

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI
BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

**EVOLUZIONE DI UN SISTEMA
BINARIO: IL LOBO DI ROCHE**

Tesi di Laurea in Fondamenti di Astronomia

Relatore:
Chiar.ma Prof.ssa
BRUSA MARCELLA

Presentata da:
GRANIERI MARINA

Sessione Unica
Anno Accademico 2018-2019

...Alla mia famiglia

Indice

Introduzione	v
1 Sistemi Stellari Binari	1
1.1 Evoluzione Stellare	1
1.1.1 Fase finale dell'evoluzione stellare	3
1.2 Sistemi stellari binari	5
1.2.1 Primo Metodo	6
1.2.2 Secondo Metodo	10
1.3 Dischi di Accrescimento nei sistemi binari	11
2 Il Lobo di Roche	13
2.1 Punti Lagrangiani	13
2.2 Trattazione Matematica del calcolo dei Punti Lagrangiani	17
2.2.1 Equazione del moto del corpo m_3	17
2.2.2 Soluzioni per l'equilibrio	21
2.3 Trasferimento di massa	25
3 Applicazione Astrofisica	31
3.1 Evoluzione Stellare in un sistema binario	31
3.1.1 Esempio di Evoluzione di un sistema binario massiccio	34
3.2 Feedback positivo e negativo	36
3.3 Il Sistema Sole-Terra	37
Bibliografia	41

ii

INDICE

Ringraziamenti

i

Elenco delle figure

1.1	Diagramma Hertzsprung-Russell. Fonte: Brusa Marcella, Slides del corso <i>Fondamenti di Astronomia</i>	2
1.2	Fasi principali dell'Evoluzione Stellare per le stelle di piccola massa ($< 3M_{\odot}$) e di grande massa ($> 3M_{\odot}$). Fonte: O.S.A.R.P.A.	4
1.3	Lobo di Roche di un generico sistema binario. Fonte: Brusa Marcella, Slides del corso <i>Fondamenti di Astronomia</i>	6
1.4	Immagine in banda ottica del sistema stellare binario formato dalle stelle Mizar e Alcor. Fonte: Palomar Observatory.	7
1.5	Sistema binario di HD 171978. Fonte: Universe, 2008, Freedman R.A. and Kaufmann III W.J.	8
1.6	Schema di una binaria fotometrica. Fonte: NASA.	9
1.7	Modello ricostruito di Sirio (grande cerchio) e Sirio B (piccolo cerchio) su un tempo scala di 50 anni. Fonte: Burnham's Celestial Handbook, 1978, v1, Robert Burnham, Jr.	10
1.8	Rappresentazione delle tre classi di binarie. Fonte: Pettini Max, <i>Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars</i>	11
2.1	Coordinate corotanti per un sistema binario. Consideriamo $a = r_1 + r_2$ e $M_1r_1 = M_2r_2$. Fonte: Pettini Max, <i>Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars</i>	14

2.2	Superfici Equipotenziali del sistema binario chiuso visto in Figura 2.1. Fonte: Pettini Max, <i>Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars</i>	16
3.1	Evoluzione di un sistema binario. Fonte: Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; <i>Fundamental Astronomy</i>	33
3.2	Evoluzione di un sistema binario massiccio. Fonte: Ferraro F.R., Slides del corso <i>Evoluzione Stellare - Parte V</i>	35
3.3	Rappresentazione dei punti lagrangiani e delle superfici equipotenziali di un sistema a tre corpi, dove Sole e Terra sono le masse significative. Fonte: NASA. (Figura non in scala).	39

Introduzione

Nel corso dei secoli, l'Astronomia si è occupata dell'osservazione e dello studio di eventi celesti e un importante ambito di ricerca risiede nella cosiddetta Evoluzione Stellare. Quest'ultima si occupa principalmente dei cambiamenti che una stella subisce nel corso della sua vita. Grazie al contributo dell'astronomo francese Édouard Albert Roche, possiamo studiare ciò che va sotto il nome di *Teoria del Lobo di Roche* e che sarà il fulcro di questa tesi. Per poter affrontare questo argomento sarà necessario dapprima introdurre il concetto di ciclo vitale stellare e in seguito quello di sistema binario; quest'ultimo rappresenterà proprio la base da cui partire per descrivere il Lobo di Roche.

Nel primo capitolo di questa trattazione vi sarà un'introduzione sull'Evoluzione Stellare che metterà in luce le fasi fondamentali di questo processo partendo dalle Protostelle, per poi scindersi in due canali, sulla base della massa della stella, i quali termineranno con la formazione di Nane Bianche, nel primo caso, oppure di Buchi Neri o Stelle di Neutroni, nel secondo caso. In seguito sarà esposto il concetto di sistema stellare binario, introducendone le caratteristiche e le modalità con cui materialmente sia possibile l'individuazione di tali stelle. Infine verrà descritto il concetto di disco di accrescimento, il quale risulterà essere fondamentale nel processo di evoluzione di un sistema binario stellare.

Nel secondo capitolo avrà luogo una trattazione prettamente matemati-

ca riguardante l'individuazione dei punti di equilibrio sotto l'influenza della forza gravitazionale e delle rispettive superfici equipotenziali generate. Successivamente si avrà il calcolo esplicito dei punti di equilibrio in un sistema a tre corpi e ne verrà evidenziata la loro utilità nella determinazione del trasferimento di massa tra le due stelle.

Infine, nell'ultimo capitolo si tratterà l'Evoluzione Stellare nei sistemi binari mettendo in luce come evolve il sistema a seconda delle masse delle due stelle. Inoltre daremo due esempi espliciti del trasferimento di massa evidenziando così un feedback positivo e un feedback negativo. Nell'ultima parte, invece, vedremo come questa trattazione ha validità in ogni sistema binario, prendendo in considerazione il sistema Sole-Terra.

Capitolo 1

Sistemi Stellari Binari

1.1 Evoluzione Stellare

Le stelle si formano all'interno della Galassia attraverso il collasso gravitazionale di nuvole dense di gas e polveri presenti nei bracci a spirale delle galassie. Attraverso il lavoro svolto dall'astrofisico Sir James Jeans si sono potute formulare qualitativamente le condizioni fisiche affinché una nuvola di gas freddo possa condensarsi in una protostella. Una volta che la protostella raggiunge l'equilibrio idrostatico, essa sarà di tipo convettivo, per cui potrà proseguire l'evoluzione sul diagramma Hertzsprung-Russell (spesso indicato solamente con H-R). Quest'ultimo è uno strumento grazie al quale si mette in relazione la Temperatura efficace, posta lungo l'asse delle ascisse, e la luminosità delle stelle, lungo l'asse delle ordinate. Grazie ad esso, è possibile osservare l'evoluzione e le caratteristiche chimico-fisiche delle stelle o di ammassi stellari. La nascita di una stella avviene con l'inizio delle reazioni termonucleari, ossia con il bruciamento dell'idrogeno in elio e l'apparire della stella nella Sequenza Principale del diagramma H-R (Main Sequence in Figura 1.1). I vari rami presenti nel diagramma corrispondono a varie fasi e, infatti, la stella si muoverà lungo di esso durante la sua vita. Nella figura 1.1 è possibile osservare tale diagramma.

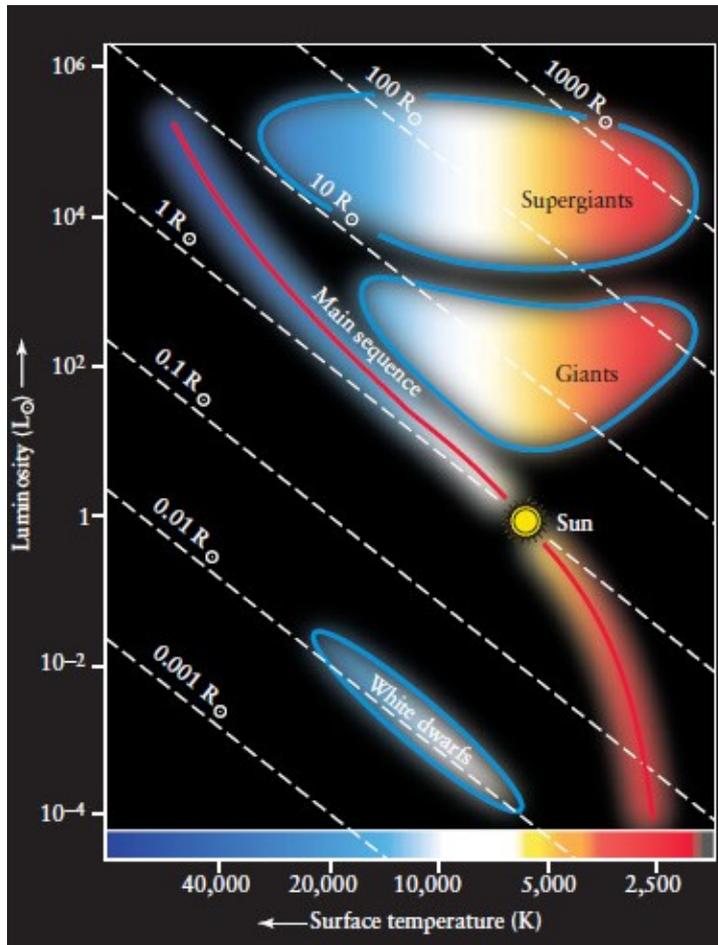


Figura 1.1: Diagramma Hertzsprung-Russell. Fonte: Brusa Marcella, Slides del corso *Fondamenti di Astronomia*.

