica non si potrebbe usare nella vita reale, e senza l'****applicazione*** *fisica sul piano inclinato non avrebbe senso usarla*». Analizzando anche le "immagini dell'interdisciplinarietà" che emergono dalle loro risposte alla domanda 2 risulta evidente come tale concezione sia legata a questo livello base e non sia evoluta. L'immagine a cui associano la relazione matematica-fisica è quella di una bicicletta: la matematica e la fisica vengono paragonate a due ruote della stessa bici, nella quale la matematica serve per pedalare e la fisica per dare la direzione, mantenendo così implicita la distinzione fra le due, e associando all'interdisciplinarietà la possibilità di poter usare l'una o l'altra per guidarsi nella comprensione del concetto: «*La fisica e la matematica sono due ruote della stessa bici; la matematica dietro per pedalare, la fisica davanti per dare la direzione*».

Il secondo livello si può considerare come un livello intermedio, nel quale la concezione di interdisciplinarietà si evolve leggermente rispetto a prima, ma ancora l'idea dominante è quella di una separazione tra le due discipline: esse rimangono indipendenti e distinte, e collaborano tra di loro nel momento in cui debbono essere utilizzate per raggiungere un obiettivo comune, per poi successivamente separarsi nuovamente. Rimane quindi legata al pensiero di un "utilizzo quando necessario" e non ad una visione fondamentale per la comprensione di certi fenomeni, richiamando più, secondo la terminologia introdotta nel Capitolo 1, il concetto di *multidisciplinarietà*. Nonostante questo, nel loro momento "di contatto" le discipline hanno una natura più intrecciata rispetto a quella del primo livello, e lavorano insieme in una maniera sicuramente più vicina all'idea di interdisciplinarietà, essendoci la comprensione di un necessario utilizzo, seppur parziale, di entrambe. L'idea di due discipline separate che a volte si toccano e interagiscono ha come parole chiave: *Coordinazione*, *Confronto* e *Attività*, ma si ritrova anche l'idea di una *Possibilità*. Alcune frasi tipiche di questo approccio sono: «*Interdisciplinarietà è la **coordinazione** tra due discipline che ha come fine la comprensione di un argomento*»; «***Confronto** e approfondimento di aspetti riguardanti determinati argomenti che non sarebbero evidenti se analizzati solo con approccio matematico o fisico*»; «*Interdisciplinarietà è la **possibilità** di arricchire il punto di vista ordinario di una disciplina con l'introduzione di nozioni e strumenti dell'altra. Nel caso della matematica e della fisica ciò può voler dire usare la prospettiva di una nell'altra; in particolare quando una delle due non riesce ad arrivare in fondo ad una certa questione*»; «*L'interdisciplinarietà è un'**attività** in cui le due discipline collaborano per compensare le loro presunte mancanze e rendere consapevole lo studente del loro valore pratico ed educativo*». In generale risulta più difficile per gli studenti che hanno questa visione ricavare delle immagini: un esempio prototipico viene fornito dai mattoncini Lego, i quali vengono paragonati alle due discipline, che hanno la possibilità di unirsi per formare delle strutture, pur mantenendo il loro carattere individuale. Nella risposta alla seconda domanda, uno studente disegna due mattoncini e a fianco scrive: «*Matematica e fisica si compenetrano senza perdere la loro individualità*».

L'ultimo livello che si può considerare è quello relativo al grado più elevato di consapevolezza di interdisciplinarietà matematica-fisica, e ben si avvicina alle idee che abbiamo espresso nel Capitolo 1, e in parte in questo. È relativo ad una piccola percentuale di studenti, circa il 10% di essi, i quali percepiscono l'interdisciplinarietà come una necessità per approcciarsi a certi problemi. La consapevolezza all'interno di questo livello è quella di una fusione fra le due discipline, che si coordinano insieme per portare ad un livello di comprensione superiore, irraggiungibile dalle singole discipline, rifacendosi così alla definizione data da Thompson riportata nel Capitolo 1. Parole chiave che riscontriamo in questo approccio sono: *Struttura*, *Necessità*, *Visione*. Riconosciamo anche per questa tipologia alcune frasi caratteristiche: «*L'interdisciplinarietà è la **visione** dei concetti da un punto di vista sia matematico che fisico, che porti ad una conoscenza più completa e consapevole*»; «*Rapporti di complementarietà, integrazione e interazione per le quali matematica e fisica convergono in principi comuni nell'ambito della costruzione teorica*»; «*L'interdisciplinarietà è la possibilità di **visione** del sapere non come una somma di discipline ma come una struttura che permette di approfondire la conoscenza*»; «*Quando in un certo contesto entrambe le discipline sono **necessarie** per spiegare un concetto, sviluppare nuova conoscenza*»; «*L'interdisciplinarietà è un'**esigenza** pratica legata al mondo che ci circonda*». In questo caso gli studenti per esemplificare la loro idea, si avvicinano all'immagine di un prisma: esso raccoglie i vari colori dell'arcobaleno (ossia le discipline) e restituisce lo spettro di luce bianco, nel quale la natura matematica e fisica del concetto si fondono insieme per creare un modello "matematico-fisico": «*L'immagine che mi viene spontanea in mente è una specie di intreccio di due colori differenti che si fondono nel mezzo*».

Un'ulteriore e interessante differenza la si può trovare nella percezione leggermente differente che hanno matematici e fisici riguardo all'interdisciplinarietà, a conferma di come le proprie "basi scientifiche" modifichino la concezione iniziale che si ha di essa. Questa differenza, che porta ogni "rappresentante" del proprio corso di studi a vedere la propria disciplina come centrale nella visione interdisciplinare, è molto più marcata in quella tipologia di studenti appartenente al "primo livello" che abbiamo caratterizzato sopra, mentre, procedendo verso una concezione più profonda di interdisciplinarietà, questa differenza si assottiglia e diventa sempre meno evidente, mostrando come entrambe le discipline siano considerate necessarie.

Nelle risposte date dai fisici si intravede infatti l'idea che l'interdisciplinarietà accosti le due discipline, ma in generale la tendenza è quella di considerare la fisica come "superiore". Cercando di concretizzare in un'immagine il punto di vista di questi studenti, si potrebbe dire che essi vedono la fisica come la strada da percorrere, mentre la matematica assume il ruolo di un veicolo (come può essere una bicicletta, o una macchina) necessario a percorrere questa strada (ci si riporta all'idea predominante della matematica come strumento), per giungere successivamente alla comprensione di un concetto che assume natura perlopiù fisica. I matematici invece, al contrario, tendono a vedere la matematica come "necessità" della quale la fisica si avvale per migliorare la propria comprensione. La matematica, nella loro concezione, assume un carattere superiore, in quanto è in grado di esistere anche da sola, al contrario della fisica che necessita della matematica; è caratteristica la citazione di uno studente che vede l'interdisciplinarietà come: «*il saper tracciare una strada chiara intassellando mattoncini di fisica sul sentiero matematico*». Si ritrova quindi nei matematici una differente impostazione mentale, volta a sottolineare l'importanza e l'imprescindibilità della matematica in fisica, ed è visibile in essi una divisione fra le discipline ancora più marcata: secondo i matematici la fisica non è indispensabile, anzi, spesso viene vista come una disciplina complicata e molto più incomprensibile della matematica.

L'altro contributo analizzato, e che fornisce un parziale elemento introduttivo al focus principale della nostra tesi, è il transcript della discussione finale collettiva. Partendo dalle domande proposte agli studenti nella terza parte dell'attività, le insegnanti hanno moderato una discussione volta a comprendere come e se l'attività proposta avesse modificato la visione di interdisciplinarietà degli studenti.

Inizialmente, senza essere guidati dai docenti, alla richiesta di trarre le conclusioni sull'attività svolta, gli studenti si concentrano sulle competenze "disciplinari" richieste per svolgerla: i matematici affermano di non possedere sufficienti competenze per comprendere il senso fisico del lavoro, mentre i fisici ammettono di avere avuto bisogno dei matematici per riuscire a risolvere i compiti "tecnici" dell'attività: «*Nel nostro gruppo eravamo due matematici e un fisico. Noi matematici non avevamo abbastanza competenze per comprendere il senso fisico e molte cose le abbiamo capite perché ce le ha spiegate uno studente di fisica. Mentre per le attività siamo stati più noi, siccome coinvolgevano la matematica, ad impostare la cosa*». A questo livello riconoscono che tali compiti non siano fondamentali per la comprensione del ragionamento, donando alla matematica *tecnica* la sua caratteristica di potersi astrarre dal processo, pur senza nominare questo passaggio direttamente, ma solo in maniera implicita. Nel momento in cui i docenti chiedono agli studenti di concentrarsi maggiormente sulle competenze interdisciplinari emerse, l'attenzione si sposta al ragionamento condotto da Planck, nel quale viene individuata la presenza del reale carattere interdisciplinare dell'attività. Gli studenti riconoscono la capacità di Planck di saper modellizzare come fondamentale per comprendere il suo ragionamento: tale capacità viene associata al saper dare un senso fisico alla situazione, pur rispettando i limiti matematici imposti: «*La modellizzazione fa da ponte, ed è interdisciplinare, in quanto c'è bisogno di competenze matematiche per raggiungere il risultato; il modello che stiamo considerando deve avere un senso fisico ma anche rispettare limiti matematici che ci vengono imposti. Questi limiti ci escludono ogni altra configurazione possibile*». Per comprendere a fondo il processo eseguito da Planck si focalizzano sul cambio di prospettiva da lui portato: riconoscono nel suo saper "creare un modello" la possibilità di allargare lo scenario, e passare da una visione elettromagnetica ad una termodinamica, espandendo il proprio ventaglio di possibilità. Ritrovano così un primo fondamentale ruolo interdisciplinare della matematica come "istigatrice di rivoluzioni scientifiche: il saper allargare la prospettiva allontanandosi dal focus del problema per poi ritornare ad esso da un altro punto di vista: «*Planck analizza ciò che sta accadendo, e mostra la capacità di riuscire ad allargare lo scenario e chiedersi: "quali altre strade sono possibili?". Riesce ad uscire dal modello per poi vederlo in un'altra prospettiva*».

Un ulteriore "salto" a livello interdisciplinare viene dal ruolo che riconoscono nell'*analogia*: il docente indirizza l'attenzione dei ragazzi verso le varie fasi che portano Planck a passare, nella seconda parte dell'attività, dalla matematica, per dare un senso fisico alla sua interpretazione. I ragazzi riconoscono nel termine *analogia* lo strumento potentissimo che Planck utilizza, ritrovando così un altro dei ruoli assunti dalla matematica nel processo: «*Sfrutta le analogie per cercare qualcosa di simile, prende a prestito un modello matematico e ritrova l'analogia, che funge da "motore"*». Ritrovano dunque questo ruolo di "motore", di creatività della matematica, e riconoscono che i vari e continui passaggi tra le due discipline non sono solo strumentali - esemplificativa in tal senso è la frase di uno studente: «*Non sono solo passaggi del tipo "prendo tale disciplina e la applico nel campo dell'altra"*» -, ma che per comprendere veramente questa modalità di azione sia necessaria una vera e propria competenza interdisciplinare.

Il focus della nostra tesi parte dunque da questa attività svolta dagli studenti: in seguito, nel Capitolo 4, esporremo un'ulteriore attività che abbiamo predisposto per alcuni di essi, per poi analizzare le risposte ottenute nel Capitolo 5.

Capitolo 3

Il Focus Group

In questo capitolo esponiamo le caratteristiche tipiche della metodologia di *Focus Group*, metodologia con la quale abbiamo progettato un'attività proposta ad alcuni studenti, che esporremo nei dettagli nel capitolo successivo. Per la descrizione ci basiamo sull'articolo [39], nel quale l'autrice descrive nel dettaglio la modalità d'azione del *Focus Group*

Il *Focus Group* è un'intervista rivolta ad un gruppo di persone, volta ad approfondire un tema o particolari aspetti di un argomento. Essa ha il carattere di una discussione di gruppo, guidata da un moderatore, il quale propone diversi stimoli ai partecipanti, seguendo una traccia strutturata. Nel nostro caso specifico, il primo stimolo, e il punto di partenza della discussione, consisteva in un testo, contenente diversi estratti prelevati dalle opere di vari autori.

La caratteristica principale del *Focus Group* riguarda l'interazione che si crea tra i partecipanti, la quale produce idee in misura assai maggiore rispetto all'intervista singola, sia a livello di quantità che a livello di qualità dell'approfondimento. Per l'attività proposta nel Capitolo 4 abbiamo seguito la modalità "classica", nella quale le risposte vengono fornite oralmente dai partecipanti e non in forma scritta.

Un *Focus Group* solitamente ha una durata media di circa due ore, ma si possono costruire *Focus* più lunghi o più brevi, a seconda dell'interazione che si crea tra i partecipanti e del numero di studenti coinvolti. La partecipazione al *Focus Group* avviene su base volontaria, e la selezione dei candidati deve poggiare su un criterio di omogeneità: nel nostro caso si è scelto studenti che appartenessero tutti al corso di laurea magistrale in Matematica, e che avessero svolto l'attività descritta nel Capitolo 2 durante l'A.A. 2018-2019. Un *Focus Group* è tipicamente composto da 6-10 persone, ma può in genere variare da 4 a 12. Tale numero è condizionato dal fatto che deve essere sufficientemente piccolo da permettere a ciascun partecipante di esprimere le proprie sensazioni, ma abbastanza grande da favorire una dialettica tra i partecipanti. Nel nostro caso abbiamo tenuto un primo incontro con 5 partecipanti, mentre per i successivi, a causa del numero limitato di studenti disponibili, abbiamo dovuto restringere il numero a 3 partecipanti.

Generalmente, la traccia di un *Focus Group* deve contenere una serie programmata di domande aperte, la cui formulazione è flessibile: le domande sono strutturate in modo da fornire una traccia alla discussione. Solitamente, si inizia da argomenti più generali per poi arrivare a quelli più specifici, in una sorta di "imbuto": i temi più importanti, quelli che rappresentano il nucleo della questione, sono affrontati verso il centro della discussione. Una scelta differente che, come si vedrà, è stata fatta per il primo *Focus Group*, è quella di presentare le domande assieme: in fase di analisi, l'ordine in cui hanno deciso di rispondere ad esse rappresenta un ulteriore dato.

Durante la discussione il moderatore, conoscendo già gli obiettivi che si vorrebbe raggiungere, cerca di intervenire il meno possibile, per garantire all'attività la caratteristica di spontaneità. Esso fornisce solo alcuni "stimoli", richiedendo di approfondire alcuni passaggi o aiutando la discussione a tornare sui giusti binari.

Il confronto di gruppo deve sempre essere registrato, almeno su supporto audio. Ultimamente è in uso anche la registrazione visiva della discussione, in quanto essa fornisce ulteriori importanti elementi, quali atteggiamenti ed espressioni non verbali. Seguendo queste direttive, abbiamo registrato la prima discussione su un supporto audio-visivo, mentre per le successive due, tenutesi online, abbiamo registrato la video chiamata.

Al termine della discussione, il compito del moderatore, addetto alla raccolta dati, è di trascrivere, riascoltando la registrazione, i dialoghi avvenuti tra i partecipanti, mantenendo un carattere di fedeltà totale alle parole utilizzate da questi ultimi. A partire da tali trascrizioni si baserà la successiva analisi dell'attività di *Focus Group*.

Capitolo 4

Presentazione dell'attività di Focus Group

All'interno di questo capitolo descriviamo la progettazione di un'attività rivolta ad alcuni studenti del corso di laurea magistrale in Matematica che hanno partecipato all'attività descritta nel Capitolo 2 nell'A.A. 2018/2019. Essa nasce con l'obiettivo di comprendere quale effetto tale attività abbia avuto sulla visione del ruolo assunto dalla matematica all'interno della fisica. Nello specifico, la domanda che siamo interessati ad analizzare è la seconda domanda di ricerca presentata nell'articolo [3]: «Qual è l'effetto dei materiali e delle attività presentate sulla comprensione e sullo sviluppo di abilità e competenze di tipo epistemologico da parte degli studenti?».

Nella discussione finale svoltasi al termine dell'attività sul corpo nero, e riportata in fondo al Capitolo 2, sono emersi alcuni risultati che potrebbero guidarci in questa direzione, ma il carattere non spontaneo e guidato della discussione non ha la stessa valenza della spontaneità della nostra attività.

Per strutturarla ci siamo basati sulle metodologie del *Focus Group* (descritte nel capitolo precedente), e abbiamo coinvolto all'interno di essa un piccolo campione di studenti.

Avendo a disposizione 11 persone si è deciso di fare tre gruppi e dedicare a ciascuno un incontro di *Focus Group*:

- Il primo si è svolto a dicembre (19/12/2019), con cinque partecipanti, ed è stato il "pilot-study", ossia ha avuto la funzione di testare il *Focus Group* per capire se fossero necessarie modifiche ed aggiustamenti;
- Il secondo, svoltosi ad aprile (22/04/2020) ha coinvolto tre studenti: il *Focus Group* è stato modificato rispetto a quello di dicembre, nel tentativo di renderlo uno strumento più efficace e mirato verso l'obiettivo della ricerca;
- L'ultimo si è svolto pochi giorni dopo il secondo, a maggio (01/05/2020), ed ha seguito la linea del precedente: ha coinvolto tre partecipanti e non è stato modificato.

Tutti i *Focus* hanno avuto una durata media di 90 minuti, in linea con le specifiche che abbiamo introdotto nel Capitolo 3.

La scelta della modalità di *Focus Group* è funzionale per il nostro obiettivo di ricerca, e presenta rilevanti differenze rispetto all'attività sul corpo nero.

La prima differenza riguarda la selezione degli studenti che hanno partecipato al *Focus Group*: è stato proposto a tutti gli studenti iscritti al corso di matematica un questionario nel quale si richiedeva, nel caso in cui avessero partecipato l'anno precedente all'attività sul corpo nero, un'eventuale disponibilità a collaborare a questa ricerca. Dunque, la partecipazione risulta essere legata solamente ad una base volontaria e non ad obblighi curricolari, in linea con le direttive del capitolo precedente. La seconda differenza la si può trovare nel carattere dell'attività: situandosi in un ambiente informale, in assenza di un contratto didattico fra studente e docente, i partecipanti si sentono più "liberi" di esternare i propri pensieri all'interno della discussione, e ciò ci permette di cogliere in maniera più efficace i segnali che forniscono e che sono utili per la nostra ricerca. L'ultima differenza è relativa alla struttura stessa dell'attività: abbiamo deciso di presentare alcuni estratti dei testi originali, senza modificarli, inserendo solamente alcuni brevi commenti introduttivi per aiutare lo studente a non trovarsi completamente spaesato di fronte al brano. L'attività, inoltre, non richiede allo studente lo svolgimento di compiti tecnici, ma presenta alcune domande aperte, fornite nel corso della discussione, alle quali viene chiesto di rispondere e discutere successivamente, assieme con i propri colleghi.

Nello specifico, all'interno del *Focus Group*, vengono trattati tre autori: Galileo Galilei (1564-1642), Johannes Keplero (1571-1630) e Isaac Newton (1642-1726). I brani proposti sono degli estratti dalle seguenti opere:

1. **Galileo Galilei (e Guidobaldo Del Monte)**:
   - "*Dagli Appunti di Guidobaldo*" (1592) [7];
   - "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a Due Nuove Scienze attenenti alla Meccanica e i Movimenti Locali*" (1638) - estratti dalla II° e dalla IV° giornata [17];
2. **Johannes Keplero**:
   - "*Astronomia Nova Seu Physica Coelestis*" (1609) - Dai Capitoli LVI, LVII, LVIII, LX [22];
3. **Isaac Newton**:
   - "*Phylosophiae Naturalis Principia Mathematica*" (1687) - Estratti dai Libri I, III [29];

Tutti i brani sono accomunati da una questione: l'utilizzo delle coniche nella ricerca di una spiegazione delle possibili traiettorie del moto.

La scelta di questi particolari brani è legata al loro profondo interesse interdisciplinare, e l'attività, come detto, nasce proprio per valutare la capacità degli studenti di riconoscere i tratti interdisciplinari dei ragionamenti degli autori. Inoltre, per la selezione dei brani, si è guardato anche al ruolo chiave che essi hanno avuto nella storia della fisica, e in particolare nella storia della relazione tra matematica e fisica: gli estratti proposti delle opere di Galileo e di Guidobaldo infatti si situano in un'epoca nella quale assistiamo alla nascita dei primi tentativi di matematizzare la fisica. Prima di allora gli schemi interpretativi dei fenomeni naturali erano di tipo filosofico e qualitativo. Con Galileo, Keplero e Newton la matematica entra con prepotenza nella fisica e con essa la possibilità di misurare e quantificare. Così, come nel caso degli articoli di Planck sul corpo nero, anche le opere da cui sono tratti questi brani segnano un punto di svolta nella storia della fisica, legato alla modalità di interazione matematica-fisica.

Le risposte date dagli studenti nel corso dell'attività vengono valutate nel capitolo successivo, nel quale proveremo ad analizzare la discussione effettuata durante il *Focus*, mentre in questo ci concentriamo sull'esposizione dei singoli testi e sulle loro peculiarità interdisciplinari. Di seguito descriveremo i brani scelti per il testo usato nel *Focus Group* e riportato in Appendice B, contestualizzandoli all'interno dell'opera da cui sono tratti e cercando di mettere in luce gli aspetti interdisciplinari del ragionamento degli autori. Per le analisi dei brani e, più in generale, delle opere da cui sono estratti, abbiamo utilizzato [26], [38] e le note di [29].

4.1 Galileo e Guidobaldo

Il primo contributo che consideriamo è relativo agli studi di Galileo Galilei circa il moto degli oggetti. Verso la fine del 1500 la descrizione del moto dei corpi inanimati risentiva ancora fortemente dell'influsso aristotelico sul moto. La filosofia di Aristotele prevedeva una distinzione fra moto *naturale* e moto *violento*: il moto *naturale* rappresenta quello che ciascun corpo lasciato libero segue "naturalmente", associato al movimento verticale verso l'alto per i corpi leggeri, e a quello verticale verso il basso per i corpi pesanti, i quali sono attratti verso il centro della terra (identificato con il centro dell'universo); il moto *violento*, invece, rappresenta il moto compiuto dai corpi quando vengono rimossi dalla loro posizione naturale per effetto di una certa causa esterna.

I "moti verso il cielo", venivano considerati come una composizione di questi due: il moto di un proiettile era composto da un moto orizzontale *violento*, che si trasformava in un moto *naturale*, nel momento in cui il corpo perdeva il proprio impeto e rallentava fino a fermarsi. Le chiavi interpretative prese in considerazione per spiegare questo tipo di moto erano descritte dalla linea retta, dalla linea circolare, e dalle composizioni di essi, mentre la parabola non faceva parte di tali schemi interpretativi. Come scrive lo stesso Aristotele: «*Il moto locale, che è quello che* *noi chiamiamo "traslazione", è sempre o rettilineo, o circolare, o misto di questi due: perché semplici sono questi due soli. E la ragione è che ci sono anche due sole grandezze semplici, la linea retta e quella circolare. Circolare è il movimento intorno al centro, rettilineo quello verso l'alto e il basso. Verso l'alto dico poi il moto che si allontana dal centro, verso il basso quello in direzione del centro*» [11, p. 17].

Lo studio di Galileo si concentra sugli esperimenti che egli stesso compie nel tentativo di descrivere il moto dei proiettili. Il primo brano, ad opera di Guidobaldo Del Monte (1545-1607), con il quale Galileo ebbe un fitto scambio epistolare, descrive l'esperienza dello stesso Guidobaldo nello studiare il moto di oggetti lanciati "orizzontalmente", nel quale ritroviamo un tentativo di descrivere il moto che oggi chiamiamo parabolico, paragonando la sua traiettoria alla forma di una catena. Guidobaldo osserva che, lanciando verso l'alto una palla con la mano o una freccia con una balestra, vi è simmetria fra «*il viaggio che fa nel callar che nel montare*», ossia fra il tratto che percorre quando viene lanciata e quello che percorre nel momento in cui raggiunge il picco e scende, ricavando una prima osservazione sulla natura della traiettoria. Osservando la figura che viene tracciata dal moto dell'oggetto rileva una notevole somiglianza con la parabola e con l'iperbole, e prosegue nella ricerca di un modo per poter descrivere tale traiettoria in maniera generale, senza però tentare un'analisi matematica. Nel suo discorso, in un primo momento paragona la traiettoria a quella creata da una corda, non tesa, fissata a due estremi (se si visualizza la sua parte simmetrica rispetto all'asse orizzontale), per giungere poi a correggersi e a trovare la similitudine adatta con l'immagine di una catena che, secondo Guidobaldo, si accosta meglio a tale situazione. Per concludere, propone un metodo per replicare la sua esperienza e verificare questo fatto: basterà lanciare una palla colorata di inchiostro su un piano perpendicolare all'orizzonte per notare la simmetria del moto percorso e la similarità con la catena.

