

ALMA MATER STUDIORUM - UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

# Effetti mareali sulla massa stellare della galassia sferoidale nana Fornax

Tesi di Laurea

Presentata da:  
**Giacomo Cherchi**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof. Carlo Nipoti**

Correlatori:  
**Dott. Francesco Calura**  
**Dott. Giuliano Iorio**

---

**Sessione I**  
**Anno Accademico 2019-2020**



# Indice

<b>Sommario</b>	<b>VII</b>
<b>Abstract</b>	<b>IX</b>
<b>1 Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1 Proprietà osservative della dSph Fornax . . . . .	3
1.1.1 Star Formation History e Chemical Evolution History di Fornax	5
1.2 Fornax e il mass budget problem . . . . .	7
<b>2 Equilibrio in sistemi non collisionali</b>	<b>11</b>
2.1 Tempi di rilassamento dinamico . . . . .	11
2.1.1 Tempo di rilassamento a due corpi . . . . .	12
2.1.2 Tempo di rilassamento violento . . . . .	14
2.2 Funzione di distribuzione . . . . .	15
2.2.1 Equazione non collisionale di Boltzmann (CBE) . . . . .	16
2.2.2 Teorema di Jeans . . . . .	16
2.2.3 DF ergodiche in sistemi sferici . . . . .	17
2.3 Funzione di probabilità . . . . .	18
<b>3 Sistemi stellari sferici e isotropi</b>	<b>21</b>
3.1 Modello di Hernquist . . . . .	21
3.1.1 DF del modello di Hernquist ergodico . . . . .	22
3.2 Modello di Plummer . . . . .	23
3.2.1 Sistemi sferici definiti dalla DF . . . . .	23
3.3 Applicazione: funzione di probabilità $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ . . . . .	25
<b>4 Modelli di galassie sferoidali nane costruiti con la funzione <math>\mathcal{P}_*(\mathcal{E})</math></b>	<b>27</b>
4.1 Modelli e set up . . . . .	28
4.2 Analisi: funzione di probabilità . . . . .	29
4.2.1 Modifiche ai profili di densità e massa . . . . .	32

<b>5</b>	<b>Il codice per simulazioni <i>N</i>-body FVFPS</b>	<b>35</b>
5.1	Poisson solver: somma diretta . . . . .	36
5.1.1	Softening . . . . .	36
5.2	Poisson solver: metodo gerarchico . . . . .	37
5.3	Integrazione temporale: metodo leapfrog . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Evoluzione dinamica di Fornax nella Milky Way</b>	<b>41</b>
6.1	Evoluzione della dSph isolata . . . . .	42
6.1.1	Risultati . . . . .	42
6.2	Evoluzione della dSph nel potenziale della MW . . . . .	43
6.2.1	Risultati . . . . .	45
6.3	Fornax: funzione di probabilità . . . . .	51
<b>7</b>	<b>Conclusioni</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>59</b>

# Elenco delle figure

1.1	Proiezioni di Aitoff delle coordinate galattiche relative alle galassie satellite della MW (pannello superiore); del sottogruppo M31 (blu, pannello centrale) e le galassie del Gruppo Locale isolate (verde, pannello centrale); delle galassie più vicine al Gruppo Locale che hanno distanze basate su popolazioni stellari risolte entro 3 Mpc (magenta, pannello inferiore) e dei gruppi di galassie vicine (grigio, pannello inferiore) [35].	2
1.2	Galassia sferoidale nana Fornax; credits: ESO/Digitized Sky Survey 2	5
1.3	Star Formation History (SFH) e Chemical Evolution History (CEH) complessiva della dSph Fornax suddivisa in fasce di età: giovane (a), intermedia (b) e vecchia (c). Nei pannelli centrali le stelle più giovani sono indicate con una linea <i>continua</i> mentre le più vecchie con una linea <i>tratteggiata</i> , in modo da mettere in evidenza l'effetto dell'età sulla CEH. Le barre d'errore associate allo Star Formation Rate (SFR) derivano dall'utilizzo di diversi diagrammi colore-magnitudine per lo studio delle popolazioni stellari [10]. . . . .	6
2.1	Schematizzazione geometrica dell'interazione tra due stelle in cui consideriamo una traiettoria rettilinea [6]. . . . .	12
3.1	Funzioni di distribuzione ergodiche che generano sistemi stellari con profili di densità Plummer (sinistra) ed Hernquist (destra). $M$ è la massa totale del sistema mentre $a$ è il raggio caratteristico. . . . .	22
4.1	Confronto dell'andamento analitico e numerico dei profili di densità (sinistra) e massa (destra) relativi alle realizzazioni $N$ -body con modello di Hernquist ( $M = 4.5 \times 10^7 M_{\odot}$ e $r_c = 0.9$ kpc) e Plummer ( $M_* = 4 \times 10^6 M_{\odot}$ e $b = 0.482$ kpc). . . . .	28

4.2	Confronto delle DF dei modelli Plummer (sinistra) e Hernquist (destra) calcolate numericamente tramite inversione di Eddington con le rispettive funzioni analitiche. I parametri $M$ ed $a$ si riferiscono ai valori delle masse e dei raggi scala delle rispettive realizzazioni. In questo caso ciascuna DF è calcolata assumendo che il sistema sia autogravitante e a una sola componente. . . . .	30
4.3	In figura sono mostrate le funzioni di distribuzione del modello Hernquist (pannello in alto a sinistra) e Plummer (pannello in alto a destra), entrambe in un potenziale Hernquist, che sono state utilizzate per il calcolo della funzione di probabilità $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ (2.31). Nel pannello in basso è presentato il fit della funzione di probabilità calcolata numericamente (curva rossa) con una Schechter generalizzata (4.2) (curva nera) alla quale sono stati assegnati i valori dei parametri del fit che meglio sono in grado di riprodurre dei profili di densità e massa stellari generati da un modello di Plummer. . . . .	31
4.4	In figura vengono presentate le modifiche della funzione di Schechter (4.2) al variare dei parametri liberi che la definiscono. Gli effetti della variazione di questi parametri sui profili di densità sono riportati in Figura 4.5. . . . .	33
4.5	In figura vengono presentate le modifiche ai profili di densità (sinistra) e massa (destra) stellare generati dai nuovi set di particelle con massa $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , assumendo valori diversi dei parametri da quelli di best-fit e mettendoli a confronto. Si noti come le curve di best fit si adattino molto bene ai modelli analitici già presentati in §4.1. . . . .	34
6.1	Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare, all'istante iniziale (linea continua) e a istanti successivi (linea tratteggiata) dell'evoluzione della galassia nana isolata. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità Plummer-like, cioè che meglio riproduce un profilo stellare di Plummer a $t = 0$ . . . . .	43
6.2	Profilo di massa dell'alone di materia oscura del modello J95 [25]. . .	44
6.3	Orbite B012 (pannelli a sinistra) e B04 (pannelli a destra) integrate nel potenziale della MW per 12 Gyr. In questa figura, $x$ , $y$ e $z$ sono le coordinate galattocentriche cartesiane in unità di kpc ( $z$ è ortogonale al piano galattico). . . . .	45

6.4	Distribuzione delle particelle della galassia satellite osservate nei piani xy, yz e xz (da sinistra a destra) per la simulazione dell'orbita B012, dopo 4, 8 e 12 Gyr (dall'alto verso il basso). Qui x, y e z sono le coordinate galattocentriche cartesiane in unità di kpc (z è ortogonale al piano galattico). . . . .	46
6.5	Come in Figura 6.4 ma per l'orbita B04. . . . .	47
6.6	Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare della sferoidale nana in orbita (caso B012) nel potenziale della MW, calcolati a vari tempi evolutivi. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità che meglio riproduce i profili generati da un modello Plummer (vedi Tabella 6.1) alle particelle della distribuzione totale a tempi diversi della simulazione.	48
6.7	Come in Figura 6.6 ma per l'orbita B04. . . . .	48
6.8	In figura vengono mostrati gli ingrandimenti sulla galassia nana nei piani xy, yz e xz (da sinistra verso destra) per la simulazione dell'orbita B012, dopo 4, 8 e 12 Gyr (dall'alto verso il basso). In ogni pannello vengono delineate delle regioni a 1,2 e 3 kpc (rispettivamente linea gialla, blu e rossa) per mettere in evidenza il contributo dato dalle code mareali alla densità. . . . .	49
6.9	Come in Figura 6.8 ma per l'orbita B04. . . . .	50
6.10	Confronto tra il profilo di densità stellare osservato di Fornax e i profili stellari ottenuti applicando la funzione di probabilità ai set di particelle evoluti della distribuzione totale negli snapshot finali delle Figure 6.6-6.7. Un'opportuna scelta dei parametri che definiscono la $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ (vedi Tabella 6.1) ci ha permesso di trovare, sia per l'orbita B012 (pannello di sinistra) che per l'orbita B04 (pannello di destra), dei buoni profili che si adattino a quello stellare di Fornax. . . . .	52
6.11	Confronto tra i profili stellari iniziali ottenuti applicando la funzione di probabilità, i cui parametri per rappresentare i diversi casi sono riportati in Tabella 6.1, alle masse delle particelle della distribuzione totale iniziale. . . . .	53
6.12	Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare della sferoidale nana in orbita (caso B012) nel potenziale della MW, calcolati a vari tempi evolutivi. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità che meglio riproduce un profilo Fornax-like (vedi Tabella 6.1) alle particelle della distribuzione totale a tempi diversi della simulazione. . . . .	53
6.13	Come in Figura 6.12 ma per l'orbita B04. . . . .	54

6.14 Rapporti di massa su massa iniziale della distribuzione totale (curva nera) e stellare Fornax-like (curva verde) in funzione del tempo. Nel pannello a sinistra è riportato il caso dell'orbita B012, mentre in quello a destra dell'orbita B04. . . . .	54
---	----



# Sommario

Come la maggior parte degli ammassi globulari, anche quelli che appartengono alla galassia sferoidale nana (dSph) Fornax presentano popolazioni stellari multiple. Alcuni scenari di formazione proposti per queste popolazioni richiedono che la massa stellare iniziale dovesse essere circa 5-20 volte maggiore rispetto a quella attuale. In letteratura questo prende il nome di *mass budget problem*. Se si assume che la maggior parte delle stelle di Fornax sia nata nei suoi ammassi globulari e poi espulsa per effetti dinamici, per giustificare sia valori di quest'ordine che la sua elevata frequenza specifica (cioè numero di ammassi globulari per unità di luminosità), questa galassia avrebbe dovuto perdere un'importante frazione di massa stellare. Una possibilità è che questa massa stellare sia stata persa per effetti mareali durante l'orbita di Fornax nella Milky Way. In questo lavoro di tesi, tramite simulazioni  $N$ -body, ci proponiamo di studiare l'evoluzione di un modello di dSph in orbita nel potenziale della Milky Way, introducendo un nuovo metodo che ci permetta di studiare l'evoluzione della componente stellare a posteriori delle simulazioni, abbattendo in maniera critica il numero di simulazioni, il numero di particelle richieste, e quindi i tempi di calcolo. Attraverso la *funzione di probabilità*,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , siamo in grado di ricavare diversi profili stellari a partire dai set di particelle evoluti appartenenti alla distribuzione totale (DM+stelle) che descrive la dSph, senza dover studiare un nuovo set-up iniziale per ogni scelta del profilo stellare iniziale. Abbiamo applicato questo metodo al caso di Fornax realizzando, a scopo illustrativo, due simulazioni, dove troviamo che, nell'orbita più eccentrica assunta in questo lavoro, la sferoidale nana perde sino al 43% della massa stellare iniziale entro 3 kpc. Quindi, se la massa stellare iniziale di Fornax fosse stata circa il doppio di quella osservata oggi, il limite superiore proposto da Larsen et al. (2012) al mass budget problem verrebbe spostato, da un fattore 4-5, ad un fattore 7-9, rientrando così all'interno del range di valori proposti per alcuni scenari di formazione di popolazioni stellari multiple negli ammassi globulari.



# Abstract

As most globular clusters (GCs), those belonging to the Fornax dSph have multiple stellar populations. Some scenarios proposed for the multiple population formation require that the initial stellar mass should be about 5-20 times higher than the present-day stellar mass. In literature this is called *mass budget problem*. If we assume that most of the stars of Fornax were born in its globular clusters and then expelled for dynamical effects, to justify both values of this order and its high specific frequency (i.e. number of GCs per unit luminosity), this galaxy would have had to lose an important stellar mass fraction. A possibility is that this stellar mass has been lost via tidal stripping in Fornax's orbit in the Milky Way. In this work, by means of  $N$ -body simulations, we aim to study the evolution of a dSph in orbit in the Milky Way potential, introducing a new method that allows us to evaluate the evolution of the stellar component after performing the simulations, providing critical reduction of the number of required simulations, of the number of particles and thus of the computational time. Through the *probability function*,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , we can derive different stellar profiles from the set of evolved particles belonging to the total distribution (DM+stars) that describes the dSph, avoiding to set up a new initial configuration for each choice of the initial stellar mass profile. We applied this method to the Fornax dSph case by performing two illustrative simulation, where we find that, in the most eccentric orbit assumed in this work, the dwarf galaxy loses up to 43% of the initial stellar mass within 3 kpc. Thus, if the initial stellar mass of Fornax had been about double that observed today, the upper limit proposed by Larsen et al. (2012) to the the mass budget problem would be shifted from a factor of 4-5 to a factor of 7-9, thus falling within the range of expected for some scenarios of formation of multiple stellar populations in the GCs.

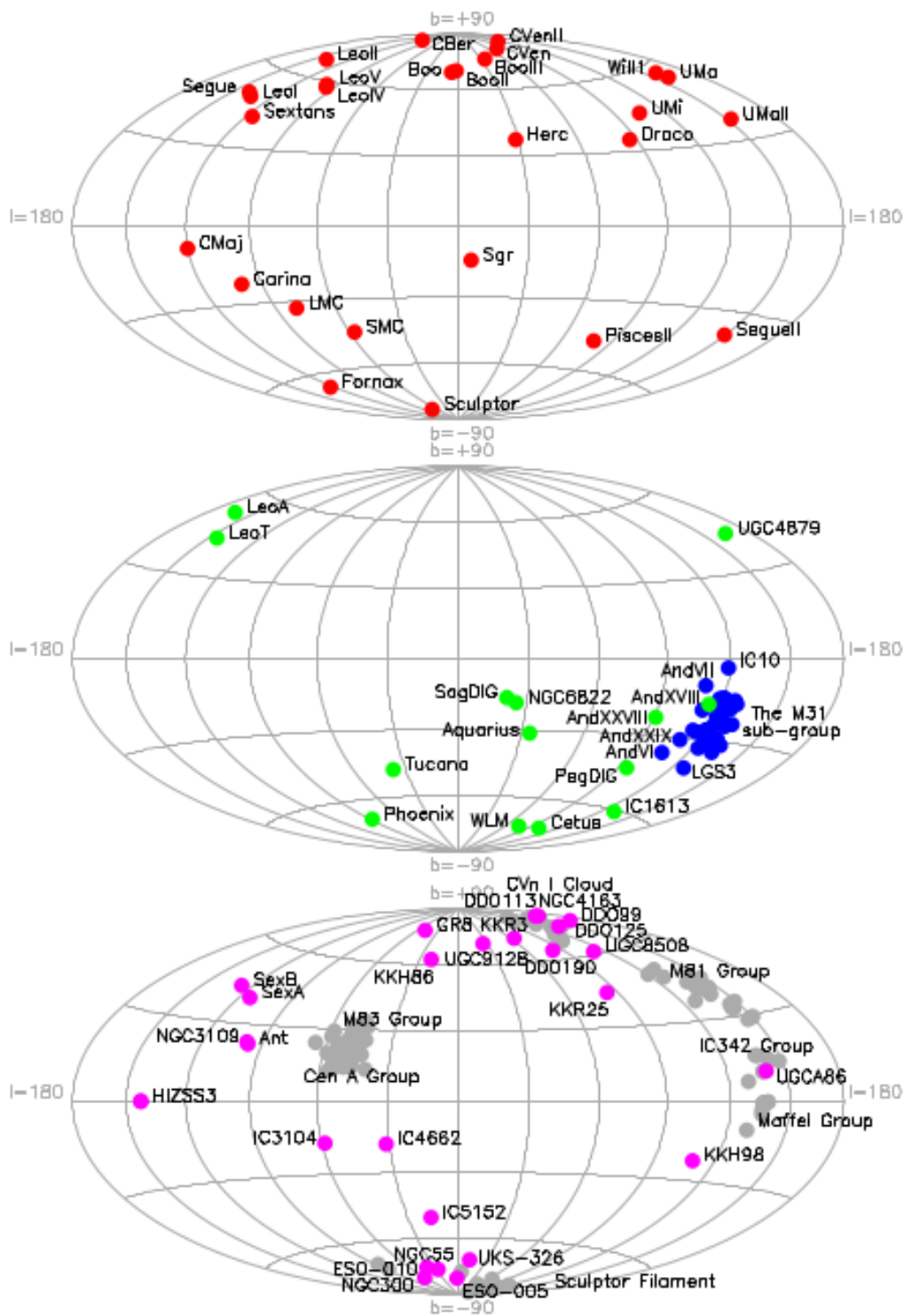


# Capitolo 1

## Introduzione

Il modello cosmologico affermatosi dalla fine degli anni '90 ed attualmente accettato dalla maggior parte della comunità scientifica è il *modello*  $\Lambda$ CDM [15]. Tale modello prevede l'espansione accelerata dell'universo tramite l'introduzione di una *costante cosmologica* ( $\Lambda$ ) all'interno delle equazioni di Einstein, che assume il significato fisico di *energia del vuoto*, e l'assunzione della presenza di una *materia oscura fredda* (Cold Dark Matter, CDM), di cui possiamo apprezzare solamente gli effetti gravitazionali (e.g. curve di rotazione delle galassie a spirale, lensing gravitazionale) ma che non possiamo osservare direttamente. Simulazioni cosmologiche sull'evoluzione di un universo  $\Lambda$ CDM [47] mostrano come le grandi strutture si siano formate per aggregazione gerarchica e quindi abbiano subito un'evoluzione *bottom-up* [14]: le prime strutture su scala galattica che si sono formate sono le *galassie nane*, ecco perché è estremamente importante studiarne l'evoluzione, le popolazioni stellari che le compongono e la loro dinamica interna.

Esistono diversi tipi di galassie nane. In particolare si distinguono le galassie nane irregolari (ricche di gas, con significativa formazione stellare) e le galassie nane sferoidali (povere di gas e che non stanno formando stelle). In questo lavoro ci concentreremo sulle seconde. Lo studio delle galassie nane iniziò con la scoperta di Fornax e Sculptor, sferoidali nane (dwarf spheroidal, dSph) satelliti della Via Lattea (Milky Way, MW), da parte di Shapley nel 1938 [46], e successivamente si estese a tutto il Gruppo Locale (e.g. galassie satellite di M31). A causa della bassa luminosità superficiale che caratterizza questi oggetti, in un primo momento fu difficile determinare la loro distribuzione spaziale (Figura 1.1) e le relazioni di scala che li caratterizzano [5][13]. Con l'avvento delle nuove tecnologie e di una vasta gamma di campioni spettroscopici disponibili relativi a singole stelle, è stato possibile determinare i profili di dispersione di velocità lungo la *linea di vista* (Line of Sight, LOS) per ciascuna delle galassie nane di maggiore rilevanza della MW (e.g. Fornax, Sculptor) e quindi poterne calcolare i momenti di ordine superiore.



**Figura 1.1:** Proiezioni di Aitoff delle coordinate galattiche relative alle galassie satellite della MW (pannello superiore); del sottogruppo M31 (blu, pannello centrale) e le galassie del Gruppo Locale isolate (verde, pannello centrale); delle galassie più vicine al Gruppo Locale che hanno distanze basate su popolazioni stellari risolte entro 3 Mpc (magenta, pannello inferiore) e dei gruppi di galassie vicine (grigio, pannello inferiore) [35].

Dai modelli dinamici costruiti sulla base di questi dati è stato messo in evidenza come questi oggetti abbiano elevati *rapporti massa-luminosità*, raggiungendo valori  $\geq 100(M/L)_{\odot}$ . A tal proposito è importante capire come gli effetti mareali subiti da questi oggetti durante l'evoluzione orbitale nell'alone della MW abbiano influenzato il contenuto di materia oscura (Dark Matter, DM) all'interno del loro alone [3] modificandone, di conseguenza, la distribuzione. In letteratura vi sono alcuni esempi molto chiari di come gli effetti mareali influenzino la morfologia delle galassie satellite, alcune delle quali hanno forme distorte e molto allungate (e.g. Sag DEG [22], Carena dSph [36], Hercules dSph [44]). Gli effetti mareali subiti dalle galassie satellite possono essere più o meno evidenti a seconda della loro storia orbitale; se anche la galassia nana dovesse aver perso un'importante frazione di massa non necessariamente si osserverà una deviazione dall'equilibrio dinamico: le stelle e le particelle di materia oscura che subiscono una perturbazione diventano progressivamente non legate e si disperdono nell'ambiente circostante, mentre il satellite raggiunge una nuova configurazione di equilibrio [41].

Le popolazioni stellari delle galassie sferoidali nane possono avere storie di formazione molto complesse e vi sono diverse domande aperte a riguardo. Il gradiente di età delle popolazioni stellari all'interno di questi sistemi suggerisce che i burst più recenti di formazione debbano essere avvenuti nelle regioni più interne [18]. L'alone della MW contiene una popolazione di stelle estremamente povera di metalli, con metallicità  $[\text{Fe}/\text{H}] < -5$  [9]; mentre le dSph non contengono popolazioni con metallicità inferiore a  $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -3$  [20]. Ciò potrebbe suggerire che il gas proveniente dalla prima generazione di stelle in questi sistemi sia stato pre-arricchito.

Nella §1.1 analizzeremo le proprietà osservative della galassia sferoidale nana Fornax descrivendone la Star Formation History (SFH) e la Chemical Evolution History (CEH); nella §1.2, basandoci sulla sua storia evolutiva, ci concentreremo su uno dei problemi che caratterizzano questa sferoidale nana: il mass budget problem.

## 1.1 Proprietà osservative della dSph Fornax

Con una magnitudine assoluta integrata  $M_V = -13.2$  [34], Fornax è la galassia sferoidale nana più luminosa della Via Lattea (Figura 1.2); si trova nella costellazione della Fornace a una distanza  $d = 138 \pm 8$  kpc [45] da noi, con velocità eliocentrica  $v_{hel} = 54.1 \pm 0.5$  km/s [2] e una brillantezza superficiale centrale in banda V  $\Sigma_{0,V} = 14.4 \pm 0.3$  mag/arcmin [24]. Oltre a essere la dSph più luminosa, Fornax, è una delle galassie satellite più massicce della Via Lattea, seconda solo a Sag DEG, con una massa totale dell'ordine di  $10^9 M_{\odot}$ . La survey cinematica nel lavoro di Walker et al. (2006) [49] sulle stelle di Fornax ha messo in evidenza un profilo di dispersione di velocità piatto, che porta ad un *rapporto massa su luminosità* considerevole:  $M/L_V \approx 15$

**Tabella 1.1:** Valori dei parametri osservativi della dSph Fornax. Dall'alto verso il basso: coordinate galattiche ( $l, b$ ), eccentricità ( $\epsilon$ ), posizione angolare (P.A.), massa stellare ( $M_*$ ), distanza ( $d$ ) e velocità eliocentrica ( $v_{hel}$ ). Referenze: 1) Mateo (1998) [34]; 2) Battaglia (2006) [2]; 3) de Boer (2012) [10]; 4) Saviane (1999) [45].