Una volta formata la protostella, in cui la pressione del gas è bilanciata dalla gravità, essa risulta molto brillante nel diagramma H-R ma anche molto fredda. La fase pre-sequenza termina quando la protostella raggiunge una temperatura centrale elevata. La fase di Sequenza Principale (detta anche Main Sequence o MS) nel diagramma H-R corrisponde all'equilibrio idrostatico raggiunto dalle stelle e all'interno di essa avviene la fusione dell'idrogeno. Non tutte le stelle possono raggiungere tale fase, infatti:

- Massa $< 0.08 M_{\odot}$: a causa della loro bassa gravità non raggiungono mai temperature sufficienti per innescare il bruciamento dell'idrogeno.

- Massa $> 90 M_{\odot}$: la pressione di radiazione è dominante e rende instabile la struttura.

Continuando ad analizzare l'evoluzione stellare si avrà che quando nei nuclei delle stelle della MS l'idrogeno si esaurisce, la forza gravitazionale riprende il sopravvento ed il nucleo si contrae. Ciò comporta un aumento della temperatura, la composizione interna della massa cambia e l'idrogeno inizia a bruciare in un involucro esterno attorno al nucleo. Le stelle, così, si muovono velocemente e ha inizio la fase di *Gigante Rossa*. Anche in questa fase le stelle non sono in equilibrio, poichè la pressione prende il sopravvento nella parte esterna, mentre la gravità nel nucleo.

1.1.1 Fase finale dell'evoluzione stellare

Possiamo analizzare questa fase facendo riferimento sempre alla massa solare, e trovando così due casi:

- Stelle di piccola massa ($< 3M_{\odot}$): siamo nella fase di Gigante Rossa in cui l'idrogeno brucia in una regione attorno al nucleo e determina l'espansione della stella. Le stelle si muovono nel diagramma H-R e vanno a definire il cosiddetto Ramo Orizzontale, divenendo delle Giganti Gialle. Questo è il luogo dove brucia l'elio nel nucleo. A ciò segue una fase che andrà a definire il Ramo Asintotico delle Giganti, dove l'elio brucia attorno al nucleo; e infine, terminata la fusione, si creerà la Nebulosa Planetaria. Inizialmente poste al centro di quest'ultima, i resti delle stelle di piccola massa generano le Nane Bianche: la loro massa è minore rispetto alla massa di Chandrasekhar (ossia $1,4 M_{\odot}$), nel loro nucleo non è rimasto nulla e sono destinate a diventare Nane Nere.
- Stelle di grande massa ($> 3M_{\odot}$): siamo nella fase di Supergigante Rossa in cui l'elio inizia a bruciare prima che il nucleo degeneri; il nucleo sarà formato da ferro che crescerà fino a divenire troppo pesante per

supportarsi, così collasserà e si avrà un'esplosione di Supernova a cui seguirà un buco nero o una stella di neutroni.

Nella figura 1.2 possiamo così riassumere le fasi dell'Evoluzione Stellare evidenziandone i passaggi principali che ne delineano il processo.

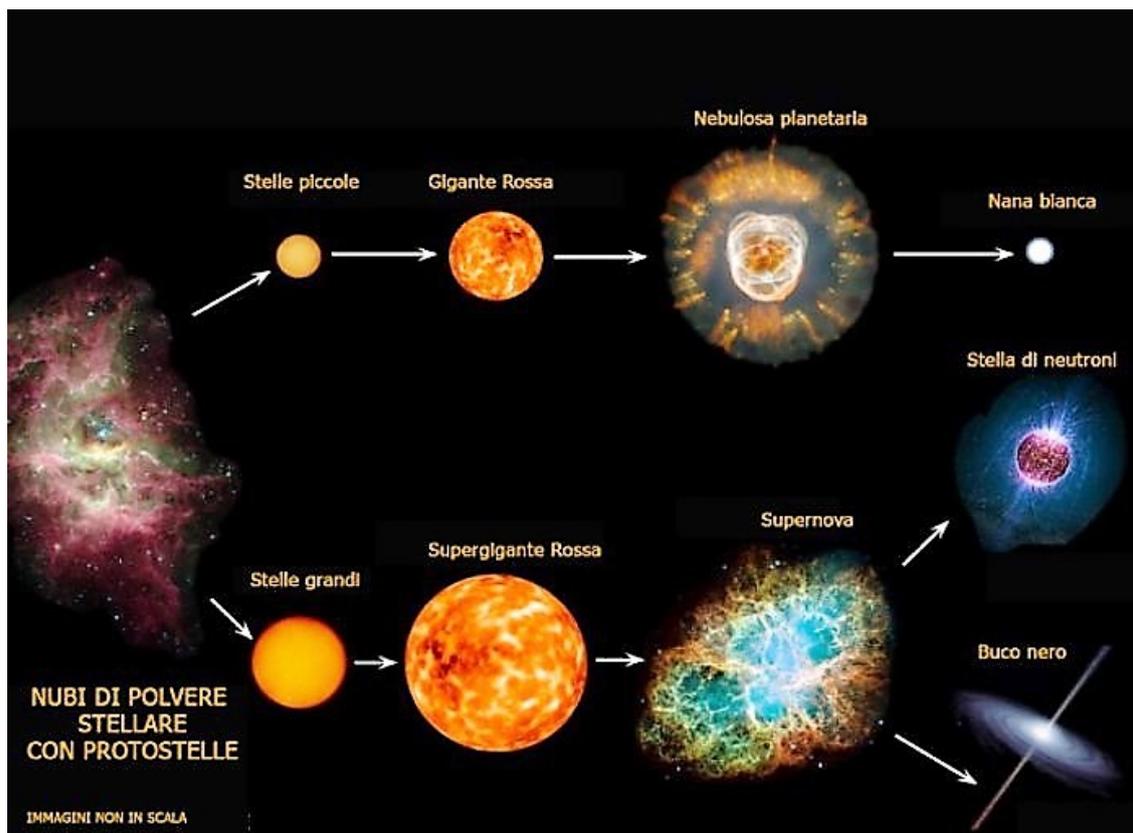


Figura 1.2: Fasi principali dell'Evoluzione Stellare per le stelle di piccola massa ($< 3M_{\odot}$) e di grande massa ($> 3M_{\odot}$). Fonte: O.S.A.R.P.A.

Nella trattazione finora elaborata si è presa in considerazione una singola stella e, a seconda della sua massa, se n'è descritto il comportamento durante la sua vita. Ciononostante, lo scenario a cui assistiamo quando osserviamo il cielo risulta essere molto più complesso da studiare. Ne abbiamo evidenza attraverso dati sperimentali che mostrano la presenza di strutture come i sistemi binari stellari, che esamineremo nelle sezioni seguenti.

1.2 Sistemi stellari binari

Le stelle che osserviamo nel cielo sono facilmente associabili a dei punti luminosi, e in modo automatico il nostro cervello associa un punto ad una stella, ma questo non è ciò che realmente accade. La volta celeste è un complesso paesaggio che deve essere analizzato a fondo, e per farlo vengono utilizzati strumenti, quali i telescopi, che, attraverso l'imaging, fotografano porzioni di cielo e ne consentono lo studio. Molto spesso una stella ad occhio nudo può apparire come una singola unità; in realtà la maggior parte di esse si trovano in un sistema binario. Con quest'ultimo termine si indica un sistema di due oggetti la cui distanza, molto piccola, è tale da farne risentire la mutua attrazione gravitazionale. Inoltre, esse gravitano attorno ad un comune centro di massa.

Da studi approfonditi è emerso che più del 50% di stelle sono in un sistema binario o multiplo e spesso vi è una vera e propria struttura gerarchica; sicuramente il più semplice da studiare è il binario. L'importanza del sistema binario consiste nel poter misurare i parametri orbitali delle stelle e quindi di poterne ricavare la massa, attraverso l'utilizzo della terza legge di Keplero.