Un primo spunto interessante circa i processi che guidano l'autore nella sua descrizione del fenomeno e che possiamo ritrovare in questo estratto è relativo al tentativo compiuto da Guidobaldo di creare un modello a partire da un'osservazione diretta di un fenomeno fisico. Rifacendoci al *Modello di Uhden* per mettere in luce alcune caratteristiche interdisciplinari del brano, possiamo notare come nell'osservazione della proprietà di simmetria della traiettoria e nella ricerca di un paragone con un oggetto conosciuto, come la catena, vi sia un'idea di *matematizzazione* di un esperimento legato alla realtà fisica e di una successiva *interpretazione* di tale proprietà geometrica, per comprendere la natura del moto.

I successivi brani di Galileo sono posteriori all'esperimento di Guidobaldo, e sono due estratti provenienti dalla sua opera "*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica e i Movimenti Locali*" [17]. Essa è la più importante opera galileiana sulla scienza moderna, e si sviluppa come un dialogo tra tre personaggi, ambientato nella cornice del Palazzo Sagredo a Venezia. I tre personaggi, che all'interno dell'opera dibattono tra loro di temi scientifici, rappresentano diversi punti di vista: Salviati, pseudonimo per indicare lo stesso Galileo, rappresenta il personaggio progressista e innovatore; Simplicio, rappresentante della filosofia antica, simboleggia l'accademico ancorato alle leggi del passato e alla tradizione, mentre Sagredo è un colto nobile veneziano, interessato al dibattito, che si occupa di fare da mediatore fra gli altri due personaggi.

Il primo estratto, proveniente dalla II° giornata, vede Salviati rispondere alla richiesta di Simplicio di fornire una trattazione delle proprietà di alcune figure geometriche elencate da Apollonio, soffermandosi su quelle paraboliche, e di mostrare qualche regola per poter disegnare «*sopra un piano tale linea parabolica*» [17, p. 54]. Salviati risponde riportando la trattazione di un'opera da lui letta di una quarta persona, che chiama "Autore", il quale consegna al lettore un metodo definito: «*un modo "veramente maraviglioso" di disegnare la parabola*» [17, p. 54]. Questo metodo consiste nel lanciare una palla rotonda, non più grande di una noce, che sia stata scaldata e inumidita, sopra uno specchio inclinato, in modo da permetterle di lasciare un segno su di esso. Il segno seguirà una linea parabolica e permetterà di disegnarne trenta o quaranta nello stesso tempo che ci vorrebbe per disegnarne quattro o cinque con un compasso.

La discussione sul moto parabolico è qui solo accennata, in quanto viene ripresa maggiormente nella IV° giornata, nella quale si tratta appunto il lancio dei proiettili, e da cui viene estratto il terzo e ultimo brano di Galileo. In questa giornata, Salviati, dopo avere discusso nelle giornate precedenti del moto uniforme e di quello uniformemente accelerato, riporta nuovamente la lettura di un'opera dell' "Autore", raccontando la descrizione che quest'ultimo fa del moto di un oggetto lanciato lungo la linea dell'orizzonte, considerandolo come una composizione dei due moti uniforme e accelerato. Egli immagina di avere un oggetto lanciato sul piano orizzontale, e suppone di poter rimuovere ogni impedimento al suo moto: deduce così che, se il piano è infinito, l'oggetto procederà con un moto uniforme perpetuo sullo stesso piano, mentre, se si considera il piano posto in alto, l'oggetto aggiungerà a tale moto rettilineo, nel momento in cui raggiunge la fine del piano, un moto verso il basso dovuto alla propria gravità: riesce in questo modo a descrivere un moto composto da un moto uniforme e da uno accelerato, che chiama *proiezione*. L' "Autore", prosegue poi nella trattazione dimostrando alcune proprietà di tale *proiezione*; la prima di esse afferma che: «*Un proietto che si muove di moto orizzontale equabile e di un moto naturalmente accelerato, descrive nel suo movimento una linea semiparabolica*» [17, p. 80]. Nell'estratto scelto viene riportata la dimostrazione letta da Salviati di questa proposizione, che descriviamo brevemente.

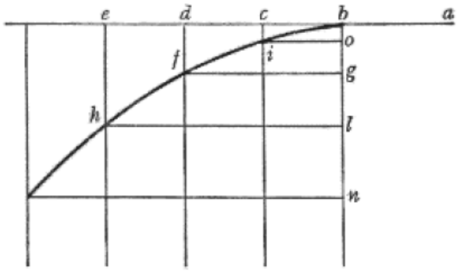


Figura 4.1

Egli paragona l'asse orizzontale allo scorrere del tempo, in quanto, siccome il moto su tale asse è uniforme, i tempi sono proporzionali agli spazi, e considera su di essa un tratto *be* che suddivide in tre segmenti congruenti *bc*, *cd*, *de*, come mostrato in Figura 4.1; dopodiché, partendo dagli estremi di questi segmenti, traccia tre semirette perpendicolari all'asse orizzontale. Considera quindi un segmento qualsiasi *ci* sulla semiretta condotta da *c*, e, successivamente, considera sulle due semirette condotte dai punti *d* ed *e*, due segmenti *df* ed *ek*, che siano rispettivamente il quadruplo e il nonuplo di *ci*. Nel disegnare la traiettoria, unendo gli estremi di questi segmenti partendo dal punto *b*, ossia dal punto nel quale "viene a mancare il sostegno", si ritrova la stessa traiettoria percorsa dall'oggetto. Si visualizza in questo modo la composizione dei due moti uniforme e accelerato, e si evidenziano le rispettive caratteristiche: sull'asse orizzontale si considerano tempi uguali, mentre sull'asse verticale si nota come lo spazio percorso dall'oggetto sia proporzionale al quadrato del tempo considerato, rispettando così la regola del moto uniformemente accelerato. Salviati afferma che, qualsiasi sia la porzione di tempo che si prenda, e qualsiasi sia il numero di intervalli che si consideri, procedendo a tracciare i punti lungo le semirette verticali con lo stesso metodo si otterrebbe sempre una tale proporzione. Al termine, grazie alla conoscenza e al confronto con le proprietà geometriche presenti nelle opere di Apollonio, ritrova nella figura la proprietà caratteristica della parabola dimostrata dallo stesso Apollonio.

È importante sottolineare come in questo passaggio Galileo utilizzi una matematica *tecnica*, facendo riferimento alle proprietà della parabola ritrovate all'interno degli studi di Apollonio. Grazie all'utilizzo di questa matematica *tecnica* riesce a raggiungere un livello maggiore di matematizzazione, se lo si paragona con il precedente "modello" di Guidobaldo.

L'ultima parte del brano riporta le perplessità di Sagredo e di Simplicio circa questo risultato, e la risposta fornita da Salviati. Sagredo fa una prima osservazione sul lavoro dell'"Autore", affermando che egli sta supponendo che i due moti sugli assi, uniforme e accelerato, non si disturbino l'un l'altro. Quindi, discute della verosimiglianza del modello proposto da Galileo, facendo il seguente appunto: l'asse della parabola descritta dall' "Autore" dovrebbe essere perpendicolare all'orizzonte, quindi diretta verso il centro della terra. Quindi, se la traiettoria fosse parabolica, essa si discosterebbe da tale asse all'aumentare del tempo: Sagredo pone il problema che l'oggetto non si dirigerebbe mai verso il centro della terra, o, se vi andasse, dovrebbe seguire un'altra traiettoria, differente dalla parabolica. A tale perplessità, Simplicio ne aggiunge altre sempre legate alla corrispondenza tra la realtà e il modello costruito per descrivere il moto: egli infatti vede come impossibile il fatto che il piano orizzontale possa essere una linea retta posta sempre alla stessa distanza dal centro, e, ugualmente, non ritrova per una situazione reale il fatto che il moto possa essere trattato trascurando l'impedimento prodotto dall'aria, che secondo Simplicio altera l'uniformità del moto orizzontale e la regola di accelerazione costante del moto verticale. Conclude il suo discorso affermando: «*Dalle quali tutte difficoltà si rende molto improbabile che le cose dimostrate con tali supposizioni incostanti possano poi nelle praticate esperienze verificarsi*» [17, p. 83]. Salviati riconosce inizialmente tutte le difficoltà espresse dai due interlocutori, e ammette che le sue conclusioni dimostrate in astratto si possono alterare e modificare nel passaggio alla concretezza: «*E concedo che le conclusioni così in astratto dimostrate si alterino in concreto, e si falsifichino a segno tale, che né il moto trasversale sia equabile, né l'accelerazione del naturale sia con la proporzion supposta, né la linea del proietto sia parabolica, etc.*» [17, p. 83]. La risposta di Salviati procede spiegando l'utilità e la necessità di questo procedimento, utilizzato dall' "Autore", di approssimare la realtà con modelli ideali ma verosimili per riuscire ad ottenere dei risultati quantificabili, procedimento che sottolinea non essere estraneo a molti scienziati prima di lui, fra cui Archimede.

Da queste considerazioni emerge chiaramente il ragionamento di Galileo all'interno di questi brani: ritiene che sia utile trascurare alcuni aspetti della realtà e creare un modello che possa rappresentare il fenomeno in una situazione ideale, e solo successivamente, esaminando le limitazioni, valutare l'efficacia del modello e la sua veridicità.

Dall'analisi di quest'ultimo brano emerge come Galileo sia in grado di arrivare a costruire un modello matematico-fisico completo, dotato di una struttura matematica e di un proprio carattere interdisciplinare, che riesca a ricondurre il moto di un oggetto appartenente al mondo naturale ad una figura descrivibile dal punto di vista matematico. Si possono ritrovare analogie con il ragionamento di Planck, soprattutto l'idea di formulare una congettura matematica per arrivare alla risoluzione di un problema, e, successivamente, imporre i limiti fisici e valutare la consistenza delle ipotesi con un processo di *interpretazione*, facendo riferimento alla terminologia del *Modello di Uhden*. Il passaggio dal modello ideale permette a Galileo di tenere più facilmente sotto controllo la situazione, e gli consente di trascurare ciò che non è rilevante ai fini del calcolo, per poi verificare successivamente la sua ipotesi ed eventualmente correggerla.

4.2 Keplero

Il secondo contributo selezionato per l'attività di *Focus Group* è relativo ad un'opera di Johannes Keplero. Abbiamo considerato alcuni estratti prelevati dai Capitoli LVI, LVII, LVIII, LX della sua opera "*Astronomia Nova seu physica coelestis*" [22], composta da cinque libri. Gli estratti selezionati sono stati prelevati dall'opera originale, scritta in latino, e sono stati tradotti in lingua corrente con l'aiuto di un docente di lettere classiche. All'interno dell'opera, Keplero cerca di fornire una soluzione al problema relativo alla traiettoria seguita dai pianeti durante il loro moto celeste, e di presentare uno strumento in grado di spiegare i dati ricavati dalle osservazioni astronomiche riguardanti gli stessi pianeti. I testi sono relativi alla formulazione dello stesso scienziato delle prime *Due Leggi di Keplero*, che riportiamo brevemente:

- **Prima Legge di Keplero**: *L'orbita descritta da un pianeta è un'ellisse, di cui il Sole occupa uno dei due fuochi.*
- **Seconda Legge di Keplero**: *Il segmento (raggio vettore) che unisce il centro del Sole con il centro del pianeta descrive aree uguali in tempi uguali.*

All'interno dell'opera le *Leggi* non sono riportate in questa maniera distinta, corrispondente alla loro formulazione odierna. Esse sono frutto di un lungo lavoro, e, nei testi selezionati, abbiamo elencato gli estratti più significativi, quelli che più sono rappresentativi del metodo argomentativo utilizzato in questo caso da Keplero.

Il lavoro dello scienziato è basato sulla ricerca di un'orbita per Marte, pianeta da sempre visto come "imprevedibile" nella sua traiettoria da parte dei grandi astronomi del passato. Keplero inizia a studiare l'orbita di Marte intorno al 1600, quando si trasferisce a Praga per collaborare con Tycho Brahe (1546-1601), considerato all'epoca come il più grande osservatore ad occhio nudo dei cieli. Proprio a Praga, Tycho incarica Keplero di occuparsi del calcolo dell'orbita di Marte, lavoro che lo porterà a comporre la sua "*Astronomia Nova*".

Keplero, convinto di poter risolvere il problema dell'orbita di Marte in pochi giorni, impiegherà tuttavia ben cinque anni per riuscire a redigere le sue teorie, che porteranno ad una corretta formulazione matematica del moto degli astri celesti. L'orbita di Marte venne denominata da Keplero come "*sfuggente*", e lo stesso pianeta venne definito come "*un nemico che sfugge beffardo a chi vorrebbe indovinarne il moto*", ma tale "innafferabilità" si rivelò per lo stesso scienziato una fortuna: il Pianeta Rosso è infatti il pianeta più eccentrico, quello la cui orbita maggiormente si differenzia da una perfetta circonferenza, e quello che meglio aiuta a comprendere la reale forma ellittica dell'orbita dei pianeti. La sua posizione di relativa vicinanza alla Terra lo rendeva adatto alle osservazioni, e dunque un'ottima chiave per leggere l'universo. Il trattato, inizialmente nato come "*Racconto di Marte*", divenne la "*Nuova Astronomia*".

A partire dalle osservazioni di Tycho sui movimenti di Marte, Keplero decide di abbandonare i dogmi aristotelici per cercare una spiegazione personale alla natura della traiettoria dell'orbita percorsa e alla velocità del pianeta nel suo moto. Come già richiamato prima, secondo le leggi astronomiche tradizionali, i corpi celesti, nel loro moto eterno ed immutabile dovevano percorrere orbite perfettamente circolari, essendo il cerchio la forma perfetta, e muoversi con velocità uniforme. Per risolvere il problema delle osservazioni, i cui dati non combaciavano bene con tali teorie, gli astronomi avevano introdotto l'idea degli epicicli, ossia combinazioni di più cerchi in moto l'uno rispetto all'altro, in modo da essere in grado di poter fornire previsioni accurate sulla posizione occupata da un pianeta. Anche Niccolò Copernico (1473-1543) rimase in parte legato a questa tradizione, in quanto, seppur superando il modello tolemaico che vedeva la terra immobile al centro dell'universo e i pianeti in moto attorno ad essa, considerava le orbite dei pianeti intorno al Sole come circolari. Copernico lascia la Terra libera di viaggiare nei cieli, ed è convinto che essa orbiti intorno al Sole, ma non considera quest'ultimo come l'esatto centro del Sistema Solare; nelle sue trattazioni, che si rivelano in parte errate a causa dell'idea dell'orbita terrestre circolare, è convinto che il centro sia in un "Sole medio", indicato come un punto ideale. Keplero è convinto parzialmente dalla veridicità del modello copernicano (lo ritiene certamente più completo e realistico di quello tolemaico), e, alla ricerca di una corretta spiegazione ai moti planetari, deciderà di abbandonare la tradizione aristotelica, e di basare le proprie congetture e le proprie osservazioni del Sistema Solare sul "Sole vero", ossia il punto fisico nel quale si trova il Sole, e non più sul "Sole medio". All'interno dell'opera, egli è consapevole dell'importanza del suo metodo e del suo distacco dalle leggi astronomiche antiche, in quanto afferma: «*Quindi l'edificio che abbiamo innalzato sulle fondamenta delle osservazioni di Tycho l'abbiamo rovesciato [...] Fu questa la punizione per aver seguito gli assiomi plausibili, ma in realtà sbagliati, dei grandi uomini del passato*» [10, p. 300-301]. Così, basando le proprie osservazioni e i dati raccolti dalle osservazioni di Tycho sul considerare il Sole come vero centro del Sistema Solare, troverà nel quinto libro le risposte cercate. La "rivoluzione scientifica" portata da Keplero nasce dalla decisione di abbandonare le idee e i dogmi degli studiosi antichi, e non ha l'obiettivo di effettuare dei calcoli per risolvere i problemi. Partendo dallo studio dell'orbita di Marte, tenta dunque di utilizzare la matematica non per calcolarne la posizione ad ogni istante, quanto piuttosto per fornire uno strumento che permetta di comprenderne il moto e porti alla creazione di un completo modello fisico-matematico che possa spiegare come il pianeta si sposti nell'orbita celeste. Keplero ricaverà quelle che oggi sono conosciute come le sue due leggi solamente in quest'ultimo libro, nel quale le idee e le ipotesi sulla *Prima* e sulla *Seconda Legge* si intrecceranno e si influenzeranno a vicenda: infatti, la strada che segue è quella che porta alla formulazione della *Seconda Legge*, per la cui dimostrazione è fondamentale la *Prima*. Nella strutturazione del *Focus Group* abbiamo preferito mantenere un ordine di capitoli, esponendo i quattro principali nei quali si esterna il suo ragionamento (i Capitoli LVI, LVII, LVII e LX), e non esporre prima una legge e poi l'altra, in quanto esse, come già detto, sono difficilmente distinguibili all'interno dell'opera.

Esponiamo ora brevemente la trattazione esposta da Keplero all'interno degli estratti dei capitoli riportati nel *Focus Group*. Il lettore potrà poi notare le scelte didattiche assunte per presentare l'opera di Keplero, con la lettura del *Focus Group* in appendice.

Keplero assume come punto di partenza per il proprio lavoro un'ipotesi fisica che si allontana dalla tradizione astronomica e che gli viene suggerita dalle osservazioni di Marte, secondo cui la velocità di un pianeta lungo la propria orbita è inversamente proporzionale alla distanza di esso dal Sole. Nella convinzione che il Sole sia la causa fisica del moto dei pianeti, nella parte centrale dell'opera tenta di fornire una dimostrazione geometrica di questa ipotesi e di compiere una *matematizzazione* della fisica celeste, per giungere a quella che oggi è conosciuta come la sua *Seconda Legge*. Lo scienziato, nel ricercare una dimostrazione per questa ipotesi, si concentra sulla traiettoria assunta dall'orbita: inizialmente, non è pienamente convinto dell'idea dell'orbita circolare di Marte, ma non riesce totalmente ad abbandonare questa ipotesi, rimanendo in una sorta di limbo fino al Capitolo LVI, nel quale si convince di una forma "ovale" per essa.

Al lettore del *Focus Group* viene quindi riportata la prima parte del Capitolo LVI, seguita da alcuni estratti dei Capitoli LVII, LVIII, nei quali Keplero ragiona, a partire dalle precedenti considerazioni, circa la forma dell'orbita per giustificare il principio della *Seconda Legge*. Egli ha già supposto tale principio, ossia la proporzionalità fra spazio percorso dall'orbita e tempo impiegato a percorrerla, ma è arrivato a tale conclusione con l'approssimazione ad un'orbita circolare, ipotesi che non ritiene totalmente corretta a causa dei dati discordanti delle osservazioni effettuate. Alla ricerca della corretta traiettoria dell'orbita, nel tentativo di conciliare l'ipotesi fisica con una legge matematica, giunge infine ad una svolta, presentata nel Capitolo LVI, nel quale ipotizza diverse nature per l'orbita, fra cui una forma "ovale".

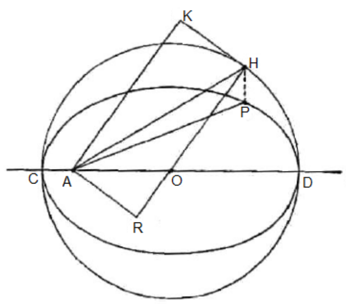


Figura 4.2

Aiutandoci con la Figura 4.2, nella quale sono rappresentate sia l'orbita ovale (che, come sappiamo, corrisponde ad un'ellisse), sia l'orbita circolare (che assume il nome di "cerchio ausiliario"), proviamo ad analizzare come lo scienziato abbia compreso la vera natura ellittica di essa.

Keplero riceve quella che lui chiama "un'illuminazione": egli nota come, alla longitudine media, cioè a metà strada fra i due apsidi, indicati con i punti C e D in figura, la larghezza della lunetta contenuta tra l'ovale e il cerchio assuma il valore massimo. Grazie a questa osservazione, tenta di approssimare la curva "schiacciando" l'orbita circolare, e sostituisce le distanze fra la posizione presunta del pianeta sull'orbita circolare e il Sole (il segmento HA di Figura 4.2) con le rette HR secanti il cerchio ausiliario, centrando queste ultime sul Sole e ottenendo così una strana figura che aveva notato già nel capitolo XXXIX. Egli è convinto quasi di «*risvegliarsi da un sogno*» [22, p. 267], in quanto realizza che tali secanti dei raggi del cerchio ausiliario coincidono con dei particolari segmenti, chiamati *altezze diametrali* che aveva considerato in precedenza nel tentativo di dimostrare la legge delle aree. Giunge alla conclusione che tali altezze non sono semplici costruzioni matematiche, bensì le vere e proprie distanze dal Sole.

Questa "illuminazione" matematica che riceve potrebbe riportare alla mente un'analogia con un passaggio che ritroviamo anche nel ragionamento di Planck: Keplero, come il fisico tedesco, grazie ad un'*interpretazione* (riprendendo nuovamente il *Modello di Uhden*) di un elemento matematico, riesce ad "allargare la prospettiva" e a riportarsi alla comprensione di un importante concetto fisico.

Al termine di questo capitolo, e nella prima parte del LVII, si convince dunque che l'orbita non sia un cerchio, ma che assuma questa forma ovale, giungendo, con un processo di *matematizzazione*, ad individuare una legge matematica che descrive i punti dell'orbita. La relazione trovata è descrivibile in termini moderni con l'equazione $r = 1 + e \cdot \cos\beta$, dove r è la distanza del pianeta dal Sole, e l'eccentricità, e β l'anomalia eccentrica (l'angolo al centro del cerchio ausiliario, formato con la rispettiva posizione del pianeta, indicato con $H\hat{O}D$ nella Figura 4.2); essa rappresenta una delle possibili parametrizzazioni dell'ellisse, ma Keplero non è ancora in grado di riconoscerla.

Nei Capitoli LVIII, LIX e LX, lo scopo di Keplero è dunque quello di conciliare la legge matematica da lui supposta con le osservazioni fisiche, in modo da definire correttamente un modello che spieghi il moto dei pianeti lungo una certa orbita ritenendo ormai che la traiettoria del moto non sia circolare, e convinto dell'orbita di forma ovale. Alla ricerca di un senso fisico per questa legge matematica, decide inizialmente, utilizzando nuovamente un processo *interpretativo*, di rispolverare un'idea che aveva già utilizzato in precedenza per l'orbita circolare: quella delle librazioni. Le librazioni sono definite come degli spostamenti minimi del pianeta lungo il raggio vettore che unisce lo stesso al Sole, utilizzate dall'astronomia tradizionale per giustificare il fatto che i piani orbitali non si intersecassero nel punto chiamato "Sole medio". L'ipotesi delle librazioni di Marte lo guida attraverso un calcolo che ricorda molto il moderno calcolo infinitesimale, ma non gli permette di giustificare totalmente l'ipotesi fisica, portando lo stesso Keplero ad abbandonare nuovamente questa idea.