Parametro	Valore	Referenza
$(l, b)$	$(237.1^\circ, -65.7^\circ)$	1
$\epsilon$	$0.30 \pm 0.01$	2
P.A.	$46.8^\circ \pm 1.6^\circ$	2
$M_*$ (R<1.6kpc)	$4.3 \times 10^7 M_\odot$	3
$d$	$138 \pm 8$ kpc	4
$v_{hel}$	$54.1 \pm 0.5$ km/s	2

entro 1.6 kpc. de Boer (2012) [10] fornisce una stima della massa stellare studiando la storia di formazione stellare di Fornax su un'ampia porzione di cielo trovando  $M_* \simeq 4.3 \times 10^7 M_\odot$  entro un raggio di 1.6 kpc. Come riferimento all'ellitticità ( $\epsilon$ ) e alla posizione angolare (P.A.), ovvero l'angolo tra il nord e la proiezione dell'asse maggiore della galassia misurato in senso antiorario, consideriamo i valori trovati da Battaglia et al. (2006) [2] utilizzando fotometria ESO/WFI nelle bande V & I (Tabella 1.1).

La superficie di densità numerica osservata di Fornax può essere espressa come una funzione del raggio circolare<sup>1</sup> descritto da un profilo di Sérsic [48]:

$$I(R) = I_0 \exp \left[ - \left( \frac{R}{R_S} \right)^{1/m} \right] \quad (1.1)$$

con  $R_S = 14.5'$  ( $\simeq 0.58$  kpc, alla distanza di 138 kpc) e  $m = 0.71$ . Per questi valori di  $R_S$  e  $m$  il raggio circolare proiettato che contiene metà del numero totale di stelle è  $\simeq 0.62$  kpc [3].

La componente stellare di Fornax, per quanto presenti un'ellitticità non nulla, può essere descritta in approssimazione di simmetria sferica dal profilo di densità [31]:

$$\rho_* = \rho_{0,*} \left( \frac{r}{r_{c,*}} \right)^{-p} e^{-\left(\frac{r}{r_{c,*}}\right)^\nu} \quad (1.2)$$

che per  $\nu = 1/m$  e  $p = 1 - 0.6097\nu + 0.05463\nu^2$  è una buona approssimazione del profilo deproiettato di Sérsic [48] con indice  $m$  e raggio deproiettato  $r_{c,*} = R_S$  e  $\rho_{0,*} = 5 \times 10^6 M_\odot \cdot \text{kpc}^{-3}$  [3]. Con questi parametri l'equazione (1.2) produce un

<sup>1</sup>Spesso in letteratura le proprietà osservate di Fornax vengono riportate in funzione del semiasse maggiore  $a$ , chiamato anche *raggio ellittico*. In questo lavoro ci riferiremo sempre al raggio circolarizzato  $R \equiv \sqrt{ab} = a\sqrt{1-\epsilon}$ , dove  $b$  è il semiasse minore e  $\epsilon$  l'ellitticità. In particolare, data l'ellitticità osservata  $\epsilon = 0.3$ , il raggio circolare di Sérsic  $R_S = 14.5'$  corrisponde a un raggio ellittico di  $17.3'$ .





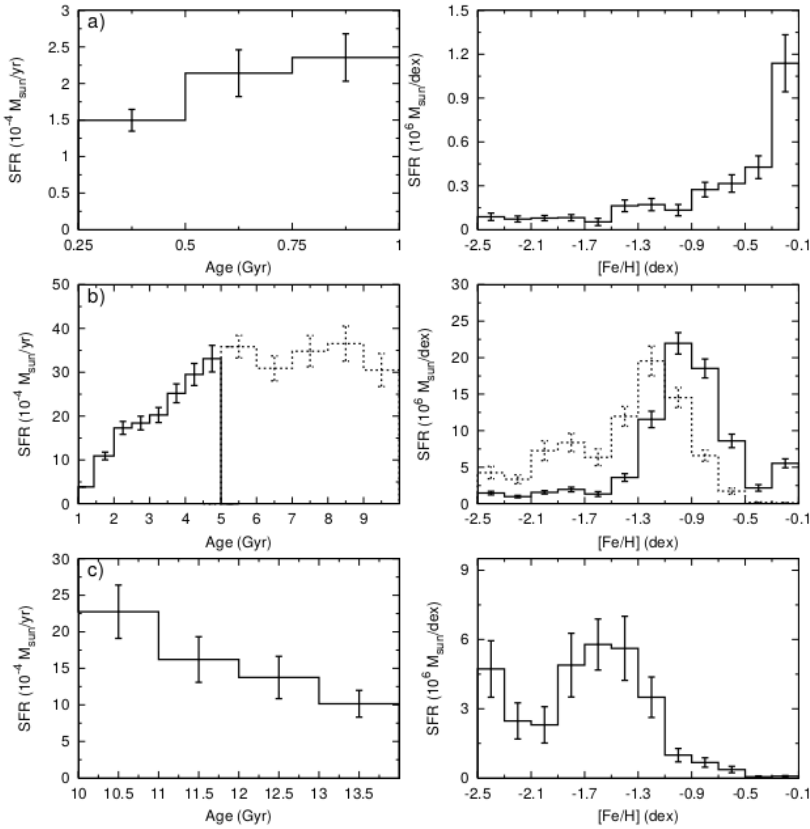
**Figura 1.2:** Galassia sferoidale nana Fornax; credits: ESO/Digitized Sky Survey 2

profilo di massa stellare tale che  $M_*( < 3 \text{ kpc} ) \simeq 10^7 M_\odot$ , in accordo, per esempio, con Pascale et al. (2018) [40].

### 1.1.1 Star Formation History e Chemical Evolution History di Fornax

Rispetto ad altre sferoidali nane, la SFH di Fornax è molto complessa. I primi studi sulle popolazioni stellari di Fornax hanno rivelato un ramo delle giganti esteso che suggerisce la presenza di un'importante componente di età intermedia; inoltre, Fornax contiene anche una componente stellare molto giovane (100 – 200 Myr) [4]. L'analisi di Gallart et al. (2005) [17] indica un burst di formazione stellare nelle regioni centrali di Fornax 1 – 2 Gyr fa, che è continuata quasi sino ad arrivare ad oggi, rendendo Fornax la sferoidale nana che ha sperimentato il più recente fenomeno di formazione stellare. Le stelle più giovani, come si osserva anche in altre dSph, occupano la regione centrale della galassia nana; questo suggerisce che il gas necessario ai processi di formazione stellare sia stato trattenuto con maggiore efficienza nelle regioni centrali piuttosto che nelle regioni esterne.

Seguiamo adesso l'articolo di de Boer et al. (2012) [10] ripercorrendo la SFH e la CEH di Fornax (Figura 1.3). Sia la SFH che la CEH mostrano il *tasso di formazione stellare* (Star Formation Rate, SFR) a diverse età e metallicità. Sempre in riferimento alla Figura 1.3, la massa totale stellare presente in ciascun bin può essere determinata moltiplicando i tassi di formazione stellare per l'intervallo di età o metallicità del bin stesso. La SFH mostra come la formazione stellare sia presente a tutte le età, da 0.25 a 14 Gyr, con maggiore intensità tra 1 e 10 Gyr, rimanendo in linea con quanto già riportato precedentemente (Gallart et al. (2005) [17]). La CEH in Figura 1.3b mostra come la popolazione stellare dominante abbia metallicità  $-1.5 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq -0.7 \text{ dex}$ . La più recente formazione stellare avvenuta in Fornax ( $\leq 1 \text{ Gyr}$ ) mostra uno SFR



**Figura 1.3:** Star Formation History (SFH) e Chemical Evolution History (CEH) complessiva della dSph Fornax suddivisa in fasce di età: giovane (a), intermedia (b) e vecchia (c). Nei pannelli centrali le stelle più giovani sono indicate con una linea *continua* mentre le più vecchie con una linea *tratteggiata*, in modo da mettere in evidenza l’effetto dell’età sulla CEH. Le barre d’errore associate allo Star Formation Rate (SFR) derivano dall’utilizzo di diversi diagrammi colore-magnitudine per lo studio delle popolazioni stellari [10].

in calo, con la CEH che presenta un picco a  $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -0.1$  dex. La formazione stellare in età intermedia mostra una SFH a doppio picco con uno SFR in calo per età  $< 6$  Gyr. La risoluzione della SFH a queste età ( $< 2$  Gyr) è abbastanza buona da poter distinguere entrambi i picchi (pannello b), indicando la presenza di episodi distinti di formazione stellare. Le metallicità delle popolazioni con età compresa tra 2 e 5 Gyr mostrano un intervallo di metallicità  $-1.5 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq 0.5$  dex con un picco a  $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -1.0$  dex. La formazione stellare in età intermedia leggermente più vecchia (5-10 Gyr) è dominata da stelle povere di metalli con metallicità  $-2.1 \leq [\text{Fe}/\text{H}] \leq -0.7$  dex, mostrando due picchi a  $[\text{Fe}/\text{H}] \approx -1.8$  e  $-1.2$  dex. Infine, nel pannello più basso della Figura 1.3 (10-14 Gyr) viene evidenziato uno SFR in calo con l’aumentare dell’età e una CEH povera di metalli con andamento simile a quello osservato in Sculptor [10]. In base ai dati mostrati in Figura 1.3, troviamo che la massa stellare formata negli ultimi 2 Gyr è  $\sim 10^6 M_\odot$ , quindi la maggior parte della massa stellare è dovuta a stelle relativamente vecchie.

## 1.2 Fornax e il mass budget problem

La galassia sferoidale nana Fornax contiene cinque ammassi globulari (Globular Clusters, GC). Una quantità fondamentale che si può calcolare per lo studio di questi sistemi è la *frequenza specifica* [19]:

$$S_N = N_{GC} 10^{0.4(M_V + 15)} \quad (1.3)$$

ovvero il numero di ammassi globulari,  $N_{GC}$ , per unità di luminosità della galassia (vedi §1.1), normalizzata a una galassia con magnitudine assoluta  $M_V = -15$ . Nelle galassie a spirale, tipicamente, si ha  $S_N \leq 1$ ; mentre per ellittiche, ellittiche nane e galassie S0:  $2 \leq S_N \leq 6$ . Le galassie cD che si trovano al centro di grandi cluster hanno  $S_N \sim 10 - 20$  [12]. Calcolando la frequenza specifica per Fornax troviamo  $S_N \simeq 26$ , ma se la calcolassimo andando a considerare esclusivamente la luminosità dovuta alle stelle povere di metalli la frequenza specifica arriverebbe sino a  $\sim 400$ ! Confrontando questi valori notiamo come la frequenza specifica di Fornax sia straordinariamente elevata. La questione diventa ancora più spinosa quando si vanno a considerare le popolazioni stellari che compongono gli ammassi globulari della dSph. Come la maggior parte dei GC, anche quelli di Fornax presentano popolazioni stellari multiple [30]; di seguito faremo riferimento a stelle di prima e seconda generazione. Le prove fotometriche e spettroscopiche accumulate nel corso degli anni hanno dimostrato che le stelle di seconda generazione (2g) nei GC sono arricchite di elio, azoto e sodio, e impoverite di carbonio e ossigeno rispetto alle stelle di prima generazione (1g). Per spiegare questo particolare pattern di abbondanze chimiche, le sorgenti del materiale che ha dato origine alle stelle di 2g devono aver prodotto il mezzo necessario tramite reazioni di cattura protonica ad alte temperature (60 – 100 milioni di Kelvin). Per l'origine di questo materiale sono state proposte particolari categorie di stelle di prima generazione, tra cui: stelle del ramo asintotico delle giganti (Asymptotic Giant Branch, AGB; 3 – 10 $M_\odot$  [11]) e stelle di sequenza principale massicce in rapida rotazione (Fast-Rotating Massive Star, FRMS; 20 – 120 $M_\odot$  [27]). Un problema che affligge ciascuno di questi scenari è il cosiddetto *mass budget problem*. Al momento presente la frazione in massa di stelle 1g non supera il 30 – 40% [8]. Se si considera una funzione di massa iniziale (Initial Mass Function, IMF) standard, come la IMF di Kroupa (2001) [28], è facile mostrare che con la massa complessivamente messa a disposizione da una popolazione stellare di quella entità non si arriverebbe mai ad avere una seconda generazione più massiccia<sup>2</sup>. Se si postulasse una massa iniziale almeno 5-20 volte maggiore di quella attuale, lo scenario AGB, coadiuvato da un'importante perdita di massa da parte dei GC,  $\sim 80 - 90\%$  della loro massa

<sup>2</sup>La frazione in massa complessiva restituita da popolazioni stellari in  $\sim 10$  Gyr per una IMF normale arrivano al massimo a 30 – 40% della loro massa iniziale [8].

stellare iniziale, potrebbe essere un buono scenario in grado di giustificare le osservazioni. Tale massa dovrebbe essere stata dispersa nell'ambiente per effetti mareali dovuti all'orbita dei GC nel potenziale della MW.

In questo contesto, importanti informazioni sono state ottenute dallo studio di Fornax e dei suoi ammassi globulari. Larsen et al. (2012) [29], basandosi sulle osservazioni di Letarte et al. (2006) [30], hanno dimostrato che la massa delle stelle di campo di Fornax può al massimo essere a 4-5 volte più grande di quella dei suoi ammassi globulari. Nel caso le stelle di campo siano tutte state perse dagli ammassi globulari, questo risultato impone un limite superiore alla loro massa iniziale, ben inferiore rispetto ai fattori compresi tra 5 e 20 proposti dallo scenario AGB. Tuttavia, un'importante quantità al momento poco vincolata è l'evoluzione della massa stellare di Fornax, la quale nel passato sarebbe potuta essere maggiore di quella odierna.

Una frazione di tale massa sarebbe potuta essere persa in seguito ad interazione mareale con la Via Lattea. Questa possibilità è stata studiata da Battaglia et al. (2015) [3] tramite una serie di simulazioni  $N$ -body, in cui è stato analizzato il moto di Fornax nel potenziale gravitazionale della Via Lattea, considerando diverse orbite caratterizzate da eccentricità differenti. Tale studio ha mostrato come gli effetti mareali influenzino il contenuto di materia oscura, portando a perdite di massa fra  $4 \times 10^6 M_{\odot}$  e  $1.1 \times 10^8 M_{\odot}$ , ma non influenzano particolarmente la massa stellare della galassia satellite. Un altro studio che mette in evidenza la perdita di massa di Fornax è quello di Wang et al. (2016) [50], i quali sostengono, sulla base di simulazioni cosmologiche, che l'alone di materia oscura di Fornax, all'inizio della sua formazione, dovesse essere almeno 10 volte più massivo. Quindi, durante la sua storia evolutiva, Fornax deve aver subito un'importante perdita di massa, con un picco intorno a 9 Gyr fa, che coinciderebbe con la caduta all'interno dell'alone Galattico. In questi lavori, tuttavia, poca attenzione è stata dedicata all'evoluzione della massa stellare di Fornax, di fondamentale importanza per fornire indicazioni sulla formazione dei suoi GC. Come possibili cause della perdita di massa di Fornax sono stati considerati anche fenomeni interni, come la rapida espulsione di gas dei suoi ammassi globulari.

La ricerca condotta da Khalaj & Baumgardt (2016) [26] mette a confronto diversi profili di densità totale che descrivono la galassia nana Fornax per studiare il fenomeno della perdita di massa. Più nello specifico, per modelli *cuspy* del profilo di densità della dSph, la perdita di massa, dovuta all'espulsione di gas nei GC a causa di eventi di evoluzione stellare, può raggiungere il 90% della massa iniziale; mentre, utilizzando un modello *large core* (LC) l'efficienza è molto più bassa,  $< 50\%$  della massa iniziale.

Anche la succitata frequenza specifica anomala di Fornax potrebbe essere una evidenza indiretta a favore di una massa stellare di Fornax che, se nel passato fosse stata molto maggiore di quella presente, permetterebbe di ritrovare valori della frequenza specifica più simili a quelli di altre galassie del Gruppo Locale.

Quello che ci proponiamo di fare con questo lavoro di tesi, in vista delle argomentazioni sopra riportate, è di studiare, attraverso simulazioni  $N$ -body, l'evoluzione di un modello di galassia sferoidale nana in orbita nel potenziale della MW, introducendo un nuovo metodo che ci permette di rappresentare la dSph con una sola componente totale (DM+stelle) e di studiare la componente stellare, e di conseguenza la perdita di massa della galassia satellite, a posteriori, diminuendo così drasticamente il numero di simulazioni da realizzare e il numero di particelle per ogni simulazione, quindi abbattendo estremamente i tempi di calcolo. Infatti, tramite la *funzione di probabilità* (vedi §2.3) saremo in grado di ricavare diversi profili stellari a partire dal profilo totale della dSph successivamente all'evoluzione in orbita, senza dover studiare un nuovo set-up iniziale per ogni scelta del profilo stellare iniziale. In questa tesi applichiamo questo metodo al caso specifico di Fornax presentavo, a scopo illustrativo, due simulazioni che dimostrano la versatilità e l'efficienza del metodo utilizzato. In queste simulazioni troviamo che nell'orbita più eccentrica considerata in questo lavoro la dSph perde sino al 43% della massa stellare iniziale entro 3 kpc. L'implicazione astrofisica che ne deriverebbe, se questo risultato fosse confermato da un'esplorazione sistematica dello spazio dei parametri e da un confronto più dettagliato con i dati osservativi, sarebbe quella di spostare il limite al mass budget problem proposto da Larsen et al. (2012) [29] sino ad un fattore  $\sim 7 - 9$ , rientrando così all'interno del range di valori proposti per alcuni scenari di formazione di popolazioni multiple di stelle nei GC, fra cui lo scenario AGB [43].



# Capitolo 2

## Equilibrio in sistemi non collisionali

Nello studio della dinamica dei sistemi stellari è di fondamentale importanza distinguere sistemi *collisionali* da sistemi *non collisionali*; scopo della §2.1 sarà proprio quello di chiarire la differenza tra queste due classi di sistemi in relazione a quelli che prendono il nome di *tempi di rilassamento dinamico*; studieremo, inoltre, i meccanismi che portano questi oggetti all'equilibrio. Successivamente nella §2.2 introdurremo la *funzione di distribuzione* (Distribution Function, DF), approfondendo il nostro studio su una particolare classe di queste funzioni: le DF *ergodiche*, ovvero quelle funzioni di distribuzione che hanno dipendenza esclusivamente dall'energia; infatti, generalmente, le DF potrebbero avere dipendenza, per esempio, oltre che dall'energia, anche da una componente del momento angolare o dal momento angolare totale. Infine nella §2.3 andremo a definire la *funzione di probabilità*,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , che utilizzeremo per rappresentare un sistema non-collisionale ergodico a due componenti. La  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  presentata nella §2.3 sarà la chiave di volta di questo lavoro di tesi.

### 2.1 Tempi di rilassamento dinamico

I sistemi stellari che studieremo in questo lavoro di tesi sono sistemi cosiddetti *non collisionali*; le interazioni dirette tra le stelle che compongono questi sistemi, cioè, sono del tutto trascurabili. Questo permette agli elementi che lo compongono di mantenere memoria delle condizioni iniziali. Il classico esempio di sistemi stellari *non collisionali* sono le *galassie*. Altri sistemi stellari come gli *ammassi globulari* sono invece definiti *collisionali*. Per capire meglio cosa intendiamo per "mantenere memoria delle condizioni iniziali" e come effettivamente distinguiamo sistemi collisionali da sistemi *non collisionali* introduciamo il concetto di *tempo di rilassamento*, tempo scala che avrà la funzione di spartiacque nella loro classificazione.

### 2.1.1 Tempo di rilassamento a due corpi

Consideriamo un sistema stellare formato da  $N$  corpi tutti con la stessa massa. La traiettoria di una stella viene sensibilmente modificata quando  $\delta v_{\perp} \sim v$ , ovvero quando la variazione della velocità perpendicolare è dell'ordine della velocità iniziale [6]. Definiamo *tempo di rilassamento a due corpi* il tempo necessario affinché continue piccole deflessioni modifichino in maniera significativa la traiettoria e la stella perda memoria delle condizioni iniziali. Proviamo a calcolare qual è il numero minimo di deflessioni necessario affinché si abbia  $\delta v_{\perp} \sim v$ .

Assumiamo che l'interazione tra due stelle non modifichi considerevolmente la traiettoria, in modo che la si possa considerare rettilinea come in Figura 2.1. La forza gravitazionale perpendicolare alla traiettoria sarà data da:

$$F_{\perp} = \frac{Gm^2}{b^2 + x^2} \cos \theta = \frac{Gm^2 b}{(b^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{Gm^2}{b^2} \left[ 1 + \left( \frac{vt}{b} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (2.1)$$

dove  $x = vt$ . Dal secondo principio della dinamica avremo:

$$\delta v_{\perp} = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\perp} dt = \frac{Gm}{b^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[1 + (vt/b)^2]^{3/2}} = \frac{Gm}{bv} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ds}{(1 + s)^{3/2}} \quad (2.2)$$

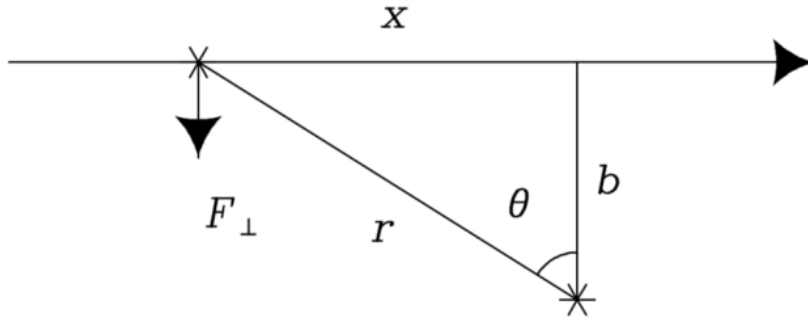
dove abbiamo introdotto il parametro  $s = vt/b$ . Il risultato dell'integrale ci restituisce la variazione della velocità perpendicolare dopo una sola interazione:

$$\delta v_{\perp} = \frac{2Gm}{bv} \quad (2.3)$$

Il numero totale di incontri che una stella subisce durante un singolo attraversamento del sistema con parametro d'impatto compreso tra  $b$  e  $b + db$  è:

$$\delta n_b = N \frac{2bdb}{R^2} \quad (2.4)$$

dove  $N$  è il numero di stelle del sistema ed  $R$  il suo raggio. Dal momento che le



**Figura 2.1:** Schematizzazione geometrica dell'interazione tra due stelle in cui consideriamo una traiettoria rettilinea [6].



deflessioni avvengono in modo casuale in tutte le direzioni avremo che  $\langle \delta v_{\perp} \rangle = 0$ , ma l'energia cinetica della stella cambia e più nello specifico  $\langle \delta v_{\perp}^2 \rangle \neq 0$ . Utilizzando la (2.3) e la (2.4), per un singolo attraversamento otterremo:

$$\langle \delta v_{\perp}^2 \rangle = \left( \frac{2Gm}{bv} \right)^2 \delta n_b = \left( \frac{2Gm}{bv} \right)^2 \frac{2Nb}{R^2} db \quad (2.5)$$

A questo punto integriamo su tutti i parametri d'impatto:

$$\langle \delta v_{\perp}^2 \rangle = \left( \frac{Gm}{vR} \right)^2 8N \int_{b_{min}}^{b_{max}} \frac{db}{b} = \left( \frac{Gm}{vR} \right)^2 8N \ln \frac{b_{max}}{b_{min}} \quad (2.6)$$

Mettendoci nella condizione in cui il sistema stellare sia in equilibrio, la velocità iniziale della stella potrà essere ricavata direttamente dal teorema del viriale<sup>1</sup> considerando l'energia cinetica e potenziale dell'intero sistema:

$$v^2 = \frac{GNm}{R} \quad (2.7)$$

con  $M = Nm$  massa totale del sistema. Dal momento che si ha una variazione significativa della traiettoria solo quando  $\Delta U \sim K$  e che quindi:

$$\frac{Gm^2}{b_{min}} \sim mv^2 \quad (2.8)$$

otteniamo che:

$$b_{min} \approx \frac{Gm}{v^2} \approx \frac{R}{N} \quad (2.9)$$

Se adesso alla (2.6) sostituiamo la (2.9), avremo:

$$\langle \delta v_{\perp}^2 \rangle = 8N \left( \frac{Gm}{vR} \right)^2 \ln N \quad (2.10)$$

Dividendo per  $v^2$  si ottiene la variazione di velocità ortogonale alla traiettoria dopo un singolo attraversamento:

$$\frac{\langle \delta v_{\perp}^2 \rangle}{v^2} = \frac{8N}{R^2} \left( \frac{Gm}{v^2} \right)^2 \ln N = \frac{8 \ln N}{N} \quad (2.11)$$

dove abbiamo utilizzato ancora una volta la (2.9).

