

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

**DISTURBI SPECIFICI DI APPRENDIMENTO:  
COME LA DIDATTICA A DISTANZA INFLUENZA  
L'APPRENDIMENTO DELLA MATEMATICA**

Tesi di Laurea in Didattica e Pedagogia Speciale

**Relatrice:**  
prof.ssa Manuela Fabbri

**Presentata da:**  
Sarah Console

**Correlatore:**  
prof. Paolo Negrini

**Anno Accademico 2019-2020**



*“Non importa quante risorse hai,  
se non sai come usarle  
non saranno mai abbastanza”  
(Anonimo)*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>vii</b>
<b>1 I Disturbi Specifici dell'Apprendimento</b>	<b>1</b>
1.1 Classificazione dei DSA e relative basi neurobiologiche . . . . .	2
1.2 Diagnosi di DSA e interventi riabilitativi e didattici . . . . .	8
1.2.1 Discalculia evolutiva: diagnosi e interventi riabilitativi	19
1.3 Legislazione italiana . . . . .	29
<b>2 DSA e didattica della matematica</b>	<b>39</b>
2.1 Stili di apprendimento . . . . .	39
2.2 Tipologie di apprendimento della matematica . . . . .	40
2.3 Contratto didattico e teoria delle situazioni matematiche . . .	42
2.4 Accorgimenti per studenti con DSA nell'apprendimento della matematica . . . . .	45
<b>3 Didattica a distanza: problematicità e potenzialità</b>	<b>49</b>
3.1 Opportunità e limiti della didattica a distanza . . . . .	50
3.2 Apprendimento della matematica nella didattica a distanza . .	55
3.3 Opportunità e limiti della didattica a distanza per studenti con DSA . . . . .	59
<b>4 Didattica a distanza e DSA: percorsi didattici a confronto</b>	<b>65</b>
4.1 Interpretazioni del concetto di frazione . . . . .	66
4.2 Errori tipici e misconcezioni sul concetto di frazione . . . . .	72

---

4.3	Obiettivi di apprendimento dalle Indicazioni Nazionali . . . . .	73
4.4	Un percorso didattico tradizionale sulle frazioni . . . . .	76
4.4.1	Unità didattica 1: La frazione come operatore . . . . .	76
4.4.2	Accorgimenti per studenti con DSA . . . . .	79
4.4.3	Unità didattica 2: La frazione come numero razionale . . . . .	81
4.4.4	Accorgimenti per studenti con DSA . . . . .	83
4.5	Didattica a distanza: proposte di attività in situazioni a-didattiche . . . . .	85
4.5.1	Kahoot: Cosa sappiamo sulle frazioni? . . . . .	85
4.5.2	Aree, strisce, numeri. . . Cosa li accomuna? . . . . .	90
4.5.3	Costruzione e confronto di frazioni con AlNuSet . . . . .	94
4.6	Un percorso sulle frazioni con la didattica a distanza . . . . .	99
4.6.1	Accorgimenti per studenti con DSA . . . . .	104
	<b>Conclusioni</b>	<b>107</b>
	<b>A Materiali dell'unità didattica 1</b>	<b>111</b>
	<b>B Materiali dell'unità didattica 2</b>	<b>117</b>
	<b>C Verifica sommativa per studenti con DSA con la didattica a distanza</b>	<b>123</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>125</b>

# Elenco delle figure

1.1	Modelli neurologici della lettura. . . . .	4
1.2	Modello di PDP proposto dal MIUR, p.1. . . . .	16
1.3	Modello di PDP proposto dal MIUR, p.2. . . . .	17
1.4	Modello di PDP proposto dal MIUR, p.3. . . . .	18
1.5	Modello di PDP proposto dal MIUR, p.4. . . . .	19
1.6	Componenti che contribuiscono alla costruzione della conoscenza numerica ([12]). . . . .	20
1.7	Confronto per età dei test per la discalculia ([26]). . . . .	25
1.8	Tabella di riferimento per gli indici dei test AC-MT 6-11. . . . .	26
1.9	Esempio di fogli compensativi. . . . .	29
2.1	Livello 3 di Euclid: The Game!. . . . .	46
4.1	Esempi di frazioni come parti di uno-tutto nel caso continuo. . . . .	67
4.2	Esempio di frazione come parte di uno-tutto nel caso discreto. . . . .	67
4.3	Esempio di suddivisioni in parti inusuale e di figura non standard. . . . .	68
4.4	Esempio di schema tramite il quale ricavare algoritmi (frammento dello schema in appendice A). . . . .	80
4.5	Esempio di schema dove leggere l'algoritmo da applicare (frammento dello schema in appendice A). . . . .	80
4.6	Confronto tra numero di richieste in uno stesso esercizio proposto per l'intera classe e per gli studenti con DSA (estratti dai relativi test di autovalutazione in appendice A). . . . .	81

4.7	Esempio di schema per le operazioni (estratto dallo schema in appendice B). . . . .	83
4.8	Esempio di parole chiave evidenziate (estratto dalla verifica sommativa per studenti con DSA, appendice B). . . . .	84
4.9	Domande 1-6 del primo Kahoot. . . . .	86
4.10	Domande 7-12 del primo Kahoot. . . . .	87
4.11	Domande 1-6 del secondo Kahoot. . . . .	88
4.12	Domande 7-11 del secondo Kahoot. . . . .	89
4.13	Esempio di unità come somma di unità frazionarie differenti ([47]). . . . .	92
4.14	Unità frazionarie riportate nelle strisce posizionate una sotto l'altra e allineate a sinistra ([47]). . . . .	93
4.15	Passaggio da frazione come area di una striscia ("parte del tutto") a frazione come numero razionale da posizionare sulla retta dei numeri ([47]). . . . .	94
4.16	Costruzione della frazione $\frac{1}{4}$ nell'ambiente retta algebrica di AlNuSet. . . . .	96
4.17	Costruzione della frazione $\frac{5}{2}$ nell'ambiente retta algebrica di AlNuSet. . . . .	97
4.18	Costruzione della somma di frazioni nell'ambiente retta algebrica di AlNuSet. . . . .	98
4.19	Passaggi per dimostrare l'uguaglianza $\frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{b \cdot d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ nell'ambiente manipolatore algebrico di AlNuSet. . . . .	99
A.1	Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.1. . . . .	111
A.2	Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.2. . . . .	112
A.3	Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.3. . . . .	112



B.1 Schema per studenti con DSA sulle operazioni con le frazioni, p.1. . . . .	117
B.2 Schema per studenti con DSA sulle operazioni con le frazioni, p.2. . . . .	118
B.3 Schema per studenti con DSA sulle rappresentazioni decimale e percentuale. . . . .	118



# Introduzione

Questo elaborato nasce dalla necessità di approfondire, in ambito teorico e pratico, i Disturbi Specifici dell'Apprendimento (DSA) e le ricadute nell'acquisizione di competenze matematiche, in primo luogo perchè in questi anni ho dato ripetizioni di matematica e fisica per le scuole secondarie di primo e secondo grado, incontrando ragazzi con DSA; in secondo luogo ritengo che sia utile, nell'approcciarmi alla professione dell'insegnamento, conoscere e studiare alcune strategie e strumenti didattici che facilitano chi presenta questo disturbo.

Negli ultimi anni infatti sta aumentando in modo considerevole la percentuale di alunni con DSA, da un lato per una maggiore consapevolezza di tale fenomeno da parte delle famiglie e delle istituzioni scolastiche, dall'altro per un incremento delle certificazioni rilasciate grazie a strumenti diagnostici sempre più accurati che facilitano il riconoscimento dei DSA da parte degli specialisti. I dati del MIUR ([56]) riportano un aumento degli alunni con DSA sul totale complessivo di alunni dallo 0.7% relativo all'a.s. 2010/2011 al 3.2% dell'a.s. 2017/2018. In particolare, la percentuale di ragazzi con tale disturbo è maggiore, in rapporto al totale degli alunni, nelle scuole secondarie di primo e secondo grado (5.6% nell'a.s. 2017/2018 nella scuola secondaria di primo grado; 4.7% nello stesso anno scolastico nella scuola secondaria di secondo grado). Pertanto ritengo sia fondamentale documentarsi e ricercare strategie per supportare tali alunni nel loro percorso di apprendimento, in modo da evitare il senso di incapacità e inadeguatezza che a volte accompagna questi ragazzi durante gli studi, portandoli ad esperienze negative come

bocciature e abbandono scolastico. Studi nazionali e internazionali indicano come fattori che ostacolano il processo di apprendimento di molti studenti la mancanza di motivazione, la mancanza di prerequisiti necessari ma anche l'inadeguatezza delle strategie didattiche e l'inesperienza degli insegnanti ([55]). È importante quindi che l'insegnante, come professionista, si metta continuamente in gioco nella ricerca di strategie adeguate per dare le migliori opportunità di apprendimento a ciascun alunno.

Nel primo capitolo dell'elaborato si approfondiscono i Disturbi Specifici dell'Apprendimento e la loro classificazione (dislessia, disgrafia, disortografia e discalculia) con riferimenti ad alcune modalità diagnostiche e ad interventi possibili in ambito riabilitativo e didattico. In particolare, vengono approfonditi la discalculia evolutiva, i test diagnostici specifici e gli strumenti compensativi e dispensativi che possono essere utilizzati. Infine viene ripreso il percorso legislativo che ha portato al riconoscimento del diritto all'istruzione delle persone con DSA (l.170/2010).

Il secondo capitolo entra nel merito della didattica della matematica, evidenziando gli stili di apprendimento (visivo/verbale, visivo/non-verbale, uditivo, cinestetico) e richiamando l'importanza di unire, in ambito matematico, l'apprendimento concettuale, algoritmico, semiotico, comunicativo e strategico: queste tematiche vanno tenute in considerazione quando si programmano le unità didattiche per adattare l'insegnamento alle caratteristiche degli studenti e per scomporre i saperi e dar loro profondità. Viene poi presentata la teoria delle situazioni di Brousseau per introdurre le situazioni a-didattiche, grazie alle quali è possibile rompere il contratto didattico e costruire un apprendimento stabile. Si conclude con alcuni accorgimenti per gli studenti con DSA nell'apprendimento della matematica.

Il terzo capitolo apre alla discussione, estremamente attuale, sulle potenzialità e problematicità della didattica a distanza con la quale ogni insegnante si è trovato a "fare i conti" in questo periodo di emergenza dovuta alla pandemia da Sars-CoV-2. Dopo una prima discussione sulla didattica a distanza,

si approfondisce l'apprendimento della matematica attraverso questa nuova modalità presentando opportunità e limiti che possono essere emersi per gli studenti con DSA: i tempi dilatati, le lezioni registrate, l'utilizzo di software e la maggiore personalizzazione della didattica sono alcuni esempi positivi; un carico organizzativo quotidiano, l'autonomia e la mancanza di vicinanza fisica sono invece esempi di aspetti che portano ad un minore coinvolgimento da parte dello studente.

Infine, nell'ultimo capitolo della tesi, viene proposto un confronto tra percorsi didattici sull'argomento delle frazioni per una classe prima di una scuola secondaria di primo grado. Dopo un'introduzione sulle interpretazioni e misconcezioni delle frazioni, vengono esposte due unità didattiche per la didattica in presenza e le stesse vengono rivisitate in ottica della didattica a distanza. In entrambi i casi, si pone una particolare attenzione agli accorgimenti, agli strumenti compensativi e dispensativi e alle modifiche che si possono apportare per aiutare l'apprendimento di questi concetti per studenti con DSA.



# Capitolo 1

## I Disturbi Specifici dell'Apprendimento

Uno dei primi a studiare i Disturbi Specifici di Apprendimento (DSA), negli anni '90, fu D.D.Hammill, il quale diede la seguente definizione:

“Learning disability si riferisce ad un gruppo eterogeneo di disturbi manifestati da significative difficoltà nell'acquisizione e nell'uso di abilità di ascolto, espressione orale, lettura, ragionamento e matematica, presumibilmente dovuti a disfunzioni del sistema nervoso centrale. Possono coesistere con la learning disability problemi nei comportamenti di autoregolazione, nella percezione sociale e nell'interazione sociale, ma non costituiscono di per sè una learning disability. Le learning disabilities possono verificarsi in concomitanza con altri fattori di handicap o con influenze estrinseche (culturali, d'istruzione, ecc.) ma non sono il risultato di quelle condizioni o influenze.”  
([1])

I DSA raccolgono una gamma di problematiche nello sviluppo cognitivo e nell'apprendimento scolastico non imputabili a fattori di disabilità mentale grave e/o fattori di svantaggio legati alle condizioni socio-culturali, bensì definibili in base al mancato raggiungimento di criteri attesi di apprendimento

rispetto alle potenzialità generali (età e grado di istruzione) del soggetto. Analizzando i termini del nome “disturbo specifico dell'apprendimento”, si può osservare che si parla di:

- **specificità**, ovvero il disturbo riguarda uno specifico dominio di abilità, in modo significativo ma circoscritto, lasciando intatto il funzionamento intellettivo generale;
- **apprendimento**, il quale fa parte dell'insieme delle abilità intellettive ed è il risultato dell'interazione delle abilità di base con l'esperienza, la motivazione e la metacognizione (l'insieme dei processi di riflessione sulla mente e di quelli strategici e di controllo). Gli apprendimenti si possono distinguere in base ai contenuti (abilità linguistiche, matematiche e visuospatiali) e in base alla capacità di controllo (livelli di abilità semplici, specifiche e controllate).

## 1.1 Classificazione dei DSA e relative basi neurobiologiche

I Disturbi Specifici di Apprendimento riguardano quindi alcune abilità specifiche coinvolte nell'apprendimento scolastico. Si possono operare due diverse distinzioni, una in base alle abilità coinvolte nel disturbo e un'altra tra disturbi acquisiti e disturbi evolutivi. Si parla di *disturbi acquisiti* quando, successivamente ad un trauma o ad una malattia, si presenta una perdita di un'abilità precedentemente acquisita, mentre si parla di *disturbi evolutivi* quando il disturbo si presenta nel corso dello sviluppo, senza un'evidente perdita di abilità precedentemente acquisite. Generalmente quando si parla di DSA si intende il disturbo evolutivo, anche se non specificato.

Invece, in base alle abilità interessate dal disturbo è possibile suddividere i DSA in dislessia, disgrafia, disortografia e discalculia. Tale classificazione rispecchia quella dell'ICD-10 ([24]), manuale nel quale vengono definiti i DSA sia genericamente sia nei singoli sottotipi. Nell'ICD-10 i DSA coprono



il codice F81, in particolare F81.0 per la dislessia, F81.1 per la disortografia e F81.2 per la discalculia.

La **dislessia** interessa le abilità di lettura e si manifesta tramite una minore rapidità e correttezza della lettura in riferimento agli standard relativi alla stessa età anagrafica, alla classe frequentata e all'istruzione ricevuta. La dislessia presenta una difficoltà di automatizzazione delle procedure di transcodifica dei segni grafici nei rispettivi fonologici, motivo per cui si manifesta nel momento in cui i bambini iniziano a imparare a leggere.

La **disgrafia** riguarda le abilità legate alla scrittura, in particolare quelle legate alla grafia e al controllo degli aspetti grafici e della scrittura manuale, motivo per cui è strettamente collegata al momento motorio-esecutivo della prestazione. Si manifesta quindi tramite una minore fluenza e qualità dell'aspetto grafico. Anche la **disortografia** concerne le abilità di scrittura, ma è legata all'ortografia, quindi alla correttezza dell'utilizzo del codice linguistico in fase di scrittura.

Infine la **discalculia** interessa le abilità di calcolo, in particolare riguarda la cognizione numerica, le procedure esecutive e il calcolo. Si manifesta tramite una minore correttezza sia nella lettura e scrittura dei numeri, sia nel calcolo, sia nelle abilità innate dei bambini, come il subitizing (riconoscimento immediato di piccole quantità).

Ogni disturbo specifico dell'apprendimento può presentarsi singolarmente o in associazione agli altri disturbi specifici: in questo caso si parla di **comorbidità**. La comorbidità indica sia la coesistenza tra i DSA (F81.3 nell'ICD-10) sia la coesistenza tra un DSA e altri disturbi di sviluppo (F83 nell'ICD-10), emotivi o del comportamento. È però da considerare che nei manuali diagnostici DSM-V (Diagnostic and Statistical Manual of mental disorders, APA, 2013) e ICD-10 è stabilito che si possa parlare di comorbidità solo quando in uno stesso soggetto c'è la co-presenza di più disturbi, tenendo conto dei criteri di esclusione di ciascun disturbo. In ogni caso, il disturbo risultante dalla comorbidità è maggiore della somma delle difficoltà dovute ai singoli disturbi in quanto ogni disturbo presente influenza negativamente lo sviluppo

sia delle varie abilità direttamente collegate, sia delle abilità complessive.

Con l'ultima definizione del DSM-V i DSA vengono classificati fra i deficit di sviluppo originati da alterazioni di origine neurobiologica. Infatti, essi sono legati all'apprendimento, il quale è formato da tre macroprocessi: l'*acquisizione* dell'input attraverso i sensi, il *processamento* dei dati acquisiti che avviene nelle strutture sottocorticali e nelle corteccie, e la *programmazione* dell'output tramite l'esecuzione motoria. Per questo motivo, i DSA possono essere associati a problemi nell'acquisizione e nello sviluppo delle funzioni cognitive legate all'apprendimento.

La **lettura** è un processo cognitivo che coinvolge varie aree cerebrali anteriori e posteriori dell'emisfero sinistro (fig.1.1). In particolare, la regione occipitotemporale è quella delegata all'acquisizione dei grafemi, ovvero delle lettere, e delle loro caratteristiche, l'area di Wernicke quella che si occupa del processamento, cioè della conversione delle lettere in suoni corrispondenti e della comprensione delle parole, e infine l'area di Broca quella che permette l'articolazione motoria delle parole.

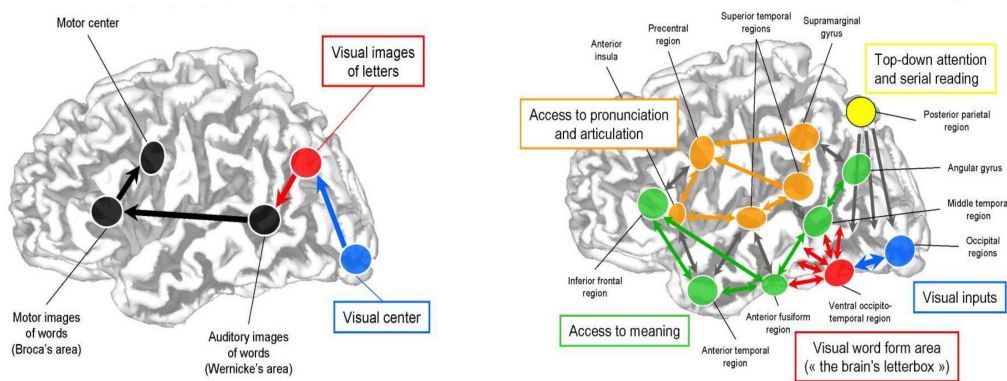


Figura 1.1: Modelli neurologici della lettura.

A sinistra il modello neurologico classico della lettura (D  jerine, 1892; Geschwind, 1965). A destra la visione moderna delle reti corticali della lettura (S.Dehaene, I neuroni della lettura, 2009).

Di conseguenza sono nate due principali teorie che provano a spiegare il disturbo di lettura. La *teoria fonologica* ([2]) si basa sull'ipotesi che le persone con dislessia hanno difficoltà a rappresentare mentalmente le lettere e ad associare i suoni corrispondenti a lettere o gruppi di lettere, problemi collegati a deficit della corteccia frontale inferiore sinistra. Questa teoria è supportata dall'osservazione che la risonanza magnetica funzionale in persone con dislessia mostra un processo fonologico meno attivo, ovvero si nota che i neuroni lavorano più lentamente, motivo per cui queste persone hanno una lettura poco fluente. La *teoria magnocellulare* ([2]) invece ha come ipotesi che le persone con dislessia presentano dei deficit del processamento temporale rapido nel sistema visivo, poichè si osserva che hanno maggiori difficoltà a distinguere fonemi spazialmente vicini e ad elaborare le informazioni in movimento (quando si legge gli occhi si muovono velocemente per scansionare le parole). Un dato scientifico a supporto di questa teoria deriva dalle risonanze magnetiche sottoposte a persone con dislessia: si osserva che queste persone hanno una minore attivazione della regione pre-frontale sinistra e nel cervelletto che riceve stimoli dalle fasce magnocellulari, dalle quali deriva il nome della teoria.

Grazie poi a studi genetici è stato possibile individuare due geni e specifici cromosomi coinvolti direttamente nella dislessia, mentre alcuni studi anatomici hanno associato la dislessia a due principali alterazioni cerebrali, l'esfoliazione del tessuto corticale, ovvero la variazione del substrato neuronale, e la simmetria del planum temporale. Infatti, il 65% degli individui presenta il planum temporale (una delle aree più importanti per il linguaggio) con un'estensione fino a cinque volte maggiore a sinistra rispetto che a destra e questa asimmetria corrisponde ad un notevole sviluppo del linguaggio.

Alcune ricerche mostrano che l'apprendimento della **scrittura** coinvolge vari circuiti neuronali relativi all'integrazione visuo-motoria che comprende sia la coordinazione occhio-mano che la relazione spaziale. A differenza della lettura, la scrittura coinvolge varie competenze che permettono una più difficile localizzazione cerebrale che identifichi la disgrafia e la disortografia. Infatti

l'apprendimento della scrittura include:

- competenze visuo-percettive che permettono di analizzare e distinguere i segni grafici;
- competenze visuo-spaziali tramite le quali si analizzano i rapporti spaziali dei grafemi o di gruppi di grafemi;
- competenze fino-motorie necessarie per manipolare piccoli oggetti con le dita;
- competenze di pianificazione del movimento che organizzano sequenzialmente i movimenti della mano, del polso e del braccio necessari nella scrittura;
- consapevolezza propriocettiva che deriva dai ricettori superficiali e profondi della pelle e che aiuta a capire quanta forza serve per impugnare una penna, l'orientamento della mano nello spazio e di quanto serve spostare (o di quanto si è spostato) il braccio;
- capacità di integrazione senso-motoria e visuo-motoria per controllare il movimento effettuato in modo da farlo coincidere con quello programmato.

Tramite studi di neuroimmagine è stato però possibile identificare dodici zone corticali e sub-corticali coinvolte nel processo di scrittura e in particolare tre di queste (solco intra-parietale sinistro, cervelletto anteriore e giro frontale superiore sinistro) si attivano nella scrittura manuale.

L'apprendimento del **calcolo** invece può essere schematizzato riprendendo il lavoro di Von Aster e Shalev ([2]), i quali propongono un modello gerarchico in quattro stadi: la cognizione numerica è definita dal nucleo centrale del numero (primo stadio) legato alla rappresentazione delle grandezze cardinali, all'approssimazione e al subitizing (suddivisione in piccole quantità), poi da due stadi intermedi corrispondenti alla rappresentazione linguistica e araba dei numeri e infine dallo sviluppo della linea mentale dei numeri, in cui

l'ordinalità assume importanza. Una suddivisione simile a quella proposta da Von Aster e Shalev viene riscontrata anche nell'attivazione di differenti aree cerebrali. Infatti alcuni ricercatori, tramite studi di neuropsicologia cognitiva e di neuroimmagine, hanno individuato tre aree principali coinvolte nell'elaborazione del numero e nel calcolo, alle quali possono corrispondere gli stadi precedentemente detti. Innanzitutto si è osservato che l'apprendimento del calcolo coinvolge competenze di quantificazione (primo stadio), competenze verbali (secondo stadio) e competenze visive (terzo stadio) e queste competenze coesistono nel lobo parietale. In particolare, le aree che si attivano maggiormente sono il solco intraparietale bilaterale, il giro angolare sinistro e l'area postero-superiore del lobulo parietale e in base alle lesioni verificate in queste tre aree è possibile osservare differenti difficoltà. Il solco intraparietale bilaterale è adibito alla rappresentazione semantica di numeri come quantità e quindi si attiva principalmente quando viene richiesto di manipolare una quantità, quando bisogna dare una stima approssimata o quando bisogna comparare differenti quantità o numeri. Si è però osservato anche che l'attivazione avviene soprattutto a destra del solco in quanto la parte sinistra è adibita al recupero mnemonico mentre quella destra alle approssimazioni. L'elaborazione delle quantità non è invece coinvolta nelle competenze controllate dal giro angolare sinistro, il quale si attiva per i processi verbali: questa regione è collegata alle aree coinvolte nel processo di lettura, perciò contribuisce alla lettura verbale dei numeri. Si è anche visto però che è fondamentale nel recupero della memoria a breve termine, per questo motivo si attiva anche nel momento in cui si devono operare dei calcoli, come per la moltiplicazione. L'area postero-superiore del lobulo parietale infine si attiva quando vengono coinvolte competenze visuo-spaziali o altre dimensioni mentali analoghe allo spazio, come il tempo o i numeri. La rappresentazione dei numeri infatti è associata alla linea mentale dei numeri che è una rappresentazione "spaziale" in cui i numeri vengono organizzati ed è per questo motivo che l'area suddetta si attiva anche nelle approssimazioni, nelle comparazioni e nelle risoluzioni di semplici problemi.

## 1.2 Diagnosi di DSA e interventi riabilitativi e didattici

Come precedentemente visto, i DSA vengono generalmente definiti come “discrepanza” tra prestazioni attese e prestazioni osservate. Per questo motivo la Consensus Conference ha stabilito che la compromissione dell’abilità specifica deve essere significativa, ovvero la prestazione deve essere inferiore a -2 deviazioni standard dai valori attesi per la classe frequentata e il livello del QI non deve essere inferiore a -1 deviazione standard, equivalente generalmente al valore di 85. Dagli studi condotti si è notato però che non ci sono differenze significative tra ragazzi con difficoltà discrepanti e non discrepanti per QI nella norma, perciò è preferibile usare il profilo cognitivo generale piuttosto che il QI, il quale produce incertezza a causa delle problematiche legate ad attendibilità e stabilità delle variabili misurate. Si può osservare inoltre che nelle direzioni date per definire le discrepanze si parla di deviazioni standard, questo perchè le proprietà distribuzionali sono più significative per rappresentare il ritardo nell’apprendimento rispetto alla funzione che descrive lo sviluppo delle competenze con la scolarizzazione, come ad esempio definire la discrepanza in base agli anni di “ritardo”.

Invece, i parametri utilizzati per diagnosticare i DSA sono quelli dell’International Statistical Classification of Diseases, Injuries and Causes of Death (ICD-10) con alcune modifiche apportate. In particolare, per la diagnosi di dislessia si stabilisce di enfatizzare il parametro di rapidità di lettura e di non considerare la comprensione tra i parametri da utilizzare perchè ben compensata da buone capacità di decodifica, eccetto il caso in cui sia una componente di una prova più approfondita per l’inquadramento funzionale della dislessia. Per la diagnosi di disortografia si raccomanda di operare un’analisi qualitativa degli errori, mentre per la diagnosi di discalculia si esplicita di usare i parametri di accuratezza e rapidità nelle abilità matematiche e di ricorrere all’analisi qualitativa degli errori.

In seguito, l’ICD-10 definisce le tipologie di prove da utilizzare: quelle di let-

tura di parole, non-parole e brani per la dislessia; quelle di dettato di parole, non-parole e testo, oltre alle prove di composizione di frasi, per la disortografia; infine, per la diagnosi di discalculia, prove per valutare specifiche abilità, come la padronanza di abilità di calcolo o lettura e scrittura di numeri, e prove per valutare la memoria e le abilità visuo-spaziali.

Tuttavia, non è semplice fare una diagnosi di DSA in quanto bisogna tenere conto di diversi fattori, sia interni al disturbo (definizioni, criteri diagnostici utilizzati, variabili evolutive) sia esterni (età considerata, strumenti diagnostici utilizzati), che possono influenzare il risultato.

Tra tali fattori si evidenziano i seguenti:

- l'età di diagnosi: un'adeguata istruzione e l'interferenza con le attività proprie dell'età causano una diversa diagnosi nei primi anni di scuola e in età adolescenziale. Inoltre, la plasticità cerebrale permette agli studenti che presentano ritardi nello sviluppo e iniziali difficoltà di recuperare la discrepanza con le prestazioni attese. A tal proposito le ricerche hanno osservato che tra il 20% degli alunni, principalmente del primo biennio della scuola primaria, che presentano difficoltà nelle abilità di base coinvolte da DSA, solo circa il 4% presenta poi un DSA;
- gli strumenti utilizzati per la diagnosi: non viene utilizzato un unico test per la diagnosi e quindi può variare il risultato del test in base ad esso. Il risultato inoltre dipende strettamente dalla variabilità degli standard diagnostici per la definizione di disturbo accertato. È inoltre necessario usare test standardizzati, i quali però da soli non consentono di individuare con certezza gli studenti con DSA. La Consensus Conference ha stabilito infatti che uno dei parametri distintivi tra disturbo e difficoltà di apprendimento è la resistenza al trattamento, ovvero lo studente positivo al test standardizzato non migliora a seguito di un adeguato metodo di intervento didattico;
- il livello socioculturale di appartenenza: un basso livello culturale familiare o una mancata adeguata istruzione riduce le opportunità di

apprendimento. In questo caso, bisogna fare attenzione sia a falsi positivi, ovvero diagnosi di DSA a soggetti che in realtà presentano solo delle difficoltà nelle abilità di base a causa della loro condizione etnicoculturale, sia a falsi negativi, cioè mancato riconoscimento di DSA in soggetti con particolare condizione etnicoculturale, i quali presentano invece dei disturbi specifici dell'apprendimento.

È tuttavia importante diagnosticare per tempo i DSA in quanto generalmente si presentano in comorbidità con altre patologie, come ansia e depressione. Questo è dovuto al fatto che i soggetti con DSA, rispetto ai coetanei con sviluppo tipico, hanno un concetto di sé negativo, hanno poca autostima e rischiano di vivere una forte sofferenza emotiva che può portare a rabbia, aggressività, isolamento e depressione.

Il motivo per cui i soggetti arrivano a sviluppare problemi psicologici è spesso dovuto ai continui e ripetuti fallimenti scolastici che portano gli studenti a sentirsi inadeguati. È quindi necessario diagnosticare per tempo il disturbo in modo da attuare il prima possibile degli interventi di riabilitazione e stilare dei Piani Didattici Personalizzati (PDP), aiutando quindi i soggetti a compensare il disturbo e a lavorare sul concetto di sé.

Grazie alla diagnosi di DSA e al profilo stilato, è possibile realizzare degli interventi riabilitativi, ovvero degli interventi che portano “una persona a raggiungere il miglior livello di vita possibile sul piano fisico, funzionale, sociale ed emotivo, con la minor restrizione possibile delle scelte operative” ([3]). Tali interventi si pongono come obiettivi il recupero di una competenza funzionale non presente o atipica, la necessità di limitare la regressione funzionale e la possibilità di usare formule facilitanti alternative.