Un ulteriore passo in avanti verso la corretta relazione tra legge orbitale e osservazioni fisiche viene dal tentativo di fornire una corretta *interpretazione* per il valore β della legge precedente. Ricostruisce così, nel Capitolo LVIII una figura simile a quella decritta in Figura 4.2, riconoscendo, per la forma ovale, un risultato che è esattamente una via di mezzo fra il cerchio e l'ellisse. Nel caso dell'orbita circolare, il valore β rappresenta l' "anomalia eccentrica", ossia l'angolo al centro riferito ad un certo tratto di orbita, mentre nel caso di un'orbita ovale non è semplice chiarire a quale parametro si faccia riferimento. Inizialmente Keplero definisce l' "anomalia eccentrica" come l'angolo con vertice al centro compreso tra la linea degli apsidi e il pianeta (l'angolo $P\hat{A}O$ in Figura 4.2), scelta che porta l'equazione $r = 1 + e \cdot \cos\beta$ a descrivere un'orbita non simmetrica e definita dallo stesso scienziato come "*buccosa*", termine che gli ricorda le guance paffute di un bambino. In seguito, riconducendosi anche ai risultati elencati in precedenza circa la proporzionalità tra tempi e spazi percorsi, riprende l'idea del "risveglio" del capitolo LVI nel quale aveva identificato le secanti dei raggi del cerchio ausiliario con le *altezze diametrali*, e riesce a definire correttamente, grazie all'utilizzo di una matematica *tecnica*, l'angolo β come l'angolo centrato nel Sole e compreso tra la linea degli apsidi e la proiezione della posizione del pianeta sul cerchio ausiliario (l'angolo $H\hat{A}O$ in Figura 4.2). Riconosce un importante *analogia* dell'equazione trovata con la descrizione dell'ellisse che era stata fornita da Archimede nell'opera *Sui Conoidi e Sferoidi*, e conclude che la curva, compresa tra un cerchio ed un'ellisse, altro non è che un'ellisse di minore eccentricità, mostrando come, nonostante dalle osservazioni gli sembri che l'orbita sia "*buccosa*", la legge matematica lo riporti un'orbita ellittica: «*Il circolo del capitolo XLVIII sbaglia per eccesso, l'ellisse del capitolo XLV sbaglia per difetto. Ma tra il circolo e l'ellissi nulla sta in mezzo se non un'altra ellisse. Dunque l'ellisse è l'orbita del pianeta [...] È chiaro dunque, la via è "buccosa" non dunque un'ellissi, ma poiché l'ellisse fornisce giuste equazioni, e dunque questa forma "buccosa" secondo giustizia fornisce ingiustizia*» [22, p. 285].

In questi passaggi è dunque guidato da diversi processi di *matematizzazione* e *interpretazione*, mostrando come il suo ragionamento "rimbalzi" tra il tentativo di giustificare le osservazioni fisiche e le congetture matematiche, riportandoci ad una seconda similitudine con il ragionamento di Planck, il quale opera anch'esso ricercando un'*interpretazione* fisica della propria congettura matematica. Si intravede nell'ultimo passaggio l'importanza di un processo di *matematizzazione*, che utilizza la potenza creativa fornita dall'*analogia*, per ricondurre la propria ipotesi ad un concetto matematico già noto, ritrovando un'ultima similarità con il procedimento che Planck compie utilizzando le *complessioni*.

Al termine del capitolo LVIII, Keplero scrive: «*Non ho lasciato nessuna figura del pianeta dell'orbita, eccezion fatta per quella dell'ellissi in modo perfetto*» [22, p. 285], affermando quindi che l'ultima possibilità rimastagli per l'orbita sia quella di un'ellisse, della quale si convincerà definitivamente dopo aver dimostrato la *Seconda*

Legge.

Per trattare quest'ultima, ritorna, nei Capitoli LVIX e LX, alla ricerca di una soluzione che possa conciliare l'ipotesi fisica secondo cui la velocità di un pianeta lungo la propria orbita è inversamente proporzionale alla distanza di esso dal Sole con le congetture geometriche circa l'orbita.

Dopo aver dimostrato geometricamente (nel *Focus Group* questo passaggio non viene riportato ma solo descritto) che l'area del settore della presunta ellisse determinata dalla posizione del pianeta si può trovare perché proporzionale all'area del cerchio che ha come raggio il semiasse positivo delle ascisse, nota come tale valore si associ bene al tempo, secondo le osservazioni di Tycho Brahe.

A partire da questo fatto, identificando l'orbita con l'ellisse ricavata in precedenza, chiama "lunula" la parte di area compresa fra la curva data dall'orbita approssimata dall'ellisse e quella formata dal cerchio ausiliario. Per calcolare l'area di questa "lunula" invoca l'aiuto di un geometra, nel tentativo di normalizzare la figura che rappresenta il tempo impiegato a percorrere i tratti dell'orbita e a ritrovare la soluzione: «*Questa è la mia sentenza. Non meno quindi sembrerà di avere queste dimostrazioni di bellezza geometrica, tanto più esorto gli studiosi di geometria affinché risolvano per me questo problema [...] A me che sbaglio, chiunque mi avrà mostrato la via, costui sarà per me un grande Apollonio* [22, p. 300]. In questo passaggio fa utilizzo di strumenti matematici *tecnici*, ma si affida ad un «*qualche geometra*» che possa aiutarlo nei suoi calcoli, suggerendo così l'idea che la parte *tecnica* della matematica sia utile ma non fondamentale per avanzare all'interno del suo ragionamento in questo caso.

L'intrecciarsi delle ipotesi dei capitoli precedenti circa l'orbita ellittica e le dimostrazioni geometriche di questo capitolo lo porteranno dunque, nel Capitolo LX, a convincersi di una reale equivalenza fra il principio della seconda legge e l'ipotesi fisica, convincendosi anche della natura ellittica dell'orbita. Nel *Focus Group* non riportiamo questa dimostrazione che egli fa, ma nominiamo questo passaggio che lo porta a conciliare le esigenze della fisica, che impongono di basare la dimostrazione sul "Sole vero", con quelle del rigore geometrico, riuscendo a validare i dati provenienti dalle osservazioni con l'idea della *Seconda Legge* applicata ad un'orbita ellittica. Ottiene così una descrizione corretta dal punto di vista matematico, che si accorda con i dati sperimentali; tale spiegazione è soddisfacente anche sotto il punto di vista fisico, in quanto il moto è riferito ad un punto, il fuoco, nel quale si trova il Sole.

Fino al raggiungimento della certezza dell'equivalenza fra la legge e l'ipotesi fisica, Keplero sembra considerare la sua "regola delle aree" come un semplice strumento, un'approssimazione dell'ipotesi fisica. Solo questa ipotesi è dunque il vero motore del lavoro di Keplero, il fulcro su quale basa le proprie ricerche, e, nel momento in cui riesce a darle una giustificazione geometrica, essa si realizza nella famosa *Seconda Legge* riportandolo, al principio della *Prima Legge*, ossia l'orbita ellittica.

Al termine, lo stesso Keplero riconosce l'importanza dello strumento trovato, e consegna al lettore un modello matematico-fisico completo, che è in grado di spiegare e predire il fenomeno dei moti degli astri celesti.

Soffermandoci sulle strategie descrittive applicate dall'autore, un aspetto fondamentale circa il lavoro di Keplero riguarda la costruzione e l'esposizione del suo ragionamento all'interno dell'opera: egli, a differenza di Galileo, sembra voler procedere per tentativi nella sua trattazione, e l'opera assume più i connotati di un "*diario di viaggio*" piuttosto che di un trattato matematico. L'"*Astronomia Nova*" sembra voler raccontare il lungo combattimento tra l'autore e Marte, e al lettore pare di crescere in consapevolezza insieme allo stesso Keplero, seguendo i suoi stessi tentativi e sperimentando i suoi stessi errori.

Il paragone con un "*diario di viaggio*" divide i vari studiosi, alcuni dei quali vedono invece la narrazione di Keplero come una precisa scelta didattica dell'autore, volta ad evidenziare gli aspetti fondamentali del proprio lavoro e ad aiutare i lettori ad immergersi all'interno delle tappe di un racconto guidato piuttosto che di un rigido trattato scientifico. Le modalità di racconto assumono così connotati differenti da quelli di un puro trattato scientifico, sembrano quasi voler evidenziare un utilizzo meno marcato delle componenti *tecniche* della matematica in certi punti dell'analisi, per concentrare maggiormente l'attenzione sulla parte fisica del problema e sui suoi tentativi di donarle una struttura matematica (con l'utilizzo appunto, della componente *strutturale* della matematica), permettendo così una distinzione tra le due componenti. La narrazione di Keplero sembra voler procedere per tentativi e per errori, e questo lo porta ad un continuo "batti e ribatti" tra i processi di *matematizzazione* ed *interpretazione* nel tentativo di fornire un corretto modello che rispetti i limiti e i dati fisici, a differenza di Galileo. Quest'ultimo, infatti, all'interno del proprio dialogo, espone chiaramente il proprio metodo, analizzando sì la relazione con la realtà sperimentale, ma dando tuttavia l'impressione di avere un punto di arrivo ben chiaro e di non procedere "per tentativi".

4.3 Newton

L'ultimo autore che abbiamo inserito all'interno del *Focus Group* è Isaac Newton, il quale tratta sia del moto dei corpi terreni che dei moti planetari. I brani selezionati appartengono all'opera *Phylosophiae Naturalis Principia Mathematica* [29], nella quale Newton vuole ricavare le leggi che regolano il moto dei corpi sulla Terra e le leggi che regolano i moti planetari, a partire dalla legge di gravitazione. Addirittura, l'obiettivo postosi da Newton nella creazione della sua opera è quello di presentare con un linguaggio matematico i principi della filosofia naturale, come si evince dal titolo. Il *Focus Group* inizia con un piccola introduzione, nella quale viene spiegata la composizione dell'opera di Newton, suddivisa in tre parti e risalente al 1687: in essa è presentato il metodo di indagine utilizzato dallo scienziato, che preferisce concentrarsi sul ragionamento matematico, e farsi guidare da esso nelle proprie ricerche.

Dopo l'introduzione all'opera, lo scienziato fornisce una serie di "assiomi e definizioni della meccanica", quasi a voler dare l'idea dell'utilizzo di un metodo assiomatico per spiegare i fenomeni fisici, un'idea che sarà poi espressa da Hilbert anni dopo, come si è visto nel Capitolo 1. Le prime due parti del libro, seguenti a questa sezione di assiomi e definizioni, vengono chiamate entrambe "*Moto dei corpi*": al loro interno Newton vuole spiegare, come suggerisce il titolo, il moto dei corpi terreni, utilizzando le definizioni e gli assiomi descritti in precedenza, basati su principi della meccanica quali la quantità di moto e l'inerzia, o su leggi quali la proporzionalità tra accelerazione e forza e il principio di azione-reazione. Il terzo libro, chiamato "*Sistema del mondo*" è rivolto appunto a «*trattare l'ordinamento del sistema del mondo*» [29, p. 601], includendo anche i fenomeni celesti, sempre facendo uso di questi principi della meccanica. Newton, riprendendo un'idea di Keplero, considera l'astronomia come divisa in tre parti: l'*astronomia sferica*, che ha per oggetto la spiegazione dei fenomeni celesti a partire dall'ipotesi che la Terra stia al centro di una sfera della quale gli astri occupano la superficie; l'*astronomia teorica*, scienza che espone i diversi rapporti dei corpi celesti fra di loro, come la loro posizione relativa, la loro lontananza, la loro velocità, e che ha come conseguenza la descrizione della vera forma dell'universo; l'*astronomia fisica*, la quale tratta della scoperta dei principi dei moti celesti e della loro determinazione mediante i principi della meccanica. Egli, in quest'opera tratterà soprattutto di quest'ultima. Nei *Principia* riesce a dedurre con questo metodo e con l'utilizzo del *principio di continuità*, che descriveremo a breve, persino le tre leggi di Keplero. Gli estratti selezionati sono dunque basati su tale ragionamento, e sono rilevanti per la trattazione di argomenti interdisciplinari che si focalizzano sul ruolo assunto dalla matematica all'interno della fisica, presentando le caratteristiche tipiche del metodo utilizzato da Newton.

I brani scelti per il *Focus Group* iniziano con un estratto della prefazione all'opera di Newton, nella quale lo studioso descrive la sua struttura e il suo tentativo di studiare i fenomeni della natura a partire dalle leggi del moto: «*Sembra infatti che tutta la filosofia consista nell'investigare le forze della natura a partire dai fenomeni del moto e dopo, nel dimostrare i restanti fenomeni a partire da queste forze*» [29, p. 57]. Viene citata anche la natura del terzo libro, nella quale si esplicita l'idea di Newton di applicare le proposizioni dimostrate nei primi due libri ai fenomeni celesti: sulla base di un principio, il *principio di continuità*, secondo il quale un fenomeno visibile su un oggetto conosciuto, appartenente al mondo terreno, si può riprodurre e replicare su di un corpo celeste, compie un tentativo di dedurre i moti celesti di pianeti, comete e astri. Newton tiene a precisare che tale trattazione viene effettuata da un punto di vista matematico e non da un punto di vista fisico, poiché queste leggi dedotte non si possono dimostrare sperimentalmente. Scrive Newton, sempre all'interno della prefazione: «*Volesse il cielo che fosse lecito dedurre i restanti fenomeni della natura dai principi della meccanica col medesimo genere di* *argomentazione. Infatti molte cose mi spingono a sospettare che essi tutti possano dipendere da certe forze* [...] *Spero in verità che, o a questo modo di filosofare, o ad un altro più vero, i principi qui posti possano apportare qualche luce*» [29, p. 57].

Il secondo brano selezionato viene dal primo libro, e riguarda la definizione della forza centripeta come «*la forza per effetto della quale i corpi sono attratti, o sono spinti, o comunque tendono verso un qualche punto come verso un centro*» [29, p. 95]. Grazie a questa forza espone la natura del moto circolare, e spiega come, a causa di essa, i corpi in movimento lungo una circonferenza siano attratti verso il centro dell'orbita. Riesce ad introdurre anche la forza di gravità, per effetto della quale i corpi sono attratti verso il centro della terra, e a spiegare la genesi del moto parabolico: se non vi fosse questa forza di gravità i corpi lanciati verso l'alto, eliminata anche la resistenza dell'aria, non tornerebbero mai al suolo, ma se ne andrebbero nei cieli con un moto uniforme eterno.

Dopo tale disamina, viene presentato un *esperimento mentale* ("*Un Gedankenexperiment*"), nel quale riconosce questa forza centripeta anche nel movimento dei pianeti, ritenendola la causa principale del movimento di essi lungo una certa orbita. L'*esperimento* consiste, sulla base del principio di continuità, nel paragonare la forza di gravità terrestre a questa presunta "forza di gravità celeste": così come i proiettili, a causa della gravità, si muovono lungo un'orbita curvilinea e rimangono legati alla Terra, così la Luna viene deviata dal cammino rettilineo e può essere piegata lungo la propria orbita, rimanendo legata anch'essa alla Terra. Presuppone così, pur senza riconoscerla o definirla correttamente, l'esistenza di una forza che permetta alla Luna di mantenersi correttamente nella sua orbita. Al termine dell'esperimento afferma: «*Viene richiesto per l'appunto che la forza sia di una giusta grandezza, ed è compito dei matematici determinare la forza per effetto della quale un corpo può essere esattamente trattenuto in un'orbita data con una velocità data; e reciprocamente determinare la curva lungo la quale un corpo, una volta proiettato da un qualunque luogo con una data velocità, viene deviato da una data forza*» [29, p. 98], richiamando, analogamente a quanto aveva già fatto Keplero, come descritto nella sezione precedente, un utilizzo della matematica *tecnica* che gli permetta di calcolare la forza esatta e di giustificarne la sua natura.

Gli ultimi due estratti provengono dal terzo libro, e vogliono portare maggiormente l'attenzione dello studente sul metodo di trattare la fisica che viene utilizzato da Newton in questi brani. Nel primo viene riportata una "*Regola del filosofare*"; queste regole possono essere descritte come: «*regole da osservare e da applicare nella ricerca fisica*» [29, p. 603]. Tali *Regole* vengono proposte all'inizio del Libro III, in quanto Newton ritiene che si debbano applicare allo studio dei corpi celesti, per i quali, a differenza dei fenomeni che avvengono sulla Terra, è impossibile fare uso di verifiche sperimentali. Le *Regole* sono strumenti concettuali che il fisico deve tenere presente, considerando la differente natura dei moti celesti rispetto a quelli terrestri.

Nell'estratto è presente una delle regole enunciate da Newton, la terza, la quale afferma: «*Le qualità dei corpi che non possono essere aumentate e diminuite, e quelle che appartengono a tutti i corpi sui quali è possibile impiantare esperimenti, devono essere ritenute qualità di tutti i corpi*» [29, p. 605].

Essa presenta quello che, secondo Newton, è «*il fondamento dell'intera filosofia*» [29, p. 606], ossia l'idea dell'omogeneità della natura. La natura viene ritenuta stabile e regolare, e ciò permette di estendere le qualità osservabili e sensibili dei corpi conosciuti tramite esperimenti diretti a quelli che non possiamo "sperimentare": «*Le qualità dei corpi non si conoscono che per mezzo di esperimenti, e perciò devono essere giudicate generali tutte quelle che, in generale, concordano con gli esperimenti. Certamente non devono essere inventati sconsideratamente dei sogni, né ci si deve allontanare dall'analogia della natura, dato che essa suole essere semplice e sempre conforme a sé*» [29, p. 605]. L'*analogia* e il *principio di continuità* diventano così, all'interno di questo terzo libro, gli strumenti logici fondamentali che un fisico può utilizzare per generalizzare le leggi della natura ed indagare i profondi legami fra la fisica terrena e quella celeste.

Le generalizzazioni, alle quali si giunge per induzione, sono valide quando nascono sul piano dei sensi, riportando che, considerando ad esempio l'impenetrabilità di un corpo: «*Deduciamo che tutti i corpi sono impenetrabili non con la ragione, ma col senso [...] Gli oggetti che maneggiamo vengono riscontrati impenetrabili, ne concludiamo che l'impenetrabilità è una proprietà dei corpi in generale*» [29, p. 606]. Sostiene così il principio secondo cui le qualità dei corpi che si possono sperimentare possono essere considerate qualità generali di essi. Fra di esse riconosce l'estensione, la durezza, l'impenetrabilità, la mobilità e la forza d'inerzia. La generalizzazione, tuttavia giunge al di là del piano dei sensi, ed è valida anche quando la qualità dell'oggetto sembra contrastare con essi. Alcune qualità sono percepibili solo con i sensi ma, anche se non si percepiscono in tutti gli oggetti, esse appartengono comunque a tutte le parti sensibili: «*Concludiamo che tutte le minime parti di tutti i corpi sono estese e dure, impenetrabili, mobili e dotate di forze d'inerzia*» [29, p. 606].

Conclude la *Regola* spiegando che, secondo essa, se risultasse per mezzo di esperimenti e di osservazioni astronomiche che tutti i pianeti sono "pesanti l'uno rispetto all'altro", allora si dovrà dire che tutti questi corpi gravitano vicendevolmente l'uno verso l'altro. Questa sperimentazione sulla gravità universale dei corpi celesti sarebbe "più forte" di quella circa l'impenetrabilità, per la quale non vi è nessun esperimento replicabile direttamente su di essi.

L'ultimo brano inserito nel documento usato per il *Focus* riguarda una proposizione proveniente, come detto, dal terzo libro dei *Principia*, ed è la seguente: «*Tutti i corpi gravitano verso i singoli pianeti, ed i loro pesi verso un qualunque medesimo pianeta, ad uguali distanze dal centro del pianeta, sono proporzionali alla quantità di materia contenuta in ciascuno di essi*» [29, p. 624]. Dopo la proposizione, Newton riporta degli argomenti a suo sostegno. Egli, partendo dalla considerazione che la caduta dei gravi sulla Terra avvenga in tempi uguali, tenta un esperimento, utilizzando pendoli composti da diversi materiali (oro, argento, piombo, vetro, sabbia, ecc...). Grazie all'utilizzo di una bilancia con due piatti, inserisce su un piatto una quantità definita di un certo materiale, come ad esempio l'oro, e poggia sul secondo piatto una quantità di legno di uguale massa. Dopodiché, riempiendo un contenitore d'oro e un altro di legno, e, inserendo questi contenitori agli estremi di due pendoli di uguale lunghezza, osserva che le oscillazioni misurate da essi: «*andavano e tornavano insieme per lunghissimo tempo*» [29, p. 626]. Ritrova così una proporzionalità, osservando che la massa dell'oro è proporzionale alla massa del legno così come la forza peso agente sul primo recipiente pieno d'oro è proporzionale alla forza peso agente sul secondo pieno di legno. Scrive, in conclusione all'esperimento: «*Mediante questi esperimenti potei chiaramente apprendere che la differenza di materia in corpi dello stesso peso è minore della millesima parte di tutta la materia*» [29, p. 626]. Ritrova dunque il fatto che la gravità operi universalmente con lo stesso valore su tutti i corpi, a prescindere dalla loro composizione e forma. In seguito, applicando la *Regola del Filosofare* esposta sopra, *generalizza* tale proprietà ai pianeti, supponendo che la natura della gravità su di essi sia identica a quella della gravità sulla Terra: in un primo momento ipotizza di sollevare tali corpi fino all'orbita della Luna, e di lasciarli cadere insieme, idealmente, alla Luna. Per l'esperimento appena eseguito con i pendoli, suppone che tali oggetti, insieme con la Luna, descriveranno spazi uguali in tempi uguali, per il motivo che, come nell'esperimento: «*stanno alla quantità di materia nella Luna, come i propri pesi al peso della stessa*» [29, p. 626]. L'ultimo passaggio consiste nel generalizzare questa idea ai pianeti che ruotano intorno al Sole, supponendo che siano lasciati cadere da uguali distanze dal Sole: essi, secondo questo principio, descriverebbero durante la propria caduta dalla stessa altezza, spazi uguali in tempi uguali.

Rispetto ai brani dei due precedenti autori, la principale differenza che si può evidenziare subito è che, nei brani selezionati, viene esplicitata maggiormente l'impostazione seguita dal ragionamento di Newton, piuttosto che la ricerca della soluzione ad un determinato problema. Si vede come Newton utilizzi strumenti quali il *principio di continuità* e l'*analogia*, e di come la matematica *strutturale* assuma una fondamentale importanza nella creazione di un modello interdisciplinare matematico-fisico. Grazie all'*analogia*, infatti, riconduce la propria interpretazione del moto terreno a quello celeste, tentando di fornire una spiegazione matematica a quest'ultimo, a partire da osservazioni fisiche.

Abbiamo dunque deciso, nel nostro *Focus* di "spingere" sul ragionamento di Newton, inserendo un significativo brano della prefazione e un importante contributo che vuole spiegare l'atteggiamento con cui si approccia al moto dei corpi celesti, ossia le *Regole del filosofare*, per permettere allo studente di comprendere appieno questa differente modalità di trattare un argomento fisico, nel tentativo di evidenziare anche le notevoli differenze con i restanti autori.

4.4 L'attività di dicembre

Il primo *Focus Group* si è tenuto, come detto, a dicembre 2019, e grazie ad esso, abbiamo potuto testare l'attività per far emergere eventuali criticità. Infatti, l'analisi di questo primo esperimento ci ha permesso di "affinare" il nostro strumento di indagine nel tentativo di renderlo più efficace.

Non presentiamo in questa tesi l'analisi di questa discussione, ma riportiamo le criticità riscontrate in essa, che ci hanno portato alle modifiche e alla revisione finale dei testi del *Focus* presentato ai due gruppi di aprile e di maggio e riportato in Appendice B.

La prima criticità è relativa alla lettura dei brani che precedono il dibattito: in questo *Focus* abbiamo consegnato i testi e tutte le domande all'inizio, e ciò ha condotto gli studenti a spendere per la lettura e per la comprensione di essi oltre metà del tempo a disposizione. Inoltre, presentare le domande contemporaneamente ha portato gli studenti a rispondere ad esse in un ordine diverso da quello proposto, ha reso più difficile la conduzione della discussione dal parte del moderatore e ha esplicitato troppo fin da subito gli obiettivi della discussione.

