ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

La funzione $\wp$ di Weierstrass

Tesi di Laurea in Analisi complessa

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
Monica Idà

Presentata da:
Alessandro Govoni

Sessione unica
Anno Accademico 2018-2019

Ad Alice

Introduzione

Lo scopo di questa tesi è arrivare a costruire la $\wp$ di Weierstrass relativa a un reticolo Ω e vedere che

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Omega &\longrightarrow \ \mathcal{C}_\Omega \\ [z] &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

è una rappresentazione parametrica della curva $\mathcal{C}_\Omega$ di equazione

$$y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4$$

dove a_2 e a_4 sono coefficienti che dipendono dal reticolo Ω. Fissato comunque un reticolo Ω, la $\wp$ di Weierstrass relativa a Ω è una funzione meromorfa definita come la somma di una serie di funzioni meromorfe normalmente convergente sui compatti di $\mathbb{C}$, che risulta essere meromorfa su $\mathbb{C}$, non costante e avere Ω come gruppo dei periodi: è quindi un esempio di funzione ellittica non costante avente il reticolo Ω come gruppo dei periodi.
Per mostrarne le principali proprietà si ha quindi bisogno di vedere alcuni teoremi sulle funzioni meromorfe aventi un reticolo Ω come gruppo dei periodi. Inoltre si deve spiegare cosa si intende per serie di funzioni meromorfe convergente normalmente sui compatti di $\mathbb{C}$.
Nel primo capitolo viene richiamato il Teorema dei residui e si vedono alcune sue applicazioni. In particolare si dimostrano il Teorema dell'indicatore logaritmico e il Teorema di Abel.
Prima di arrivare a studiare la convergenza di serie di funzioni meromorfe, nel secondo capitolo si affronta la convergenza di successioni e serie di funzioni continue attraverso un nuovo tipo di convergenza: la convergenza uniforme (normale) sui compatti di un insieme aperto $D \subset \mathbb{C}$. In particolare si dimostra che se una successione di funzioni f_n olomorfe su D converge uniformemente sui compatti di D a una funzione f, allora f è olomorfa e la successione delle derivate f'_n converge uniformemente sui compatti di D a f'. Si definisce poi una topologia nello spazio vettoriale delle funzioni continue $C(D)$ tramite una distanza, rendendo $C(D)$ e quindi il sottospazio delle funzioni olomorfe $H(D)$ uno spazio topologico metrizzabile. In tale topologia il limite di una successione f_n è quello

dell'uniforme convergenza sui compatti.
Nel terzo capitolo si affronta lo studio sulla convergenza di serie di funzioni meromorfe, estendendo la nozione data per le successioni e serie di funzioni olomorfe con una condizione che permetta di mantenere il fatto che se una serie di funzioni, in questo caso meromorfe, converge uniformemente (o normalmente) sui compatti di D, allora la funzione f somma della serie è una funzione meromorfa su D e la serie delle derivate converge a f'. Dopo aver introdotto questa nozione si vedono tre esempi di serie di funzioni meromorfe, dimostrando anche, tra l'altro, che

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Il quarto capitolo è dedicato allo studio della funzione $\wp$ di Weierstrass relativa a un reticolo Ω, ossia la funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ somma della serie di funzioni meromorfe su $\mathbb{C}$

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Omega\smallsetminus\{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

Dopo aver mostrato che

$$\wp'(z) = -2\sum_{\omega\in\Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3}$$

si studiano le principali proprietà delle funzioni $\wp$ e $\wp'$ provando che sono funzioni ellittiche (definite in def 9, p. 7) e si arriva a dimostrare che esse soddisfano l'identità:

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 = 0$$

Tale identità permette di parametrizzare la curva algebrica piana $\mathcal{C}_\Omega$ definita in def 16, p.36.

Si presuppone che il lettore sia a conoscenza dei fatti basilari dell'analisi complessa in un variabile che vengono usati liberamente in questa tesi; la referenza è il libro di Henri Cartan [1].

Indice

Capitolo 1

Teorema dei residui e applicazioni

1.1 Teorema dei residui

In questa sezione ricordiamo alcune definizioni e alcuni risultati classici.

Notazione 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Indichiamo con $[a, b]$ l'intervallo reale chiuso

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

L'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ viene chiamato l'insieme dei numeri reali estesi.

Definizione 1. Un **cammino** di $\mathbb{C}$ è una funzione

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

continua, cioè tale che, posto $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, le funzioni

$$x, y : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

siano continue.
I punti $\gamma(a), \gamma(b) \in \mathbb{C}$ si chiamano rispettivamente **estremo iniziale e finale** del cammino γ.
Se $\gamma(a) = \gamma(b)$ si dice che il **cammino** è **chiuso**.

Notazione 2. Dato un cammino γ di $\mathbb{C}$ indichiamo con γ^* l'immagine di γ.

Proposizione-Definizione 1. *Sia γ un cammino chiuso di $\mathbb{C}$ e $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$; allora*

$$I(\gamma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

*è un numero intero detto **indice** di γ rispetto a z_0.*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [1]. $\square$

Definizione 2. Per **corona circolare** intendiamo un insieme del tipo

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}, R_2 < |z - z_0| < R_1\}$$

dove $z_0 \in \mathbb{C}$, R_1 e R_2 sono due numeri reali (estesi) tali che $0 \leq R_2 < R_1 \leq +\infty$.

Definizione 3. Chiamiamo **disco puntato** una corona circolare $0 < |z - z_0| < R$, dove R è un numero reale (esteso) tale che $0 < R \leq +\infty$. Se $R \in \mathbb{R}$ allora è un disco aperto $B(z_0, R)$ privato del suo centro. Se $R = +\infty$ è il piano complesso $\mathbb{C}$ privato di un punto z_0, cioè $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

Proposizione 1. *Sia f(z) olomorfa su una corona circolare Δ definita come sopra, e sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ la sua serie di Laurent in Δ. Sia γ un cammino chiuso tale che $\gamma^* \subset \Delta$.*
Allora

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = a_{-1} I(\gamma, z_0)$$

Dimostrazione. Si veda [1], III.2. $\square$

Consideriamo una f olomorfa in un disco puntato $0 < |z - z_0| < R$. Per la proposizione precedente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = a_{-1} I(\gamma, z_0)$$

dove γ è un cammino chiuso tale che $\gamma^* \subset$ disco puntato e $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n (z - z_0)^n$ nel disco puntato.

Definizione 4. Chiamiamo **residuo** di f in z_0 il numero complesso $Res(f, z_0) := a_{-1}$.

Possiamo quindi scrivere

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = Res(f, z_0) I(\gamma, z_0)$$

In particolare, se γ è una circonferenza di centro z_0 e raggio minore di R, percorsa una volta in senso antiorario, allora $I(\gamma, z_0) = 1$ e quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z) dz = Res(f, z_0)$$

Teorema 1 (Teorema dei residui). *Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto e sia f olomorfa su $D \setminus \{z_1, \dots, z_p\}$. Sia γ un cammino chiuso omotopo a un punto che non passa per $z_1, \dots, z_p$ e con $\gamma^* \subset D$. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{p} Res(f, z_j) I(\gamma, z_j)$$

*Questa identità è detta **formula dei residui**.*

Dimostrazione. Vedere [2]. □

1.2 Applicazione ai poli e agli zeri di funzioni meromorfe

In questa sezione vediamo un'importante applicazione del Teorema dei residui: il Teorema dell'indicatore logaritmico. Prima di enunciarlo abbiamo bisogno di calcolare i residui di una derivata logaritmica.

Notazione 3. Sia f una funzione a valori complessi definita in un intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Se z_0 è uno zero o un polo di ordine $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ di f indichiamo con $o(z_0, f)$ il numero naturale k.

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in un intorno di un punto $z_0 \in \mathbb{C}$. Quindi per definizione di funzione meromorfa z_0 è una singolarità polare per f oppure f è olomorfa in z_0.
Lo sviluppo in serie di Laurent di f intorno a z_0 è

$$f(z) = \sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^n \quad \text{con} \quad a_k \neq 0$$

dove

- $k \geq 0$ se f è olomorfa in z_0
  - $k = 0$ se $f(z_0) \neq 0$
  - $k > 0$ se z_0 è uno zero di ordine $o(z_0, f) = k$ di f
- $k < 0$ se z_0 è un polo di ordine $o(z_o, f) = -k$ di f

Quindi

$$f(z) = (z - z_0)^k \sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^{n-k}$$

Sia $g(z) := \sum_{n \geq k} a_n (z - z_0)^{n-k}$, allora

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z) \tag{1.1}$$

con $g(z)$ olomorfa intorno a z_0 e $g(z_0) = a_k \neq 0$.
Da (1.1) ricaviamo che

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k(z-z_0)^{k-1}g(z) + (z-z_0)^k g'(z)}{(z-z_0)^k g(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{1.2}$$

Definizione 5. La funzione f'/f è detta **derivata logaritmica** di f.

Dalla (1.2) si vede che f'/f è meromorfa in un intorno di z_0. Più precisamente, essendo g'/g olomorfa intorno a z_0 ($g(z_0) \neq 0$ e g olomorfa), se $k \neq 0$ allora f'/f ha come unica singolarità un polo semplice in z_0 il cui residuo è

$$Res(f'/f, z_0) = k = \begin{cases} o(z_o, f) & \text{se } z_0 \text{ è uno zero di ordine } k \text{ di } f \\ -o(z_o, f) & \text{se } z_0 \text{ è un polo di ordine } -k \text{ di } f \end{cases}$$

Possiamo ora enunciare il seguente:

Teorema 2 (Teorema dell'indicatore logaritmico)**.** *Siano $f(z)$ una funzione meromorfa non costante su un aperto $D \subset \mathbb{C}$, e $a \in \mathbb{C}$. Sia B un disco aperto tale che $\overline{B} \subset D$ e inoltre tale che denotando con γ il suo bordo percorso una volta in senso antiorario si abbia che i poli di f non stanno su γ^* e $f(z) \neq a$ $\forall z \in \gamma^*$.*
Allora

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \sum_j o(z_j, f-a) - \sum_i o(p_i, f) \tag{1.3}$$

dove gli z_j sono gli zeri di $f - a$, i p_i sono i poli di f.