In letteratura si individuano vari tipi di intervento, tra di loro complementari, tra i quali:

- gli **interventi sulla prestazione**, i quali cercano di rafforzare e migliorare le competenze sugli argomenti problematici aumentando il numero di ripetizioni dello stesso comportamento e cercando soluzioni didattiche complementari;



- gli **interventi sulle componenti della prestazione**. Questo tipo di intervento, a differenza del precedente, lavora su argomenti più semplici in modo più mirato, permettendo poi di raggiungere un miglioramento sulla competenza complessiva. Il rischio però è quello di non avere la visione di insieme e quindi di dover attuare sempre delle scomposizioni della competenza;
- gli **interventi strategici e metacognitivi**, applicati alle abilità non automatizzate o a contesti che richiedono la modifica degli automatismi. Questi interventi sono dovuti al fatto che i soggetti con DSA sono generalmente limitati nel controllo dell'attività cognitiva e nell'utilizzo di strategie specifiche. Si cerca quindi di rendere consapevoli i soggetti con DSA del proprio funzionamento mentale e degli obiettivi dei trattamenti;
- gli **interventi sui materiali**. Esistono ormai vari libri, schedari, giochi, esercizi, ecc. costruiti appositamente per aiutare i soggetti con DSA ed è quindi utile cercare e capire quale materiale è più adatto a ciascun soggetto, essendo consapevoli a priori che gli strumenti utilizzati per un soggetto non sono per forza i più adeguati per tutti gli altri. È inoltre bene considerare anche l'aiuto dei supporti multimediali e informatici: oltre alle potenzialità del classico personal computer, vengono in aiuto anche differenti applicazioni (app) e software, con i quali è possibile calibrare le difficoltà di un compito andando a lavorare nella zona di sviluppo prossimale (ZSP) definita da Vygotskij, quella zona di apprendimento in cui, grazie ad aiuti esterni, le capacità cognitive del ragazzo aumentano e possono essere sviluppate nuove forme di conoscenza. Queste nuove tecnologie aiutano l'apprendimento di tutti gli studenti, in particolar modo possono essere molto utili per gli alunni con DSA poichè utilizzando questi strumenti si sente meno il peso della situazione didattica e della valutazione . Ad esempio, alcune app sono molto efficaci perchè sono in grado di catturare l'attenzione, sia

grazie all'interfaccia grafica personalizzabile, sia per le sfide a difficoltà crescente, le quali, fornendo premi e riconoscimenti (anche sociali), non scoraggiano lo studente, anzi lo stimolano a riprovarci e a fare meglio.

Tutti questi interventi in ambito scolastico sono possibili grazie al fatto che si possono costruire *percorsi individualizzati* e *percorsi personalizzati*. Infatti, poichè ogni individuo è diverso e apprende in maniera diversa, è necessario utilizzare differenti strategie didattiche per garantire a tutti gli studenti di raggiungere gli stessi obiettivi e le stesse competenze fondamentali del curriculum didattico. Questa è l'idea di base del processo dell'individualizzazione, la quale promuove il diritto di uguaglianza, facendo raggiungere i medesimi obiettivi nel rispetto della diversità degli studenti. Inoltre, la proposta di percorsi individualizzati costruisce un clima di classe collaborativo, grazie al quale è possibile sviluppare competenze sociali, come il saper discutere, confrontarsi e rispettarsi. Si può però incorrere in vari rischi, come quello di valorizzare solamente i saperi forti della classe, lasciando indietro gli altri studenti, i quali possono risentirne in autostima e sicurezza di sé, o viceversa concentrarsi sugli studenti che hanno maggiori difficoltà e tralasciare il resto della classe, abbassando il livello e demotivando gli altri studenti. Un ulteriore rischio è quello dell'omologazione, cioè non valorizzare le caratteristiche dei vari studenti, andando contro il diritto alla diversità.

Insieme ai percorsi individualizzati, è auspicabile costruire anche percorsi personalizzati, valorizzando le peculiarità, i talenti, le aspirazioni e gli interessi di ciascun studente e promuovendo il diritto alla diversità. Con la personalizzazione non si vogliono raggiungere specifici obiettivi formativi comuni, ma si vuol dare visibilità agli studenti con le loro proprie caratteristiche, permettendo a tutti di conseguire successo, aumentando anche il livello di autostima. Come per l'individualizzazione, anche per la personalizzazione ci sono vari rischi, come il puerocentrismo, ovvero mettere al centro il bambino considerandolo come fine ultimo, senza considerare che è un individuo in divenire e che è inserito in un contesto sociale, o il seguire solamente la logica degli interessi legati al mercato, rendendo gli alunni ricettori passivi di

esigenze provenienti dalla società e non dai loro bisogni. È inoltre rischioso basarsi solamente sulla personalizzazione, soprattutto per chi ha scarse competenze iniziali comunicative e logiche o per chi ha minori sostegni familiari e sociali, favorendo la divisione in gruppi fissi e differenziati per capacità e interessi. Si contravviene perciò al diritto all'uguaglianza, discriminando gli studenti con più abilità e opportunità da quelli che hanno meno possibilità o competenze.

La compresenza di individualizzazione e personalizzazione è dunque la via preferibile per aiutare tutti gli studenti a raggiungere gli stessi obiettivi di apprendimento, sostenendo però le specifiche capacità di ognuno.

In aiuto alla didattica, la Legge 170/2010 garantisce inoltre l'utilizzo di strumenti compensativi e dispensativi per favorire ulteriormente l'apprendimento degli studenti con DSA. Gli *strumenti compensativi* sono “strumenti didattici e tecnologici che sostituiscono o facilitano la prestazione richiesta nell'abilità deficitaria” ([10]), senza però facilitare l'apprendimento da un punto di vista cognitivo. La lettura può essere compensata sia con strumenti tecnologici, come la sintesi vocale, sia con accorgimenti semplici come un carattere di scrittura più grande o un'interlinea maggiore, la quale aiuta lo studente con DSA a non confondere le righe. Invece la scrittura può essere agevolata da programmi di video scrittura con correttori ortografici, da registratori e da programmi che convertono l'audio o la voce in testo. Infine il calcolo e lo studio della matematica possono essere compensati con tabelle, formulari, fogli di calcolo e con la calcolatrice, anche vocale. Altri strumenti compensativi di classico utilizzo sono le mappe concettuali, da consultare anche durante le prove scritte e i testi in digitale come integrazione al libro cartaceo.

Invece, le *misure dispensative* sono “interventi che consentono all'alunno o allo studente di non svolgere alcune prestazioni che, a causa del disturbo, risultano particolarmente difficoltose e che non migliorano l'apprendimento” ([10]). Deve essere però sempre valutata l'effettiva incidenza del disturbo dell'alunno con DSA sulle prestazioni richieste, in modo da non creare percorsi facilitati senza motivi fondati e in modo da non differenziare il percorso

dell'alunno in questione in base agli obiettivi. Gli studenti con DSA possono essere dispensati, ad esempio, dalla lettura ad alta voce in classe, dallo scrivere in corsivo, dal prendere gli appunti a mano, copiando direttamente dalla lavagna, dallo studio mnemonico di tabelline e verbi e dall'uso del vocabolario cartaceo.

È anche necessario garantire per tali studenti delle adeguate forme di valutazioni. È possibile ridurre nelle prove scritte il numero di esercizi o domande rispetto al resto della classe, oppure è possibile concedere loro un tempo aggiuntivo, massimo del 30%; se una prova contiene vari argomenti che possono risultare complessi, è conveniente separare le prove e concentrarsi su un argomento alla volta; è anche utile predisporre le prove scritte con esercizi a complessità crescente, senza richiedere dati o definizioni a memoria, ma privilegiando gli esercizi applicativi dove è possibile valutare l'acquisizione di concetti e procedure; bisogna anche cercare di valutare il contenuto senza far pesare troppo gli errori di forma e accettare anche risposte non strettamente formali e corrette, come ad esempio delle risposte in via grafica per quanto riguarda alcuni compiti di matematica. È inoltre necessario programmare per tempo le prove scritte e orali e attenersi a quelle date, in modo tale da permettere allo studente con DSA di organizzarsi con lo studio, il quale richiede maggior tempo per lui, ed è anche necessario dare informazioni dettagliate sulla prova scritta e magari fornire esempi ed esercizi simili a quelli della verifica. Infine, bisogna tener conto delle misure dispensative e degli strumenti compensativi che l'alunno con DSA può utilizzare e in tal caso predisporre il materiale e gli strumenti necessari.

Tutte le azioni didattiche messe in atto dalla scuola e dagli insegnanti verso un alunno con DSA devono essere esplicitate, formalizzate e quindi scritte ed è a questo proposito che viene redatto il *Piano didattico personalizzato* (vedi fig.1.2-1.5). Ancora una volta le indicazioni per redigere il PDP arrivano dalle Linee Guida ([10]): “la scuola predispone [...] un documento che dovrà contenere almeno le seguenti voci, articolato per le discipline coinvolte dal disturbo:

- dati anagrafici dell'alunno;
- tipologia di disturbo;
- attività didattiche individualizzate;
- attività didattiche personalizzate;
- strumenti compensativi utilizzati;
- misure dispensative adottate;
- forme di verifica e valutazione personalizzate.”

Il PDP nasce con l'obiettivo di migliorare la qualità di pianificazione didattica a favore di alunni con DSA e di ridurre i tempi di compilazione dello stesso documento. Esso viene compilato dal Consiglio di classe con l'eventuale aiuto del referente DSA d'istituto, ovvero un insegnante che ha una formazione specifica sui DSA e che suggerisce al Consiglio di classe le strategie e gli strumenti più adeguati da utilizzare, ma è anche frutto di una rete di collaborazione. Infatti in questo documento, oltre all'istituzione scolastica, confluiscono tutte le figure e le realtà coinvolte:

- lo studente con DSA, il quale non deve subire le decisioni, ma deve partecipare attivamente, capire ciò che la scuola può offrirgli e fornire il suo punto di vista esplicitando quali strumenti sono a lui più congeniali;
- il clinico, la cui diagnosi, effettuata rispettando quanto previsto dalla Consensus Conference, elenca anche le misure che ritiene necessarie per lo studente e che quindi possono essere inserite direttamente nel PDP;
- la famiglia, la quale firma il documento e lo utilizza per collaborare con la scuola e, eventualmente, per condividerlo con gli specialisti esterni o con gli insegnanti privati, in modo da sostenere l'apprendimento dell'alunno e in modo da essere mediatrice tra figure esterne e scuola.

Format  
PIANO DIDATTICO PERSONALIZZATO  
SCUOLA SECONDARIA

ISTITUZIONE SCOLASTICA: .....

ANNO SCOLASTICO: .....

ALUNNO: .....

1. Dati generali

Nome e cognome	
Data di nascita	
Classe	
Insegnante coordinatore della classe	
Diagnosi medico-specialistica	redatta in data... da... presso... aggiornata in data... da presso...
Interventi pregressi e/o contemporanei al percorso scolastico	effettuati da... presso... periodo e frequenza..... modalità....
Scolarizzazione pregressa	Documentazione relativa alla scolarizzazione e alla didattica nella scuola dell'infanzia e nella scuola primaria
Rapporti scuola-famiglia	

Figura 1.2: Modello di PDP proposto dal MIUR, p.1.

2. FUNZIONAMENTO DELLE ABILITÀ  
DI LETTURA, SCRITTURA E CALCOLO

Letture		Elementi desunti dalla diagnosi	Elementi desunti dall'osservazione in classe
	Velocità		
	Correttezza		
	Comprensione		
Scrittura		Elementi desunti dalla diagnosi	Elementi desunti dall'osservazione in classe
	Grafia		
	Tipologia di errori		
	Produzione		
Calcolo		Elementi desunti dalla diagnosi	Elementi desunti dall'osservazione in classe
	Mentale		
	Per iscritto		
Altro	Eventuali disturbi nell'area motorio-prassica:		
	Ulteriori disturbi associati:		
	Bilinguismo o italiano L2:		
	Livello di autonomia:		

Figura 1.3: Modello di PDP proposto dal MIUR, p.2.

## 3. DIDATTICA PERSONALIZZATA

Strategie e metodi di insegnamento:

Discipline linguistico-espressive	
Discipline logico-matematiche	
Discipline storico-geografico-sociali	
Altre	

Misure dispensative/strumenti compensativi/tempi aggiuntivi:

Discipline linguistico-espressive	
Discipline logico-matematiche	
Discipline storico-geografico-sociali	
Altre	

Strategie e strumenti utilizzati dall'alunno nello studio:

Discipline linguistico-espressive	
Discipline logico-matematiche	
Discipline storico-geografico-sociali	
Altre	

Figura 1.4: Modello di PDP proposto dal MIUR, p.3.



## 4. VALUTAZIONE (anche per esami conclusivi dei cicli)

L'alunno nella valutazione delle diverse discipline si avvarrà di:

Disciplina	Misure dispensative	Strumenti compensativi	Tempi aggiuntivi
Italiano			
Matematica			
Lingue straniere			
....			
....			
....			
....			
....			
....			
....			

Figura 1.5: Modello di PDP proposto dal MIUR, p.4.

Il PDP deve essere uno strumento efficace sia per la scuola che per la famiglia o gli esperti esterni e in quanto tale deve contenere indicazioni coerenti tra le varie discipline, precise, chiare, significative per determinare un miglioramento effettivo nell'apprendimento e realistiche, evitando perciò di scrivere prestazioni che l'alunno non sarà mai in grado di compiere ed evitando promesse che non si possono mantenere.

### 1.2.1 Discalculia evolutiva: diagnosi e interventi riabilitativi

I bambini nascono con abilità numeriche innate, chiamate anche “senso del numero”, attraverso le quali riescono intuitivamente a confrontare quan-

tità ancora prima di imparare a contare, parlare e conoscere le rappresentazioni dei numeri. Questa capacità di elaborare la numerosità ha sede nel solco intraparietale bilaterale ed è presente in varie specie animali sin dalla nascita. È poi l'interazione con l'ambiente a permettere lo sviluppo delle abilità: i bambini ricevono molti stimoli sia dall'ambiente, come ad esempio quando scorgono un certo fiore e subito ne individuano altri uguali, sia nei momenti ludici, come giocare con i sassolini o semplicemente a nascondino, sia da altre esperienze quotidiane. Successivamente, grazie all'integrazione con il linguaggio e le abilità sensoriali, i bambini riescono a migliorare le abilità aritmetiche di base e quelle relative ai numeri e al calcolo. Negli ultimi anni bisogna inoltre considerare anche l'aiuto dei dispositivi digitali, in quanto i bambini, nativi digitali, imparano inconsapevolmente a gestire il senso del numero e a giocare con i numeri tramite i metodi tecnologici.

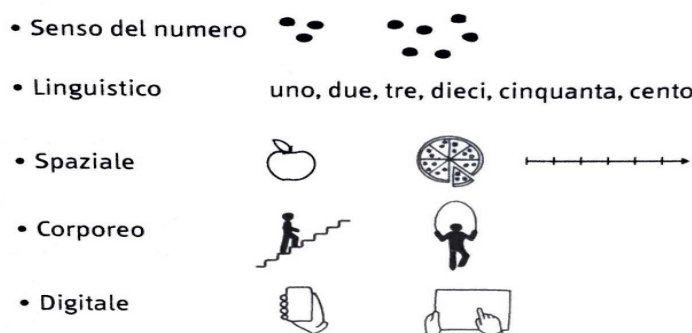


Figura 1.6: Componenti che contribuiscono alla costruzione della conoscenza numerica ([12]).

Ci sono quindi cinque componenti (fig 1.6) attraverso le quali i bambini prescolari riescono a rappresentare e manipolare i numeri: il senso del numero, la componente linguistica, spaziale, corporea e digitale; oltre a ciò, ci sono anche quattro processi di elaborazione cognitiva dei numeri che aiutano il bambino prescolare a rispondere alla domanda “Quanti oggetti sono?”. Tali processi sono:

1. i **processi lessicali** che riguardano la capacità di attribuire ai numeri il loro nome e di comprendere la corrispondenza tra quantità e simboli scritti o tra segno e significato. Questo processo è alla base delle abilità di scrittura e lettura dei numeri;
2. i **processi semantici**, cioè tutti quei processi che portano alla comprensione di un numero tramite le sue rappresentazioni mentali, passando prima da una semplice discriminazione tra forme e dimensioni, per poi arrivare all'elaborazione della quantità operando sulla stima di numerosità e sulla suddivisione in piccole quantità (subitizing);
3. i **processi sintattici** che portano a comprendere il valore di ciascuna cifra di un numero (unità, decina, centinaia, . . . ) e il concetto di ordine, e che permettono anche di distinguere un'unità dall'insieme di elementi che la costituiscono (una mano/cinque dita);
4. il **conteggio** che è alla base sia della corrispondenza biunivoca tra elemento contato e parola-numero, sia dell'ordine stabile, cioè del fatto che i numeri hanno una sequenza fissa, e della cardinalità. Di conseguenza, il conteggio aiuta anche a capire il legame tra ordine e cardinalità, nel senso che l'ordine con cui si contano degli elementi non modifica la cardinalità dell'insieme.

Grazie a queste suddivisioni dei processi, è stato possibile identificare **tre forme di discalculia**: per le cifre, per i fatti numerici e procedurale.

La *discalculia per le cifre* è dovuta ad errori nel sistema dei numeri, ovvero errori lessicali (leggere o scrivere un numero al posto di un altro - vedi tabella 1.1), sintattici (non riconoscere il valore di una cifra all'interno di un numero - vedi tabella 1.1) e semantici (non riconoscere il significato e la grandezza di un numero - vedi tabella 1.2).

Oltre al classico scambio di cifre, altri errori frequenti nel sistema dei numeri si verificano quando in un numero sono presenti due cifre uguali vicine, che spesso non vengono distinte e dunque ne viene presa in considerazione solo una, e quando è presente lo zero. La cifra zero può portare a scomporre

Errori lessicali	Errori sintattici
ottocentoquarantuno → 821	seimilatre → 603
ventiquattro → 42	7001 → settecentouno

Tabella 1.1: Esempi di errori lessicali e sintattici

---

Riordinare in ordine crescente i seguenti numeri:

255 - 20.5 - 25.5 - 205 → 205 - 20.5 - 25.5 - 255
608 - 68.3 - 63.8 - 68.23 → 608 - 683 - 638 - 6823

Tabella 1.2: Esempi di errori semantici

il numero in due differenti numeri, come nell'esempio in tabella 1.1 dove il numero 7001 viene scomposto in 700/1, oppure, nel passaggio da forma alfabetica orale a numero scritto in cifre, può causare l'errore di non scrittura della cifra in quanto nella forma orale non viene pronunciata, ad esempio il numero trentunmilaventi ha lo zero nella posizione delle centinaia, ma non viene assolutamente detto.

In generale, le tipologie di errore analizzate finora si presentano al livello più semplice dei compiti di aritmetica, motivo per cui interferiscono con qualunque attività che abbia a che fare con i numeri e quindi con la matematica, andando a generare a catena anche altre tipologie di errore, ad esempio nella risoluzione di calcoli.

La *discalculia procedurale* si verifica in corrispondenza di difficoltà nell'acquisizione di procedure e algoritmi del calcolo. Gli errori tipici per la discalculia procedurale sono gli errori procedurali (vedi tabella 1.3), che dipendono spesso dal sovraccarico della memoria di lavoro. Nel calcolo a mente questi errori si presentano a causa della difficoltà di utilizzare procedure facilitanti per svolgere calcoli o a causa dell'incapacità di tenere a mente i risultati parziali. Per esempio, se si chiede di calcolare  $2 + 11$ , un ragazzo con discalculia procedurale aggiungerà 11 a 2 senza accorgersi che la strada più veloce è quella contraria. Un altro esempio: calcolando a mente  $14 + 37$  o  $18 \cdot 6$ , il ragazzo potrebbe non ricordare l'algoritmo da utilizzare oppure, in caso contrario, po-

Operazione	Errori
$4839 + 6243 = 11072$	errore di riporto
$4070 - 1246 = 3236$	errore di prestito + errore dovuto alle operazioni con lo zero ( $0 - a = a$ )
$305 : 5 = 100$	errore di algoritmo: partenza a destra, calcolando $5 : 5$ , $0 : 5$ e $3 : 5$
$145 \cdot 2 = 2810$	errore di algoritmo: partenza a sinistra, calcolando $2 \cdot 1$ , $2 \cdot 4$ e $2 \cdot 5$
$\begin{array}{r} 20.8- \\ \underline{12} = \\ 19.6 \end{array}$	errore di incolonnamento

Tabella 1.3: Esempi di errori procedurali

trebbe sia eseguire bene il calcolo a meno del riporto, sia svolgere giustamente il calcolo, scordandosi però subito il risultato. Invece, nel calcolo scritto si possono riscontrare difficoltà nella scelta dell'algoritmo da utilizzare (punto di partenza per svolgere i calcoli, riporti, prestiti, . . .), nell'impostazione da usare (incolonnamento e posizione dei numeri) o nell'applicazioni di operazioni che coinvolgono lo zero (spesso il calcolo  $a \cdot 0$  viene confuso con  $a + 0$  dando quindi per risultato  $a$ ). Un'ulteriore difficoltà si riscontra nell'operare le verifiche dei calcoli, in quanto ciò richiama una procedura impegnativa da ricordare, la quale al posto di essere d'aiuto, comporta ulteriori errori.

Infine la *discalculia per i fatti numerici* è legata ad errori nel recupero di fatti numerici, come non ricordarsi le tabelline o sbagliare tabellina ( $6 \cdot 3 = 21$ ), confondere l'addizione con la moltiplicazione ( $2 \cdot 3 = 5$ ), commettere errori di slittamento in cui si sbaglia una sola cifra ( $4 \cdot 3 = 11$ ) o ancora non saper calcolare il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo.

I test diagnostici per la discalculia vanno quindi ad indagare la correttezza e la rapidità in prove che verificano gli errori appena descritti. Anche per la discalculia i test presentati sono standardizzati, ma vengono somministrati a fine della classe terza della scuola primaria poichè è solo alla fine di quel-

l'anno che gli studenti hanno automatizzato i meccanismi più elementari di calcolo e le varie strategie facilitanti per risolvere le operazioni elementari. In base a quanto stabilito nella Consensus Conference, per scrivere la diagnosi, bisogna comunque escludere quei fattori esterni che possono influire sull'apprendimento e considerare che le difficoltà possono non presentarsi finché non si superano le capacità dello studente. È necessario anche tenere conto della persistenza delle difficoltà nell'acquisizione e nell'utilizzo delle abilità scolastiche anche dopo interventi riabilitativi mirati, motivo per cui è possibile astenersi da una diagnosi certa per un periodo di alcuni mesi nei quali si operano stimolazioni e recuperi delle componenti compromesse per valutare se si è effettivamente in presenza di discalculia.

Esistono due tipi di test con due diverse analisi: quelli di primo livello servono ad individuare precocemente i ragazzi a rischio e dare una visione di insieme sulle eventuali difficoltà nel calcolo, mentre quelli di secondo livello definiscono effettivamente una diagnosi precisa di discalculia evolutiva, individuando le componenti del sistema dei numeri e del calcolo che non sono state apprese, nonostante il ragazzo abbia ricevuto un adeguato insegnamento.

Ci sono vari test utilizzati in Italia, tra i quali BIN, AC-MT, BDE2 e ABCA: essi differiscono tra loro per l'età di somministrazione coperta, per la diversa tipologia di livello (primo livello o secondo livello), per durata, per campione normativo e per la tipologia di esercizi. Analizzeremo di seguito solamente i test relativi all'età scolare, in particolare quelli che si possono somministrare dalla classe terza della scuola primaria.

**ABCA** è uno strumento diagnostico che comprende prove per le classi terza, quarta e quinta della scuola primaria. I test di questa batteria prevedono prove di calcolo scritto e a mente, prove di comprensione del numero e prove di produzione del numero. Sia le prove di calcolo a mente che quelle di calcolo scritto sono incentrate sulle quattro operazioni fondamentali (addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione) e sono le prove necessarie a indagare eventuali difficoltà nell'esecuzioni dei compiti. Se i risultati in queste



Figura 1.7: Confronto per età dei test per la discalculia ([26]).

prove sono inferiori alla norma, si prosegue con le altre prove per accertare in modo preciso quali sono le competenze non acquisite. Queste prove di approfondimento riguardano sia la comprensione del valore quantitativo dei numeri e del significato dei segni che la produzione orale e scritta dei numeri. Le prime tramite esercizi di ordinamento di cifre, di denominazione e di utilizzo dei simboli aritmetici e tramite esercizi sul valore posizionale delle cifre e sulla numerosità di cifre presentate sia visivamente che uditivamente; le seconde con esercizi di enumerazione, di dettato dei numeri, di tabelline (più dettagliatamente quella del 7 in avanti e quella del 4 all'indietro), di incolonnamento e di recupero di fatti aritmetici.

Ciò che viene valutato in questa batteria di test è innanzitutto la correttezza e, qualora essa sia sufficiente, si controlla la velocità con cui i soggetti svolgono le prove: questi due punteggi vengono poi confrontati con i dati normativi raccolti (su 82 alunni di terza, 82 di quarta e 78 di quinta).

I test del gruppo **AC-MT** sono test di primo livello di rapida somministrazione che riprende l'impianto teorico e strumentale del test ABCA, scegliendone però gli esercizi più discriminanti. A differenza del precedente test, AC-MT ha un campione normativo di oltre 5000 studenti tra i 6 e gli 11 anni e 2658 studenti tra gli 11 e i 14 anni. Si basa su quattro indici (fig.1.8): il livello di accuratezza per la fase individuale e per la fase collettiva, la velocità di calcolo e l'indice di conoscenza numerica che comprende punteggi relativi agli aspetti lessicali, semantici e sintattici. Proprio quest'ultimo indice aiuta

	Ottimale	Sufficiente	Richiesta di attenzione (RA)	Richiesta di intervento (RI) (5°percentile)
<i>Terza iniziale</i>				
Operazioni scritte	8	7-4	3	1-0
Conoscenza numerica	22	21-17	16-13	12-0
Accuratezza	2-0	11-3	17-12	≥18
Tempo totale	<96	170-96	224-171	≥225
<i>Terza finale</i>				
Operazioni scritte	8	7-6	5-4	3-0
Conoscenza numerica	22	21-17	16-13	12-0
Accuratezza	1-0	9-2	14-10	≥15
Tempo totale	<94	189-93	294-190	≥295
<i>Quarta iniziale</i>				
Operazioni scritte	8	7-6	4-5	3-0
Conoscenza numerica	22	21-16	15-13	12-0
Accuratezza	2-0	11-3	17-12	≥18
Tempo totale	<102	146-102	181-147	≥182
<i>Quarta finale</i>				
Operazioni scritte	8	7-6	5	4-0
Conoscenza numerica	22	21-16	15-13	12-0
Accuratezza	1-0	8-2	13-9	≥14
Tempo totale	<93	174-93	223-175	≥224
<i>Quinta iniziale</i>				
Operazioni scritte	8	7-6	5	4-0
Conoscenza numerica	22	21-16	15-12	11-0
Accuratezza	2-0	9-3	13-10	≥14
Tempo totale	<87	156-87	214-157	≥215
<i>Quinta finale</i>				
Operazioni scritte	8	7-6	5-4	3-0
Conoscenza numerica	22	21-14	13-12	11-0
Accuratezza	1-0	9-2	14-10	≥15
Tempo totale	<104	189-104	226-190	≥227

Figura 1.8: Tabella di riferimento per gli indici dei test AC-MT 6-11.



ad approfondire la diagnosi, grazie ad una lettura differenziata dei punteggi nelle varie aree. Entrando nel dettaglio, il test è diviso in tre parti: la parte collettiva (25 minuti circa) che accerta le abilità generali dei ragazzi e della classe, la parte individuale (10 minuti circa) che permette di analizzare e approfondire le strategie utilizzate dallo studente e i problemi aritmetici che aiutano a comprendere le capacità di comprensione e di pianificazione di un percorso risolutivo dell'alunno. Nella prima parte si svolgono operazioni, espressioni aritmetiche, calcoli approssimativi, esercizi di numerosità, di transcodifica di numeri e di ordinamento di numeri; nella parte individuale si presentano calcoli a mente e scritti, dettati numerici ed esercizi sui fatti numerici. I problemi aritmetici invece vengono suddivisi in varie tappe per analizzare la soluzione e le abilità: interpretazione dati, comprensione di relazioni che intercorrono tra i dati, distinzione tra dati superflui e necessari, pianificazione delle operazioni da svolgere, correttezza calcoli e individuazione del risultato finale.

**BDE2** è un test di secondo livello dalla durata totale di 35/40 minuti ed è basato su un campione di 721 ragazzi. Il test è diviso in tre aree: l'area del numero che approfondisce le capacità di elaborazione numerica, quella del calcolo che valuta le abilità sia del calcolo scritto che del calcolo a mente, e l'area del senso del numero con prove di calcolo approssimato e di determinazione di ordini di grandezza dei numeri. In aggiunta a queste tre aree, se necessario, è possibile svolgere la prova relativa ai problemi aritmetici che indaga le abilità del problem solving. Gli esercizi quindi sono relativi al conteggio, alla transcodifica dei numeri, alla ripetizione dei numeri (opzionale) per quanto riguarda l'area del numero. Per l'area del calcolo si svolgono tabelline, calcoli a mente e calcoli scritti, mentre per l'area del senso del numero si presentano esercizi sui segni algebrici, su triplete e sulla linea dei numeri. Ogni area ha un punteggio differenziato che, aggiunto al punteggio cumulativo, serve per stilare la diagnosi di discalculia; anche la prova dei problemi aritmetici ha un punteggio, ma questo è isolato dagli altri ed è utile per approfondire le abilità di comprensione e risoluzione dei problemi.

Grazie a questi test è dunque possibile non solo diagnosticare la discalculia, ma anche approfondire e vedere quali sono le aree e le capacità deficitarie. Questo aiuta sicuramente anche nella fase successiva, quella della riabilitazione, in quanto permette di attuare interventi mirati, costruiti sugli errori dello studente. Lo scopo principale della riabilitazione è quello di integrare gli aspetti difficoltosi con le abilità maggiormente sviluppate del ragazzo, individuando perciò quelle competenze sulle quali fondare le proposte riabilitative cosicché il ragazzo possa essere sostenuto anche a livello psicologico, evitando il senso di frustrazione solitamente derivante dalla non riuscita di un compito.

Molto spesso, gli errori delle persone con discalculia riguardano la transcodifica dei numeri, che è inevitabilmente la base di qualsiasi compito aritmetico. Per questo motivo, è importante innanzitutto rinforzare tale abilità, lavorando sulla lettura, sulla scrittura, sull'individuazione dei numeri sulla retta reale e sulla ricorsività che caratterizza i numeri. Per far ciò è consigliato lavorare sul conteggio in avanti e all'indietro, sulla rappresentazione della linea dei numeri e sulla costruzione stessa dei numeri.