Entrando nello specifico dei testi abbiamo apportato loro alcune modifiche, che presentiamo brevemente. Ai brani di Galileo è stata aggiunta la parte del dialogo che riportava la dimostrazione della proposizione e le perplessità poste da Sagredo e Simplicio, in quanto, privo di queste componenti, il testo risultava poco incisivo ai fini dei processi che si desiderava mettere in luce. Il brano di Keplero è stato invece ristretto, eliminando alcune parti di matematica *tecnica*; gli studenti avevano la tendenza a concentrarsi sulla comprensione di questi passaggi, nei quali Keplero tenta di dimostrare matematicamente le proprie congetture. Anche il brano di Newton presentava una criticità simile a quella di Galileo, essendo troppo breve. Esso presentava solo l'esperimento mentale, ma non metteva sufficientemente in luce le metodologie applicate dallo stesso Newton. Abbiamo dunque deciso di aggiungere alcune parti che evidenziassero la filosofia dell'autore, fra cui le "*Regole del filosofare*", e una proposizione, in modo da fornire un esempio nel quale si potesse vedere l'applicazione del metodo dello scienziato.

Gli studenti inoltre, a causa della difficile comprensione di alcune parti *tecniche*, soprattutto nei testi di Keplero, facevano fatica a concentrarsi sui testi e a riprendere le citazioni originali degli autori, e, per questo motivo abbiamo deciso di aggiungere, nel *Focus Group* modificato, la richiesta di sottolineare i passaggi più significativi per l'argomentazione dei tre autori.

Presentiamo dunque l'ultimo capitolo della nostra tesi, nel quale analizziamo le risposte e le reazioni degli studenti conseguenti alle attività di *Focus Group* relative ai mesi di aprile e maggio.

Capitolo 5

Analisi dell'attività

In questo capitolo ci dedichiamo all'analisi delle attività di *Focus Group* che abbiamo tenuto nei mesi di aprile e maggio 2020, i cui testi sono stati descritti in maniera approfondita nel capitolo precedente. Il capitolo è diviso in diverse sezioni che si possono riassumere in due "macro-parti": la prima parte, comprendente la prima sezione, è dedicata alle modalità che abbiamo utilizzato per l'analisi del *Focus Group* e alla presentazione di alcuni risultati attesi che si andranno a ricercare all'interno della trascrizione della discussione effettuata dagli studenti; la seconda parte, che comprende quattro sezioni, è dedicata alla vera e propria analisi, ed evidenzia i principali risultati emersi, nel tentativo di rispondere alla domanda che guida la tesi: «Qual è l'effetto dei materiali e delle attività presentate sulla comprensione e sullo sviluppo di abilità e competenze di tipo epistemologico da parte degli studenti?». In questa parte inoltre, vengono messi in luce, nella terza sezione alcuni aspetti interessanti e inaspettati emersi in generale dalla discussione. Terminiamo il capitolo riportando nella quarta sezione i feedback degli studenti a riguardo dell'attività, e nell'ultima sezione le conclusioni personali in merito a quanto l'attività e la successiva analisi siano state efficaci nel fornire una risposta alla domanda di ricerca.

5.1 Modalità di analisi

Come si è già visto nel Capitolo 3, l'attività consiste in un primo momento di lettura degli estratti assegnati e in una successiva discussione di gruppo basata sugli stessi testi.

Ai partecipanti al *Focus Group* vengono consegnati i testi qualche giorno prima della discussione, a causa delle criticità riscontrate nell'attività di dicembre e riportate al termine del Capitolo 4, per cui gli studenti avevano usato oltre metà del tempo a disposizione solamente per la lettura. Viene dunque richiesto loro di: «Leggere attentamente i testi, suddivisi per autori e di individuare e sottolineare in ciascuno i passaggi più importanti per l'argomentazione dei 3 autori (Galileo, Keplero e Newton), provando a schematizzarli brevemente», come si può vedere in Appendice B, e di farlo nei giorni precedenti l'attività; dopodiché, all'inizio della discussione, viene loro rivolta la prima domanda. Le domande, nuovamente per le criticità rilevate nell'attività di dicembre, non vengono rivolte agli studenti contemporaneamente all'inizio del confronto, ma viene loro richiesto di affrontarne una per volta e di discuterne insieme, prima di passare alla successiva. Il dibattito tra gli studenti possiede un carattere di "spontaneità", ma le domande, selezionate con un ordine ben preciso, introducono man mano i partecipanti nella discussione, e ci aiutano nella nostra analisi.

Elenchiamo ora le domande che vengono presentate all'interno dell'attività di *Focus Group*, e successivamente esponiamo le motivazioni che ci hanno portato a questa scelta e le aspettative che avevamo nei confronti degli studenti.

1. **Quale scopo ha l'argomentazione dell'autore? Cosa vuole comunicare e quali strategie utilizza**?

2. **Notate differenze nel modo di ragionare dei vari autori**?

3. **Riuscite a definire le modalità con cui i vari autori "raccontano la fisica"**?

4. **Che ruolo assume la matematica nei vari testi**?

5. **Ripensando all'attività sul corpo nero notate analogie con qualche tipo di ragionamento**?

Le domande vengono presentate in questo ordine, e la loro scelta è legata a ciò che vogliamo ricercare all'interno del confronto di gruppo. Nello specifico, per aiutarci nell'analisi, abbiamo suddiviso le aspettative iniziali che avevamo, relative alle reazioni e ai processi applicati dagli studenti nel corso della discussione, in tre "livelli di comprensione". Questi livelli aiutano a verificare il determinato raggiungimento di certi obiettivi e ci aiutano ad analizzare quanto "profonda" sia stata l'acquisizione di competenze e abilità interdisciplinari degli studenti in seguito all'attività svolta sul corpo nero.

1) ***Livello di comprensione degli obiettivi e delle strategie***.

   Il primo livello è quello più "basilare", e si lega alle domande 1 e 2. Queste domande hanno lo scopo di "domande di controllo", e vogliono aiutare a verificare quanto lo studente abbia compreso dalla lettura dei testi circa l'obiettivo dell'autore e le strategie utilizzate da quest'ultimo. La prima domanda pone l'attenzione sui singoli autori, sugli obiettivi e sulle strategie da essi adottate, mentre la seconda vuole concentrarsi su eventuali analogie e differenze di metodologie, allargando lo spettro della discussione. All'interno di tale livello ci aspettiamo, innanzitutto, che gli studenti riconoscano il fatto che i testi portano in luce il legame tra matematica e fisica, e come sia presente in ciascun brano un utilizzo della matematica nella creazione di un modello di un fenomeno fisico. In questa prima coppia di domande non viene nominata esplicitamente l'interdisciplinarietà, ma ci aspettiamo che gli studenti, discutendo autonomamente, ne parlino o utilizzino dei riferimenti che rimandino ad essa.

Spostando l'attenzione agli obiettivi specifici dell'autore, ci aspettiamo che colgano il tentativo compiuto da Galileo di fornire una struttura matematica al lancio dei proiettili, l'idea di Keplero di determinare e descrivere l'orbita di Marte e di fornire uno strumento che possa spiegare i moti celesti, e l'obiettivo di Newton di fornire un trattato che descriva il moto dei corpi terrestri e celesti a partire da leggi conosciute.

Analizzando le strategie utilizzate, le differenze e le analogie, ci aspettiamo che notino la volontà degli autori nella loro trattazione, all'interno dei brani selezionati, di superare le tradizioni e le leggi del passato, per giungere ad una innovativa descrizione di un fenomeno fisico, e come tale processo assuma un'importanza fondamentale nel portarli alle proprie conclusioni.

Sempre legandosi alle strategie e alle differenze, un'ulteriore aspettativa che ci poniamo è che sappiano riconoscere le tecniche argomentative utilizzate dai vari autori. Galileo decide di esporre la sua trattazione sotto forma di dialogo. In tal modo decide di presentare, per bocca di Sagredo e Simplicio, le perplessità che potrebbero essere mosse al suo lavoro, e fornisce, tramite il personaggio di Salviati, le relative risposte. L'opera di Keplero ha la caratteristica di assomigliare ad un *diario di viaggio*, attraverso il quale lo scienziato conduce il lettore all'interno della sua opera. Ci aspettiamo che gli studenti colgano questa importante differenza, relativa ad una modalità argomentativa diversa rispetto alla precedente: all'interno dei brani, Keplero viene accompagnato dagli errori e dalle limitazioni durante la stesura dell'opera, giustificandole man mano e procedendo a trovare la soluzione grazie ad esse. Anche gli estratti selezionati dei *Principia* di Newton presentano un carattere dell'opera che si differenzia dagli altri due: lo scienziato sembra voler fornire un trattato assiomatico, legato ad una profonda matematizzazione della fisica, e ci aspettiamo che si evinca una differenza con le strategie utilizzate dai primi due autori.

In questo livello, un'ultima aspettativa proviene dall'importanza che assume per ciascun autore il ruolo dell'esperienza vissuta. Per tutti gli scienziati la parte sperimentale, la parte delle osservazioni, diventa il punto di partenza grazie al quale possono successivamente condurre i propri ragionamenti e formulare le proprie congetture fisico-matematiche.

2) ***Livello di comprensione dei processi***.

Il secondo livello vuole "scavare più in profondità" all'interno della comprensione degli studenti circa i testi, e si lega alle domande 3 e 4, riferendosi in maniera più diretta all'obiettivo specifico della tesi. Tali domande spostano l'attenzione dalle strategie utilizzate dagli scienziati nel raccontare la loro storia, ai processi di ragionamento che guidano gli stessi nella descrizione della propria teoria, cercando di focalizzarsi sui passaggi tipici di una trattazione interdisciplinare.

Siamo innanzitutto interessati a valutare come e a che livello la classica visione che porta gli studenti a vedere la matematica come strumento e la fisica come contesto, evidenziata nel Capitolo 2, sia da loro rilevata nei brani proposti.

In particolare, all'interno di questo livello ci piacerebbe notare negli studenti la capacità di saper distinguere le diverse componenti della matematica *tecnica* e *strutturale*. Una distinzione di questo tipo emerge in maniera evidente nel tutorial sul corpo nero, in quanto agli studenti vengono fatti svolgere compiti di matematica *tecnica*, che mettono quest'ultima in evidenza, separandola in maniera netta dalla componente *strutturale*. Così, in studenti che sono stati esposti all'attività del corpo nero, vorremmo analizzare come e se una tale distinzione sia rimasta all'interno della loro concezione, e se essi siano in grado di riconoscere le due componenti anche se queste ultime non sono nettamente separate all'interno della trattazione. Galileo utilizza la matematica *tecnica* perlopiù nella dimostrazione della proposizione relativa alla traiettoria parabolica del moto del proiettile per ricondursi alla proprietà della parabola di Apollonio, mentre nel resto della trattazione sua e di Guidobaldo si possono ritrovare passaggi di una matematica di tipo *strutturale*, che portano a modellizzare una situazione fisica. Keplero fa uso di una matematica *tecnica* all'interno dei passaggi dimostrativi nei quali tenta di fornire una risposta alle proprie congetture, mentre procedendo tra le supposizioni geometriche e i tentativi di conciliare queste ultime con le ipotesi fisiche viene messa in evidenza una matematica di tipo *strutturale*. Anche negli estratti di Newton, la scelta effettuata di evidenziare maggiormente il metodo utilizzato, vuole far emergere l'utilizzo meno marcato di una matematica *tecnica*, per mettere in luce l'impiego della componente *strutturale*.

Riprendendo nuovamente il *Modello di Uhden* ricerchiamo in questo livello alcuni indicatori che certifichino una comprensione e una padronanza, anche non esplicita, da parte degli studenti, dei processi di *matematizzazione*, *interpretazione* e *matematica tecnica* presenti dietro alle esposizioni degli autori. Ovviamente non ci aspettiamo che gli studenti forniscano un'analisi M-I-T dei vari testi coinvolti analoga a quella esposta in [3] per il caso del corpo nero, ma andiamo alla ricerca di alcune parole chiave, legate proprio a questa analisi, quali *interpretazione*, *matematizzazione*, *strutturale*, *modello*, ecc... Anche questi processi sono stati messi in luce al termine dell'attività sul lavoro di Planck, in cui è stato presentato agli studenti il *Modello di Uhden.* Riteniamo difficile che gli studenti si impadroniscano di esso e lo utilizzino per l'analisi, ma vogliamo comunque controllare di quali "parole" si siano appropriati in seguito all'attività sul corpo nero e alla presentazione di un modello utile ad affrontare aspetti relativi al ragionamento matematico all'interno della fisica. Descriviamo brevemente i principali passaggi che riteniamo gli studenti possano riconoscere, i quali riassumono i processi cruciali esposti nel capitolo precedente. Per Galileo l'*interpretazione* è fondamentale per dare un senso al proprio modello, ottenuto grazie ad un processo di *matematizzazione* a partire da un'esperienza; in Keplero sono evidenti i processi di *matematizzazione* e *interpretazione* nel momento in cui lo scienziato è alla ricerca di una soluzione che concili l'ipotesi fisica con la congettura matematica; per Newton assumono importanza i processi di *matematizzazione*, che lo portano a formulare le proprie teorie celesti a partire dalle leggi della meccanica.

Vogliamo infine ricercare, facendo riferimento soprattutto alla domanda 4, come venga inteso il ruolo assunto dalla matematica: legandoci al primo punto di questo livello, siamo interessati a verificare se colgano qualche aspetto dei ruoli assunti dalla matematica all'interno della fisica in una trattazione interdisciplinare, evidenziati nel Capitolo 1. Superando il ruolo della matematica come semplice strumento, ricerchiamo indicatori di una comprensione di essa come "istigatrice" di rivoluzione scientifica o come "motore" che fornisce *analogie* formali. Ricerchiamo parole chiave o piccoli segnali che evidenzino il riconoscimento di un ruolo della matematica che sia fondamentale per costruire la struttura dei concetti fisici e vada oltre il limitato ruolo strumentale.

3) ***Livello di comprensione dell'analogia con il ragionamento di Planck***.

L'ultimo "livello di comprensione" è relativo al confronto con il ragionamento seguito da Planck. Vorremmo che gli studenti notassero un'analogia tra i processi principali che conducono soprattutto Keplero, e in parte Guidobaldo e Galileo, nella loro trattazione con quelli che guidano il fisico tedesco nello studio del problema del corpo nero. Il paragone con il lavoro di Planck è molto accentuato negli estratti di Keplero, come si è visto nel capitolo precedente: egli abbandona la tradizione e va alla ricerca di una nuova prospettiva, per fornire una struttura matematica di un fenomeno fisico a partire da alcune osservazioni di esso, e, come Planck, tenta di conciliare la teoria matematica con un'osservazione fisica attraverso processi di *interpretazione* e *matematizzazione.* Come Planck, anche Keplero ritrova un' "illuminazione" che lo porta ad allargare il proprio orizzonte e, tramite un'*analogia* lo porta a fornire una corretta struttura matematica al proprio modello. Anche nei tentativi di Guidobaldo e, in particolare, di Galileo di ricercare un'*interpretazione* alla proprietà geometrica ritrovata all'interno del proprio modello si possono trovare analogie con il lavoro di Planck, anche se forse risultano meno evidenti. Per Newton vi sono meno punti in comune, ma si ritrova un forte ruolo dell'*analogia*, così come Planck aveva fatto con le *complessioni*, anche se per Newton essa assume un carattere differente, essendo lo strumento fondamentale per indagare la natura e poter generalizzare.

Ritrovare questi punti chiave dei passaggi di Planck durante la discussione, prima che venga loro presentata la domanda 5, significherebbe un'ottima comprensione da parte degli studenti dei processi tipici di un approccio interdisciplinare, e testimonierebbe una buona appropriazione da parte di essi degli strumenti consegnati loro al termine dell'attività del Capitolo 2.

Siamo consapevoli della difficoltà che questo avvenga spontaneamente, e così, fornendo la domanda 5, vogliamo indagare quanto e come abbiano interiorizzato tali strumenti, una volta riportati alla luce, e se siano o meno in grado di utilizzarli, a distanza di un anno, all'interno di un'attività predisposta al loro impiego. Ci attendiamo che riconoscano alcune delle analogie con i processi di Planck, e che, confrontandoli, ritrovino in essi alcuni passaggi tipici di una trattazione interdisciplinare.

Per analizzare al meglio il dibattito, e ricercare, come si è visto nel secondo livello, alcune *parole chiave*, abbiamo trascritto la discussione, in modo da poter riportare all'interno dell'analisi le citazioni degli stessi studenti (nella sezione successiva tali parole sono riportate in corsivo e comprese tra virgolette). I livelli di comprensione non sono strettamente legati alle rispettive domande: si possono trovare riferimenti ad essi durante tutta la discussione; le domande vogliono solamente essere uno strumento al servizio della nostra analisi, per fornirle un carattere più chiaro e lineare.

5.2 Risultati attesi

L'analisi del *Focus* di dicembre è stata svolta con la stessa modalità elencata sopra, e ha coinvolto la trascrizione della discussione e la ricerca di parole chiave.

Abbiamo deciso di non riportare in questa tesi tale analisi, grazie alla quale abbiamo apportato le modifiche descritte al termine del Capitolo 4, per concentrarci sull'analisi dei due *Focus* "definitivi", che esponiamo di seguito. Per l'esposizione dei risultati utilizziamo la schematizzazione presentata nella prima sezione: analizziamo le risposte date dagli studenti e valutiamo il raggiungimento o meno degli obiettivi che ci eravamo posti per ogni "livello di comprensione".

1) ***Livello di comprensione degli obiettivi e delle strategie***

- *Sembrano comprendere quale sia l'obiettivo degli autori e riconoscono un legame tra matematica e fisica.*

  All'interno dei brani gli studenti ritrovano la presenza della matematica nei tentativi di studiare un fenomeno fisico, e sembrano aver compreso l'obiettivo che ciascun autore si pone. Forniscono dei segnali, pur senza nominare l'interdisciplinarietà, che confermano la consapevolezza della relazione tra matematica e fisica e il riconoscimento di un legame tra le due discipline: «*Sicuramente l'approccio è diverso. Ci sono problemi come quello di Galileo che sono più visibili nell'esperienza quotidiana, mentre, per esempio, quello di Keplero, è meno visualizzabile e ha un approccio diverso, che sfrutta l'errore. La cosa comune è sicuramente la modalità, il partire dal problema fisico e riuscire a dimostrare che vale una certa congettura, o che va bene una certa curva per approssimare il moto, e diciamo che poi la matematica interviene nel momento in cui si vuole dimostrare questa cosa*».

  Possiamo ritrovare all'interno della discussione anche riferimenti all'ambiente storico: gli studenti sembrano rendersi conto che gli autori, a partire da Galileo, operano in un'epoca nella quale si intravedono i primi tentativi di fornire un carattere matematico alla fisica: «*Si era diffusa l'idea, dopo Galileo, che il mondo dovesse avere carattere matematico, quindi, se devo cercare l'orbita di qualcosa, di un corpo celeste che deve seguire le leggi della fisica, esso dovrà seguire un'orbita che è descritta matematicamente*».

  Riferendosi agli obiettivi che ciascuno dei tre autori si pone, sembrano comprendere l'idea di Galileo di voler ricercare una struttura matematica per un esperimento fisico: «*Galileo vuole risolvere il problema del moto dei proiettili, vuole capire come funziona il suo moto [...] Galileo parte, il suo scopo è dare ragione di qualcosa che lui intuitivamente vede, e la strategia che utilizza è una cosa molto sperimentale*». Sembrano riconoscere anche il tentativo di Keplero di fornire uno strumento che possa determinare l'orbita dei pianeti, ma non si soffermano tanto su questo punto. Forse a causa della conoscenza che già hanno delle *Leggi di Keplero*, non esplicitano più di tanto quale sia il suo obiettivo, ritenendo che esso sia lampante. Preferiscono invece concentrarsi sulle strategie adottate dallo scienziato, come si vedrà nel punto successivo. Per quanto riguarda Newton, sembrano avere compreso il tentativo dello scienziato di fornire un trattato che possa spiegare i moti terrestri e celesti a partire da leggi conosciute, e si soffermano soprattutto sulle strategie che utilizza all'interno del testo, piuttosto che sul singolo esempio: «*È interessato a parlare dei pianeti e della gravità sulla terra, o comunque a descrivere* *forze in generale, e quindi poi i pianeti; non ha solo l'intento di giustificare quello che vede in pratica*». Come era lecito aspettarsi visto la scelta dei brani, si dilungano meno sul problema "locale" del moto di un pianeta o di un oggetto, ma evidenziano il tentativo di Newton di fornire un trattato generale, o di fornire un importante metodo per studiare il moto dei corpi: «*Allora, Newton a me sembra che voglia più dimostrare il suo strumento di indagine di quello che ha dimostrato*».

- *Ritrovano che l'importanza dell'assoluto sia presente dietro alle trattazioni di tutti e tre gli autori.*

  Gli studenti sembrano comprendere che il tentativo degli autori di raggiungere il proprio obiettivo nasce dalla volontà di superare la tradizione e fornire un nuovo strumento, e in questa consapevolezza è presente l'idea di un carattere di rivoluzione scientifica portata dal nuovo modello, pur dando l'impressione di non riconoscere pienamente, come si vedrà nel successivo livello, il ruolo assunto dalla matematica nel portare ad essa. Uno studente afferma: «*Sono da una parte ostacolati e da una parte spinti da questo assoluto che c'è sopra le ricerche che loro fanno, che li porta ad idealizzare quello che hanno trovato in un modo più generale possibile*».

- *Sembrano avere chiare le strategie argomentative e le rispettive differenze.*

  Ancora prima che venga loro posta la domanda 2 circa le differenze e le analogie riscontrate nelle metodologie utilizzate dai vari autori, gli studenti mostrano di riconoscere il carattere generale delle strategie adottate da essi all'interno dei testi. Ritrovano nel carattere dell'opera di Galileo il tentativo di fornire una struttura matematica ad un'osservazione fisica, utilizzando un dialogo per descrivere i propri passaggi. Individuano nell'impostazione del dialogo l'idea che Galileo abbia ben chiari i punti cruciali del proprio procedimento, e quali siano gli obiettivi che si pone, utilizzando le questioni poste da Sagredo e Simplicio per esplicitare i propri argomenti e le strategie adottate per trattare l'argomento in questione. Notano una forte differenza tra quest'ultimo e Keplero, del quale riconoscono la caratteristica dell'opera di essere scritta come un *diario di viaggio*: «*Quello di Keplero è proprio un diario di bordo, cioè è proprio come un diario su cui lui scriveva nei momenti in cui aveva capito qualcosa per non dimenticarselo*». Osservano come Keplero proceda per tentativi, e trovano in questa strategia una forte enfasi sull'errore e sull'esperienza, che guidano il lettore a "trovare la soluzione" insieme allo stesso autore: «*Lui piano piano, mentre sta scoprendo, sta ragionando, ti porta attraverso il cammino che fa*»; «*Da quello che ho capito l'argomentazione di Keplero è basata sul far capire quanto è* *importante il provare l'errore, tenere conto dell'errore fatto e provare a modificarlo*». La differenza con Galileo nasce proprio da questa presunta inconsapevolezza di un punto di arrivo, e viene ritrovata nelle citazioni degli studenti: «*Galileo parte da cose che si capisce che sa già e vuole solo trasmetterle, mentre Keplero ti conduce proprio attraverso quello che è il mestiere di chi sta cercando di scoprire qualcosa, di chi non ha la verità in tasca [...] La modalità con cui Keplero racconta la fisica è più un "insieme costruiamo un pezzo alla volta"* ». Anche la narrazione di Newton ricorda loro quella di Keplero, con la differenza che Newton, pur guidando passo a passo il lettore, dà l'impressione di avere ben chiaro quale sia il punto di arrivo e si riconduce a qualcosa di conosciuto e tangibile, mentre Keplero sembra andare più "a tentoni". Si ritrova anche la caratteristica principale dell'opera di essere organizzata come un trattato assiomatico: «*Il trattato di Newton riflette un vero e proprio sistema assiomatico. All'inizio lui mette le sue regole, i suoi postulati iniziali, e poi pian piano deduce tutto il resto*», in linea con le aspettative che ci eravamo posti riguardo alle strategie narrative utilizzate dagli autori.