Dimostrazione. Sia $h(z) := f(z) - a$. Osserviamo che i poli di h sono esattamente i poli p_i di f. Dai calcoli locali effettuati sopra la derivata logaritmica

$$\frac{h'(z)}{h(z)} = \frac{f'(z)}{f(z)-a}$$

è meromorfa su D e ha come uniche singolarità gli zeri z_j e i poli p_i di $h(z)$, che sono poli semplici per h'/h di residuo uguale a $o(z_j, h)$ e $-o(p_i, h) = -o(p_i, f)$. Applicando il Teorema dei residui alla funzione h'/h abbiamo la tesi. □

Osservazione 1. Gli zeri di $f-a$ sono esattamente le radici dell'equazione $f(z)-a = 0$. Quindi se z_j è una radice dell'equazione allora $o(z_j, f-a)$ è uguale alla sua molteplicità.

Osservazione 2. Se $f(z)$ è olomorfa su D allora essa non ha poli, quindi al secondo membro di (1.3) abbiamo solo la somma estesa alle radici dell'equazione $f(z) - a$.

Proposizione 2. *Sia z_0 radice di molteplicità k dell'equazione $f(z) = a$, con f funzione olomorfa non costante in un intorno di z_0. Per ogni sufficientemente piccolo intorno V di z_0 e per ogni b sufficientemente vicino ad a e $\neq a$, l'equazione $f(z) = b$ ha esattamente k soluzioni semplici in V.*

Dimostrazione. Sia γ il bordo di un disco $B(z_0, r)$ di centro z_0 di raggio r sufficientemente piccolo in modo tale da avere che z_0 è l'unica soluzione dell'equazione $f(z) = a$ contenuta nel disco chiuso, e che $f'(z) \neq 0$ per ogni punto z del disco diverso da z_0.
Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - b} dz$$

Esso rimane costante se b varia in una componente connessa del complementare di $f(\gamma^*)$ (vedere II.1.8 di [1]).
Quindi per b sufficientemente vicino ad a abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - b} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz$$

Ma per il Teorema dell'indicatore logaritmico, essendo a l'unica radice (di molteplicità k) dell'equazione $f(z) - a$ ed essendo $f(z)$ olomorfa e non costante, abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = kI(\gamma, a) = k$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - b} dz = k$$

Perciò per il Teorema dell'indicatore logaritmico l'equazione $f(z) = b$ ha esattamente k soluzioni (contate con molteplicità) in $B(z_0, r)$. Ma per b sufficientemente vicino ad a e $\neq a$, le soluzioni sono semplici perché $f'(z) \neq 0$ in ogni punto z del disco diverso da z_0.
La proposizione è quindi provata. □

1.3 Applicazione alle funzioni doppiamente periodiche

Definizione 6. Siano ω_1, ω_2 due numeri complessi $\mathbb{R}$-linearmente indipendenti, ossia tali che $\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$. Chiamiamo **reticolo** in $\mathbb{C}$ generato da ω_1 e ω_2 il sottogruppo di $(\mathbb{C}, +)$ generato da ω_1 e ω_2:

$$\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2) := \{n_1\omega_1 + n_2\omega_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$$

Si osservi che ω_1 e ω_2 non sono univocamente determinati.

Definizione 7. Diciamo che una funzione $f(z)$ definita su $\mathbb{C}$ ha Ω come **gruppo dei periodi** se

$$f(z+\omega) = f(z) \quad \forall \omega \in \Omega,\ \forall z \in \mathbb{C}$$

Osservazione 3. E' facile verificare che:

$$f \text{ ha } \Omega \text{ come gruppo dei periodi } \iff \begin{cases} f(z+\omega_1) = f(z) & \forall z \in \mathbb{C} \\ f(z+\omega_2) = f(z) & \forall z \in \mathbb{C} \end{cases}$$

Definizione 8. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$. Chiamiamo **parallelogramma fondamentale** con primo vertice z_0 il parallelogramma chiuso

$$\mathcal{P}_{z_0} = \{z_0 + t_1\omega_1 + t_2\omega_2, 0 \le t_1 \le 1, 0 \le t_2 \le 1\}$$

Proposizione 3. *Sia $f(z)$ meromorfa su $\mathbb{C}$ avente Ω come gruppo dei periodi. Sia z_0 tale che $f(z)$ non ha poli sul bordo γ di $\mathcal{P}_{z_0}$. Allora*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Dimostrazione. Siano γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 i lati orientati di γ come in figura 1.1.

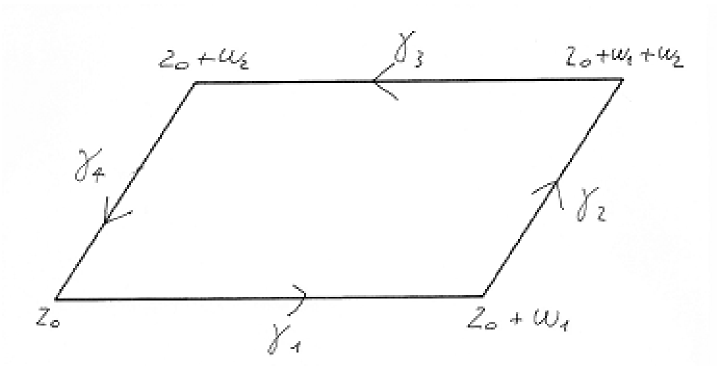

Figura 1.1

Allora

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_3} f(z)dz + \int_{\gamma_4} f(z)dz \\ &= \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_1} f(z+\omega_2)dz - \int_{\gamma_2} f(z-\omega_1)dz \\ &= \int_{\gamma_1} [f(z) - f(z+\omega_2)]dz + \int_{\gamma_2} [f(z) - f(z-\omega_1)]dz\end{aligned}$$

E per la periodicità di f gli integrandi sono nulli, da cui la tesi. $\square$

Lemma 1. *Se f è meromorfa su $\mathbb{C}$ e ha Ω come gruppo dei periodi, allora f' è meromorfa su $\mathbb{C}$ e ha Ω come gruppo dei periodi.*

Dimostrazione. Per ogni z che non sia un polo per f, si ha

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+\omega+h) - f(z+\omega)}{h} = f'(z+\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

□

Definizione 9. Una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ e doppiamente periodica, cioè avente un reticolo Ω come gruppo dei periodi, è detta **funzione ellittica**.

Proposizione 4. *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa non costante su $\mathbb{C}$ avente Ω come gruppo dei periodi. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che sul bordo γ di $\mathcal{P}_{z_0}$ non ci siano né poli né zeri di $f(z)$. Allora il numero di zeri (contati con molteplicità) contenuti nel parallelogramma fondamentale $\mathcal{P}_{z_0}$ è uguale al numero di poli (contati con molteplicità) contenuti nello stesso parallelogramma.*

Dimostrazione. Se $\tilde{z}$ è un polo o uno zero di $f(z)$ interno a $\mathcal{P}_{z_0}$, allora $I(\gamma, \tilde{z}) = 1$. Quindi per il Teorema dell'indicatore logaritmico è sufficiente mostrare che

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

Per il lemma f'/f è meromorfa su $\mathbb{C}$ e ha Ω come gruppo dei periodi, quindi per la proposizione 3

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$$

da cui la tesi. □

Corollario 1. *Una funzione $f(z)$ olomorfa su $\mathbb{C}$ avente Ω come gruppo dei periodi è costante.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $f(z)$ non sia costante. Allora per un qualunque $a \in \mathbb{C}$ la funzione $f(z) - a$ è olomorfa e non costante. Applicando la proposizione precedente alla funzione $f(z) - a$ abbiamo che il numero di zeri in un parallelogramma fondamentale $\mathcal{P}_{z_0}$ è 0 perché $f(z) - a$, essendo olomorfa, non ha poli. Ma ciò è vero per qualsiasi $a \in \mathbb{C}$, quindi $f(z)$ non assume nessun valore in $\mathcal{P}_{z_0}$, che è assurdo. □

Lemma 2. *Sia $f(z)$ olomorfa in un aperto $D \subset \mathbb{C}$ e siano $z_0, z_1 \in D$, $z_0 \neq z_1$ tali che $f(z_0) = f(z_1)$. Sia γ il segmento orientato da z_0 a z_1 e supponiamo che f non abbia zeri su γ. Allora*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione. La funzione f è olomorfa, in particolare è continua. Allora $f(\gamma)$ è un cammino di $\mathbb{C}$ ed è chiuso poiché $f(z_0) = f(z_1)$. Consideriamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

Ponendo $w := f(z)$, otteniamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma)} \frac{1}{w}dw$$

che appartiene a $\mathbb{Z}$ poichè $f(\gamma)$ è un cammino chiuso e $0 \notin (f(\gamma))^*$ (prop.-def. 1). $\square$

Teorema 3 (Teorema di Abel). *Sia $f(z)$ una funzione meromorfa non costante su $\mathbb{C}$ avente Ω come gruppo dei periodi. Allora per ogni $a \in \mathbb{C}$*

$$\sum_i \alpha_i \equiv \sum_i \beta_i \pmod{\Omega}$$

dove gli α_i sono le radici dell'equazione $f(z) - a$ (ognuna ripetuta un numero di volte pari alla sua molteplicità) e i β_i sono i poli di $f(z)$ (ognuno ripetuto un numero di volte pari al suo ordine) contenuti in un parallelogramma fondamentale che non ha zeri di $f(z) - a$ e poli di f sul suo bordo.
In particolare la somma $\sum_i \alpha_i \pmod{\Omega}$ non dipende da a.