Dopodiché bisogna valutare anche la classe di appartenenza dello studente con discalculia poichè diverse sono le richieste didattiche e diverse sono anche le difficoltà nella vita quotidiana. Con gli studenti della scuola primaria è infatti possibile lavorare a fondo su tutto l'ambito del calcolo, senza ricorrere immediatamente alla calcolatrice, cercando di aiutare gli studenti con discalculia a trovare strategie e tecniche utili a velocizzare il calcolo. Aumentando di grado scolastico, non è invece più possibile fare ciò: lo scopo principale non è più quello di imparare a fare i calcoli, ma si inserisce anche tutta la componente logico-deduttiva, dove l'esecuzione delle operazioni non è la richiesta, ma un singolo passaggio. A questo punto, l'intervento riabilitativo deve mirare principalmente ad avere una visione di insieme, a controllare il risultato e impostare dei metodi risolutivi, con l'aiuto certo della calcolatrice e, se necessario, con l'utilizzo di schemi.

In ogni caso, gli strumenti compensativi e le misure dispensative elencate

nella sezione 1.2 possono essere tutte utilizzate se ritenute necessarie e tali per cui possano offrire un sostanziale aiuto. In aggiunta a queste, proprie per la discalculia, ci sono anche materiali specifici, come fogli di calcolo (fig.1.9), e software didattici (GeoGebra, IncolonnAbili, il gruppo LeggiXme,...) che con le loro proprie caratteristiche possono aiutare lo studente sia a risolvere i compiti più basilari sia a manovrare, capire e costruire la matematica.

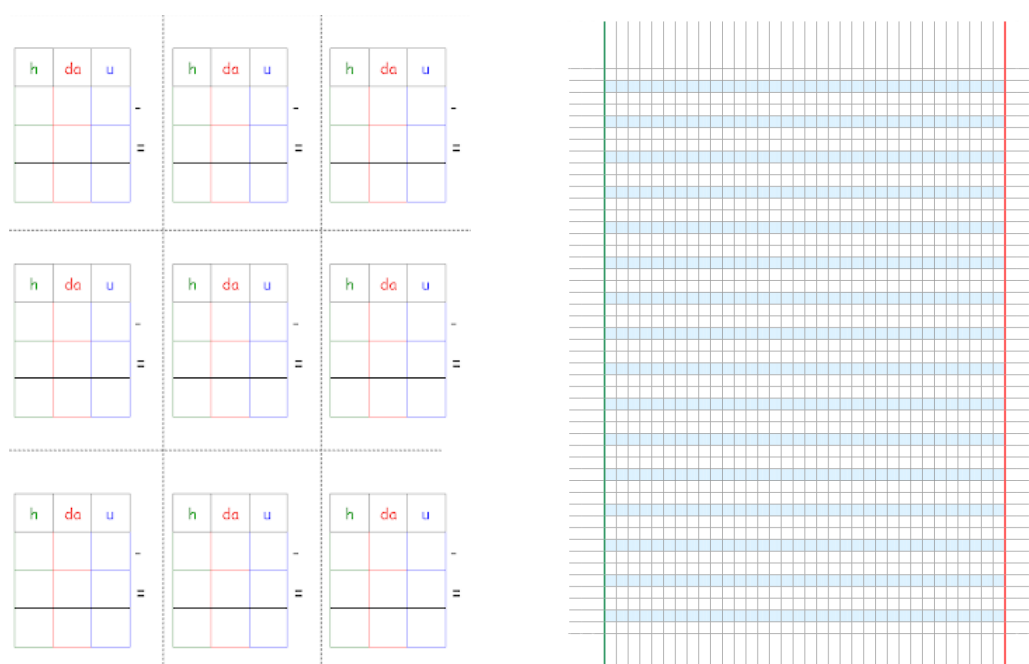


Figura 1.9: Esempio di fogli compensativi.

### 1.3 Legislazione italiana

Nel 1948 entra in vigore la **Costituzione della Repubblica Italiana** dove si trovano articoli fondamentali sia per il diritto all'uguaglianza, sia per il diritto allo studio. In particolare, si evidenziano:

**Art. 3**

*Tutti i cittadini hanno pari dignità sociale e sono eguali davanti alla legge, senza distinzione di sesso, di razza, di lingua, di religione, di opinioni politiche, di condizioni personali e sociali.*

*È compito della Repubblica rimuovere gli ostacoli di ordine economico e sociale, che, limitando di fatto la libertà e l'eguaglianza dei cittadini, impediscono il pieno sviluppo della persona umana e l'effettiva partecipazione di tutti i lavoratori all'organizzazione politica, economica e sociale del Paese.*

**Art. 34**

*La scuola è aperta a tutti.*

*L'istruzione inferiore, impartita per almeno otto anni, è obbligatoria e gratuita.*

*I capaci e meritevoli, anche se privi di mezzi, hanno diritto di raggiungere i gradi più alti degli studi.*

*La Repubblica rende effettivo questo diritto con borse di studio, assegni alle famiglie ed altre provvidenze, che devono essere attribuite per concorso.*

**Art. 38**

*Ogni cittadino inabile al lavoro e sprovvisto dei mezzi necessari per vivere ha diritto al mantenimento e all'assistenza sociale.*

*I lavoratori hanno diritto che siano preveduti ed assicurati mezzi adeguati alle loro esigenze di vita in caso di infortunio, malattia, invalidità e vecchiaia, disoccupazione involontaria.*

*Gli inabili ed i minorati hanno diritto all'educazione e all'avviamento professionale.*

*Ai compiti previsti in questo articolo provvedono organi ed istituti predisposti o integrati dallo Stato.*

*L'assistenza privata è libera.*

Questi articoli pongono le basi per la *fase di inserimento* che si individua in Italia tra gli anni '70 e gli anni '80, permettendo a tutti gli studenti di frequentare la scuola. Questa fase fa però riferimento solo ad un'azione fisica, nel senso che si concede a tutti di stare fisicamente a scuola e di accedere ad essa: nell'articolo 28 della **legge n.118 del 30 Marzo 1971** ([28]) si assicurano “ai mutilati e agli invalidi civili” il trasporto gratuito, l'accesso a scuola tramite accorgimenti per il superamento delle barriere architettoniche e, per gli invalidi più gravi, l'assistenza durante gli orari scolastici. Inoltre, c'è scritto che “l'istruzione dell'obbligo deve avvenire nelle classi normali della scuola pubblica, salvi i casi in cui i soggetti siano affetti da gravi deficienze intellettive o da menomazioni fisiche di tale gravità da impedire o rendere molto difficoltoso l'apprendimento o l'inserimento nelle predette classi normali” ([28], Art.28). Dunque gli studenti con disabilità possono accedere alla scuola e frequentare le lezioni a patto che non interferiscano con esse e di conseguenza o seguono la lezione come tutti i compagni, senza poter accedere a percorsi personalizzati e individualizzati o a strumenti e accortezze che li aiuterebbero, o seguono in un luogo esterno alla classe un percorso a parte, spesso privo di progetto educativo alla base, completamente delegato ad un insegnante specializzato, se possibile, o curricolare.

Nonostante ciò, l'inserimento è importante perchè pone le fondamenta per le fasi successive, infatti se non fosse possibile per gli studenti con disabilità ed in generale per chiunque andare a scuola, sarebbe inutile o incompleto parlare di inclusione e attuare interventi sul contesto e sul soggetto.

Nel 1975 invece, grazie al **Documento Falcucci** ([29]) vengono stabiliti i principi che hanno permesso la diffusione dell'*integrazione scolastica* in Italia. Infatti nel documento si legge che “il superamento di qualsiasi forma di emarginazione degli handicappati passa attraverso un nuovo modo di concepire la scuola e di attuare la scuola, così da poter veramente accogliere ogni bambino e ogni adolescente per favorire il suo sviluppo personale, precisando per altro che la frequenza di scuole comuni da parte dei bambini handicappati non implica il raggiungimento di mete minime comuni” ([29]) e che “la possibi-

lità di attuazione di una struttura scolastica idonea ad affrontare il problema dei ragazzi handicappati presuppone il convincimento che anche i soggetti con difficoltà di sviluppo, di apprendimento e di adattamento devono essere considerati protagonisti della propria crescita. In essi infatti esistono potenzialità conoscitive, operative e relazionali spesso bloccate dagli schemi e dalle richieste della cultura corrente e del costume sociale. Favorire lo sviluppo di queste potenzialità è un impegno peculiare della scuola, considerando che la funzione di questa è appunto quella di portare a maturazione, sotto il profilo culturale, sociale, civile, le possibilità di sviluppo di ogni bambino e di ogni giovane.” ([29]). Nel documento ci si riferisce agli studenti che presentano delle menomazioni delle proprie condizioni, fisiche, psichiche e/o sensoriali che causano loro difficoltà di apprendimento o di relazione e si evidenzia la necessità di integrare tali studenti con il resto dei compagni, operando una minore separazione tra le attività di sostegno e le attività del gruppo classe, formando gli insegnanti e collaborando con specialisti per promuovere efficaci esperienze cognitive e di socializzazione.

L'integrazione però è una situazione che si riferisce in particolare all'ambito scolastico, focalizzandosi principalmente sullo studente con disabilità e solo in un secondo momento sul contesto, anche se come si evince dal precedente documento, essa implica anche una collaborazione con gli specialisti in modo da offrire sia un supporto migliore che un percorso didattico ottimale. A tal proposito, la scuola si attiva per migliorare le attrezzature, le metodologie, le risorse umane e i curricoli e si prodiga per studiare interventi educativi e pedagogici che riprendano sia le potenzialità che le disabilità dell'alunno. Inoltre l'insegnante specializzato assume maggior importanza, diviene una risorsa per tutta la classe, programma e progetta, senza essere segregato con l'alunno con disabilità.

La legge italiana di riferimento per l'integrazione è la **legge quadro 104/92**, le cui finalità ([30], Art.1) sono

- garantire il rispetto della dignità umana e i diritti di libertà e autonomia delle persone con disabilità;

- promuovere l'integrazione delle suddette persone nella famiglia, nella scuola, nella società e nel lavoro;
- prevenire e rimuovere le condizioni invalidanti che limitano lo sviluppo della persona umana e la realizzazione dei diritti civili e politici;
- assicurare i servizi e le prestazioni che aiutano nella prevenzione, nella cura e nella riabilitazione delle minorazioni;
- tutelare giuridicamente ed economicamente le persone con disabilità;
- predisporre interventi per superare i casi di emarginazione e di esclusione sociale.

Entrando in merito della legge, viene garantito il diritto all'educazione e all'istruzione delle persone con disabilità per tutti gli ordini scolastici promuovendo l'integrazione scolastica che "ha come obiettivo lo sviluppo delle potenzialità della persona handicappata nell'apprendimento, nella comunicazione, nelle relazioni e nella socializzazione" ([30], Art.12). Viene anche esplicitata la necessità della formulazione di un "profilo dinamico-funzionale" basato sulla diagnosi e tramite il quale è possibile stilare un adeguato piano educativo individualizzato, grazie alla collaborazione di insegnanti, operatori psico-pedagogici e operatori delle unità sanitarie locali.

Si procede poi con le linee guida per assicurare l'integrazione e il superamento delle limitazioni al diritto allo studio per studenti con disabilità ([30], Art.13 e Art.16):

- la programmazione di progetti educativi, riabilitativi, di socializzazione e di integrazione tra attività scolastiche ed extra-scolastiche deve essere affrontata in collaborazione con i servizi scolastici, sanitari, socio-assistenziali ma anche con quelli culturali, ricreativi e sportivi;
- la scuola deve dotarsi delle necessarie attrezzature tecniche, di sussidi didattici e di qualsiasi forma di ausilio utile a garantire il diritto allo studio;

- è obbligatorio fornire l'assistenza per l'autonomia e la comunicazione personale degli studenti con disabilità;
- sono garantite attività di sostegno tramite anche l'assegnazione di insegnanti specializzati e tali attività sono basate sul profilo dinamico-funzionale stilato;
- gli insegnanti di sostegno partecipano alla programmazione didattica, alla elaborazione e alle verifiche delle attività di classe, assumendo la contitolarità delle classi in cui opera;
- nel piano educativo individualizzato vanno esplicitati i criteri didattici utilizzati, le attività integrative e di sostegno svolte e in base a ciò vengono predisposte prove di esame, le quali, oltre a verificare l'acquisizione dell'argomento, valutano il progresso dello studente in rapporto alle sue potenzialità e al suo percorso didattico;
- nella scuola secondaria di secondo grado sono consentite prove equipollenti e tempi aggiuntivi per le prove scritte e gli studenti possono utilizzare tutti gli ausili tecnici necessari.

In seguito al cambio di prospettiva operato dall'Organizzazione Mondiale della Sanità (OMS) nel 2001, si inizia a promuovere un approccio globale alla persona, cioè un approccio che guardi sia alle potenzialità e risorse complessive del soggetto, sia al contesto in cui vive. Infatti, i fattori contestuali possono migliorare il funzionamento della persona o possono incrementare le difficoltà creando continuamente ostacoli ed è per questo motivo che è necessario agire sul contesto e non solo sulla persona con disabilità, in modo da lasciare il deficit come unico fattore non modificabile. Si apre così la *fase dell'inclusione*, un processo in continuo divenire che opera nelle aree educative, sociali e politiche e che si rivolge a tutti e non solo alle persone con disabilità.

A tal proposito le Nazioni Unite redigono la **Convenzione per i diritti delle persone con disabilità** (entrata in vigore nel 2009 in Italia) con lo



“scopo di promuovere, proteggere e garantire il pieno ed eguale godimento di tutti i diritti umani e delle libertà fondamentali di tutte le persone con disabilità, e di promuovere il rispetto della loro intrinseca dignità” ([31], Art.1). La Convenzione stabilisce inoltre le necessità di accrescere la sensibilizzazione nella società e di includere le persone con disabilità nella comunità, sia tramite l’educazione, sia tramite il lavoro, sia tramite la vita culturale e ricreativa. Per quanto riguarda l’educazione ([31], Art.24):

- viene assicurato un sistema educativo inclusivo esteso a tutti i gradi scolastici che miri al pieno sviluppo delle potenzialità umane, al rispetto per la diversità e per i diritti umani. Inoltre, tale sistema deve aiutare le persone con disabilità a sviluppare talenti, migliorare le proprie abilità fisiche e mentali fino al massimo del potenziale raggiungibile;
- viene garantito il supporto necessario a facilitare una partecipazione attiva ad una società libera;
- vengono adottate misure individualizzate per una piena inclusione.

Il percorso legislativo visto fin qui si pone anche alla base delle leggi sui DSA e sui BES (Bisogni Educativi Speciali). In Italia con la **legge n.170 dell’8 Ottobre 2010** ([32]) vengono riconosciuti e definiti i DSA e viene garantito alle persone con DSA il diritto all’istruzione, conformemente a ciò che si è detto per la scuola inclusiva e per i diritti delle persone con disabilità. Entrando però nello specifico, dopo aver definito singolarmente dislessia, disgrafia, disortografia e discalculia e dopo aver stabilito le finalità della legge, si stabilisce che:

- la diagnosi viene svolta da servizi specialisti e spetta alla famiglia comunicare l’eventuale diagnosi di DSA alla scuola. Al contrario, la scuola è tenuta ad avvisare le famiglie interessate qualora si sospetti di DSA degli studenti ed in seguito è suo compito attivare interventi tempestivi ed idonei;

- gli studenti con DSA hanno diritto a provvedimenti compensativi e dispensativi lungo tutto il percorso formativo;
- è garantita una didattica individualizzata e personalizzata, tenendo conto delle potenzialità e dei deficit dello studente con DSA;
- si possono introdurre strumenti compensativi comprensivi anche di tecnologie informatiche e mezzi di apprendimento alternativi;
- è necessario monitorare l'efficacia degli strumenti compensativi utilizzati;
- le forme di verifica, di valutazione e di esami sono adeguate allo studente con DSA e coerenti con gli interventi pedagogici-didattici utilizzati.

Questi punti vengono poi ripresi ed elaborati nel Decreto Ministeriale n. 5669 del 2011 con lo scopo di individuare le modalità di formazione dei docenti, le misure educative e didattiche di supporto utili per un efficace percorso di insegnamento e apprendimento e le forme di verifica e di valutazione migliori per gli studenti con diagnosi di DSA.

Tuttavia, considerando un approccio puramente educativo, gli alunni con disabilità e quelli con DSA possono non essere gli unici a necessitare di una didattica individualizzata e personalizzata, tramite anche l'utilizzo di misure compensative e dispensative. È possibile quindi individuare alunni che, per un periodo limitato o con continuità, manifestano BES per motivi fisici, biologici, fisiologici o per motivi psicologici, sociali e che necessitano di una particolare attenzione. I BES ricoprono le disabilità, i disturbi evolutivi specifici e le categorie dello svantaggio socio-economico, linguistico, culturale; però o non rientrano nella classificazione dell'ICD-10 o non vengono certificati, facendo sì che gli alunni con BES non possano usufruire delle predisposizioni della legge quadro 104/92. Solo in seguito alla **direttiva ministeriale sui BES** del 2012 ([34]) si è evidenziata la necessità di progettare dei percorsi individualizzati e personalizzati per studenti con BES, con la conseguente

estensione della legge 170/10 agli stessi alunni, permettendo dove necessario l'utilizzo di misure compensative e dispensative.



# Capitolo 2

## DSA e didattica della matematica

### 2.1 Stili di apprendimento

Ci sono quattro principali canali sensoriali tramite i quali è possibile accedere alle informazioni e tali canali influenzano gli stili di apprendimento ([42]):

- il **canale visivo/verbale** fa prediligere un apprendimento basato sulla lettura e sulla scrittura;
- il **canale visivo/non-verbale** aiuta generalmente lo studente che ha una buona memoria visiva, in quanto apprende tramite immagini, schemi, grafici e mappe che vengono poi utilizzati per costruire un'immagine mentale legata ai contenuti da memorizzare;
- lo studente che usa il **canale uditivo** invece preferisce apprendere i contenuti da studiare tramite l'ascolto, motivo per cui esso predilige partecipare a discussioni e a lavori di gruppo;
- il **canale cinestetico** permette di apprendere da attività concrete dove è possibile fare esperienza diretta.

In seguito all'acquisizione, le informazioni devono essere elaborate e immagazzinate in modo efficace per poterle poi recuperare anche a distanza di tempo: anche in questi processi sono fondamentali i canali sensoriali in quanto le informazioni vengono recuperate solo se memorizzate e quindi solo se apprese tramite il canale più consono ([42]).

La didattica tradizionale favorisce principalmente un apprendimento basato sulla lettura e sulla scrittura, penalizzando quindi gli studenti che prediligono altri canali sensoriali: bisognerebbe diversificare le attività tenendo conto dei canali di accesso e degli stili di apprendimento per aiutare tutti gli alunni a raggiungere un apprendimento stabile. Questo non è sempre possibile e spesso difficilmente attuabile, ma occorre tenere a mente che il canale visivo/verbale non è l'unico canale di accesso alle informazioni.

Anche gli studenti con DSA generalmente si inseriscono tra quelli che non preferiscono un canale visivo/verbale; è utile allora insegnare loro a mettere a punto delle immagini mentali per memorizzare informazioni, elaborarle e recuperarle.

## 2.2 Tipologie di apprendimento della matematica

“In matematica, infatti, non basta aver costruito un concetto, ma occorre saperlo usare per effettuare calcoli o dare risposta ad esercizi, combinarlo con altri e con strategie opportune per risolvere problemi, occorre saper spiegare a se stessi ed agli altri il concetto costruito e la strategia seguita, occorre saper far uso sapiente delle trasformazioni semiotiche che permettono di passare da una rappresentazione ad un'altra” ([52]).

L'apprendimento della matematica quindi è un insieme di vari tipi di apprendimento, i quali però non sono nè separabili nè indipendenti:

- **l'apprendimento concettuale o noetico** è raggiunto nel momento

in cui lo studente costruisce cognitivamente un oggetto matematico, cioè quando è in grado di identificare le proprietà dell'oggetto, di rappresentarlo in maniera adeguata alle varie situazioni (trasformandone la rappresentazione se necessario), di usarlo in modo opportuno;

- l'**apprendimento algoritmico** è legato alle abilità di dare risposte a calcoli, applicazioni di formule o a disegni e quindi di operare calcoli non solo in modo meccanico, ma anche ragionato, capendo appieno le motivazioni dei vari passaggi;
- l'**apprendimento strategico** riguarda le capacità di risolvere problemi nuovi, trovando strategie adatte ed efficaci di risoluzione, strategie che appartengono ad un processo interno e creativo dello studente;
- l'**apprendimento comunicativo** è connesso alle abilità dell'alunno di esprimere (sia oralmente che per iscritto) concetti e procedimenti matematici, argomentandoli, dimostrandoli e rappresentandoli in modo efficace; l'apprendimento comunicativo comprende l'utilizzo di un linguaggio specifico e tecnico che sia comprensibile ed univoco;
- l'**apprendimento semiotico** è acquisito quando lo studente è capace di gestire le rappresentazioni di un concetto, in particolare quando riesce a rappresentarlo, trattarlo e convertirlo.

La componente semiotica dell'apprendimento, in realtà, è presente in tutte le altre componenti poichè gli oggetti matematici non sono ostensivi, cioè il loro significato non può essere presentato da oggetti - un esempio di oggetto ostensivo è il colore blu, il quale può essere presentato facendo vedere qualcosa colorato di blu. Perciò l'apprendimento degli oggetti matematici passa attraverso le rappresentazioni e la concettualizzazione deve necessariamente passare tramite registri rappresentativi. Questo binomio tra semiotica (teoria che studia le diverse rappresentazioni di un oggetto all'interno di opportuni registri) e noetica (acquisizione concettuale di un oggetto) è fondamentale nell'apprendimento della matematica e costituisce il *paradosso di Duval*: "da

una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici". Questo può causare negli alunni delle identificazioni errate tra oggetto e rappresentazione utilizzata; occorre dunque che l'insegnante espliciti subito quale rappresentazione sta usando e quali altri possibili rappresentazioni si possono utilizzare per lo stesso oggetto.

### 2.3 Contratto didattico e teoria delle situazioni matematiche

Generalmente in una situazione di insegnamento, in particolar modo matematico, si instaura tra insegnante e allievo il **contratto didattico**, definito da Brousseau ([53]) come l'insieme delle abitudini specifiche del maestro attese dall'allievo e dei comportamenti dell'allievo attesi dal docente. Esso è legato alle concezioni della scuola, vista come valutativa e non-cooperativa, e della matematica, ritenuta spesso troppo rigorosa, esclusiva e direttiva, ed è dovuto alle ripetizioni delle modalità didattiche e delle abitudini dell'insegnante.

Un esempio tipico di contratto didattico è rappresentato dal seguente problema: un pastore ha 12 pecore e 6 capre. Quanti anni ha il pastore? Ovviamente non si può dare una risposta, ma vari studenti rispondono "18 anni" ( $12+6=18$ ) perchè non si soffermano su quanto dice il problema e considerano che è un problema dato dall'insegnante e che quindi è risolvibile con i dati del problema. Proprio l'esigenza di una giustificazione formale derivante da calcoli è un aspetto tipico del contratto didattico: gli alunni hanno imparato che negli esercizi di matematica vanno sempre svolti calcoli, i quali danno il risultato finale.

Inoltre, sotto contratto didattico, l'allievo decide l'algoritmo da utilizzare, ma poi smette di ragionare, delegando ogni tipo di giustificazione all'algoritmo: se infatti si chiede una delucidazione su un passaggio, il ragazzo risponde



con “il procedimento dice di fare così”.

Infine nel contratto didattico è compreso l'*effetto Topaze* ([54]) che si presenta quando il docente non ha un reale interesse nell'apprendimento dello studente, ma riterrà la sua azione di insegnante positiva nel momento in cui lo studente scrive proprio ciò che lui ha in mente, anche senza reale comprensione. D'altra parte, allo studente non interessa capire l'attività e ciò che sta facendo, gli interessa solo attendere il momento in cui il professore inizia a dare suggerimenti e a condurlo alla soluzione. Nel momento in cui queste due attese (da parte del docente e da parte dell'allievo) vengono soddisfatte si ottiene il successo in aula, anche se questo non è il successo che si deve sperare.

Per raggiungere il vero successo, bisogna rompere il contratto didattico e aiutare gli studenti a costruire la conoscenza perchè essi apprendono al meglio solo interessandosi direttamente del problema: l'allievo deve fidarsi dell'insegnante in un primo momento, ma una volta imparate le basi, deve fidarsi delle proprie capacità e proseguire lo studio in modo critico, facendosi domande e cercando risposte. Per rompere il contratto didattico è innanzitutto necessario cambiare visione della matematica, facendo capire agli studenti che i problemi non sono tutti uguali e risolvibili mediante formule e calcoli: consegnare problemi senza soluzione o con dati superflui o con soluzioni interpretabili può aiutare in un primo momento a mostrare un altro aspetto della matematica. Tuttavia, per rompere effettivamente il contratto didattico è necessario usufruire delle situazioni a-didattiche.

Brousseau individua nella sua **teoria delle situazioni** tre tipologie di situazioni riscontrabili e attuabili in aula ([53]):

- le **situazioni didattiche** sono caratterizzate dall'intenzione esplicita di insegnare; gli obiettivi didattici sono legati alla materia insegnata; l'insegnante è il protagonista e chiede all'allievo di riprodurre ciò che dice e fa; l'allievo, passivo, tenta di comprendere e assecondare le attese del docente; sono situazioni in pieno contratto didattico;
- le **situazioni a-didattiche** prevedono sempre obiettivi disciplinari le-

gati alla materia insegnata (anche se possono essere impliciti), ma si distinguono dalle precedenti per lo scambio di ruoli tra docente e alunno; l'allievo infatti diventa il protagonista del processo di apprendimento e l'insegnante si limita a osservare;

- le **situazioni non didattiche** invece non prevedono obiettivi disciplinari e non sono strutturate; sono situazioni pedagogiche non specifiche di un sapere; manca la volontà esplicita didattica di insegnare.

In particolare, analizziamo le situazioni a-didattiche poichè vengono utilizzate ed esemplificate nella sezione 4.5. Esse prevedono sei fasi:

1. la *devoluzione* è l'atto tramite il quale la responsabilità della situazione di apprendimento viene passata dall'insegnante all'allievo; questa transizione deve però essere accettata dagli studenti affinché l'attività proposta sia efficace; durante la devoluzione il protagonista è ancora l'insegnante, il quale spiega l'attività che si sta per affrontare (modalità e tempistiche) e cede la direzione agli studenti stessi;
2. l'*implicazione* è la prima fase personale ed indica il momento in cui lo studente si sente direttamente coinvolto; il professore in questa fase osserva e risponde ad eventuali domande;
3. la *costruzione della conoscenza privata* è un'altra fase personale dove lo studente svolge l'attività in autonomia; il docente è sempre un osservatore;
4. la *validazione* è il momento in cui si verifica la corrispondenza tra risultati ottenuti e richieste iniziali; è anche la prima fase sociale dove l'idea personale e i risultati vengono condivisi con il gruppo classe; il docente non interviene se non per gestire la condivisione e la discussione;
5. la *socializzazione* è un altro momento sociale nel quale si espongono potenzialità e problematicità delle idee condivise; si costruisce quindi una discussione costruttiva per permettere agli studenti di confrontarsi

e dibattere sulle strategie adottate e su quali siano le migliori; il docente gestisce la discussione e non interviene;

6. *l'istituzionalizzazione delle conoscenze* è il momento in cui l'insegnante riprende il controllo della situazione per rendere ufficiale il sapere che dovrebbe essere emerso dall'attività.

Non è possibile ovviamente svolgere sempre attività in situazioni a-didattiche sia per il tempo a disposizione, sia perchè non tutti gli argomenti si possono attuare in laboratori, sia per la predisposizione dei ragazzi. Inoltre, durante lo svolgimento si possono incontrare vari ostacoli: la mancanza di stabilità di conoscenze previe (che si può risolvere tramite lavori di gruppo), la mancanza di affidabilità delle tecniche operatorie, l'incapacità di leggere l'attività globalmente e la mancanza di volontà da parte degli studenti. È perciò necessario individuare i nuclei fondanti della materia sui quali investire tempo e risorse, in modo da ottenere un apprendimento stabile che usufruisce anche dei diversi stili di apprendimento, così da raggiungere tutti gli studenti.

## 2.4 Accorgimenti per studenti con DSA nell'apprendimento della matematica

Come visto in precedenza, gli studenti con DSA prediligono generalmente un canale visivo/non-verbale e cinestetico per imparare nuove nozioni, è dunque utile proporre laboratori che utilizzano questi canali per introdurre o per consolidare le conoscenze fondamentali. Ad esempio per argomenti di geometria è possibile utilizzare software dinamici, come *GeoGebra*, tramite i quali manipolare le costruzioni, ipotizzare proprietà geometriche e tentare dimostrazioni; o ancora utilizzare siti internet costruiti appositamente, come *Euclid: The Game!* (fig.2.1); o creare un laboratorio con gli origami.