- *Ritrovano in tutti e tre gli autori l'importanza della relazione con le osservazioni e gli esperimenti.*

  Un passo importante, anche per la ricerca di un'idea di interdisciplinarietà presentata nel primo punto, è il fatto che gli studenti riconoscano che tutti e tre gli scienziati basano il loro lavoro sulle sperimentazioni e sul tentativo di fornire ad esse una spiegazione o una corretta struttura. Riconoscono in Galileo e Newton l'importanza del poter fare esperimenti per progredire sulla strada dei propri ragionamenti, mentre Keplero, non potendo sperimentare direttamente, si basa sui dati e sulle osservazioni: «*Galileo usa un metodo che è molto sperimentale, anche dopo quando spiega come disegnare una parabola; è molto molto concreto, non ha nulla di astratto*»; «*Keplero si rende conto del fatto che sta studiando una cosa che non si può sperimentare; Galileo quando fa il moto del proiettile riesce ad immaginarselo, ma quando chiedi di immaginarti il moto di Marte intorno al Sole c'è poco da immaginarsi, nessuno l'ha mai visto; e quindi bisognerà affidarsi completamente all'esperienza*»; «*Per quanto riguarda Newton, secondo me, la cosa che ho notato è il ruolo dell'esperienza, dell'osservazione dei corpi, delle cose in natura, per dare poi una descrizione dei fenomeni e del moto*». L'esperimento assume un'importanza centrale nella comprensione degli studenti del lavoro dello scienziato, e partono proprio da esso per collegarsi successivamente, nel secondo livello, all'idea di una matematica che fornisca una struttura per le osservazioni: «*Galileo usa l'esperimento per capire,*

***modellizza** l'esperimento*»; «*Newton quello che vede in modo tangibile lo fa per riportarsi a qualcosa di "più grande" [...] Parte dall'esperienza con i pendoli ma lo fa per poi in realtà guardare ad altro [...] Keplero è diverso perché guarda solo quello che avviene nei corpi celesti e parte da misurazioni fatte sugli stessi; mentre Newton non scarta l'esperienza sensibile che può effettivamente verificare con dei pendoli, con delle cose sulla Terra per capire intanto come funzionano le cose e che cosa deve guardare poi quando andrà a misurare*». Viene evidenziata l'importanza che assume per Newton l'*esperimento mentale*: è l'unica sperimentazione che lo scienziato può fare per collegarsi ai pianeti, e trovano interessante il fatto che utilizzi un metodo solitamente applicato per lo studio dei corpi terrestri per allacciarsi ai corpi celesti.

2) ***Livello di comprensione dei processi***

- *Ritroviamo segnali relativi alle idee dell'interdisciplinarietà legate alla classica visione strumentale-applicativa.*

  Queste convinzioni, elencate in parte nei Capitoli 1 e 2, mostrano quanto sia radicata e difficile da superare la classica visione, che porta gli studenti a vedere la matematica come uno strumento e la fisica come un contesto, e li lascia legati a quello che era il "primo livello" circa la comprensione dell'interdisciplinarietà mostrato nella Sezione 2.2 del Capitolo 2. Troviamo all'interno della discussione alcuni segnali di questo tipo, che rimandano alla matematica paragonata solamente al rigore e al formalismo, e all'utilizzo di essa come semplice *strumento* per lo studio della fisica: «*In Galileo e Keplero la matematica non è particolarmente rilevante, se non per esempio in Galileo quando deve costruire la parabola, siccome si basano molto sulle rilevazioni e non sull'aspetto puramente matematico [...] Almeno Galileo parla di qualcosa di matematico, cioè rapporti costanti, scala di quadrati, c'è una cosa che sembra avere una parvenza di matematica*»; «*Keplero cerca di dimostrarlo attraverso l'utilizzo dello **strumento** matematico*». Vedremo tuttavia come tale visione non sia l'unica presente, ma vi siano segnali che riportino l'utilizzo della matematica oltre al semplice ruolo strumentale.

- *Generalmente, sembrano paragonare la matematica soprattutto alla parte tecnica, trovando difficoltà a distinguere le componenti.*

  In parte collegato al punto precedente, vi è questa difficoltà da parte degli studenti a considerare le due componenti della matematica e ad appropriarsi della componente *strutturale*. Ciò conferma quanto avevamo già notato poco sopra: gli studenti sono influenzati dalla visione che li porta a vedere la matematica come uno strumento da applicare nel contesto fisico, e non approfondiscono più di tanto il ruolo assunto da essa nello *strutturare* un concetto fisico. In Galileo, si focalizzano su una matematica che lo aiuta a costruire la sua rappresentazione, dando l'impressione di concentrarsi soprattutto sulla componente *tecnica* di essa: «*Galileo utilizza la matematica nella rappresentazione; quando vede che le due parti di una curva devono essere uguali, cioè una curva simmetrica, utilizza le proprietà delle figure; utilizza quasi più una geometria analitica come matematica*». Uno studente afferma: «*Galileo utilizza la parte forse meno dimostrativa della matematica, cioè meno teorica, ma un po' più pratica*», donando così alla matematica un carattere differente, senza però approfondire tale passaggio.

Nell'analisi che fanno del racconto di Keplero faticano a riconoscere la distinzione, e confermano quanto si era notato per Galileo: ritroviamo l'idea che egli «*lasci la matematica a chi di matematica se ne intende*», suggerendo così un'associazione della matematica con la sua componente *tecnica*, come attesta la maggior parte degli studenti: «*Invoca una geometria che possa calcolare l'area della lunula trovata allo scopo di normalizzare una figura che rappresenta il tempo impiegato a percorrere i tratti dell'orbita*»; «*A me dà l'impressione di uno che dice: "per adesso arrivo fin qua, non ho gli strumenti matematici per far vedere quello che devo far vedere, mi dovete dare una mano"; quando la gente mi dimostrerà che questa cosa funziona, allora potrò dire: "ok, questa cosa è governata effettivamente da qualcosa che assomiglia alla matematica"* »; «*Keplero abbiamo capito che lascia la matematica a chi di matematica se ne intende, e dice "fatemi i calcoli"; sembra che per lui la matematica si riduca un po' a questo, che parte dalle sue osservazioni facendo ragionamenti di deduzione matematica*»; «*Per lui la matematica è quella che ha costruito le coniche quindi gli serve in questo senso, non la utilizza troppo, si basa sull'esperienza*». Anche per quanto riguarda Newton faticano a distinguere una divisione in componenti della matematica. Si ritrova nuovamente l'idea di una matematica *tecnica*, simile a quella di Keplero, che possa "fare i conti" al termine dei processi: «*Per Newton la matematica è quella che "sistema le cose", cioè ho trovato in lui il fatto che sono i matematici che devono fare i conti; la matematica la usa dicendo: "una volta che ti ho detto come devono andare le cose, perché con un mio ragionamento o con modalità sperimentali ho trovato che deve funzionare così, ora vedi di fare una cosa un po' rigorosa con la matematica". La matematica era quella che dava rigore*». L'idea della matematica paragonabile a "quella disciplina che dà rigore", presente nell'ultima citazione, è caratteristica di questa convinzione degli studenti, e mostra come sia difficile per essi riconoscere una distinzione fra i ruoli della matematica.

- *Con la ricerca di parole chiave legate ai processi M-I-T, sembrano mostrare alcuni segnali di un riconoscimento, anche non totalmente consapevole, di essi.*

  Ovviamente, come preventivato, gli studenti non forniscono un'analisi M-I-T dei testi, ma in alcuni passaggi utilizzano termini tipici di essa, e sembrano ritrovare le caratteristiche di processi quali la *matematizzazione* e l'*interpretazione*. Si ritrova, all'interno della discussione una maggiore padronanza con i processi realtivi alla *matematizzazione*, i quali probabilmente risultano essere più semplici da individuare e più "vicini" a studenti di matematica. Per quanto riguarda gli estratti di Guidobaldo e Galileo, ritroviamo una divisione delle fasi del ragionamento di quest'ultimo: «*Nella prima parte è molto concreto, cambia nella seconda, quando fa il dialogo. Lì ho visto un ribaltamento della prospettiva rispetto ai testi precedenti, perché lì l'ho visto puramente teorico, rispetto alla concretezza precedente*». Nella "seconda parte" del lavoro di Galileo si ritrovano segnali circa l'idea di una *matematizzazione* di un concetto fisico e di una successiva *interpretazione* per cercare di conciliare l'ipotesi matematica con la realtà fisica: «*Lo schema che segue in questa parte è: osservo quello che accade, lo* ***modellizzo****, e in seguito fa una dimostrazione del teorema. Da questo modello quindi* ***astrae*** *delle proprietà, quindi fa delle deduzioni e gli torna tutto [...] Mentre prima era Galileo il concreto che faceva gli esperimenti con la pallina o con lo specchio, in questa seconda versione io l'ho visto molto astratto ed erano i suoi compagni che ponevano delle contraddizioni concrete; lui di nuovo* ***astrae****, facendo questa profonda distinzione fra astratto e concreto*». Trovano che Galileo voglia incastrare l'esperienza nei suoi schemi teorici, e questo li riporta ad una visione interessante, che li avvicina ad un processo di *matematizzazione*: il fatto che la teoria venga modellata per rispondere alle leggi della fisica. Focalizzandosi su Keplero, pur non esplicitandola, si soffermano in un primo momento sulla *matematizzazione*, senza riconoscere, come si è visto, una netta distinzione tra le componenti *strutturali* e *tecniche* della matematica. Hanno un'idea del processo che porta alla *matematizzazione* delle orbite, ma non sembrano chiarire esattamente cosa esso significhi: «*Io l'ho visto un po' come il metodo per fare i* ***modelli****; cioè, prima prendo dei dati sperimentali e poi cerco qualcosa che fitti con questi dati*». Successivamente, riconoscono i tentativi di Keplero di *strutturare* matematicamente un concetto fisico a partire dalle osservazioni: «*Keplero va più per tentativi, cerca di partire da un punto e vedere se questo punto di partenza riesce a* ***fittare*** *bene con tutte le altre ipotesi che lui fa proprio sulla tipologia dell'orbita che sta considerando; quindi, parte da quella circolare, vede che non va bene, allora va con quella ellittica, poi dice che è una via di mezzo...insomma* *fa tutti questi tentativi per cercare di arrivare poi alla soluzione migliore, all'esperienza che sta considerando*»; «*La parte empirica è più legata all'aspetto fisico, nel senso osservazione proprio del fenomeno, mentre per quanto riguarda la matematica, parte dall'equazione dell'orbita circolare e va a vedere che utilizzando quella cosa non può essere circolare l'orbita, e quindi poi va a fare un'altra ipotesi, e quindi dice: "se l'orbita invece è ellittica, vediamo, utilizziamo l'orbita ellittica e vediamo che non è possibile che sia ellittica"*». Sembrano dunque ritrovare l'idea dei passaggi che portano Keplero a voler migliorare le proprie congetture e a conciliare le esigenze della teoria matematica con la realtà, ma non approfondiscono più di tanto, riportandoci tuttavia l'idea di un processo *interpretativo* compiuto dallo scienziato: «*Keplero parte da una congettura, però* ***va oltre e ritorna*** *alla perfezione della matematica perché senza quella non può dare una teoria compiuta a quello che ha trovato*». Non riconoscono analogie con i processi compiuti da Galileo. In Newton, nuovamente, l'approfondimento raggiunge un livello simile: è più semplice vedere i processi dello scienziato, in quanto sono maggiormente esplicitati nei testi, ma anche qua si soffermano sulle idee di una *matematizzazione*, e riconoscono l'utilizzo molto marcato dell'*analogia* e della *generalizzazione*, ma non sembrano comprendere pienamente l'importanza che esse hanno per lo scienziato: «*Newton fa delle ipotesi anche se ancora non le ha verificate, per poi cercare di riuscire ad arrivare ad un punto che magari è un errore e quindi deve* ***ricominciare ad ipotizzare*** *tutta l'argomentazione [...] Deve modificare il pensiero da cui era partito per riuscire ad arrivare alla* ***congettura*** *che desidera ottenere*»; «*Secondo me qua c'è un problema di soggetti di studio; nel momento in cui stanno studiando i pianeti è tutta un'altra cosa che si mischia con la filosofia più alta, quando poi magari devi dimostrare il moto sulla terra è diverso. Quindi, secondo me risente pienamente di questa distinzione, che non si parla di cose terrene ma celesti, che* ***escono da una logica terrena****, ma poi successivamente no*»; «*Lui parte da queste proposizioni matematiche per poi* ***ipotizzare tutte le varie possibilità*** *che ci sono in seguito a questa* ***congettura*** *matematica, supposizione matematica, o quello che è; e poi va a vedere in che modo si possono verificare tutte queste situazioni possibili*».

- *Ritrovano l'idea di una rigorosità che cresce man mano con gli autori.*

Legandosi ai processi di *matematizzazione* che ritrovano in parte dall'analisi dei testi, come si è visto nel punto sopra, gli studenti riconoscono i tentativi degli autori di fornire una "rigorosità" sempre più marcata al modello. Uno studente afferma: «*Una cosa che si può notare è come il metodo vada via via crescendo di rigorosità; cioè, man mano che si* *va avanti si cerca di essere sempre più rigorosi, poi insomma, non si raggiungono mai livelli eccelsi di rigorosità, ma paragonando Galileo a Newton si notano abbastanza le differenze dal punto di vista della rigorosità*», seguito da un commento di un altro che conferma: «*Galileo si basa sull'intuito, cerca di "convincerti sull'evidenza" mentre Newton va oltre, non si ferma qui. Newton osserva e vede che una cosa funziona in un certo modo, ma non si è fermato lì a dire: "allora sono convinto di questa cosa"; dopo è andato a misurare. Galileo invece si è fermato a dire: "mi ha già convinto il vederlo così"* ». Si ritrova in Newton l'idea di un processo che voglia fornire una struttura ad un concetto fisico, e approfondisca un livello che Galileo invece trascura. Vi è l'idea di una matematica più rigorosa, più vicina a quella moderna, che si sviluppa e "affina" i propri metodi con il procedere degli anni, anche se gli studenti non sembrano comprendere l'importanza che hanno i metodi utilizzati da Newton nella creazione della sua opera.

- *Sembrano essere consapevoli di un ruolo della matematica che vada oltre l'essere strumento.*

  Riflettendo, grazie alla domanda 4, circa il ruolo assunto dalla matematica all'interno della trattazione, gli studenti forniscono alcuni spunti che sembrano volerci riportare ad un tentativo di superare la classica visione strumentale - applicativa, la quale, tuttavia, come abbiamo visto, rimane in parte radicata in loro. Se per Galileo, come si è visto, pongono l'attenzione sulla matematica *tecnica* che egli utilizza per la rappresentazione e la dimostrazione, evidenziando così il carattere di *strumento*, per Keplero e Newton riconoscono un ruolo differente. Ritrovano nell'utilizzo che fa Keplero della matematica un ruolo di *base fondamentale*, sul quale poggiare la costruzione del modello: «*Keplero si serve della matematica come* ***base*** *da cui trarre le definizioni che poi gli fanno vedere le figure*»; «*Keplero riconosce che senza la geometria non può dare* ***fondamento*** *alle sue idee, è quello che utilizza in modo più corretto la matematica*»; «*Lui parte dalle cose sperimentali, però nel momento in cui si rende conto che il cerchio perfetto non è la figura geometrica che vuole cerca di approssimare l'orbita che trova sperimentalmente ad una figura geometrica già conosciuta; e quindi è come se prendesse la matematica come un'idea a cui vuole arrivare, come una* ***base***». In quest'ultima citazione si ritrova perfino il ruolo di *analogia formale* di cui si serve la matematica nella creazione del proprio modello. Anche nei processi di Newton ritrovano un carattere simile per la matematica: «*Newton si serve della matematica per compensare le lacune della filosofia, perché dice: "la filosofia non arriva dappertutto, quindi uso le mie proposizioni matematiche che conosco perché in questo modo posso* *spiegare anche questi moti che la filosofia non sa spiegare"*»; «*Per Newton il ruolo della matematica fa da* ***supporto*** *a quello che ha già capito, non è qualcosa che serve per scoprire, ma allo stesso tempo è necessaria perché sennò le sue scoperte rimangono un po' zoppe*»; «*Mi viene da dire che Newton intende la matematica come un linguaggio, o comunque un qualcosa per* ***strutturare*** *la sua opera*». Riconoscono in maniera piuttosto evidente l'utilizzo dell'*analogia* e del *principio di continuità*, come ci si poteva aspettare, vista la scelta di mettere in rilievo soprattutto il metodo che lo scienziato utilizza, ma essi vengono intesi più che altro come utili strumenti al servizio del lavoro dello scienziato piuttosto che sostegni fondamentali nel tentativo di assiomatizzare la fisica.

Questo ruolo assunto dalla matematica di essere *strutturante* per la creazione di un modello fisico, ci avvicina all'idea di interdisciplinarietà che abbiamo indicato nel Capitolo 1. Ritroviamo indicatori che ci portano a pensare che abbiano individuato il ruolo assunto dalla matematica nel fornire *analogie formali* o nell' "istigare rivoluzioni scientifiche", pur riportandoci all'impressione di una consapevolezza non totale dell'importanza di tale ruolo all'interno dei processi degli scienziati.

3) ***Livello di comprensione dell'analogia con il ragionamento di Planck***

- *Gli studenti sembrano non ricordare i processi del ragionamento di Planck, o sembrano non trovare troppe analogie tra essi e i passaggi dei tre scienziati prima che gli venga posta la domanda 5.*

  In generale, prima che gli venga posta la domanda, gli studenti faticano a riconoscere analogie con il lavoro di Planck, sia per quanto riguarda i processi *interpretativi* e di *matematizzazione*, sia per quanto riguarda il ruolo assunto dalla matematica nel portare alla struttura del modello fisico.

  L'unico contributo in questa direzione ci viene fornito da uno studente che riconosce qualche segnale di un passaggio *interpretativo* all'interno del lavoro di Galileo, e cita Planck prima che gli venga fornita la domanda su di esso: «*Galileo mi ha ricordato un po' con questo discorso che abbiamo detto dell'adattamento della legge rispetto all'esperienza, il discorso che abbiamo fatto nel laboratorio di Planck, in cui si accorge che i dati non fittano proprio con l'esperienza; e quindi questo aspetto di* ***venirsi incontro*** *della parte empirica con la parte più* ***tecnica****, per cercare di descrivere il moto che sta vedendo o che vuole descrivere*».

- *Ritrovano alcuni punti comuni con i processi relativi all'attività sul corpo nero dopo che viene loro presentata la domanda 5.*

In linea con le aspettative della sezione precedente, gli studenti ritrovano forti analogie con il lavoro di Keplero: «*L'unico che ha analogie un po' forti è Keplero: è l'unico che **rivaluta** l'ambiente di lavoro dopo aver fatto un'esperienza che non gli dava il risultato che voleva*»; «*Mi ricordo che il ragionamento di Planck era un continuo **passarsi la palla tra matematica e fisica** per andare avanti nel suo ragionamento. In Newton non mi sembra di vedere troppo questa cosa, mentre in Keplero questa cosa di partire dai dati osservabili, ma anche di tenere la matematica come una **base**, mi sembra che possa essere assimilato al percorso che faceva Planck*». Non ritrovano tutti i passaggi compiuti da Keplero analoghi a quelli di Planck che abbiamo esplicitato nel capitolo precedente, e ammettono di non ricordare benissimo i punti salienti del lavoro sul corpo nero. Vi è tuttavia l'idea che si possa ritrovare, sia in Keplero che in Planck, la ricerca di un "bilanciamento" dell'ipotesi matematica con la componente sperimentale del problema attraverso passaggi di *matematizzazione* e *interpretazione*. Addirittura, uno studente afferma: «*Planck grazie alla matematica ha capito che la funzione andava fatta in un certo modo [...] Quindi ha capito come funzionano le cose grazie alla matematica, questo in Newton non c'è, c'è più in Keplero: però lui, una volta che ha scoperto come vanno le cose in fisica dice che dovrà spiegarlo in un certo modo. Dovrebbe fare **il percorso a ritroso** attraverso il linguaggio della matematica, e questo Keplero non so se lo fa; Newton invece sì. Quindi, se Keplero usa la prima parte dell'uso della matematica che avevamo fatto nel corpo nero, Newton usa l'altra: cioè, la matematica come metodo per giungere alla scoperta e la matematica come "come posso spiegarti ora la scoperta in maniera rigorosa?"* », fornendo un'interpretazione interessante dei processi. Ritrova l'idea dell' "illuminazione" matematica di Keplero, paragonabile a quella che porta Planck ad allargare la propria prospettiva e passare al concetto matematico delle *complessioni*, per poi paragonare il processo di *interpretazione* di quest'ultimo, alla ricerca di un senso fisico alla propria congettura, con il metodo di Newton per giungere ad un rigore matematico.

Uno studente ritrova il concetto di *interpretazione* successivamente a questo approfondimento su Planck: «*In realtà si parte dai dati sperimentali, la matematica aveva fatto scoprire qualcosa, per far fittare i dati **interpreta**. La fisica serve per dare un'**interpretazione**, traggo dal ragionamento matematico che ho fatto la conclusione fisica*», suggerendo un livello di consapevolezza di tale processo.

5.3 Altri risultati

Dall'analisi della discussione emergono anche alcuni risultati "inaspettati", che vogliono far riflettere circa le convinzioni degli studenti sulla relazione tra matematica e fisica e sul ruolo, in generale, assunto da tali discipline nel trattare un argomento interdisciplinare.

- *Faticano ad appropriarsi degli strumenti matematici dell'epoca.*

  Gli studenti mostrano difficoltà a collocarsi all'interno del contesto storico, e a comprendere come le tecniche matematiche utilizzate dagli scienziati dell'epoca siano differenti da quelle moderne. Hanno dunque la tendenza a "banalizzare" questa matematica: «*Galileo non utilizza dimostrazioni ma "mostrazioni"; non sono dimostrazioni vere e proprie*»; «*In Newton e in Galileo c'è un uso della matematica, di strumenti abbastanza stupidi, come i rapporti*». Nonostante un corso di Storia della matematica sia presente all'interno del percorso universitario, questi segnali trasmettono l'idea che lo studente abbia difficoltà ad appropriarsi del concetto di un'evoluzione della matematica avvenuta nel corso degli anni. Egli dunque è portato a considerare strumenti come i rapporti, potentissimi per l'epoca, come troppo semplici, solo perché li paragona alle metodologie moderne. Questa banalizzazione della matematica dell'epoca è significativa, ed indica una certa difficoltà a leggere i testi con occhi storici e un'abitudine radicata ad utilizzare la matematica contemporanea.

- *Ritrovano l'idea di una fisica che voglia "intrattenere" il lettore.*

  Analizzando le strategie dei vari autori, gli studenti trovano che le metodologie di Keplero e di Newton, guidando il lettore passo a passo, vogliano coinvolgere quest'ultimo nella lettura, e che essi vogliano rivolgere le proprie trattazioni all'attenzione di un pubblico più ampio. Si ritrova l'idea che la fisica abbia meno regole della matematica e, libera dai formalismi di quest'ultima e potendo fare riferimento perlopiù ad oggetti reali e non astratti, possa esprimersi in maniera più familiare e avvicinarsi non solo ad un ristretto numero di scienziati: «*Newton, essendo più discorsivo, intrattiene meglio, ti coinvolge maggiormente*»; «*Keplero scrive un racconto anche per attirare persone che magari sono meno propense ad un ragionamento di questo tipo, ti accompagna piano piano a capire*».

- *Emerge l'idea che la fisica, molto più della matematica, abbia la necessità di convincere il lettore.*

  La caratteristica della fisica di "voler intrattenere" il lettore già emersa nel punto precedente, si lega bene a questa idea. Dalle affermazioni degli studenti, oltre al tentativo della fisica di coinvolgere il lettore, ritroviamo segnali che ci portano a pensare che essa sia tuttavia molto meno convincente della matematica. Nelle affermazioni degli studenti, infatti, notiamo quanto la matematica, con le sue regole e le sue tecniche, sia considerata una disciplina che non ha il bisogno di convincere il lettore circa le verità delle proprie affermazioni, dimostrate con metodi rigorosi. La fisica invece, avendo riscontro con la realtà, ritrova la necessità di dover convincere il lettore circa le proprie affermazioni, a causa delle limitazioni imposte dalla realtà e del suo minor rigore: «*La matematica, una volta dimostrato qualcosa, una volta dimostrato che il ragionamento è corretto e le premesse sono vere, la conclusione è sempre vera, punto. In fisica abbiamo il problema che dobbiamo scontrarci con la realtà*».