Dimostrazione. Sia $a \in \mathbb{C}$. Sia z_0 tale che non ci siano né poli di f né zeri di $f(z) - a$ sul bordo γ di $\mathcal{P}_{z_0}$. Consideriamo l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz \tag{1.4}$$

La funzione $zf'(z)/(f(z) - a)$ non è periodica, quindi non possiamo usare la Proposizione 3 per dire che l'integrale è uguale a zero.
Siano γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 i lati orientati di γ come in figura 1.1. L'integrale (1.4) è uguale a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz$$

Inoltre, utilizzando la periodicità di f e di f', abbiamo che

$$\int_{\gamma_3} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz = -\int_{\gamma_1} \frac{(z+\omega_2)f'(z+\omega_2)}{f(z+\omega_2)-a}dz = -\int_{\gamma_1} \frac{(z+\omega_2)f'(z)}{f(z)-a}dz$$

$$\int_{\gamma_4} \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz = -\int_{\gamma_2} \frac{(z-\omega_1)f'(z-\omega_1)}{f(z-\omega_1)-a}dz = -\int_{\gamma_2} \frac{(z-\omega_1)f'(z)}{f(z)-a}dz$$

Quindi
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz = -\frac{\omega_2}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz + \frac{\omega_1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$
Inoltre
$$f(z_0)-a = f(z_0+\omega_1)-a,\ f(z_0+\omega_1)-a = f(z_0+\omega_1+\omega_2)-a$$
e $f(z)-a$ è olomorfa in un aperto che contiene γ_1 e in un aperto che contiene γ_2, poiché per ipotesi $f-a$ è meromorfa e non ha poli sui lati γ_1 e γ_2; inoltre sempre per ipotesi $f(z)-a$ non ha zeri né su γ_1 né su γ_2.
Quindi, per il Lemma 2, gli integrali
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz,\ \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz\ \in \mathbb{Z}$$
Perciò
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{zf'(z)}{f(z)-a}dz \in \Omega \tag{1.5}$$
D'altra parte, l'integrale (1.4) può essere calcolato utilizzando il Teorema dei residui. Le uniche singolarità della funzione $\frac{zf'(z)}{f(z)-a}$ contenute in $\mathcal{P}_{z_0}$ sono i poli di $f(z)$ e gli zeri di $f(z)-a$ contenuti in esso.
Se α_i è una radice di molteplicità k dell'equazione $f(z)-a$ (cioè è uno zero di ordine k della funzione $f(z)-a$) contenuta in $\mathcal{P}_{z_0}$ allora
$$f(z)-a=(z-\alpha_i)^k g(z)$$
con $g(\alpha_i)\neq 0$, g olomorfa intorno ad α_i. Quindi
$$\begin{aligned}\frac{zf'(z)}{f(z)-a} &= \frac{zk(z-\alpha_i)^{k-1}g(z)+z(z-\alpha_i)^k g'(z)}{(z-\alpha_i)^k g(z)} = \frac{kz}{z-\alpha_i}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\\ &= \frac{k(z-\alpha_i)+k\alpha_i}{z-\alpha_i}+\frac{zg'(z)}{g(z)} = k+\frac{k\alpha_i}{z-\alpha_i}+\frac{zg'(z)}{g(z)}\end{aligned}$$
perciò
$$Res\left(\frac{zf'}{f-a},\alpha_i\right)=k\alpha_i$$
Se β_i è un polo di ordine k di $f(z)$ contenuto in $\mathcal{P}_{z_0}$, facendo lo stesso ragionamento con $-k$ anzichè k otteniamo
$$Res\left(\frac{zf'}{f-a},\beta_i\right)=-k\beta_i$$
Dal calcolo dei residui appena effettuato e da (1.5) otteniamo la tesi. □

Capitolo 2

Topologia dello spazio C(D)

2.1 Convergenza uniforme sui compatti

Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto. Denotiamo con $C(D)$ lo spazio vettoriale delle funzioni continue definite su D a valori complessi, e sia $H(D) \subset C(D)$ il sottospazio delle funzioni olomorfe.

Definizione 10. Diciamo che una successione (f_n) di funzioni $f_n \in C(D)$ **converge uniformemente sui compatti** di D se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset D$, la successione delle restrizioni $(f_n|_K)$ converge uniformemente.

Poiché il limite di una successione di funzioni continue convergente uniformemente è una funzione continua, la funzione limite f di una successione uniformemente convergente sui compatti di D è tale che la sua restrizione $f|_K$ a qualsiasi compatto $K \subset D$ è continua. Dato che ogni punto di D ha un intorno compatto contenuto in D, segue che f è continua su D, cioè $f \in C(D)$.

Definizione 11. Diciamo che una serie $\sum f_n$ di funzioni $f_n \in C(D)$ **converge normalmente sui compatti** di D se, per ogni sottoinsieme compatto $K \subset D$, la serie $\sum f_n|_K$ converge normalmente.

E' evidente che se una serie converge normalmente sui compatti di D, allora la successione delle somme parziali è uniformemente convergente sui compatti di D.

Proposizione 5. *Condizione necessaria e sufficiente affinché una successione (f_n) di funzioni $f_n \in C(D)$ sia uniformemente convergente sui compatti di D è che per ogni disco compatto $\Sigma \subset D$ la successione delle restrizioni $(f_n|_\Sigma)$ sia uniformemente convergente. Vale inoltre un'affermazione analoga per le serie normalmente convergenti.*

Dimostrazione. La necessità è ovvia. La sufficienza segue immediatamente dal fatto che ogni sottoinsieme compatto $K \subset D$ può essere ricoperto dagli interni di un numero finito di dischi compatti contenuti in D. $\square$

2.2 Teoremi fondamentali sulla convergenza di funzioni olomorfe

Teorema 4. *Se una successione (f_n) di funzioni $f_n \in H(D)$ è uniformemente convergente sui compatti di D, allora la funzione limite f è olomorfa su D.*

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che f è continua su D. Per dimostrare che f è olomorfa è sufficiente mostrare, per il Teorema di Morera ([1], II.2.7) che la forma differenziale $f(z)dz$ è chiusa. Per dire che è chiusa è sufficiente mostrare che $\forall R$ rettangolo contenuto in D,$\gamma = \partial R$ si ha $\int_\gamma f(z)dz = 0$ (Proposizione 4.1 di II.1.4 di [1]). Essendo f_n olomorfa, segue dal Teorema integrale di Cauchy ([1], II.2.4) che la forma differenziale $f_n(z)dz$ è chiusa. Quindi, essendo γ omotopo a un punto, abbiamo $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$. Dall'uniforme convergenza sui compatti e dal fatto che l'immagine di γ è un compatto contenuto in D, segue che:

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{n\to+\infty} \int_\gamma f_n(z)dz = 0$$

□

Corollario 2. *La somma di una serie di funzioni $f_n \in H(D)$ normalmente convergente sui compatti di D è olomorfa.*

Teorema 5. *Se una successione (f_n) di funzioni $f_n \in H(D)$ converge ad una funzione $f \in H(D)$ uniformemente sui compatti di D, allora la successione delle derivate (f_n') converge alla derivata f' uniformemente sui compatti di D.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 5 è sufficiente mostrare che la successione delle derivate f_n' converge alla derivata f' uniformemente su ogni disco compatto contenuto in D. Sia $z_0 \in D$ e sia $r > 0$ tale che $\overline{B(z_0, r)} \subset D$. Sia $R > r$ tale che $\overline{B(z_0, R)} \subset D$. Poniamo $\gamma_r = \partial\overline{B(z_0, r)}$, $\gamma_R = \partial\overline{B(z_0, R)}$.
Dalla formula integrale di Cauchy ([1], II.2.5) abbiamo $\forall z \in B(z_0, R)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(t)}{t - z} dt$$

e

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(t)}{t - z} dt$$

Derivando rispetto a z sotto il segno di integrale otteniamo:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(t)}{(t - z)^2} dt$$

e

$$f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(t)}{(t-z)^2} dt$$

Inoltre γ_R è compatto e f_n converge a f uniformemente sui compatti, quindi:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(t)}{(t-z)^2} dt = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f_n(t)}{(t-z)^2} dt = \lim_{n \to +\infty} f'_n(z)$$

Abbiamo quindi dimostrato che $\forall z \in B(z_0, R)$, $f'_n(z) \longrightarrow f'(z)$, cioè abbiamo convergenza puntuale su $B(z_0, R)$.
Ora mostriamo che la convergenza è uniforme su $\overline{B(z_0, r)}$.
$\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$

$$|f'(z) - f'_n(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_R} \left| \frac{f(t) - f_n(t)}{(t-z)^2} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi(R-r)^2} \int_{\gamma_R} |f(t) - f_n(t)| dt$$

(l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che per $t \in \gamma_R$, $z \in \overline{B(z_0, r)}$ $\quad |t-z| \geq R - r$, vedere figura 2.1)

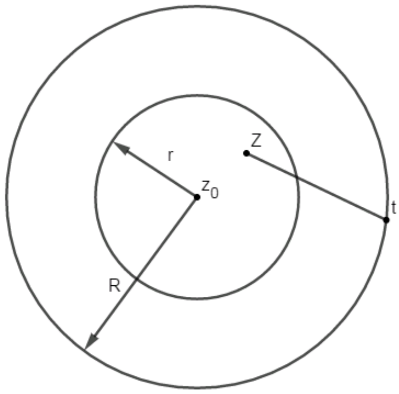

Figura 2.1

Inoltre

$$\int_{\gamma_R} |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_{\gamma_R} ||f - f_n||_{\overline{B(z_0,R)}} dt = 2\pi R ||f - f_n||_{\overline{B(z_0,R)}}$$

Quindi $\forall z \in \overline{B(z_0, r)}$

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \frac{R}{(R-r)^2} ||f - f_n||_{\overline{B(z_0,R)}}$$

Allora

$$||f' - f'_n||_{\overline{B(z_0,r)}} \leq \frac{R}{(R-r)^2}||f - f_n||_{\overline{B(z_0,R)}}$$

Ma $||f - f_n||_{\overline{B(z_0,R)}} \longrightarrow 0$ poichè f_n converge a f uniformemente sui compatti.
Perciò $||f' - f'_n||_{\overline{B(z_0,r)}} \longrightarrow 0$, cioè f'_n converge a f' uniformemente su $\overline{B(z_0,r)}$. $\square$

Proposizione 6. *Sia $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso, e sia (f_n) una successione di funzioni $f_n \in H(D)$ uniformemente convergente sui compatti di D. Se $\forall n \quad f_n(z) \neq 0 \ \forall z \in D$, allora la funzione limite f soddisfa $f(z) \neq 0 \ \forall z \in D$,oppure è identicamente nulla.*

Dimostrazione. Per il Teorema 4 f è olomorfa. Supponiamo per assurdo che $\exists z_0$ t.c. $f(z_0) = 0$. Allora, se f non è identicamente nulla, z_0 è uno zero isolato di f perché D è connesso. Sia $B(z_0,r)$ tale che $\overline{B(z_0,r)} \subset D$ e f abbia come unico zero in $\overline{B(z_0,r)}$ il punto z_0, e sia $\gamma = \partial B(z_0,r)$. Quindi per il Teorema dell'indicatore logaritmico

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = o(z_0,f) > 0$$

Per il Teorema 5 abbiamo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}dz$$

Ma f_n è olomorfa e non si annulla, quindi per il Teorema dell'indicatore logaritmico:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'_n(z)}{f_n(z)}dz = 0$$

Abbiamo quindi un assurdo e la proposizione è dimostrata. $\square$

Proposizione 7. *Siano $D \subset \mathbb{C}$ un aperto connesso e una successione (f_n) di funzioni $f_n \in H(D)$ uniformemente convergente sui compatti di D. Se $\forall n$ f_n è iniettiva, allora la funzione limite f è iniettiva oppure costante.*