Avremo una variazione significativa della traiettoria solo quando il rapporto della (2.11) tenderà all'unità. Il numero di attraversamenti necessari affinché si ottenga questo risultato sarà:

$$N_{relax} \frac{8 \ln N}{N} = 1 \Rightarrow N_{relax} = \frac{N}{8 \ln N} \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup> $2K + U = 0$ , con  $K$  energia cinetica e  $U$  potenziale.

**Tabella 2.1:** Confronto tra le proprietà di alcuni sistemi stellari.

Sistema	$N$	$R$ [pc]	$v$ [km/s]	$\tau_{cross}$ [yr]	$\tau_{relax}$ [yr]
Ammasso aperto	$10^2$	2	0.5	$4 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
Ammasso globulare	$10^5$	4	10	$5 \cdot 10^5$	$4 \cdot 10^6$
Galassia nana	$10^8$	$10^3$	100	$9 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^{12}$
Galassia ellittica	$10^{12}$	$10^4$	600	$2 \cdot 10^7$	$9 \cdot 10^{16}$

Se indichiamo il tempo medio di attraversamento come  $\tau_{cross} = R/v$ , allora il tempo di rilassamento del sistema sarà dato da:

$$\tau_{relax} = N_{relax} \tau_{cross} \quad (2.13)$$

Questo tempo di rilassamento è meglio conosciuto come *tempo di rilassamento a due corpi* ed è, per definizione, il tempo necessario affinché un sistema perda memoria delle condizioni iniziali per effetto delle collisioni a due corpi.

Un sistema si dice *collisionale* se la sua età ( $\tau_{age}$ ) è molto maggiore del tempo di rilassamento: le piccole deflessioni hanno avuto tempo di modificare in maniera significativa le traiettorie iniziali, portando il sistema all'equilibrio (*sistema rilassato*). Per una galassia ( $N \approx 10^{11}$ ) risulta  $\tau_{relax} = 10^{6-7}$  Gyr mentre per un ammasso globulare ( $N \approx 10^5$ )  $\tau_{relax} = 1 - 10$  Gyr; in Tabella 2.1 vengono messi a confronto i tempi di rilassamento di alcuni sistemi stellari. Le galassie, quindi, sono sistemi *non* collisionali, mentre gli ammassi globulari sono sistemi collisionali. Questi due concetti sono relativi: osservando sufficientemente a lungo un sistema gravitazionale questo ci apparirà collisionale.

Confrontando il tempo di rilassamento di una galassia con il suo tempo di vita troviamo che  $\tau_{relax} \gg \tau_{age}$  e dal momento che questi oggetti tipicamente sono virializzati ci dovrà essere stato qualche altro meccanismo di rilassamento che ha portato questi sistemi all'equilibrio.

### 2.1.2 Tempo di rilassamento violento

Nel 1967 l'astrofisico inglese Donald Lynden-Bell propose un meccanismo di rilassamento collettivo applicabile ad una nube protogalattica in collasso che sta formando stelle [33]. Se questo processo di formazione fosse abbastanza veloce ci sarebbe un rapido esaurimento del gas, che dissiperebbe la sua energia tramite processi radiativi, e le fasi finali del collasso sarebbero regolate esclusivamente dall'autogravità del sistema. Tutto questo si manifesta, successivamente, come una forma di rilassamento

collettivo, noto come *rilassamento violento*. L'aggettivo violento viene affiancato a questo meccanismo per contrapporlo al rilassamento a due corpi, che ha tempi scala, come abbiamo visto nel caso delle galassie, molto maggiori del loro tempo di vita. Il tempo scala tipico del rilassamento violento, invece, è uguale a quello di variazione del potenziale gravitazionale nell'ultima fase del collasso della protogalassia ( $\leq 1$  Gyr). Il rilassamento violento modifica l'energia delle stelle durante la fase finale del collasso in quanto il potenziale gravitazionale varia nel tempo,  $\Phi(\vec{r}, t)$ , come conseguenza di contrazioni ed espansioni del sistema. Dal momento che possiamo scrivere l'energia come  $E = v^2/2 + \Phi(\vec{r}, t)$ :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\vec{x}(t)} \quad (2.14)$$

deduciamo che l'unico canale utile per far sì che una stella vari la sua energia all'interno di un sistema *non* collisionale è solo attraverso variazioni del potenziale gravitazionale.

## 2.2 Funzione di distribuzione

Quando si vuole costruire un modello di una galassia sferoidale, o più in generale di una galassia ellittica o a spirale, definire le orbite di ciascuna stella che la compone sarebbe molto complicato. Quello che possiamo fare, invece, è studiare la probabilità di trovare una stella nel volume dello spazio delle fasi  $d^6\vec{w} = d^3\vec{x}d^3\vec{v}$  attorno alla sua posizione  $\vec{x}$  e velocità  $\vec{v}$ , dove  $\vec{w} = (\vec{x}, \vec{v}) = (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3)$ . Pertanto definiamo *funzione di distribuzione* (DF, Distribution Function) la funzione  $f$  tale che  $f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v}$  sia la frazione di stelle che al tempo  $t$  si trovano nel volume  $d^3\vec{x}$ , centrato in  $\vec{x}$ , con  $\vec{v} \in [\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}]$ . In virtù della sua definizione,  $f$ , può essere normalizzata in modo che:

$$\int f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v} = 1 \quad (2.15)$$

dove l'integrale si estende per tutto lo spazio delle fasi<sup>2</sup>.

Per un sistema a più componenti sarebbe naturale utilizzare la seguente normalizzazione:

$$\int f_i(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v} = M_i \quad (2.16)$$

dove  $f_i$  e  $M_i$  sono rispettivamente la DF e la massa totale della  $i$ -esima componente.

---

<sup>2</sup>Un'altra normalizzazione che si potrebbe adottare è  $\int f(\vec{x}, \vec{v}, t)d^3\vec{x}d^3\vec{v} = M$ , dove  $M$  è la massa totale del sistema.

### 2.2.1 Equazione non collisionale di Boltzmann (CBE)

Poiché la massa totale del sistema si deve conservare, deve valere l'equazione di continuità ( $f = \rho$ ):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = 0 \quad (2.17)$$

Sviluppando la sommatoria si ottiene:

$$\sum_{i=1}^6 \frac{\partial(f\dot{w}_i)}{\partial w_i} = \sum_{i=1}^6 \frac{\partial\dot{w}_i}{\partial w_i} f + \sum_{i=1}^6 \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0 \quad (2.18)$$

Dal momento che  $v_j$  e  $x_j$  sono coordinate indipendenti e che il potenziale  $\Phi$  non dipende dalla coordinata  $j$  della velocità, possiamo scrivere direttamente l'*equazione non collisionale di Boltzmann* (CBE, Collisionless Boltzmann Equation) come:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \dot{w}_i \frac{\partial f}{\partial w_i} = 0 \quad (2.19)$$

Esplicitando le componenti  $x_i$  e  $v_i$  si ottiene la forma della CBE che generalmente viene utilizzata nello spazio delle fasi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Teorema di Jeans

Una funzione  $I(\vec{x}, \vec{v})$  è un integrale del moto *se e solo se*:

$$\frac{d}{dt} I[\vec{x}(t), \vec{v}(t)] = 0 \quad (2.21)$$

Ovvero se:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial \vec{x}} \frac{d\vec{x}}{dt} + \frac{\partial I}{\partial \vec{v}} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \frac{\partial I}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial\Phi}{\partial \vec{x}} \frac{\partial I}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (2.22)$$

Confrontando questa equazione con la (2.20) si nota che la condizione affinché  $I$  sia un integrale del moto è identica alla condizione che  $I$  sia soluzione stazionaria della CBE. Da questo deriva il **teorema di Jeans**:

**Teorema 2.2.1.** *Qualsiasi soluzione stazionaria della CBE dipende dalle coordinate dello spazio delle fasi solo attraverso integrali del moto nel dato potenziale, e qualsiasi funzione che dipende da integrali del moto è soluzione stazionaria della CBE.*

In altre parole, se  $I_1, \dots, I_n$  sono integrali del moto indipendenti da un dato potenziale, allora qualsiasi DF del tipo  $f = f(I_1), f(I_1, I_2), \dots, f(I_1, \dots, I_n)$  è una soluzione stazionaria della CBE. Se tutte le orbite in una galassia sono regolari, esiste anche il **teorema forte di Jeans**:

**Teorema 2.2.2.** *La DF di un sistema stellare stazionario è funzione, al più, di tre integrali del moto indipendenti,  $f = f(I_1, I_2, I_3)$ .*

Quindi una galassia, in stato stazionario, può essere rappresentata da una DF del tipo  $f(I_1, I_2, I_3)$ , dove  $I_1, I_2$  e  $I_3$  sono tre integrali del moto indipendenti. In particolare, per un sistema sferico stazionario non rotante, la DF è del tipo  $f(E)$  o  $f(E, L)$ , mentre in un caso assi-simmetrico può essere del tipo  $f(E, L_z)$  [6].

### 2.2.3 DF ergodiche in sistemi sferici

Consideriamo per semplicità il caso in cui un sistema sia formato solo da una popolazione di stelle che possiamo considerare identiche con un'unica funzione di distribuzione,  $f$ . Assumiamo, inoltre, che il potenziale gravitazionale del sistema sia generato da  $\rho = \int d^3\vec{v}f$ ; questi sistemi vengono chiamati *autoconsistenti* in quanto la distribuzione di densità determina il potenziale attraverso l'equazione di Poisson e a sua volta il potenziale determina la densità in modo coerente attraverso la CBE. A questo punto è utile definire un *potenziale relativo* ( $\Psi$ ) ed un' *energia relativa* ( $\mathcal{E}$ ):

$$\Psi \equiv -\Phi + \Phi_0 \quad e \quad \mathcal{E} \equiv -H + \Phi_0 = \Psi - \frac{1}{2}v^2 \quad (2.23)$$

dove  $\Phi_0$  è una costante scelta opportunamente in modo che  $f > 0$  per  $\mathcal{E} > 0$  e  $f = 0$  per  $\mathcal{E} \leq 0$ ; mentre  $H$  è l'hamiltoniana del sistema. Il potenziale relativo di un sistema isolato soddisfa l'equazione di Poisson nella forma:

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G\rho \quad (2.24)$$

in modo che  $\Psi \rightarrow \Phi_0$  quando  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ .

Quello che vogliamo fare adesso è ricavare una funzione di distribuzione *ergodica* che dipenda esclusivamente dalle coordinate dello spazio delle fasi attraverso l'hamiltoniana  $H(\vec{x}, \vec{v})$ ; pertanto assumerà la forma  $f(\mathcal{E})$ .

Notiamo, innanzitutto, che la densità di probabilità  $\nu(r)$  può essere scritta come un integrale di  $f$  su tutte le velocità, e dal momento che  $f$  dipende dal modulo della velocità e non dalla sua direzione possiamo integrare in coordinate angolari nello spazio delle velocità:

$$\nu(r) = 4\pi \int dv v^2 f\left(\Psi - \frac{1}{2}v^2\right) = 4\pi \int_0^\Psi d\mathcal{E} f(\mathcal{E}) \sqrt{2(\Psi' - \mathcal{E})} \quad (2.25)$$

dove è stata utilizzata l'equazione (2.23) in modo che scegliendo  $\Phi_0$  opportunamente si abbia  $f = 0$  per  $\mathcal{E} \leq 0$ . Poiché  $\Psi$  è una funzione monotona di  $r$  in qualsiasi sistema sferico, possiamo considerare la densità di probabilità  $\nu$  come funzione del potenziale relativo  $\Psi$  invece di  $r$ . Otteniamo così:

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\nu(\Psi) = 2 \int_0^\Psi d\mathcal{E} f(\mathcal{E}) \sqrt{\Psi' - \mathcal{E}} \quad (2.26)$$

Differenziando entrambi i membri rispetto a  $\Psi$ :

$$\frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{d\nu}{d\Psi} = \int_0^\Psi d\mathcal{E} \frac{f(\mathcal{E})}{\sqrt{\Psi' - \mathcal{E}}} \quad (2.27)$$

Questa equazione rientra nella casistica dei cosiddetti *integrali di Abel* che hanno soluzione nota:

$$f(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{8\pi^2}} \left[ \int_0^\mathcal{E} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}' - \Psi}} \frac{d^2\nu}{d\Psi^2} + \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}'}} \left( \frac{d\nu}{d\Psi} \right)_{\Psi=0} \right] \quad (2.28)$$

La (2.28) viene chiamata *formula di Eddington* e implica che, data una distribuzione di densità sferica, possiamo ricavare una DF ergodica che genera un modello con la densità data. Come vedremo nel capitolo successivo questo metodo viene applicato al calcolo della DF ergodica del modello di Hernquist (§3.1.1); tuttavia non abbiamo alcuna garanzia che la soluzione  $f(\mathcal{E})$  per l'equazione (2.28) soddisfi il requisito fisico di non essere ovunque negativa. In effetti l'unica cosa che possiamo concludere è che una distribuzione di densità sferica  $\nu(r)$  in un potenziale  $\Phi(r)$  può derivare da una DF ergodica se e solo se

$$\int_0^\mathcal{E} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}' - \Psi}} \frac{d\nu}{d\Psi} \quad (2.29)$$

è una funzione crescente dell'energia relativa. Si noti, comunque, che questo risultato vale indipendentemente dal fatto che il potenziale sia generato in maniera coerente dalla funzione di distribuzione.

## 2.3 Funzione di probabilità

Consideriamo un sistema a due componenti le cui funzioni di distribuzione vengono indicate rispettivamente con  $f_1$  ed  $f_2$ ; se entrambe sono ergodiche avremo che  $f_1 = f_1(\mathcal{E})$  e  $f_2 = f_2(\mathcal{E})$ . Definiamo la *funzione di probabilità*  $\mathcal{P}_i(\mathcal{E})$  come:

$$\mathcal{P}_i(\mathcal{E}) = \frac{f_i(\mathcal{E})}{f(\mathcal{E})} \quad (2.30)$$

dove  $f(\mathcal{E}) = f_1(\mathcal{E}) + f_2(\mathcal{E})$  è la funzione di distribuzione totale del sistema. La (2.30) rappresenta la probabilità che una particella di energia  $\mathcal{E}$  appartenga alla componente  $i$ -esima. Consideriamo adesso il caso di un sistema *non* collisionale, ad esempio una galassia sferoidale nana composta da un alone di materia oscura e da una distribuzione stellare le cui funzioni di distribuzione sono entrambe ergodiche ( $f_{DM} = f_{DM}(\mathcal{E})$  e  $f_* = f_*(\mathcal{E})$ ). Supponiamo di voler calcolare la funzione di probabilità stellare, allora dalla (2.30) avremo:

$$\mathcal{P}_*(\mathcal{E}) \equiv \frac{f_*(\mathcal{E})}{f(\mathcal{E})} \quad (2.31)$$

dove  $f(\mathcal{E})$  rappresenta, come nel caso precedente, la funzione di distribuzione totale del sistema. Con la (2.31) indichiamo la probabilità che una particella di energia  $\mathcal{E}$  appartenga alla componente stellare. L'applicazione e l'analisi della funzione di probabilità verranno discusse nei capitoli successivi.





# Capitolo 3

## Sistemi stellari sferici e isotropi

Un semplice modello di galassia sferoidale nana può essere costruito assumendo un profilo di densità totale (DM+stelle) rappresentato dal modello di Hernquist e da una distribuzione stellare descritta da un modello Plummer. In questo capitolo studieremo le caratteristiche principali di questi due modelli, ricavando, oltre i profili di densità e di massa, anche le forme algebriche delle DF. Infine nella §3.3, studieremo la funzione di probabilità,  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ , applicata a questo modello.

### 3.1 Modello di Hernquist

Un modello che spesso viene utilizzato per la descrizione degli aloni di materia oscura è il *modello di Hernquist* [21] il cui profilo di densità presenta una dipendenza da  $r^{-1}$  a piccoli raggi e da  $r^{-4}$  a grandi raggi:

$$\rho(r) = \frac{Ma}{2\pi r} \frac{1}{(r+a)^3} \quad (3.1)$$

dove  $M$  e  $a$  sono rispettivamente la massa ed il raggio caratteristico della distribuzione. Questo profilo deriva da una classe più generica di modelli, ovvero quelli a *doppia legge di potenza*, dalla quale deriva, per esempio, anche il modello di Navarro-Frenk-White (NFW) [6]. A partire dalla (3.1) è possibile calcolare il profilo di massa  $M(r)$ <sup>1</sup>:

$$M(r) = M \frac{r^2}{(r+a)^2} \quad (3.2)$$

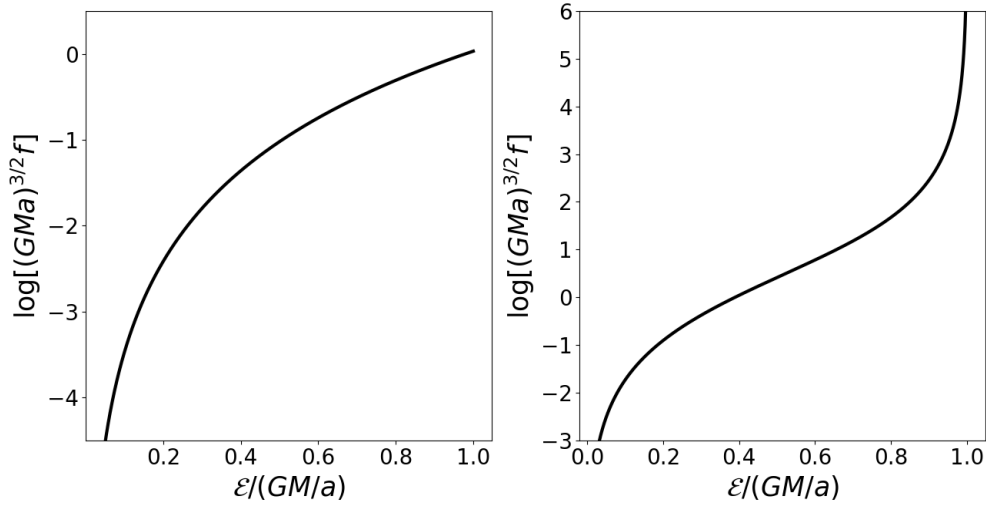
mentre il potenziale,  $\Phi(r)$ , si ricava integrando l'equazione di Poisson:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r+a} \quad (3.3)$$

dove  $G$  è la costante di gravitazione universale.

---

<sup>1</sup> $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$



**Figura 3.1:** Funzioni di distribuzione ergodiche che generano sistemi stellari con profili di densità Plummer (sinistra) ed Hernquist (destra).  $M$  è la massa totale del sistema mentre  $a$  è il raggio caratteristico.

### 3.1.1 DF del modello di Hernquist ergodico

Utilizziamo adesso la formula di Eddington (2.28) per ricavare la funzione di distribuzione ergodica per un modello di Hernquist. Scegliamo  $\Phi_0$  (vedi equazione (2.23)) in modo che  $\Phi_0 = \Phi(r \rightarrow \infty) = 0$ . Definendo adesso

$$\tilde{\Psi} \equiv \frac{\Psi a}{GM} = -\frac{\Phi a}{GM} \quad (3.4)$$

possiamo scrivere il rapporto tra il raggio ed il fattore di scala, a partire dalla (3.3), come:

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{\tilde{\Psi}} - 1 \quad (3.5)$$

Scriviamo quindi la probabilità  $\nu(\Psi)$  per unità di volume:

$$\nu(\Psi) = \frac{\rho}{M} = \frac{1}{2\pi a^3} \frac{\tilde{\Psi}^4}{1 - \tilde{\Psi}} \quad (3.6)$$

Differenziando ora rispetto a  $\Psi$  abbiamo:

$$\frac{d\nu}{d\Psi} = \frac{1}{2\pi a^2 GM} \frac{\tilde{\Psi}^3(4 - 3\tilde{\Psi})}{(1 - \tilde{\Psi})^2} \quad (3.7)$$

La (2.28) ci restituisce la forma integrale della DF:

$$f_H(\mathcal{E}) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3 (GM)^2 a} \int_0^{\mathcal{E}} \frac{d\Psi}{\sqrt{\mathcal{E}' - \Psi}} \frac{2\tilde{\Psi}^2(6 - 8\tilde{\Psi} + 3\tilde{\Psi}^2)}{(1 - \tilde{\Psi})^3} \quad (3.8)$$

Senza svolgere i calcoli, riportiamo il risultato finale:

$$f_H(\mathcal{E}) = \frac{1}{\sqrt{2}(2\pi)^3 (GMa)^{3/2}} \frac{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}}{(1 - \tilde{\mathcal{E}})^2} \times \left[ (1 - 2\tilde{\mathcal{E}})(8\tilde{\mathcal{E}}^2 - 8\tilde{\mathcal{E}} - 3) + \frac{3 \sin^{-1} \sqrt{\tilde{\mathcal{E}}}}{\sqrt{\tilde{\mathcal{E}}(1 - \mathcal{E})}} \right] \quad (3.9)$$

dove  $\tilde{\mathcal{E}} \equiv \mathcal{E}a/GM$  (Figura 3.1).