Nell'evoluzione di un sistema stellare binario, è necessario introdurre un concetto che sarà il nocciolo fondamentale di questo elaborato: definiamo con il nome di *Lobo di Roche* una superficie matematica ideale attorno a una stella, la quale si trova in un sistema binario, al cui interno la gravità delle stelle è dominante rispetto al loro centro di massa. Ogni stella, quindi, ha il proprio Lobo di Roche e solamente la materia che eccede al di fuori di esso può essere trasferita alla stella compagna. Nel capitolo seguente analizzeremo nel dettaglio le forze che andranno a determinare le superfici equipotenziali attorno alle stelle che compongono il sistema e troveremo la superficie che si interseca con il centro di massa del sistema e che definisce proprio i due Lobi di Roche delle due stelle. Nella Figura 1.3 si può osservarne un esempio.

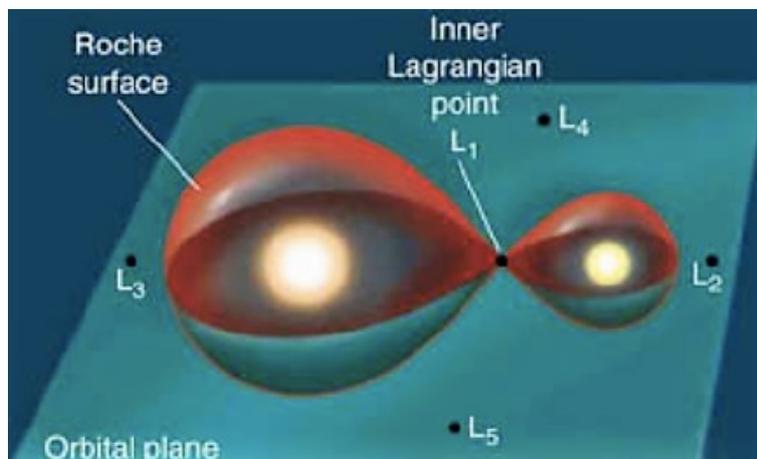


Figura 1.3: Lobo di Roche di un generico sistema binario. Fonte: Brusa Marcella, Slides del corso *Fondamenti di Astronomia*

Naturalmente nel corso dei secoli ci si è posti il problema della classificazione di queste stelle e principalmente si utilizzano due tipi di metodi: il primo si basa sul modo in cui sono state scoperte, mentre il secondo sulla loro distanza reciproca.

1.2.1 Primo Metodo

Come detto precedentemente, il primo metodo mette in luce il modo in cui esse vengono scoperte e possiamo individuare quattro classi differenti:

- *Binarie Visuali*: queste si possono individuare attraverso l'osservazione diretta. La distanza tra le due stelle è tale da poterle visualizzare separatamente attraverso l'uso di telescopi. Ciò è un dato importante poiché è possibile la risoluzione della singola stella. Inoltre, la stella con maggior intensità prende il nome di *primaria*, mentre la sua compagna è detta *secondaria*. Un esempio di notevole fama lo troviamo nella Costellazione dell'Orsa Maggiore, dove le stelle *Mizar* e *Alcor* creano un sistema binario. Con un'indagine più approfondita si evince che a sua volta *Mizar* è composto da *Mizar A* e *Mizar B*, le quali a loro volta sono in un sistema binario, così come lo è anche *Alcor*. Risulta, perciò,

un sistema composto da sei stelle; nella figura 1.4 è possibile notare Mizar e Alcor.



Figura 1.4: Immagine in banda ottica del sistema stellare binario formato dalle stelle Mizar e Alcor. Fonte: Palomar Observatory.

- *Binarie spettroscopiche*: esse sono stelle caratterizzate da una separazione molto piccola, dunque non essendo sufficiente l'imaging per la loro risoluzione, lo strumento usato è stato lo spettro. Attraverso di esso e attraverso l'effetto Doppler si sono potute osservare delle piccole variazioni periodiche che identificavano due tipi di spostamenti delle linee spettrali. Il primo spostamento è detto blueshift e determina un avvicinamento all'osservatore mentre il secondo spostamento è detto redshift e determina un allontanamento dall'osservatore. Per individuare stelle di questa tipologia si necessita di telescopi molto potenti. In alcune di esse è possibile osservare le linee spettrali di entrambe le stelle, e queste sono dette *binarie spettroscopiche a doppia riga*, talvolta abbreviato con "SB2"; in altre, invece, si può osservare lo spettro di una sola stella, per cui sono dette *binarie spettroscopiche a riga singola*, abbreviato con "SB1". Osserviamo, quindi, la formula della funzione di massa nel primo caso

$$m_1 + m_2 = \frac{P}{2\pi G} \frac{v_1 + v_2^3}{\sin^3 i} \quad (1.1)$$

e nel secondo caso

$$\frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{v_1^3 P}{2\pi G} \quad (1.2)$$

Si può vedere come nel primo caso la somma delle masse m_1 ed m_2 dipenda dal periodo P , dalle velocità v_1 e v_2 e dall'inclinazione dell'orbita i ; nel secondo caso, invece, dalla velocità radiale di una sola delle due stelle, oltre che dal periodo P e dall'inclinazione i .

Ne osserviamo un esempio nella Figura 1.5

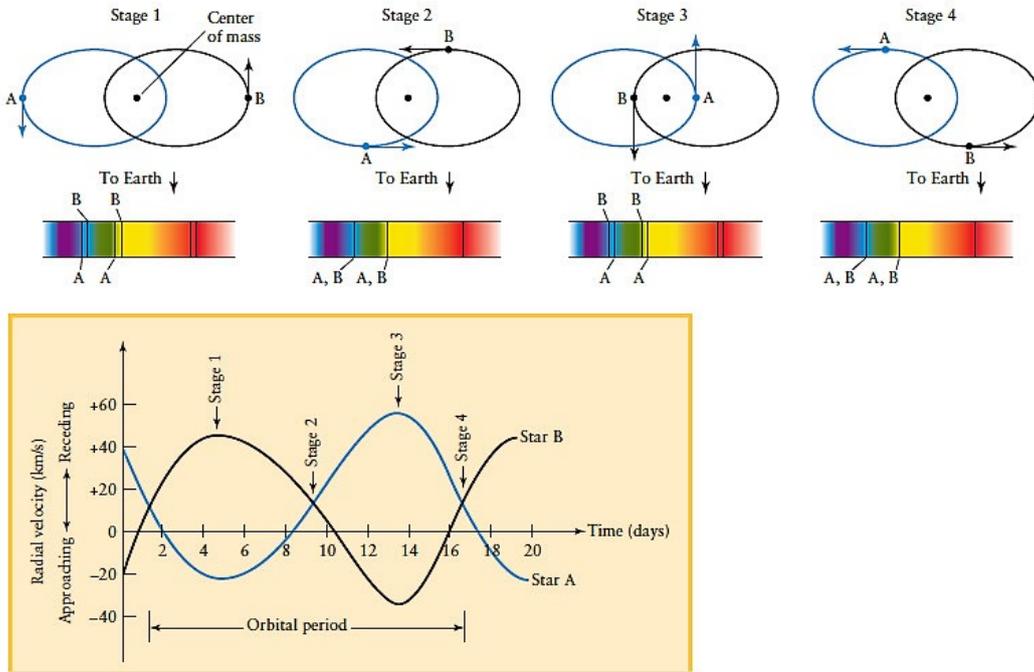


Figura 1.5: Sistema binario di HD 171978. Fonte: Universe, 2008, Freedman R.A. and Kaufmann III W.J.

- Binarie fotometriche: sono stelle il cui piano dell'orbita risulta parallelo alla linea di vista dell'osservatore e ciò consente il loro eclissarsi a vicenda. Infatti esse sono state scoperte attraverso dei cambiamenti della luminosità. Questo è l'unico caso in cui conosciamo l'inclinazione, la quale risulta essere di $i \sim 90$ e quindi è possibile ricavare con

precisione la massa delle stelle, se pure riusciamo a risolverle spettroscopicamente. Inoltre analizzando la curva di luce, ossia la variazione dell'intensità in funzione del tempo, è possibile determinare l'eccentricità, l'orientamento e l'inclinazione dell'orbita.

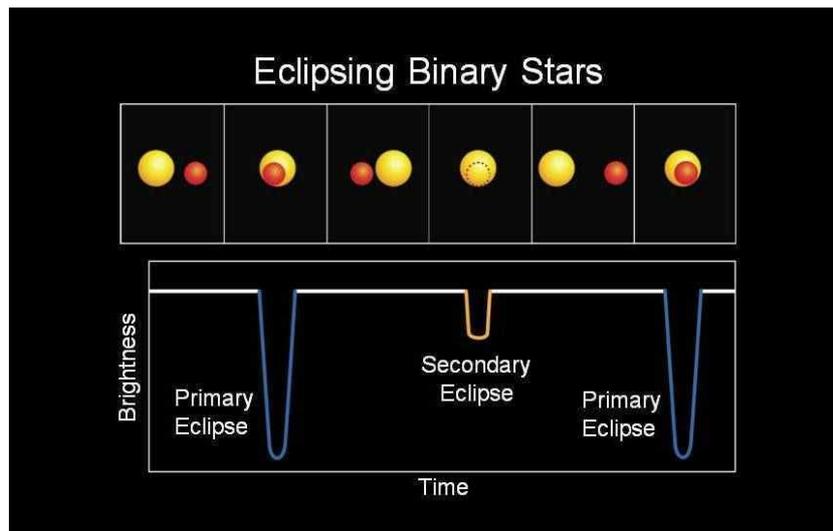


Figura 1.6: Schema di una binaria fotometrica. Fonte: NASA.