Dimostrazione. Supponiamo f non costante. Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva, cioè che $\exists z_1, z_2 \in D$, $z_1 \neq z_2$ t.c. $f(z_1) = f(z_2) = a \in \mathbb{C}$.
Siano $g := f - a$ e $g_n := f_n - a$ per ogni n. Ovviamente g_n è olomorfa e g_n tende uniformemente sui compatti a g, quindi g è olomorfa. Allora possiamo scegliere, essendo g olomorfa e D connesso, $B(z_1,r_1) \subset D$ e $B(z_2,r_2) \subset D$ tali che g abbia come unico zero in $B(z_1,r_1)$ il punto z_1 e in $B(z_2,r_2)$ il punto z_2.
Allora

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_1 \ \ \exists z_n \in B(z_1,r_1), \ g_n(z_n) = 0$$

Perché se ciò non fosse vero esisterebbero infiniti indici $(k_n)_{n\geq 0}$ tali che g_{k_n} non ha zeri in $B(z_1, r_1)$ per ogni n. Ma per il Teorema dell'indicatore logaritmico e per l'uniforme convergenza sui compatti ($\gamma_1 = \partial B(z_1, r_1)$) abbiamo un assurdo:

$$0 = \int_{\gamma_1} \frac{g'_{k_n}(z)}{g_{k_n}(z)} dz \xrightarrow{n \longrightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = o(z_1, g) > 0$$

Ripetendo lo stesso ragionamento in $B(z_2, r_2)$ abbiamo

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} : \ \forall n > n_2 \ \ \exists z_n \in B(z_2, r_2), \ g_n(z_n) = 0$$

Ma allora per $n > \max\{n_1, n_2\}$ g_n ha uno zero sia in $B(z_1, r_1)$ che in $B(z_2, r_2)$. Cioè f_n assume il valore a in $B(z_1, r_1)$ e in $B(z_2, r_2)$ per n abbastanza grande, e ciò contraddice l'iniettività di f_n. $\square$

2.3 Topologia dello spazio C(D)

Abbiamo già definito cosa intendiamo per successione (f_n) di funzioni $f_n \in C(D)$ **uniformemente convergente sui compatti** di D. Ora definiremo una **topologia** nello spazio vettoriale $C(D)$ in una maniera più precisa. Il sottospazio vettoriale $H(D)$ sarà dotato della topologia indotta.
Per ogni coppia (K, ε) costituita da un compatto $K \subset D$ e un numero reale $\varepsilon > 0$, consideriamo il sottoinsieme $V(K, \varepsilon)$ di $C(D)$ definito da

$$V(K, \varepsilon) := \{f \in C(D), \ |f(z)| \leq \varepsilon \ \forall z \in K\}$$

Quindi una successione (f_n) di funzioni $f_n \in C(D)$ converge a f uniformemente sui compatti se e solo se

$$\forall (K, \varepsilon) \ \ \exists n_{\varepsilon,K} \in \mathbb{N} \ \text{ tale che } \ f - f_n \in V(K, \varepsilon) \ \ \forall n > n_{\varepsilon,K}$$

Ciò significa che la successione (f_n) di funzioni $f_n \in C(D)$ ha f come limite nella topologia (se esiste) avente gli insiemi $V(K, \varepsilon)$ come sistema fondamentale di intorni di 0.
Per dimostrare che tale topologia esiste ed è unica, il nostro intento è quello di trovare una distanza, invariante per traslazioni, che induce una topologia tale che i $V(K, \varepsilon)$ formino un sistema fondamentale di intorni di 0.
Abbiamo bisogno della seguente nozione:

Definizione 12. Una **successione esaustiva di sottoinsiemi compatti** di D è una successione crescente di compatti $K_i \subset D$ ($K_i \subset K_{i+1}$ per ogni i) tale che ogni sottoinsieme compatto K di D è contenuto in uno dei K_i.

Lemma 3. *Esiste una successione esaustiva di sottoinsiemi compatti di D.*

Dim Lemma. Consideriamo i dischi compatti contenuti in D aventi centro di coordinate razionali e raggio razionale. Essi formano una famiglia numerabile di sottoinsiemi D_1, D_2, ..., D_n, ...
Consideriamo, per $i \geq 1$, i sottoinsiemi

$$K_i := \bigcup_{n \leq i} D_n$$

Abbiamo che:

- K_i è compatto per ogni i perché unione finita di compatti;
- $K_i \subset K_{i+1}$ per ogni i;
- gli interni dei dischi D_n formano un ricoprimento aperto di D, quindi ogni sottoinsieme compatto K di D è contenuto in un K_i.

Cioè i sottoinsiemi K_i formano una successione esaustiva di sottoinsiemi compatti di D. □

Supponiamo d'ora in poi di aver scelto una successione esaustiva di sottoinsiemi compatti K_i e, per ogni $f \in C(D)$, poniamo

$$M_i(f) := \sup_{z \in K_i} |f(z)|, \tag{2.1}$$

$$\tilde{d}(f) := \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \inf(1, M_i(f)) \tag{2.2}$$

Notiamo che $\tilde{d}(f)$ è finita poiché la serie è maggiorata dalla serie geometrica $\sum_{i \geq 1} 2^{-i}$.

Proposizione 8. *$\tilde{d}$ soddisfa le seguenti proprietà:*

(i) $\tilde{d}(f) \geq 0 \quad \forall f \in C(D)$

(ii) $\tilde{d}(f) = 0 \iff f = 0$

(iii) $\tilde{d}(f+g) \leq \tilde{d}(f) + \tilde{d}(g) \quad \forall f, g \in C(D)$

Dimostrazione. (i) Ovvia perché è la somma di una serie a termini non negativi.
(ii) E' ovvio che se $f = 0$ allora $\tilde{d}(f) = 0$; viceversa, $\tilde{d}(f) = 0$ implica, da (2.2), che $M_i(f) = 0$ $\forall i$, quindi $f|_{K_i} = 0$ $\forall K_i$, perciò $f = 0$.
(iii) E' ovvio che

$$M_i(f+g) \leq M_i(f) + M_i(g)$$

da cui deduciamo facilmente che

$$\inf(1, M_i(f+g)) \le \inf(1, M_i(f)) + \inf(1, M_i(g))$$

e sommando si ottiene (iii). □

Possiamo quindi definire una **distanza** d in $C(D)$: siano $f, g \in C(D)$

$$d(f,g) := \tilde{d}(f-g)$$

Per la Proposizione 8 essa soddisfa tutte le proprietà di distanza ed è inoltre una distanza invariante per traslazioni. Tale distanza induce nello spazio $C(D)$ una topologia metrizzabile, e quindi di Hausdorff, invariante per traslazioni.
Per dimostrare che in tale topologia i $V(K,\varepsilon)$ formano un sistema fondamentale di intorni di 0, dobbiamo prima provare che:

Lemma 4. *$\tilde{d}$ soddisfa le seguenti disuguaglianze:*

(i) $2^{-i}\inf(1, M_i(f)) \le \tilde{d}(f) \quad \forall f \in C(D),\ \forall i \ge 1$;

(ii) $\tilde{d}(f) \le M_i(f) + 2^{-i} \quad \forall f \in C(D),\ \forall i \ge 1$.

Dimostrazione. (i) Deriva direttamente dalla definizione (2.2).
(ii) Se i è un intero ≥ 1, allora

$$\text{per } 1 \le j \le i, K_j \subset K_i \Rightarrow M_j(f) \le M_i(f)$$

e quindi da (2.2) segue che:

$$\tilde{d}(f) = \sum_{1\le j\le i} 2^{-j}\inf(1, M_j(f)) + \sum_{j>i} 2^{-j}\inf(1, M_j(f)) \le \sum_{1\le j\le i} 2^{-j} M_j(f) + \sum_{j>i} 2^{-j}$$

$$\le \sum_{1\le j\le i} 2^{-j} M_i(f) \ + \ \sum_{j>i} 2^{-j} \ \le \ M_i(f)\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \ + \ \sum_{j>i} 2^{-j} \ = \ M_i(f) \ + \ 2^{-i}$$

dove l'ultima uguaglianza deriva da

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 \text{ e} \sum_{j>i} 2^{-j} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j} - \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^j = 2 - \frac{(1/2)^{i+1} - 1}{1/2 - 1} = 2^{-i}$$

□

Proposizione 9. *La famiglia $V(K,\varepsilon)$ forma un sistema fondamentale di intorni di 0 nella topologia indotta dalla metrica appena introdotta.*

Dimostrazione. • Ogni insieme $V(K,\varepsilon)$ è un intorno di 0: dati K e $0<\varepsilon<1$, dobbiamo trovare un aperto A di $C(D)$ tale che $0\in A$ e $A\subset V(K,\epsilon)$.
Siano i tale che $K\subset K_i$ (i esiste perché i K_i formano una successione esaustiva di compatti) e $A:=\{f\in C(D), d(f,0)<2^{-i}\varepsilon\}$.
Sia $f\in A$, per la disuguaglianza (i) del Lemma 4 abbiamo:

$$2^{-i}\inf(1,M_i(f))\leq\tilde{d}(f)=d(f,0)<2^{-i}\varepsilon$$

Quindi

$$\inf(1,M_i(f))<\varepsilon<1\Rightarrow M_i(f)=\sup_{z\in K_i}|f(z)|<\varepsilon$$

Quindi, dato che $K\subset K_i$,

$$\forall z\in K\quad |f(z)|\leq\sup_{z\in K_i}|f(z)|<\varepsilon\Longrightarrow f\in V(K,\varepsilon)$$

Cioè $A\subset V(K,\varepsilon)$.

• Ogni intorno di 0 della forma $I=\{f\in C(D), d(f,0)<\varepsilon\}$ contiene un insieme della forma $V(K,\varepsilon')$. Dato $\varepsilon>0$, scegliamo un intero i t.c. $2^{-i}<\frac{\varepsilon}{2}$.
Sia $f\in V(K_i,\frac{\varepsilon}{2})$, per la disuguaglianza (ii) del Lemma 4 abbiamo:

$$d(f,0)=\tilde{d}(f)\leq M_i(f)+2^{-i}<M_i(f)+\frac{\varepsilon}{2}$$

Inoltre

$$f\in V(K_i,\frac{\varepsilon}{2})\iff\forall z\in K_i\quad |f(z)|\leq\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow M_i(f)=\sup_{z\in K_i}|f(z)|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

Quindi $d(f,0)<\varepsilon$, cioè $V(K_i,\frac{\varepsilon}{2})\subset I$.