## 3.2 Modello di Plummer

Il profilo di densità della componente stellare nelle dSph è approssimativamente costante nelle regioni centrali e tende a zero a grandi raggi. Un semplice potenziale generato da una distribuzione di densità con queste caratteristiche è quello del *modello di Plummer* [42]:

$$\Phi = -\frac{GM}{\sqrt{r^2 + b^2}} \quad (3.10)$$

dove  $M$  è la massa totale del sistema e  $b$  è una lunghezza scala che, in questo caso, prende il nome di *lunghezza scala di Plummer*. Applicando il Laplaciano in coordinate polari sferiche alla (3.10) troviamo:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = \frac{3GMb^2}{(r^2 + b^2)^{5/2}} \quad (3.11)$$

Quindi inserendo questo risultato all'interno dell'equazione di Poisson ricaviamo l'andamento del profilo di densità della distribuzione:

$$\rho(r) = \frac{3M}{4\pi b^3} \left( 1 + \frac{r^2}{b^2} \right)^{-5/2} \quad (3.12)$$

Volendo ricavare il profilo di massa, sfruttando la (3.12), avremo:

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \rho(r') r'^2 dr' = M \frac{r^3}{(r^2 + b^2)^{3/2}} \quad (3.13)$$

### 3.2.1 Sistemi sferici definiti dalla DF

Mentre nella sottosezione 3.1.1 abbiamo ricavato la funzione di distribuzione che genera un determinato profilo di densità, adesso faremo il contrario: scegliamo la forma funzionale della densità nello spazio delle fasi e studiamo come appare il sistema nello spazio reale. Il teorema di Jeans e la simmetria sferica del sistema ci consentono di assumere che  $f$  sia una funzione dell'energia relativa  $\mathcal{E} = \Psi - \frac{1}{2}v^2$  e del modulo del momento angolare, per poter scrivere l'equazione di Poisson nella forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) = -4\pi G \rho = -4\pi GM \int d^3\vec{v} f \left( \Psi - \frac{1}{2}v^2, |\vec{r} \times \vec{v}| \right) \quad (3.14)$$

dove  $M$  è la massa totale del sistema. Dal momento che dobbiamo ricavare il potenziale dopo aver scelto  $f$ , non possiamo normalizzarla come abbiamo fatto finora (vedi (2.15)), ma è conveniente ridefinire la normalizzazione in modo che l'integrale di  $f$  nello spazio delle fasi sia la massa totale; quindi assumeremo che la densità di massa sia data da:

$$\rho = \int d^3\vec{v} f \quad (3.15)$$

### Modello di Plummer ergodico

Lo studio del modello di Plummer ergodico ricade all'interno di una casistica più ampia, ovvero quella dei *modelli politropici*. Scegliamo una DF del tipo:

$$f(\mathcal{E}) = \begin{cases} F\mathcal{E}^{n-3/2} & (\mathcal{E} > 0) \\ 0 & (\mathcal{E} \leq 0) \end{cases} \quad (3.16)$$

Ai raggi dove il potenziale effettivo  $\Psi > 0$  potremmo scrivere la densità come:

$$\rho = 4\pi \int_0^\infty dv v^2 f\left(\Psi - \frac{1}{2}v^2\right) = 4\pi F \int_0^{\sqrt{2\Psi}} dv v^2 \left(\Psi - \frac{1}{2}v^2\right)^{n-3/2} \quad (3.17)$$

Sostituendo  $v^2 = 2\Psi \cos^2 \theta$ , possiamo scrivere semplicemente:

$$\rho = c_n \Psi^n \quad (3.18)$$

dove

$$c_n \equiv 2^{7/2} \pi F \left[ \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{2n-2} \theta - \int_0^{\pi/2} d\theta \sin^{2n} \theta \right] = \frac{(2\pi)^{3/2} (n-3/2)! F}{n!} \quad (3.19)$$

Affinché  $c_n$  sia finito dovremo necessariamente avere  $n > \frac{1}{2}$ . In questi modelli la densità aumenta come la potenza  $n$ -esima del potenziale relativo quando  $\Psi > 0$  ed è nulla quando  $\Psi \leq 0$ . Nessun sistema stellare ergodico finito è omogeneo poiché ciò corrisponderebbe ad avere  $\rho \propto \Psi^0$  e quindi  $n = 0$ , che violerebbe la condizione  $n > \frac{1}{2}$  [6]. Riscriviamo adesso l'equazione di Poisson utilizzando la (3.14) e la (3.18):

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Psi}{dr} \right) + 4\pi G c_n \Psi^n = 0 \quad (3.20)$$

ed esaminiamo le soluzioni per un potenziale centrale  $\Psi_c$  introducendo le seguenti variabili adimensionali:  $\tilde{\Psi} \equiv \Psi/\Psi_c$  con  $\Psi_c = \Psi(0)$  e  $s = r/b$  con  $b = (4\pi G \Psi_c^{n-1} c_n/3)^{1/2}$ . Per definizione avremo dunque che  $\tilde{\Psi}(0) = 1$ , e di conseguenza nel caso in cui la densità non diverga al centro  $d\tilde{\Psi}/ds = 0$  quando  $s = 0$ . Riscriviamo l'equazione (3.20) come:

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( s^2 \frac{d\tilde{\Psi}}{ds} \right) = -3\tilde{\Psi}^n \quad (3.21)$$

Questa prende il nome di *equazione di Lane-Emden*, ed ammette soluzioni analitiche solo per  $n = 1$  e per  $n = 5$  che è la soluzione che cercavamo ovvero quella della *sfera di Plummer* che avrà:

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \quad (3.22)$$

Inserendo questa nel primo membro della (3.21) otteniamo:

$$\frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left[ s^2 \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{\sqrt{1+s^2}} \right) \right] = \frac{1}{s^2} \frac{d}{ds} \left( \frac{s^2}{(1+s^2)^{3/2}} \right) = -3 \frac{1}{(1+s^2)^{5/2}} = -3\tilde{\Psi}^5 \quad (3.23)$$

quindi l'equazione di Lane-Emden è *verificata*. Il potenziale e la densità saranno date dalle equazioni:

$$\Phi = -\Psi_c \tilde{\Psi} = -\frac{\Psi_c}{\sqrt{1 + (r/b)^2}} \quad (3.24)$$

$$\rho = \frac{\rho_c}{[1 + (r/b)^2]^{5/2}} \quad (3.25)$$

con  $\rho_c = 3\Psi_c/(4\pi Gb^2)$ . Si noti che sostituendo  $n = 5$  all'interno della (3.16) avremo  $f(\mathcal{E}) \propto \mathcal{E}^{7/2}$ ; questo andamento è riportato nel pannello di sinistra della Figura 3.1.

### 3.3 Applicazione: funzione di probabilità $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$

Nella §2.3 ci siamo limitati a dare una definizione teorica della funzione di probabilità,  $\mathcal{P}(\mathcal{E})$ . Vediamo adesso un'applicazione al caso di una galassia sferoidale nana con un profilo di densità totale dato da un modello di Hernquist e distribuzione stellare con un profilo Plummer. Vogliamo studiare l'andamento analitico della funzione di probabilità relativa alla componente stellare:

$$\mathcal{P}_*(\mathcal{E}) = \frac{f_*(\mathcal{E})}{f(\mathcal{E})} \quad (3.26)$$

Quello che abbiamo fatto finora nelle sottosezioni 3.1.1 e 3.2.1 ci ha permesso di calcolare, separatamente, le funzioni di distribuzione dei due modelli che, nel nostro esempio, compongono la sferoidale nana. È importante notare, come di consueto in un sistema all'equilibrio, che la componente barionica, rappresentata esclusivamente da stelle nel nostro caso, è in equilibrio nella buca di potenziale totale ( $\Psi_{tot}$ ). Per poter calcolare la funzione di distribuzione della componente stellare,  $f_*(\mathcal{E})$ , in queste condizioni, sarà necessario avvalersi del metodo di inversione di Eddington come abbiamo fatto nella sottosezione 3.1.1, assumendo gli andamenti dei profili di densità e massa del modello di Plummer per calcolare la probabilità  $\nu(\Psi_{tot})$  (3.6) e poterla inserire assieme al potenziale relativo della componente oscura all'interno della (2.28).

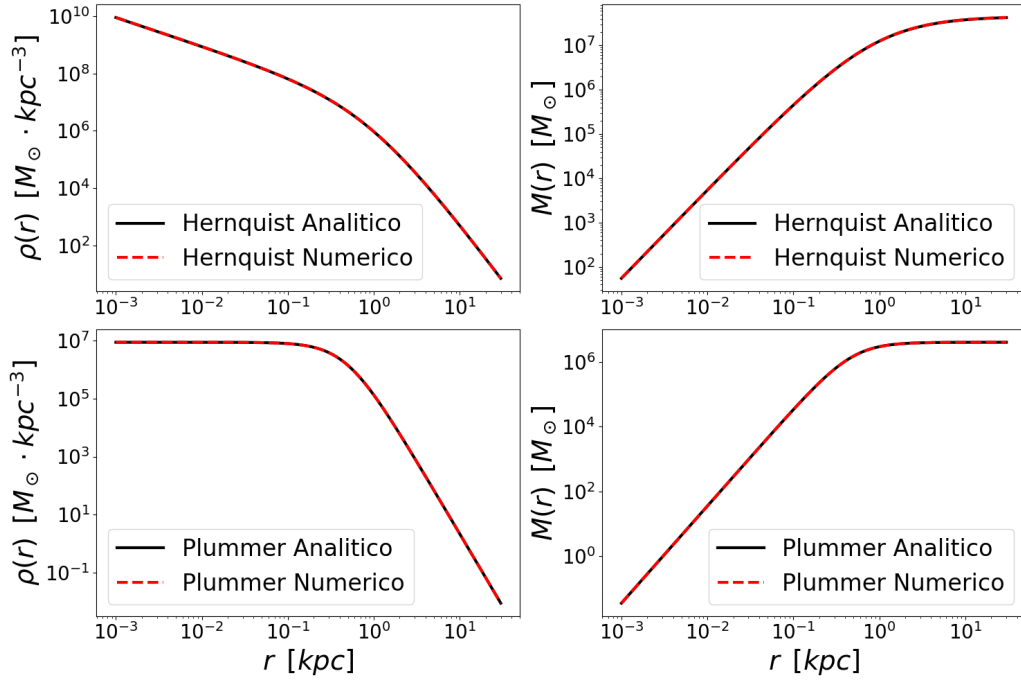
Nel prossimo capitolo ricaveremo un'approssimazione analitica della (3.26) scoprendo che questa ha un andamento simile a quello di una Schechter generalizzata.



# Capitolo 4

## Modelli di galassie sferoidali nane costruiti con la funzione $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$

Le realizzazioni  $N$ -body sono uno strumento molto importante per lo studio dei sistemi stellari (e.g. galassie, ammassi globulari) che vengono rappresentati come sistemi di  $N$  particelle. Attraverso i codici  $N$ -body, che, come vedremo, si distinguono in codici *collisionali* e *non collisionali*, si è in grado di studiare l'evoluzione temporale delle  $N$  particelle sotto l'effetto della loro reciproca interazione gravitazionale. Per un codice non-collisionale, come quello che studieremo nel capitolo successivo, il numero di particelle utile per descrivere la galassia è molto minore del numero di particelle (stelle o DM) che la compongono. In caso di codici non-collisionali le particelle non rappresentano singole stelle o singole particelle di materia oscura ma sono, invece, dei campionamenti della funzione di distribuzione nello spazio delle fasi. Il modello di galassia sferoidale nana che consideriamo in questo capitolo è descritto da un profilo di densità totale (DM+stelle) generato dal modello di Hernquist e da una distribuzione stellare descritta da un modello Plummer; questo modello di dSph ci permetterà di costruire una funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  analitica che verrà poi utilizzata nel capitolo 6 per simulare l'evoluzione di una dSph in orbita nel potenziale della Via Lattea. Nella §4.1 analizzeremo le condizioni iniziali con le quali ogni realizzazione è stata generata; mentre nella §4.2, dopo un confronto delle funzioni di distribuzione analitiche con quelle calcolate numericamente tramite inversione di Eddington, faremo un'analisi approfondita della funzione di probabilità relativa al modello di dSph generato e studieremo la sua applicazione in condizioni di stazionarietà.



**Figura 4.1:** Confronto dell'andamento analitico e numerico dei profili di densità (sinistra) e massa (destra) relativi alle realizzazioni  $N$ -body con modello di Hernquist ( $M = 4.5 \times 10^7 M_\odot$  e  $r_c = 0.9$  kpc) e Plummer ( $M_* = 4 \times 10^6 M_\odot$  e  $b = 0.482$  kpc).

## 4.1 Modelli e set up

Ogni realizzazione  $N$ -body della galassia sferoidale nana è stata generata utilizzando il modulo Python `OpOpGadget`<sup>1</sup> sviluppato da Giuliano Iorio [23]. La posizione iniziale, intesa come raggio sferico, di ciascuna particella è stata assegnata in maniera casuale in modo da poter riprodurre la densità in input  $\rho_{tot}(r)$ . Data una distribuzione  $P(\phi) \propto U[0, 2\pi]$  e  $P(\cos \theta) \propto [-1, 1]$ , dove  $U$  è la distribuzione uniforme, mentre  $\phi$  e  $\theta$  sono rispettivamente l'angolo azimutale e l'angolo zenitale, vengono assegnate casualmente le posizioni angolari che poi vengono convertite in cartesiane secondo le leggi di trasformazione  $x = r \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \phi$  e  $z = r \cos \theta$ ; in questo modo campioniamo uniformemente la sfera su ciascun raggio ottenendo una distribuzione sferica di stelle. La componente di velocità di ciascuna particella viene assegnata assumendo che la distribuzione di velocità sia isotropa e ottenendo la funzione di distribuzione ergodica tramite inversione di Eddington (2.28) [6]. Questa procedura genera una realizzazione  $N$ -body sferica e isotropa di un sistema isolato in equilibrio. Per poter calcolare la funzione di probabilità,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , dobbiamo assumere una distribuzione di densità  $\rho_*(r)$ . In questo lavoro assumiamo per la componente stellare un profilo di densità Plummer (3.12), che indicheremo come  $\rho_*(r)$ , con  $M_* = 4 \times 10^6 M_\odot$

<sup>1</sup><https://github.com/iogiul/OpOpGadget>



e  $b = 0.482$  kpc (Figura 4.1); mentre per il profilo di densità totale (DM+stelle):

$$\rho_{tot}(r; M, r_c) = \rho_H(r; M, r_c) \exp \left[ - \left( \frac{r}{r_t} \right)^2 \right] \quad (4.1)$$

dove  $\rho_H$  è il profilo di densità del modello Hernquist (3.1) mentre  $r_c$  è il raggio scala; per questo modello assumiamo  $M = 4.5 \times 10^7 M_\odot$  e  $r_c = 0.9$  kpc (Figura 4.1). Il troncamento esponenziale al profilo di densità totale viene applicato per evitare di trovare particelle con valori di  $r$  molto grandi quando la distribuzione viene generata; questo potrebbe succedere in quanto la distribuzione di massa del modello di Hernquist raggiunge la massa totale a  $r \rightarrow \infty$ . Il valore che assumiamo ( $r_t \sim 17$  kpc) non è importante ai fini dei risultati di questo lavoro, poiché questo è molto più grande delle altre scale fisiche che stiamo considerando (e.g.  $r_c$ ,  $b$ ), quindi ci aspettiamo non abbia alcuna influenza, per esempio, quando andremo a simulare l'orbita della dSph nel potenziale della Milky Way. I valori delle masse e dei raggi caratteristici di entrambe le realizzazioni sono stati scelti in modo da riprodurre, approssimativamente, i profili di densità della galassia sferoidale nana Fornax, prendendo come riferimento quelli trovati da Battaglia et al. (2015) [3]. La distribuzione di densità totale è stata realizzata con  $N = 10^5$  particelle.

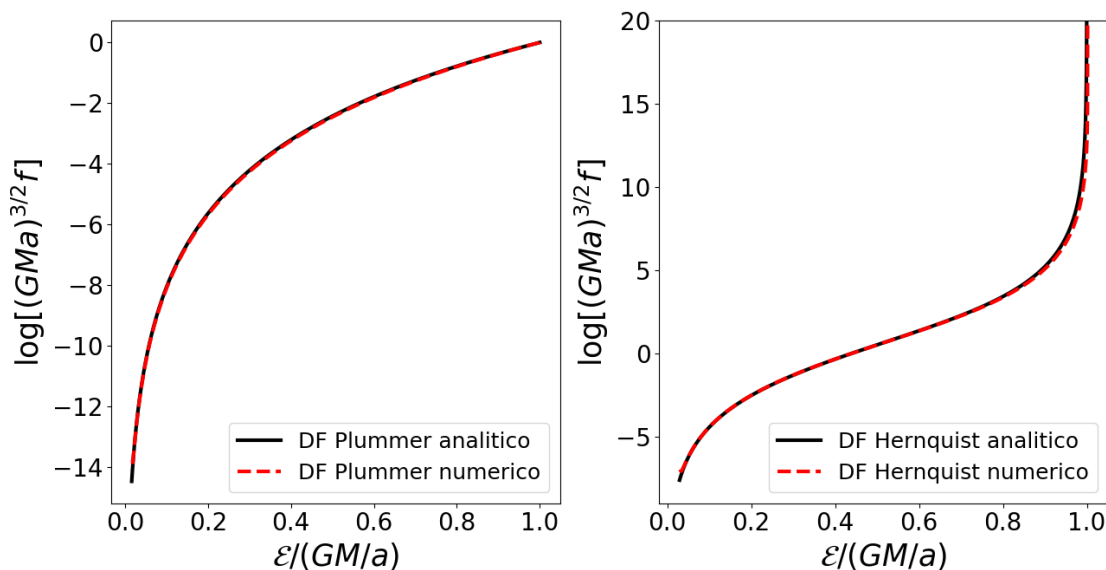
## 4.2 Analisi: funzione di probabilità

Le rispettive funzioni di distribuzione ergodiche relative a  $\rho_{tot}$  e  $\rho_*$  vengono calcolate tramite inversione di Eddington facendo attenzione a quanto riportato nella §3.3: è necessario calcolare la DF della componente stellare,  $f_*(\mathcal{E})$ , utilizzando all'interno della (2.28) il potenziale relativo totale del sistema (Figura 4.3). Nel caso della  $\rho_{tot}$  la DF isotropa è nota analiticamente: in Figura 4.2 (destra) mostriamo il confronto tra la DF analitica e quella calcolata numericamente con l'inversione di Eddington. Sempre in Figura 4.2 (sinistra) mostriamo, a scopo illustrativo, la DF di un Plummer isotropo autogravitante (numerica e analitica).

Calcoliamo numericamente la funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  per una  $\rho_*$  Plummer facendo riferimento alla definizione (2.31). In questo caso  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  è data dal rapporto delle DF ( $f_*$  e  $f_{tot}$ ) mostrate in Figura 4.3. Volendo trovare una rappresentazione analitica di  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , consideriamo una Schechter generalizzata:

$$\mathcal{P}_*(\mathcal{E}) = A \left( \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \right)^\alpha \exp \left[ - \left( \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0} \right)^\beta \right], \quad (4.2)$$

dove  $A$  è semplicemente un fattore di normalizzazione,  $\alpha$  determina la rapidità della salita a legge di potenza,  $\mathcal{E}_0$  è un'energia caratteristica alla quale la  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  passa da legge di potenza a decadimento esponenziale, mentre  $\beta$  determina la rapidità del

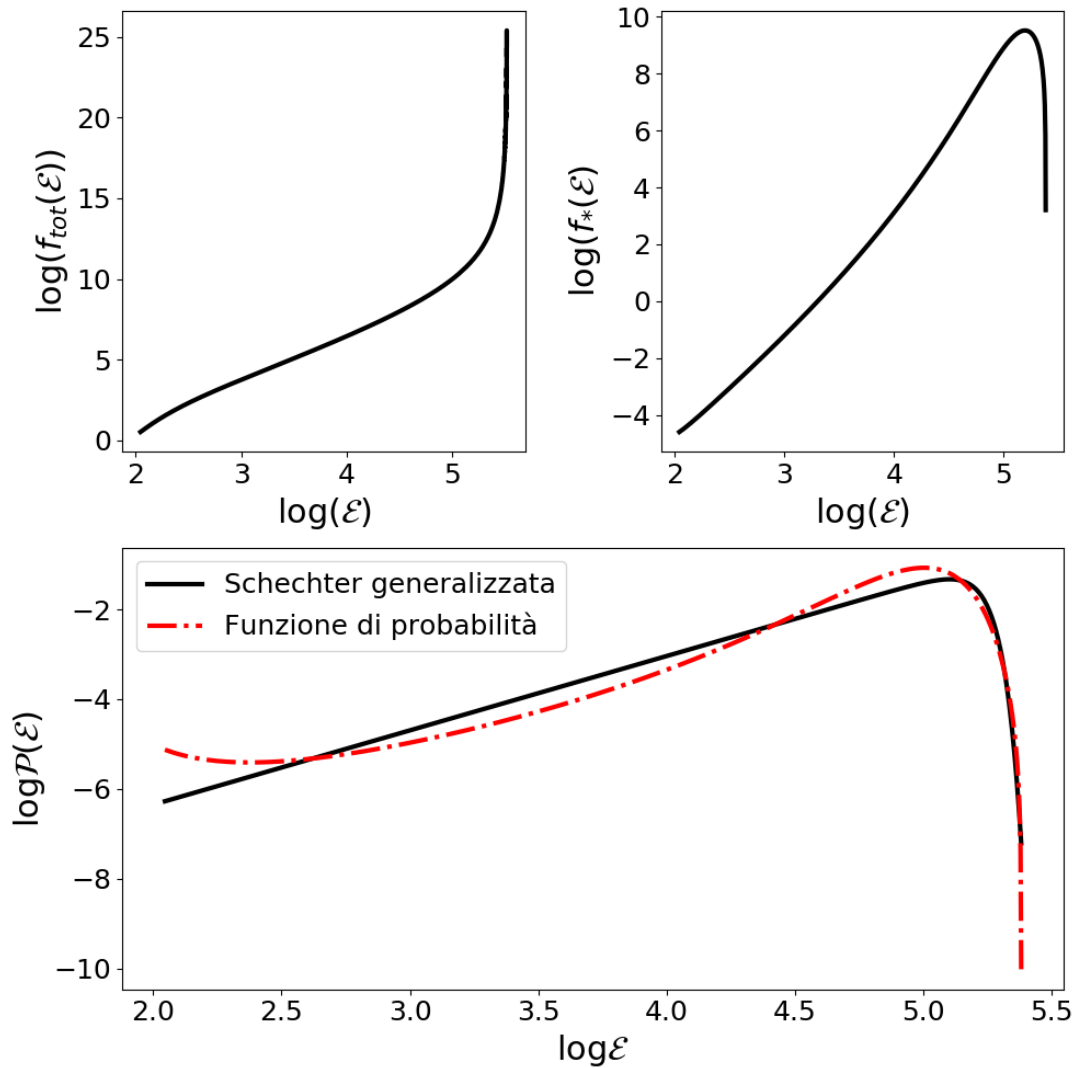


**Figura 4.2:** Confronto delle DF dei modelli Plummer (sinistra) e Hernquist (destra) calcolate numericamente tramite inversione di Eddington con le rispettive funzioni analitiche. I parametri  $M$  ed  $a$  si riferiscono ai valori delle masse e dei raggi scala delle rispettive realizzazioni. In questo caso ciascuna DF è calcolata assumendo che il sistema sia autogravitante e a una sola componente.

cut-off. Eseguiamo ora un fit della funzione di probabilità ottenuta dal rapporto delle DF delle realizzazioni  $N$ -body generate nella §4.1 con la Schechter generalizzata lasciando liberi i quattro parametri che la definiscono ( $A$ ,  $\mathcal{E}_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ ). Il risultato del fit, ottenuto tramite metodo dei minimi quadrati già implementato nella funzione `curve_fit` di Python, è presentato in Figura 4.3. Da questo sono stati ricavati i parametri liberi di best-fit della (4.2), che danno quindi una distribuzione stellare Plummer-like, e i relativi errori, calcolati come la radice quadrata degli elementi sulla diagonale della matrice di covarianza:  $A_{Pl} = 0.38 \pm 0.02$ ,  $\alpha_{Pl} = 1.66 \pm 0.03$ ,  $\mathcal{E}_{0,Pl} = (191 \pm 1) \text{ km}^2\text{s}^{-2}$  e  $\beta_{Pl} = 14.5 \pm 0.7$ . Dalla Figura 4.3 notiamo come la funzione di probabilità numerica non segua esattamente una legge di potenza a basse energie e quindi non venga fittata in dettaglio dalla (4.2); questo è dovuto alla forma della  $f_*(\mathcal{E})$  che presenta una risalita simile nello stesso range di energie della funzione di probabilità. A tal proposito potremmo trovare un fit migliore aggiungendo un parametro libero alla (4.3), ma questo complicherebbe il modello inutilmente ai fini dello scopo di tesi. Come vedremo nel capitolo 6, la (4.3) è sufficientemente flessibile per i nostri scopi.