- *Binarie astrometriche*: osservando le oscillazioni del moto proprio di alcune stelle si è scoperto che esse erano dovute al moto orbitale di una delle componenti di un sistema binario avente compagna molto debole, tale da essere definita invisibile. Con l'osservazione costante del movimento della stella visibile si evince che essa descrive una sinusoide. Questo metodo astrometrico viene utilizzato anche nel campo di ricerca dei pianeti extrasolari. Un famoso esempio è dato da Sirio, la stella più brillante, che possiede una compagna invisibile detta Sirio B, osservata per la prima volta nel 1862.

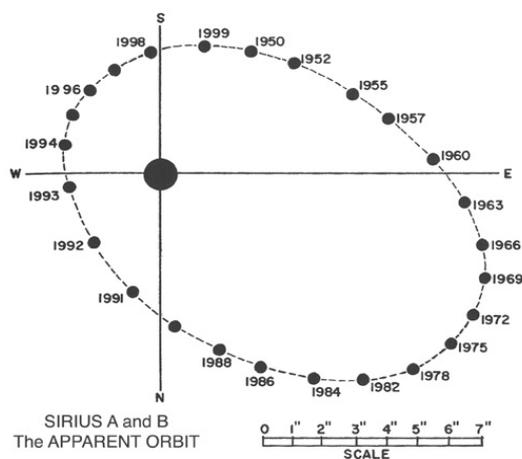


Figura 1.7: Modello ricostruito di Sirio (grande cerchio) e Sirio B (piccolo cerchio) su un tempo scala di 50 anni. Fonte: Burnham's Celestial Handbook, 1978, v1, Robert Burnham, Jr.

1.2.2 Secondo Metodo

Il secondo metodo utilizzato si basa sulla distanza di separazione tra le due stelle a seconda delle loro dimensioni. Più precisamente, si fa riferimento al modo in cui sono riempite le superfici equipotenziali. Vediamo come si differenziano le binarie in questo secondo metodo:

- *Binarie distaccate*: la loro distanza risulta molto più grande rispetto al loro raggio, così sono sistemi indipendenti che evolvono separatamente senza influenzarsi. La loro importanza risiede nel fatto che è possibile misurare la massa stellare osservando il loro periodo orbitale.
- *Binarie semidistaccate*: nel corso dell'evoluzione una delle due stelle può espandersi fino a riempire tutta la superficie equipotenziale fino al punto lagrangiano interno L_1 , dunque riempie completamente il suo Lobo di Roche. A questo punto la stella innesca un trasferimento di massa da essa verso la sua compagna. Questo trasferimento di materia comporta la creazione di dischi di accrescimento attorno alla stella che riceve il materiale.

- Binarie a contatto: entrambe le stelle riempiono il proprio Lobo di Roche e creano un involucro comune che le circonda.

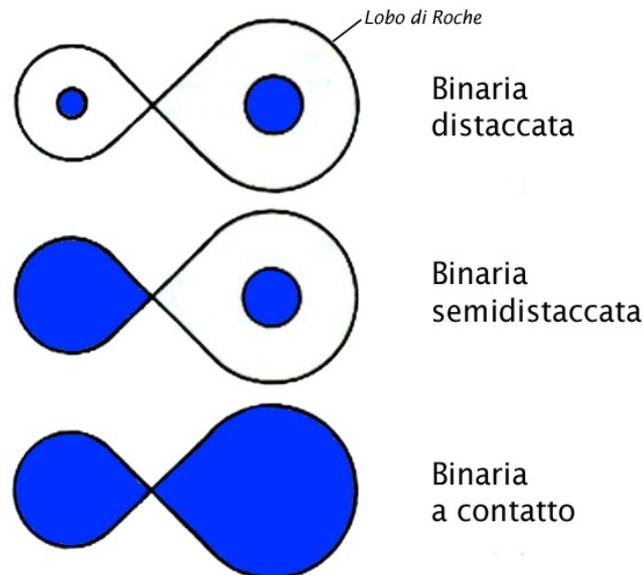


Figura 1.8: Rappresentazione delle tre classi di binarie. Fonte: Pettini Max, *Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars*.

1.3 Dischi di Accrescimento nei sistemi binari

Per quanto detto precedentemente, alcune stelle che si trovano in un sistema binario hanno una distanza molto piccola tra di loro e questo fa sì che le stelle possano subire deformazioni per via dell'azione del potenziale gravitazionale. A causa del momento angolare, la materia gassosa spiraleggia attorno alla massa della stella che accresce andando a creare i cosiddetti dischi di accrescimento, i quali, attraverso l'attrazione gravitazionale, vengono trattenuti dal corpo e come immediata conseguenza si avrà un aumento della massa e della velocità di rotazione nel corpo. I dischi di accrescimento che si

creano in un sistema binario sono dovuti all'evoluzione di una delle stelle e grazie ad essi si avrà il fenomeno di trasferimento della massa e del momento angolare da una verso l'altra stella. Una componente importante del disco di accrescimento è la *viscosità*: essa rappresenta un attrito interno della stella che converte l'energia cinetica del moto in energia termica. Una conseguenza è che il momento angolare dovrebbe essere trasportato verso l'esterno in modo da poter accrescere la materia e le turbolenze che aumentano la viscosità determinano una redistribuzione di esso. Infatti se la materia ricade verso il centro, essa perde sia energia gravitazionale sia momento angolare. Mentre il momento angolare totale del disco è conservato, il momento angolare perso dalla massa caduta al centro viene compensato dal momento angolare acquisito dalla massa lontana dal centro. I dischi di accrescimento continuano ad essere ancora oggi oggetti di studio poichè essi sono presenti dalle protostelle, ai sistemi binari, fino ad arrivare ai nuclei galattici attivi.

Capitolo 2

Il Lobo di Roche

2.1 Punti Lagrangiani

Per poter analizzare il processo di evoluzione stellare in un sistema binario è necessario capire in che modo la gravità agisce su di esso. Prendiamo in riferimento un sistema cartesiano x-y e consideriamo due stelle con orbite circolari attorno al loro centro di massa, con velocità angolare

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2}$$

dove indichiamo con v la velocità orbitale e con r la distanza dal centro di massa del sistema, mentre con i pedici 1 e 2 distinguiamo le due stelle nel sistema binario.

Consideriamo un sistema di coordinate corotanti e posizioniamo il centro di massa all'origine del sistema; il vettore della forza centrifuga su una massa m a distanza r dall'origine e velocità angolare ω è dato da

$$F_c = m\omega^2 r \hat{r} \quad (2.1)$$

Considerando l'energia potenziale di tale sistema, all'energia potenziale gravitazionale

$$U_g = -G \frac{Mm}{r} \quad (2.2)$$

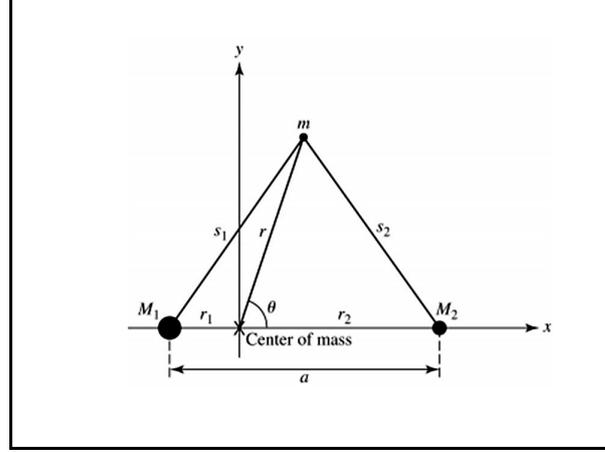


Figura 2.1: Coordinate corotanti per un sistema binario. Consideriamo $a = r_1 + r_2$ e $M_1 r_1 = M_2 r_2$. Fonte: Pettini Max, *Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars*.

dove con G indichiamo la costante di gravitazione universale, con m una piccola massa di prova e con r la distanza, bisogna aggiungere “l’energia potenziale centrifuga”

$$U_c = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (2.3)$$

che si ottiene andando ad integrare l’equazione (2.1) con le condizioni al contorno $U_c = 0$ a $r = 0$.