Alcuni software sono molto utili anche nelle scuole secondarie di secondo grado nel momento in cui si inizia analisi, poichè aiutano a visualizzare la funzione congiuntamente alle proprietà fondamentali. Bisogna però educa-

re i ragazzi all'utilizzo di tali software: alcuni studenti non hanno voglia di imparare ad usare i software perchè credono di non capire niente e di non riuscire a ottenere miglioramenti con questi aiuti; si possono allora inserire varie attività a-didattiche durante il percorso scolastico svolto in aula per insegnare ad utilizzare e sfruttare al meglio le potenzialità dei software, grazie anche ad un ambiente collaborativo e sereno che si instaura tra i compagni. Si possono inoltre creare dei laboratori manuali (vedi sezione 4.5.2) o pen-

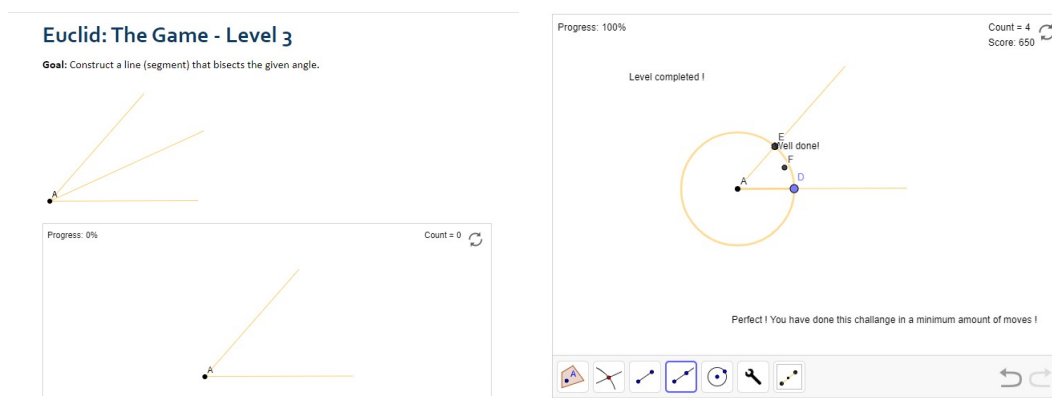


Figura 2.1: Livello 3 di Euclid: The Game!.

sare ad attività cooperative a piccoli gruppi, in modo da rendere partecipi anche questi studenti che altrimenti seguono la lezione in modo passivo. Mentre nella scuola primaria è possibile esercitare le abilità di calcolo trovando adeguate strategie, nelle scuole secondarie di primo e secondo grado è necessario lasciar utilizzare una calcolatrice per limitare gli errori di calcolo tenendo però presente che, se hanno una discalculia non lieve, faticano a leggere i numeri e a riportarli esatti sulla calcolatrice: può tornare utile a questo punto farli esercitare con numeri semplici in modo da non impegnarli troppo nella trascrizione delle cifre e in modo da aiutarli a concentrarsi su ciò che l'esercizio chiede e vuole insegnare. È anche necessario permettere loro di utilizzare schemi per evitare errori procedurali poichè si è notato che gli alunni con DSA presentano difficoltà nel memorizzare gli algoritmi e le procedure. Bisogna però aiutarli a capire come costruire gli schemi senza eccedere negli esempi o nelle descrizioni, solo in questo modo li si può aiutare a

capire a fondo l'utilità degli schemi che devono contenere giusto degli spunti per riattivare la memoria di procedimenti appresi durante il percorso di apprendimento. In base al livello di discalculia è possibile creare varie tipologie di schemi: quelli che riportano solo esempi numerici di formule e algoritmi, dove i procedimenti vengono evidenziati da colori, riquadri e frecce; quelle che schematizzano per iscritto i procedimenti da fare; quelli che riportano le formule o le proprietà in modo generico (con lettere al posto che numeri). Ritengo che gli ultimi sono gli schemi che più si allineano con la teoria e il linguaggio formale matematico: si può provare a proporre tali tipi di schemi, insegnando come applicare ciò che hanno scritto nell'esercizio da svolgere, ma richiede tempo e spesso non risulta essere efficace.

Per quanto riguarda i tipi di apprendimento della matematica esposti nella sezione 2.2, bisogna considerare che gli studenti con DSA riscontrano varie difficoltà in tutte le tipologie, eccetto quella algoritmica che viene supportata dagli schemi. Questi studenti infatti presentano difficoltà a spiegare e argomentare i procedimenti matematici proprio perchè non arrivano a comprendere a fondo l'argomento o perchè non riescono a collegare al meglio i vari concetti; inoltre, sentendosi inadeguati e incapaci di fronte alla matematica, non si impegnano a risolvere problemi nuovi. È quindi necessario lavorare sulle varie competenze matematiche, andandole a sviluppare singolarmente, altrimenti il carico cognitivo è alto. Una volta appresi i significati delle varie tipologie nell'argomento in esame, si possono far svolgere esercizi più complessi, aiutandoli a creare collegamenti significativi con ciò che hanno fatto precedentemente, in modo da farli sentire a loro agio con le nuove conoscenze.

Anche se richiede tempo, spiegare i concetti in vari modi aiuta gli alunni con DSA a capire meglio un concetto o comunque lascia loro la libertà di decidere quale strategia usare a casa per comprendere l'argomento. Conoscere le caratteristiche di questi ragazzi aiuta l'insegnante a impostare le spiegaioni in modo sempre più efficace, generalmente essi prediligono la spiegazione tramite esempi, tuttavia devono comprendere che l'esempio in matematica

non comprende la totalità delle nozioni che ci sono in una definizione teorica. Ad esempio, quando si spiegano le equazioni esponenziali, agli studenti con DSA viene consigliato di ricordare giusto un paio di tipologie di equazioni, che vengono svolte automaticamente senza ragionamento: in questo modo gli alunni vengono facilitati nello svolgimento di esercizi e verifiche, ma non vengono educati a capire e impegnarsi a comprendere ciò che c'è dietro a quello che svolgono in maniera automatica.

Serve perciò integrare le “spiegazioni per esempi” con le spiegazioni più approfondite dove si spiega passo passo il perché dei procedimenti.

Dove possibile infine è conveniente comparare esercizi tipici matematici con la quotidianità: è facile ad esempio riportare vari tipi di problemi (anche astratti) nel quotidiano, più difficile è fare ciò con esercizi di algebra e analisi. Per gli studenti con DSA è infatti più semplice ragionare con situazioni riscontrate nella vita reale e si nota spesso che ci mettono poco tempo a risolvere un problema riportato nella quotidianità, mentre per lo stesso problema posto in modo più astratto non riescono a trovare una soluzione.

Quanto esposto in questa sezione sono esempi di ciò che si può fare per favorire l'apprendimento della matematica in studenti con DSA, ci sono altre strategie che si possono adattare, una volta imparato a conoscere gli alunni che si hanno di fronte. Sicuramente pensare ad attività efficaci e innovative richiede un impegno serio e costante da parte del docente, ma senza l'aiuto del ragazzo e della famiglia questo impegno è vano: è necessario allora trovare dei modi per attivare e coinvolgere il ragazzo, facendogli capire che è lui il primo protagonista nel suo percorso di apprendimento. Terminata la scuola infatti, lo studente deve sapere gestire i DSA nella vita di tutti i giorni facendo affidamento sulle sue capacità; per questo motivo, oltre a strutturare un adeguato percorso didattico, bisogna tessere una rete di collaborazione tra scuola, studente e famiglia.

## Capitolo 3

# Didattica a distanza: problematicità e potenzialità

In questo periodo di emergenza, dovuta alla circolazione del virus Sars-CoV-2, in Italia è stato necessario apportare delle modifiche alla didattica per ovviare al problema del distanziamento sociale e per evitare di interrompere prematuramente l'anno scolastico. Il Ministero dell'Istruzione ha quindi deciso di redigere delle indicazioni operative riguardo alla didattica a distanza, didattica risultata chiave in questa situazione.

Nella nota ministeriale n.388 del 17 Marzo 2020 ([35]), si evidenziano due principali significati assunti dalla didattica a distanza in questi mesi:

- continuare a perseguire il compito sociale del fare “comunità”, combattendo l'isolamento e la demotivazione;
- continuare il percorso di apprendimento.

Infatti, da un lato la didattica a distanza sta permettendo la continua tessitura di rapporti tra docenti e studenti, grazie alla condivisione sia di sfide che di idee e conoscenze; dall'altro, tale modalità ha fatto sì che non si violasse e interrompesse il principio costituzionale del diritto all'istruzione.

È necessario sottolineare che la didattica a distanza non consiste semplicemente nel trasferire i saperi delle lezioni tradizionali tramite mezzi tecnologici,

ma richiede una ricerca accurata e una profonda riflessione sulle modalità migliori per coinvolgere gli alunni e per trasmettere i contenuti, facendo sì che la lezione diventi significativa per gli studenti e non una mera ripetizione di concetti. Serve una “costruzione ragionata e guidata del sapere attraverso un’interazione tra docenti e alunni” ([35]), da inserire in un “ambiente di apprendimento” dove è possibile interagire, costruire conoscenze, creare e crescere. Si esclude perciò l’invio di materiali o l’assegnazione di compiti se non inseriti all’interno di un percorso formativo che prevede spiegazioni dei concetti, interventi di recupero o di chiarimento. Infatti la didattica a distanza deve includere vari momenti di relazione tramite i quali istituzionalizzare le conoscenze, esplicitare il senso di ciò che è stato svolto autonomamente, valutare il livello che si è raggiunto nella costruzione dei concetti e del sapere, recuperando eventuali dubbi, errori o misconcezioni (errori che sono dei risultati di una conoscenza corretta precedente, la quale però non è più sufficiente), e valutare l’efficacia delle metodologie utilizzate.

### 3.1 Opportunità e limiti della didattica a distanza

Da 25-30 anni si parla di integrare la didattica con gli strumenti tecnologici, con l’obiettivo di costruire negli studenti nuove competenze per un successivo inserimento in una società modificata profondamente dalle tecnologie e di utilizzare metodi, contenuti e strumenti per migliorare l’insegnamento nei vari curriculum disciplinari ([41]). Di fatto, però, nelle scuole non si è ancora giunti ad un uso efficace di tali strumenti, utilizzati spesso solo per svolgere al computer alcune semplici attività eseguite prima in modo tradizionale. Questo è dovuto alle resistenze di parte del corpo docenti e al peso dei vincoli dovuti al sistema scolastico (vastità di argomenti da affrontare, tempi limitati e valutazione individuale). Usare efficacemente le tecnologie invece significa ripensare alla didattica, sfruttando le potenzialità delle nuove risorse nel loro insieme e riflettendo sui mutamenti che il loro utilizzo implica



su obiettivi, contenuti e modalità dell'apprendimento e insegnamento ([38]). Si possono individuare due categorie, non per forza in contrapposizione tra loro, in cui inserire gli usi della rete nella didattica a distanza ([39]):

- la rete come strumento per recuperare materiale educativo per un'autoistruzione;
- la rete come ambiente virtuale all'interno del quale i partecipanti formano vere e proprie comunità di apprendimento.

La prima categoria comprende sia materiali strutturati e messi a disposizione dal docente, sia tutto ciò che è recuperabile su internet. Imparare nuovi contenuti navigando la rete generalmente non è sufficiente perchè si apprendono velocemente delle informazioni che sono poi da inserire in un contesto più ampio e preciso e da intrecciare alle conoscenze precedentemente acquisite. È sicuramente un ottimo mezzo per approfondire, cercare spiegazioni ulteriori e accedere facilmente a svariati e numerosi contenuti ma, per far sì che sia efficace, è necessario insegnare agli studenti a navigare la rete, a riconoscere i siti e i documenti affidabili da quelli superficiali, non completi ed errati e a costruire le conoscenze a partire da varie fonti, senza perdersi tra le nozioni. Invece la fruizione di materiali predisposti dal docente consente di evitare i problemi connessi alla navigazione in rete e permette di seguire un preciso percorso formativo ma, anche in questo caso, è necessaria la mediazione dell'insegnante per chiarire i dubbi, esplicitare gli obiettivi e valutare l'effettivo apprendimento da parte degli alunni.

La seconda categoria fa sì che l'insegnante progetti e costruisca un impianto didattico dove prevalgono il protagonismo dei discenti e la collaborazione tra essi. Non si tratta quindi di un insieme di lezioni frontali mediato dagli strumenti tecnologici ma di attività che favoriscano la crescita collettiva del gruppo classe. In questo senso è un ambiente in cui i momenti di studio individuale o di lezione da parte del docente vengono integrati con momenti di interazione, grazie alle chat o alle videochiamate operate tra il gruppo classe o tra piccoli gruppi di studio, nei quali è possibile discutere, esercitarsi, con-

dividere idee e aiutarsi a chiarire dubbi, anche tramite il linguaggio informale dei coetanei.

Gli strumenti più utilizzati per favorire un ambiente virtuale educativo sono le piattaforme e-learning, le quali

- consentono l'accesso dello studente secondo tempi propri;
- permettono di svolgere attività di tipo asincrono;
- favoriscono la condivisione di materiali, la valorizzazione degli errori e la collaborazione tra studenti;
- aiutano sia la personalizzazione che l'individualizzazione dei percorsi;
- fanno sì che gli studenti assumano un ruolo più attivo nell'apprendimento, soffermandosi maggiormente e chiedendo ulteriori spiegazioni sugli argomenti nei quali hanno maggiori problemi;
- dilatano i tempi delle discussioni, lasciando spazio anche all'uso di un linguaggio più colloquiale prima di istituzionalizzare i concetti e permettendo una maggiore comprensione;
- possono facilitare la costruzione del sapere da parte degli alunni.

Oltre a queste potenzialità delle piattaforme e-learning, si possono individuare ulteriori aspetti positivi della didattica a distanza. Essa può aiutare gli alunni più timidi a esporsi maggiormente, in quanto il contatto è mediato da uno schermo, e consente di creare vari sondaggi da svolgere in anonimato, lasciando lo studente libero di esprimersi senza che vengano prodotte ansia e vergogna a causa di eventuali errori. Gli studenti inoltre possono imparare a lavorare e studiare con maggiore autonomia, fermando i video, cercando spiegazioni sul web, confrontandosi con i compagni e verificando la comprensione dell'argomento: questo implica quindi anche una maggiore responsabilità del proprio percorso di apprendimento e una maggiore consapevolezza delle difficoltà che si incontrano. Il docente invece può operare un maggior

controllo sugli esercizi e sugli errori commessi dagli alunni, predisponendo immediatamente dei recuperi, e può seguire con più costanza il percorso di ogni studente, verificando il loro impegno nei compiti e nelle attività assegnate e analizzando il loro metodo di studio e approccio all'apprendimento. Non mancano però degli aspetti negativi della didattica a distanza: il problema più importante è l'evidenziamento del divario socio-economico (ad esempio molte famiglie non possono permettersi dispositivi elettronici e una connessione internet veloce). Gli studenti di queste famiglie sono penalizzati e non riescono a seguire in modo completo e costante il percorso di studi svolto totalmente online. Il Ministero dell'Istruzione ha dato la possibilità a queste famiglie di richiedere aiuto nel reperire dispositivi per garantire il diritto all'istruzione dei figli, tuttavia potrebbe rimanere il problema della connessione, in quanto non tutte le abitazioni sono raggiunte da collegamenti efficienti. Se da un lato la didattica a distanza permette di acquisire maggiore autonomia, dall'altro complica la stimolazione da parte dei docenti di quegli alunni che già in classe non erano partecipi: non essendo seguiti costantemente dall'insegnante, in assenza di famiglie che incentivano lo studio, i ragazzi sentono meno la pressione e l'obbligo di recuperare lacune e tendono a non farsi coinvolgere. Questo disinteresse a volte è causato dalle lezioni stesse, le quali possono risultare non accattivanti o mal gestite: non tutti i docenti infatti riescono a rivisitare le lezioni in modalità telematica e la maggior parte delle volte ciò è causato da una mancata abilità tecnologica o creativa.

Un'ultima grande critica mossa alla didattica a distanza riguarda l'ambito relazionale: la scuola è una "palestra socio-affettiva" e un primo modello di cittadinanza, dove lo sviluppo non è solo cognitivo, ma si cresce anche nella personalità: i rapporti docente-studente, studente-studente e studente-gruppo classe sono momenti educativi che formano la persona. Non si può scorporare la relazione dall'apprendimento, perchè la scuola è da intendersi come unione tra didattica, relazione, socializzazione ed emozioni: tutto ciò porta alla crescita umana. Bisogna quindi considerare la didattica come pro-

posta di conoscenze all'interno di un progetto pedagogico, motivo per cui è fondamentale la presenza fisica e quindi la didattica in presenza: il toccarsi l'un l'altro è fonte di riconoscimento e di legittimazione reciproca che attesta l'effettiva presenza, fisica ed emotiva, e che è preliminare ad ogni produzione di significazione sociale ([51]).

Nonostante pregi e difetti evidenziati della didattica a distanza, essa di per sé non è né utile, né dannosa, né indifferente rispetto agli obiettivi fondamentali dell'attività di insegnamento-apprendimento, come il favorire l'esercizio, lo sviluppo del pensiero critico, l'acquisizione di consapevolezza, la costruzione di significato per i temi disciplinari affrontati, l'accettazione delle responsabilità. La differenza viene fatta dal modo in cui viene realizzata la didattica a distanza e dalla coerenza tra modalità di realizzazione e obiettivi ([37]).

In questi mesi di didattica a distanza forzata si raccoglieranno i frutti di quanto operato in aula prima della chiusura. Se uno studente era già abituato a lavorare intensamente e a studiare a fondo i vari argomenti, soffermandosi istantaneamente sui dubbi e sugli errori, non avrà particolari difficoltà nel proseguire gli studi per via telematica e anzi ne potrà usufruire e sfruttare tutte le potenzialità. Al contrario, chi non era abituato a cercare informazioni, a lavorare in autonomia o a non cedere davanti alle difficoltà riscontrerà maggiori problemi a farsi coinvolgere dalle attività online e ad apprendere per via telematica. J.Boaler afferma che è necessario "cambiare il nostro approccio in classe, così che gli studenti abbiano più occasioni per sforzarsi cognitivamente; tuttavia gli studenti saranno a loro agio nel fare ciò solo se avranno imparato l'importanza e il valore della fatica e se, sia loro che l'insegnante, avranno rimosso l'idea che fare fatica sia un segno di debolezza" ([37]).

## 3.2 Apprendimento della matematica nella didattica a distanza

Per quanto concerne la matematica, l'impatto delle tecnologie, in particolare dell'e-learning, non è negativo come molti insegnanti ritengono. L'e-learning permette di considerare, sviluppare e trattare più rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto matematico, favorendo anche l'apprendimento degli studenti che preferiscono un canale di tipo visivo/non-verbale o di tipo cinestetico. Aiuta anche a migliorare il proprio livello comunicativo, cercando nuove strategie per farsi capire sia dal docente che dai compagni di classe e ampliando lo spazio di discussione.

I **software di geometria dinamica** sono fondamentali nella didattica a distanza perchè consentono una percezione visiva/non-verbale di elementi e proprietà di figure geometriche bidimensionali e permettono di costruire con azioni concrete alcune nozioni. Inoltre, sono ottimi strumenti anche per lavorare sul significato di implicazioni logiche, congetture, premesse, conclusioni e proprietà minime.

La loro potenzialità non risiede nell'evitare gli errori legati a strumenti usati una volta (righello e compasso), ma nel fornire nuovi modi per costruire e risolvere problemi, basato su prove ed errori. Qui l'errore assume un significato totalmente positivo per poter giungere ad una generalizzazione del caso analizzato. Enriques scrive che

“il cammino dello spirito umano è essenzialmente induttivo: cioè procede dal concreto all'astratto.[...] D'altronde, l'esempio ha una virtù chiarificatrice che ne fa un valido strumento della ricerca scientifica e, in pari tempo, un prezioso mezzo di verifica e di correzione delle dottrine.[...] Ancor più evidente è il valore euristico degli esempi, perchè ognuno sa che il raffronto di casi diversi in cui si palesi qualcosa di comune è atto a suggerire alla nostra mente le più belle generalizzazioni additandoci così la migliore posizione dei problemi” ([44]).

È dunque utile portare gli studenti a vedere il “generale” attraverso il “particolare” e anche il “particolare” nel “generale”, ponendo attenzione però a chiarire che non basta verificare una legge o considerare un solo esempio per trarne validità in termini generali. L’esempio considerato è utile a formulare congetture e ipotesi, le quali però vanno dimostrate per essere validate.

A questo proposito sono molto utili i software di geometria dinamica (GeoGebra, Maple, Cabri2+, Cabri3D, . . .): è possibile da un lato fare *costruzioni robuste* e dall’altro *costruzioni molli*. Le prime aiutano a illustrare teoremi e scoprirli tramite l’esplorazione della figura, a porre l’attenzione sulla generalità del teorema e a distinguere le proprietà invarianti. Lo spostamento gioca un ruolo fondamentale nella ricerca degli invarianti in quanto muovendo un qualsiasi elemento della figura, sarà possibile ritrovare la stessa proprietà, se questa è invariante, altrimenti si può riconoscere che si è analizzata una proprietà specifica della figura che, però, va dimostrata per generalizzarla a tutte le figure simili. Le costruzioni molli sono invece costruzioni dove le condizioni del teorema non sono tutte rispettate e quelle verificate lo sono in relazione alle scelte operate dallo studente. Esse perciò suggeriscono varie strade di ricerca e di risoluzione, permettendo allo studente stesso di dimostrare delle proprietà prima solo individuate e congettrate. Con queste costruzioni si pone particolare attenzione al legame tra ipotesi e conclusione e si fa emergere il teorema generale a partire da figure particolari e proprietà locali.

Toccare, visualizzare e maneggiare le rappresentazioni grafiche stimolano gli studenti che non hanno sviluppato una buona capacità di astrazione o che non riescono a comprendere appieno il significato di enunciati e formule, aiutandoli a costruirsi un’immagine mentale adeguata del concetto, senza aver paura di sbagliare in quanto, nelle attività con questi software, sono spesso previsti procedimenti per tentativi, dove appunto l’errore non è un segno di demerito ma un punto di inizio per intraprendere un’altra strada.

La didattica a distanza può favorire anche l’apprendimento comunicativo e concettuale tramite una vera e propria discussione matematica, intesa come “strumento per costruire, attraverso la negoziazione della classe, domini di

consenso, nei quali possa avvenire la negoziazione su un argomento matematico” ([45]), evitando i discorsi nei quali gli studenti rispondono come si aspetta il docente (effetto Topaze, tipico del contratto didattico). Si possono individuare tre tipi di discussione matematica ([45]):

- la discussione di un problema, che comprende sia quella operata dalla classe per giungere ad un processo risolutivo con conseguente risultato, sia quella individuale di ogni ragazzo, sia quella dell’insegnante che analizza le risoluzioni degli allievi e che rielabora le informazioni raccolte per poi aprire un confronto con tutta la classe;
- la discussione di concettualizzazione, intesa come processo di costruzione attraverso il linguaggio dei collegamenti tra esperienze e termini matematici, in modo da giungere ad una contestualizzazione e ad una istituzionalizzazione di ciò che gli studenti hanno appreso e capito dalle loro esperienze;
- la metadiscussione, cioè l’insieme di “discussioni che pongono dall’inizio una questione collegata all’attività metacognitiva” ([45]).

Per aiutare la discussione le piattaforme di e-learning mettono a disposizione innanzitutto la **chat**, utile in particolare per commentare le attività in tempo reale e per favorire gli interventi tipici delle lezioni tradizionali. Tuttavia, poichè molti ragazzi operano una riflessione sull’argomento successivamente alla lezione, in base anche ai propri tempi di apprendimento, è necessario ampliare la discussione e i suoi tempi e permettere agli studenti di porre domande e di confrontarsi sia con i compagni che con gli insegnanti. A questo proposito viene in aiuto il **forum** delle piattaforme e-learning: esso consente di discutere in tempi asincroni vari argomenti e può essere impostato sia in base al numero di argomenti sui quali confrontarsi, sia sulle modalità di intervento, sia sul numero di partecipanti e può essere avviato sia dal docente che dagli studenti stessi. In generale, il forum può essere usato per

- discutere i contenuti del percorso di insegnamento-apprendimento tramite domande, riflessioni, curiosità e informazioni trovate su altri mezzi rispetto alle dispense/appunti consegnati dal docente;
- dare continuità a discussioni nate durante attività svolte in tempo reale;
- creare aree di supporto tra docente e studenti;
- creare sezioni private per fornire un supporto individuale allo studente;
- creare ambienti di confronto in piccoli gruppi per svolgere varie attività;
- creare un ambiente di supporto tra pari, un ambiente in cui è possibile confrontarsi senza l'intervento del professore e nel quale può essere usato un linguaggio più colloquiale in modo da capirsi meglio;
- inserire spunti alternativi alle dispense, maggiormente collegati con il quotidiano e con gli interessi dei ragazzi;
- formare uno spazio sociale dove i partecipanti possono conoscersi, al di là dell'ambiente educativo.

Proprio una cospicua interazione tra pari e tra studente-docente è alla base per un miglioramento nella comprensione di oggetti matematici e di procedure e algoritmi che si utilizzano inconsciamente.

È perciò consigliato avviare forum e discussioni matematiche in modo da raggiungere un vero apprendimento: la video-lezione in sé non è molto proficua se non inserita all'interno di una discussione che prevede anche un lavoro di mediazione da parte del docente, il quale, oltre a spiegare, deve sapere interrompersi, porre domande, lasciar tempo per riflettere e discutere i punti di forza e di criticità emersi dal confronto nel gruppo classe.



### 3.3 Opportunità e limiti della didattica a distanza per studenti con DSA

In questa situazione di emergenza, non bisogna dimenticarsi degli alunni con disabilità, con DSA e con BES: anche a loro deve essere garantito il diritto all'istruzione, continuando il percorso di inclusione avviato in presenza. In particolare, nella nota ministeriale ([35]) si legge che occorre dedicare attenzione agli alunni con DSA e ai rispettivi PDP sia nella progettazione che nella realizzazione delle attività a distanza, prevedendo dove necessario l'utilizzo di strumenti compensativi e dispensativi.

La didattica a distanza può influenzare vari aspetti del percorso di insegnamento - apprendimento degli studenti con DSA.

Innanzitutto il **tempo** proprio della lezione viene dilatato: le lezioni svolte in tempo reale possono essere registrate, permettendo così allo studente con DSA (e in generale a tutti gli studenti) di rivedere la lezione con i propri ritmi, dividendo la lezione in più momenti se necessario, in modo da affrontarla con maggiore concentrazione e consapevolezza. Senza suddividere la lezione in momenti diversi, possono anche interromperla momentaneamente, cercare le risposte a dubbi e riprenderla subito, così da avere un quadro chiaro dell'argomento affrontato. È utile per loro anche poter tornare in un secondo momento sulla lezione per recuperare delle spiegazioni che in tempo reale non avevano colto. Lo svolgimento di attività in tempi differiti è molto favorevole a questi alunni perché possono gestirsi i compiti, in modo da affrontarli con serenità e a mente lucida, prendendo pause quando non riescono più a stare concentrati.

Strettamente collegati sono gli aspetti del **carico cognitivo** e della **organizzazione**: se da un lato è vero che gli alunni con DSA possono gestire autonomamente lo studio in modo da renderlo più proficuo, dall'altro lato corrono il rischio di aver un carico eccessivo da gestire, soprattutto se ricevono una grande quantità di compiti da parte di tutti i docenti. Un altro rischio è quello di dover studiare in autonomia nuovi argomenti senza rice-

vere spiegazioni dagli insegnanti e senza riuscire a dare un senso a ciò che si è letto e fatto durante i compiti: questo porta ad un “apprendimento” scomposto che quindi non è possibile unificare e fissare nella mente. Anche ricercare e raccogliere le varie informazioni/dispense dislocate in luoghi differenti può causare confusione e frammentarietà, demotivando lo studente con DSA: è utile allora raccogliere tutti i materiali per argomenti in uno stesso luogo virtuale, specificando ogni passaggio da svolgere nella ricerca di ciò che serve e seguendo con più costanza il percorso dello studente, dandogli anche feedback del lavoro svolto e spiegazioni ulteriori.

La didattica a distanza può facilitare anche l'**individualizzazione** e la **personalizzazione**: non è difficile creare e pensare a diversi percorsi di apprendimento di uno stesso contenuto per far raggiungere gli obiettivi principali e le competenze di base o predisporre vari spunti di approfondimento per permettere, a chi ha già raggiunto certi obiettivi, di progredire e analizzare vari collegamenti che in aula sono difficili da affrontare a causa delle tempistiche strette. Poichè è possibile creare questi percorsi, allora è possibile anche sfruttare le potenzialità di ciascun studente, compresi quelli con DSA, e creare apposta specifiche attività. Ad esempio:

- gli studenti con DSA sono abituati a lavorare con mappe concettuali; vale la pena allora fornire a inizio della video-lezione una mappa che mostra e ripercorre tutti i concetti che si vanno ad analizzare, in modo che lo studente con DSA abbia già una linea guida e non si trovi disorientato durante la lezione;
- può essere molto proficuo far lavorare in gruppetti gli studenti; in tal modo lo studente con DSA si sente meno sotto pressione e può accedere anche a spiegazioni offerte dai compagni in un linguaggio più colloquiale e vicino;
- gli alunni con DSA sono abituati ad usare vari software; la didattica a distanza è dunque un'ottima occasione per coinvolgere tutto il gruppo classe nell'utilizzo di tali software;

- per quanto concerne la matematica, gli studenti con DSA preferiscono solitamente attività concrete e vicine al quotidiano; è possibile approfittare delle tecnologie per svolgere maggiori attività con software dinamici (ad esempio i software di geometria dinamica analizzati nella sezione 3.2) dove è possibile “maneggiare” la conoscenza o, ancora, affrontare problemi i cui dati o le cui ipotesi sono da ricercare nel web o nella propria vita quotidiana o, ancora, si possono far svolgere attività manuali. Queste tipologie di compiti permetteranno di avvicinare lo studente alla materia, facendogli capire quali riscontri concreti hanno i concetti incontrati durante la lezione.

L'aspetto negativo è che, nonostante tutte le possibili attività che si possono programmare, non è semplice coinvolgere gli studenti con DSA che già in aula si impegnavano poco: manca la presenza fisica, la gestualità, il controllo vicino operato dal docente e anche gli incoraggiamenti dei compagni e dei professori. Essi possono sentirsi meno coinvolti e possono individuare una possibilità di sfuggire al controllo e di allentare lo studio, azione controproducente per l'apprendimento.

Tuttavia, la didattica a distanza offre anche la possibilità di far acquisire maggiore fiducia in sé e maggiore consapevolezza delle proprie potenzialità, evitando il senso di oppressione, ansia e vergogna tipici della didattica in presenza. Infatti anche la **valutazione** può riacquistare il senso di valorizzazione, superando l'ormai consolidato binomio valutazione-voto.

Nella nota ministeriale ([35]) si legge

“Se è vero che deve realizzarsi attività didattica a distanza, perchè diversamente verrebbe meno la ragione sociale della scuola stessa, come costituzionalmente prevista, è altrettanto necessario che si proceda ad attività di valutazione costanti[. . .] Se l'alunno non è subito informato che ha sbagliato, cosa ha sbagliato e perchè ha sbagliato, la valutazione si trasforma in un rito sanzionatorio, che nulla ha a che fare con la didattica, qualsiasi sia la forma nella quale è esercitata. Ma la valutazione ha sempre anche un ruolo di va-

lorizzazione, di indicazione di procedere con approfondimenti, con recuperi, consolidamenti, ricerche, in una ottica di personalizzazione che responsabilizza gli allievi, a maggior ragione in una situazione come questa.”

La valutazione deve quindi continuare ad essere costante, formativa e personalizzata. La *costanza* è necessaria per verificare l'apprendimento di ogni argomento, in particolare in matematica è necessario verificare l'acquisizione delle competenze in quanto i contenuti disciplinari sono tutti collegati tra loro e non è possibile procedere in modo adeguato se non si sono apprese le basi. La valutazione deve invece essere *formativa* in modo da non esprimere un giudizio sugli studenti ma aiutarli a verificare le competenze raggiunte e i problemi riscontrati nell'acquisizione di concetti; la valutazione formativa quindi è utile sia agli studenti, poichè non sentono il peso del giudizio e possono diventare consapevoli di quanto hanno appreso, sia al professore, che può verificare l'efficacia delle sue metodologie. Risulta infine *personalizzata* nel momento in cui si considera tutto il percorso dello studente insieme alle sue potenzialità e difficoltà.