□

Riassumendo:

Proposizione 10. *C(D) possiede una topologia (invariante per traslazioni) nella quale gli insiemi V(K,ε) formano un sistema fondamentale di intorni di 0. Tale topologia è unica e può essere definita mediante una distanza (invariante per traslazioni).*

Dimostrazione. L'unicità deriva dal fatto che conosciamo un sistema fondamentale di intorni di 0 e quindi, per traslazione, di qualsiasi punto $f\in C(D)$. Il resto è stato tutto dimostrato sopra. □

Possiamo quindi applicare le proprietà note degli spazi metrici o, più precisamente degli spazi topologici metrizzabili, a *C(D)* e al suo sottospazio *H(D)*.
Per esempio, una condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme A di uno spazio metrizzabile E sia chiuso è che ogni punto di E che è limite di una successione di punti di A stia in A. Il Teorema 4 può essere quindi riformulato nel modo seguente:

Teorema 6. *Il sottospazio $H(D)$ è chiuso in $C(D)$.*

Analogamente, una condizione necessaria e sufficiente affinché un'applicazione f da uno spazio metrizzabile E a uno spazio metrizzabile E' sia continua in un punto $x \in E$ è che, per ogni successione di punti $x_n \in E$ avente x come limite, la successione $f(x_n)$ ha $f(x)$ come limite. Il Teorema 5 può essere quindi riformulato nel modo seguente:

Teorema 7. *L'applicazione da $H(D)$ a $H(D)$ che associa ad ogni funzione f la sua derivata f' è una funzione continua.*

Capitolo 3

Serie di Funzioni Meromorfe

3.1 Convergenza di una serie di funzioni meromorfe

Definizione 13. Siano $D \subset \mathbb{C}$ un aperto e (f_n) una successione di funzioni meromorfe su D. Diciamo che la serie $\sum f_n$ **converge uniformemente (risp. normalmente)** su $A \subset D$ se è possibile rimuovere un numero finito di termini dalla serie in modo che le rimanenti funzioni non abbiano poli in A e costituiscano una serie di funzioni olomorfe uniformemente (risp. normalmente) convergente su A.
Diciamo che la serie di funzioni meromorfe $\sum f_n$ **converge uniformemente (risp. normalmente) sui compatti** di D se per ogni compatto $K \subset D$ la serie converge uniformemente (risp. normalmente) su K.

Osservazione 4. É ovvio che una serie di funzioni meromorfe normalmente convergente su A è anche uniformemente convergente su A.

D'ora in poi consideriamo serie $\sum_n f_n$ di funzioni meromorfe su D che convergono uniformemente (risp. normalmente) sui compatti di D.

Definizione 14. Sia $U \subset D$ un **aperto relativamente compatto** in D (ossia tale che la sua chiusura è un compatto contenuto in D).
La **somma della serie** $\sum_n f_n$ in U è definita come la funzione meromorfa

$$\sum_{n \leq n_0} f_n \; + \; \sum_{n > n_0} f_n \tag{3.1}$$

dove n_0 è scelto in modo tale che le funzioni f_n, $n > n_0$, non abbiano poli in $\overline{U}$, cioè che la serie $\sum_{n>n_0} f_n$ sia uniformemente convergente su $\overline{U}$.

Osserviamo che n_0 esiste perché la serie $\sum_n f_n$ di funzioni meromorfe su D converge uniformemente sui compatti di D, in particolare sul compatto $\overline{U}$.
Facciamo vedere che la definizione è ben posta, cioè che la somma così definita è una funzione meromorfa che non dipende dalla scelta dell'indice n_0.
Il primo termine della (3.1) è una funzione meromorfa in U, essendo la somma di un numero finito di funzioni meromorfe; il secondo termine è una funzione olomorfa in U perché è la somma di una serie di funzioni olomorfe in U uniformemente convergente sui compatti di U. Quindi la somma di una serie di funzioni meromorfe è una funzione meromorfa. Sia n_1 un altro indice tale che $n_1 > n_0$ e tale che la serie $\sum_{n>n_1} f_n$ sia uniformemente convergente su $\overline{U}$. Allora

$$\sum_{n\le n_0} f_n + \sum_{n>n_0} f_n = \sum_{n\le n_0} f_n + \left(\sum_{n_0<n\le n_1} f_n + \sum_{n>n_1} f_n\right) = \left(\sum_{n\le n_0} f_n + \sum_{n_0<n\le n_1} f_n\right) + \sum_{n>n_1} f_n$$

Quindi la definizione è indipendente dalla scelta di n_0.

Ora vediamo un teorema fondamentale per lo sviluppo della teoria della convergenza di serie di funzioni meromorfe.
Abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 5. *Sia $g(z)$ olomorfa in $|z| < r_0 + \varepsilon$ e $|g(z)| \le M$ per $|z| \le r_0$. Allora*

$$|g'(z)| \le M\frac{r_0}{(r_0 - r)^2} \quad \textit{per } \ |z| \le r < r_0$$

Dimostrazione. Sia

$$g(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n \quad \text{in } |z| \le r_0$$

Per le disuguaglianze di Cauchy

$$|a_n| \le \frac{M}{r_0^n} \quad \text{per ogni } n \ge 0$$

Derivando termine a termine abbiamo

$$g'(z) = \sum_{n\ge 0} n a_n z^{n-1}$$

Per $|z| \le r < r_0$ la serie a destra converge normalmente, quindi possiamo dire che il modulo della somma è $\le$ della somma dei moduli, cioè:

$$|g'(z)| \le \sum_{n\ge 0} n|a_n||z|^{n-1} \le \sum_{n\ge 0} n\frac{M}{r_0^n} r^{n-1} = \frac{M}{r_0}\sum_{n\ge 0} n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} \quad \text{con } \left|\frac{r}{r_0}\right| < 1$$

Osserviamo che per $|t| < 1$

$$\sum_{n\geq 0} t^n = \frac{1}{1-t} \quad \text{e} \quad \left(\sum_{n\geq 0} t^n\right)' = \sum_{n\geq 0} nt^{n-1}$$

quindi

$$\sum_{n\geq 0} nt^{n-1} = \left(\frac{1}{1-t}\right)' = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Quindi se $t = r/r_0$ abbiamo

$$\sum_{n\geq 0} n\left(\frac{r}{r_0}\right)^{n-1} = \frac{1}{(1-\frac{r}{r_0})^2} = \frac{r_0^2}{(r_0-r)^2}$$

Quindi

$$|g'(z)| \leq \frac{M}{r_0}\frac{r_0^2}{(r_0-r)^2} = M\frac{r_0}{(r_0-r)^2}$$

$\square$

Teorema 8. *Sia $\sum_n f_n$ una serie di funzioni meromorfe su D.*
Se la serie è uniformemente (risp. normalmente) convergente sui compatti di D, allora la somma f della serie è una funzione meromorfa su D.
Inoltre la serie delle derivate $\sum_n f_n'$ converge uniformemente (risp. normalmente) sui compatti di D e la sua somma è la derivata f' della somma f della serie data.

Dimostrazione. La somma della serie $\sum_n f_n$ è ben definita e meromorfa su ogni aperto relativamente compatto $U \subset D$, quindi è ben definita e meromorfa su tutto D.
Sia $U \subset D$ un aperto relativamente compatto, e sia n_0 scelto come in (3.1). Allora in U si ha:

$$f' = \sum_{n\leq n_0} f_n' + \left(\sum_{n>n_0} f_n\right)'$$

Inoltre la serie $\sum_{n>n_0} f_n$ di funzioni olomorfe può essere derivata termine a termine perché converge uniformemente sui compatti di U. Perciò, per il Teorema 5, la serie delle derivate $\sum_{n>n_0} f_n'$ converge uniformemente sui compatti di U alla funzione $\left(\sum_{n>n_0} f_n\right)'$. Questo prova che la serie di funzioni meromorfe $\sum_n f_n'$ converge uniformemente sui compatti di U a f'. Poiché ciò è vero per ogni aperto relativamente compatto U, deduciamo che $\sum_n f_n'$ converge a f' uniformemente sui compatti di D.
Se poi la serie $\sum_n f_n$ converge normalmente sui compatti di D, allora la serie $\sum_n f_n'$ converge normalmente su ogni compatto di D, infatti: basta vederlo per i dischi chiusi $\subset D$; sia $0 \in D$ e siano r, r_0 fissati tali che $0 < r < r_0$ e il disco chiuso $|z| \leq r_0$

sia contenuto in D (per i dischi centrati in punti $\neq 0$ il discorso è analogo). Poniamo $K := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r\}$, $K_0 := \{z \in \mathbb{C}, |z| \leq r_0\}$. La serie $\sum_{n>n_0} ||f_n||_{K_0}$ converge, e per il Lemma 5 risulta:

$$||f_n'||_K \leq ||f_n||_{K_0} \left(\frac{r_0}{(r_0 - r)^2} \right)$$

da cui la serie $\sum_{n>n_0} ||f_n'||_K$ è maggiorata dalla serie $\frac{r_0}{(r_0-r)^2} \sum_{n>n_0} ||f_n||_{K_0}$ che converge essendo K_0 un compatto contenuto in D. □

Osservazione 1. Dalla definizione di somma di una serie di funzioni meromorfe convergente uniformemente (normalmente) sui compatti di D segue che $P(f)$, l'insieme dei poli di f, è contenuto nell'unione degli insiemi $P(f_n)$, dove $P(f_n)$ denota l'insieme dei poli di f_n. Inoltre la relazione (3.1) mostra che, se gli insiemi $P(f_n)$ sono a due a due disgiunti, allora $P(f)$ è uguale all'unione dei $P(f_n)$; più precisamente, se z_0 è un polo di ordine k di f_n per un certo n, allora è un polo di ordine k per f.

3.2 Primo esempio di una serie di funzioni meromorfe

Lemma 6. *La serie di funzioni meromorfe su* $\mathbb{C}$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \tag{3.2}$$

converge normalmente sui compatti di $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Poiché ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$ è contenuto in una striscia della forma

$$S = S_{x_0,x_1} = \{z = x + iy : x_0 \leq x \leq x_1\}$$

è sufficiente dimostrare che la serie (3.2) converge normalmente su ogni insieme S. Ogni striscia S siffatta contiene solo un numero finito di interi n, e quindi solo un numero finito di termini della serie possiede poli in S.
Inoltre $\forall z \in S$, $\forall n < x_0$ si ha $|z - n| \geq |x - n| \geq |x_0 - n|$ (v. figura 3.1), quindi

$$\left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \frac{1}{(x_0 - n)^2}$$

La serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x_0-n)^2}$ converge poiché converge la serie armonica generalizzata $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$.
Quindi la serie

$$\sum_{n<x_0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge normalmente in S.