Una questione interessante, che ci aiuterà a comprendere meglio il passaggio successivo, è studiare come si modifica la Schechter al variare dei parametri liberi (Figura 4.4):

- Variando  $A$ : il profilo mantiene invariata la forma e viene semplicemente riscaloato verso l'alto ( $A > A_{Pl}$ ) o verso il basso ( $A < A_{Pl}$ );



**Figura 4.3:** In figura sono mostrate le funzioni di distribuzione del modello Hernquist (pannello in alto a sinistra) e Plummer (pannello in alto a destra), entrambe in un potenziale Hernquist, che sono state utilizzate per il calcolo della funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  (2.31). Nel pannello in basso è presentato il fit della funzione di probabilità calcolata numericamente (curva rossa) con una Schechter generalizzata (4.2) (curva nera) alla quale sono stati assegnati i valori dei parametri del fit che meglio sono in grado di riprodurre dei profili di densità e massa stellari generati da un modello di Plummer.

- Variando  $\alpha$ : viene modificata la crescita a legge di potenza del profilo; per  $\alpha = 0$  questa è nulla;
- Variando  $\mathcal{E}_0$ : il profilo mantiene invariata la forma e viene semplicemente spostato a destra o a sinistra a seconda che  $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_{0,Pl}$  o  $\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_{0,Pl}$ ;
- Variando  $\beta$ : la forma del troncamento esponenziale viene modificata e sarà meno ripida per  $\beta < \beta_{Pl}$ ; per  $\beta = 0$  otteniamo semplicemente un profilo a legge di potenza  $\propto x^\alpha$ .

### 4.2.1 Modifiche ai profili di densità e massa

Quello che vogliamo fare ora è assegnare ad ogni particella della realizzazione modellata dal profilo di Hernquist una *frazione di massa stellare*. Quindi la massa stellare di ogni particella sarà  $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , dove  $m_i$  è la massa totale della particella mentre

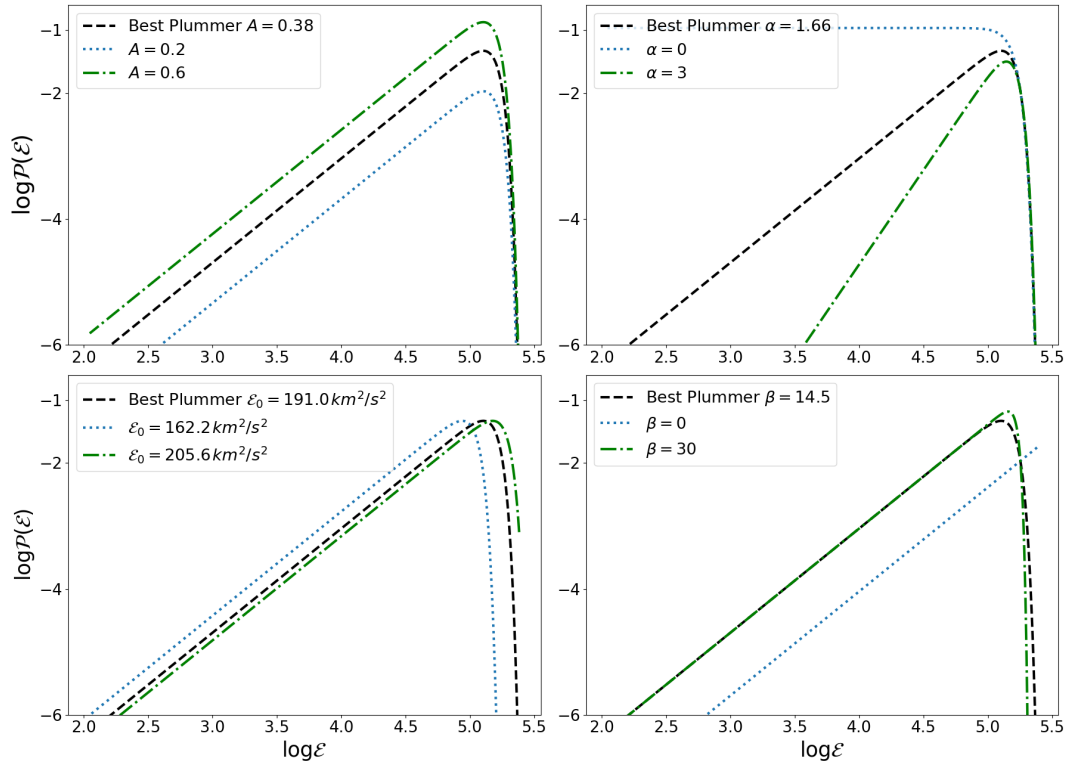
$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}(\mathcal{E}_i) = A \left( \frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_0} \right)^\alpha \exp \left[ - \left( \frac{\mathcal{E}_i}{\mathcal{E}_0} \right)^\beta \right] \quad (4.3)$$

è la probabilità introdotta nella §2.3.  $\mathcal{E}_i$  è l'energia relativa della particella  $i$ -esima. Otteniamo così un nuovo set di particelle con massa  $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , dalla quale possiamo estrarre un profilo di densità stellare costruendo dei gusci (shell) sferici la cui massa ( $M_{*,i}$ ) è data da  $M_{*,i} = \sum_i m_i \mathcal{P}_i$ ; per cui dividendo la massa di ogni shell per il volume stesso della shell, otteniamo le densità stellari  $\rho_*(r_i)$  ai raggi  $r_i$ . Allo stesso modo possiamo ricavare il profilo di massa stellare considerando le masse cumulative di ogni shell a diversi raggi. Il metodo utilizzato per il calcolo delle masse del nuovo set di particelle ci suggerisce che mantenendo i valori di best-fit nella (4.3) otterremo dei profili di densità e massa di un modello Plummer-like, come quelli stellari già presentati in Figura 4.1; mentre se i valori di questi parametri venissero modificati si avrebbero, come già mostrato in Figura 4.4, delle ripercussioni sulla forma del profilo (4.3) e di conseguenza, queste, si trasmetterebbero ai profili di massa e densità (Figura 4.5). Notiamo come la Schechter modificata con 4 parametri liberi sia abbastanza flessibile da riprodurre sufficientemente bene un tipico profilo di densità stellare, come ad esempio quello di Plummer.

Come vedremo nel Capitolo 6, infatti, modificando opportunamente i parametri che definiscono la Schechter modificata saremo in grado di riprodurre il profilo di densità stellare, ottenuto tramite deproiezione del profilo di Sérsic, di Fornax. Per quanto riguarda il profilo di densità, come si può vedere in Figura 4.5, modificando uno alla volta i valori dei parametri nella (4.3), troviamo che:

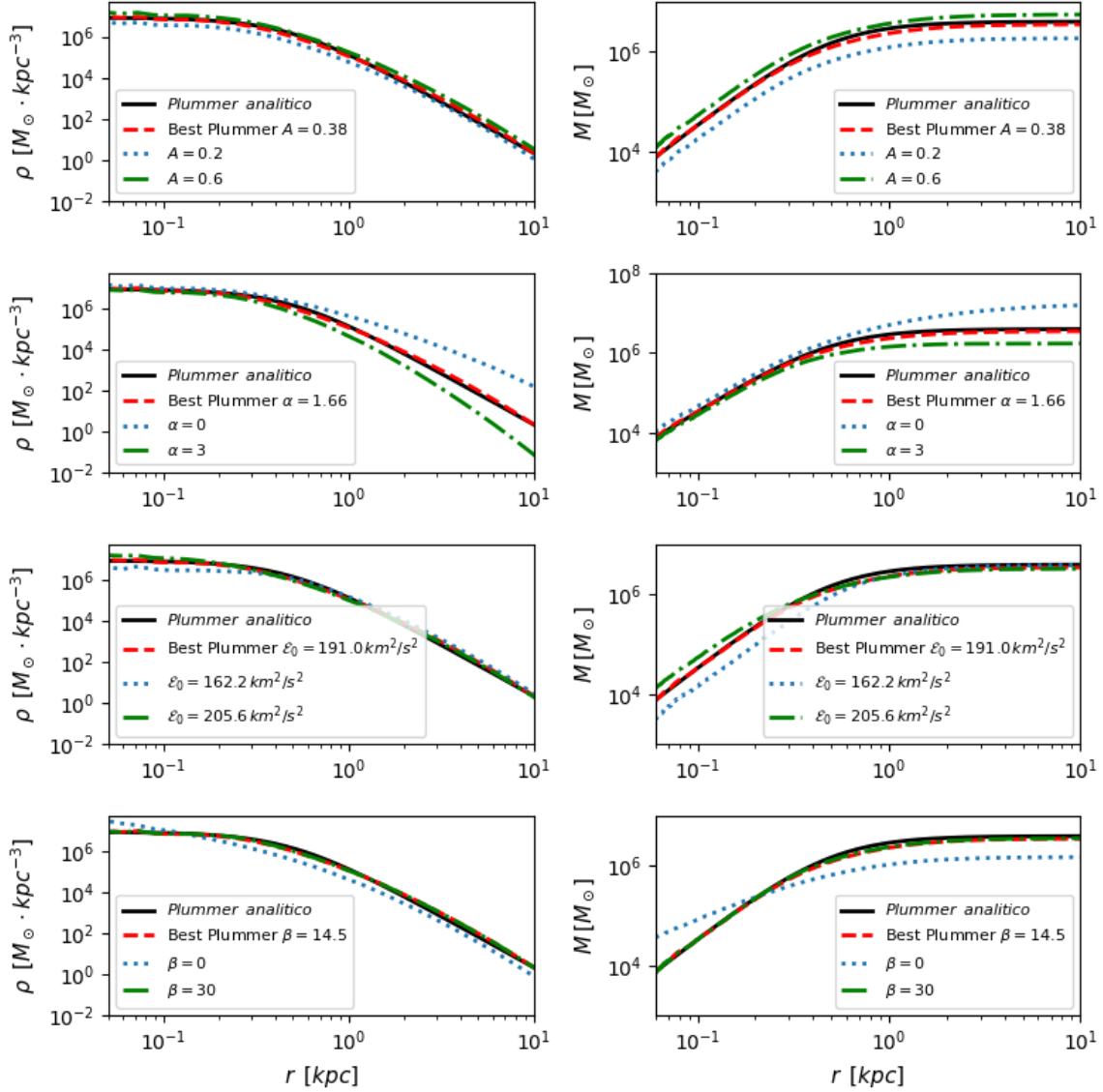
- Variando  $A$ : il profilo mantiene invariata la forma e viene semplicemente riscaloato verso l'alto o verso il basso;
- Variando  $\alpha$ : la pendenza del profilo a grandi raggi viene modificata; per  $\alpha > \alpha_{Pl}$  si avrà una pendenza maggiore;
- Variando  $\mathcal{E}_0$ : la posizione del ginocchio viene modificata; per  $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_{0,Pl}$  il ginocchio sarà meno pronunciato;
- Variando  $\beta$ : la forma del troncamento del profilo viene modificata; per  $\beta = 0$  otteniamo semplicemente un profilo a legge di potenza  $\propto x^\alpha$ .

Tali comportamenti si riflettono, analogamente, nel profilo di massa al variare dei valori parametri (Figura 4.5, destra).



**Figura 4.4:** In figura vengono presentate le modifiche della funzione di Schechter (4.2) al variare dei parametri liberi che la definiscono. Gli effetti della variazione di questi parametri sui profili di densità sono riportati in Figura 4.5.

Tutte queste considerazioni vengono fatte in vista dell'evoluzione della dSph, modellata esclusivamente dalla realizzazione con un profilo di densità totale (DM+stelle) generato dal modello Hernquist, nel potenziale della MW. Una volta terminata l'evoluzione moltiplicheremo le masse delle particelle della realizzazione evoluta per la frazione di massa stellare  $\mathcal{P}_i$ , che ricordiamo essere invariante dal momento che è funzione esclusivamente dell'energia iniziale delle particelle. A questo punto potremo ricavare, pur non avendo fatto evolvere numericamente la componente stellare, con la stessa procedura descritta in questa sottosezione, i profili stellari di massa e densità finali. Questo ci permetterà di valutare la perdita di massa della dSph andando semplicemente a modificare i valori parametri che definiscono la (4.3).



**Figura 4.5:** In figura vengono presentate le modifiche ai profili di densità (sinistra) e massa (destra) stellare generati dai nuovi set di particelle con massa  $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , assumendo valori diversi dei parametri da quelli di best-fit e mettendoli a confronto. Si noti come le curve di best fit si adattino molto bene ai modelli analitici già presentati in §4.1.

# Capitolo 5

## Il codice per simulazioni $N$ -body

### FVFPS

La prima distinzione che viene fatta quando si parla di codici per simulazioni  $N$ -body è quella tra *codici collisionali* e *codici non collisionali*: mentre per i primi è necessario un numero di particelle uguale al numero di stelle che effettivamente appartengono al sistema stellare ( $N = N_*$ ), nel secondo caso è necessario un numero molto inferiore di particelle per poterne descrivere in maniera accurata l'evoluzione ( $N \ll N_*$ ); di conseguenza, queste, non vanno intese come singole stelle, ma come campionamenti della funzione di distribuzione del sistema stellare. [6].

Lo scopo di un codice  $N$ -body, dato un sistema composto da  $N$  corpi con massa  $m_i$ , posizione  $x_i$  e velocità  $v_i$  assegnate ( $i = 1, \dots, N$ ), è quello di determinare l'evoluzione del sistema nel campo gravitazionale generato dalle particelle stesse ed, eventualmente, in un campo gravitazionale esterno. La procedura che viene seguita da un codice  $N$ -body è la seguente: data la distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi  $[x_i(t), v_i(t)]$  ( $i = 1, \dots, N$ ) a un generico tempo  $t$ , il codice calcola le forze generate da tale distribuzione,  $\vec{F}_i(t)$ , che successivamente vengono utilizzate per calcolare posizioni e velocità ad un tempo successivo  $t + \Delta t$ , dove  $\Delta t$  viene chiamato *time step* dell'integrazione. Ottenute posizioni e velocità al tempo  $t + \Delta t$  si ripete la procedura per ottenere posizioni e velocità al tempo  $t + 2\Delta t$ , e così via partendo da un tempo iniziale  $t_i$  fino a un tempo finale  $t_f$ . [6]. In ogni codice  $N$ -body vi sono implementati due algoritmi principali: (i) *soluzione dell'equazione di Poisson* (Poisson solver), calcolo delle forze  $\vec{F}_i(t)$  agenti su ogni particella; (ii) *integrazione temporale*, integrazione delle equazioni del moto  $\vec{v}_i = \dot{\vec{x}}_i$ ,  $\vec{g}_i = \ddot{\vec{x}}_i$  per ogni particella.

Il codice che abbiamo utilizzato per simulare l'evoluzione della dSph, isolata e nel potenziale della MW, è il codice non-collisionale FVFPS (a Fortran Version of a Fast Poisson Solver) presentato da Londrillo et al. (2003), Nipoti et al. (2003) e Nipoti (2003) [32] [38] [39]. Nelle sezioni 5.1 e 5.2 descriveremo alcuni metodi che vengono

utilizzati per come Poisson solver, concentrandoci maggiormente sul cosiddetto *metodo gerarchico*, implementato nel codice FVFPS. Nella §5.3, invece, descriveremo il metodo di integrazione temporale *leapfrog*, anch'esso implementato nel FVFPS.

## 5.1 Poisson solver: somma diretta

Dato un sistema composto da  $N$  particelle di massa  $m_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ), supponiamo di voler calcolare la forza che agisce sulla particella  $i$ -esima semplicemente sommando il contributo di tutte le altre particelle del sistema:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} Gm_j \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} \quad (5.1)$$

Questo metodo comporta il calcolo di  $N - 1$  distanze  $|\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ , dove ognuna di esse può essere utilizzata una volta per calcolare il contributo alla forza dato dalla particella  $j$ -esima sulla particella  $i$ -esima e viceversa. Quindi, nel metodo di *somma diretta* devono essere calcolate almeno  $\frac{1}{2}N(N - 1)$  distanze; pertanto, il costo computazionale aumenta  $\propto N^2$ . Come vedremo ci sono dei metodi più efficienti (e.g. *metodo gerarchico*), in cui il tempo di calcolo scala con  $N \ln N$  o anche con  $N$ , come nel caso del codice FVFPS.

### 5.1.1 Softening

Consideriamo due particelle  $i$  e  $j$  appartenenti ad un sistema a  $N$  corpi e supponiamo di voler calcolare la forza che agisce sulla particella  $i$ -esima come mostrato nella (5.1): tanto più la distanza tra le particelle  $i$  e  $j$  è piccola tanto più sarà grande il contributo alla forza  $\vec{F}_{ij}$ . Mentre nei sistemi collisionali che la forza diverga per  $\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}_j$  è dovuto sia a un fatto fisico che computazionale, nei sistemi non collisionali, la divergenza, è solo un artefatto del campionamento Monte-Carlo della distribuzione di densità:

$$H(\vec{x}) = \int h(\vec{x}) d^3\vec{x} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{h(\vec{x}_i)}{p_s(\vec{x}_i)} \quad (5.2)$$

dove  $N$  è il numero di punti da campionare scelti a seconda della distribuzione di probabilità  $p_s$  (e.g.  $p_s = \rho/M$ ). Introduciamo il *softening* all'interno della (5.1) attraverso il cosiddetto *force softening kernel*,  $S_F(r)$ , per evitare che la simulazione perda significato fisico:

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} Gm_j S_F(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \quad (5.3)$$

Abbiamo semplicemente sostituito un  $r^{-2}$  con la funzione  $S_F(r)$ , dove  $r = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$ . La *force softening kernel* sarà dunque una funzione che tende a  $r^{-2}$  per valori più grandi



della lunghezza di softening e tenderà a zero per valori piccoli del suo argomento. In questo modo l'equazione (5.3) mantiene le seguenti proprietà: (i) la forza esercitata dalla particella  $j$  sulla particella  $i$ ,  $Gm_i m_j S_F(r) \vec{r}/r$ , è uguale e opposta alla forza esercitata da  $i$  su  $j$ , soddisfacendo la terza legge di Newton; (ii) la forza tra due particelle qualsiasi agisce lungo la linea d'azione; (iii) la forza tra due particelle nella stessa posizione è nulla [6].

$S_F(r)$ , in realtà, è la derivata di un'altra funzione,  $S(r)$ , chiamata *softening kernel*, che compare nell'equazione del potenziale generato dalla distribuzione nella posizione della particella  $i$ -esima:

$$\Phi_i \equiv \Phi(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} Gm_j S(|\vec{r}_j - \vec{r}_i|) \quad (5.4)$$

Una tipica funzione adottata per  $S$  è:

$$S(r) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 + \epsilon^2}} \quad (5.5)$$

In questo caso, il potenziale gravitazionale di ogni particella è semplicemente quello di una sfera di Plummer con lunghezza scala  $\epsilon$  che prende il nome di *lunghezza di softening*. [6].

## 5.2 Poisson solver: metodo gerarchico

Tra i vari metodi implementati per la risoluzione dell'equazione di Poisson (e.g. somma diretta, particle-mesh), il *metodo gerarchico*, che fa parte di una famiglia di codici detti *ad albero* (treecode) [1], è molto efficiente, ed è implementato nel codice FVFPS. Tipicamente, il tempo di calcolo per timestep di questo algoritmo è  $\propto N \ln N$ , quindi, per  $N > 10000$ , questo risulta essere molto più efficiente della somma diretta. In questo algoritmo le particelle vengono organizzate in un "albero" (tree): la radice (root) è una cella cubica di lato  $l$  contenente tutte le particelle del sistema. La cella-root viene suddivisa in 8 celle cubiche di lato  $l/2$  (rami dell'albero), ciascuna delle quali, nel caso dovesse contenere più di una particella, viene suddivisa a sua volta in 8 sotto-celle di lato  $l/4$ , e così via fino ad ottenere celle contenenti una sola particella (foglie dell'albero); le celle che contengono una sola particella non vengono suddivise ulteriormente, mentre le celle vuote vengono scartate [6]. Di ogni cella viene calcolata la massa totale (o momento di monopolo), il centro di massa e il momento di quadrupolo, rispettivamente:

$$M_C = \sum_{p \in C} m_p; \quad \vec{x}_C = \frac{1}{M_C} \sum_{p \in C} m_p \vec{x}_p; \quad Q_{C,ij} = \sum_{p \in C} m_p (x_{p,i} - x_{C,i})(x_{p,j} - x_{C,j}) \quad (5.6)$$

dove  $\vec{x}_p = (x_{p,1}, x_{p,2}, x_{p,3})$  è il vettore posizione della particella  $p$ , mentre  $\vec{x}_C = (x_{C,1}, x_{C,2}, x_{C,3})$  è il centro di massa della cella  $C$ . Dalla definizione di centro di

massa notiamo come il momento di dipolo relativo al centro di massa della cella sia nullo. Date queste definizioni, si capisce come quest'algoritmo calcoli in maniera accurata i contributi alla forza esercitata su una particella dalle particelle vicine e in maniera approssimata il contributo delle particelle lontane.

Concentriamoci adesso sul calcolo della forza esercitata su di una particella  $k$  che si trovi in  $\vec{x}_k$ . Una volta verificato che ognuna delle 8 sotto-celle che compongono la cella-root sia sufficientemente distante dalla particella  $k$ , ovvero se  $l_C/R < \theta_0$ , dove  $l_C$  è il lato del cubo  $C$ ,  $R$  è il modulo del vettore  $R = |\vec{x}_C - \vec{x}_k|$  e  $\theta_0 \sim 0.5 - 0.7$  prende il nome di *parametro di apertura*, il contributo della cella al potenziale gravitazionale della particella viene stimato tramite sviluppo in multipolo troncato al quadrupolo:

$$\phi_C(\vec{x}_k) = -GM_C K_{soft}(\vec{R}) - \frac{1}{2}G \sum_{i,j} Q_{C,ij} \frac{\partial^2 K_{soft}(\vec{R})}{\partial R_i \partial R_j} \quad (5.7)$$

dove  $K_{soft}$  non è altro che il softening kernel. Nel caso la cella non dovesse essere sufficientemente distante ( $l_C/R \geq \theta_0$ ), si considerano le sue sottocelle e così via, arrivando alla "foglie dell'albero" il cui contributo al potenziale gravitazionale si riduce ad un metodo di somma diretta.