Di conseguenza, l’energia potenziale efficace per una piccola massa di prova m localizzata nel piano dell’orbita è:

$$U = -G\left(\frac{M_1 m}{s_1} + \frac{M_2 m}{s_2}\right) - \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 \quad (2.4)$$

dove con M_1 indichiamo la massa maggiore, con M_2 la massa minore e con s_1 ed s_2 la distanza tra la massa di prova m e rispettivamente M_1 ed M_2 .

Se dividiamo questo risultato per m , otteniamo il potenziale gravitazionale efficace:

$$\Phi = -G\left(\frac{M_1}{s_1} + \frac{M_2}{s_2}\right) - \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \quad (2.5)$$

Per poter proseguire nella trattazione dobbiamo ricordare alcune nozioni matematiche preliminari, ossia:

- Legge del coseno

$$s_1^2 = r_1^2 + r^2 - 2r_1r \cos(\theta) \quad (2.6)$$

dove con s_1 indichiamo la distanza tra m ed M_1 , con r_1 la distanza tra il centro di massa ed M_1 , con r la distanza tra la massa di prova m ed il centro di massa, e con θ l'angolo compreso tra di essi.

- Terza Legge di Keplero: I quadrati dei tempi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori dell'orbita, in formule

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(M_1 + M_2)} a^3 \quad (2.7)$$

dove con P indichiamo i tempi di rivoluzione, con a i semiassi maggiori dell'orbita, con M_1 ed M_2 le masse e con G la costante di gravitazione universale.

Da quest'ultima, assumendo l'utilizzo di orbite circolari, riusciamo a ricavare la velocità angolare

$$\omega^2 = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{G(M_1 + M_2)}{a^3} \quad (2.8)$$

Tutte le equazioni finora descritte vengono utilizzate per ricavare il potenziale gravitazionale efficace Φ in ogni punto del piano orbitale. Se andiamo a considerare solamente la componente della forza lungo l'asse delle x , troviamo

$$F_x = -\frac{dU}{dx} = -m \frac{d\Phi}{dx} \quad (2.9)$$

Nei valori in cui $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ otteniamo i punti $\frac{x}{a}$, chiamati L_n , dove con a indichiamo la distanza che separa le due masse. In tali punti vale che non vi è applicata nessuna forza sulla massa, ossia la forza gravitazionale esercitata su m da M_1 e M_2 viene bilanciata dalla forza centrifuga del sistema di riferimento rotante. Abbiamo così trovato i *Punti Lagrangiani*.

Nel caso in cui considerassimo un sistema di riferimento non rotante, i punti lagrangiani sono posizionati dove la forza gravitazionale combinata delle due masse sulla massa di prova m fornisce la forza centripeta necessaria

per far ruotare la massa di prova con esse. Ora la massa m è in equilibrio relativamente alle altre due masse; è un equilibrio instabile perchè rappresentano i massimi locali di Φ .

Nei punti in cui si evidenzia lo stesso valore di Φ è possibile definire le superfici equipotenziali come segue:

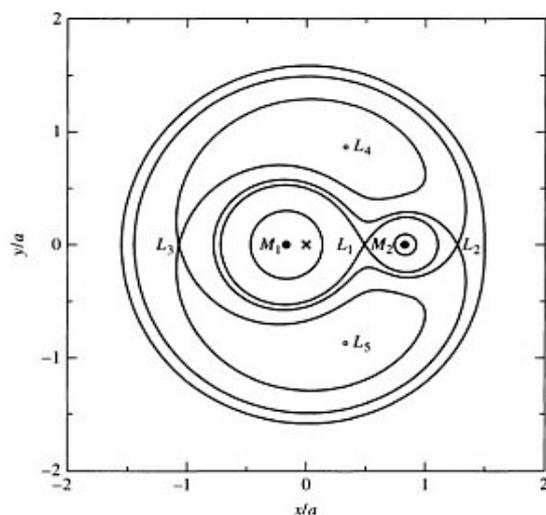


Figura 2.2: Superfici Equipotenziali del sistema binario chiuso visto in Figura 2.1. Fonte: Pettini Max, *Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars*.

È possibile osservare che tali superfici assumono un aspetto sferico attorno alle stelle e sono centrate nelle loro masse; quando ci si inizia ad allontanare esse vengono distorte a causa dell'azione della forza gravitazionale esercitata da M_1 ed M_2 , tanto da assumere una forma a goccia con un unico punto in comune che equivale al Punto Lagrangiano Interno L_1 . Se ci si allontana ancor di più, assumeranno una forma a “manubrio” che circonda entrambe le masse.

Queste superfici equipotenziali sono superfici di livello per le stelle binarie. Come detto nel capitolo precedente, una volta che le stelle giungono nella fase di Gigante aumentano la loro luminosità a causa della loro espansione, e dunque questo vi determina un aumento del loro raggio. Ciò può essere

descritto dalla *Legge di Stefan-Boltzmann*, la cui formulazione per le stelle (essendo interpretate in prima approssimazione come un corpo nero) è la seguente:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (2.10)$$

dove L indica la luminosità, R il raggio e T la temperatura effettiva della stella. Ciò ci garantisce il fatto che esse, evolvendosi, possano riempire superfici equipotenziali sempre più distanti, infatti essendo la gravità sempre perpendicolare alle superfici equipotenziali in ogni punto, la densità deve essere la stessa su ogni superficie al fine di garantire una pressione costante.

2.2 Trattazione Matematica del calcolo dei Punti Lagrangiani

2.2.1 Equazione del moto del corpo m_3

In questo paragrafo il nostro obiettivo sarà quello di esplicitare le equazioni del moto riguardanti il corpo m_3 , e per fare ciò dobbiamo ricorrere alla risoluzione del problema degli N corpi. Poichè esso non ammette una soluzione analitica, consideriamo il caso particolare per $N = 3$ in cui è possibile ottenere risultati. Nel problema ristretto dei tre corpi consideriamo un corpo massivamente minore, quasi trascurabile, rispetto agli altri, al fine di non influenzare il centro di massa e il moto degli altri due; come, ad esempio, accade per il sistema Sole-Terra-satellite. Il problema consiste nella descrizione del moto del terzo corpo sottoposto all'azione gravitazionale degli altri due, i quali ruotano con velocità angolare costante ω attorno al loro centro di massa. Considerando le distribuzioni delle masse tali da poterli interpretare come puntiformi, lo studio del problema deve essere effettuato in due sistemi di riferimento distinti: il sistema di riferimento *siderale*, il quale è individuato dagli assi cartesiani inerziali X e Y che individuano il piano su cui si svolge il moto e l'origine è posta nel baricentro tra i due corpi principali; ed il sistema di riferimento *sinodico*, che presenta lo stesso piano e la stessa origine

di quello siderale, ma che ruota con velocità angolare ω .

Grazie agli studi effettuati da Lagrange si è potuto osservare la presenza di alcuni punti di equilibrio, stabili e instabili, che prenderanno proprio da lui il loro nome e che abbiamo iniziato ad analizzare nella sezione precedente. Se i punti L_1 , L_2 ed L_3 sono punti di equilibrio instabili, poichè anche solo una minima perturbazione può causare la perdita dell'equilibrio; i punti L_4 ed L_5 , invece, sono di equilibrio stabile. Per ottenere la posizione di questi punti in funzione della massa delle stelle è necessario analizzare tutto il sistema.

Nel sistema di riferimento siderale possiamo fornire le equazioni del moto del terzo corpo, che chiameremo m_3 , combinando la legge di gravitazione universale e la seconda legge della dinamica, ottenendo così:

$$\begin{cases} \ddot{X} = G \frac{M_1}{\rho_1^3} (X_1 - X) + G \frac{M_2}{\rho_2^3} (X_2 - X) \\ \ddot{Y} = G \frac{M_1}{\rho_1^3} (Y_1 - Y) + G \frac{M_2}{\rho_2^3} (Y_1 - Y) \end{cases} \quad (2.11)$$

dove con X e Y indichiamo le coordinate di m_3 ; con X_i e Y_i le coordinate di M_i , per $i=1,2$; mentre con ρ_1 e ρ_2 le distanze di m_3 da M_1 ed M_2 , fornite dalle espressioni:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{(X - X_1)^2 + (Y - Y_1)^2} \\ \rho_2 &= \sqrt{(X - X_2)^2 + (Y - Y_2)^2} \end{aligned}$$

Per poter esprimere le equazioni del moto di m_3 nel sistema di riferimento sinodico dobbiamo tener conto del legame tra i due sistemi dato da:

$$\begin{cases} X = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) \\ Y = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \end{cases}$$

ottenendo così le equazioni:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} - \omega^2 x = G \frac{M_1}{\rho_1^3} (x_1 - x) + G \frac{M_2}{\rho_2^3} (x_2 - x) \\ \ddot{y} - 2\omega \dot{x} - \omega^2 y = G \frac{M_1}{\rho_1^3} (y_1 - y) + G \frac{M_2}{\rho_2^3} (y_2 - y) \end{cases} \quad (2.12)$$