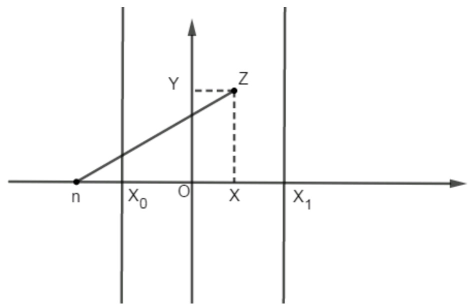

Figura 3.1

D'altra parte $\forall z \in S$, $\forall n > x_1$ si ha $|z-n| \geq |x-n| \geq |x_1 - n|$, quindi

$$\left| \frac{1}{(z-n)^2} \right| \leq \frac{1}{(x_1-n)^2}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n > x_1} \frac{1}{(z-n)^2}$$

converge normalmente in S.
Quindi, dopo aver rimosso un numero finito di termini dalla serie (3.2), otteniamo una serie di funzioni olomorfe in S e normalmente convergente in S. Perciò (3.2) è normalmente convergente sui compatti di $\mathbb{C}$. $\square$

Proposizione 11. *Sia $f(z)$ la somma della serie* (3.2)*:*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} \quad \textit{per } z \in \mathbb{C}$$

La funzione $f(z)$, meromorfa su $\mathbb{C}$, ha come poli gli interi $n \in \mathbb{Z}$ che risultano essere poli doppi di residuo 0 e parte principale

$$\frac{1}{(z-n)^2}$$

Inoltre f ammette 1 come periodo, cioè

$$f(z+1) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Dimostrazione. Per il lemma e per il Teorema 8 $f(z)$ è meromorfa su tutto $\mathbb{C}$.
Sia

$$f_n(z) = \frac{1}{(z-n)^2} \quad \text{per } n \in \mathbb{Z}$$

Allora l'insieme dei poli di f_n è $P(f_n) = \{n\}$. Osservando che gli insiemi $P(f_n)$ sono a due a due disgiunti, per l'Osservazione 1 abbiamo che:

$$P(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} P(f_n) = \mathbb{Z}$$

Inoltre intorno ad un polo $z = n$

$$f(z) = \frac{1}{(z-n)^2} + g(z) \quad \text{con } g \text{ olomorfa}$$

Cioè in ogni polo $z = n$ il residuo è 0 e la parte principale è $\frac{1}{(z-n)^2}$.
La relazione

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z+1-n)^2} = \sum_{\tilde{n}\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-\tilde{n})^2}$$

ottenuta sostituendo $\tilde{n} = n - 1$ implica $f(z+1) = f(z)$.

□

Prima di vedere che funzione è la somma della serie (3.2) ricordiamo la definizione delle funzioni iperboliche complesse e mostriamo un'identità sul modulo del seno complesso.

Definizione 15. Le funzioni iperboliche complesse sono le funzioni definite da

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \ ; \ \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

per ogni $z \in \mathbb{C}$.

É evidente che esse sono funzioni olomorfe su tutto $\mathbb{C}$. Inoltre è facile verificare che sussiste l'identità già valida nel caso reale:

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$$

Lemma 7. *Per ogni numero complesso $z = x + iy$ si ha*

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \frac{|e^{iz} - e^{-iz}|^2}{|2i|^2} = \frac{1}{4}\left|e^{ix-y} - e^{-ix+y}\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left|e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left|\cos x(e^{-y} - e^{y}) + i\sin x(e^{-y} + e^{y})\right|^2 \\
&= \frac{1}{4}\left[(e^{-y} - e^{y})^2\cos^2 x + (e^{-y} + e^{y})^2\sin^2 x\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[(e^{-y} - e^{y})^2(1 - \sin^2 x) + (e^{-y} + e^{y})^2\sin^2 x\right] \\
&= \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 + \frac{\sin^2 x}{4}\left[(e^{-y} + e^{y})^2 - (e^{-y} - e^{y})^2\right] = \sinh^2 y + \sin^2 x
\end{aligned}$$

□

Proposizione 12. *La somma della serie (3.2) è*

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Dimostrazione. Fissiamo $x_0 < x_1$ e $a > 0$ e poniamo $z = x + iy$. La funzione $\frac{1}{(z-n)^2}$ non poli nella regione $x_0 \leq x \leq x_1$ e $|y| \geq a$.

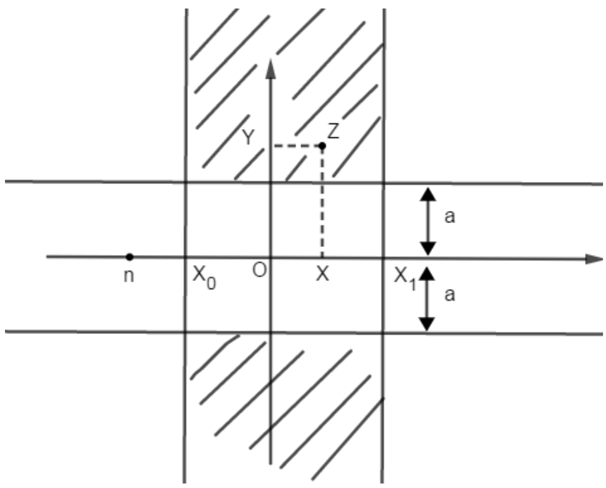

Figura 3.2

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ fissato,

$$\lim_{|y| \to +\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = 0$$

uniformemente rispetto a x nella striscia S_{x_0,x_1} perché, se $M := \min\{|x-n| : x_0 \le x \le x_1\}$ allora $|z-n|^2 = |x-n|^2 + |y|^2 \ge M^2 + y^2$.
Poiché la serie (3.2) converge normalmente nella striscia S_{x_0,x_1}, deduciamo che in S_{x_0,x_1} si ha anche

$$\lim_{|y|\to+\infty} f(z) = 0 \tag{3.3}$$

uniformemente rispetto a x.
Applicando questa proprietà ad una striscia di ampiezza $x_1 - x_0 \ge 1$ e utilizzando il fatto che $f(z)$ ammette 1 come periodo, deduciamo che la (3.3) sussiste in tutto $\mathbb{C}$ uniformemente rispetto a x.
Ora consideriamo la funzione

$$g(z) := \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Essa possiede le seguenti proprietà analoghe a quelle di $f(z)$:

(i) $g(z)$ è meromorfa su $\mathbb{C}$ ed ammette 1 come periodo.

(ii) I poli di $g(z)$ sono i numeri interi n, che sono poli doppi con parte principale $\frac{1}{(z-n)^2}$.

(iii)
$$\lim_{|y|\to+\infty} g(z) = 0$$
uniformemente rispetto a x.

La proprietà (i) è ovvia.
Per mostrare la proprietà (ii) osserviamo che i poli di $g(z)$ sono esattamente gli zeri di $\sin \pi z$. Gli zeri di $\sin \pi z$ sono tutti e soli gli interi n, infatti:

$$\sin \pi z = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

quindi

$$\sin \pi z = 0 \iff e^{i\pi z} = e^{-i\pi z} \iff e^{i\pi x - \pi y} = e^{-i\pi x + \pi y}$$

$$\iff e^{-\pi y}(\cos \pi x + i \sin \pi x) = e^{\pi y}(\cos \pi x - i \sin \pi x) \iff \begin{cases} e^{-\pi y} = e^{\pi y} \\ \cos \pi x + i \sin \pi x = \cos \pi x - i \sin \pi x \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^{-2\pi y} = 1 \\ \sin \pi x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = n, \text{ con } n \in \mathbb{Z} \end{cases} \iff z = n, \text{ con } n \in \mathbb{Z}$$

Se mostriamo che 0 è un polo doppio con parte principale $\frac{1}{z^2}$ allora, per la periodicità di $g(z)$ (punto (i)), abbiamo che ogni numero intero n è un polo doppio e ha parte principale $\frac{1}{(z-n)^2}$. Si ha, in un intorno di 0:

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{\pi z - \frac{1}{6}\pi^3 z^3 + z^5(\dots)}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)^{-2}$$

Si ha ([1], I.5)

$$\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)^{-1} = \left(1 + \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)$$

allora

$$\left(1 - \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)^{-2} = \left(1 + \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)^2$$

e quindi

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)^2 = \frac{1}{z^2}\left(1 + \frac{1}{3}\pi^2 z^2 + z^4(\dots) + \dots\right)$$

Da cui

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 = \frac{1}{z^2} + \frac{\pi^2}{3} + z^2(\dots) \tag{3.4}$$

e la (ii) segue.
La proprietà (iii) segue immediatamente dall'identità dimostrata nel Lemma 7:

$$|\sin \pi z|^2 = \sin^2 \pi x + \sinh^2 \pi y$$

Da questi fatti segue che la funzione $f(z) - g(z)$ è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$ perché f e g hanno gli stessi poli con le stesse parti principali, che quindi si elidono.
Inoltre in ogni striscia S_{x_o,x_1} la funzione $f(z) - g(z)$ è limitata: per $|y| \leq a$ è limitata perché è continua in un compatto, per $|y| \geq a$ è limitata perché lo sono sia f che g, come segue da (3.3) e da (iii). Inoltre f e g ammettono entrambe 1 come periodo, quindi ammettono ogni $n \in \mathbb{Z}$ come periodo, da cui segue che $f - g$ ammette ogni intero n come periodo. Visto che $f - g$ è limitata in ogni striscia, dalla periodicità segue quindi che è limitata in tutto $\mathbb{C}$. Applicando il Teorema di Liouville (vedere III.1.2 di [1]) deduciamo che $f - g$ è costante. Ma $f - g$ tende a 0 al tendere di $|y|$ a $+\infty$, quindi $f - g$ è identicamente nulla. $\square$

Come applicazione dimostriamo la seguente identità, dovuta a Eulero:

Proposizione 13.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \tag{3.5}$$

Dimostrazione. Per la proposizione precedente abbiamo che

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

ed il secondo membro è una funzione $h(z)$ olomorfa in un intorno di 0.
Inoltre

$$h(0) = \sum_{n\neq 0} \frac{1}{n^2} = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

quindi

$$\lim_{z\to 0} \left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 - \frac{1}{z^2} \right] = h(0) = 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

D'altra parte da (3.4) otteniamo che

$$\lim_{z\to 0} \left[\left(\frac{\pi}{\sin \pi z} \right)^2 - \frac{1}{z^2} \right] = \frac{\pi^2}{3}$$

da cui (3.5). □

3.3 Secondo esempio

Lemma 8. *La serie*

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0} \left(\frac{z}{n(z-n)} \right) \tag{3.6}$$

converge normalmente sui compatti di $\mathbb{C}$.