### 5.3 Integrazione temporale: metodo leapfrog

Ad ogni particella della simulazione viene associato un sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{v} \\ \dot{\vec{v}} = -\nabla\phi \end{cases} \quad (5.8)$$

L'*integrazione temporale* consiste nella risoluzione di questo sistema ad ogni time step per ogni particella. La scelta del metodo di integrazione dipende da diversi fattori, tra i quali il costo computazionale del Poisson solver utilizzato. Un metodo efficiente utilizzato nei codici non-collisionali, come il codice FVFPS, è il metodo *leapfrog*: date al tempo  $t_n$  posizione  $\vec{x}(t_n)$  e velocità  $\vec{v}(t_n)$  di una particella, si vogliono trovare posizioni e velocità al tempo  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ , dove  $\Delta t$  è il time step. [6]. Ad ogni time step vengono fatti avanzare, in maniera alternata (e da qui il nome leapfrog), le velocità e le posizioni. Esistono due schemi che vengono utilizzati per l'integrazione nel metodo leapfrog [6]:

1. *drift-kick-drift*:

$$\vec{x}(t_{n+\frac{1}{2}}) = \vec{x}(t_n) + \frac{1}{2}\vec{v}(t_n)\Delta t \quad (drift) \quad (5.9)$$

$$\vec{v}(t_{n+1}) = \vec{v}(t_n) - \nabla\phi[\vec{x}(t_{n+\frac{1}{2}})]\Delta t \quad (kick) \quad (5.10)$$

$$\vec{x}(t_{n+1}) = \vec{x}(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\vec{v}(t_n)\Delta t \quad (drift) \quad (5.11)$$

2. *kick-drift-kick*:

$$\vec{v}(t_{n+\frac{1}{2}}) = \vec{v}(t_n) - \frac{1}{2} \nabla \phi[\vec{x}(t_n)] \Delta t \quad (\textit{kick}) \quad (5.12)$$

$$\vec{x}(t_{n+1}) = \vec{x}(t_n) + \vec{v}(t_{n+\frac{1}{2}}) \Delta t \quad (\textit{drift}) \quad (5.13)$$

$$\vec{v}(t_{n+1}) = \vec{v}(t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{1}{2} \nabla \phi[\vec{x}(t_{n+1})] \Delta t \quad (\textit{kick}) \quad (5.14)$$

Elenchiamo alcune proprietà che il metodo leapfrog possiede in entrambe le formulazioni:

- Le operazioni di *drift* e *kick* sono derivate da un hamiltoniana, per cui sono simplettiche (il volume nello spazio delle fasi e gli invarianti di Poincaré vengono conservati); ne consegue che il metodo di integrazione sia simplettico a sua volta;
- L'errore commesso dall'algoritmo ad ogni time step scala con  $\Delta t$  come  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ ;
- Applicando lo schema con condizioni iniziali  $\vec{x}(t_{n+1}), -\vec{v}(t_{n+1})$  si ottiene  $\vec{x}(t_n), -\vec{v}(t_n)$ ; pertanto il metodo di integrazione è reversibile.

Le proprietà di simpletticità e reversibilità fanno sì che non si abbia una tendenza da parte dell'algoritmo di accrescere l'energia delle particelle durante l'evoluzione. Conclusa questa parte introduttiva sugli algoritmi implementati nel codice FVFP, apprestiamoci a descrivere i set-up delle simulazioni e a commentarne i risultati.



# Capitolo 6

## Evoluzione dinamica di Fornax nella Milky Way

Attraverso il procedimento illustrato nella §4.1 siamo stati in grado di generare una realizzazione  $N$ -body di una galassia sferoidale nana con profilo di densità totale (DM+stelle) descritto da un modello di Hernquist. La funzione di probabilità,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  (vedi §3.3), è funzione unicamente dell'energia relativa iniziale delle particelle e come abbiamo visto nella sottosezione 4.2.1 è possibile ricavare i profili di densità e massa stellari a partire da set di particelle la cui massa è data da  $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , dove  $m_i$  è la massa della particella  $i$ -esima della distribuzione totale. In questo capitolo applichiamo tale metodo alle simulazioni  $N$ -body: questo ci permetterà di studiare l'evoluzione di una dSph nel potenziale della MW utilizzando un metodo che ci permetta di abbattere i tempi di calcolo non solo per il numero inferiore di particelle necessarie a descrivere il sistema<sup>1</sup>, ma soprattutto per il numero inferiore di simulazioni; infatti da un'unica simulazione siamo in grado di definire diverse condizioni iniziali del sistema stellare, modificando opportunamente i parametri che definiscono la funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ .

Nella §6.1 descriviamo il set-up utilizzato per simulare la dSph isolata, ricavando i profili di densità e massa stellare a partire dalle proprietà della funzione di probabilità. Nella §6.2, invece, studiamo l'evoluzione della dSph nel potenziale della MW, considerando orbite con eccentricità diverse (B012 e B04). Infine nella §6.3 discutiamo i risultati ottenuti confrontando i profili di densità stellare al termine delle simulazioni con il profilo di densità stellare di Fornax, ottenuto tramite deproiezione del profilo di Sérsic, e valuteremo la perdita di massa stellare della sferoidale nana. Il confronto con Fornax è un confronto qualitativo, che vuole esclusivamente mostrare la validità

---

<sup>1</sup>Rappresentando con un'unica componente il sistema  $N$ -body si può ottenere la stessa risoluzione sulla componente stellare con un numero di particelle molto inferiore. Ad esempio, Battaglia et al. (2015) usano  $10^6$  particelle per rappresentare Fornax con due componenti, mentre noi otteniamo una risoluzione simile con solo  $10^5$  particelle.

del metodo presentato in questo lavoro. Per semplicità rappresenteremo Fornax senza gas. Questa è una buona approssimazione negli ultimi  $\sim 2$  Gyr di evoluzione, in cui Fornax ha formato poche stelle, ma non altrettanto in tempi precedenti. I nostri risultati dovranno quindi essere verificati con modelli più sofisticati che tengono conto della SFH estesa di Fornax.

## 6.1 Evoluzione della dSph isolata

Prima di lanciare la simulazione della dSph in orbita nella MW, consideriamo l'evoluzione della dSph isolata per avere una misura degli effetti numerici. L'evoluzione isolata della realizzazione  $N$ -body presentata nella §4.1, che, ricordiamo, rappresenta una dSph con profilo di densità totale (DM+stelle) generato da un modello di Hernquist, è stata simulata avvalendoci del codice non-collisionale FVFPS. Lo scopo di questa simulazione è verificare che i profili di densità e massa (totale e stellare) della dSph rimangano invariati. A questo punto è importante notare che, sia in questo caso che in quello dell'evoluzione della dSph nel potenziale della MW, che vedremo più avanti, faremo evolvere esclusivamente la realizzazione  $N$ -body descritta dal modello di Hernquist, in modo da poter ricavare al termine della simulazione, tramite l'utilizzo della funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , i profili di densità e massa stellari, abbattendo i tempi di calcolo che normalmente sono richiesti per questo tipo di simulazioni.

### Set-up della simulazione

Abbiamo simulato l'evoluzione della dSph isolata per 12 Gyr con le seguenti condizioni iniziali:  $M = 4.5 \times 10^7 M_\odot$ ,  $r_c = 0.9$  kpc,  $N = 10^5$ ; utilizzando un parametro di apertura  $\theta_0 = 0.5$ , una lunghezza di softening fissata a  $\epsilon = 0.02$  kpc e un time step costante  $\Delta t = 0.01 t_{dyn}$ , dove:

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{1}{G\bar{\rho}_h}} \quad (6.1)$$

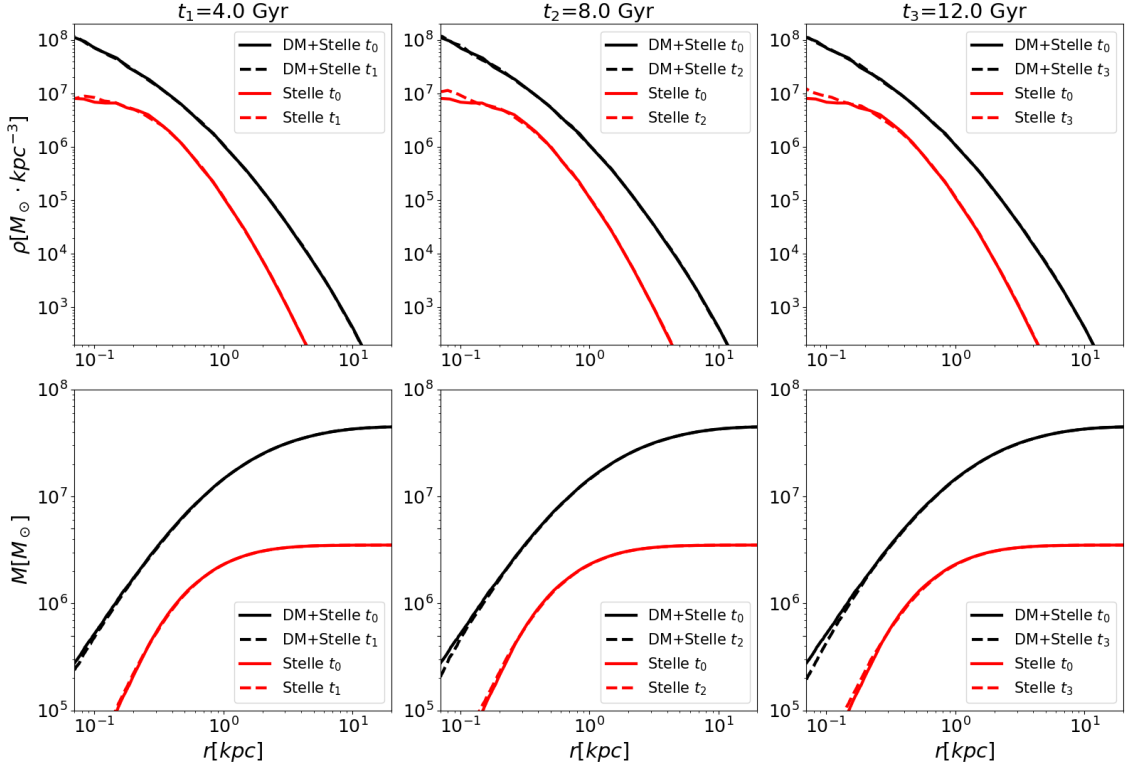
è il *tempo dinamico* iniziale, ovvero il tempo di attraversamento tipico del sistema [6], mentre

$$\bar{\rho}_h = \frac{M/2}{\frac{4}{3}\pi r_h^3} \quad (6.2)$$

è la densità media 3D stimata considerando la materia all'interno del raggio di metà massa ( $r_h$ ). Il tempo dinamico calcolato per questa simulazione è di  $\approx 5 \times 10^8$  yr.

### 6.1.1 Risultati

Dalla Figura 6.1 notiamo che la forma del profilo di densità (massa) totale viene conservata per tutta la durata della simulazione (curva nera tratteggiata) e quindi che

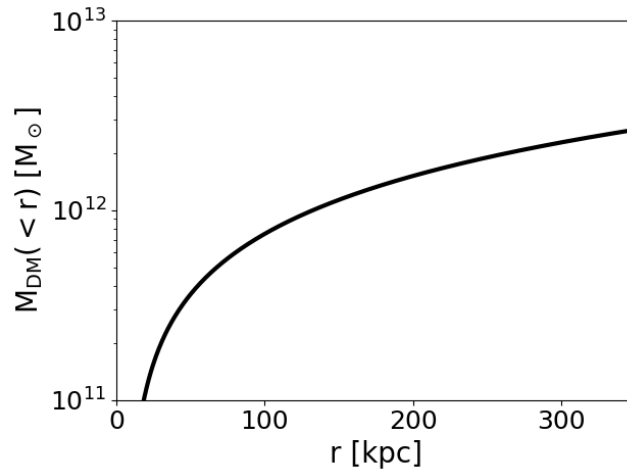


**Figura 6.1:** Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare, all'istante iniziale (linea continua) e a istanti successivi (linea tratteggiata) dell'evoluzione della galassia nana isolata. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità Plummer-like, cioè che meglio riproduce un profilo stellare di Plummer a  $t = 0$ .

il modello generato è effettivamente in equilibrio. Utilizzando i set di particelle che generano i profili di densità e massa totale (DM+stelle) nei vari snapshot in Figura 6.1, abbiamo costruito dei profili stellari Plummer-like avvalendoci della funzione di probabilità, con lo stesso metodo illustrato nella sottosezione 4.2.1. I valori assegnati ai parametri liberi contenuti nella  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  per riprodurre un profilo stellare Plummer-like sono gli stessi trovati nella §4.2. Anche in questo caso, come ci si aspetta, dato il risultato su  $\rho_{tot}$ , la forma dei profili si mantiene invariata per tutta la durata della simulazione (curva rossa tratteggiata).

## 6.2 Evoluzione della dSph nel potenziale della MW

Per simulare l'evoluzione della sferoidale nana, anche in questo caso rappresentata da una distribuzione di densità totale con profilo di Hernquist, nel potenziale della MW, è stato utilizzato il codice non-collisionale FVFPS, con lo stesso set-up presentato nella sezione precedente. A partire dalle condizioni iniziali note da Battaglia, Sollima e Nipoti (2015) [3] abbiamo studiato due orbite Fornax-like (B012 e B04) per la dSph, presentate in Figura 6.3, ed entrambe compatibili (entro  $2\sigma$ ) con i dati astrometrici



**Figura 6.2:** Profilo di massa dell'alone di materia oscura del modello J95 [25].

forniti dal satellite GAIA [16]. L'orbita B012 è un'orbita quasi polare, con raggio pericentrico  $r_p = 121$  kpc e raggio apocentrico  $r_a = 156$  kpc, quindi con eccentricità orbitale  $e = (r_a - r_p)/(r_a + r_p) \simeq 0.12$ ; l'orbita B04 ha eccentricità  $e \simeq 0.4$ , raggio pericentrico  $r_p = 61$  kpc e raggio apocentrico  $r_a = 143$  kpc. I parametri orbitali di entrambe le orbite sono stati stimati in modo da poter riprodurre, al termine della simulazione, la posizione odierna di Fornax. Considerando un'evoluzione di 12 Gyr, la galassia nana attraversa tre passaggi pericentrici nell'orbita B012 e cinque passaggi pericentrici nell'orbita B04. In ogni simulazione abbiamo rappresentato la MW con un potenziale gravitazionale fisso (J95) di Johnson, Spergel & Hernquist (1995) [25] composto da un disco di Miyamoto & Nagai (1975) [37], con potenziale

$$\phi_{disc} = -\frac{GM_{disc}}{\sqrt{R^2 + (a + \sqrt{z^2 + b^2})^2}}, \quad (6.3)$$

un bulge sferico descritto da un modello di Hernquist (1990) [21] con potenziale

$$\phi_{bulge} = -\frac{GM_{bulge}}{r + c}, \quad (6.4)$$

e un alone di materia oscura con potenziale

$$\phi_{halo} = v_{halo}^2 \ln(r^2 + d_{halo}^2), \quad (6.5)$$

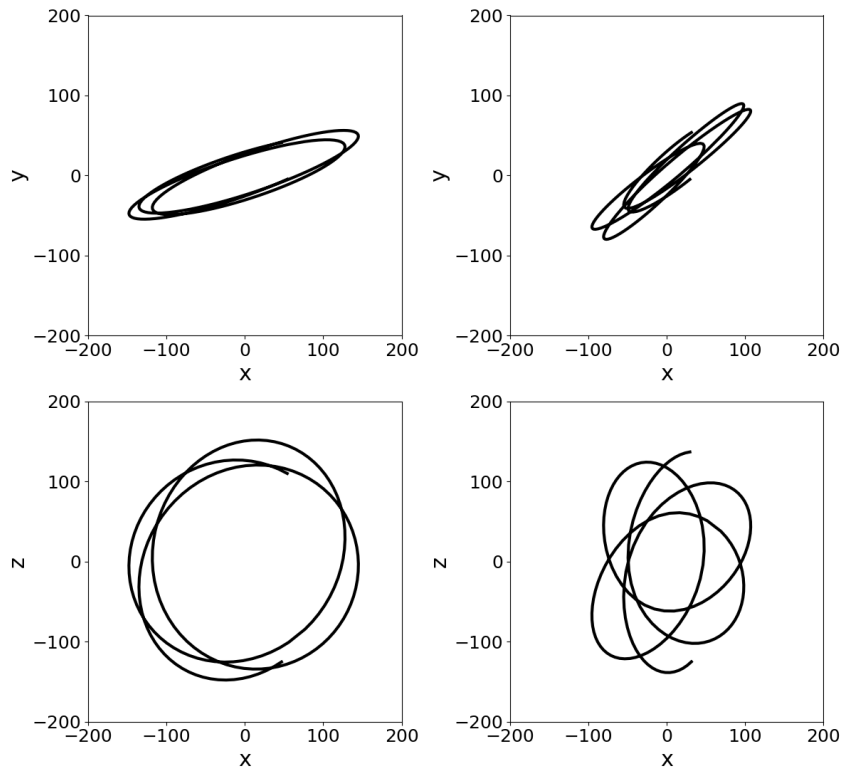
dove  $r$  è la coordinata galattocentrica sferica radiale, mentre  $R$  e  $z$  sono le coordinate galattocentriche cilindriche, rispettivamente, radiale e verticale. Abbiamo assunto  $M_{disc} = 10^{11} M_\odot$ ,  $M_{bulge} = 3.4 \times 10^{10} M_\odot$ ,  $v_{halo} = 128 \text{ km s}^{-1}$ ,  $a = 6.5$  kpc,  $b = 0.26$  kpc,  $c = 0.7$  kpc e  $d_{halo} = 12$  kpc. In Figura 6.2 è riportato il profilo di massa dell'alone di materia oscura del modello J95. Questo è un modello "pesante" di MW, che abbiamo scelto proprio per massimizzare gli effetti mareali sulla galassia satellite. In futuro sarebbe utile considerare anche altri modelli per il potenziale della MW (e.g. Bovy (2014) [7]).



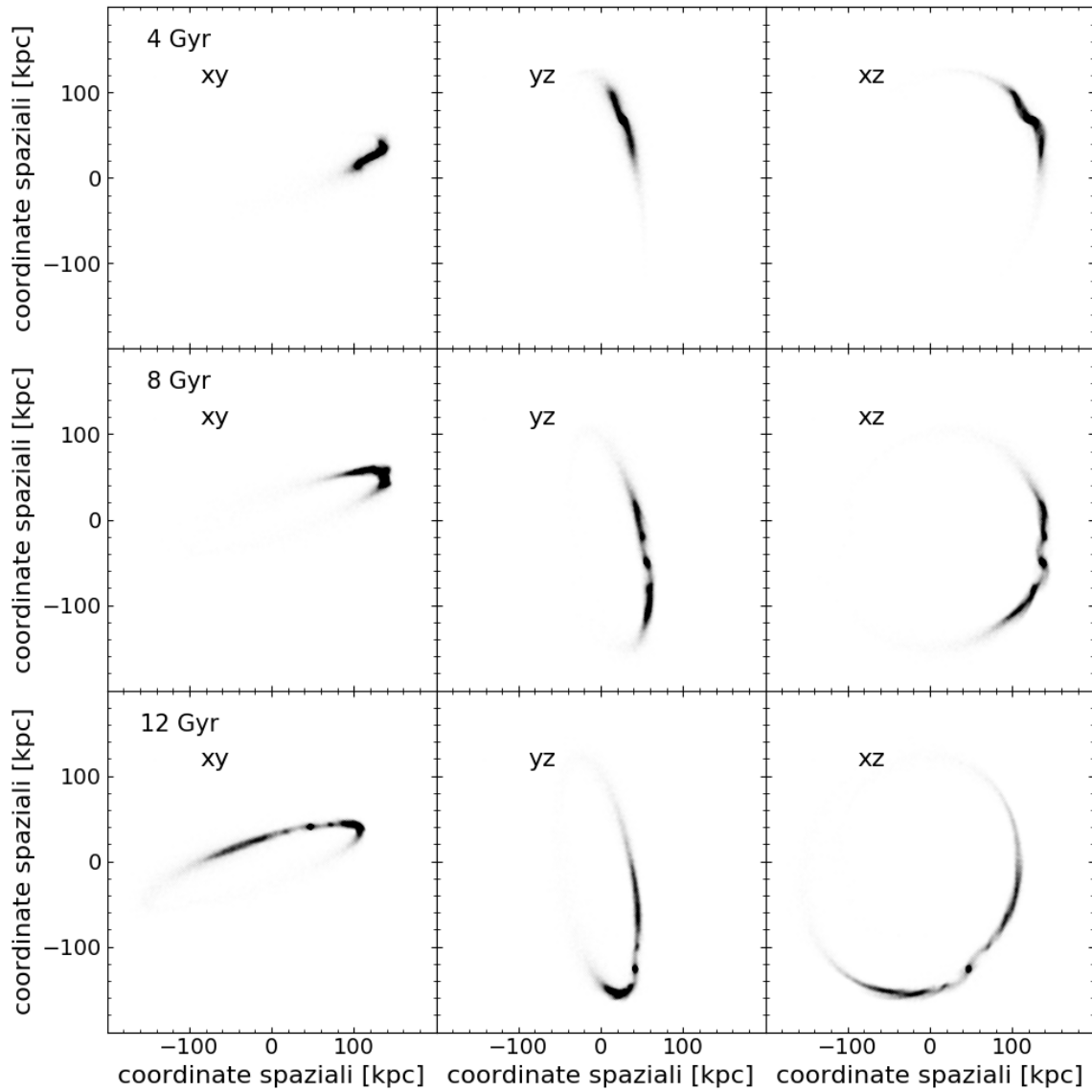
### 6.2.1 Risultati

Presentiamo ora i risultati delle simulazioni relative all'evoluzione della dSph per 12 Gyr nel potenziale della MW. Le simulazioni presentano i medesimi parametri per il modello di galassia nana ( $M = 4.5 \times 10^7 M_\odot$ ,  $r_c = 0.9$  kpc,  $N = 10^5$ ) ma differiscono esclusivamente per i parametri orbitali (B012,  $e = 0.12$ ; B04,  $e = 0.4$ ).