2.2. TRATTAZIONE MATEMATICA DEL CALCOLO DEI PUNTI LAGRANGIANI 19

in cui evidenziamo le coordinate x e y di m_3 . Poichè per ipotesi i corpi M_1 ed M_2 hanno componente $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$ allora il sistema precedente si semplifica nel seguente modo:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} - \omega^2x = G\frac{M_1}{\rho_1^3}(x_1 - x) + G\frac{M_2}{\rho_2^3}(x_2 - x) \\ \ddot{y} - 2\omega\dot{x} - \omega^2y = -G\frac{M_1}{\rho_1^3}y - G\frac{M_2}{\rho_2^3}y \end{cases} \quad (2.13)$$

Naturalmente questo non è l'unico modo per esprimere le equazioni del moto del terzo corpo, perciò possiamo calcolarle in un sistema di riferimento sinodico adimensionale ponendo:

$r = x_2 - x_1$ la distanza tra M_1 ed M_2

$$\bar{x} = \frac{x}{r}, \quad \bar{y} = \frac{y}{r}, \quad \bar{t} = \omega t, \quad \mu_1 = \frac{M_1}{M_1+M_2}, \quad \mu_2 = \frac{M_2}{M_1+M_2},$$

$$\bar{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{r}, \quad \bar{\rho}_2 = \frac{\rho_2}{r}.$$

Poichè dalle ipotesi iniziali sappiamo che l'origine del sistema coincide con il baricentro dei corpi principali, allora otteniamo che:

$$-M_1x_1 = M_2x_2$$

Sommando M_1x_2 ad entrambi i membri si avrà:

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} = \frac{x_2}{x_2 - x_1} \Rightarrow \mu_1 = \frac{x_2}{r} = \bar{x}_2.$$

mentre sommando $-M_2x_1$ si avrà:

$$\frac{M_2}{M_1 + M_2} = -\frac{x_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \mu_2 = -\frac{x_1}{r} = -\bar{x}_1.$$

Le equazioni descritte nel sistema (2.13) posso anche essere espresse evidenziando il potenziale relativo al corpo m_3 , di conseguenza integrando i secondi membri di (2.13) rispetto a x e y otteniamo la formula che esprime il potenziale della forza centrifuga e forza gravitazionale agenti su m_3 :

$$V = \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + G\left(\frac{M_1}{\rho_1} + \frac{M_2}{\rho_2}\right) \quad (2.14)$$

Allora il sistema (2.13) assumerà l'aspetto:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = V_x(x, y) \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = V_y(x, y) \end{cases} \quad (2.15)$$

Inoltre, esprimendo quest'ultimo sistema in coordinate adimensionali avremo il primo membro:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} = \frac{d^2(r\bar{x})}{d(\bar{t}/\omega)^2} - 2\omega \frac{d(r\bar{y})}{d(\bar{t}/\omega)} = r\omega^2 \left(\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right) \quad (2.16)$$

mentre il secondo membro di questa forma:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial(r\bar{x})} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} \quad (2.17)$$

Ora se esprimiamo la quantità V in funzione delle coordinate adimensionali sopra citate e usando la terza legge di Keplero (ossia $G(M_1 + M_2) = \omega^2 r^3$) avremo:

$$V = \frac{\omega^2}{2} (r^2 \bar{x}^2 + r^2 \bar{y}^2) + G \left[\frac{\mu_1 (M_1 + M_2)}{r \bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2 (M_1 + M_2)}{r \bar{\rho}_2} \right] = \omega^2 r^2 \left(\frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2} \right)$$

Ponendo

$$U(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

otteniamo che:

$$V(x, y) = \omega^2 r^2 U(\bar{x}, \bar{y}) \quad (2.18)$$

Quest'ultima se sostituita nella formula (2.17) ci esprime:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}} = \omega^2 r \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\omega^2 r} \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \quad (2.19)$$

e utilizzando i risultati trovati in (2.15), (2.16) e (2.19) otteniamo che:

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}}$$

analogamente utilizzando lo stesso procedimento per la componente y avremo:

$$\frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{y}}$$

Quindi, possiamo concludere che le equazioni del moto del corpo m_3 nel sistema di riferimento sinodico possono anche essere espresse nel seguente modo:

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{x}} \\ \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial U}{\partial \bar{y}} \end{cases} \quad (2.20)$$

2.2.2 Soluzioni per l'equilibrio

Un passo importante per poter calcolare le soluzioni per l'equilibrio è quello di trovare l'integrale primo, chiamato *integrale di Jacobi*, per il sistema (2.20). Effettuando la moltiplicazione per $d\bar{x}/d\bar{t}$ per la prima equazione e per $d\bar{y}/d\bar{t}$ per la seconda, otteniamo:

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} + \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{dU}{d\bar{t}}$$

ossia

$$\frac{d}{d\bar{t}} \left[2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 \right] = 0$$

e quindi l'integrale di Jacobi nel sistema sinodico adimensionale risulta essere

$$2U - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 = C \quad (2.21)$$

dove C è detta costante di Jacobi. Inoltre, se modifichiamo la funzione $U(\bar{x}, \bar{y})$ aggiungendo una costante, in modo da non influenzare le equazioni del moto, e quindi avere

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = U(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\mu_1 \mu_2}{2}$$

si avrà che

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2}(\mu_1 \bar{\rho}_1^2 + \mu_2 \bar{\rho}_2^2) + \frac{\mu_1}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu_2}{\bar{\rho}_2}$$

Di conseguenza, le equazioni del moto del corpo m_3 diventano

$$\begin{cases} \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} - 2\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \\ \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} + 2\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} \end{cases} \quad (2.22)$$

mentre l'integrale di Jacobi diventa

$$2\bar{U} - \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 - \left(\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \right)^2 = \bar{C}$$

dove $\bar{C} = C + \mu_1 \mu_2$.

Inoltre, poichè i parametri μ_1 e μ_2 sono legati dalla relazione $\mu_1 + \mu_2 = 1$, ponendo $\mu_2 = \mu$ e, quindi, $\mu_1 = 1 - \mu$ si avrà:

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}{2} + \frac{1 - \mu}{\bar{\rho}_1} + \frac{\mu}{\bar{\rho}_2} + \frac{\mu(1 - \mu)}{2} \quad (2.23)$$

Naturalmente, l'integrazione delle equazioni differenziali del sistema (2.22) è un campo di studio ancora irrisolto; sotto alcune ipotesi, invece, è possibile avere delle soluzioni. Ci riferiamo al caso in cui il corpo m_3 sia considerato in quiete nel sistema sinodico e le soluzioni vengono dette *soluzioni di equilibrio*, ovviamente nel sistema sinodico. Conseguenzialmente, essendo \bar{x} e \bar{y} costanti, otteniamo:

$$\ddot{\bar{x}} = \ddot{\bar{y}} = \dot{\bar{x}} = \dot{\bar{y}} = 0$$

e quindi le equazioni del moto e l'integrale di Jacobi diventano

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\bar{U}(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{\bar{C}}{2}$$

Al fine di risolvere le equazioni appena descritte, esprimiamo \bar{U} in funzione di $\bar{\rho}_1$ e $\bar{\rho}_2$

$$\bar{U} = (1 - \mu)\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}_1^2 + \frac{1}{\bar{\rho}_1}\right) + \mu\left(\frac{1}{2}\bar{\rho}_2^2 + \frac{1}{\bar{\rho}_2}\right)$$

e calcolando le derivate parziali rispetto a \bar{x} e \bar{y} si avrà il sistema seguente

$$\begin{cases} (1 - \mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{x} + \mu - 1}{\bar{\rho}_2} = 0 \\ (1 - \mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{\bar{y}}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{\bar{y}}{\bar{\rho}_2} = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Da questo sistema possiamo calcolare i punti di equilibrio, considerando due casi distinti:

1. $\bar{y} \neq 0$

dalla seconda equazione del sistema precedente otteniamo che

$$(1 - \mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_1} + \mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2} = 0$$

ossia

$$(1 - \mu)\left(\bar{\rho}_1 - \frac{1}{\bar{\rho}_1^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_1} = -\mu\left(\bar{\rho}_2 - \frac{1}{\bar{\rho}_2^2}\right)\frac{1}{\bar{\rho}_2}$$

e combinandola alla prima equazione otteniamo

$$\bar{\rho}_2 = 1 \quad \bar{\rho}_1 = 1$$

2.2. TRATTAZIONE MATEMATICA DEL CALCOLO DEI PUNTI LAGRANGIANI 23

Quindi, nel caso $\bar{y} \neq 0$, troviamo due soluzioni che identificano le posizioni possibili di m_3 . Queste identificano i due vertici dei triangoli equilateri aventi come base il segmento che congiunge i due corpi principali. Queste due soluzioni vengono chiamate L_4 ed L_5 .