A maggior ragione ciò deve valere per gli studenti con DSA che necessitano di costanti feedback da parte del docente sulla correzione dei compiti svolti e dei risultati raggiunti, sulle strategie utilizzate nell'esecuzione dei lavori assegnati e sull'autovalutazione. Grazie a questi feedback, infatti, gli alunni con DSA possono essere incentivati sia a migliorarsi, sia a prendere parte a recuperi per cercare di approfondire gli errori e trovare modi e strumenti utili ad ovviarli. Discutere in maniera metacognitiva dei processi attuati per imparare o per affrontare le attività sollecita i ragazzi a porsi domande e a partecipare attivamente al percorso di apprendimento.

Durante questo periodo di didattica a distanza è ancor più facile personalizzare la valutazione di studenti con DSA, evitando i quiz a tempo propinati al resto della classe: questi alunni necessitano di tempi maggiori per riflettere, è inutile quindi valutarli con test a tempo poichè è già noto che non riusciranno ad esprimere le loro vere conoscenze e capacità. Piuttosto si possono operare

altri tipi di accorgimento e di valutazione, ad esempio:

- fornire loro dei quiz a risposta multipla da svolgere e consegnare entro una certa data ed integrare tale compito con una interrogazione dove far spiegare loro i procedimenti attuati;
- fare interrogazioni in sessione privata o con pochi compagni, in modo da alleggerire l'ansia e la vergogna;
- programmare interrogazioni a gruppetti dove ogni gruppo espone ciò che ha studiato e svolto come attività;
- fare interrogazioni sotto forma di autobiografia cognitiva ([36]), anche registrata, tramite la quale il ragazzo con DSA spiega come ha vissuto l'esperienza di apprendimento dell'argomento assegnato e come lo ha approfondito, grazie anche all'utilizzo di power point, immagini, materiali precedentemente costruiti;
- far creare mappe, anche interattive, dei contenuti da verificare;
- far svolgere loro alcune attività in un arco di tempo dilatato e valutare quelle senza aggiungere altri test finali;
- far svolgere lavori di gruppo in cui i ragazzi stessi si valutano, seguendo anche indicazioni consegnate dal docente;
- valutare l'intero percorso e considerare con che modalità gli studenti hanno appreso gli ultimi argomenti, evitando la media matematica e valorizzando la crescita individuale avvenuta;
- creare test di autovalutazione che mostrino subito la correzione della risposta, in modo da rendere consapevoli gli studenti su quanto stanno apprendendo;
- strutturare vari test da ripetere man mano che si affrontano gli argomenti, in modo da verificare innanzitutto quanto si è appreso e poi da riutilizzare per fare dei ripassi;

- utilizzare fogli di lavoro (come Maple) per far svolgere i compiti, così da evitare quegli errori dovuti alla discalculia per le cifre; in questi fogli infatti è possibile selezionare e cliccare direttamente sui simboli matematici e sulle formule preformate;
- usare i software di geometria dinamica per verificare e valutare l'apprendimento di concetti geometrici e per far eseguire dimostrazioni costruite direttamente su figura.

Dopo una attenta valutazione dei limiti e delle opportunità della didattica a distanza, è compito dell'insegnante scegliere gli accorgimenti più adeguati che la via telematica offre per costruire un efficace percorso didattico da affrontare con studenti con DSA.

Nel prossimo capitolo verranno ripresi e utilizzati alcuni aspetti qui sopra analizzati e gli stessi verranno declinati in un percorso didattico sulle frazioni svolto in modalità telematica.

## Capitolo 4

# Didattica a distanza e DSA: percorsi didattici a confronto

Le frazioni sono uno degli argomenti più ostici che si affrontano nella scuola secondaria di primo grado. Esse vengono generalmente introdotte come parte di uno-tutto, cioè

**Definizione 4.1.** La **frazione** è un operatore che ci permette di dividere l'intero in parti uguali e di considerarne alcune di esse ([50]).

Tuttavia questa definizione, nonostante sia intuitiva, non è sufficiente per sostenere gli altri modi di intendere le frazioni: ad esempio, come si può giustificare la frazione  $\frac{9}{8}$  tramite l'interpretazione di parte di uno-tutto? O ancora, cosa si intendo con “uguale”?

Prima di progettare un percorso didattico sulle frazioni è necessario quindi capire quali sono le interpretazioni possibili, le difficoltà e le misconcezioni che gli studenti possono avere, in modo tale da promuovere un apprendimento profondo di questo concetto.

In questo capitolo vengono esposti innanzitutto le varie interpretazioni, le misconcezioni e gli errori tipici legati alle frazioni. Segue un classico percorso didattico per una classe prima della scuola secondaria di primo grado; vengono poi presentate alcune attività da proporre in ottica della didattica

a distanza e che si possono integrare anche al percorso tradizionale per un apprendimento più profondo. Infine viene presentato un possibile percorso sulle frazioni da proporre con la didattica a distanza. Particolare attenzione viene posta agli accorgimenti, agli strumenti compensativi e dispensativi e alle modifiche che si possono apportare per aiutare l'apprendimento di questi concetti per studenti con DSA.

## 4.1 Interpretazioni del concetto di frazione

Come visto precedentemente il primo significato di frazione che si presenta agli alunni è quello di **parte di uno-tutto** e dunque una frazione  $\frac{m}{n}$  è un operatore su una grandezza che implica la divisione della stessa grandezza in  $n$  parti uguali e l'unione delle  $m$  parti uguali. A partire da questa definizione si possono poi distinguere le *frazioni proprie* se  $0 < m < n$ , le *frazioni improprie* se  $m > n$  e  $m \neq kn$  con  $k \in \mathbb{N}$  e le *frazioni apparenti* se  $m = kn$  con  $k \in \mathbb{N}$ .

Considerando un insieme continuo, ci si riconduce al solito modello della torta o della superficie di una figura (fig.4.1), ma si possono prendere in esame anche insiemi discreti, come ad esempio un insieme di palline o di persone (fig.4.2). In entrambi i casi insorgono però delle difficoltà: individuare frazioni improprie di un intero crea confusione e si scontra con l'intuitività della definizione; dividere un insieme discreto non è sempre semplice, per esempio nella figura 4.2 non è banale considerarne  $\frac{2}{7}$  perchè bisognerebbe dividere le 10 palline in 7 parti; un altro problema non indifferente è la concezione di "uguale" data nella definizione, poichè non è specificato se il termine "uguale" ricopre il significato di congruente, equinumeroso, equiesteso o equivolumetrico; è complicato anche passare dall'immagine della torta tagliata al modello astratto se non vengono presentati sufficienti esempi di modelli; infine presentare solo le classiche figure e le solite suddivisioni in parti non aiuta a comprendere ed apprendere a fondo il concetto di frazione parte di uno-tutto.



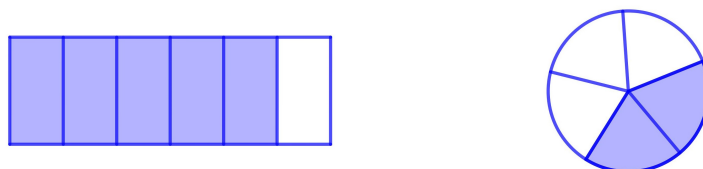


Figura 4.1: Esempi di frazioni come parti di uno-tutto nel caso continuo.

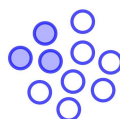


Figura 4.2: Esempio di frazione come parte di uno-tutto nel caso discreto.

Proseguendo con le differenti interpretazioni, si può pensare alla frazione come un **quoziente**, dove il numeratore è il dividendo e il denominatore il divisore:

$$\frac{m}{n} \quad \text{equivale a scrivere} \quad m : n$$

e dunque si è nel caso in cui si vogliono dividere  $m$  oggetti tra  $n$  parti. Bisogna stare attenti a questa interpretazione perchè può causare misconcezioni, infatti il quoziente di due numeri interi è normalmente inteso come quoziente intero (ad esempio il quoziente dei numeri 44 e 6 è 7, con resto 2), mentre la frazione rappresenta un numero razionale quasi sempre non intero ( $\frac{44}{6} = 7, \bar{3}$ ). La frazione indica anche un **rapporto tra grandezze**. Per esempio, considerati due segmenti  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  di lunghezze rispettivamente 7 cm e 3 cm, allora il primo segmento “sta al” secondo come 7 “sta a” 3, ossia  $\overline{AB} : \overline{CD} = 7 : 3$  o ancora  $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{7}{3}$ . Tale interpretazione di frazione è strettamente legata alla proporzionalità perciò se due grandezze  $G_1$  e  $G_2$  sono variabili, possono as-

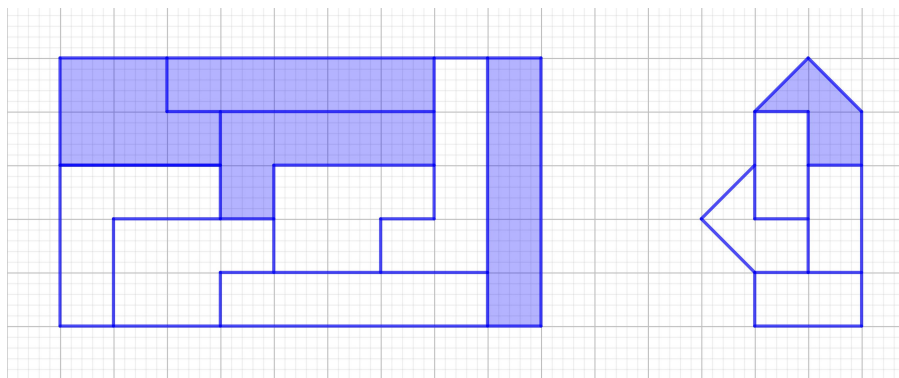


Figura 4.3: Esempio di suddivisioni in parti inusuale e di figura non standard.

sumere valori diversi e sono reciprocamente legate dallo stesso rapporto, per esempio 2:3, allora è equivalente affermare che  $G_1 : G_2 = 2 : 3$  (cioè  $\frac{G_1}{G_2} = \frac{2}{3}$ ) e dire che  $G_2 : G_1 = 3 : 2$  (cioè  $\frac{G_2}{G_1} = \frac{3}{2}$ ). Proprio questa “interscambiabilità” tra numeratore e denominatore può creare misconcezioni se non compresa bene.

Un altro uso abituale della frazione nelle scuole è quello di **operatore moltiplicativo**: quando una frazione agisce su numeri puri e non su insiemi (continui o discreti) è pensata come una nuova operazione che combina divisione e moltiplicazione.

In probabilità invece la frazione assume un ulteriore significato: essa rappresenta la **probabilità di un evento**. In questo caso non tutte le frazioni equivalenti ad una che esprime la probabilità di un evento sono significative: data un’urna con 20 palline delle quali 7 rosse e 13 gialle, la probabilità di pescare una pallina gialla è data da  $\frac{13}{20}$  e non ha molto senso esprimere tale probabilità con la frazione equivalente  $\frac{39}{60}$  perchè non richiama il modello iniziale, tuttavia è da sottolineare che non è sbagliato scrivere che la probabilità dell’evento è uguale all’ultima frazione. È invece molto utile esprimere la frazione in centesimi, riconducendosi quindi alla frazione intesa come **percentuale**.

Si può infine intendere una frazione come un **numero razionale** e di conseguenza può essere visto come un **punto di una retta orientata**. Ma cos’è

un numero razionale?

**Definizione 4.2.** Sia  $\sim$  una relazione in  $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$  tale che  $(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$ . L'insieme dei numeri razionali è  $\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) / \sim$  e i numeri razionali sono i rappresentanti delle classi di equivalenze  $[(a, b)] \in \mathbb{Q}$ .

**Osservazione 1.** - La relazione  $\sim$  è una relazione di equivalenza;

- Si può definire una funzione iniettiva  $j : \mathbb{Z} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}$  tale che  $a \mapsto [(a, 1)]$ .  
Si ha quindi  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  identificando  $\mathbb{Z}$  con  $j(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Q}$ ;
- Si possono definire le seguenti operazioni:

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)] \quad \text{e} \quad [(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

che si dimostrano essere ben poste, ovvero non dipendono dalla scelta dei rappresentanti delle classi di equivalenza;

- Con le operazioni così definite,  $\mathbb{Q}$  è un campo che contiene  $\mathbb{Z}$  come sottoanello e ha  $[(0, 1)]$  come elemento neutro rispetto alla somma e  $[(1, 1)]$  come elemento neutro rispetto al prodotto.

**Proposizione 4.1.1.** *Ogni elemento non nullo di  $\mathbb{Q}$  ha un rappresentante canonico  $[(m, n)]$  con  $MCD(m, n) = 1$ ,  $n > 0$ ,  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .*

Si può quindi esprimere ogni numero razionale tramite la scrittura  $\frac{m}{n}$ , utile anche per svolgere le operazioni tra numeri razionali periodici o misti.

**Osservazione 2.** Tutti i numeri razionali in base 10 (e in generale in base  $k$ ) hanno una scrittura posizionale finita o periodica costituita dalla parte intera del numero (formata da un numero finito di cifre) e da una sequenza di cifre  $q_1, q_2, \dots$  (anche infinite) separate dalla parte intera tramite una virgola.

È possibile dunque passare dalla rappresentazione del numero razionale in frazione a quella in base  $k$ . Di consuetudine la base  $k$  considerata è la base 10, motivo per cui di seguito vengono riportati i passaggi da frazione a rappresentazione decimale e viceversa:

## - DA FRAZIONE A RAPPRESENTAZIONE DECIMALE

Sia  $x \geq 0$ ,  $x = \frac{a}{b}$  con  $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ,  $MCD(a, b) = 1$ ,  $b \geq 2$ , svolgendo la divisione  $a : b$  si ha  $a = db + r_0$ . La parte intera della rappresentazione decimale è formata da  $d$ , invece per trovare le cifre dopo la virgola, si prosegue nel seguente modo:

$$r_0 \cdot 10 = q_1 \cdot b + r_1$$

$$r_1 \cdot 10 = q_2 \cdot b + r_2$$

$$\vdots$$

Ora se si trova  $r_i = 0$  si ottiene una scrittura posizionale finita e si ha  $x = d, q_1 q_2 \dots q_{i-1}$ , altrimenti si trova un resto non nullo già ottenuto, in seguito al quale la sequenza si ripete invariata. Si ha quindi una rappresentazione periodica e si scrive  $x = d, \overline{q_1 q_2 \dots q_j}$  (o  $x = d, q_1 \dots q_{j-1} \overline{q_j \dots q_k}$  se il resto ripetuto che si trova non è il primo resto ottenuto nella divisione).

**Esempio 4.1.** Scrivere  $x = \frac{35}{8}$  tramite la scrittura decimale.

$$35 = 4 \cdot 8 + 3 \quad \Longrightarrow \quad d = 4 \quad r_0 = 3$$

$$3 \cdot 10 = 30 = 3 \cdot 8 + 6 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 6 \quad q_1 = 3$$

$$6 \cdot 10 = 60 = 7 \cdot 8 + 4 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = 4 \quad q_2 = 7$$

$$4 \cdot 10 = 40 = 5 \cdot 8 + 0 \quad \Longrightarrow \quad r_3 = 0 \quad q_3 = 5$$

Quindi  $x = 4,375$ .

**Esempio 4.2.** Scrivere  $x = \frac{1}{3}$  in scrittura decimale.

$$1 = 0 \cdot 3 + 1 \quad \Longrightarrow \quad d = 0 \quad r_0 = 1$$

$$1 \cdot 10 = 10 = 3 \cdot 3 + 1 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 1 \quad q_1 = 3$$

Poichè  $r_1 = r_0$ , ci si può già fermare e si ha  $x = 0, \overline{3}$ .

**Esempio 4.3.** Scrivere  $x = \frac{11}{45}$  in scrittura decimale.

$$11 = 0 \cdot 45 + 11 \quad \Longrightarrow \quad d = 0 \quad r_0 = 11$$

$$11 \cdot 10 = 110 = 2 \cdot 45 + 20 \quad \Longrightarrow \quad r_1 = 20 \quad q_1 = 2$$

$$20 \cdot 10 = 200 = 4 \cdot 45 + 20 \quad \Longrightarrow \quad r_2 = 20 \quad q_2 = 4$$

Poichè  $r_2 = r_1$ , ci si può fermare e si ottiene  $x = 0,2\bar{4}$ .

- DA RAPPRESENTAZIONE DECIMALE A FRAZIONE

**Proposizione 4.1.2.** *Ogni scrittura finita o periodica su 10 cifre è la scrittura posizionale in base 10 di un numero razionale.*

*Dimostrazione.* La scrittura finita  $c_t \dots c_0, q_1 \dots q_r$  è la scrittura di  $x = \frac{c_t \dots c_0 q_1 \dots q_r}{10^r} = \frac{n}{10^r}$  con  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Invece sia  $x = c_t \dots c_0, p_1 \dots p_s \overline{q_1 \dots q_r}$ , allora  $x \cdot 10^{r+s}$  e  $x \cdot 10^s$  hanno la stessa parte dopo la virgola ( $\overline{q_1 \dots q_r}$ ). Quindi  $m = x \cdot 10^{r+s} - x \cdot 10^s \in \mathbb{Z}$ , perciò si può scrivere che  $x = \frac{m}{10^{r+s} - 10^s}$ .

□

**Esempio 4.4.** Scrivere in frazione il numero razionale  $x = 1,27\overline{31}$ .

$$x = \frac{12731, \overline{31} - 127, \overline{31}}{10^4 - 10^2} = \frac{12604}{9900} = \frac{3151}{2475}$$

**Osservazione 3.** In realtà nella scuola secondaria di primo grado non si enuncia questa proposizione ma si danno le seguenti regole che sono conseguenza di quanto enunciato appena sopra:

- se si ha un numero decimale limitato, al numeratore si scrive tutto il numero a meno della virgola e al denominatore si scrive un 1 e tanti 0 quanti sono i numeri dopo la virgola (per esempio  $2,34 = \frac{234}{100}$ );
- se si ha un numero periodico semplice allora al numeratore si scrive tutto il numero a meno della virgola e lo si sottrae per la parte intera, mentre al denominatore si mettono tanti 9 quante sono le cifre del periodo (ad esempio  $1, \overline{31} = \frac{131-1}{99} = \frac{130}{99}$ );
- se si ha un numero periodico misto allora al numeratore si scrive il numero a meno della virgola e lo si sottrae per il numero stesso a meno della virgola e delle cifre del periodo, invece al denominatore si scrivono tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (per esempio  $1, 2\overline{31} = \frac{1231-12}{990} = \frac{1219}{990}$ ).

È evidente che non si possono presentare così i numeri razionali nella scuola secondaria di primo grado, motivo per cui è stato necessario costruire il percorso tuttora utilizzato che definisce il numero razionale a partire dalla frazione come parte di uno-tutto. Per questo motivo le frazioni sono uno degli argomenti che creano più confusione e che richiamano molte misconcezioni.

## 4.2 Errori tipici e misconcezioni sul concetto di frazione

Prima di affrontare l'insieme dei numeri razionali, gli alunni acquisiscono i concetti legati all'insieme dei numeri naturali e cercano di adattare ciò che hanno imparato ai numeri razionali. Per questo motivo e per le varie interpretazioni viste nella sezione precedente, insorgono varie misconcezioni e si riscontrano differenti errori.

I numeri scritti in forma frazionaria spesso sono rifiutati, ma sono accettati se riportati in forma decimale, questo perchè è più semplice adattare il modello di numero naturale al numero decimale. Tuttavia l'utilizzo della rappresentazione decimale non sempre è di aiuto, infatti si possono riscontrare problemi nello svolgimento di calcoli, specialmente se i numeri sono periodici, e nel confronto e ordinamento di numeri. Molti studenti scrivono ad esempio che  $3,4 < 3,15$  perchè considerano la parte decimale come numero naturale, senza ragionare sul valore posizionale delle cifre; un altro errore tipico è affermare che il successivo di  $0,1$  è  $0,2$ . Gli stessi errori si ritrovano utilizzando la scrittura frazionaria: per confrontare due frazioni bisogna ridurle ad un denominatore comune ma questa operazione viene spesso saltata, operando un confronto solo tra numeratori. Spesso infatti gli studenti considerano solo il numeratore ignorando il denominatore, come se quest'ultimo non avesse nessuna importanza. Altre volte viene richiesto di confrontare numeri razionali scritti con rappresentazioni diverse, ma questi vengono considerati non confrontabili perchè visti come due concetti diversi.

Considerando invece la frazione come una coppia di numeri distinti si pos-

sono verificare errori come pensare che l'opposto di  $\frac{a}{b}$  sia  $\frac{-a}{-b}$  o come scrivere  $n \left( \frac{a}{b} \right) = \frac{na}{nb}$ ,  $\frac{(a/b)}{(b/c)} = \frac{a}{c}$ ,  $\frac{ab+c}{a} = b+c$ ,  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ . Un altro errore tipico, conseguenza del modello dei naturali, è ritenere che il prodotto di due numeri sia maggiore o uguale a quelli di partenza: questo è vero per i numeri naturali, ma non lo è per i razionali.

La riduzione ai minimi termini di una frazione è un'altra tipica difficoltà perchè viene generalmente semplificata con l'idea di "cancellare sia sopra che sotto" e questo può portare ad errori come  $\frac{3}{6} \rightarrow \frac{1}{2}$  che diventa  $\frac{0}{2}$  poichè il numeratore è stato cancellato e non è rimasto "nulla". Questo problema è strettamente legato all'equivalenza di frazioni: per passare da una frazione ad una sua equivalente è necessario moltiplicare o dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero, ma questi passaggi non sono gestiti sempre al meglio e a volte non si riesce a capire come trovare la frazione equivalente. Saper operare con diverse rappresentazioni è molto utile per evitare gli errori legati all'applicazione impropria delle varie tecniche, infatti a seconda delle situazioni è più o meno conveniente utilizzare una certa rappresentazione. Nel caso delle frazioni, ci sono vari registri semiotici da poter utilizzare, ma non si impara autonomamente a gestirli, trattarli e convertirli; è dunque necessario che l'insegnante non sottovaluti questo aspetto e spieghi ed espliciti ogni passaggio da un registro all'altro o da una rappresentazione all'altra.

### 4.3 Obiettivi di apprendimento dalle Indicazioni Nazionali

Le Indicazioni nazionali ([49]) rendono espliciti i quadri di riferimento di ogni insegnante, in particolare espongono per ogni materia e per ogni ordine di scuola quali sono gli obiettivi generali da raggiungere e i nuclei fondanti da sviluppare.

Per quanto concerne le frazioni e gli argomenti strettamente legati, si possono individuare i seguenti obiettivi da raggiungere entro la fine della scuola secondaria di primo grado:

- classificare numeri, figure, oggetti in base a una o più proprietà, utilizzando rappresentazioni opportune a seconda dei contesti e dei fini;
- argomentare sui criteri che sono stati usati per realizzare classificazioni e ordinamenti assegnati;
- misurare grandezze utilizzando sia unità arbitrarie sia unità e strumenti convenzionali;
- utilizzare numeri decimali, frazioni, percentuali per descrivere situazioni quotidiane;
- costruire e utilizzare modelli materiali nello spazio e nel piano come supporto ad una prima capacità di visualizzazione;
- rappresentare problemi con tabelle e grafici che ne esprimono la struttura;
- eseguire addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, ordinamenti e confronti tra i numeri conosciuti (numeri naturali, numeri interi, frazioni e numeri decimali), quando possibile a mente oppure utilizzando gli usuali algoritmi scritti, le calcolatrici e i fogli di calcolo e valutando quale strumento può essere più opportuno;
- rappresentare i numeri conosciuti sulla retta;
- utilizzare il concetto di rapporto fra numeri o misure ed esprimerlo sia nella forma decimale sia mediante frazione;
- utilizzare frazioni equivalenti e numeri decimali per denotare uno stesso numero razionale in diversi modi, essendo consapevoli dei vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni;
- comprendere il significato di percentuale e saperla calcolare utilizzando strategie diverse;



- interpretare una variazione percentuale di una quantità data come una moltiplicazione per un numero decimale;
- individuare multipli e divisori di un numero naturale e multipli e divisori comuni a più numeri;
- descrivere con un'espressione numerica la sequenza di operazioni che fornisce la soluzione di un problema;
- eseguire semplici espressioni di calcolo con i numeri conosciuti, essendo consapevoli del significato delle parentesi e delle convenzioni sulla precedenza delle operazioni;
- riprodurre figure e disegni geometrici utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria);
- descrivere figure complesse e costruzioni geometriche al fine di comunicarle ad altri;
- riprodurre figure e disegni geometrici in base a una descrizione e codificazione fatta da altri;
- interpretare, costruire e trasformare formule che contengono lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà;
- esprimere la relazione di proporzionalità con un'uguaglianza di frazioni e viceversa;
- in semplici situazioni aleatorie, individuare gli eventi elementari, assegnare a essi una probabilità, calcolare la probabilità di qualche evento scomponendolo in eventi elementari disgiunti.

All'interno di queste indicazioni è possibile dunque sviluppare unità didattiche individuando e approfondendo gli obiettivi che si vogliono far apprendere.

## 4.4 Un percorso didattico tradizionale sulle frazioni

Questo percorso didattico è pensato per una classe prima di una scuola secondaria di primo grado e prevede l'utilizzo dell'aula e dei classici materiali didattici (appunti, libro di testo). È costituito da due unità didattiche da svolgere nell'arco di due mesi e mezzo.

### 4.4.1 Unità didattica 1: La frazione come operatore

#### Obiettivi cognitivi:

- definire ed esemplificare i concetti di unità frazionaria e di frazione come operatore sull'intero;
- riconoscere l'unità frazionaria e la frazione di un intero;
- definire, riconoscere e classificare le frazioni proprie, improprie e apparenti;
- riconoscere frazioni equivalenti e calcolare le frazioni equivalenti ad una data;
- semplificare una frazione e ridurla ai minimi termini;
- definire il concetto di frazione complementare e trovare la complementare di una frazione data;
- ridurre al minimo comune denominatore due o più frazioni;
- confrontare e ordinare le frazioni;
- descrivere i ragionamenti per frazionare un intero, per trovare le frazioni equivalenti e per confrontare le frazioni;
- schematizzare i procedimenti principali.

**Svolgimento:** Nella prima lezione (1 ora) si introducono l'unità frazionaria e le frazioni tramite alcuni esempi di situazioni reali che gli studenti possono avere incontrato nella vita quotidiana, come dividere le caramelle in un gruppo di amici o tagliare una torta o pizza. Si definisce quindi cos'è l'unità frazionaria e cosa significa la frazione come operatore sull'intero. Si definiscono anche i termini "numeratore", "denominatore", "linea di frazione". Si procede con un altro paio di esempi, anche tramite l'utilizzo di figure geometriche o tramite relazioni di segmenti. Infine si definiscono le frazioni proprie, improprie e apparenti. Si consegnano per casa degli esercizi da svolgere sul riconoscimento di unità frazionaria, frazione di un intero e sulla classificazione delle frazioni in proprie, improprie e apparenti, specificando però che non è tanto importante ricordarsi i nomi di queste tre tipologie quanto ricordarsi l'esistenza di queste tre gruppi per facilitare l'apprendimento di un concetto che si affronterà successivamente (cioè che le frazioni apparenti sono numeri naturali, quelle improprie sono numeri razionali maggiori di 1 e quelle proprie sono numeri razionali minori di 1).

Dopo aver lasciato spazio alle domande e dopo la correzione degli esercizi, nella seconda lezione (1 ora) si definisce la proprietà di due frazioni di essere complementari, ricorrendo anche agli esempi delle torte o delle figure geometriche (non per forza classiche, in modo da far capire che si possono operare frazioni sull'intero su qualsiasi tipo di insieme), e si svolgono alcuni esercizi, riprendendo pure i concetti della lezione precedente. Ancora non sono state spiegate le operazioni tra frazioni, ma si può già far notare che per trovare la frazione complementare è necessario individuare da quale frazione è rappresentato l'intero (guardando il denominatore), considerarne quindi il numeratore e sottrarre il numeratore della frazione della quale si vuole trovare la complementare. Questo equivale a fare una sottrazione tra 1 e  $\frac{m}{n}$ , come si vedrà nell'unità didattica successiva. Si prosegue poi con la definizione di frazioni equivalenti, svolgendo in seguito vari esercizi di riconoscimento e di costruzioni di classi di equivalenza, e si definiscono le frazioni riducibili e irriducibili. Si finisce la lezione chiamando i ragazzi a fare degli esercizi alla

lavagna, senza però dare un voto: gli esercizi che si fanno risolvere sono molto semplici, ma sono utili sia per insegnar loro a usare il linguaggio specifico della matematica e ad argomentare e spiegare ciò che fanno, sia per capire se hanno compreso bene i concetti basilari poichè è su questi che si costruisce l'apprendimento del concetto di frazione. Inoltre, è un buon modo per verificare quali misconcezioni hanno gli studenti, così da intervenire prontamente. Si lasciano esercizi da fare a casa.

Nelle lezioni successive (5 ore) si lascia sempre del tempo per verificare i concetti appresi nelle lezioni precedenti con domande al posto e tramite la correzione degli esercizi; poi si spiega cosa significa semplificare una frazione e ridurla ai minimi termini e si conclude la spiegazione con degli esempi di vario genere (esercizi classici sulla riduzioni ai minimi termini e sulle equivalenze, esercizi sulle frazioni equivalenti con denominatore o numeratore dato ed esercizi sulla riduzione al minimo comune denominatore). Le ore rimanenti sono invece da dedicare agli esercizi da svolgere con l'aiuto degli studenti o da far risolvere direttamente a loro.

Si conclude l'unità didattica (3 ore) con la spiegazione di come confrontare le frazioni, e quindi ordinarle, e con gli esercizi: non si è ancora spiegato che la frazione può corrispondere anche ad un numero razionale, quindi il confronto delle frazioni in questo caso è associato al confronto di queste applicate ad una stessa grandezza.

**Valutazione:** Per questa unità didattica è previsto un solo test autovalutativo (2 ore, una per il test e una per la correzione) senza voto (vedi appendice A), in modo da capire quanto gli studenti hanno appreso. Si può valutare anche di farlo anonimo così da evitare ogni tipo di ansia, tuttavia ritengo che sia molto utile per uno studente vedere concretamente dove ha commesso errori così da poter chiedere delucidazioni all'insegnante qualora il suo errore non venga ripreso durante la correzione del test.

Una volta fatta la correzione in classe evidenziando punti forti ed errori svolti dalla classe nel suo insieme, si procede con l'unità didattica successiva: non è prevista una vera e propria attività di recupero perchè questi concetti ven-

gono ripresi nella unità didattica successiva. Tuttavia se dal test emerge che la classe non ha sufficientemente appreso i concetti e i procedimenti da usare, conviene impiegare un altro paio di ore per ripercorrere questa unità didattica e svolgere ulteriori esercizi, sfruttando la quotidianità ed esempi pratici, come tagliare un foglio A4 in modo da ottenere per esempio  $\frac{3}{5}$  dell'intero e come operare dei confronti su materiali concreti.