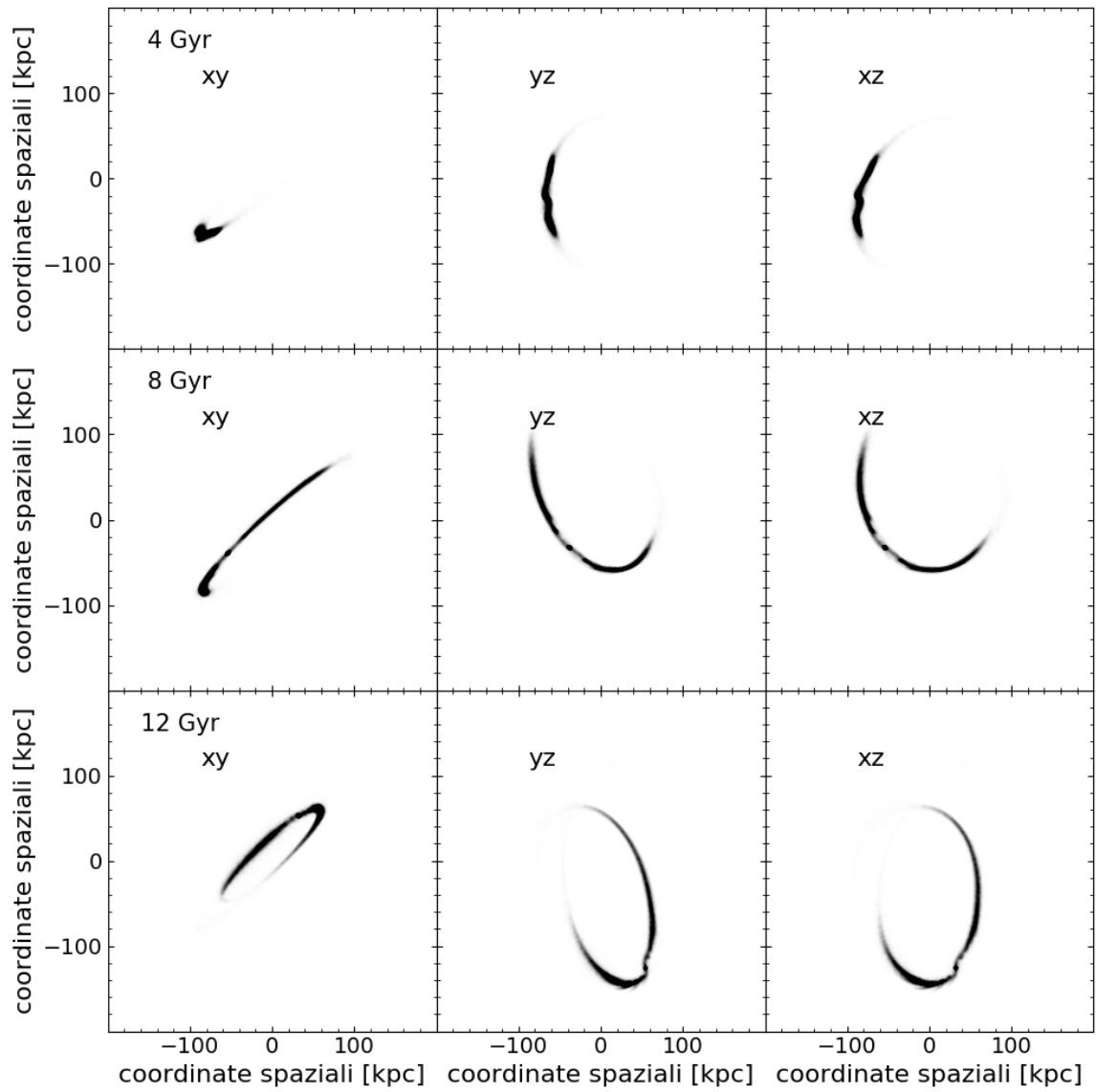
Le Figure 6.4-6.5, rispettivamente per l'orbita B012 e B04, mostrano la distribuzione spaziale delle particelle appartenenti alla galassia satellite dopo 4, 8 e 12 Gyr; in entrambi i casi possono essere apprezzati gli effetti mareali subiti dalla dSph. Nelle Figure 6.6-6.7 vengono confrontati i profili di densità e massa (totale e stellare) a 4, 8 e 12 Gyr con quelli iniziali. I profili stellari sono stati ricavati sfruttando la funzione di probabilità,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  (4.3), con valori dei parametri Plummer-like (Tabella 6.1). Nei profili di densità a 4, 8 e 12 Gyr, tra 2 e 5 kpc, in entrambe le orbite, è presente una risalita nel profilo di densità della distribuzione totale. Osservando le Figure 6.8-6.9 interpretiamo questo fatto notando che la risalita inizia dove la densità comincia a essere dominata dalle code mareali e non dalla distribuzione a simmetria circolare. Questo effetto è ben più evidente per l'orbita B04: considerando i pannelli a 12 Gyr della Figura 6.9, già da 1.5 kpc la densità inizia ad essere dominata dalle code mareali.



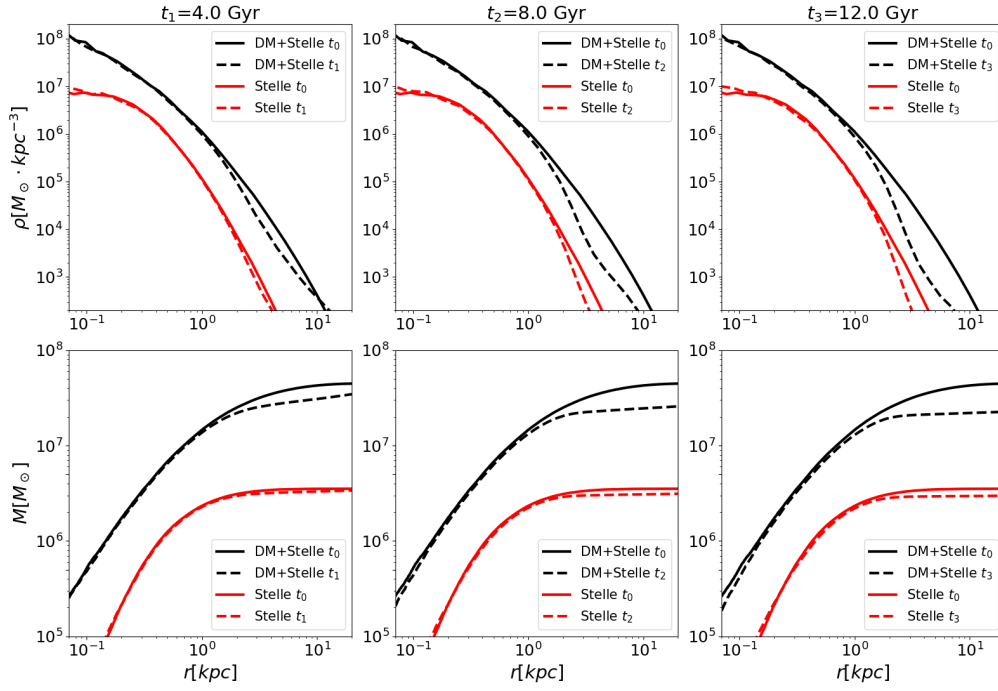
**Figura 6.3:** Orbite B012 (pannelli a sinistra) e B04 (pannelli a destra) integrate nel potenziale della MW per 12 Gyr. In questa figura,  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono le coordinate galattocentriche cartesiane in unità di kpc ( $z$  è ortogonale al piano galattico).



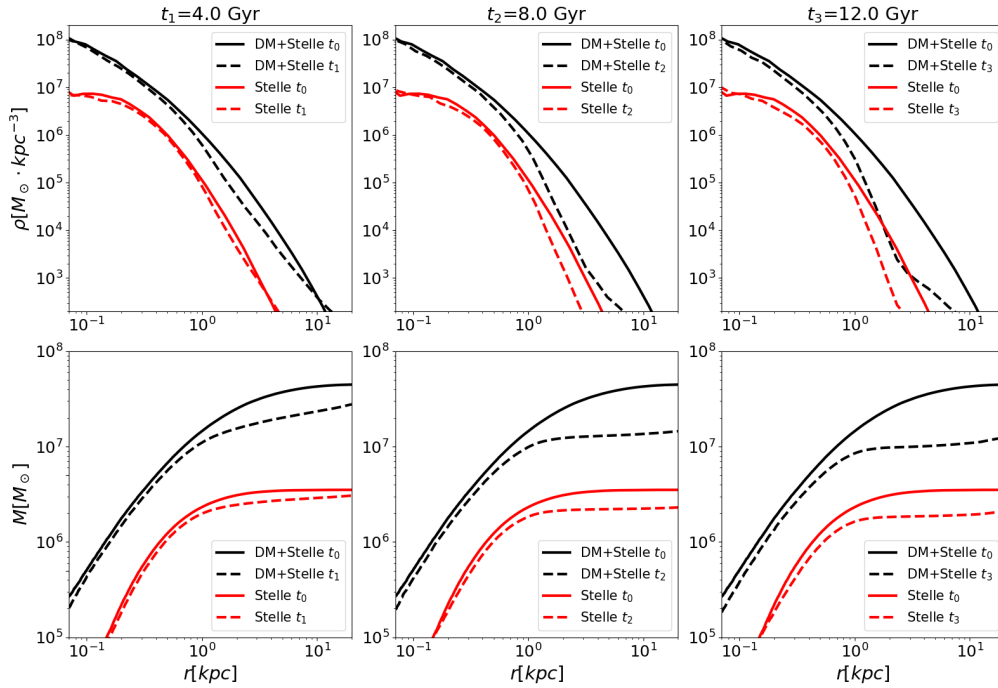
**Figura 6.4:** Distribuzione delle particelle della galassia satellite osservate nei piani  $xy$ ,  $yz$  e  $xz$  (da sinistra a destra) per la simulazione dell'orbita B012, dopo 4, 8 e 12 Gyr (dall'alto verso il basso). Qui  $x$ ,  $y$  e  $z$  sono le coordinate galattocentriche cartesiane in unità di kpc ( $z$  è ortogonale al piano galattico).



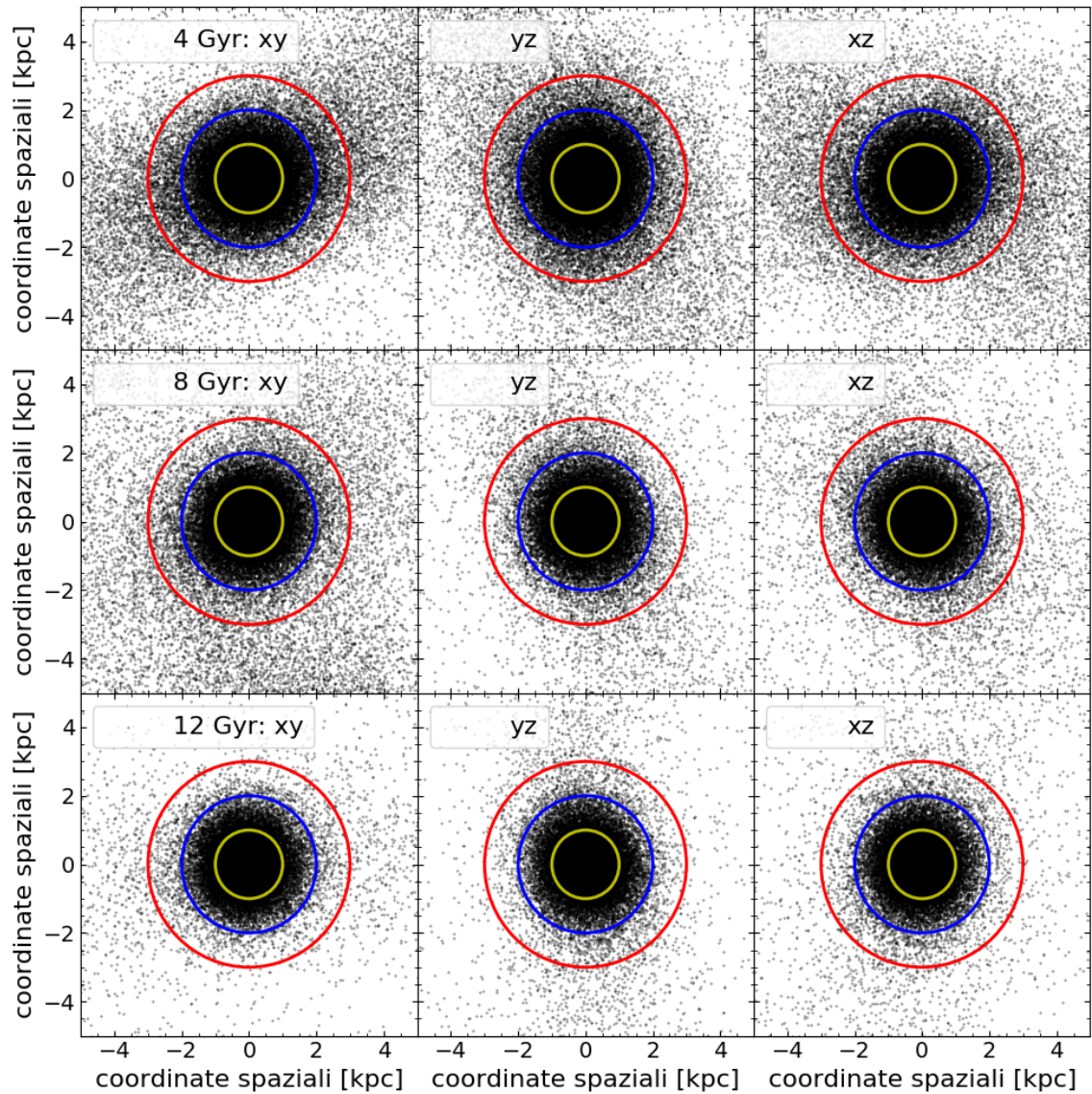
**Figura 6.5:** Come in Figura 6.4 ma per l'orbita B04.



**Figura 6.6:** Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare della sferoidale nana in orbita (caso B012) nel potenziale della MW, calcolati a vari tempi evolutivi. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità che meglio riproduce i profili generati da un modello Plummer (vedi Tabella 6.1) alle particelle della distribuzione totale a tempi diversi della simulazione.

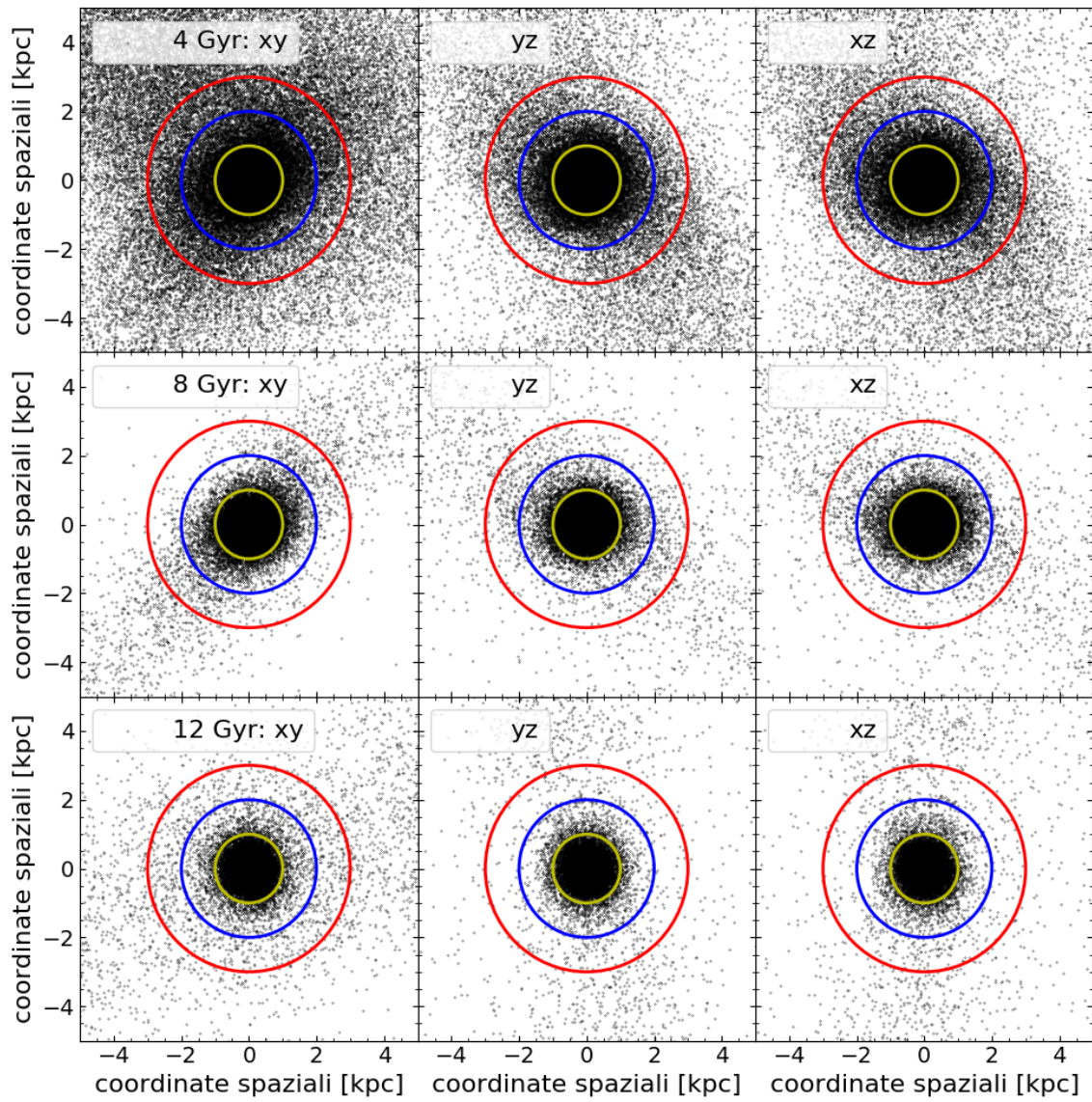


**Figura 6.7:** Come in Figura 6.6 ma per l'orbita B04.



**Figura 6.8:** In figura vengono mostrati gli ingrandimenti sulla galassia nana nei piani xy, yz e xz (da sinistra verso destra) per la simulazione dell'orbita B012, dopo 4, 8 e 12 Gyr (dall'alto verso il basso). In ogni pannello vengono delineate delle regioni a 1,2 e 3 kpc (rispettivamente linea gialla, blu e rossa) per mettere in evidenza il contributo dato dalle code mareali alla densità.





**Figura 6.9:** Come in Figura 6.8 ma per l'orbita B04.

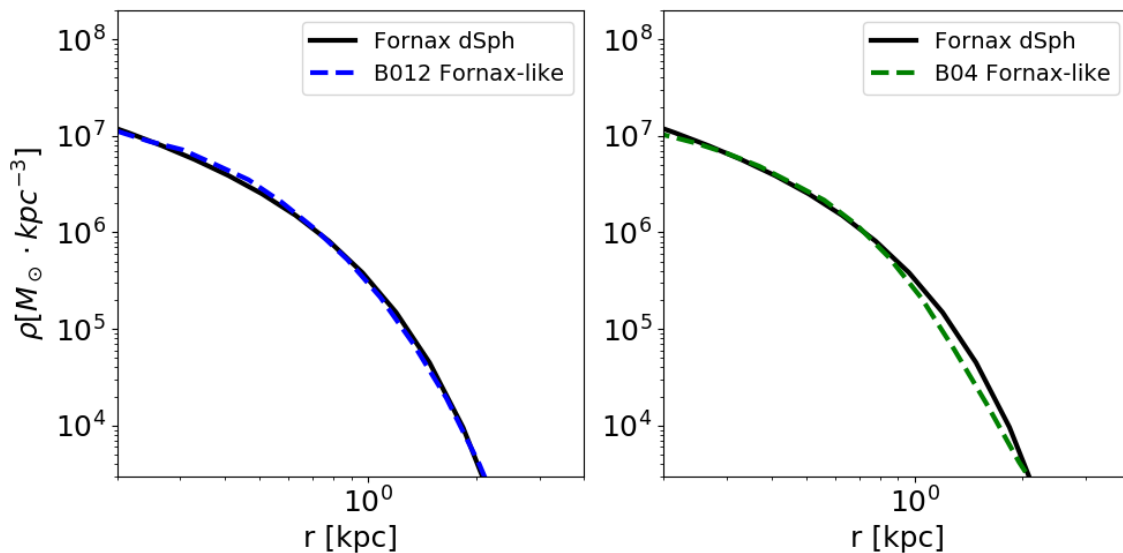
Modello	A	$\alpha$	$\mathcal{E}_0$	$\beta$
Plummer-like	0.38	1.66	191 km <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	14.50
Fornax-like B012	0.50	7.50	85 km <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	2.39
Fornax-like B04	0.12	7.00	50 km <sup>2</sup> s <sup>-2</sup>	1.60

**Tabella 6.1:** Valori dei parametri liberi che definiscono la funzione di probabilità (4.3) nel caso dei profili stellari (dell'alto verso il basso): Plummer-like, Fornax-like B012 e Fornax-like B04.

### 6.3 Fornax: funzione di probabilità

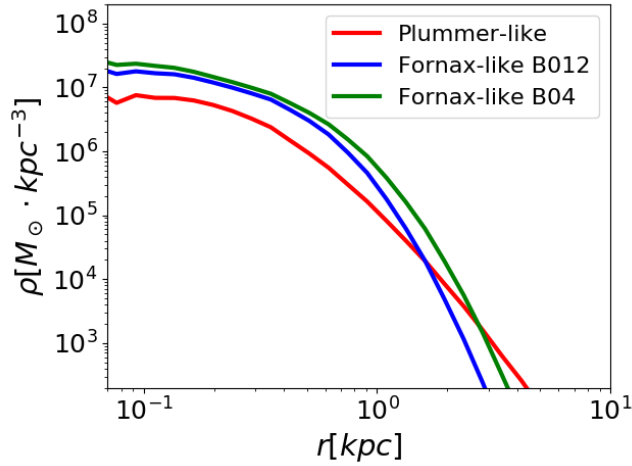
Sino a questo momento abbiamo verificato l'efficacia del metodo della funzione di probabilità applicata alle masse dei set di particelle della distribuzione totale, in modo da ricavare dei profili di densità e massa stellari Plummer-like. Riprendiamo adesso il profilo di densità stellare di Fornax ottenuto dalla deproiezione del profilo di Sérsic (vedi §1.1): modificando i parametri che definiscono la funzione di probabilità siamo in grado, a partire dai set di particelle che producono i profili di densità totale degli snapshot a 12 Gyr nelle Figure 6.6-6.7, di adattare i profili di densità stellari a quello di Fornax. Questo esperimento è propedeutico a un caso più realistico dove il confronto viene fatto utilizzando dei profili stellari proiettati osservati e non 3D, come invece facciamo in questo caso. Le funzioni di probabilità che applicate alle distribuzioni di particelle evolute restituiscono le curve in Figura 6.10 non sono state calcolate tramite esplorazione sistematica dello spazio dei parametri, ma sono state ricavate andando ad aggiustare ciascun parametro in modo da ottenere dei profili stellari che meglio si adattassero a quello della galassia nana. Questo è sufficiente per gli obiettivi di questa tesi il cui scopo principale è presentare il metodo basato sulla funzione di probabilità,  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$ , e non fare un confronto dettagliato con i dati osservativi. In Figura 6.11 presentiamo il confronto tra i profili di densità stellari iniziali, ricavati applicando la funzione di probabilità alle particelle della distribuzione totale iniziale, nei casi: Plummer-like, Fornax-like B012 e Fornax-like B04. I set di parametri che definiscono la  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  nei vari casi sono riportati in Tabella 6.1. Nelle figure 6.12-6.13 vengono confrontati i profili di densità e massa (totale e stellare) a 4, 8 e 12 Gyr con quelli iniziali. I profili stellari sono stati ricavati sfruttando le funzioni di probabilità che meglio riproducono il profilo stellare di Fornax per l'orbita B012 e per l'orbita B04. Giustificiamo la risalita nei profili di densità totale a 4, 8 e 12 Gyr, tra 2 e 5 kpc, con le stesse argomentazioni della sottosezione precedente. Dal momento che siamo maggiormente interessati ai profili stellari, notiamo che praticamente tutta la massa stellare è contenuta all'interno di un raggio di  $\sim 3$  kpc, come riportato, ad esempio, da Pascale et al. (2018) [40]; di conseguenza la nostra analisi proseguirà prendendo questo raggio come raggio di riferimento.

Studiamo la perdita di massa in funzione del tempo per i due modelli (Figura 6.14). Considerando la massa totale e stellare entro un raggio di 3 kpc a tempi diversi dell'evoluzione, troviamo che per l'orbita meno eccentrica, B012, la dSph con profilo stellare Fornax-like, al termine dell'evoluzione, perde il  $\approx 2\%$  della massa stellare iniziale ( $M_*( < 3 \text{ kpc}) \simeq 7.8 \times 10^6 M_\odot$ ), mentre per l'orbita B04 perde  $\approx 43\%$  della massa stellare iniziale ( $M_*( < 3 \text{ kpc}) \simeq 1.2 \times 10^7 M_\odot$ ). È importante notare che le masse stellari iniziali, in questo caso, sono diverse in quanto diversa è la scelta dei parametri nella funzione di probabilità che applicata alle particelle della distribuzione totale evoluta nell'orbita B012 e B04 restituisce i profili in Figura 6.10.