2. $\bar{y} = 0$

in questo caso le soluzioni saranno punti appartenenti all'asse delle ascisse, per cui sono dette *collineari*, ed esistono tre possibili casi:

- $\bar{x} < -\mu$ ossia m_3 a sinistra di M_1 ,
- $-\mu < \bar{x} < 1 - \mu$ ossia m_3 compreso tra M_1 ed M_2 ,
- $\bar{x} > 1 - \mu$ ossia M_3 a destra di M_2 .

In questo caso il sistema (2.24) è costituito solamente dalla prima equazione ed avremo che

$$\bar{\rho}_1 = |\bar{x} - \bar{x}_1| = |\bar{x} + \mu| \quad \bar{\rho}_2 = |\bar{x} - \bar{x}_2| = |\bar{x} + \mu - 1|$$

Di conseguenza avremo ulteriori tre casi:

- $\bar{\rho}_1 = -\bar{x} - \mu, \quad \bar{\rho}_2 = 1 + \bar{\rho}_1$

ponendo $\bar{\rho}_1 = \rho$ allora

$$(1 - \mu)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) + \mu\left[\rho + 1 - \frac{1}{(\rho + 1)^2}\right] = 0$$

Definendo

$$F(\rho) = \frac{\rho - \frac{1}{\rho^2}}{1 + \rho - \frac{1}{(1+\rho)^2}}$$

l'equazione precedente diventa

$$F(\rho) = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

questa è una funzione continua su $(0, +\infty)$, crescente e con valore $F(1) = 0$ per cui abbiamo trovato il punto di equilibrio L_3 con ordinata 0 e ascissa tra $-1 - \mu$ e $-\mu$.

$$\bullet \quad \bar{\rho}_1 = \bar{x} + \mu, \quad \bar{\rho}_2 = 1 - \bar{\rho}_1$$

ponendo $\bar{\rho}_1 = \rho$ allora

$$(1 - \mu)\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) - \mu\left[\rho + 1 - \frac{1}{(\rho + 1)^2}\right] = 0$$

Definendo

$$G(\rho) = \frac{1 - \rho - \frac{1}{(1-\rho)^2}}{\rho - \frac{1}{\rho^2}}$$

l'equazione precedente diventa

$$G(\rho) = \frac{1 - \mu}{\mu}$$

questa è una funzione continua su $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, crescente su $[1/2, 1)$ e vale $G(1/2)=1$ per cui abbiamo il punto L_1 con ordinata 0 e ascissa posta tra M_1 ed M_2 , più vicina a M_2 .

$$\bullet \quad \bar{\rho}_1 = \bar{x} + \mu, \quad \bar{\rho}_2 = -1 + \bar{\rho}_1$$

ponendo $\bar{\rho}_2 = \rho$ allora

$$(1 - \mu)\left[1 + \rho - \frac{1}{(1 + \rho)^2}\right] + \mu\left(\rho - \frac{1}{\rho^2}\right) = 0$$

Definendo

$$H(\rho) = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

valgono le stesse conclusioni fatte nel primo caso. Abbiamo così trovato il terzo punto di equilibrio L_2 avente ordinata 0 e ascissa tra $1 - \mu$ e $2 - \mu$.

Possiamo così concludere che il sistema (2.24) ammette 5 soluzioni di equilibrio, detti *punti lagrangiani* e se il corpo m_3 , con velocità nulla, è posto in uno di questi punti, esso non sarà soggetto ad alcuna forza.

In particolare possiamo affermare che il Punto Lagrangiano Interno L_1 giace sempre lungo la retta che congiunge le due masse dei corpi ed è il

punto nel quale l'attrazione gravitazionale di M_2 cancella parzialmente quella di M_1 . Si trova esattamente nel punto in cui un corpo lì posizionato ha periodo uguale a quello di M_2 . Inoltre, la sua importanza risiede nel fatto che definisce i cosiddetti Lobi di Roche. Se misuriamo la distanza da L_1 a M_1 ed M_2 rispettivamente, troviamo le seguenti approssimazioni:

$$l_1 = a(0.5 - 0.227 \log(\frac{M_2}{M_1})) \quad (2.25)$$

$$l_2 = a(0.5 + 0.227 \log(\frac{M_2}{M_1})) \quad (2.26)$$

2.3 Trasferimento di massa

Per quanto detto nel capitolo precedente, è possibile affermare che in un sistema binario avviene il trasferimento di massa tra le due stelle quando una delle due ha riempito completamente il suo Lobo e questo avviene attraverso il punto lagrangiano L_1 . Volendo analizzare questo tipo di processo, introduciamo preliminarmente l'espressione del momento angolare

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

dato dal prodotto tra il vettore posizione r e la quantità di moto p , espressa anche dal prodotto della massa m per la sua velocità v . Volendone considerare il modulo si avrà $L = rmv \sin \theta$ e poichè in questo caso (ossia in L_1) l'angolo è $\theta = 90$, essendo $r \perp v$, allora l'espressione si semplifica in $L = rmv$. Trovandoci in un sistema binario introduciamo anche il concetto di massa ridotta $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$, dove con M_1 ed M_2 indichiamo le masse delle due stelle. Consideriamo un'orbita ellittica e calcoliamo il valore dei raggi al perielio e all'afelio

$$r_p = a(1 - e) \quad r_a = a(1 + e)$$

Poichè vi è la conservazione del momento angolare allora $\mu r_p v_p = \mu r_a v_a$, dove v_p e v_a indicano le velocità al perielio e all'afelio di una intorno all'altra,

da cui ricaviamo

$$\frac{v_p}{v_a} = \frac{r_a}{r_p} = \frac{(1+e)}{(1-e)} \quad (2.27)$$

Inoltre per la conservazione dell'energia al perielio e all'afelio avremo

$$\frac{1}{2}\mu v_p^2 - G\frac{M\mu}{a(1-e)} = \frac{1}{2}\mu v_a^2 - G\frac{M\mu}{a(1+e)} \quad (2.28)$$

dove indichiamo con $M = M_1 + M_2$, con μ la massa ridotta e con e l'eccentricità orbitale. L'equazione (2.28) si può scrivere:

$$\frac{1}{2}\mu(v_p^2 - v_a^2) = \frac{GM\mu}{a}\left(\frac{1}{1-e} - \frac{1}{1+e}\right)$$

raccogliendo v_p e usando la formula (2.27) avremo

$$\frac{1}{2}\mu v_p^2 \left(1 - \frac{v_a^2}{v_p^2}\right) = \frac{GM\mu}{a} \left(\frac{1+e-1+e}{1-e^2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\mu v_p^2 \left(1 - \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}\right) = \frac{GM\mu}{a} \left(\frac{2e}{1-e^2}\right)$$

da cui si avrà

$$\mu v_p^2 \frac{2e}{(1+e)^2} = \frac{GM\mu}{a} \left(\frac{2e}{(1-e)(1+e)}\right)$$

e infine si ottiene

$$v_p^2 = \frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e}\right) \quad (2.29)$$

Tutto ciò ci induce ad affermare che:

$$\begin{aligned} L &= \mu r_p v_p \\ L &= \mu a(1-e) \sqrt{\frac{GM(1+e)}{a(1-e)}} \\ &= \mu \sqrt{a^2(1-e)^2 \frac{GM(1+e)}{1-e}} \end{aligned}$$

ottenendo

$$L = \mu \sqrt{GMa(1-e^2)}$$

Se assumiamo l'eccentricità $e = 0$ allora $L = \mu\sqrt{GMa}$. Se supponiamo che non vi sia perdita di massa e di momento angolare, quindi che nel trasferimento tra le stelle non vi sia dispersione di massa, allora si semplifica il problema e possiamo porre

$$\begin{aligned}\frac{dM}{dt} &= 0 \\ \frac{dL}{dt} &= 0\end{aligned}$$

Poichè vale la conservazione del momento angolare, possiamo avere informazioni su come il trasferimento di massa agisce sulla separazione delle due componenti, ossia su $a = l_1 + l_2$

$$\begin{aligned}\frac{dL}{dt} &= \frac{d}{dt}(\mu\sqrt{Gma}) \\ 0 &= \sqrt{GM}\left(\frac{d\mu}{dt}\sqrt{a} + \frac{\mu}{2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}\right) \\ \frac{d\mu}{dt}\sqrt{a} &= -\frac{\mu}{2\sqrt{a}}\frac{da}{dt}\end{aligned}$$

e quindi infine:

$$-\frac{2}{\mu}\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{a}\frac{da}{dt} \quad (2.30)$$

Da quest'ultima relazione si evince il legame tra l'evoluzione della massa ridotta μ nel tempo con l'evoluzione della separazione delle due componenti a nel tempo.