Dimostrazione. Poiché ogni sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$ è contenuto in un disco chiuso $\overline{B(0,r)}$, è sufficiente dimostrare che la serie (3.6) converge normalmente in ogni disco chiuso $\overline{B(0,r)}$. Ogni disco $\overline{B(0,r)}$ contiene solo un numero finito di interi n, e quindi solo un numero finito di termini della serie possiede poli in esso.
Inoltre $\forall z \in \overline{B(0,r)}$, $\forall n < -r$ si ha $|z-n| \geq |x-n| \geq |-r-n| = -(n+r)$ (vedi figura 3.3)

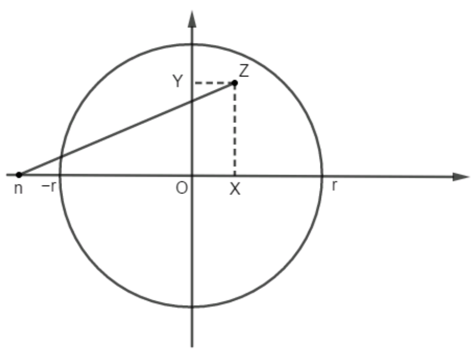

Figura 3.3

quindi per $|z| \leq r$, $n < -r$ si ha:

$$\left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \leq \frac{r}{n|z-n|} \leq -\frac{r}{n(n+r)}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n<-r} \frac{z}{n(z-n)}$$

converge normalmente in $\overline{B(0,r)}$ poiché è maggiorata dalla serie $\sum_{n<-r} \frac{-r}{n(n+r)}$ che converge poiché converge la serie armonica generalizzata $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n^2}$.
D'altra parte si ha $\forall z \in \overline{B(0,r)}$, $\forall n > r$ si ha $|z-n| \geq |n-x| \geq n-r$, quindi per $|z| \leq r$, $n > r$ si ha:

$$\left|\frac{z}{n(z-n)}\right| \leq \frac{r}{n(n-r)}$$

e quindi la serie

$$\sum_{n>r} \frac{z}{n(z-n)}$$

converge normalmente in $\overline{B(0,r)}$.
Quindi, dopo aver rimosso un numero finito di termini dalla serie (3.6), otteniamo una serie di funzioni olomorfe in $\overline{B(0,r)}$ e normalmente convergente in $\overline{B(0,r)}$. Perciò (3.6) è normalmente convergente sui compatti di $\mathbb{C}$.

□

Proposizione 14. *Sia $F(z)$ la somma della serie* (3.6)*:*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{z}{n(z-n)}\right) \quad \text{per } z \in \mathbb{C}$$

La funzione $F(z)$, meromorfa su $\mathbb{C}$, ha come poli gli interi $n \in \mathbb{Z}$ che risultano essere poli semplici di residuo uguale a 1 (e quindi parte principale $\frac{1}{z-n}$).

Dimostrazione. Simile alla dimostrazione della Proposizione 11. □

Proposizione 15. *La somma della serie (3.6) è*

$$F(z) = \frac{\pi}{\tan \pi z}$$

Dimostrazione. Dal Teorema 8 sappiamo che la derivata $F'(z)$ è la somma della serie delle derivate, quindi

$$F'(z) = -\frac{1}{z^2} - \sum_{n\neq 0} \frac{1}{(z-n)^2} = -\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Ma nel primo esempio abbiamo visto che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2$$

quindi

$$F'(z) = -\left(\frac{\pi}{\sin\pi z}\right)^2 = \frac{d}{dz}\left(\frac{\pi}{\tan\pi z}\right)$$

Di conseguenza la funzione

$$G(z) := F(z) - \frac{\pi}{\tan\pi z}$$

è costante.
Da (3.6) segue che $F(-z) = -F(z)$, cioè F è una funzione dispari. Essendo anche la tangente una funzione dispari, abbiamo che $G(z)$ è una funzione dispari. Essa è una funzione dispari e costante, quindi identicamente nulla, da cui la tesi. □

La serie (3.6) può essere riordinata sommando a due a due i termini di indici $-n$ e n:

$$\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{2z}{z^2-n^2}$$

ottenendo così la relazione

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\tan\pi z}$$

3.4 Un altro esempio

Con lo stesso metodo del primo esempio, si può dimostrare che

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{(-1)^n}{(z-n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin\pi z)(\tan\pi z)}$$

e da questo si può mostrare con il metodo usato nel secondo esempio che

$$\frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{2z}{z^2-n^2} = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

Capitolo 4

La funzione $\wp$ di Weierstrass

In Capitolo 1 def.6 abbiamo dato la definizione di reticolo $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2) \subset \mathbb{C}$, e in questo capitolo ne faremo nuovamente uso.

Lemma 9. *Dato un reticolo Ω, la serie*

$$\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3}$$

è convergente.

Dimostrazione. Per ogni intero $n \geq 1$ consideriamo il parallelogramma P_n costituito dai punti $z = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$, dove t_1 e t_2 sono numeri reali tali che $sup(|t_1|, |t_2|) = n$ (figura 4.1).

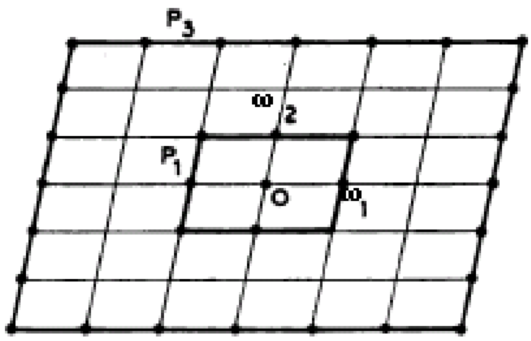

Figura 4.1

Sia $\Omega_n := \Omega \cap P_n$. Allora

- la cardinalità di Ω_n è $8n$

- per $\omega \in \Omega_n$ si ha $|\omega| \geq kn$, dove

$$k := \min_{\omega \in \Omega_1} |\omega| > 0$$

- $\Omega \setminus \{0\} = \bigcup_n \Omega_n$

Perciò

$$\sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^3} = \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega \in \Omega_n} \frac{1}{|\omega|^3} \leq \sum_{n \geq 1} \sum_{\omega \in \Omega_n} \frac{1}{k^3 n^3} = \sum_{n \geq 1} \frac{8n}{k^3 n^3} = \sum_{n \geq 1} \frac{8}{k^3 n^2}$$

La serie a destra converge perché converge la serie armonica $\sum \frac{1}{n^2}$, perciò il lemma è provato. $\square$

Proposizione 16. *Dato un reticolo $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ di $\mathbb{C}$, la serie*

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \tag{4.1}$$

*è normalmente convergente sui compatti di $\mathbb{C}$. La sua somma è una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$, chiamata la **funzione** $\wp(z)$ **di Weierstrass** relativa al reticolo Ω.*

Dimostrazione. Ogni compatto è contenuto in un disco chiuso di centro l'origine e raggio $r > 0$, quindi è sufficiente mostrare che la serie (4.1) converge normalmente su ogni disco compatto $|z| \leq r$. Fissato $r > 0$, abbiamo $|\omega| \geq 2r$ per $\omega \in \Omega$, tranne per un numero finito di essi.
Consideriamo $|z| \leq r$ e $|\omega| \geq 2r$. Abbiamo

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{2\omega z - z^2}{\omega^2(\omega - z)^2} \right| = \frac{\left| z(2 - \frac{z}{\omega}) \right|}{|\omega^3| \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right|^2}$$

Inoltre

$$\left| \frac{z}{\omega} \right| \leq \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

quindi

$$\left| 2 - \frac{z}{\omega} \right| \leq 2 + \left| \frac{z}{\omega} \right| \leq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

e

$$\left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| \geq \left| |1| - \left| \frac{z}{\omega} \right| \right| \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Quindi

$$\frac{\left| z(2 - \frac{z}{\omega}) \right|}{|\omega^3| \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right|^2} \leq \frac{r \cdot \frac{5}{2}}{|\omega|^3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{10r}{|\omega|^3}$$

Allora, per $|z| \leq r$, i termini della serie (4.1) soddisfano, a meno di un numero finito di essi,

$$\left| \frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| \leq \frac{10r}{|\omega|^3}$$

Dal lemma segue che la serie (4.1) converge normalmente nel disco $|z| \leq r$.
Per concludere la somma della serie è una funzione meromorfa su tutto $\mathbb{C}$ per il Teorema 8. $\square$

Proposizione 17. *La funzione derivata $\wp'(z)$ della $\wp(z)$ di Weierstrass relativa al reticolo Ω è data da*

$$\wp'(z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3} \tag{4.2}$$

Inoltre valgono le seguenti affermazioni:

(i) *I poli di $\wp$ sono esattamente i punti di Ω; essi sono poli doppi di residuo 0 e parte principale*

$$\frac{1}{(z-\omega)^2}$$

(ii) *$\wp(z)$ è una funzione pari, cioè vale*

$$\wp(-z) = \wp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(iii) *$\wp'(z)$ è periodica con gruppo dei periodi Ω, cioè*

$$\wp'(z+\omega) = \wp'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \forall \omega \in \Omega$$

(iv) *I poli di $\wp'$ sono esattamente i punti di Ω; essi sono poli di ordine 3, di residuo 0 e parte principale*

$$\frac{-2}{(z-\omega)^3}$$

(v) *$\wp'(z)$ è una funzione dispari, cioè vale*

$$\wp'(-z) = -\wp'(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

(vi) *$\wp(z)$ è periodica con gruppo dei periodi Ω*

Dimostrazione. Per ottenere (4.2) è sufficiente derivare temine a termine la serie (4.1) e usare il Teorema 8.
(i) Se $z_0 \notin \Omega$, in un intorno U sufficientemente piccolo di z_0 ogni termine della serie (4.1)

è olomorfo, quindi anche la somma della serie è olomorfa su U, e z_0 non è un polo.
Sia ora $\omega \in \Omega$. Da (4.1) segue che, in un intorno di ω,

$$\wp(z) = \frac{1}{(z-\omega)^2} + g(z), \text{ con } g \text{ olomorfa}$$

(ii)

$$\wp(-z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Omega \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z+\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

e sostituendo $-\omega$ a ω (il reticolo Ω è simmetrico rispetto all'origine) otteniamo $\wp(z)$.

(iii) Sia $\tilde{\omega} \in \Omega$. Da (4.2) abbiamo che

$$\wp'(z+\tilde{\omega}) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z+\tilde{\omega}-\omega)^3}$$

e sostituendo ω a $\omega - \tilde{\omega}$ (il reticolo Ω è invariante per traslazione di un suo elemento) otteniamo $\wp'(z)$.