#### 4.4.2 Accorgimenti per studenti con DSA

A inizio della lezione riguardante le frazioni complementari si può consegnare uno schema riassuntivo agli studenti con DSA (in appendice A), per aiutarli a seguire la spiegazione senza perdere i concetti fondamentali e per permettere loro di ascoltare senza doversi preoccupare di trascrivere gli appunti. Se questi alunni non hanno accettato i loro disturbi specifici di apprendimenti o se sono presi in giro per questi disturbi, l'insegnante può consegnare lo schema a tutta la classe, così da evitare di sottolineare le differenze tra gli studenti.

Lo schema consegnato può essere usato come supporto sia durante lo svolgimento degli esercizi alla lavagna, sia durante lo studio personale, sia durante i test valutativi; può anche essere usato come traccia per costruire uno schema più personalizzato se lo studente non si trova bene con questo. Esso torna utile in particolare per gli studenti con discalculia procedurale poichè permette di ricavare (fig.4.4) o di leggere (fig.4.5) i procedimenti e gli algoritmi da applicare nelle differenti situazioni che si propongono.

Congiuntamente allo schema è necessario far utilizzare una calcolatrice non scientifica in modo da aiutare gli alunni con discalculia per cifre a fare meno errori lessicali.

Per quanto riguarda il test di autovalutazione, viene diminuito il numero di domande totali e di richieste in alcuni esercizi (fig.4.6); si evidenziano in grassetto o con l'elenco puntato le domande di ciascun esercizio in modo da distinguerle ed evitarne il sovraffollamento in una stessa frase; vengono accettate giustificazioni per via grafica; vengono evidenziate le suddivisioni in

- Frazioni **complementari**

➤ Trovare la frazione complementare di  $\frac{3}{8}$ :

$$\frac{3}{8} \rightarrow 8-3=5 \rightarrow \frac{5}{8}$$

La frazione complementare cercata è  $\frac{5}{8}$

Figura 4.4: Esempio di schema tramite il quale ricavare algoritmi (frammento dello schema in appendice A).

- Riduzione ai minimi termini

1. consultare lo schema della scomposizione in fattori primi e trovare la scomposizione del numeratore e del denominatore dati
2. controllare se ci sono divisori comuni e quante volte sono ripetuti
3. dividere per uno di questi divisori comuni sia il numeratore che il denominatore
4. procedere così finché non ci sono più divisori comuni

$$\frac{60}{45} \rightarrow 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \quad \text{e} \quad 45 = 3 \times 3 \times 5 \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ :3 \end{array} \frac{20}{15} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \\ :5 \end{array} \frac{4}{3}$$

Figura 4.5: Esempio di schema dove leggere l'algoritmo da applicare (frammento dello schema in appendice A).

unità frazionaria delle figure.

Anche durante il test gli studenti possono utilizzare lo schema consegnato in aula (o uno simile da loro creato in base alle loro esigenze) e la calcolatrice non scientifica.

11. Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni:

$$\frac{120}{30} \quad \frac{84}{98} \quad \frac{8}{20} \quad \frac{660}{60}$$

9. Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni:

$$\frac{42}{98} \quad \frac{8}{20}$$

Figura 4.6: Confronto tra numero di richieste in uno stesso esercizio proposto per l'intera classe e per gli studenti con DSA (estratti dai relativi test di autovalutazione in appendice A).

### 4.4.3 Unità didattica 2: La frazione come numero razionale

#### Obiettivi cognitivi:

- riconoscere i numeri razionali e le loro rappresentazioni;
- ordinare i numeri razionali e posizzionarli sulla retta dei numeri;
- eseguire le quattro operazioni e la potenza con i numeri razionali;
- eseguire operazioni concatenate e risolvere le espressioni con i numeri razionali;
- eseguire passaggi da una rappresentazione all'altra;
- descrivere e applicare ragionamenti e procedimenti per risolvere problemi;
- formulare ipotesi e verificarle;
- analizzare i problemi e risolverli.

**Svolgimento:** Nella prima lezione (1 ora) si introduce la frazione come quoziente tra due numeri e si definisce cos'è un numero razionale.

Avendo definito le frazioni come numeri razionali, è possibile posizzionarle sulla retta orientata dei numeri, perciò nella seconda lezione (2 ore) si riprendono i gruppi delle frazioni proprie, improprie e apparenti e si spiega come individuare l'intervallo di appartenenza e come definire esattamente la posizione sulla retta. Si svolgono in classe vari esercizi e se ne consegnano

altri per casa.

Nelle lezioni successive (6 ore) si affrontano le operazioni (addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione e potenza): si spiega come si svolgono e si presentano esercizi. Si prosegue con un paio di ore rivolte esclusivamente alla risoluzione di espressioni con i numeri razionali. Ogni volta si consegnano per casa vari esercizi che si correggono all'inizio della lezione successiva e si lascia del tempo per porre domande e rispondere.

È fondamentale a questo punto non abbandonare le rappresentazioni utilizzate nell'unità didattica precedente: esse vengono integrate con ulteriori rappresentazioni delle frazioni (numeri razionali, rappresentazione decimale, percentuale). Si dedicano dunque un paio di ore al passaggio da una rappresentazione all'altra.

Si conclude l'unità didattica con 8 ore dedicate alla risoluzione dei problemi, presentando innanzitutto le cinque macrocategorie (problemi diretti, inversi, con somma di grandezze, con differenze di grandezze e con percentuali) e svolgendo in seguito vari esercizi.

**Valutazione:** Durante l'unità didattica sono previsti momenti di valutazione formativa che prevedono lo svolgimento alla lavagna di esercizi attinenti alle lezioni precedenti. In questo modo è possibile verificare l'apprendimento di ciascun studente e colmare eventuali lacune prima di affrontare la valutazione finale.

Infine viene proposta una verifica sommativa (vedi appendice B) sulle due unità didattiche dalla durata di due ore con conseguente correzione (1 ora).

**Recupero:** Per gli studenti che non hanno preso la sufficienza o per quelli che hanno preso la sufficienza scarsa sono previste 2 ore di recupero, nelle quali si affrontano e correggono gli errori più comuni. È utile in tal caso svolgere vari esercizi in ambito quotidiano in modo da far capire meglio i concetti che vengono poi generalizzati. Al termine di queste due ore viene proposto un ulteriore test valutativo per verificare se ci sono stati miglioramenti nell'apprendimento: se il voto è negativo non si considera, altrimenti si fa una media pesata con il voto precedente, considerando il percorso svolto



da ogni studente.

Invece al resto della classe viene consegnata una ricerca da svolgere sul tema “le frazioni della musica” così da collegare concetti matematici con una passione che accomuna la maggior parte degli studenti, la musica. Tale ricerca viene svolta in gruppetti e viene poi esposta a tutta la classe senza essere valutata.

#### 4.4.4 Accorgimenti per studenti con DSA

Analogamente a quanto detto per la prima unità didattica, si può consegnare una scheda riassuntiva degli argomenti svolti in questa seconda parte, sempre per favorire l’ascolto degli studenti con DSA.

Le operazioni tra frazioni sono fonte di svariati errori per tutte le tipologie di discalculia, è perciò fondamentale insegnare bene qual è la mentalità base di tutte le operazioni e lavorare con gli schemi per far automatizzare i procedimenti. Se si lavora bene, è sufficiente proporre alcuni esempi negli schemi, evitando di scrivere gli algoritmi da svolgere per ogni operazione. Inoltre, per evidenziare i collegamenti tra numeri e operazioni, ho usato colori diversi (fig.4.7) così che lo studente può immediatamente visualizzare l’operazione da fare e applicarla al suo esercizio.

Anche per il passaggio da rappresentazione decimale e percentuale a frazione basta inserire nello schema vari esempi dove si sottolinea il procedimento da operare tramite riquadri colorati e cifre colorate.

- **Somma e differenza** di frazioni:

$$\frac{2}{7} + \frac{10}{7} = \frac{2+10}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10-2}{3} = \frac{8}{3}$$

---


$$\frac{3}{5} + \frac{7}{6} = ? \quad \text{mcm}(5,6) = 30 \quad \frac{3}{5} + \frac{7}{6} = \frac{(30:5 \times 3) + (30:6 \times 7)}{30} = \frac{18 + 35}{30} = \frac{53}{30}$$

Figura 4.7: Esempio di schema per le operazioni (estratto dallo schema in appendice B).

Per quanto riguarda la valutazione formativa, non è sconsigliabile chiamare gli studenti con DSA alla lavagna: far svolgere loro alcuni esercizi, permette all'insegnante di capire quanto hanno appreso gli studenti e di intervenire e spiegare eventuali errori commessi. L'importante è non incalzarli con domande e lasciar loro tempo sufficiente per ragionare e confrontare l'esercizio che devono risolvere con quelli sugli schemi. Un ulteriore accorgimento che si può operare è quello di proporre esercizi con numeri "semplici": avendo in dotazione la calcolatrice e considerando che anche negli ordini superiori delle scuole la si può usare, conviene consegnare agli alunni con DSA esercizi con numeri non troppo alti e non troppo "elaborati" in modo da evitare di perdere tempo in calcoli che li demoralizzano e che non sono strettamente necessari per comprendere il loro livello di apprendimento: le operazioni con le frazioni richiedono una buona abilità nel trovare i divisori, il m.c.m e il M.C.D, ma questa abilità è insufficiente o mancante in studenti con DSA. La verifica sommativa invece viene modificata diminuendo il numero di esercizi (anche tramite l'utilizzo di esercizi facoltativi), semplificando i numeri utilizzati nei dati ed evidenziando le parole chiave (nella fig.4.8 la parola "cioè" permette di catalogare il problema come "problema inverso" e quindi aiuta a capire quale algoritmo risolutivo utilizzare). Sia per gli esercizi alla lavagna, sia per la verifica conclusiva i ragazzi con DSA possono utilizzare gli schemi e la calcolatrice non scientifica.

5. Per saldare un debito ho già pagato 100 euro, **cioè**  $i \frac{4}{5}$  dell'intero debito.  
Quanti soldi devo ancora versare? (Fai lo schema grafico).

Figura 4.8: Esempio di parole chiave evidenziate (estratto dalla verifica sommativa per studenti con DSA, appendice B).

## 4.5 Didattica a distanza: proposte di attività in situazioni a-didattiche

### 4.5.1 Kahoot: Cosa sappiamo sulle frazioni?

Si è parlato precedentemente dell'importanza di conoscere le misconcezioni dei ragazzi per poterle analizzare e modificare con le conoscenze adatte. È fondamentale dunque affrontare le conoscenze che gli studenti hanno sul tema delle frazioni prima di procedere con le unità didattiche programmate. Essendo difficile ottenere risposte dagli studenti su quanto conoscono poichè si sentono interrogati e sotto pressione, ed evitando di fare un test per iscritto in quanto viene percepito come verifica, ritengo sia utile sfruttare le piattaforme online che permettono di creare quiz o questionari interattivi e anonimi.

In particolare ho utilizzato *Kahoot!*, una piattaforma di apprendimento basata sul gioco, per creare due quiz sulle frazioni da far svolgere a gruppi piccoli in aula. In questo modo i ragazzi vengono coinvolti in un gioco telematico a punti dove non è il singolo che indovina la risposta o sbaglia ma è il gruppo a giocare: si evita così di mettere a disagio quei ragazzi più timidi o più insicuri. In realtà anche nella modalità singola si può ovviare il problema, facendo partecipare i ragazzi con nickname inventati, però ritengo che il gruppo, in quanto piccolo, possa stimolare tutti i ragazzi, aiutarli a cooperare e aiutare gli studenti con DSA sia per evitare loro pressioni dovute a situazioni didattiche, sia per farli apprendere con l'aiuto dei coetanei. Entrambi i quiz preparati sono pensati da svolgere in tempo sincrono e sono impostati in modo da potersi fermare dopo ogni domanda così da chiedere spiegazioni e chiarimenti sulle risposte date; sono a tempo (per le domande semplici che non richiedono ragionamento ho impostato 20 secondi, per le altre invece 60 secondi o 90 secondi a seconda del numero di risposte da scegliere e del tipo di ragionamento da fare) e sono a scelta multipla con due o quattro risposte.

Quali figure rappresentano la frazione  $2/5$ ?

29 Kahoot! 2 Answers

Qual è una classe di equivalenza?

24 Kahoot! 106 Answers

▲  $\{1/3, 2/3, 3/3, 4/3\}$  ◆  $\{1/2, 2/4, 3/6, 6/6\}$   
●  $\{1, 1/2, 1/4, 1/8\}$  ■  $\{3/7, 2/5, 1/2, 3/6\}$

Qual è una classe di equivalenza?

54 Kahoot! 20 Answers

▲  $\{20\%, 8/40, 5/25, 0,2\}$  ◆  $\{2, 1/2, 0,5, 2\%$   
●  $\{1/2, 1/3, 1/4, 1/5\}$  ■  $\{10\%, 1/10, 2/10, 1/5\}$

Quale frazione rappresenta la parte colorata della figura?

27 Kahoot! 10 Answers

▲  $3/7$  ◆  $3/8$   
●  $30\%$  ■ Nessuna delle precedenti

Quali disuguaglianze sono vere?

85 Kahoot! 16 Answers

▲  $1/2 > 2/4$  ◆  $3/2 < 2/3$   
●  $1/4 > 1/5$  ■  $2/5 < 4/5$

Quali uguaglianze sono vere?

57 Kahoot! 12 Answers

▲  $2/4 = 5/10$  ◆  $3/6 = 1/3$   
●  $0,2 = 1/2$  ■  $6/2 = 3$

Figura 4.9: Domande 1-6 del primo Kahoot.

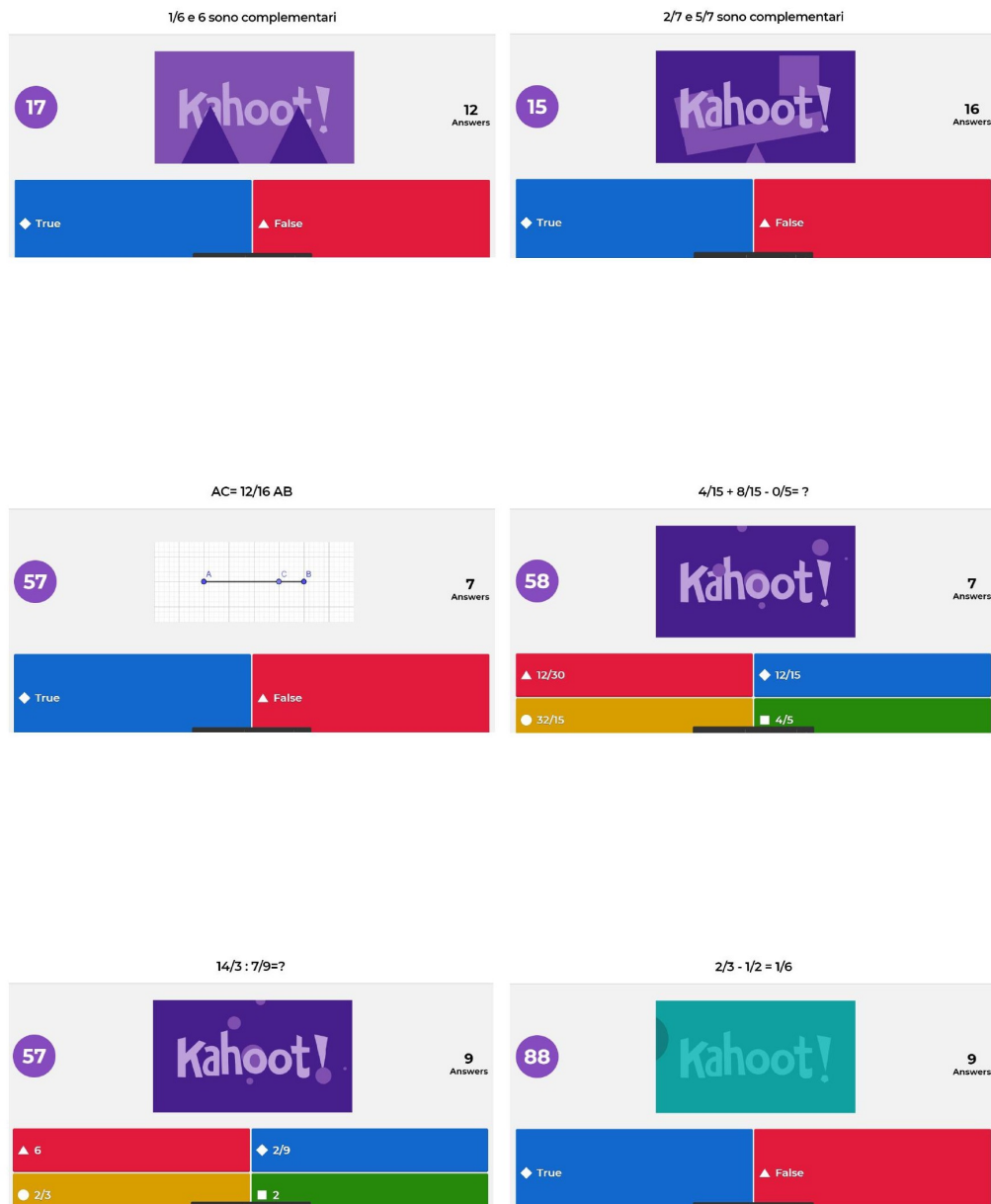


Figura 4.10: Domande 7-12 del primo Kahoot.

Quanto fa la seguente somma?

56

$$\frac{40}{50} + 1 = \square$$

13 Answers

▲ 41/50    ◆ 40/51  
● 41/51    ■ 9/5

---

$(30/257)^0 = 0$

17

Kahoot!

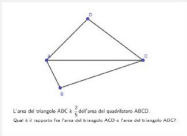
8 Answers

◆ True    ▲ False

---

Qual è il rapporto tra l'area del triangolo ACD e l'area del triangolo ABC?

44



52 Answers

▲ 2:3    ◆ 3:2  
● 3:5    ■ 5:3

---

$3/2$  è il triplo di 2

16

Kahoot!

12 Answers

◆ True    ▲ False

---

$3/2$  è la metà di 3

17

Kahoot!

9 Answers

◆ True    ▲ False

---

$3/2$  è il doppio di  $3/4$

14

Kahoot!

19 Answers

◆ True    ▲ False

Figura 4.11: Domande 1-6 del secondo Kahoot.

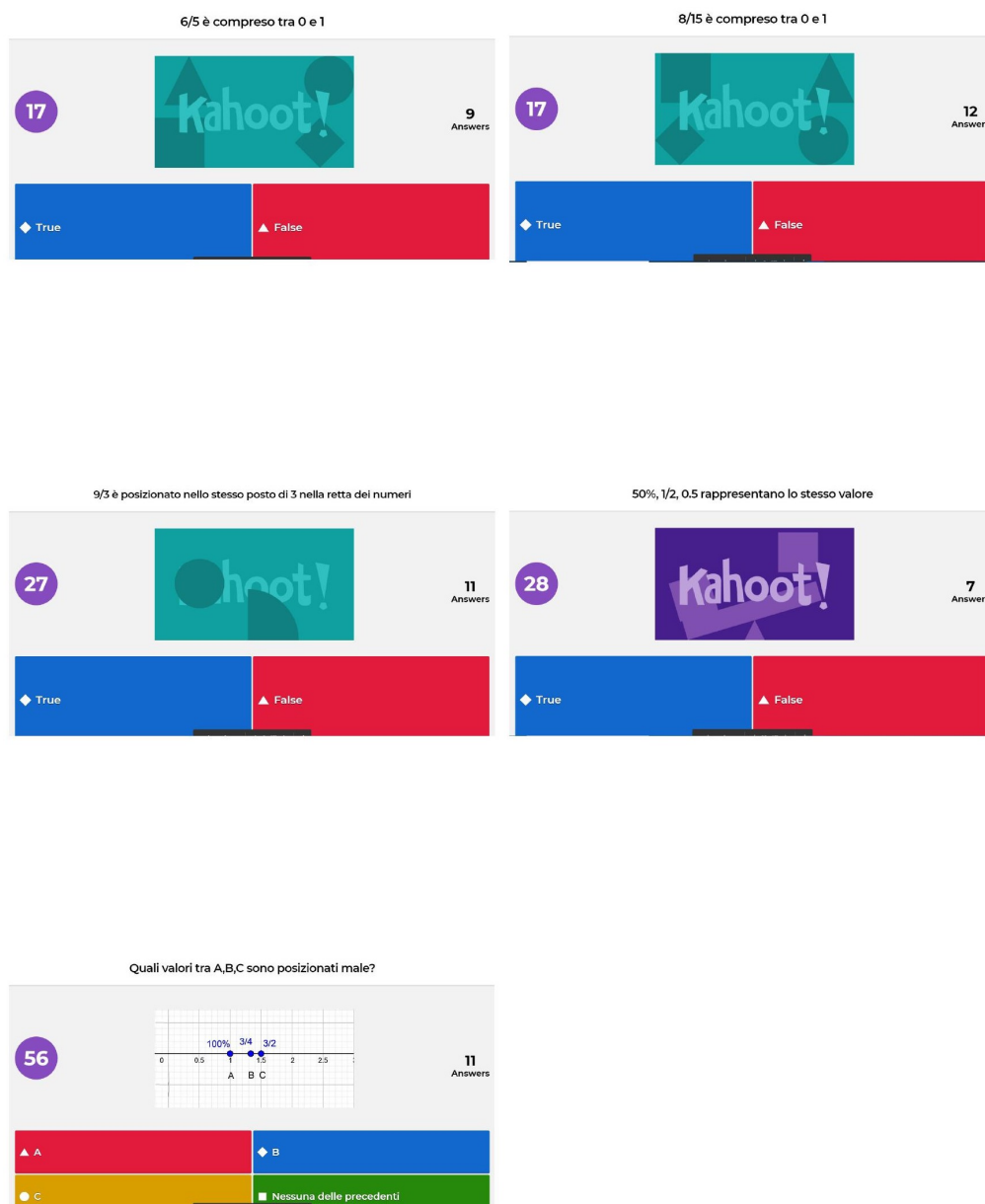


Figura 4.12: Domande 7-11 del secondo Kahoot.

A questo punto si possono intraprendere due strade:

- utilizzare i quiz una sola volta, analizzando immediatamente le risposte dei gruppetti e spiegando gli errori commessi o le misconcezioni create;
- svolgere i quiz fermandosi ad ogni domanda solo per capire l'apprendimento raggiunto dagli studenti; le spiegazioni verranno poi fatte durante le unità didattiche riprendendo le risposte date dagli alunni a questi quiz; infine si ripropongono gli stessi quiz per analizzare come è cambiato il loro apprendimento sulle frazioni.

Se invece si vuole svolgere l'attività in tempi asincroni, c'è la possibilità di assegnarli come compiti e impostare la data di scadenza, al termine della quale si può scaricare il bilancio sulle risposte date dagli studenti. Non si può però sfruttare il lavoro di gruppo e non si può approfittare del gioco per ottenere subito i chiarimenti necessari a capire le idee di fondo degli alunni. Il primo Kahoot preparato (fig.4.9, fig.4.10) è incentrato principalmente sulle rappresentazioni di frazioni, sull'ordinamento e sulle prime definizioni che si incontrano (frazioni equivalenti e frazioni complementari). Invece il secondo Kahoot (fig.4.11, fig.4.12) riguarda il posizionamento delle frazioni e delle sue varie rappresentazioni sulla retta dei numeri e le operazioni elementari.

#### **4.5.2 Aree, strisce, numeri. . . Cosa li accomuna?**

Il passaggio tra le due unità didattiche caratterizzanti il percorso tradizionale non è ovvio per tutti gli studenti e non è sempre facile da capire. Si può perciò proporre la seguente attività laboratoriale per far comprendere meglio il collegamento tra frazione come parte di uno-tutto, e quindi come operatore, e frazione come numero da collocare sulla retta dei numeri ([47]). Agli studenti si consegna una scheda con le seguenti istruzioni e domande alle quali rispondere (si lasciano quattro giorni di tempo per ultimare questo compito).



1. Prendi 4 fogli A4 (unità di misura di riferimento) e dividi il primo in 2 parti uguali, il secondo in 3 parti uguali, il terzo in 7 parti uguali e il quarto in 4 parti uguali.
  - (a) Quale frazione rappresenta ciascun pezzo ricavato?
  - (b) Ci sono altri modi per dividere il foglio in 2 parti aventi la stessa superficie? Quanti? C'è una frazione che rappresenta le nuove parti trovate? Se sì, qual è?
  - (c) Cosa cambia nei diversi modi di dividere il foglio in parti uguali o equiestese? Cosa rimane uguale?
  - (d) Riprendi le ultime due domande anche per le altre unità frazionarie.
  
2. Sul quaderno disegname 7 rettangoli di 6 quadretti come altezza e 12 come base. Suddividi i rettangoli in 2,3,4,6,8,12,16 parti uguali.
  - (a) Scrivi la frazione unitaria che rappresenta ciascuna parte individuata.
  - (b) Ci sono altri modi per dividere il rettangolo nelle parti richieste? Se sì, cosa cambia e cosa rimane uguale?
  
3. Considera ora un rettangolo sempre di base 12 quadretti e altezza 6 quadretti. Con quali unità frazionarie (e quante per ogni tipo) puoi riempirlo? Riesci a trovare altri modi?

Per facilitare la successiva discussione nel gruppo classe, si chiede agli studenti di scannerizzare o fare le foto di quanto scritto sul quaderno e di caricarlo nella cartella adibita. In questo modo l'insegnante può già controllare e prendere le immagini più significative per sviluppare la discussione. Si discute quindi insieme sulle suddivisioni operate dagli studenti e sulle risposte date: si conclude questa prima parte notando che le diverse suddivisioni in parti uguali sono equivalenti in termini di superfici, anche se le forme

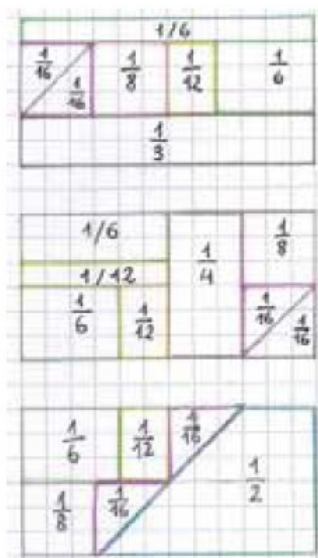


Figura 4.13: Esempio di unità come somma di unità frazionarie differenti ([47]).

sono diverse, e che si può esprimere l'unità come somma di unità frazionarie differenti (fig.4.13).

Questa prima fase è utile per dimostrare le equivalenze tra unità frazionarie riferite ad una stessa unità di misura di riferimento, infatti è possibile verificare cinesteticamente e tattilmente quanto si afferma con la discussione di gruppo: per le suddivisioni dei fogli A4 basta utilizzare pieghe, forbici, isometrie (sovrapposizioni, rotazioni, traslazioni,...), mentre per i rettangoli basta contare i quadretti.

A questo punto ciò che è stato appreso viene applicato a delle strisce, utilizzate come figura di riferimento (vedi fig.4.14), e si consegna il seguente compito da svolgere in tre giorni e da caricare nella cartella designata.

1. Riporta le unità frazionarie utilizzate per i rettangoli lungo tutta la striscia, il cui estremo sinistro viene identificato con lo 0 e quello destro con il 2. Le unità frazionarie vengono però considerate su 1 come unità di misura di riferimento.

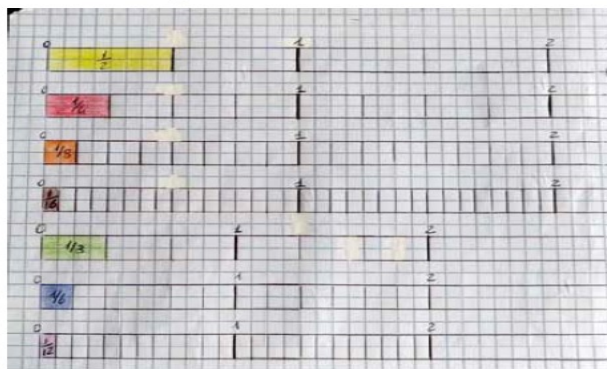


Figura 4.14: Unità frazionarie riportate nelle strisce posizionate una sotto l'altra e allineate a sinistra ([47]).

2. Posiziona le strisce una sotto l'altra e allineale a sinistra in corrispondenza dello 0: confronta le unità frazionarie tramite il confronto delle strisce. Cosa noti?
3. Scrivi le frazioni equivalenti che noti.
4. Ora riporta su un'unica striscia le varie unità frazionarie.
  - (a) Cosa noti?
  - (b) Quale unità frazionaria puoi utilizzare per confrontare le frazioni  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{1}{3}$ ? E per  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{1}{6}$ ? Quale collegamento osservi?
  - (c) Prova a generalizzare quanto osservato nella domanda precedente.

Durante la lezione successiva si analizzano le risposte e le osservazioni fatte dagli alunni e se ne discute insieme, fino ad arrivare a capire che per operare i confronti tra frazioni è necessario passare tramite il minimo comune multiplo dei denominatori e che per rappresentare al meglio le frazioni su una stessa striscia conviene porre una semplice “tacca” che indica la posizione dell'unità frazionaria, piuttosto che considerare tutta l'area rappresentata dalla stessa unità frazionaria. Facendo ora notare che la striscia si può rendere sempre più sottile, si può passare dalla striscia alla retta che rappresenta la retta dei numeri razionali.

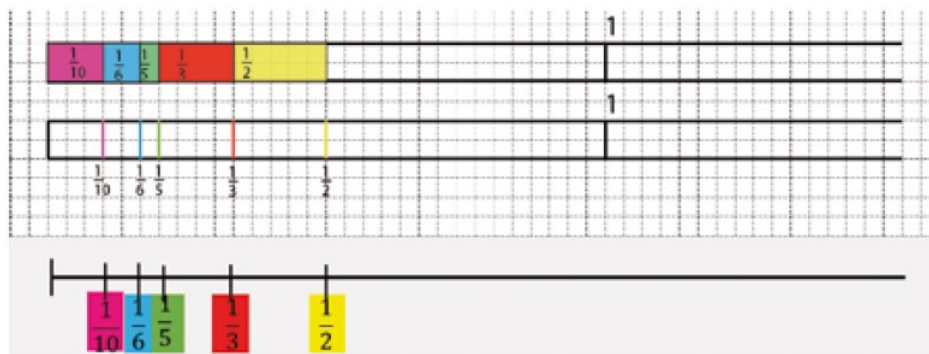


Figura 4.15: Passaggio da frazione come area di una striscia (“parte del tutto”) a frazione come numero razionale da posizionare sulla retta dei numeri ([47]).