- *Ritroviamo una concezione interessante della relazione tra le due discipline.*

  Emerge un'idea circa il rapporto tra matematica e fisica, che coinvolge le modalità utilizzate dai tre autori: «*Newton vuole dimostrare che il suo metodo è giusto; e quindi se il suo metodo è giusto quello che deduce con esso è giusto; Keplero parte dalla cosa fisica, e poi si serve della matematica; c'è un continuo scambio, mi sembra che una materia rispetti l'altra. Galileo invece tende a forzare la matematica dalla parte della fisica affinché gli dia delle tesi a suo favore*». Ritrovano così una differenza nelle strategie utilizzate dagli autori: Galileo si appoggia all'assoluto della matematica e utilizza il formalismo e il rigore di essa, forzandola affinché lo riporti alla soluzione cercata; in Keplero sembrano trovare un'interazione delle discipline, e un utilizzo reciproco di esse, per riportarsi alla corretta soluzione; mentre in Newton ritrovano la scelta di un metodo nato da un approccio matematico che possa essere utilizzato successivamente nel tentativo di "convincere" della fisica.

5.4 Feedback sull'attività

In aggiunta ai risultati dell'analisi elencati in precedenza, possiamo riscontrare alcuni feedback ritrovati nei pensieri degli studenti circa l'attività, che ci aiutano nel riportare successivamente le conclusioni su di essa e sulla sua efficacia.

- *Gli studenti trovano i contenuti di questa attività più familiari rispetto a quella sul corpo nero.*

  Il primo risultato osservabile è questo: nel tutorial su cui avevano lavorato l'anno precedente gli studenti avevano riconosciuto quanto le "competenze disciplinari" dello studente del corso differente dal proprio fossero utili: così, i matematici, ritenendo di non possedere le competenze necessarie per comprendere al meglio la natura fisica del lavoro proposto, avevano riconosciuto l'importanza dell'aiuto dello studente di fisica; mentre i fisici avevano ammesso quanto utili fossero stati i matematici nella risoluzione dei compiti tecnici.

Il corpo nero risulta infatti essere un argomento molto più complicato e meno familiare agli studenti di matematica, rispetto al moto parabolico di oggetti o al moto ellittico dei pianeti. In questa attività gli studenti non sembrano manifestare grandi difficoltà ad operare e a cogliere il senso degli argomenti proposti, e ritrovano la comprensione fisica del discorso anche senza l'aiuto di un collega del corso di fisica.

- *Gli studenti trovano difficile il linguaggio di alcune parti degli estratti.*

  Abbiamo visto come, a differenza del lavoro di Planck, si siano riportati gli estratti originali delle opere degli autori, senza fornire una descrizione guidata come invece si era fatto per il corpo nero. Gli studenti hanno la tendenza a tralasciare i passaggi *tecnici* di matematica, che ritengono superflui per afferrare il senso della trattazione, e si concentrano sui tentativi di comprensione del ragionamento dello scienziato, trovando qualche difficoltà nella lettura, spesso a causa del linguaggio utilizzato dall'autore.

- *Gli studenti riconoscono il carattere differente dell'attività.*

  Gli studenti riconoscono come il carattere dell'attività sia volto a farli ragionare circa una trattazione interdisciplinare di tre autori differenti, e il fatto che sia priva di compiti tecnici, che spesso concentrano sul loro svolgimento l'attenzione dello studente, li aiuta a focalizzarsi maggiormente sui processi seguiti dallo scienziato. Un limite che notiamo per questa attività è che il presentare tre autori differenti porta maggiormente gli studenti a concentrarsi sulle differenze e sulle analogie tra le modalità di racconto e di esposizione di essi, piuttosto che sui concetti espressi singolarmente e sulle metodologie utilizzate nel singolo caso di studio: «*La prima cosa che noto come differenza tra le due attività è che con l'attività del corpo nero avevamo preso uno scienziato e la sua opera e l'avevamo analizzato passo per passo, e quindi più che altro è una comparazione tra come ha affrontato il problema sia dal punto di vista matematico che dal punto di vista fisico; mentre invece qui stiamo affrontando tre autori, stiamo fissando l'argomento e stiamo vedendo come tre persone diverse lo hanno affrontato*».

5.5 Conclusioni

L'analisi del *Focus Group* strutturata su tre livelli è stata dunque utile per portare in luce quanto gli studenti si siano appropriati degli "strumenti interdisciplinari" a seguito dell'attività del corpo nero.

Per quanto riguarda il primo "livello di comprensione" essi non hanno manifestato particolari difficoltà a comprendere il significato generale dei brani riportati e le strategie degli autori, ma ciò nonostante sono emersi solo alcuni riferimenti alla relazione matematica-fisica. Certamente hanno colto l'idea della relazione tra le discipline e il loro coinvolgimento all'interno della trattazione, ma per raggiungere ciò non è necessario un eccessivo approfondimento dei testi.

Nel secondo livello, invece, troviamo - stimolati dalle domande guida - i contributi più interessanti per la risposta alla nostra domanda di ricerca. Notiamo subito quanto gli studenti fatichino a superare una visione della relazione tra la matematica e la fisica ancorata all'immagine strumentale-applicativa. Se si pensa all'analisi del Capitolo 2, nel quale avevamo evidenziato che circa la metà degli studenti partecipanti all'attività avesse un'idea molto "immatura" a riguardo dell'interdisciplinarietà, possiamo dire che all'interno della nostra analisi del *Focus Group* ritroviamo affermazioni e spunti che ci riportano all'idea che in buona parte degli studenti permanesse, a distanza di un anno, e dopo aver fatto l'attività sul corpo nero, quell'idea. Possiamo pensare che una tale visione rimanga in parte radicata in loro, nonostante abbiano svolto un'attività come quella del corpo nero, volta ad aiutarli ad approfondire tale concezione. Chiaramente non possiamo analizzare se vi sia stato un "salto di livello", a causa del carattere differente dell'attività e dell'anonimato dei questionari presentati durante l'attività dello scorso anno, ma ciò fornisce comunque un primo risultato interessante.

L'analisi del secondo livello, tuttavia, porta in luce anche risultati circa il riconoscimento dei vari processi: gli studenti non nominano mai esplicitamente il *Modello di Uhden*, non fanno chiaro uso della sua terminologia e faticano a riconoscere le due componenti della matematica, ma sembrano appropriarsi in alcuni passaggi di una comprensione più profonda e vicina all'idea di interdisciplinarietà. Tale comprensione emerge sempre di più man mano che approfondiscono il discorso e ne discutono insieme, quasi a manifestare il fatto che posseggano parte degli strumenti ma fatichino ad utilizzarli e a comprenderli.

Un ultimo interessante risultato riguarda gli studenti che appartenevano al "terzo livello" relativo ai protocolli delle risposte del Capitolo 2. Leggendo le risposte relative ad uno studente appartenente al "terzo livello", e analizzando la sua calligrafia, siamo riusciti ad individuarlo prima dello svolgimento dell'attività. È interessante notare come questo studente abbia "trainato" maggiormente i compagni verso spunti più profondi e verso l'utilizzo di strumenti più efficaci ad analizzare in profondità i testi e a riconoscere un ruolo che supera la visione strumentale - applicativa. Studenti con una visione allargata di interdisciplinarietà dunque sono utili nel fornire ai loro compagni stimoli e spunti nella corretta direzione. Tuttavia, ritroviamo che questa idea vicina al livello "più profondo" è già radicata in lui ancora prima di svolgere l'attività sul corpo nero, e, a causa di ciò, non riusciamo ad indagare se il tutorial di Planck abbia contribuito o meno ad ampliare la visione di questo studente.

Per quanto riguarda il "livello di comprensione" dell'analogia con il ragionamento di Planck, possiamo notare come fatichino a ritrovare subito l'analogia con i ragionamenti del fisico tedesco, e come sia necessario fornire loro la domanda specifica affinché riescano a confrontare gli approcci, con l'unica eccezione di uno studente che ritrova un legame, seppur non troppo approfondito. Quasi a voler confermare quanto detto poco sopra, nel momento in cui viene fornita la domanda, riescono ad approfondire il discorso e vanno a confrontare le loro idee con ciò che ricordano dei passaggi caratteristici dell'attività sul corpo nero, ritrovando l'analogia più evidente, ossia quella con i ragionamenti di Keplero, senza tuttavia ricavarne altre circa il ruolo assunto dalla matematica all'interno degli estratti di tutti e tre gli autori.

L'attività di *Focus Group* si rivela comunque un importante strumento di indagine, che, probabilmente, se proposto ad un numero maggiore di studenti, non solo di matematica, fornirebbe un quadro d'insieme più completo, rispetto a questa ristretta analisi.

Collegandoci al problema didattico esposto nell'introduzione e nel Capitolo 1, emerge dalla nostra attività di *Focus Group*, infine, l'idea che la visione strumentale - applicativa sia difficile, se non impossibile, da superare totalmente, giunti ad un livello universitario, ma riteniamo che attività simili a quella sul corpo nero, se proposte con più continuità, possano fornire agli studenti importanti strumenti e aiutarli nell'acquisizione di competenze, come si è visto dall'analisi. Ritengo che, se tali attività fossero svolte già in ambiente scolastico, e non solo a livello universitario, chiaramente contestualizzate e modificate per gli studenti più giovani, potrebbero essere un utile mezzo per migliorare la comprensione sia degli alunni che dei docenti, e aiutare per l'acquisizione di quelle competenze richieste dalla società ed elencate nel primo capitolo.

Appendice A

Tutorial sul corpo nero

IL CORPO NERO E L'IPOTESI DI DISCRETIZZAZIONE

Formulazione di un'ipotesi

A cavallo del 1900, l'attenzione di fisici importanti di tutta Europa era indirizzata ad un problema fondamentale: determinare una funzione che descrivesse la densità di energia della radiazione emessa da un corpo nero a temperatura costante (situazione di equilibrio termodinamico). Planck giunse a formulare una sua espressione della funzione densità di energia seguendo un percorso radicalmente diverso rispetto ai suoi contemporanei e riuscì a dare una giustificazione teorica della sua validità. Per far ciò, dovette introdurre un'ipotesi rivoluzionaria: la discretizzazione del processo di interazione tra radiazione e materia. Tale ipotesi non solo non venne accettata fin da subito, ma generò inizialmente numerose perplessità persino nel suo stesso ideatore.

La prima parte del tutorial ha due obiettivi principali: i. mettere a confronto le peculiarità dei diversi approcci seguiti dai fisici che si cimentarono con il problema del corpo nero, ii. mettere in evidenza il ragionamento ipotetico-congetturale che portò Planck, nel 1900, a formulare la propria funzione. La seconda parte del tutorial ha l'obiettivo di mostrare il ragionamento che portò Planck a interpretare fisicamente la congettura matematica da lui introdotta "come atto di disperazione".

<u>1- La distribuzione di Wien</u>

Prima di Planck i tentativi di costruzione della funzione che esprimesse la densità di energia emessa da un corpo nero a temperatura costante miravano perlopiù a trovare un'espressione analitica per la densità spettrale di energia. Erano tutti basati su considerazioni di natura termodinamica, su leggi empiriche formulate a partire da dati ricavati sperimentalmente e su modelli meccanici ed elettromagnetici circa l'energia degli oscillatori della cavità introdotta da Kirchhoff.

Wien, utilizzando una legge termodinamica generale secondo cui la densità spettrale dipendeva solo dal prodotto tra ν^3 e una funzione generica di $\frac{\nu}{T}$ e facendo uso di modelli meccanici ed elettromagnetici dell'energia di un oscillatore ispirati alla distribuzione di Maxwell, giunse a formulare, nel 1896 la seguente espressione:

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} a e^{\frac{-b\nu}{T}}, \tag{1}$$

con a, b costanti positive. In questa espressione, e anche nel seguito, ν rappresenta la frequenza d'onda elettromagnetica, T la temperatura del corpo, c la velocità della luce nel vuoto.

Da tale espressione è possibile ricavare la più famosa legge dello spostamento di Wien del 1893, secondo cui la lunghezza d'onda λ_0 per cui è massima l'energia di radiazione emessa è inversamente proporzionale alla temperatura del corpo.

Attività 1: Verifica l'affermazione precedente, usando la funzione densità proposta in (1). *(Ricorda: la frequenza e la lunghezza d'onda sono collegate dalla* *relazione* $\nu = \frac{c}{\lambda}$*.)*

Il 7 ottobre 1900 il fisico tedesco Rubens incontrò Planck a Berlino e gli rese noti gli esperimenti svolti insieme al collega Kurlbaum sull'energia di radiazione del corpo nero, compiuti utilizzando materiali come fluorite, salgemma e quarzo. Un fatto inaspettato era emerso: sulle grandi lunghezze d'onda (dell'ordine delle decine di micron), la distribuzione di Wien era in palese disaccordo con i dati sperimentali. La sera dello stesso giorno Planck, che aveva già studiato a lungo il problema, trovò la nuova equazione caratteristica che fu alla base delle prime ipotesi di quantizzazione. Come?

2- La distruibuzione di Planck

Dal momento che la scelta di focalizzarsi sulla ricerca diretta della funzione densità di energia non aveva portato a una soluzione soddisfacente del problema, Planck decise di cambiare completamente prospettiva nel tentativo di apportare una "piccola modifica" alla distribuzione di Wien: decise di non concentrarsi sui modelli di interazione tra radiazione e singolo oscillatore nella cavità, ma di considerare le proprietà entropiche del sistema. Attraverso tali proprietà analizzò e "modificò" la legge di distribuzione di Wien.

Planck sapeva che per ottenere un'espressione della densità spettrale era sufficiente trovare un'espressione per $U(\nu, T)$, energia media del singolo oscillatore di frequenza ν, perché aveva dimostrato che tra le due grandezze c'era la seguente relazione:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} U(\nu, T). \tag{2}$$

Come calcolare dunque l'espressione di U? Qui arriva la novità. Nel 1900 era noto da oltre 30 anni che un oscillatore armonico in equilibrio termico aveva classicamente un'energia media $U = kT$: è il teorema di equipartizione dell'energia. Probabilmente Planck non assumeva la validità generale del teorema di equipartizione e non lo applicò: se lo avesse fatto non avrebbe scoperto la sua legge.

Planck scelse invece di concentrarsi sull'entropia S dell'oscillatore e di vederla come funzione dell'energia U per riuscire ad impostare una relazione differenziale tra S ed U che potesse suggerire alcune caratteristiche della funzione senza fornirne, in prima istanza, una espressione analitica. Dal momento che la legge di Wien era efficiente nell'interpolare i dati empirici appartenenti alla maggior parte dei valori dello spettro, Planck decise di ripartire da tale equazione per la ricerca della nuova relazione tra S e U e di modificarla in base ai nuovi vincoli.

Vediamo alcuni dettagli del processo.

Valutando, in due modi differenti, l'incremento infinitesimale di entropia di un sistema di più oscillatori identici all'equilibrio termico, Planck giunse alla seguente espressione:

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}U^2} = \frac{\alpha}{U}, \tag{3}$$

con α constante. Da tale espressione e usando la relazione:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}U} = \frac{1}{T}, \tag{4}$$

valida all'equilibrio termico e in condizioni di volume costante della cavità come espressione del secondo principio della termodinamica, Planck riottenne la distribuzione di Wien (1).

[Se rimane tempo, il gruppo può provare a dimostrare la compatibilità di (1) *e* (3)*, ricordando* (4) *and* (2)*].*

Se, da un lato, questo fatto convinse il fisico tedesco della - almeno parziale - validità dell'equazione, dall'altro lo pose di fronte allo stesso problema di non aderenza ai dati sperimentali che aveva messo in difficoltà Wien.

Fu da qui che guidato, come lui stesso scrisse, da criteri di semplicità matematica, apportò modifiche alla legge di Wien, espressa nella forma dell'equazione differenziale (3).

In particolare, introdusse nell'equazione un parametro β, direttamente proporzionale alla frequenza ν, tale che: per frequenze alte (cioè per grandi valori di β) la nuova equazione tendesse a quella di Wien, mentre per frequenze basse (cioè per piccoli valori di β) S dipendesse in modo logaritmico da U, come suggerito da un approccio termodinamico. Tra le seguenti leggi:

A) $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}U^2} = \dfrac{\alpha(\beta+U)}{U}$ C) $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}U^2} = \dfrac{\alpha}{U\beta}$

B) $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}U^2} = \dfrac{\alpha\beta}{U^2}$ D) $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}U^2} = \dfrac{\alpha}{U(\beta+U)}$

tutte ottenibili da quella di Wien tramite una piccola modifica, quella proposta da Planck è la D).

Attività 2: Alla luce delle considerazioni precedenti, spiega perché questa equazione è preferibile alle altre, volendo rispettare i vincoli che il fisico tedesco decise di assumere.

Attività 3: Usando (4) e a partire dall'espressione corretta tra le quattro proposte precedentemente determina il valore U dell'energia di un singolo oscillatore.

La formula ottenuta dipende da α e β. Il parametro β, come detto in precedenza, è direttamente proporzionale alla frequenza; in particulare vedremo che $\beta = h\nu$, dove h è proprio la costante di Planck. Per α, Planck troverà $\alpha = -k$, come descritto nella seconda parte del tutorial.

Attivit 4: Sostituisci al posto di α e β nell'espressione ottenuta nell'attività precedente i valori sopra fissati ($-k$ e $h\nu$) e usa (2) per ottenere l'espressione della densità di energia del modello sviluppato da Planck.

È interessante notare che le due costanti h e k fanno qui la loro prima apparizione. Infatti, anche k non era mai stata esplicitata in precedenza: è lo stesso Planck a nominarla "costante di Boltzmann" in onore di Boltzmann, riconoscendo un legame tra la sua ricerca e gli studi del fisico austriaco, che aveva spesso utilizzato k senza mai denominarla esplicitamente. Gli studi di Boltzmann saranno infatti fondamentali per l'interpretazione fisica della distribuzione ipotizzata da Planck.

3- L'importanza di "guardare" le variabili giuste

La scelta di Planck di concentrarsi sulla relazione tra l'entropia e l'energia del singolo oscillatore fu cruciale. Infatti, pochissimi anni dopo, i fisici John Rayleigh e James Jeans ipotizzando, come Planck, una situazione di equilibrio termodinamico, ma operando direttamente su u e usando il modello classico dell'energia del singolo oscillatore ($U = kT$), ottennero la seguente funzione:

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT,$$

che, a basse frequenze, coincide con quella di Planck.

Questa proposta ha, però, come conseguenza, la cosiddetta catastrofe dell'ultravioletto: implica cioè che l'energia totale sia infinita, in quanto

$$\begin{aligned} E &= \int_0^{+\infty} u(\nu, T)\, \mathrm{d}\nu = \int_0^{+\infty} \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT\, \mathrm{d}\nu \\ &= \frac{8\pi kT}{c^3} \int_0^{+\infty} \nu^2\, \mathrm{d}\nu = \frac{8\pi kT}{c^3} \lim_{\nu \to +\infty} \frac{\nu^3}{3} = +\infty. \end{aligned}$$

Si noti che la stessa cosa non accade, invece, per la distribuzione di Planck.

L'interpretazione della nuova relazione: natura facit saltus

Dopo aver introdotto la sua distribuzione, attraverso una congettura matematica che portava ad una "piccola" modifica della distribuzione di Wien, Planck passò una settimana nello "sforzo disperato" di cercarne una interpretazione fisica che desse una plausibilità teorica alla nuova equazione e desse senso alla congettura.

Per fare questo, Planck si concentrò sull'entropia del sistema e sulla sua relazione con l'energia interna del sistema degli oscillatori, modellato come un sistema termodinamico. Per costruire il suo modello interpretativo in particolare si rifece all'approccio statistico di Boltzmann e alla descrizione microscopica del sistema, trascurando la natura degli oscillatori e concentrandosi solo sui modi in cui l'energia poteva distribuirsi sui vari oscillatori chiamati risonatori. Vediamo come.

4- Le complessioni

Supponiamo che il corpo nero sia costituito da N risonatori di frequenza ν ed energia E, N' di frequenza ν ed energia E', N'' di frequenza ν'' ed energia E'', e così via. Se l'energia scambiata fosse una quantità continua, essa potrebbe distribuirsi, per ogni frequenza, sui risonatori a tale frequenza in infiniti modi diversi. Ma se fosse costituita da un elevatissimo numero P di "pacchetti" di energia ϵ - qui sta l'ipotesi rivoluzionaria di Planck - tali che $P\epsilon = E$, allora le possibili distribuzioni sarebbero in numero finito. Planck assunse tale ipotesi e calcolò il numero di complessioni sotto tale "*ipotesi di discretizzazione.*"

Attività 5: Mostra che il numero di modi (complessioni) in cui P pacchetti possono distribuirsi su N risonatori è dato dalla formula:

$$W = \frac{(N + P - 1)!}{(N - 1)!P!}. \tag{5}$$

Osservazione: i risonatori devono essere considerati distinguibili, mentre i pacchetti indistinguibili. Inoltre, considera la possibilità di risonatori con energia zero.

5- Un esempio

Supponiamo che il sistema sia costituito da 3 risonatori con energia totale $E = 6\epsilon$. Ci saranno 7 differenti distribuzioni possibili (macro-stati):

A) 1 risonatore con energia 6ϵ; 2 risonatori con energia 0

B) 1 risonatore con energia 5ϵ; 1 risonatore con energia ϵ; 1 risonatore con energia 0

C) 1 risonatore con energia 4ϵ; 1 risonatore con energia 2ϵ; 1 risonatore con energia 0

D) 1 risonatore con energia 4ϵ; 2 risonatori con energia ϵ

E) 2 risonatori con energia 3ϵ; 1 risonatore con energia 0

F) 1 risonatore con energia 3ϵ; 1 risonatore con energia 2ϵ; 1 risonatore con energia ϵ

G) 3 risonatori con energia 2ϵ.

Attività 6: Considera ogni distribuzione: in quanti modi (complessioni/micro-stati) può essere realizzata?

Attività 7: Denota con N il numero totale di risonatori e con N_j il numero di risonatori aventi energia $j\epsilon$ con $j = 1, \ldots, P$. Qual è la formula che esprime il numero di complessioni corrispondenti ad ogni macro-stato?

Attività 8: Verifica che il numero totale W di microstati (sommando su tutte le possibili distribuzioni), calcolato nell'Attività 6, coincide con il valore ottenuto usando (5) e sostituendo alla variabili i valori opportuni.

6- Dalle complessioni alla densità di energia

Una volta modellizzata l'interazione materia-radiazione, Planck ritornò alla funzione densità che aveva ottenuto tramite la sua congettura iniziale per riottenerla per via teorica all'interno del modello. Per farlo sostituì nella formula di Boltzmann $S = k\log(W)$ l'espressione ottenuta in precedenza per W, quindi approssimò con la formula di Stirling $\log(x!) = x\log(x) - x$, essendo N e P grandi, i logaritmi dei fattoriali, e divise per N. Determinò così la seguente espressione per l'entropia del singolo risonatore in funzione di U e di ϵ:

$$S = k\left(\log\left(1+\frac{U}{\epsilon}\right) + \frac{U}{\epsilon}\log\left(1+\frac{\epsilon}{U}\right)\right).$$

Utilizzando la (4) and (2) ottenne quindi l'espressione analitica di u in funzione di ϵ. Rimaneva solo da stabilire il valore di ϵ. Per farlo Planck impose che la formula trovata fosse in accordo con la legge empirica termodinamica, utilizzata anche da Wien, secondo cui la densità spettrale dipendeva solo dal prodotto tra ν^3 e una funzione generica di $\frac{\nu}{T}$. Ottenne così $\epsilon = h\nu$ con h nuova costante universale (non dipendente da ν) detta, in seguito, costante di Planck.

Appendice B

Testo del Focus Group

In questa attività vi proponiamo la lettura di alcuni testi originali che sono accomunati dall'affrontare la questione delle coniche come possibili traiettorie del moto.

Vi chiediamo di leggere attentamente i seguenti testi, suddivisi per autori e di individuare e sottolineare in ciascuno i passaggi più importanti per l'argomentazione dei 3 autori (Galileo, Keplero e Newton), provando a schematizzarli brevemente. Una comprensione di tali testi sarà fondamentale e necessaria per la discussione successiva.