(iv) Sia $\omega \in \Omega$. Da (4.2) segue che, in un intorno di $z = \omega$,

$$\wp'(z) = \frac{-2}{(z-\omega)^3} + h(z), \text{ con } h \text{ olomorfa}$$

(v)

$$\wp'(-z) = -2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(-z-\omega)^3} = 2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z+\omega)^3} = 2 \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{(z-\omega)^3} = -\wp'(z)$$

(vi) Basta dimostrare che $\wp(z+\omega_i) = \wp(z)$ per $i = 1, 2$.
Dalla periodicità di $\wp'$, segue che

$$\wp'(z+\omega_i) - \wp'(z) = 0$$

quindi esiste una costante a tale che

$$\wp(z+\omega_i) - \wp(z) = a \tag{4.3}$$

Possiamo dare a z il valore $-\frac{\omega_i}{2}$ in (4.3) perché $-\frac{\omega_i}{2}$ e $\frac{\omega_i}{2}$ non sono poli di $\wp$; otteniamo quindi che

$$a = \wp\left(\frac{\omega_i}{2}\right) - \wp\left(-\frac{\omega_i}{2}\right) = 0$$

dove l'ultima uguaglianza deriva da (ii). □

Corollario 3. *Fissato comunque un reticolo Ω in $\mathbb{C}$, esiste una funzione ellittica non costante avente Ω come gruppo dei periodi.*

Proposizione 18 (Espansione di Laurent di $\wp(z)$)**.** *In un intorno dell'origine, $\wp$ ha uno sviluppo di Laurent della forma:*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, \tag{4.4}$$

con

$$a_2 = 3 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^4}, \quad a_4 = 5 \sum_{\omega \neq 0} \frac{1}{\omega^6} \tag{4.5}$$

Dimostrazione. Da (4.1), la funzione definita in un intorno dell'origine da

$$g(z) = \wp(z) - \frac{1}{z^2} = \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right)$$

è olomorfa e si annulla in $z = 0$.
Sia

$$g(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$$

il suo sviluppo di Taylor intorno a 0; essendo $g(z)$ una funzione pari in quanto la $\wp(z)$ è una funzione pari, si ha

$$0 = g(z) - g(-z) = 2 \sum_{j \geq 0} a_{2j+1} z^{2j+1}$$

in un intorno di 0, quindi $a_{2j+1} = 0 \; \forall j \geq 0$. Ne segue che

$$g(z) = a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots$$

Essendo g olomorfa sappiamo che

$$a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!}$$

Dobbiamo quindi calcolare le derivate di g:

$$g'(z) = \sum_{\omega \neq 0} -2(z-\omega)^{-3}, \;\; g''(z) = \sum_{\omega \neq 0} 6(z-\omega)^{-4}$$

$$g^{(3)}(z) = \sum_{\omega \neq 0} -24(z-\omega)^{-5}, \;\; g^{(4)}(z) = \sum_{\omega \neq 0} 120(z-\omega)^{-6}$$

Da cui segue che

$$a_2 = \frac{g''(0)}{2!} = 3\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4},\ a_4 = \frac{g^{(4)}(0)}{4!} = 5\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}$$

□

In conclusione, ricaviamo un importante relazione algebrica tra $\wp'$ e $\wp$.

Proposizione 19. *Le funzioni $\wp$ e $\wp'$ soddisfano l'identità*

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4 = 0 \tag{4.6}$$

Dimostrazione. Derivando (4.4) otteniamo

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 2a_2z + 4a_4z^3 + \dots$$

ed elevando al quadrato abbiamo

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + z^2(\dots)$$

Elevando al cubo entrambi i membri di (4.4) abbiamo

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + z^2(\dots)$$

Quindi

$$\wp'^2 - 4\wp^3 = -20\frac{a_2}{z^2} - 28a_4 + z^2(\dots)$$

Perciò la funzione

$$\wp'^2 - 4\wp^3 + 20a_2\wp + 28a_4$$

è olomorfa in un intorno dell'origine ed è zero nell'origine. D'altra parte, questa funzione ha Ω come gruppo di periodi, quindi è olomorfa intorno ad ogni punto di Ω ed è zero in ogni punto di Ω. Dato che essa non ha poli al di fuori di Ω, essa è olomorfa in tutto il piano. Inoltre, poiché è limitata su ogni compatto, la sua periodicità implica che è limitata su tutto $\mathbb{C}$. Essendo nulla nell'origine, dal Teorema di Liouville segue che è identicamente nulla. □

Definizione 16. Sia $\Omega = \Omega(\omega_1, \omega_2)$ un reticolo fissato di $\mathbb{C}$, e siano

$$a_2 = 3\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^4},\ a_4 = 5\sum_{\omega\neq 0}\frac{1}{\omega^6}$$

La curva algebrica piana

$$\mathcal{C}_\Omega : y^2 = 4x^3 - 20a_2x - 28a_4$$

è detta la cubica piana associata al reticolo Ω.

Dalla Proposizione 19 segue che al variare di $z \in \mathbb{C}$ il punto $(\wp(z), \wp'(z))$ varia sulla curva algebrica $\mathcal{C}_\Omega$.

Proposizione 20. *Il polinomio*

$$4x^3 - 20a_2x - 28a_4 \tag{4.7}$$

ha 3 radici distinte che sono

$$e_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad e_2 = \wp\left(\frac{\omega_2}{2}\right), \quad e_3 = \wp\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)$$

Dimostrazione. Siano

$$\alpha_1 = \frac{\omega_1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{\omega_2}{2}, \quad \alpha_3 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

Dalla periodicità di $\wp'$ e dal fatto che $2\alpha_i \in \Omega$ per $i = 1, 2, 3$ segue che

$$\wp'(\alpha_i) = \wp'(\alpha_i - 2\alpha_i) = \wp'(-\alpha_i)$$

Ma per la disparità di $\wp'$ abbiamo che

$$\wp'(-\alpha_i) = -\wp'(\alpha_i)$$

quindi $\wp'(\alpha_i) = 0$. Dalla (4.6) segue che e_1, e_2, e_3 sono radici di (4.7).
Sia $i \in \{1, 2, 3\}$ fissato. Si ha $\wp'(\alpha_i) = 0$, quindi l'equazione

$$\wp(z) - \wp(\alpha_i) = 0$$

ha in α_i una radice almeno doppia. Sia $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ tale che il parallelogramma fondamentale $\mathcal{P}_{z_0}$ contenga un solo polo di $\wp$, che ha ordine 2 (come in figura 4.2, dove il polo è l'origine).

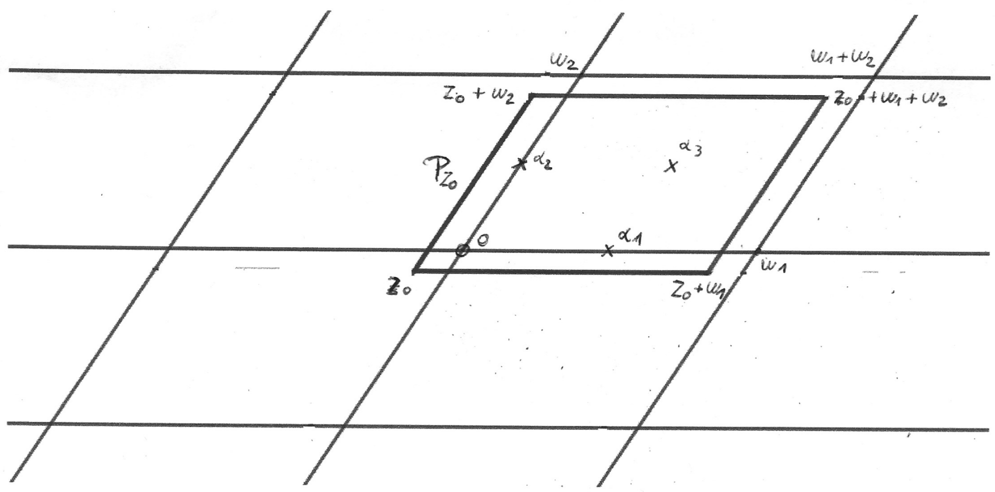

Figura 4.2

Dalla Proposizione 4 (Capitolo 1, paragrafo 3) segue che la radice α_i è esattamente doppia per $\wp(z) - \wp(\alpha_i)$ e che in nessun altro punto $z \in \mathcal{P}_{z_0}$ si ha $\wp(z) = \wp(\alpha_i)$. Quindi le tre radici sono distinte. $\square$

Proposizione 21. *Per ogni punto (x, y) della curva $\mathcal{C}_\Omega$ esiste un unico (*$\mathrm{mod}\,\Omega$*) $z \in \mathbb{C}$ tale che*

$$(x, y) = (\wp(z), \wp'(z))$$

Dimostrazione. Se $y = 0$ allora la tesi è verificata per la Proposizione 20.
Sia (a, b) un punto di $\mathcal{C}_\Omega$ diverso da $(e_i, 0)$, cioè tale che $b \neq 0$. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che sul bordo del parallelogramma fondamentale $\mathcal{P}_{z_0}$ non ci siano né zeri né poli di $\wp - a$, quindi tale che $\mathcal{P}_{z_0}$ contenga un solo polo di $\wp$, che ha ordine 2. Allora dalla Proposizione 4 segue che $\wp$ assume il valore a in due punti (contati con molteplicità) contenuti in $\mathcal{P}_{z_0}$. Sia z uno dei due punti, allora $\wp(z) = a$. Inoltre $b \neq 0$, quindi $\wp'(z) \neq 0$, perciò $z \not\equiv -z$ $(\mathrm{mod}\ \Omega)$. Per la parità di $\wp$ si ha $\wp(z) = \wp(-z) = a$. Poiché esiste un unico ω tale che $-z + \omega$ stia nell'interno di $\mathcal{P}_{z_0}$, i punti in $\mathcal{P}_{z_0}$ in cui $\wp$ assume il valore a sono due e distinti e sono mod Ω i punti z e $-z$. D'altra parte $\wp'(-z) = -\wp'(z)$, quindi solo z soddisfa $(a, b) = (\wp(z), \wp'(z))$. La tesi è perciò verificata. $\square$

Osservazione 5. La proposizione 21 si può riformulare così:
la cubica piana $\mathcal{C}_\Omega$ ammette una parametrizzazione (non algebrica) data da:

$$\begin{aligned} \mathbb{C}/\Omega &\longrightarrow \mathcal{C}_\Omega \\ [z] &\longmapsto (\wp(z), \wp'(z)) \end{aligned}$$

Bibliografia

[1] H. Cartan. *Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables*. Addison Wesley Longman Publishing Company, Inc., 1963.

[2] M. Idà. Appunti del corso di geometria 3, 2018/2019.

[3] E. Sernesi. Appunti delle lezioni. `http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/AC3101112.html`.