### 4.5.3 Costruzione e confronto di frazioni con AlNuSet

Nell’ottica di imparare a costruire e operare con le frazioni tramite una canale cinestetico e visivo, propongo un’attività con *AlNuSet*, un sistema multi-ambiente, dinamico e interattivo, utilizzabile nelle scuole secondarie di primo e secondo grado. AlNuSet è formato da tre ambienti (retta algebrica, manipolatore simbolico e ambiente funzioni), due dei quali molto utili nell’ambito delle frazioni sia per costruire le frazioni sulla retta dei numeri, sia per operare con esse, sia per costruire dimostrazioni e trasformare espressioni algebriche tramite dei comandi che riprendono le proprietà di base delle operazioni.

L’attività proposta si può inserire subito dopo l’introduzione di frazione come parte di uno-tutto, prima di definire le frazioni equivalenti: saranno gli studenti a provare a definire cosa sono le frazioni equivalenti e come confrontare le frazioni; gli alunni ipotizzano e imparano anche come operare con le frazioni.

Nella prima parte dell’attività si consegnano ai ragazzi le seguenti istruzioni da svolgere entro una settimana.

1. Usando il tasto  $a \cdot b$ , prova a costruire su AlNuSet la frazione  $\frac{1}{4}$  dividendo

la lunghezza 1 in 4 parti. Schiaccia sul riquadro della frazione per bloccare la frazione sulla retta.

- (a) Cosa rappresentano gli altri punti individuati dalla costruzione?
  - (b) A quali frazioni possono essere associati gli altri punti?
  - (c) Verifica le risposte inserendo i tuoi risultati nella sezione “edita veloce”. Se i punti coincidono con quelli della costruzione allora le risposte sono giuste.
  - (d) Riesci a costruire un'altra frazione che cada nel punto  $\frac{1}{4}$ ? Cosa noti tra la frazione trovata e la frazione  $\frac{1}{4}$ ?
2. Ripeti l'esercizio precedente per le frazioni  $\frac{3}{7}$ .  
Dove si trovano le frazioni costruite finora? Perché?
3. Costruisci una frazione che cada sull'1 e una che cada sul 3.
- (a) Riesci a trovarne altre?
  - (b) Confronta le frazioni trovate, cosa noti?
4. Le osservazioni fatte per le domande 1.c e 3.b possono essere raggruppate secondo te?
5. Costruisci la frazione  $\frac{5}{2}$ .
- (a) Dove si trova? Perché?
  - (b) Riesci a trovare altre frazioni che cadono nello stesso punto di  $\frac{5}{2}$ ?  
Cosa noti tra le frazioni trovate e  $\frac{5}{2}$ ?
6. Riesci ora a generalizzare le osservazioni fatte nella domanda 4?  
Le frazioni che cadono nello stesso punto della retta dei numeri sono frazioni equivalenti. Prova a determinare un modo per trovare le frazioni equivalenti ad una data, tramite le osservazioni fatte.
7. Le frazioni posizionate prima dell'1 che caratteristica hanno? Quelle dopo l'1? E quelle che cadono sul punto 1?

8. Considera le frazioni  $\frac{3}{2}$  e  $\frac{7}{3}$ . Riesci a trovare un modo per confrontarle senza ricorrere ad AlNuSet?

Per confrontare due frazioni è necessario considerare le frazioni equivalenti a quelle date e prendere quelle con lo stesso denominatore.

Scrivi dunque le frazioni equivalenti da considerare per confrontare le frazioni originarie. Verifica poi i tuoi risultati con AlNuSet.

9. Scrivi su un foglio una frazione compresa tra  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{14}{15}$ . Come hai ragionato?

Verifica la risposta sulla retta algebrica di AlNuSet.

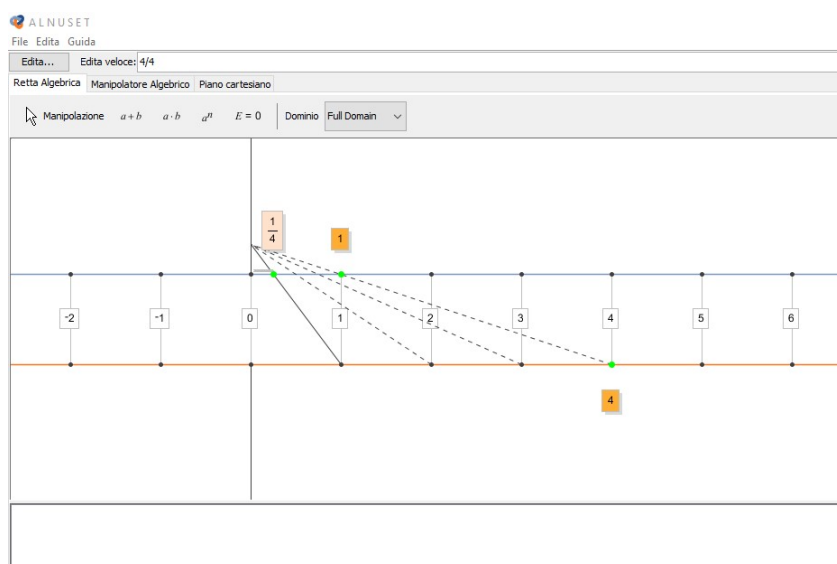


Figura 4.16: Costruzione della frazione  $\frac{1}{4}$  nell'ambiente retta algebrica di AlNuSet.

Prima di analizzare insieme le risposte date, si può lasciare un'ora di tempo per fare un confronto a gruppetti sulle osservazioni fatte. Questa parte di attività si può saltare, ma può essere di aiuto sia per permettere a tutti di esprimere il loro lavoro, esercitando anche l'abilità di esposizione e argomentazione, sia per validare in via non ufficiale le risposte date.

A questo punto si discute insieme sui risultati ottenuti e si istituzionalizzano

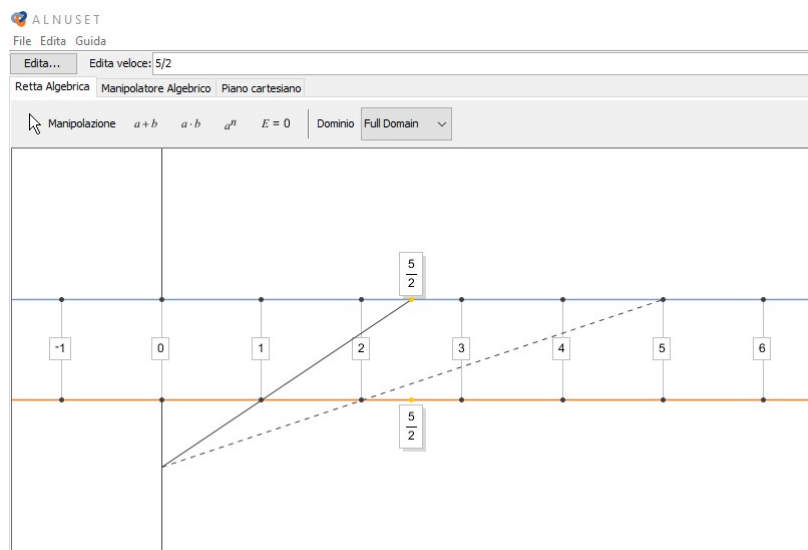


Figura 4.17: Costruzione della frazione  $\frac{5}{2}$  nell'ambiente retta algebrica di AlNuSet.

le definizioni di frazioni equivalenti, proprie, improprie, apparenti e i procedimenti da attuare per trovare le frazioni equivalenti e per fare i confronti. La seconda parte invece verte sulle operazioni tra frazioni: si danno tre giorni di tempo per rispondere alle seguenti domande.

1. Secondo te quanto fa  $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}$ ?

Scrivi la risposta su un foglio, poi costruisci la frazione trovata sulla retta algebrica di AlNuSet. Costruisci le frazioni  $\frac{3}{5}$  e  $\frac{6}{5}$  e fai la somma di queste due tramite il tasto  $a + b$ .

Verifica la tua risposta.

2. Svolgi l'esercizio 1 per la somma  $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ .

Costruisci ora la frazione  $\frac{(3 \cdot 1 + 4 \cdot 2)}{4 \cdot 3}$  e verifica che cade nello stesso punto.

Cosa rappresenta quest'ultima frazione secondo te?

3. Su Manipolatore Algebrico costruisci la regola  $a = \frac{a}{1}$  tramite i comandi a lato e salvala come "User Rule" (schiaia il tasto destro sulla prima riga e seleziona "Inserisci come regola utente").

4. Prova ora a dimostrare che  $\frac{(a \cdot d + b \cdot c)}{b \cdot d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  utilizzando la regola precedentemente inserita e i comandi a lato del manipolatore algebrico. Salva la regola come “User Rule”.
5. Utilizza la user rule appena trovata per verificare che  $6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$ .
6. Secondo te quanto fa  $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}$ ?  
Verifica il risultato costruendo la frazione da te trovata, le frazioni  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{5}$  e usando il tasto  $a \cdot b$  nell’ambiente retta algebrica.  
Utilizza poi il manipolatore algebrico per verificare la risposta data e per analizzare i passaggi da svolgere.
7. Esegui la domanda precedente per l’operazione  $\frac{1}{4} : \frac{2}{3}$ .

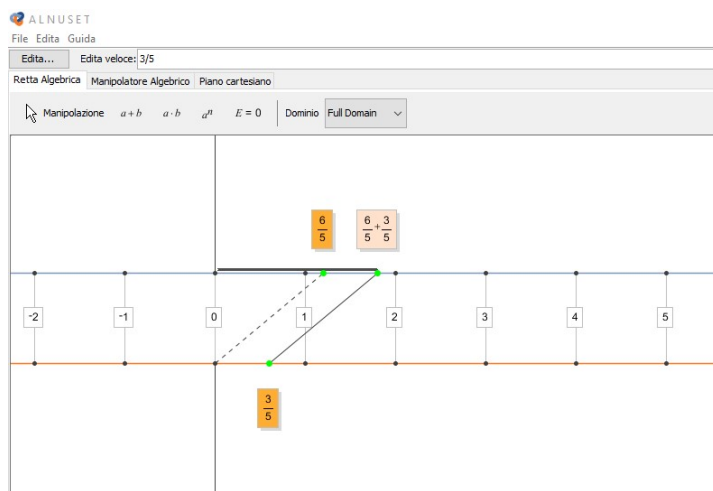


Figura 4.18: Costruzione della somma di frazioni nell’ambiente retta algebrica di AlNuSet.

Nella lezione successiva si confrontano le risposte e l’insegnante ricostruisce le dimostrazioni richieste, spiegando ogni passaggio, in modo da validare e istituzionalizzare ciò che gli studenti hanno provato a svolgere da soli. Inoltre si fa osservare, anche con un paio di esempi guidati, che i procedimenti da utilizzare per la sottrazione sono analoghi a quelli per l’addizione.



The screenshot shows the AlNuSet software interface. On the left, there are several panels containing mathematical rules categorized into: Regole dell'Addizione, Regole della Moltiplicazione, Regole della Potenza, Regole di Distribuzione e di Fattorizzazione, Regole di calcolo, and Regole della Logica e degli Insiemi. The main workspace on the right displays a sequence of algebraic steps to prove the identity  $\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ . The steps are:
 

- $\frac{a \cdot d + b \cdot c}{(b \cdot d)}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ \frac{a \cdot d + b \cdot c}{(b \cdot d)} \cdot \frac{1}{(b \cdot d)} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b} \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ \left( a \cdot d \cdot \frac{1}{b} + b \cdot c \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ \left( a \cdot d \cdot \frac{1}{b} + c \cdot b \cdot \frac{1}{b} \right) \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ \left( a \cdot d \cdot \frac{1}{b} + c \cdot 1 \right) \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ a \cdot d \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} + c \cdot 1 \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ a \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} + c \cdot 1 \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ a \cdot \frac{1}{b} \cdot 1 + c \cdot 1 \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\left\{ a \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{d} \right\}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\frac{a}{b} + c \cdot \frac{1}{d}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  if  $(b \cdot d) \neq 0$

Figura 4.19: Passaggi per dimostrare l'uguaglianza  $\frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$  nell'ambiente manipolatore algebrico di AlNuSet.

## 4.6 Un percorso sulle frazioni con la didattica a distanza

Il percorso didattico qui proposto è pensato sempre per una classe prima della scuola secondaria di primo grado ed essendo una rivisitazione del percorso tradizionale in ottica della didattica a distanza, le tempistiche e gli obiettivi delle unità didattiche rimangono gli stessi. In realtà, si possono aggiungere alcuni obiettivi riguardanti il pensiero divergente e convergente, come tentare soluzioni, formulare ipotesi e impostare un ragionamento deduttivo.

**Materiali:** quaderno, penna e colori, computer o tablet o cellulare, libro di testo, forbici, software AlNuSet (modalità demo), software GeoGebra.

**Svolgimento:** La prima lezione sulla nuova unità didattica sulle frazioni viene adibita ad indagare le misconcezioni degli studenti su questi argomenti, perciò si propone un questionario (il primo presentato nella sezione 4.5.1) tramite la piattaforma Kahoot!. Dopo il confronto svolto insieme sulle ri-

sposte date dagli studenti, viene lasciato per casa il secondo questionario (sezione 4.5.1): in questo modo da un lato gli alunni possono riguardare alcune definizioni prima di svolgere il compito per casa, dall'altro l'insegnante riesce a guadagnare del tempo. La discussione su quest'ultimo questionario non viene fatta nella lezione successiva, ma le risposte verranno riprese man mano che si affrontano gli argomenti legati alle domande.

A questo punto si inizia effettivamente l'unità didattica, introducendo e definendo l'unità frazionaria e le frazioni come parte di uno-tutto. Si presentano vari esempi relativi alla vita quotidiana in modo da coinvolgere i ragazzi e stimolarli a rispondere alle eventuali domande e si presentano le frazioni applicate a differenti tipi di insieme. Si consegnano degli esercizi classici sulla rappresentazione grafica della frazione e si chiede loro di considerare una frazione a loro piacere, rappresentarla con una figura a loro scelta costruendola su GeoGebra e, sulla stessa figura, cercare altri 3 modi per rappresentare la stessa frazione. In questo modo si cerca di rafforzare l'idea che le rappresentazioni delle frazioni non sono solo le solite, ma si possono avere anche suddivisioni atipiche ma ugualmente giuste (fig.4.3).

Si può aprire in questo momento un forum dedicato a qualsiasi tipo di dubbio che sorge nei ragazzi: il forum rimane aperto per tutto il percorso didattico e anche gli altri studenti possono rispondere alle domande poste dai coetanei. Così facendo, si apre un confronto costruttivo tra i ragazzi e allo stesso tempo l'insegnante può monitorare e rispondere prontamente alle domande che sorgono.

Nella lezione successiva, si riprendono le rappresentazioni più significative degli studenti e se ne discute insieme, poi, dopo aver lasciato spazio a domande e dubbi da parte degli alunni, si definiscono le frazioni complementari e il procedimento per trovare la frazione complementare a una data. Si riprendono anche le definizioni di frazioni irriducibili ed equivalenti: si svolgono alcuni esercizi guida e se ne consegnano altri per casa.

Le tre lezioni successive (3 ore) sono dedicate agli esercizi sugli argomenti visti fino a qui perchè è fondamentale imparare a ridurre ai minimi termini

le frazioni e a trovare le frazioni equivalenti: si correggono quindi gli esercizi consegnati per casa, grazie all'utilizzo di una lavagna condivisa telematicamente da parte dell'insegnante. Non è possibile far svolgere esercizi agli studenti, ma si può superare il problema chiedendo loro come hanno svolto certi passaggi e scrivendo ciò che loro dettano. Quest'ultimo è un esercizio utile anche per migliorare il linguaggio proprio della matematica e l'esposizione di argomenti matematici, aspetto che viene a volte non sottolineato in aula in quanto basta seguire ciò che lo studente scrive alla lavagna.

Si lasciano ulteriori esercizi per casa, anche della tipologia trova l'errore, da consegnare entro tre giorni nella cartella designata in modo da permettere al professore di verificare effettivamente il livello raggiunto dagli studenti su questi primi argomenti; vengono poi riportati e rispiegati gli errori più comuni durante la successiva lezione in tempo reale.

Si procede con l'attività presentata nella sezione 4.5.2: le parti che sono da svolgere come compito per casa devono venire documentate tramite video o foto in modo da agevolare la fase successiva. Non ci sono limiti su come documentare l'attività, l'importante è che i passaggi salienti e i risultati vengano resi visibili, sta poi allo studente decidere come organizzare il lavoro.

Per le discussioni in tempo reale invece viene dedicato il tempo necessario per sentire tutti gli studenti: anche se può richiedere diverse ore, è conveniente ascoltare il lavoro svolto da ognuno così da capire se hanno superato alcune misconcezioni che generalmente si formano affrontando il passaggio da frazione come parte di uno-tutto a frazione come numero razionale. Inoltre, bisogna dar merito del lavoro svolto, in quanto è un'attività personalizzabile e creativa e dunque un commento positivo su quanto fatto può stimolare e incoraggiare lo studente.

Dopo aver ascoltato tutti gli alunni, si definisce la frazione come numero razionale da posizionare sulla retta dei numeri, si approfondiscono le equivalenze tra frazioni e si definisce come confrontare le frazioni (2 ore). Le lezioni successive (3 ore) sono dedicate alla correzione, allo svolgimento di esercizi e alla risoluzione di dubbi. Si assegnano per casa vari esercizi su questi ultimi

argomenti.

Si procede ora con l'attività col software AlNuSet (vedi sezione 4.5.3). Tramite questa attività si analizzano e si definiscono le frazioni proprie, improprie e apparenti (1 ora), si riprendono l'equivalenza e il confronto tra frazioni: questi ultimi due concetti sono visti qui in un modo diverso rispetto all'attività precedente, in questo modo si offrono tre modalità in tutto per affrontare e capire questi argomenti, permettendo ad ogni alunno di scegliere la via a lui più consona. Inoltre, si introducono le operazioni e le regole per svolgerle.

Nelle lezioni successive (6 ore) si svolgono gli esercizi sia su operazioni semplici tra frazioni, sia su espressioni e si correggono i compiti consegnati a casa. È importante sottolineare che gli studenti non devono ricevere una quantità eccessiva di compiti per casa, basta consegnare loro cinque/sei esercizi significativi, in modo da tenerli allenati e allo stesso tempo permettere loro di riflettere su ciò che scrivono.

Si introducono le rappresentazioni decimale e percentuale della frazione, presentando vari esercizi per spiegare il passaggio tra esse, riprendendo anche la rappresentazione grafica vista all'inizio del percorso (3 ore). Si consegnano degli esercizi più per consolidare il fatto che esistono varie rappresentazioni delle frazioni piuttosto che per far ricordare i passaggi da svolgere: infatti, tolta la rappresentazione grafica, il passaggio tra le altre rappresentazioni, specialmente con quella decimale, viene operato dalle calcolatrici scientifiche. Non potendo controllare gli studenti è quindi inutile insistere su esercizi di questo tipo perchè possono tranquillamente usufruire di varie tecnologie; piuttosto è fondamentale far comprendere loro che è importante essere a conoscenza di queste rappresentazioni, così che se durante la vita di tutti i giorni le incontrano, allora sanno a cosa si fa riferimento.

Infine si presentano le varie tipologie di problemi, sfruttando anche le animazioni di GeoGebra, si assegnano dei problemi da svolgere a casa e si correggono (5 ore).

**Valutazione:** Lungo tutto il percorso didattico vengono analizzati i compiti per casa caricati dallo studente, in modo da capire l'apprendimento raggiun-

to sia generale della classe, sia personale di ogni ragazzo. Non vengono però valutati i compiti: è necessario insegnare bene questi concetti, evitando esiti negativi prematuri che bloccano l'apprendimento e l'interesse da parte degli studenti.

Un'ulteriore valutazione formativa viene svolta tramite la correzione "orale" degli esercizi durante le lezioni: nonostante la difficoltà dovuta alla modalità telematica, è fondamentale coinvolgere gli alunni durante le lezioni così da seguire al meglio il loro percorso.

Anche i laboratori proposti sono momenti di valutazione formativa nei quali tener conto sia della correttezza degli argomenti affrontati, sia della creatività, originalità e dell'impegno messo nello svolgimento.

Come valutazione sommativa si può far svolgere la verifica utilizzata nel percorso tradizionale (vedi appendice B), dividendola però in due parti, in modo da non caricare eccessivamente gli studenti: la verifica viene svolta in tempo reale. Se però alcuni studenti hanno problemi di connessione a internet, viene concesso loro di svolgere la verifica "offline" e di caricare solo successivamente le foto con le soluzioni; a questi studenti però viene fatta qualche domanda oralmente, in modo da verificare il loro protagonismo nella verifica.

Dopo la correzione della verifica, viene chiesto agli studenti di organizzarsi in gruppetti di tre e di costruire un minipercorso didattico sulle frazioni, riprendendo i concetti salienti, proponendo delle attività laboratoriali diverse da quelle proposte in aula ed esplicitando alcuni esercizi significativi per l'apprendimento dell'unità didattica. Gli alunni sono liberi poi di spaziare con la fantasia e creare un percorso efficace sulle frazioni e adattarlo alle loro caratteristiche. Ogni gruppo presenta alla classe il percorso costruito e alla fine delle esposizioni si apre una discussione costruttiva. Questo lavoro è utile per capire cosa hanno appreso gli studenti, se riescono a ricostruire i passaggi fondamentali e i concetti base delle frazioni e se riescono a spiegare e farsi capire: vengono quindi valutati l'esposizione, l'argomentazione, l'inventiva, la correttezza e la completezza del lavoro.

La valutazione finale è comprensiva di tutto il percorso svolto da ogni singolo

studente.

**Recupero:** Gli studenti che non hanno appreso bene l'unità didattica sono chiamati a svolgere delle lezioni individuali di recupero per essere seguiti al meglio e sono chiamati a risolvere esercizi simili a quelli della verifica con i quali allenarsi.

Gli altri studenti sono esonerati dalle lezioni e sono liberi di scegliere se svolgere degli approfondimenti sulle frazioni nell'ambito quotidiano o se approfittare di questo tempo libero per coltivare le loro passioni.

#### 4.6.1 Accorgimenti per studenti con DSA

Oltre agli schemi consegnati nel percorso tradizionale (vedi appendici A e B), che possono essere riproposti e animati tramite una presentazione, vengono registrate tutte le lezioni, così da aiutare gli studenti con DSA a comprendere fino in fondo ciò che è stato svolto a lezione, seguendo i propri ritmi.

Inoltre, si possono avere altri accorgimenti:

- aumentare i tempi delle domande dei questionari Kahoot;
- consegnare in anticipo i questionari agli studenti con DSA, così da svolgere l'attività secondo i propri tempi, senza dover rendere conto alla classe delle proprie difficoltà;
- lasciare aperti i questionari per tutta la durata del percorso didattico e caricare nella cartella vari giochi o quiz (non a tempo) sui quali esercitarsi, verificare se si sono fatti miglioramenti e allo stesso tempo divertirsi;
- dare scadenze dilungate per le attività da svolgere a casa;
- consegnare delle schede illustrative o video esplicativi per insegnare ad usare i software utilizzati nelle attività;
- assegnare meno compiti per casa da un giorno all'altro.

Per quanto riguarda la valutazione invece è sconsigliabile interrogarli davanti alla classe, però è possibile fare una videochiamata individuale per verificare il livello di apprendimento raggiunto e per far loro qualche domanda sugli esercizi svolti a casa e caricati online.

Invece, al posto della verifica sommativa si può considerare di consegnare loro una scheda da svolgere nel giro di una settimana, facendoli esercitare su tutto ciò che è stato visto durante il percorso e sfruttando i software usati (vedi appendice C).





# Conclusioni

Questo elaborato è nato per approfondire i Disturbi Specifici dell'Apprendimento, in particolar modo la discalculia, e per indagare quali strategie e quali metodologie didattiche, sono adeguate per fare apprendere la matematica agli studenti con DSA, anche in relazione alla didattica a distanza, fondamentale in questo periodo emergenziale dovuto dalla pandemia da Sars-CoV-2. Si possono quindi trarre due considerazioni principali.

La prima osservazione riguarda i DSA: negli ultimi anni il numero di alunni con DSA si è alzato notevolmente ed è in continua crescita, motivo per cui è sempre più necessario scoprire nuove metodologie per incentivare e aiutare questi studenti nel loro percorso scolastico. L'insegnamento pone il docente di fronte a sfide quotidiane ed è sicuramente faticoso e impegnativo pensare costantemente a percorsi alternativi per gli studenti con DSA, tuttavia l'istruzione è un loro diritto e in quanto tale essa va adempita nel migliore dei modi. L'insegnante deve dunque rinnovare la sua didattica, sfruttando le potenzialità delle situazioni a-didattiche, le quali permettono una vera e propria costruzione del sapere da parte degli studenti, un cambiamento di visione sulla scuola e una riscoperta della curiosità, fondamentale per apprendere nozioni nuove. Anche nella costruzione di percorsi didattici matematici è possibile creare attività innovative e questo favorisce tanto l'apprendimento degli argomenti da parte degli studenti, in particolare quelli con DSA, e migliora sia la concezione che essi hanno della matematica, sia il sentimento che provano nell'approcciarsi a questa materia.

La seconda osservazione è riferita invece alla didattica a distanza: sono state

esposte in questo elaborato le varie e numerose potenzialità e opportunità dell'apprendimento per via telematica e sono stati presentati alcuni strumenti efficaci tramite i quali costruire l'apprendimento, anche in rapporto all'insegnamento della matematica. Questo periodo di emergenza ha dato l'occasione agli insegnanti di ripensare la propria didattica sfruttando anche le potenzialità della rete e di alcuni software che prima magari non venivano presi in considerazione. Tuttavia non bisogna compiere l'errore di scorporare il percorso di apprendimento dall'ambiente sociale e relazionale costituito dalla scuola. Innanzitutto perchè l'essere umano è di sua natura un essere relazionale che apprende dagli altri, imitando e relazionandosi con altri esseri umani: tramite le relazioni infatti si può crescere e sviluppare la propria identità sia grazie all'appartenenza ad un gruppo di coetanei, sia al rapporto con l'adulto-insegnante-guida. Inoltre, l'apprendimento avviene anche tramite il canale emozionale: emozioni e apprendimento seguono lo stesso percorso sinaptico. Per questo motivo se una nozione è appresa con un sentimento negativo di incapacità e inadeguatezza, ogni volta che si riprende il concetto, verrà associato inconsciamente il sentimento di incapacità, andando a intaccare significativamente l'autostima. Analogamente, se l'apprendimento di nozioni è accompagnato da emozioni positive, allora verranno amplificati i sensi di gratificazione e autoefficacia, motivando la continuazione dello studio ([57]). Non bisogna poi dimenticarsi che le emozioni passano anche attraverso tutta quella parte di comunicazione non verbale di cui è intrisa la quotidianità scolastica (uno sguardo attento, un sorriso incoraggiante, un abbraccio, una stretta di mano, uno sguardo di intesa nei momenti difficili,...). Per tutti questi motivi non è pensabile formattare il percorso scolastico e sostituirlo con percorsi di didattica a distanza, ma è necessario integrare ciò che si è appreso in questo periodo emergenziale (software e strumenti utilizzati, attività a-didattiche, potenzialità della rete) e trasferirlo nella didattica in presenza, in modo da sfruttare le opportunità offerte da entrambe le tipologie di didattica e permettendo agli studenti di imparare in aula, ambiente fisico fatto di presenza, relazioni ed emozioni, tramite gli strumenti innovativi e le

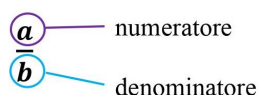
metodologie migliori. In questo modo vengono favoriti anche gli alunni più in difficoltà, come quelli con DSA, i quali possono apprendere vari argomenti, utilizzando non solo il canale visivo/verbale ma anche sfruttando attività e modalità più consone a loro, e appoggiarsi alle relazioni ed emozioni positive che si instaurano in aula.



# Appendice A

## Materiali dell'unità didattica 1

### LE FRAZIONI



- Frazioni **complementari**

➤ Trovare la frazione complementare di  $\frac{3}{8}$ :

$$\frac{3}{8} \rightarrow 8-3=5 \rightarrow \frac{5}{8}$$

La frazione complementare cercata è  $\frac{5}{8}$

- Frazioni **equivalenti** → moltiplicare o dividere numeratore e denominatore per uno stesso numero

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 2} \frac{4}{6}$$

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 3} \frac{6}{9}$$

$$\frac{24}{30} \xrightarrow{:2} \frac{12}{15}$$

$$\frac{24}{30} \xrightarrow{:6} \frac{4}{5}$$

Figura A.1: Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.1.

- Riduzione ai minimi termini

1. consultare lo schema della scomposizione in fattori primi e trovare la scomposizione del numeratore e del denominatore dati
2. controllare se ci sono divisori comuni e quante volte sono ripetuti
3. dividere per uno di questi divisori comuni sia il numeratore che il denominatore
4. procedere così finché non ci sono più divisori comuni

$$\frac{60}{45} \rightarrow 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \quad \text{e} \quad 45 = 3 \times 3 \times 5 \quad \rightarrow \quad \frac{20}{15} \quad \rightarrow \quad \frac{4}{3}$$

- Confronto e ordinamento di frazioni

1. controllare se le frazioni hanno lo stesso denominatore: se non è così, trovare il mcm dei denominatori (con scheda) e scrivere le frazioni equivalenti con tale mcm come denominatore
2. confrontare i numeratori e ordinare le frazioni

Figura A.2: Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.2.

➤ Confrontare e ordinare le frazioni  $\frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{7}{10}$

$$\text{mcm}(3, 9, 10) = 90$$

$$\frac{2}{3} \xrightarrow{\times 30} \frac{60}{90}$$

$$\frac{1}{9} \xrightarrow{\times 10} \frac{10}{90}$$

$$\frac{7}{10} \xrightarrow{\times 9} \frac{63}{90}$$

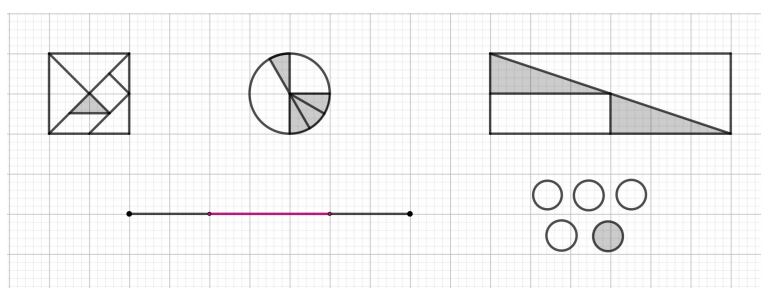
$$63 > 60 > 10 \quad \rightarrow \quad \frac{63}{90} > \frac{60}{90} > \frac{10}{90} \quad \rightarrow \quad \frac{7}{10} > \frac{2}{3} > \frac{1}{9}$$

Figura A.3: Schema per studenti con DSA sulla prima unità didattica sulle frazioni, p.3.