Elenco degli autori e dei testi che incontrerete:

- Galileo:
  - "Dagli appunti di Guidobaldo" (1592);
  - "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali" (1638) - estratti dalla II° e dalla IV° giornata;
- Keplero:
  - "Astronomia nova seu physica coelestis" (1609) – capitoli 56, 57, 58, 60;
- Newton:
  - "Philosophiae naturalis principia mathematica" (1687) – estratti dai libri I e III.

Verso la fine del 1500 si cercava di dar conto dei moti dei corpi lanciati da terra verso il cielo, si stavano compiendo i primi passi verso la matematizzazione dei fenomeni “sulla terra”.

All’epoca si risentiva della distinzione aristotelica tra moto violento e moto naturale; le chiavi interpretative che era naturale prendere in considerazione erano rappresentate dalla linea ***retta*** e dalla linea ***circolare***

“Il moto locale, che è quello che noi chiamiamo ‘traslazione’ è sempre o rettilineo, o circolare, o misto di questi due: perché semplici sono questi due soli. E la ragione è che ci sono anche due sole grandezze semplici, ***la linea retta e quella circolare***”. (*Aristotele)*

La parabola non faceva parte degli schemi interpretativi.

1) Galileo

Nel seguente brano, Guidobaldo e Galileo descrivono la loro esperienza per lo studio del moto dei proiettili.

Dagli appunti di Guidobaldo (1592)

Se si tira una palla o con una balestra o con artiglieria, o con la mano, o con altro instrumento, sopra la linea dell’horizonte, il medesimo viaggio fa nel callar che nel montare e la figura è quella che rivoltata sotto la linea horizontale fa una corda che non stia tirata, essendo l’un e l’altro composto di naturale e di violento et è una linea in vista simile alla parabola et hyperbole e questo si vide meglio con una catena che con una corda, poiché la corda abc, quando ac sono vicini la parte b non si accosta come dovrebbe perché la corda resta in sé dura. Che non fa così una catena, o catenina. La esperienza di questo moto si po’ far pigliando una palla tinta d’inchiostro, e tirandola sopra un piano di una tavola, il qual stia quasi perpendicolare all’horizonte, che se ben la palla va saltando, va però facendo li punti, dalli quali si vede chiaro che sicome ella ascende così anco descende [...]

la violentia che ella ha acquistato nell’andar sù, fà che nel callar vada medesimamente: superando il moto naturale nel venir giù [...] essendo che non ci è ragione che dal C verso DE mostri che si perda a fatto la violentia [...]”.

Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica e i movimenti locali (1638).

I due successivi estratti provengono dalla famosa opera di Galileo scritta sotto forma di dialogo tra tre personaggi: Salviati (Galileo), Sagredo e Simplicio. Nel primo estratto, preso dalla II giornata, Salviati risponde a Sagredo che gli chiede di fornirgli in via preliminare “perfetta intelligenza se non di tutte le passioni [proprietà] di tali figure dimostrate da Apollonio, almeno di quelle che per la presente scienza son necessarie” e di “avere qualche regola facile e spedita per potere sopra ‘l piano […] segnare essa linea parabolica”.

In questo estratto non si parla più di traiettoria dei corpi, ma di un metodo, a detta di Galileo, “meraviglioso” per disegnare la parabola, utilizzando le osservazioni precedenti.

Il modo "veramente maraviglioso" di disegnare la parabola.

Salviati. *Modi di disegnar tali linee ce ne son molti, ma due sopra tutti gli altri speditissimi glie ne dirò io: uno dei quali è veramente maraviglioso, poiché con esso, in manco tempo che col compasso altri disegnerà sottilmente sopra una carta quattro o sei cerchi di differenti grandezze, io posso disegnare trenta e quaranta linee paraboliche, non men giuste sottili e pulite delle circonferenze di essi cerchi. Io ho una palla di bronzo esquisitamente rotonda, non più grande d'una noce; questa, tirata sopra uno specchio di metallo, tenuto non eretto all'orizonte, ma alquanto inchinato, sì che la palla nel moto vi possa camminar sopra, calcandolo leggiermente nel muoversi, lascia una linea parabolica sottilissimamente e pulitissimamente descritta, e più larga e più stretta secondo che la proiezzione si sarà più o meno elevata. Dove anco abbiamo chiara e sensata esperienza, il moto de i proietti farsi per linee paraboliche: effetto non osservato prima che dal nostro amico, il quale ne arreca anco la dimostrazione nel suo libro del moto, che vedremo insieme nel primo congresso [IV giornata]. La palla poi, per descrivere al modo detto le parabole, bisogna, con maneggiarla alquanto con la mano, scaldarla ed alquanto inumidirla, ch´e così lascerà più apparenti sopra lo specchio i suoi vestigii.*

Nelle successive due giornate Salviati presenta a Sagredo e Simplicio un'opera, il "Del Moto locale", in cui si affronta, appunto, il problema del moto locale.
Dopo aver discusso, in terza giornata, del moto equabile (uniforme) e di quello naturalmente (uniformemente) accelerato, nella quarta si affronta il problema del moto dei proiettili.

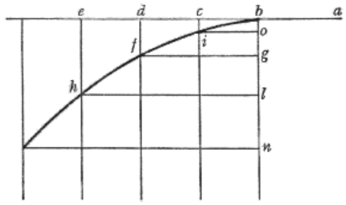
Salviati introduce così la discussione: "Attempo arriva ancora il Sig. Simplicio; però senza interpor quiete, venghiamo al moto: ed ecco il testo del nostro Autore."

Salviati. *Immagino di avere un mobile lanciato su un piano orizzontale, rimosso ogni impedimento: già sappiamo, per quello che abbiamo detto più diffusamente altrove, che il suo moto si svolgerà equabile e perpetuo sul medesimo piano, qualora questo si estenda all'infinito; se invece intendiamo [questo piano] limitato e posto in alto, il mobile, che immagino dotato di gravità, giunto all'estremo del piano e continuando la sua corsa, aggiungerà al precedente movimento equabile e indelebile quella propensione all'ingiù dovuta alla propria gravità: ne nasce un moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto deorsum naturalmente accelerato, il quale [moto composto] chiamo proiezione. Ne dimostreremo parecchie proprietà: la prima delle quali sia [la seguente].*

TEOREMA 1. PROPOSIZIONE 1
Un proietto, mentre si muove di moto composto di un moto orizzontale equabile e di un moto deorsum naturalmente accelerato, descrive nel suo movimento una linea semiparabolica.

Dopo un breve dialogo tra i personaggi volto a richiamare alcune proprietà della parabola come riportate nel testo di Apollonio, Salviati procede alla lettura della dimostrazione.

Ora possiamo ripigliare il testo, per vedere in qual maniera ei vien dimostrando la sua prima proposizione, dove egli intende di provarci la linea descritta dal mobile grave, che mentre ci descende con moto composto dell'equabile orizontale e del naturale descendente, sia una semiparabola.



Si intenda la linea orizzontale ossia il piano ab posto in alto, e un mobile si muova su di esso da a in b di moto equabile; mancando ora il sostegno del piano in b, sopravvenga al medesimo mobile, per la propria gravità, un moto naturale deorsum secondo la perpendicolare bn. Si intenda inoltre che la linea be, la quale prosegue il piano ab per diritto, rappresenti lo scorrere del tempo, ossia [ne costituisca] la misura, e su di essa si segnino ad arbitrio un numero qualsiasi di porzioni di tempo eguali, bc, cd, de; inoltre dai punti b, c, d, e si intendano condotte linee equidistanti dalla perpendicolare bn: sulla prima di esse si prenda una parte qualsiasi ci; sulla [linea] successiva se ne prenda una quattro volte maggiore, df; [sulla terza,] una nove volte maggiore, eh; e così di séguito sulle altre linee secondo la proporzione dei quadrati delle [porzioni di tempo] cb, db, eb, o vogliam dire in duplicata proporzione delle medesime. Se poi intendiamo che al mobile, il quale si muove oltre b verso c con moto equabile, si aggiunga un movimento di discesa perpendicolare secondo la quantità ci, nel tempo bc [esso mobile] si troverà situato nell'estremo i. Ma continuando a muoversi, nel tempo db, cioè [in un tempo] doppio di bc, sarà disceso per uno spazio quattro volte maggiore del primo spazio ci; e parimenti, il successivo spazio eh, percorso nel tempo be, sarà nove,sì che risulterà manifesto che gli spazi eh, df, ci stanno tra di loro come i quadrati delle linee eb, db, cb.
Similmente si dimostrerà che, preso un numero qualsiasi di particole di tempo eguali di qualunque grandezza, i punti, che il mobile mosso di un simile moto composto occuperà in quei tempi, si troveranno su una medesima linea parabolica. È dunque manifesto quello che ci eravamo proposti.

A questo punto Sagredo e Simplicio riportano alcune perplessità sul risultato ottenuto dall'Autore, a cui fa seguito la risposta di Salviati.

Sagredo. *Non si può negare che il discorso sia nuovo, ingegnoso e concludente, argomentando ex suppositione, supponendo cioè che il moto traversale si mantenga sempre equabile, e che il naturale deorsum parimente mantenga il suo tenore, d'andarsi sempre accelerando secondo la proporzion duplicata de i tempi, e che tali moti e loro velocità, nel mescolarsi, non si alterino perturbino ed impedischino, sì che finalmente la linea del proietto non vadia, nella continuazion del moto, a degenerare in un'altra spezie: cosa che mi si rappresenta come impossibile. Imperò che, stante che l'asse della parabola nostra, secondo 'l quale noi supponghiamo farsi il moto naturale de i gravi, essendo perpendicolare all'orizonte, va a terminar nel centro della terra; ed essendo che la linea parabolica si va sempre slargando dal suo asse; niun proietto andrebbe già mai a terminar nel centro, o, se vi andrebbe, come par necessario, la linea del proietto tralignerebbe in altra, diversissima dalla parabolica.*
Simplicio. *Io a queste difficoltà ne aggiungo dell'altre: una delle quali è, che noi supponghiamo che il piano orizontale, il quale non sia né acclive né declive, sia una linea retta, quasi che una simil linea sia in tutte le sue parti egualmente distante dal centro, il che non è vero; perché, partendosi dal suo mezo, va verso le estremità sempre più e più allontanandosi dal centro, e però ascendendo sempre; il che si tira in conseguenza, essere impossibile che il moto si perpetui, anzi che né pur per qualche spazio si mantenga equabile, ma ben sempre vadia languendo. In oltre, è, per mio credere, impossibile lo schivar l'impedimento del mezo, sì che non levi l'equabilità del moto trasversale e la regola dell'accelerazione ne i gravi cadenti.*

Dalle quali tutte difficoltà si rende molto improbabile che le cose dimostrate con tali supposizioni incostanti possano poi nelle praticate esperienze verificarsi.

Salviati. *Tutte le promosse difficoltà e instanze son tanto ben fondate, che stimo essere impossibile il rimuoverle, ed io, per me, le ammetto tutte, come anco credo che il nostro Autore esso ancora le ammetterebbe; e concedo che le conclusioni così in astratto dimostrate si alterino in concreto, e si falsifichino a segno tale, che né il moto trasversale sia equabile, né l'accelerazione del naturale sia con la proporzion supposta, né la linea del proietto sia parabolica, etc.: ma ben, all'incontro, domando che elle non contendano al nostro Autor medesimo quello che altri grandissimi uomini hanno supposto, ancor che falso. […]*
Che quando nelle opere praticali si avesse a tener conto di simili minuzie, bisognerebbe cominciare a riprendere gli architetti, li quali col perpendicolo suppongono d'alzar le altissime torri tra linee equidistanti. Aggiungo qui, che noi possiamo dire che Archimede e gli altri supposero nelle loro contemplazioni, esser costituiti per infinita lontananza remoti dal centro, nel qual caso i loro assunti non erano falsi, e che però concludevano con assoluta dimostrazione.
Quando poi noi vogliamo praticar in distanza terminata le conclusioni dimostrate col suppor lontananza immensa, doviamo diffalcar dal vero dimostrato quello che importa il non esser la nostra lontananza dal centro realmente infinita. […]
Quanto poi al perturbamento procedente dall'impedimento del mezo, questo è più considerabile, e, per la sua tanto moltiplice varietà, incapace di poter sotto regole ferme esser compreso e datone scienza; atteso che, se noi metteremo in considerazione il solo impedimento che arreca l'aria a i moti considerati da noi, questo si troverà perturbargli tutti, e perturbargli in modi infiniti, secondo che in infiniti modi si variano le figure, le gravità e le velocità de i mobili. […] De i quali accidenti di gravità, di velocità, ed anco di figura, come variabili in modi infiniti, non si può dar ferma scienza: e però, per poter scientificamente trattar cotal materia, bisogna astrar da essi, e ritrovate e dimostrate le conclusioni astratte da gl'impedimenti, servircene, nel praticarle, con quelle limitazioni che l'esperienza ci verrà insegnando. E non però piccolo sarà l'utile, perché le materie e lor figure saranno elette le men soggette a gl'impedimenti del mezo, quali sono le gravissime e le rotonde, e gli spazii e le velocità per lo più non saranno sì grandi, che le loro esorbitanze non possano con facil tara esser ridotte a segno; anzi pure ne i proietti praticabili da noi, che siano di materie gravi e di figura rotonda, ed anco di materie men gravi e di figura cilindrica, come frecce, lanciati con frombe o archi, insensibile sarà del tutto lo svario del lor moto dall'esatta figura parabolica.

2) Keplero

Astronomia Nova seu physica coelestis (1609)

Ci troviamo nel cuore dell'opera astronomica di Keplero, al cui interno vengono descritte le prime due leggi.

Per la prima legge ("I pianeti si muovono nello spazio di moto ellittico, e il sole occupa uno dei due fuochi di tale ellisse"), Keplero parte da una congettura precedente, condizione per lui fondamentale: considerare il Sole come centro del sistema solare e come causa del movimento della Terra e degli altri pianeti.

Egli è infatti un caldeggiatore della teoria eliocentrica, basata sul movimento dei pianeti intorno al Sole.

Il lavoro di Keplero sarà totalmente basato sull'osservazione dell'orbita di Marte, da lui tratteggiato come "un nemico che da tempo sfugge beffardo a chi vorrebbe indovinarne il moto", e già definito da autori precedenti come "l'astro inosservabile". Convinto di poter lavorare alla ricerca dell'orbita di Marte in pochi giorni, impiegherà quasi 5 anni, ma riuscirà a fornire le 3 leggi astronomiche che ancora oggi sono capisaldi della nostra astronomia.

L'astronomo lavorerà sulle osservazioni di Tycho Brae e sulle proprie, abbandonando le precedenti che basavano le loro leggi sul "Sole medio" (un punto ideale) e non sul Sole vero (ossia il punto nel quale il Sole si trova fisicamente).

Con i dati trovati, inizialmente suppone di poter considerare con buona approssimazione un'orbita circolare del pianeta rosso intorno al Sole, fino al capitolo 56, nel quale scrive:

<u>Capitolo 56</u>

Mentre resto in modo ansioso all'interno di questo ragionamento, mentre reputo che nel capitolo 45 non è stato detto quasi nulla, e così che il mio trionfo riguardo a Marte sia stato del tutto futile, per caso capito nella secante dell'angolo 5° 18', che è la misura dell'equazione ottica massima. Vedendo che questa è 100429, in questo caso, risvegliato quasi dal sonno, guardando la nuova luce, così ho iniziato a ragionare. E dunque se davanti alla secante il raggio è impiegato nella lunghezza media, accade ciò che le osservazioni persuadono.

Di nuovo il lettore percorra il capitolo 39. Troverà lì, che già quello che prima deve essere discusso per cause naturali, qui le osservazioni lo testimoniano ulteriormente, è chiaro che sembra coerente, che il pianeta nel diametro quasi dell'epiciclo tenda infinitamente verso il sole, percorrendo una qualche orbita.

Troverà anche, che nulla più di ciò che assumeremo contravviene a questa sentenza, ciò che ora assumevamo rappresentante un cerchio perfetto, siamo costretti a considerare diverse le parti delle orbite γι e λζ [..]

Dunque, ora, negata l'orbita circolare del pianeta, [..] ne consegue, che queste parti di librazioni, considera che siano uguali γκ e μζ. Per questo motivo il capitolo 39 che a lungo ci aveva tormentato, ormai ci dà ragione nell'argomentazione della verità ormai compresa.

Questo, con l'esempio di una sola anomalia, ho concluso in modo generale riguardo a tutti, questo concetto ancora non seguiva da questa sola misurazione, ma era necessario che fosse stabilito con frequenti osservazioni.

Nelle osservazioni del capitolo 53 non è necessario che sia messo a capo la stessa cosa. Infatti, ho adoperato queste distanze di Marte dal Sole per calcolare i luoghi apparenti di Marte, ho seguito queste misurazioni prima di questa col metodo della librazione. Saranno dunque giuste poiché sono rappresentate attraverso quelle osservazioni. Vedi dunque, per ogni ambito eccentrico con frequentissime e certissime osservazioni che queste distanze diametrali sono confermate, trovate a priori nel capitolo 39.

In questo capitolo e nei successivi, trova un moto che "non può essere un cerchio", ma che deve essere di forma ovale. Non collega subito tale moto all'ellisse, collocando il Sole non al centro, ma in un punto chiamato "eccentrico".

<u>Capitolo 57</u>

Appare allora dalle certissime osservazioni, che le vie dei pianeti in aria non siano dei cerchi, ma delle figure ovali [..]

Ottenuto già questo fatto, non a priori ma attraverso le osservazioni come prima ho detto, già le osservazioni procederanno in maniera migliore secondo la regola fisica.

Suppone quindi che il moto del pianeta attorno al Sole possa seguire diverse forme "di tipo ovale", fra cui una da lui chiamata "buccosa" (termine usato per indicare le "guance che sbuffano", forma che gli viene ricordata dal movimento del pianeta). Le osservazioni da lui effettuate lo portano a dubitare di tutte le forme ovali, fino ai risultati del capitolo 58, nel quale troverà un risultato che deve essere una via di mezzo fra un cerchio e un'ellisse.

Capitolo 58

Quando lo stesso seno dell'arco di fronte a GC, oppure dopo la moltiplicazione, tolta LE da GA, mostra la giusta distanza AE: ero persuaso da questi indizi, l'altro termine stesso AE non trovandosi nella linea DC (nel punto F), cosa che mi sembrava la più vera, ma nella linea DB nel punto I: dal centro A, con la distanza AE, avrei condotto l'arco EIF, che taglia DB in I. Fosse dunque AI secondo questa intuizione legata alla distanza, per quanto riguarda la posizione e la lunghezza; e davvero con l'anomalia IAG con la stessa misura. Dunque è chiaro il fatto che l'angolo EIF tagli la linea DC in un luogo superiore, cioè in F, e così dell'angolo IAG e FAG saranno differenti secondo la quantità IAF.

Sbagliai allora, a sostituire la linea AI per AF. Trovai il primo errore dall'esperienza.

E così con differenti equazioni dal vero ho iniziato di nuovo a considerare verissime queste distanze AE e l'orbita del pianeta LE secondo la colpa, della quale il mio metodo era colpevole, che guardava I al posto di F. Che cosa per molti? La verità stessa e la natura delle cose eliminata e alla quale è stato ordinato di essere abbandonata, di nuovo ritorna all'interno per la parte posteriore e sotto un'apparenza diversa è stata trovata da me.

*Dirò, una volta mandate via le librazioni del diametro LE, ho iniziato a richiamare l'ellisse, considerando completamente che io dovessi seguire questa ipotesi così a lungo considerata diversa dalle librazioni, poiché coincidono chiaramente, come nel capitolo seguente sarà dimostrato: se non che, le cose che ho sbagliato precedentemente nel metodo, con questo ragionamento saranno corrette, e sarà utilizzato F al posto di I, così come si deve. È stata così la mia argomentazione all'interno dei capitoli 49, 50 e 56. (*La figura da lui trovata viene paragonata, senza nominarlo, all'ellisse descritta da Archimede)

Il cerchio del capitolo 48 sbaglia per eccesso, l'ellisse del capitolo 45 sbaglia per difetto. E questo eccesso e questo difetto sono uguali. Ma tra il circolo e l'ellissi nulla sta in mezzo, se non un'altra ellisse. Dunque, l'ellissi è l'orbita del pianeta; e la lunula tagliata dal semicerchio possiede una larghezza dimezzata rispetto a quella precedente, di circa 429.

Poiché, se l'orbita del pianeta fosse l'ellissi sarebbe abbastanza chiaro che non può essere preso I al posto di F, poiché se ciò avviene l'orbita del pianeta è resa "buccosa".

È chiaro dunque, la via è "buccosa" non dunque un'ellissi, ma poiché l'ellisse fornisce giuste equazioni, e dunque questa forma "buccosa" secondo giustizia fornisce ingiustizia.

Molto più lo scrupolo era massimo, poiché forse, considerando fino alla pazzia, e guardando con circospezione, non potevo trovare il motivo per cui il pianeta, al quale con così grande probabilità, con il consenso delle distanze osservate, perché il pianeta volesse andare piuttosto secondo la via ellittica, secondo gli indizi delle equazioni. O me ridicolo! Di conseguenza come l'orbita del diametro non possa essere la via secondo l'ellissi.

E così a me questa notizia pone non poco, che la giusta librazione si presenti come un'ellisse, e così si mostra nel capitolo successivo: come allo stesso tempo dimostreremo, non ho lasciato nessuna figura del pianeta dell'orbita, eccezion fatta per quella dell'ellissi in modo perfetto; con queste dimostrazioni derivate da principi fisici derivati con osservazioni dell'esperienza e ipotesi allegate in questo capitolo.

Poco più avanti Keplero scrive:

Quindi l'edificio che abbiamo innalzato sulle fondamenta delle osservazioni di Tycho l'abbiamo rovesciato [..]. Fu questa la punizione per aver seguito gli assiomi plausibili, ma in realtà sbagliati, dei grandi uomini del passato.

Nel capitolo 59, Keplero, proseguendo la sua analisi, riesce a dimostrare geometricamente che l'area del settore dell'ellisse determinata dalla posizione del pianeta si può trovare perché proporzionale all'area del cerchio che ha come raggio il semiasse positivo dell'ellisse. Tale valore si abbina bene con il tempo secondo le osservazioni ad occhio nudo di Tycho Brahe.

I suoi studi conducono così, inevitabilmente, alla formulazione di quella che viene oggi chiamata la "seconda legge di Keplero"

Parte dalla costruzione di un'ulteriore curva, che tenga conto del fatto che l'orbita non è un cerchio perfetto. Volendo approssimare l'orbita ad una curva nota, sceglie di identificarla con l'ellisse ricavata nei capitoli precedenti, e chiama "lunula" l'area compresa fra la curva dell'orbita approssimata dall'ellisse e fra quella approssimata dal cerchio. "Invoca" un geometra che possa calcolare l'area della lunula trovata, allo scopo di normalizzare la figura che rappresenta il tempo impiegato a percorrere tratti dell'orbita.

Questa è la mia sentenza. Non meno quindi sembrerà di avere queste dimostrazioni di bellezza geometrica, tanto più esorto gli studiosi di geometria affinchè risolvano per me questo problema:

Data l'area del semicerchio, e dato il punto del diametro, trovare l'arco e l'angolo per quel punto, con le gambe di questo angolo e con quale arco venga considerato una volta data l'area. Oppure: tagliare l'area del semicerchio da qualunque punto del diametro in questo dato ragionamento.

Mi è sufficiente credere, ma non è possibile risolverlo a priori, a causa della differenza di arco e seno.

A me che sbaglio, chiunque mi avrà mostrato la via, costui sarà per me un grande Apollonio.

Anche tale via sembra senza sbocco, ma la riflessione sulla seconda legge si intreccia sempre di più, capitolo dopo capitolo, con la strada che lo porterà alla scoperta della forma ellittica dell'orbita, ossia alla prima legge.

Nel capitolo 59 mette in luce la validità dei propri ragionamenti nel caso di un'orbita perfettamente ellittiche, fino ad arrivare al capitolo 60, nel quale si convince di una reale equivalenza fra la seconda legge e l'ipotesi fisica, nominando anche la seconda legge:

<u>Capitolo 60</u>

Il mio primo errore fu di supporre che il percorso del pianeta fosse un cerchio perfetto, principio che tanto più mi fece perdere tempo, tanto più ben si intrecciava con la dottrina di tutti i filosofi e sembrava utile in particolare per la metafisica.