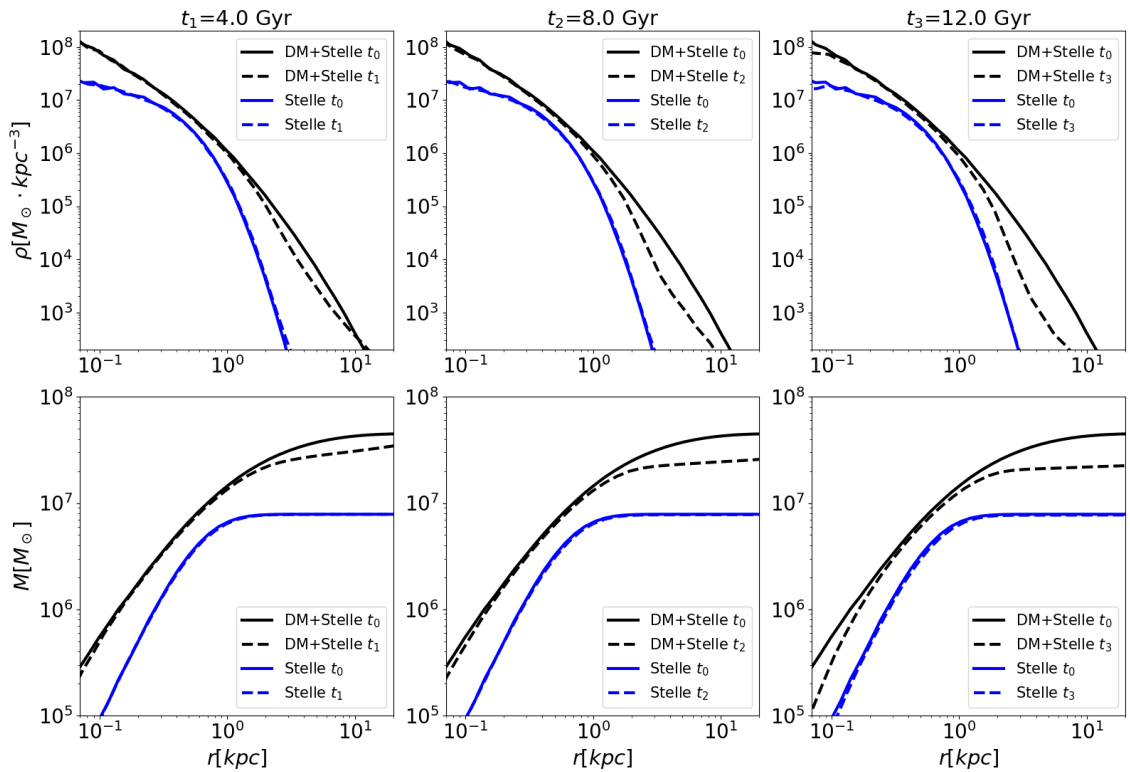


**Figura 6.10:** Confronto tra il profilo di densità stellare osservato di Fornax e i profili stellari ottenuti applicando la funzione di probabilità ai set di particelle evolute della distribuzione totale negli snapshot finali delle Figure 6.6-6.7. Un'opportuna scelta dei parametri che definiscono la  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  (vedi Tabella 6.1) ci ha permesso di trovare, sia per l'orbita B012 (pannello di sinistra) che per l'orbita B04 (pannello di destra), dei buoni profili che si adattano a quello stellare di Fornax.





**Figura 6.11:** Confronto tra i profili stellari iniziali ottenuti applicando la funzione di probabilità, i cui parametri per rappresentare i diversi casi sono riportati in Tabella 6.1, alle masse delle particelle della distribuzione totale iniziale.



**Figura 6.12:** Confronti tra i profili di densità (pannelli in alto) e di massa (pannelli in basso) totale e stellare della sferoidale nana in orbita (caso B012) nel potenziale della MW, calcolati a vari tempi evolutivi. I profili stellari sono stati ricavati applicando la funzione di probabilità che meglio riproduce un profilo Fornax-like (vedi Tabella 6.1) alle particelle della distribuzione totale a tempi diversi della simulazione.

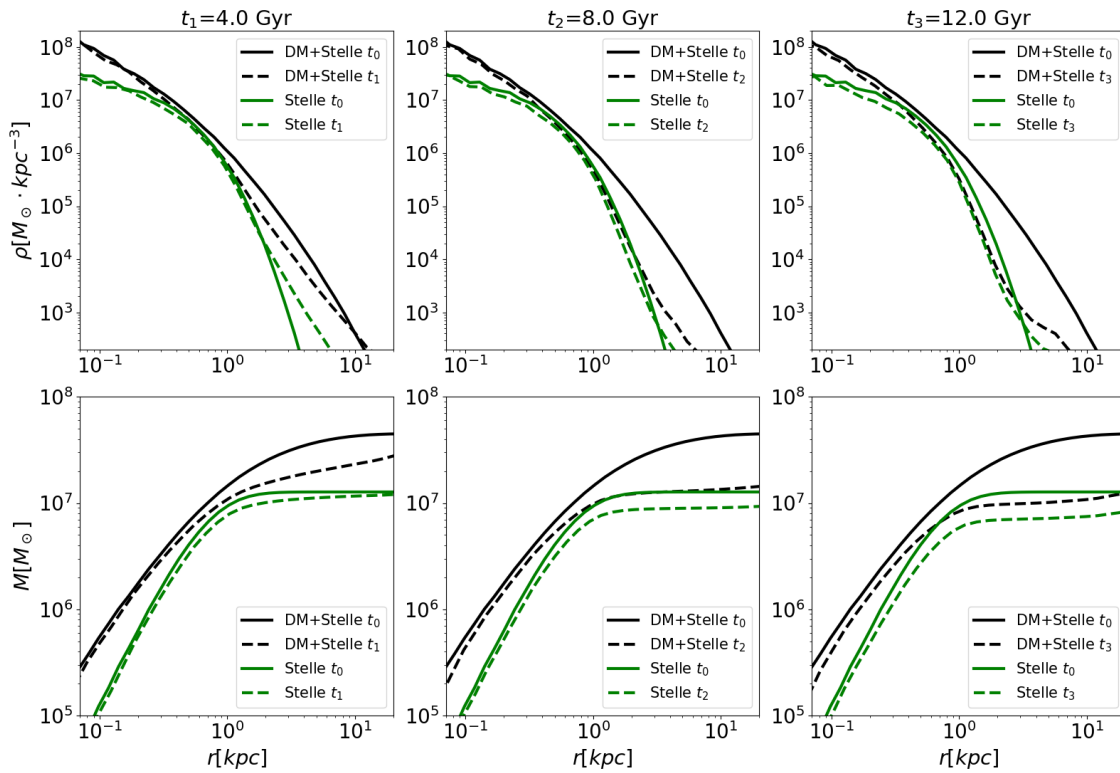


Figura 6.13: Come in Figura 6.12 ma per l'orbita B04.

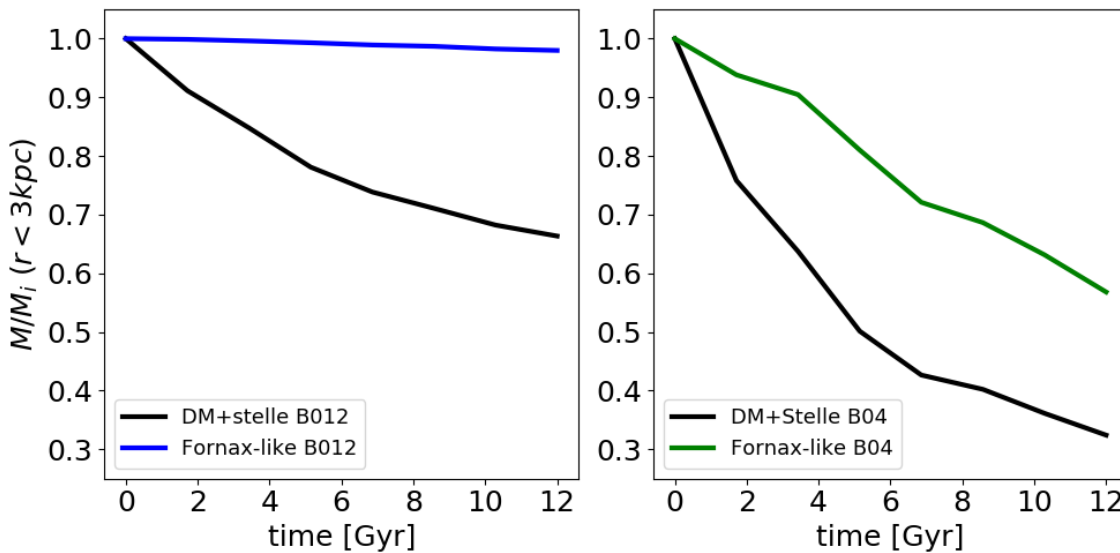


Figura 6.14: Rapporti di massa su massa iniziale della distribuzione totale (curva nera) e stellare Fornax-like (curva verde) in funzione del tempo. Nel pannello a sinistra è riportato il caso dell'orbita B012, mentre in quello a destra dell'orbita B04.

# Capitolo 7

## Conclusioni

In questo lavoro di tesi siamo riusciti a trovare un metodo efficiente, in termini di tempo di calcolo e di esplorazione delle condizioni iniziali, per studiare l'evoluzione di un sistema stellare a due componenti in orbita nel potenziale della MW. Per fare questo abbiamo introdotto la funzione di probabilità  $\mathcal{P}_*(\mathcal{E})$  definita come il rapporto tra la funzione di distribuzione di una delle due componenti che appartengono al sistema, nel nostro caso quella stellare, e la funzione di distribuzione totale del sistema, entrambe assunte ergodiche. La funzione di probabilità così definita indica la probabilità che una particella della distribuzione totale con energia  $\mathcal{E}$  appartenga alla componente stellare. Per semplicità, abbiamo innanzitutto costruito un modello di galassia sferoidale nana utilizzando il modello di Hernquist per descrivere la distribuzione totale e il modello di Plummer per descrivere la componente stellare; questi sono entrambi modelli sferici per i quali abbiamo assunto una DF ergodica, ovvero una DF che dipende esclusivamente dall'energia delle particelle.

Come mostrato nella §4.2 l'andamento analitico trovato per la funzione di probabilità, calcolata come il rapporto delle funzioni di distribuzione di questi modelli, è quello di una Schechter generalizzata (4.3). A questo punto, moltiplicando la massa delle particelle che compongono la distribuzione totale per la funzione di probabilità, modellata dalla Schechter generalizzata, troviamo un set di particelle con massa  $m_{*,i} = m_i \mathcal{P}_i$ , dove  $m_i$  è la massa totale della particella, dalla quale possiamo estrarre diversi profili stellari a seconda della scelta dei parametri liberi nella (4.3). Siamo dunque in grado di costruire dei profili stellari a posteriori, senza dover definire un set-up iniziale per la componente stellare. Tutto questo lavoro viene fatto in vista dell'evoluzione della sferoidale nana nel potenziale della MW. Tramite il codice non collisionale FVFPS abbiamo simulato l'evoluzione della galassia nana isolata per 12 Gyr, in modo da poter stimare gli effetti numerici. La distribuzione di densità stellare è ottenuta moltiplicando le masse dei set di particelle evoluti per la funzione di probabilità. Dal momento che, come abbiamo già detto, la funzione di probabilità

è funzione esclusivamente dell'energia iniziale delle particelle, siamo riusciti a ottenere dei profili stellari Plummer-like che mantengono invariata la loro forma per tutta la durata della simulazione (Figura 6.1). Verificato ciò abbiamo simulato l'evoluzione della dSph nel potenziale della MW considerando due orbite, ricavate dalle condizioni iniziali riportate in Battaglia et al. (2015) [3]: una meno eccentrica (B012) con eccentricità  $e = 0.12$  e una più eccentrica (B04) con eccentricità  $e = 0.4$ . Le orbite sono tali che a 12 Gyr il satellite si trovi nella posizione odierna di Fornax. Seguendo lo stesso procedimento dell'evoluzione isolata siamo riusciti a ricavare un profilo stellare che ben rappresenta un Plummer a  $t = 0$ , applicando la funzione di probabilità al set di particelle della distribuzione totale. Questo profilo viene poi modificato dagli effetti mareali nelle parti esterne (Figure 6.6-6.7). Successivamente abbiamo preso come riferimento osservativo il profilo di densità stellare di Fornax come la deproiezione del profilo di Sérsic (vedi §1.1). Andando a modificare opportunamente i parametri che definiscono la funzione di probabilità e applicandola poi ai set di particelle che generano i profili di densità totale evoluti a 12 Gyr, siamo riusciti ad ottenere dei profili di densità, per entrambe le orbite, che si adattano abbastanza bene a quello 3D di Fornax (Figura 6.10). Studiando la perdita di massa stellare in funzione del tempo per i modelli Fornax-like troviamo che in 12 Gyr la dSph perde circa il 43% della massa stellare iniziale per l'orbita B04 (Figura 6.13), mentre solo il 2% per l'orbita meno eccentrica B012. Se il risultato ottenuto per l'orbita più eccentrica fosse confermato da un'esplorazione più estesa dello spazio dei parametri e da un confronto più accurato con i dati osservativi, si potrebbero avere importanti implicazioni astrofisiche, in particolare, riguardo al mass budget problem dei GC di Fornax: l'upper limit trovato da Larsen et al. (2012) [29], secondo cui la massa delle stelle di campo può essere al massimo 4-5 volte più grande di quella dei suoi ammassi globulari, verrebbe spostato sino ad un fattore  $\sim 7 - 9$  rientrando così all'interno del range di valori (5-20) proposto da Renzini et al. (2015) per alcuni scenari, tra cui quello AGB, di formazione di popolazioni stellari multiple nei GC.

Le assunzioni fatte alla base della definizione di funzione di probabilità sono relativamente forti. Per costruirla, infatti, abbiamo considerato due modelli a simmetria sferica che presentano funzioni di distribuzioni ergodiche e questo ci ha permesso di applicare la funzione di probabilità alle distribuzioni che descrivono la dSph a tempi diversi dell'evoluzione. In futuro oltre a poter considerare delle distribuzioni diverse da quella di Hernquist per descrivere la distribuzione totale, oltre a un set-up più realistico che ci permetta di descrivere con maggiore accuratezza Fornax, si potrebbero studiare delle nuove orbite, per quanto quelle considerate in questo lavoro siano consistenti con i dati astrometrici forniti da GAIA [16], per valutare degli effetti mareali che permettano al sistema di perdere ancora più massa. Sarebbe inoltre opportuno, oltre a verificare con maggiore accuratezza come i profili stellari costruiti a partire

dalla funzione di probabilità possano adattarsi a quelli osservati, fare un confronto direttamente con le principali quantità osservabili di Fornax, quali il profilo di densità superficiale in numero di stelle e il profilo di dispersione di velocità stellare lungo la linea di vista. Infine, ricordiamo che per semplicità abbiamo trascurato la presenza di gas e i processi di formazione stellare, che, per quanto trascurabili in tempi recenti, sono senz'altro importanti nelle prime fasi dell'evoluzione di Fornax nella MW. In futuro dovremo considerare dei modelli più sofisticati che tengano conto degli effetti del gas e della formazione stellare.



# Ringraziamenti

Un particolare ringraziamento va al mio relatore, Carlo Nipoti, che mi ha seguito, con grande disponibilità, in ogni step della realizzazione di questo lavoro, fin dalla scelta dell'argomento, aiutandomi a superare difficoltà e ostacoli lungo il percorso. Un doveroso ringraziamento va anche ai miei correlatori, Francesco e Giuliano, per i preziosi consigli e per la pazienza che hanno dedicato alle mie incomprensioni.

Ringrazio infinitamente mia madre e mio padre, per il loro sostegno e la loro costante presenza in questi anni lontano da casa; tutto quello che son riuscito a fare è anche merito vostro. Assieme a loro ringrazio mio fratello, consigliere e spalla sulla quale posso sempre contare.

Agli inquilini di *via Paolo Costa 3*, Fabio, Antonio, Silvia, Alberto, Marilena e Fabrizio, e a tutte le persone con la quale ho condiviso questo *tratto di strada*, grazie.





# Bibliografia

- [1] Barnes, J. and Hut, P. A hierarchical  $O(N \log N)$  force-calculation algorithm. *Nature*, 324(6096):446–449, 1986.
- [2] Battaglia, G. et al. The DART imaging and CaT survey of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Astronomy & Astrophysics*, 459(2):423–440, 2006.
- [3] Battaglia, G., Sollima, A. and Nipoti, C. The effect of tides on the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 454(3):2401–2415, 2015.
- [4] Beauchamp, D. et al. Color-magnitude diagrams for clusters 2 and 4, and the field in the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *The Astronomical Journal*, 109:1628–1633, 1995.
- [5] Binggeli, B., Sandage, A. and Tammann, G.A. Studies of the Virgo Cluster. II-A catalog of 2096 galaxies in the Virgo Cluster area. *The Astronomical Journal*, 90:1681–1759, 1985.
- [6] Binney, J. and Tremaine, S. *Galactic dynamics*. Princeton university press, 2008.
- [7] Bovy, J. Dynamical modeling of tidal streams. *The Astrophysical Journal*, 795(1):95, 2014.
- [8] Calura, F., Ciotti, L. and Nipoti, C. A fast and accurate method to compute the mass return from multiple stellar populations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 440(4):3341–3348, 2014.
- [9] Christlieb, N. et al. A stellar relic from the early Milky Way. *Nature*, 419(6910):904–906, 2002.
- [10] de Boer, T.J.L. et al. The star formation and chemical evolution history of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Astronomy & Astrophysics*, 544:A73, 2012.
- [11] D’Ercole, A. et al. Abundance patterns of multiple populations in globular clusters: a chemical evolution model based on yields from AGB ejecta. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 407(2):854–869, 2010.

- [12] Elmegreen, B.G. The specific frequency of globular clusters in galaxies. In *Toward a New Millennium in Galaxy Morphology*, pages 469–484. Springer, 2000.
- [13] Ferguson, H.C. and Binggeli, B. Dwarf elliptical galaxies. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 6(1-2):67–122, 1994.
- [14] Frenk, C.S. and White, S.D.M. Dark matter and cosmic structure. *Annalen der Physik*, 524(9-10):507–534, 2012.
- [15] Frieman, J.A., Turner, M.S. and Huterer, D. Dark energy and the accelerating universe. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 46:385–432, 2008.
- [16] Gaia Collaboration et al. Gaia Data Release 2-Kinematics of globular clusters and dwarf galaxies around the Milky Way. *Astronomy & Astrophysics*, 616:A12, 2018.
- [17] Gallart, C. et al. Proc. IAU Coll. 198, Near-fields Cosmology with Dwarf Elliptical Galaxies. 2005.
- [18] Harbeck, D. et al. Population gradients in local group dwarf spheroidal galaxies. *The Astronomical Journal*, 122(6):3092, 2001.
- [19] Harris, W.E. and Van den Bergh, S. Globular clusters in galaxies beyond the local group. I-New cluster systems in selected northern ellipticals. *The Astronomical Journal*, 86:1627–1642, 1981.
- [20] Helmi, A. et al. A New View of the Dwarf Spheroidal Satellites of the Milky Way from VLT FLAMES: \* Where Are the Very Metal-poor Stars? *The Astrophysical Journal Letters*, 651(2):L121, 2006.
- [21] Hernquist, L. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *The Astrophysical Journal*, 356:359–364, 1990.
- [22] Ibata, R.A., Gilmore, G. and Irwin, M.J. A dwarf satellite galaxy in Sagittarius. *Nature*, 370(6486):194–196, 1994.
- [23] Iorio, G., Nipoti, C., Battaglia, G. and Sollima, A. The effect of tides on the Sculptor dwarf spheroidal galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 487(4):5692–5710, 2019.
- [24] Irwin, M. and Hatzidimitriou, D. Structural parameters for the Galactic dwarf spheroidals. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 277(4):1354–1378, 1995.

- [25] Johnston, K.V., Spergel, D.N. and Hernquist, L. The disruption of the Sagittarius dwarf galaxy. *arXiv preprint astro-ph/9502005*, 1995.
- [26] Khalaj, P. and Baumgardt, H. Limits on the significant mass-loss scenario based on the globular clusters of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(1):479–486, 2016.
- [27] Krause, M. et al. Superbubble dynamics in globular cluster infancy-II. Consequences for secondary star formation in the context of self-enrichment via fast-rotating massive stars. *Astronomy & Astrophysics*, 552:A121, 2013.
- [28] Kroupa, P. On the variation of the initial mass function. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322(2):231–246, 2001.
- [29] Larsen, S.S., Strader, J. and Brodie, J.P. Constraints on mass loss and self-enrichment scenarios for the globular clusters of the Fornax dSph. *Astronomy & Astrophysics*, 544:L14, 2012.
- [30] Letarte, B. et al. VLT/UVES spectroscopy of individual stars in three globular clusters in the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Astronomy & Astrophysics*, 453(2):547–554, 2006.
- [31] Lima N. et al. The specific entropy of elliptical galaxies: an explanation for profile-shape distance indicators? *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 309(2):481–495, 1999.
- [32] Londrillo, P., Nipoti, C. and Ciotti, L. A parallel implementation of a new fast algorithm for N-body simulations. *arXiv preprint astro-ph/0212130*, 2002.
- [33] Lynden-Bell, D. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136:101, 1967.
- [34] Mateo, M. Dwarf galaxies of the Local Group. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 36(1):435–506, 1998.
- [35] McConnachie, A.W. The observed properties of dwarf galaxies in and around the Local Group. *The Astronomical Journal*, 144(1):4, 2012.
- [36] McMonigal, B. et al. Sailing under the Magellanic Clouds: a DECam view of the Carina dwarf. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 444(4):3139–3149, 2014.
- [37] Miyamoto, M. and Nagai, R. Three-dimensional models for the distribution of mass in galaxies. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 27:533–543, 1975.

- [38] Nipoti, C. PhD Thesis, Dipartimento di Astronomia, Università di Bologna (Bologna), [http://apps.difa.unibo.it/files/people/carlo.nipoti2/phd thesis cn/thesis cn.pdf](http://apps.difa.unibo.it/files/people/carlo.nipoti2/phd%20thesis%20cn/thesis%20cn.pdf). 2003.
- [39] Nipoti, C., Londrillo, P, and Ciotti, L. Galaxy merging, the fundamental plane of elliptical galaxies and the  $M_{BH}-\sigma_0$  relation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 342(2):501–512, 2003.
- [40] Pascale, R. et al. Action-based dynamical models of dwarf spheroidal galaxies: application to Fornax. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 480(1):927–946, 2018.
- [41] Peñarrubia, J. et al. The signature of galactic tides in local group dwarf spheroidals. *The Astrophysical Journal*, 698(1):222, 2009.
- [42] Plummer, H.C.K. On the problem of distribution in globular star clusters. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 71:460–470, 1911.
- [43] Renzini, A. et al. The Hubble Space Telescope UV Legacy Survey of Galactic Globular Clusters–V. Constraints on formation scenarios. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 454(4):4197–4207, 2015.
- [44] Roderick, T.A. et al. Stellar Substructures around the Hercules Dwarf Spheroidal Galaxy. *The Astrophysical Journal*, 804(2):134, 2015.
- [45] Saviane, I., Held, E.V. and Bertelli, G. The stellar populations of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *arXiv preprint astro-ph/9912427*, 1999.
- [46] Shapley, H. Two stellar systems of a new kind. *Nature*, 142(3598):715–716, 1938.
- [47] Steinmetz, M. and Navarro, J.F. The hierarchical origin of galaxy morphologies. *New Astronomy*, 7(4):155–160, 2002.
- [48] Sérsic, J.L. Atlas de galaxias australes. *Cordoba, Argentina: Observatorio Astronomico, 1968*, 1968.
- [49] Walker, M. et al. Internal kinematics of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *The Astronomical Journal*, 131(4):2114, 2006.
- [50] Wang, M. et al. Mass assembly history and infall time of the Fornax dwarf spheroidal galaxy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 457(4):4248–4261, 2016.