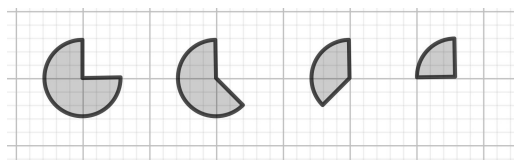
## Unità didattica: Le frazioni come operatore

### Test autovalutativo

1. Osserva i seguenti segmenti e le seguenti figure. Indica quale frazione rappresenta la parte colorata e cerchi quelle che rappresentano l'unità frazionaria.



2. Saverio, Giorgio e Marco ricevono dai nonni la stessa somma di denaro. Dopo una settimana a Saverio è rimasto  $\frac{1}{4}$  dei soldi ricevuti, a Marco  $\frac{1}{3}$ , a Giorgio la metà. Chi dei tre ha speso di più in quella settimana? Perché?
3. La signora Maria ha invitato alcune amiche per un tè e ha offerto loro una torta. Alla fine del pomeriggio sono stati mangiati  $\frac{3}{8}$  della torta. Quale delle seguenti figure rappresenta la torta rimasta?



4.  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{15}{40}$  sono equivalenti? Perché?
5. Scrivere due esempi di frazioni proprie, due di frazioni improprie e due di frazioni apparenti.

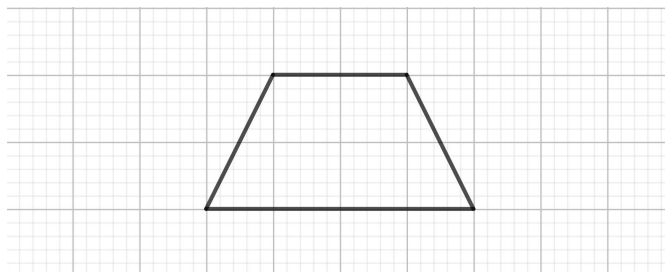
6. Operando con la frazione  $\frac{3}{5}$  su un segmento, si ottiene un segmento maggiore, minore, uguale o multiplo a quello dato? Perché?
7. Scrivere tre frazioni equivalenti a  $\frac{4}{6}$  (almeno una deve avere il denominatore più piccolo) e rappresentarle tramite la figura che più preferisci. Verificare poi che tutte le figure abbiano la superficie colorata uguale.
8. Trovare le frazioni equivalenti:

$$\frac{2}{7} \rightarrow \frac{6}{\dots} \qquad \frac{22}{30} \rightarrow \frac{\dots}{15}$$

9. Cerchiare le frazioni irriducibili:

$$\frac{6}{18} \quad \frac{3}{50} \quad \frac{8}{48} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{17}{24}$$

10. Il trapezio disegnato è stato ritagliato da una figura F. Il trapezio è  $\frac{3}{4}$  di F. Disegna una delle possibili figure F da cui è stato preso il trapezio.



11. Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni:

$$\frac{120}{30} \quad \frac{84}{98} \quad \frac{8}{20} \quad \frac{660}{60}$$

12. Scrivere la frazione complementare di  $\frac{2}{7}$  e di  $\frac{8}{15}$ .
13. Sia AB un segmento lungo 12 quadretti. Rappresentare i segmenti CD uguale ai  $\frac{2}{3}$  di AB, EF uguale ai  $\frac{7}{6}$  di AB e GH che corrisponde ai  $\frac{5}{12}$  di AB. Confrontare le frazioni 1,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{7}{6}$ ,  $\frac{5}{12}$  e ordinarle in



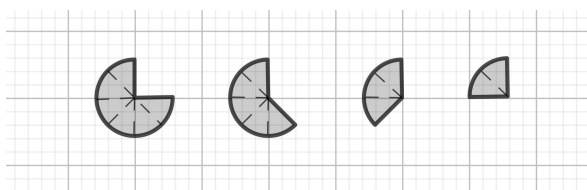
ordine crescente. Verificare tale ordinamento confrontando i segmenti ottenuti.

14. Confrontare e ordinare le frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{4}{5}$  e  $\frac{7}{15}$ .

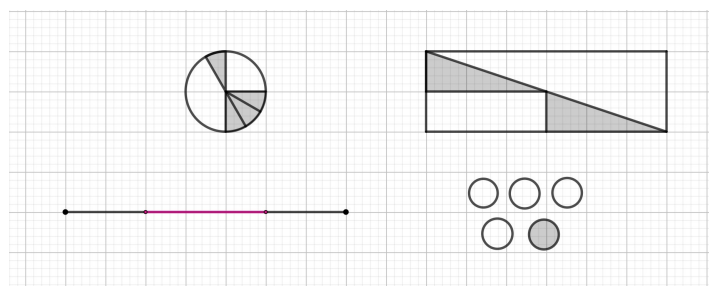
## Unità didattica: Le frazioni come operatore

### Test autovalutativo per studenti con DSA

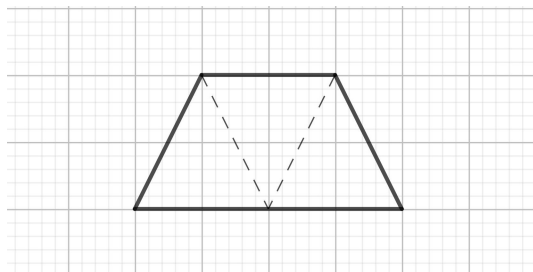
1. La signora Maria ha invitato alcune amiche per un tè e ha offerto loro una torta. Alla fine del pomeriggio sono stati mangiati  $\frac{3}{8}$  della torta. Quale delle seguenti figure rappresenta la **torta rimasta**?



2. Osservare i seguenti segmenti e le seguenti figure.
- Indicare quale frazione rappresenta la parte colorata.
  - Cerchiare quelle che rappresentano l'unità frazionaria.



3. Rappresentare la frazione  $\frac{3}{5}$  tramite la figura che più preferisci.
4. Il trapezio disegnato è stato ritagliato da una figura F. Il trapezio è  $\frac{3}{4}$  di F. Disegna una delle possibili figure F da cui è stato preso il trapezio.



5. Scrivere la frazione complementare di  $\frac{2}{7}$  e di  $\frac{8}{15}$ .

6.  $\frac{3}{8}$  e  $\frac{15}{40}$  sono equivalenti? Perché?

7. Trovare le frazioni equivalenti:

$$\frac{2}{7} \rightarrow \frac{6}{\dots} \qquad \frac{22}{30} \rightarrow \frac{\dots}{15}$$

8. Operando con la frazione  $\frac{3}{5}$  su un segmento, si ottiene un segmento maggiore, minore o uguale a quello dato? Perché? (Puoi giustificare la risposta anche con un disegno).

9. Ridurre ai minimi termini le seguenti frazioni:

$$\frac{42}{98} \qquad \frac{8}{20}$$

10. Sia AB un segmento lungo 12 quadretti.

a) Confrontare le frazioni  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{7}{6}$ ,  $\frac{5}{12}$  e ordinarle in ordine crescente.

b) Rappresentare i segmenti CD uguale ai  $\frac{2}{3}$  di AB, EF uguale ai  $\frac{7}{6}$  di AB e GH che corrisponde ai  $\frac{5}{12}$  di AB.

c) Confrontando i segmenti disegnati, verificare che l'ordinamento scritto in a) sia giusto.

# Appendice B

## Materiali dell'unità didattica 2

- **Somma e differenza di frazioni:**

$$\frac{2}{7} + \frac{10}{7} = \frac{2+10}{7} = \frac{12}{7}$$

$$\frac{10}{3} - \frac{2}{3} = \frac{10-2}{3} = \frac{8}{3}$$

---

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{6} = ? \quad \text{mcm}(5,6) = 30 \quad \frac{3}{5} + \frac{7}{6} = \frac{(30:5 \times 3) + (30:6 \times 7)}{30} = \frac{18+35}{30} = \frac{53}{30}$$

---

$$\frac{5}{3} - \frac{7}{5} + \frac{2}{15} = ? \quad \text{mcm}(3,5,15) = 15$$

$$\frac{5}{3} - \frac{7}{5} + \frac{2}{15} = \frac{(15:3 \times 5) - (15:5 \times 7) + (15:15 \times 2)}{15} = \frac{25-21+2}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

- **Moltiplicazione tra frazioni**

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{3 \times 4}{5 \times 7}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 1}{4 \times 3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

- **Divisione tra frazioni**

$$\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{4} = \frac{3 \times 7}{5 \times 4} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{6}{5} : \frac{4}{9} = \frac{6}{5} \times \frac{9}{4} = \frac{3 \times 9}{5 \times 2} = \frac{27}{10}$$

Figura B.1: Schema per studenti con DSA sulle operazioni con le frazioni, p.1.

- **Potenze di frazioni**

$$\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5^2}{3^2} = \frac{5 \times 5}{3 \times 3} = \frac{25}{9}$$

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1^3}{3^3} = \frac{1}{27}$$

$$\left(\frac{2}{7}\right)^0 = 1$$

Ricordarsi di ridurre ai minimi termini i risultati delle varie operazioni

Figura B.2: Schema per studenti con DSA sulle operazioni con le frazioni, p.2.

- **Rappresentazioni:**

- **decimale**

$$2,53 = \frac{253}{100} \quad \begin{array}{l} \text{2 cifre} \\ \text{2 zeri} \end{array}$$

$$1,2 = \frac{12-1}{9} = \frac{11}{9} \quad \begin{array}{l} \text{1 cifra sotto periodo} \\ \text{1 nove} \end{array}$$

$$1,32 = \frac{132-13}{90} = \frac{119}{90} \quad \begin{array}{l} \text{1 cifra antiperiodo} \\ \text{1 zero} \end{array}$$

$$0,234 = \frac{234}{1000}$$

$$2,02 = \frac{202-2}{99} = \frac{200}{99}$$

$$0,142 = \frac{142-14}{900} = \frac{128}{900}$$

- **percentuale**

$$35\% = \frac{35}{100} = 35 : 100 = 0,35$$

$$12,5\% = \frac{12,5}{100} = 12,5 : 100 = 0,125$$

$$\frac{2}{7} = 2 : 7 = 0,286 = 0,286 \times 100\% = 28,6\%$$

$$\frac{53}{100} = 53\%$$

Figura B.3: Schema per studenti con DSA sulle rappresentazioni decimale e percentuale.

## Verifica sommativa

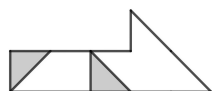
1. Risolvi le seguenti espressioni:

(a)  $\left\{ \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{9} \right)^2 : \left[ \frac{3}{5} : \left( 2 - \frac{1}{5} \right) \right]^4 \right\} \times \left( \frac{1}{5} \right)^3 + 3$

(b)  $\left[ \left( \frac{2}{9} - \frac{2}{9} + \frac{5}{12} + \frac{7}{3} \right) : \left( \frac{50}{10} + \frac{8}{5} \right) \right] + \left[ \left( \frac{5}{4} + \frac{9}{10} - \frac{5}{3} \right) \times \frac{90}{116} \right]$

(c)  $\left\{ (1 - 0,2) : \left( 1, \overline{6} + \frac{1}{9} \right) + \left[ \frac{1}{2} + 0,25 : \left( \frac{1}{3} - 0, \overline{2} \right) \right] \right\} \times \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) - 0, \overline{23}$

2. Per ogni seguente rappresentazione, scrivere due ulteriori rappresentazioni. Posizionare poi i numeri rappresentati sulla stessa retta orientata.



$1, \overline{36}$

$\frac{3}{6}$

79%

3. La somma delle ampiezze di tre angoli  $\alpha, \beta, \gamma$  misura  $198^\circ$ .  $\alpha$  è ampio  $37^\circ$  e  $\beta$  è  $\frac{4}{3}$  di  $\gamma$ . Dopo aver fatto lo schema grafico, calcola  $\beta$  e  $\gamma$ .
4. La differenza tra le lunghezze della base e dell'altezza di un rettangolo misura 20cm e la base è  $\frac{4}{9}$  dell'altezza. Calcola il perimetro del rettangolo, dopo aver rappresentato in maniera adeguata il problema.
5. Per saldare un debito ho già pagato 780 euro, cioè  $\frac{13}{15}$  dell'intero debito. Quanti soldi devo ancora versare? Fare anche lo schema grafico.
6. In un sacchetto ci sono 5 palline gialle, 4 verdi e 9 rosse. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde? Esprimere il risultato in percentuale.
7. In una scuola di 300 ragazzi si svolge una indagine sui gusti preferiti di gelato. Il 10% preferisce il pistacchio, il 25% il kinder, il 15% il fiordilatte, il 35% il cioccolato e il 15% il biscotto.  
Rappresenta in un grafico a torta i risultati ottenuti dall'indagine.

- Qual è la probabilità (espressa in forma frazionaria) che estraendo a sorte uno studente della scuola si ottenga un ragazzo che preferisce il gusto kinder?
8. Un bicchiere contiene  $\frac{1}{4}$  di litro di acqua. Se si vuole riempire una bottiglia da 1,5 litri, quanti bicchieri di acqua bisogna versare nella bottiglia? Giustifica la risposta.
9. Nei negozi A e B le bottiglie di olio hanno lo stesso prezzo, ma oggi nel negozio A c'è lo sconto del 40% mentre nel negozio B c'è l'offerta "prendi 3 e paghi 2". Dove conviene comprare le bottiglie di olio oggi? Giustifica la risposta.

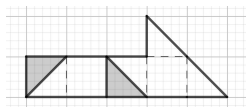
### Verifica sommativa per studenti con DSA

1. Risolvi le seguenti espressioni:

(a)  $[0,8 - \frac{1}{8} : (1 - \frac{6}{8}) + 0,5] : [\frac{3}{5} + (2 - \frac{1}{3}) : \frac{5}{6} - \frac{1}{5}]$

(b)  $\left\{ \left[ \frac{1}{16} : (1 - \frac{1}{2})^4 \right] \times \left[ (\frac{3}{2})^2 \times (1 + \frac{5}{3}) \right] \right\} : (\frac{5}{12} : \frac{15}{8})$

2. Per ogni seguente rappresentazione, scrivere due ulteriori rappresentazioni. Posizionare poi i numeri rappresentati sulla stessa retta orientata.



$1,3\bar{6}$

50%

3. La differenza tra le lunghezze della base e dell'altezza di un rettangolo misura 20cm e la base è  $i \frac{3}{5}$  dell'altezza. Quanto misurano la base, l'altezza e il perimetro? Fai anche lo schema grafico.

4. Per saldare un debito ho già pagato 100 euro, **cioè**  $\frac{4}{5}$  dell'intero debito. Quanti soldi devo ancora versare? (Fai lo schema grafico).
5. In un sacchetto ci sono 5 palline gialle, 4 verdi e 9 rosse. Qual è la probabilità di estrarre una pallina verde?
6. In una scuola di 300 ragazzi si svolge una indagine sui gusti preferiti di gelato. Il 10% preferisce il pistacchio, il 25% il kinder, il 15% il fiordilatte, il 35% il cioccolato e il 15% il biscotto.  
Rappresenta in un grafico a torta i risultati ottenuti dall'indagine.  
Qual è la probabilità che estraendo a sorte uno studente della scuola si ottenga un ragazzo che preferisce il gusto kinder? Trasforma il risultato in frazione.
7. (Facoltativo) La somma delle ampiezze di due angoli  $\alpha, \beta$  misura  $161^\circ$  e  $\alpha$  è  $\frac{3}{4}$  di  $\beta$ . Dopo aver fatto lo schema grafico, calcola  $\alpha$  e  $\beta$ .
8. (Facoltativo) Un bicchiere contiene  $\frac{1}{4}$  di litro di acqua. Se si vuole riempire una bottiglia da 1,5 litri, quanti bicchieri di acqua bisogna versare nella bottiglia? Giustifica la risposta.



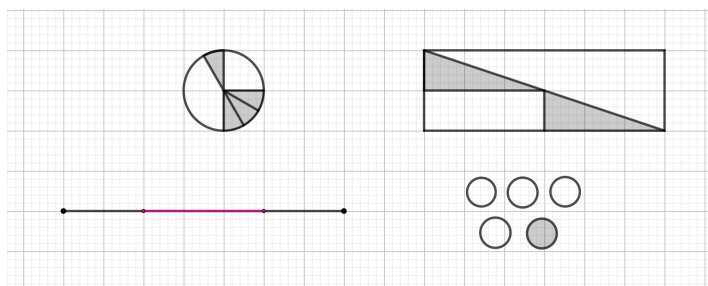


# Appendice C

## Verifica sommativa per studenti con DSA con la didattica a distanza

1. Scegli una figura (unità di misura di riferimento) che preferisci, disegna su GeoGebra.
  - (a) Considera e rappresenta le frazioni  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{8}$  sulla figura scelta.
  - (b) Confronta le frazioni tramite le rappresentazioni e ordinale in ordine decrescente.
  - (c) Prova a costruire in 2 modi diversi l'unità di misura di riferimento come somma di unità frazionarie differenti.
2. Risolvi l'espressione  $\left\{ \left[ \frac{1}{16} : \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 \right] \times \left[ \left(\frac{3}{2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{5}{3}\right) \right] \right\} : \left(\frac{5}{12} : \frac{15}{8}\right)$ .  
Verificala tramite il manipolatore algebrico di AlNuSet e documenta i passaggi svolti.
3. Dimostra con il manipolatore algebrico di AlNuSet che  $\frac{ad-bc}{bd} = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$
4.  $\frac{8}{20}$  e  $\frac{2}{5}$  sono equivalenti? Perché?  
Verifica la risposta su AlNuSet e su GeoGebra tramite una rappresentazione grafica.

5. Scegli una frazione propria e scrivi 4 frazioni equivalenti.
6. Osserva i seguenti segmenti e le seguenti figure.
- a) Indica quale frazione rappresenta la parte colorata.
- b) Cerchia quelle che rappresentano l'unità frazionaria.



7. (a) Riduci ai minimi termini le frazioni

$$\frac{15}{50} \quad \frac{35}{28} \quad \frac{20}{100}$$

- (b) Una volta ridotte ai minimi termini, ordinale in ordine crescente.
- (c) Scrivi le frazioni in forma percentuale.
8. (a) Inventa un problema con le frazioni di tipo inverso.
- (b) Disegna lo schema grafico su GeoGebra.
- (c) Risolvi l'esercizio.

9. In una scuola di 300 ragazzi si svolge una indagine sui gusti preferiti di gelato. Il 10% preferisce il pistacchio, il 25% il kinder, il 15% il fiordilatte, il 35% il cioccolato e il 15% il biscotto.

Rappresenta in un grafico a torta i risultati ottenuti dall'indagine.

Qual è la probabilità che estraendo a sorte uno studente della scuola si ottenga un ragazzo che preferisce il gusto kinder? Trasforma il risultato in frazione.

# Bibliografia

- [1] C.Cornoldi, Difficoltà e disturbi dell'apprendimento, Il Mulino, Bologna, 2007, cap. I,VI
- [2] S.Vicari, M.C.Caselli, Neuropsicologia dello sviluppo, Il Mulino, Bologna, 2010, cap. I,IX-XIV
- [3] Linee guida del Ministero della sanità per le attività di riabilitazione, Gazzetta Ufficiale del 30 maggio 1998, n.124
- [4] V.Gatta, C.Tropeano, Disturbi specifici dell'apprendimento: aspetti emotivi e comorbidità, State of Mind Il giornale delle scienze psicologiche, 14 settembre 2015
- [5] M.Baldacci, Personalizzazione o individualizzazione?, Erickson, Trento, 2005, pp.15-21
- [6] L.Guerra, L'elaborazione didattica di Learning objects, Ricerche di Pedagogia e Didattica, 2006, sezioni 1.1 e 1.2
- [7] Strumenti compensativi e misure dispensative per i DSA, Articolo online a cura di Anastasis, 16 Ottobre 2018
- [8] S.Grandone, Biodialogia: Individuazione, trasduzione e semplicità nella relazione educativa, Figure dell'immaginario. Rivista internazionale online. IV numero (gennaio 2016) Immagine della scienza, immaginario scientifico, immaginazione scientifica, pp.3,7

- 
- [9] Consensus Conference, Disturbi specifici dell'apprendimento, giugno 2011
- [10] Linee guida per il diritto allo studio degli alunni e degli studenti con disturbi specifici di apprendimento, allegate al Decreto Ministeriale del 12 Luglio 2011
- [11] F.Fogarolo, Costruire il Piano Didattico Personalizzato, Indicazioni e strumenti per una stesura rapida ed efficace, Erickson, 2014
- [12] A.Biancardi, A.Ara, La matematica con le app, Giochi ed esercizi per le abilità numeriche e la discalculia, Carocci Faber, 2018, cap.1 e sezione 2.1
- [13] M.R.Cortese, I Disturbi Specifici di Apprendimento (DSA), Didattica della matematica, slide incontro AID, Belluno, 03.10.2017
- [14] C.Cornoldi, D.Lucangeli, M.Bellina, AC-MT 6-11, Test di valutazione delle abilità di calcolo e soluzioni di problemi - gruppo MT, Erickson, 2012
- [15] C.Cornoldi, C.Cazzola, AC-MT 11-14, Test di valutazione delle abilità di calcolo e problem solving dagli 11 ai 14 anni, Erickson, 2004
- [16] A.Biancardi, C.Bachmann, C.Nicoletti, BDE2, Batteria Discalculia Evolutiva, Test per la diagnosi dei disturbi dell'elaborazione numerica e del calcolo in età evolutiva - 8-13 anni, Erickson, 2016
- [17] D.Lucangeli, P.E.Tressoldi, C.Fiore, ABCA, Test delle abilità di calcolo aritmetico, Erickson, 2003
- [18] E.Maroscia, M.Terribili, Comorbidità nel disturbo specifico di apprendimento, Scuola IaD, Roma, 2012
- [19] C.Terribili, E.Maroscia, M.Terribili, Diagnosi e basi neurobiologiche, Scuola IaD, Roma, 2013

- [20] G.Stella, La dislessia, Il Mulino, Bologna, 2004
- [21] M.Rossetti, G.Balerci, Eziologia, comorbilità e correlati della disgrafia, State of Mind Il giornale delle scienze psicologiche, 13 dicembre 2019
- [22] S.Dehaene, M.Piazza, P.Pinel, L.Cohen, Three parietal circuits for number processing, Cognitive neuropsychology, 2003, vol.20, pp.487-506
- [23] L.Dozza, La Personalizzazione, La Rivista di Pedagogia e Didattica, Bimestrale n.1 -Anno 1-, gennaio/febbraio 2004, pp.83-87
- [24] OMS, International Statistical Classification of Diseases, Injuries and Causes of Death, edizione 10 (ICD-10), 1990, vol.1
- [25] F.Fiore, La zona di sviluppo prossimale nella teoria di Lev Vygotskij - Introduzione alla Psicologia Nr.37, State of Mind Il giornale delle scienze psicologiche, 10 dicembre 2015
- [26] La diagnosi di discalculia: criteri e test a confronto (parte I: primaria e secondaria di I grado), Articolo online. <http://www.trainingcognitivo.it/la-diagnosi-discalculia-criteri-test-confronto-parte-primaria-secondaria-grado/>
- [27] Costituzione della Repubblica Italiana, Roma, 27 Dicembre 1947
- [28] Legge n.118 del 30 Marzo 1971, Gazzetta Ufficiale del 2 Aprile 1971, n.82
- [29] Documento Falcucci, allegato alla C.M. del 8 Agosto 1975, n.227
- [30] Legge n.104 del 5 Febbraio 1992, Gazzetta Ufficiale del 17 Febbraio 1992, n.39
- [31] Convention on the rights of persons with disabilities, ONU, 2006, allegato alla Legge n.18 del 3 Marzo 2009, Gazzetta Ufficiale del 14 Marzo 2009, n.61

- [32] Legge n.170 dell'8 Ottobre 2010, Gazzetta Ufficiale del 18 Ottobre 2010, n.244
- [33] Decreto Ministeriale n. 5669 del 12 Luglio 2011
- [34] Direttiva Ministeriale, Strumenti d'intervento per alunni con Bisogni Educativi Speciali e organizzazione territoriale per l'inclusione scolastica, 27 Dicembre 2012
- [35] Nota prot. 388 del 17 Marzo 2020, Ministero dell'Istruzione
- [36] M.E.Bianchi, A.Landini, C.Fabbri, Didattica a distanza: opportunità e limiti. Una riflessione in merito alla nota del ministero dell'istruzione con le prime indicazioni operative, Associazione Italiana Dislessia
- [37] D.Paola, Riflessioni sulla didattica a distanza ai tempi del covid-19, MaddMaths, Articolo online del 13 Aprile 2020
- [38] M.Ferraris, LabTD: un laboratorio di tecnologie didattiche per docenti, Tecnologie Didattiche TD40, numero 1, 2007, pp.4-13
- [39] G.Trentin, Dalla formazione a distanza alle comunità di pratica attraverso l'apprendimento in rete, Tecnologie Didattiche TD20, numero 2, 2000, pp.21-29
- [40] V.Benigno, G.Trentin, Formazione mista presenza/distanza, Tecnologie Didattiche TD14, numero 2, 1998, pp.24-32
- [41] R.M.Bottino, G.Chiappini, Nuove tecnologie per la formazione degli insegnanti, Tecnologie Didattiche TD14, numero 2, 1998, pp.33-39
- [42] A.Baccaglini-Frank, E.Robotti, Gestire gli studenti con DSA in classe. Alcuni elementi di un quadro comune, in Quaderni GRIMeD n.1 pp.75-86 a cura di C.Cateni, F.Fattori, R.Imperiale, B.Piochi, P.Vighi, Pitagora, 2013

- [43] T.Minerva, L.Colazzo, Connessi! Scenari di innovazione nella Formazione e nella Comunicazione, VIII Congresso Nazionale della Società Italiana di e-Learning SIEL 2011, Ledizioni, Reggio-Emilia, 2011, pp.429-434
- [44] M.T.Borgato, Didattica e insegnamento della Matematica. Esperienze e proposte, Rivista Annali online della Didattica e della Formazione Docente, vol.4, n.4, 2012, pp.13-35
- [45] F.Del Regno, Discutere di Matematica: confronto tra il caso online e in presenza, Tesi di Dottorato di Ricerca “Matematica, Fisica e Applicazioni”, a.a.2015-2016, capitoli 1, 2, 3.2
- [46] A.Barana, M.Marchisio, “Testi digitali interattivi” per il recupero nella matematica nel progetto per la riduzione della dispersione scolastica “Scuola dei Compiti”, Form@re Open Journal per la formazione in rete, n.1, vol.15, anno 2015, pp.129-142
- [47] G.Lisarelli, A.Baccaglini-Frank, F.Poli, Progettare attività didattiche inclusive: un esempio di percorso sulle frazioni, RicercAzione, vol. 11, n.1, Giugno 2019
- [48] L.Campaniolo, Didattica delle frazioni, Tesi di laurea in Matematica, 29 Marzo 2007
- [49] Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione, allegate al Decreto Ministeriale n. 254 del 16 Novembre 2012, Gazzetta Ufficiale del 5 Febbraio 2013, n.30
- [50] G.Flaccavento Romano, matematico!, Fabbri Editori, Milano, 2006, vol.1, pp. 71-108, 387-450
- [51] Didattica vs didattica a distanza, Articolo online. <https://www.orizzontescuola.it/didattica-vs-didattica-a-distanza/>

- [52] G.Bolondi, M.I.Fandino Pinilla, Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica, 2008. In. B.D'Amore, S.Sbaragli, Didattica della matematica e azioni d'aula. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la Matematica, Castel San Pietro Terme, 7-9 novembre 2008, Pitagora, Bologna
- [53] G.Brousseau, Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, in Revue "Recherches en didactique des Mathématiques", vol.7, n.2, pp.33-115, 1986
- [54] B.D'Amore, M.I.Fandino Pinilla, L'effetto Topaze. Analisi delle radici ed esempi concreti di una idea alla base delle riflessioni sulla didattica della matematica, Rivista La matematica e la sua didattica, Anno 23, numero 1, pp.35-59
- [55] A.Baccaglini-Frank, B.Lucatello, L.Micheletto, M.Perona, M.Tubertini, Il potenziamento in matematica nella scuola secondaria di 2° grado: il successo di particolari strategie cognitive, Rivista Difficoltà in matematica, vol.9, n.2, febbraio 2013, Edizioni Erickson, Trento
- [56] I principali dati relativi agli alunni con DSA, a.s. 2017/2018, MIUR, giugno 2019
- [57] C.Cucinotta, Una sfida alla didattica contemporanea: La Warm Cognition, State of Mind Il giornale delle scienze psicologiche, 18 ottobre 2017



# Ringraziamenti

Desidero ringraziare innanzitutto la professoressa Fabbri per aver supportato il mio progetto di tesi e il professore Negrini per la disponibilità mostratami nonostante i tempi stretti.

Un ringraziamento speciale va a tutta la mia famiglia che ancora una volta mi ha sostenuta e sopportata durante i momenti più difficili, accettando le mie stranezze e i miei silenzi e incoraggiandomi a non mollare.

Oltre che per le correzioni e per i suggerimenti sulla tesi, ringrazio i miei genitori e mia sorella perchè questo elaborato è nato proprio grazie a ciò che mi hanno sempre insegnato: un buon insegnante è quello che riesce a trasmettere la propria passione per la materia e a stuzzicare la curiosità degli studenti che ha davanti; per educare non bisogna fare l'insegnante ma essere insegnante e accettare tutte le sfide che si incontrano per renderle capolavori. Ringrazio anche mio fratello che a modo suo mi ha aiutato a passare queste ultime giornate di crisi, rasserenandomi con chitarra, musica e canto!

Un altro ringraziamento veramente speciale va a Davide, senza il quale non avrei avuto il coraggio di affrontare questi ultimi mesi e di concludere per luglio la tesi. Ma oltre a ciò, lo ringrazio per avermi fatto da punchball per tutti gli scleri silenziosi (e non), per avermi consolato ogni volta che le lacrime hanno fatto capolino, per essere stato al mio fianco e per avermi “distratto” con tutti i progetti futuri.

Ringrazio tanto anche Francesca per la sua costante presenza e per la sua gioia contagiosa. Grazie per questi anni passati insieme e per tutti i momenti vissuti, sia quelli di confronto e di crescita, sia quelli di divertimento, sia

quelli semplici di nullafacenza apparente.

Infine ringrazio Annalisa, Giulia, Maddalena, Michela e Alice per le chiacchierate e le risate fatte, per tutti i consigli scambiati e per il sostegno datomi.

Chi mi conosce sa che non esprimo molto i miei sentimenti a parole, ma vi assicuro che vi sono infinitamente grata per avermi accompagnata fin qui, chi in un modo e chi in un altro. Ognuno di voi ha contribuito nella costruzione del mio percorso: grazie di cuore.