Poiché nei capitoli 56, 57, 58, il pianeta nel diametro, esteso verso il Sole, si pone ad avvicinarsi verso il Sole e da questo ad allontanarsi, per questo si ha l'orbita ellittica; ma nei singoli punti dell'orbita si fanno tanti indugi quante sono le distanze di questo medesimo punto dal Sole: accade a noi, cosa opportunissima, una sintesi del capitolo 59 precedente, per riprendere una somma di alcuni indugi.

È stato infatti mostrato, una volta abbandonata dal cerchio l'ellissi più lunga perpendicolare al diametro, descritta nel cerchio (sia a priori il disegno KL sostituito da AC), così come divide l'ellissi in M, e posto il Sole in N, la somma di tutte le distanze dal Sole N nell'arco AM si trova nell'area AKM.

Dunque, posto l'arco e l'ellissi AM, che ha denominazione dall'arco del cerchio AK, si dà l'area AHK, l'arco che taglia AK, dal quale l'arco e questo settore sono misurati in quella misura, nella quale tutta l'area del *cerchio è 360° [..] Per forza KL sta verso tutto il seno EH, così l'area HKN sta all'area HEN, come dimostrato nel capitolo 40 [..] La forma che incontriamo qua, dunque, una volta conosciuta l'area HEN, è così facilissimo trovare con la regola della proporzione l'area HKN. Come infatti EH sta a KL così NEH sta all'area NKH, ovvero il valore di questo in gradi, minuti e secondi; e queste cose aggiunte al valore KHA risultano KNA la misura del tempo, che il pianeta compie in AM.*

Questo facilmente chiunque lo capisce, che cosa deve essere mutato all'interno del secondo semicerchio. Viceversa, una volta data l'eccentricità e misurata insieme, è data anche l'anomalia eccentrica: e dunque procediamo sia secondo dimostrazione sia secondo analisi, con un po'più di lavoro.

Il capitolo termina con la descrizione dei due metodi utilizzati da Keplero per dimostrare la sua congettura: un metodo "dimostrativo" e un metodo per analisi.

In seguito alla formulazione della seconda legge, egli potè formalizzare la prima e ritrovare la forma ellittica nel movimento dei pianeti. Keplero scoprì prima tale legge, associandola al movimento dei pianeti e verificandone l'effettiva efficacia con i dati forniti dalle osservazioni di Brahe.

L'accettazione dell'ipotesi dell'orbita ellittica costò a Keplero un grande sforzo (quasi per un anno si tormentò sull'ipotesi "buccosa"), ma portò infine all'accettazione di tale moto.

3) Newton

L'ultimo grande studioso che analizziamo è Isaac Newton.

Già Keplero aveva proposto la divisione dell'astronomia in 3 parti: l'astronomia sferica che spiega i fenomeni celesti sulla base dell'ipotesi che la terra stia al centro di una sfera della quale gli astri occupano la superficie, l'astronomia teorica che espone i diversi rapporti dei corpi celesti fra loro e ha come oggetto la descrizione della forma fisica dell'universo, e l'astronomia fisica, che ha per oggetto la scoperta dei principi dei moti celesti e la loro determinazione mediante i principi della meccanica. Newton tratterà soprattutto di quest'ultima.

Newton I Principia (1687)

Scopo dei "Principia" è ricavare le leggi che regolano il moto dei corpi sulla Terra e quelle che regolano i moti planetari, a partire dalla legge fondamentale di gravitazione. Il punto essenziale è che dalla legge di gravitazione si deducono le tre leggi di Keplero, facendo uso dei principi della dinamica.

I "Principia" sono divisi in 3 libri, dei quali i primi due descrivono i fenomeni naturali e il terzo i fenomeni celesti.

Scrive nella prefazione all'opera:

Noi invece esaminiamo non le arti ma la filosofia, e scriviamo non sulle potenze manuali ma su quelle naturali, e trattiamo soprattutto quelle cose che riguardano la gravità, la leggerezza, la forza elastica, la resistenza dei fluidi e le forze di ogni genere sia attrattive che repulsive. Per questa ragione proponiamo questi nostri principi matematici di filosofia. Sembra infatti che tutta la difficoltà della filosofia consista nell'investigare le forze della natura a partire dai fenomeni del moto e dopo nel dimostrare i restanti fenomeni a partire da queste forze. A questo mirano le proposizioni generali dalle quali abbiamo trattato nel libro primo e secondo. Nel terzo libro, invero, ho esposto un esempio di ciò al fine di spiegare il sistema del mondo. Ivi, infatti, dai fenomeni celesti, mediante le proposizioni dimostrate matematicamente nei libri precedente, vengono derivate le forze della gravità, per effetto delle quali i corpi tendono verso il sole e i singoli pianeti. In seguito, da queste forze, sempre mediante proposizioni matematiche, vengono dedotti i moti dei pianeti, delle comete, della luna e del mare. Volesse il cielo che fosse lecito dedotte i restanti fenomeni della natura dai principi della meccanica col medesimo genere di argomentazione. Infatti, molte cose mi spingono a sospettare che essi tutti possano dipendere da certe forze per effetto delle quali le particelle dei corpi, per cause ancora non conosciute o si urtano fra di loro e si connettono secondo figure regolari o si respingono e recedono l'una dall'altra; per le quali forze ignote, i filosofi fin qui invano indagarono la natura. Spero in verità che, o a questo modo di filosofare, o ad un altro più vero, i principi qui posti possano apportare qualche luce.

Nel primo libro, enuncia alcune definizioni, e nella quinta descrive quello che verrà chiamato "esperimento mentale" o "*Un Gedankenexperiment"*

PRIMO LIBRO – DEFINIZIONE 5

La forza centripeta è la forza per effetto della quale i corpi sono attratti, o sono spinti, o comunque tendono verso un qualche punto come verso un centro.

Di questo genere è la gravità, per effetto della quale i corpi tendono verso il centro della terra; la forza magnetica, per effetto della quale il ferro va verso la calamita; e quella forza, qualunque essa sia, per effetto della quale i pianeti sono continuamente deviati dai moti rettilinei e sono costretti a ruotare secondo linee curve.

Una pietra, fatta ruotare nella fionda, tende ad allontanarsi dalla mano che si muove in cerchio; col suo sforzo, essa tende la fionda tanto più fortemente quanto maggiore è la velocità di rotazione, e allorché non è più trattenuta, vola via. Chiamo centripeta la forza, contraria a tale sforzo, per effetto della quale la fionda di continuo riporta la pietra verso la mano e la trattiene entro un cerchio, giacché è diretta verso la mano come verso il centro di un cerchio. Identica è la norma di tutti i corpi che si muovono secondo una circonferenza. Tentano tutti di allontanarsi dai centri delle orbite; e se non vi fosse una qualche forza contraria a quella tendenza, per effetto della quale sono frenati e trattenuti nelle orbite, e che per questo chiamo centripeta, se ne andrebbero via con moto rettilineo uniforme. Un proiettile, se non fosse per la forza di gravità e se venisse eliminata la resistenza dell'aria non ricadrebbe sulla terra, ma se ne andrebbe via nei cieli con moto rettilineo uniforme. A causa della propria gravità tale proiettile è di continuo deviato dalla direzione rettilinea e di continuo piegato verso la Terra, e ciò in misura maggiore o minore, proporzionalmente alla propria gravità e alla velocità del moto. Quanto minore sarà la gravità, in relazione alla quantità di materia, o maggiore la velocità con cui viene lanciato, tanto meno devierà dalla sua direzione rettilinea, e tanto più a lungo andrà avanti. Se una palla di piombo scagliata dalla cima di un monte per mezzo di un cannone e con una velocità data, proseguisse secondo una linea orizzontale lungo una linea curva fino alla distanza di due miglia prima di ricadere sulla Terra, essa palla, purché si eliminasse la resistenza dell'aria, con velocità doppia andrebbe lontano del doppio, e con una velocità decupla andrebbe quasi dieci volte più lontano. E aumentando la velocità si potrebbe aumentare a piacere la distanza alla quale può essere scagliata, e diminuire la curvatura della linea descritta, cosicché cadrebbe ad una distanza di 10, 30 o 90 gradi, oppure potrebbe descrivere un'orbita intorno alla Terra, o infine andarsene nei cieli e proseguire il suo moto rettilineo all'infinito.

Un Gedankenexperiment

Per la stessa ragione per cui un proiettile può essere piegato lungo un'orbita dalla forza di gravità e viaggiare intorno alla Terra, anche la Luna, purché sia pesante, o per effetto della forza di gravità, o per effetto di qualche altra forza che la spinga verso la Terra, può essere deviata dal cammino rettilineo verso la Terra, e può essere piegata lungo una propria orbita: e senza tale forza la Luna non vi potrebbe essere trattenuta in alcun modo. Se questa forza fosse minore del dovuto, la Luna non devierebbe abbastanza dalla sua direzione rettilinea; se tale forza fosse maggiore del dovuto la devierebbe più del necessario e la tirerebbe via dalla sua orbita verso la Terra. Viene richiesto per l'appunto che la forza sia di una giusta grandezza ed è compito dei matematici determinare la forza per effetto della quale un corpo può essere esattamente trattenuto in un'orbita data con una velocità data; e, reciprocamente, determinare la curva lungo la quale un corpo, una volta proiettato da un qualunque luogo con una data velocità, viene deviato da una data forza. La quantità di questa forza centripeta è, inoltre, di tre generi: assoluta, acceleratrice, motrice.

Presentiamo infine un estratto del libro terzo, nel quale Newton si occupa delle leggi che regolano i pianeti: nel primo brano si trova descritta una di quelle che lo studioso chiama “regole del filosofare”, che illustrano chiaramente le modalità di pensiero e di ragionamento dell’autore; nel secondo brano troviamo una proposizione e la sua dimostrazione, in maniera da rendere chiara la modalità descritta dal primo brano

REGOLE DEL FILOSOFARE – REGOLA III

Le qualità dei corpi che non possono essere aumentate e diminuite, e quelle che appartengono a tutti i corpi sui quali è possibile impiantare esperimenti, devono essere ritenute qualità di tutti i corpi.

Infatti, le qualità dei corpi non si conoscono altrimenti che per mezzo di esperimenti, e perciò devono essere giudicate generali tutte quelle che, in generale, concordano con gli esperimenti; e quelle che non possono essere diminuite non possono essere nemmeno sottratte. Certamente, contro il progresso continuo degli esperimenti non devono essere inventati sconsideratamente dei sogni, né ci si deve allontanare dall’analogia della natura, dato che essa suole essere semplice e sempre conforme a sé. L’estensione dei corpi non si conosce altrimenti che per mezzo dei sensi, né è percepita in tutti; ma in quanto spetta a tutte le cose sensibili, allora viene affermata di tutte le cose. Abbiamo sperimentato che molti corpi sono duri. Ora, la durezza del tutto nasce dalla durezza delle parti, quindi a buon diritto, concludiamo che non soltanto sono dure le particelle indivise di quei corpi che vengono percepiti ma anche di tutti gli altri. Deduciamo che tutti i corpi sono impenetrabili non con la ragione, ma col senso.

Gli oggetti che maneggiamo vengono riscontrati impenetrabili, ne concludiamo che l’impenetrabilità è una proprietà dei corpi in generale. Che i corpi siano mobili, e che a causa di forze qualsiasi (che chiamiamo forze d’inerzia) perseverino nel moto o nella quiete, deduciamo da queste proprietà che dei corpi osservabili. L’estensione, la durezza, l’impenetrabilità, la mobilità e la forza d’inerzia del tutto nasce dall’estensione, dalla durezza, dalla impenetrabilità, dalla mobilità e dalle forze d’inerzia delle parti; di qui concludiamo che tutte le minime parti di tutti i corpi sono estese e dure, impenetrabili, mobili, e dotate di forze d’inerzia.

E questo è il fondamento dell’intera filosofia.

Infine, se in generale, per mezzo di esperimenti e di osservazioni astronomiche, risultasse che tutti i corpi che girano intorno alla Terra sono pesanti, e ciò in relazione alla quantità di materia in ciascuno di essi, che la Luna è pesante verso la Terra in relazione alla propria quantità di materia, e il nostro mare, a sua volta è pesante verso la Luna, e che tutti i pianeti sono pesanti l’uno rispetto all’altra, e che la pesantezza delle comete verso il Sole è identica, allora, si dovrà dire che per questa regola tutti i corpi gravitano vicendevolmente l’uno verso l’altro. Infatti, l’argomento tratto dai fenomeni circa la gravità universale sarà più forte di quello circa l’impenetrabilità dei corpi, sulla quale non abbiamo nessuno esperimento e nessuna osservazione fatta direttamente sui corpi celesti. Tuttavia, non affermo affatto che la gravità sia essenziale ai corpi. Con forza insita intendo la sola forza di inerzia. Questa è immutabile. La gravità allontanandosi dalla Terra, diminuisce.

PROPOSIZIONE VI. TEOREMA VI. LIBRO III

Tutti i corpi gravitano verso i singoli pianeti, ed i loro pesi verso un qualunque medesimo pianeta, ad uguali distanze dal centro del pianeta, sono proporzionali alla quantità di materia contenuta in ciascuno di essi.

La caduta di tutti i gravi sulla Terra (tenuto conto dell’ineguale ritardo che nasce dalla scarsissima resistenza dell’aria) avviene in tempi uguali, come già altri osservarono; ed è possibile notare con grande precisione l’uguaglianza di tali tempi nei pendoli. Ho tentato l’esperimento con pendoli d’oro, d’argento, di piombo, di vetro, di sabbia, di sale, di legno, d’acqua e di frumento. Preparavo due recipienti di legno, rotondi ed *uguali. Riempivo l'uno di legno, e all'altro centro di oscillazione sospendevo (nella misura del possibile esattamente) un uguale peso d'oro. I recipienti, che pendevano da fili uguali, lunghi undici piedi, costituivano i pendoli, assolutamente uguali quanto al peso, alla figura e alla resistenza dell'aria; ed impresse uguali oscillazioni, una volta posti uno vicino all'altro, andavano e tornavano insieme per lunghissimo tempo. Perciò, la quantità di materia nell'oro (per i corollari 1 e 6 della prop. XXIV del libro) stava alla quantità di materia nel legno, come l'azione della forza motrice in tutto l'oro alla medesima azione in tutto il legno; ossia, come il peso dell'uno stava al peso dell'altro. E così per i rimanenti. Mediante questi esperimenti potei chiaramente apprendere che la differenza di materia in corpi dello stesso peso è minore della millesima parte di tutta la materia. Non c'è dubbio, perciò, che la natura della gravità sui pianeti è identica a quella della gravità sulla Terra. Si immagini, infatti, che questi corpi terrestri siano sollevati fino all'orbita della Luna, ed insieme con la Luna, privata di ogni movimento, siano lasciati andare affinché cadano nello stesso tempo sulla Terra; allora per le cose prima dette, è certo che insieme con la Luna descriveranno spazi uguali in tempi uguali; e ciò perché stanno alla quantità di materia nella Luna, come i propri pesi al peso della stessa. Inoltre, poiché i satelliti di Giove ruotano in tempi che sono in ragione della potenza 3/2 delle distanze dal centro di Giove; per la qual cosa, ad uguali distanze da Giove, le loro gravità acceleratrici risulteranno uguali. Cosicché, cadendo in tempi uguali, da uguali altezze, descriverebbero spazi uguali; come avviene per i gravi su questa nostra Terra. E per lo stesso argomento, i pianeti che ruotano intorno al Sole, lasciati cadere da uguali distanze dal Sole, descriverebbero, durante la propria caduta verso il Sole, spazi uguali in tempi uguali*

Bibliografia

[1] Werner Blum e Rita Borromeo Ferri. Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *J. Math. Model. Appl.*, 1(1):45–58, 2009.

[2] Werner Blum e Dominik Leiß. “Filling Up”- the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *CERME 4–Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pagine 1623–1633, 2005.

[3] Laura Branchetti, Alessia Cattabriga, e Olivia Levrini. Interplay between mathematics and physics to catch the nature of a scientific breakthrough: The case of the blackbody. *Phis. Rev. Phis. Edu. Res.*, 15(2):020130, 2019.

[4] Laura Branchetti e Olivia Levrini. Disciplines and interdisciplinarity in STEM education to foster scientific authenticity and develop epistemic skills. *Paper presented at “ESERA2019”*, 2019.

[5] Stephen G. Brush. M s. *Sci. Edu.*, 24(5-6):495–513, 2015.

[6] Leo Corry. *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898–1918): From Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik*, volume 10. Springer Science & Business Media, 2004.

[7] Guidobaldo Del Monte. *Meditatiunculae Guidi Ubaldi Marchionibus Montis S. Mariae de rebus mathematicis.* Bibliothèque Nationale de France (Paris), Lat.

[8] Paul Adrien Maurice Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *P. R. Soc. London*, 133(821):60–72, 1931.

[9] Paul Adrien Maurice Dirac. Xi.—The Relation between Mathematics and Physics. *P. Roy. Soc. Edinb.*, 59:122–129, 1940.

[10] William H. Donahue. *New Astronomy.* Cambridge University Press, 1992.

[11] Riccardo Dri. *Dei tre tracolli: filosofia delle grandi metamorfosi che hanno cambiato la storia dell'umanità*, volume 3. Riccardo Dri, 2007.

[12] Arthur Stanley Eddington. *Relativity theory of protons and electrons.* CUP Archive, 1936.

[13] Albert Einstein. Geometry and experience. Translation by Sonja Bargmann of an expanded form of an Address to the Prussian Academy of Sciences in Berlin on January 27th, 1921. *Ideas and Opinions*, pagine 232–245, 1921.

[14] Albert Einstein. *Ideas and opinions.* New York: Three Rivers Press, 1982.

[15] Rita Borromeo Ferri. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2):86–95, 2006.

[16] Robert Frodeman, Julie Thompson Klein, e Roberto Carlos Dos Santos Pacheco. *The Oxford handbook of interdisciplinarity.* Oxford University Press, 2017.

[17] Galileo Galilei. *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali.* Gli Elsevirii, 1990.

[18] Yves Gingras. The creative power of formal analogies in physics: the case of Albert Einstein. *Sci. Edu.*, 24(5-6):529–541, 2015.

[19] Lena Hansson, Örjan Hansson, Kristina Juter, e Andreas Redfors. Reality–theoretical models–mathematics: A ternary perspective on physics lessons in upper-secondary school. *Sci. Edu.*, 24(5-6):615–644, 2015.

[20] Ricardo Karam. Introduction of the thematic issue on the interplay of physics and mathematics. *Sci. Edu.*, 24(5-6):487–494, 2015.

[21] Ricardo Karam e Olaf Krey. Quod erat demonstrandum: Understanding and explaining equations in physics teacher education. *Sci. Edu.*, 24(5-6):661–698, 2015.

[22] Johannes Kepler e Tycho Brahe. *Astronomia nova sev Physica coelestis, tradita commentariis de motibvs stellae Martis.* Anno Aerae Dionysianae.

[23] Gustav Kirchhoff. Über das verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. In *Von Kirchhoff bis Planck*, pagine 131–151. Springer, 1978.

[24] Tinne Hoff Kjeldsen e Jesper Lützen. Interactions between mathematics and physics: The history of the concept of function — teaching with and about nature of mathematics. *Sci. Edu.*, 24(5-6):543–559, 2015.

[25] Helge Kragh. Mathematics and physics: The idea of a pre-established harmony. *Sci. Edu.*, 24(5-6):515–527, 2015.

[26] Anna Lombardi. *Keplero - Una biografia scientifica.* Corriere della Sera, 2017.

[27] LGM Malgieri. *Il problema del corpo nero e l'origine dei quanti.* PhD thesis, Tesi di Laurea in Fisica Teorica, Universita degli studi di Bari Aldo Moro.

[28] Pierre Simon Marquis de Laplace. *Essai philosophique sur les probabilités.* Bachelier, 1825.

[29] Isaac Newton. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, (a cura di A. Pala), 1965.

[30] Max Planck. Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum. *VhDPG*, 2:238, 1900.

[31] Max Planck. On the law of the energy distribution in the normal spectrum. *Ann. Phys.*, 4(553):1–11, 1901.

[32] Max Planck. The genesis and present state of development of the quantum theory. *Nobel lecture*, 2:1–10, 1920.

[33] Max Planck. Über eine verbesserung der wienschen spektralgleichung. In *Von Kirchhoff bis Planck*, pagine 175–178. Springer, 1978.

[34] Susanne Prediger. "Aber wie sag ich es mathematisch?"- Empirische befunde und konsequenzen zum lernen von mathematik als mittel zur beschreibung von welt. In *Entwicklung naturwissenschaftlichen Denkens zwischen Phänomen und Systematik. Jahrestagung der GDCP, S*, pagine 6–20, 2010.

[35] Simon Rebsdorf e Helge Kragh. Edward Arthur Milne — The relations of mathematics to science. *Stud. Hist. Philos. M. P.*, 33(1):51–64, 2002.

[36] Edward F. Redish e Thomas J. Bing. Using math in physics: Warrants and epistemological frames. In *Girep-Epec & Phec*, pagina 71, 2009.

[37] Edward F. Redish e Eric Kuo. Language of physics, language of math: Disciplinary culture and dynamic epistemology. *SCI EDU*, 24(5-6):561–590, 2015.

[38] Paolo Rossi. *La nascita della scienza moderna in Europa.* Gius. Laterza & Figli Spa, 2015.

[39] Luisa Stagi. Il focus group come tecnica di valutazione. Pregi, difetti, potenzialità. *Rass. Ital. Val.*, 20:61–82, 2000.

[40] Jonathan Tuminaro e Edward F. Redish. Elements of a cognitive model of physics problem solving: Epistemic games. *Phis. Rev. Spec. Top-Ph.*, 3(2):020101, 2007.

[41] Olaf Uhden, Ricardo Karam, Pietrocola Mauricio, e Gesche Pospiech. Modelling mathematical reasoning in physics education. *Sci. Edu.*, 21(4):485–506, 2012.

[42] Eugene P. Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In *Mathematics and Science*, pagine 291–306. World Scientific, 1990.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare tutti coloro che mi hanno supportato e guidato nel mio percorso universitario. Innanzitutto desidero ringraziare la mia relatrice, la Professoressa Cattabriga, che mi ha pazientemente seguito e supportato nella stesura della tesi. Desidero ringraziarla per l'aiuto nella stesura del *Focus Group* - sul quale ho molto faticato nella ricerca di traduzioni dal latino e sulla scelta di brani corretti e funzionali -, per la pazienza avuta nelle correzioni dei vari capitoli e per il tanto tempo dedicatomi, permettendomi di laurearmi a luglio, in tempo per i concorsi.

Ringrazio la mia famiglia, i miei genitori e mia sorella, che tanto mi hanno supportato, non solo nel mio percorso di laurea magistrale, ma durante tutta la mia vita da studente. Desidero ringraziarli in particolare per le parole di conforto e per le spinte che mi hanno dato nei momenti di crisi, soprattutto in questi mesi un po' particolari nei quali siamo stati confinati in casa.

Desidero ringraziare anche la mia ragazza, che tanto mi è stata vicina con parole e gesti d'affetto, facendomi sempre sentire il suo appoggio anche durante le lunghe serate di studio e non facendomi mai sentire solo.

Un sentito ringraziamento va anche a tutti i miei amici, i ragazzi del mio gruppo parrocchiale, che spero di non aver troppo trascurato quando mi chiedevano di uscire, sentendosi rispondere che dovevo studiare. Vorrei ringraziarli per l'affetto che mi dimostrano sempre

Un ulteriore ringraziamento lo rivolgo ai colleghi del mio corso, con i quali si è creato un buon rapporto fin da subito e che mi hanno molto aiutato nella stesura di questa tesi. Senza di loro certamente non sarei riuscito a completarla. Rimanendo in ambito universitario vorrei ringraziare docenti e personale dell'Università di Bologna. Ho trovato un ottimo ambiente in cui studiare e una città che mi ha affascinato fin da subito.

Mi dispiace non poter terminare il mio percorso con la proclamazione all'università, ma vorrei comunque ringraziare chiunque sia presente, anche solo (e soprattutto, visti i tempi) con il pensiero, quest'oggi.