Andando a calcolare esplicitamente la derivata della massa ridotta nel tempo, otteniamo due equazioni che andranno a descrivere le conseguenze dovute al trasferimento di massa (ricordando che $M = M_1 + M_2$ e $\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$):

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{dt} &= \frac{1}{M}\frac{d}{dt}(M_1 M_2) \\ &= \frac{1}{M}\left(\frac{dM_1}{dt}M_2 + \frac{dM_2}{dt}M_1\right)\end{aligned}$$

Nelle ipotesi iniziali abbiamo affermato che il sistema non perde massa durante il processo, per cui tutta la massa persa dalla prima stella verrà tutta acquisita dalla seconda stella. Per cui poniamo

$$\dot{M}_1 = \frac{dM_1}{dt} \quad \dot{M}_2 = \frac{dM_2}{dt} \quad \dot{M}_1 = -\dot{M}_2$$

e otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= \frac{1}{M}(\dot{M}_1 M_2 + M_1 \dot{M}_2) \\ &= \frac{1}{M}(\dot{M}_1 M_2 - M_1 \dot{M}_1) \\ &= \frac{\dot{M}_1}{M}(M_2 - M_1) \end{aligned}$$

Se si sostituisce questo risultato in (2.30) si ottiene

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = -\frac{2}{\mu} \frac{M_2 - M_1}{M} \dot{M}_1$$

che si può riscrivere come

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{2\dot{M}_1(M_1 - M_2)}{M_1 M_2} \quad (2.31)$$

Questo risultato ci descrive come la separazione a varii a seconda del trasferimento di massa da M_2 a M_1 . Andando a riprendere la Terza Legge di Keplero nella forma vista in (2.8) e calcolandone la derivata rispetto al tempo si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \sqrt{G(M_1 + M_2)} a^{-\frac{5}{2}} \frac{da}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{3}{2} \sqrt{G(M_1 + M_2)} a^{-\frac{3}{2}} a^{-1} \frac{da}{dt} \end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo ottenuto le due equazioni principali che cercavamo:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (2.32)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 2\dot{M}_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \quad (2.33)$$

Secondo quest'ultime otteniamo le variazioni nel tempo della separazione del sistema binario e della frequenza angolare dell'orbita, ossia il periodo; per quest'ultima vale che mentre l'orbita si restringe, la frequenza angolare cresce. Nel capitolo 3 esamineremo alcuni processi astrofisici ed useremo queste due formule per poter spiegare un feedback positivo o negativo, e quindi un conseguente trasporto di massa crescente o meno.

Capitolo 3

Applicazione Astrofisica

3.1 Evoluzione Stellare in un sistema binario

Così come affermato nel primo capitolo, quando si analizzano i sistemi binari, si deve tener conto della distanza tra le due stelle, la quale risulterà essere sufficientemente piccola da non poterle considerare separatamente, ma tale che le stelle possano influenzarsi a vicenda. Una importante conseguenza, che abbiamo analizzato nella sezione 2.3, è data dal trasferimento e quindi variazione della massa delle stelle coinvolte.

Durante la fase di Main Sequence (ossia Sequenza Principale) le stelle e soprattutto i loro raggi non subiscono variazioni significanti e la loro evoluzione procede nei rispettivi Lobi di Roche; quando una delle due stelle esaurisce l'idrogeno presente nel suo nucleo e diventa una gigante, allora il suo nucleo si contrae rapidamente e i suoi strati esterni si espandono nel Lobo di Roche. Una volta riempito completamente, la stella trasferisce massa alla sua compagna attraverso il punto lagrangiano in comune tra di essi (L_1).

Come possiamo osservare nella Figura 3.1 seguente, consideriamo due stelle A e B di masse differenti, rispettivamente $M_A > M_B$ (punto (a)); le due stelle procedono nella loro evoluzione fino a che la stella A riempie completamente il suo Lobo di Roche (punto (b)). Giunti a questo istante, la stella

A vorrebbe continuare ad espandersi, allora per far ciò si attua un processo di trasferimento di massa alla sua stella compagna utilizzando l'unico punto in comune tra di loro, ossia il Punto Lagrangiano Interno L_1 . In questo modo la stella B accresce la sua massa e ciò avviene con la formazione di un disco di accrescimento (punto (c)).

Nella fase (d), la stella A inizia a divenire una *Nana Bianca* e la stella B, che risulta essere più grande della sua compagna, inizia ora la sua evoluzione. Anch'essa andrà a riempire il suo Lobo e sempre attraverso L_1 trasferisce altra massa alla Nana Bianca. Questo processo genera un'esplosione nucleare, causata dall'accumulo di idrogeno sulla superficie esterna della Nana Bianca e dà origine al fenomeno di *Nova*, ossia Stella Nuova, che fa aumentare la luminosità della stella di parecchi ordini di grandezza (punto (e)). La massa della Nana Bianca ora supera la massa limite di Chandrasekar, che corrisponde a $1.4 M_{\odot}$; quest'ultima indica un limite superiore per la massa delle Nane Bianche secondo cui oltre di esso la pressione di degenerazione degli elettroni non si può più opporre alla gravità. Si genera, quindi, un'esplosione con la creazione di una *Supernova Ia* (punto (f)).

Possiamo, quindi, riassumere le fasi del processo sopra descritto affermando che tra due stelle di masse differenti avviene un trasferimento di massa da una all'altra stella attraverso il punto di contatto L_1 e conseguentemente perdita di massa e variazione dell'orbita (così come descritto dalle equazioni 2.32 e 2.33).

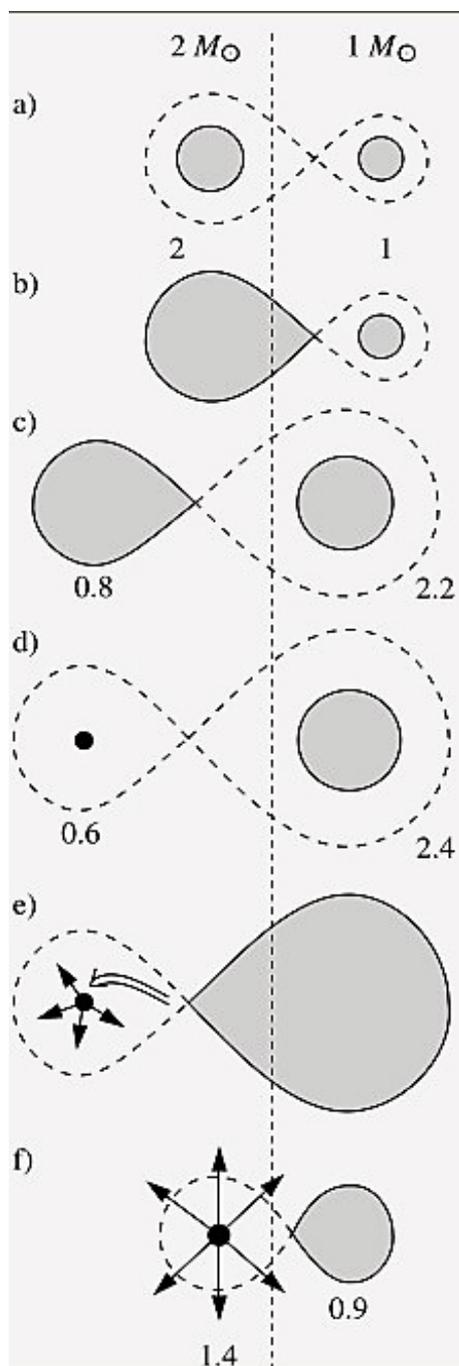


Figura 3.1: Evoluzione di un sistema binario. Fonte: Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; *Fundamental Astronomy*.

3.1.1 Esempio di Evoluzione di un sistema binario massiccio

Al termine della sezione precedente abbiamo fornito una descrizione qualitativa di Evoluzione di un sistema binario; nel seguito proporremo una descrizione più qualitativa del processo prendendo in riferimento un sistema costituito da due stelle massicce, siano $M_1 = 20M_\odot$ e $M_2 = 6M_\odot$ le masse delle stelle con periodo iniziale di 4,4 giorni. La stella predominante inizia la sua evoluzione, bruciando idrogeno, e dopo un tempo di $6 \times 10^6 yr$ esaurisce il suo combustibile nucleare. Come conseguenza di avrà un'espansione della stella primaria sino al riempimento del suo Lobo di Roche. Tutta la materia in eccesso, invece, sarà trasferita alla sua compagna attraverso il punto lagrangiano interno L_1 con un tempo scala di $\sim 10^4 yr$.

Dopo che il trasferimento di massa è finito, le nuove masse saranno di $M_1 = 5.4M_\odot$ e $M_2 = 20.6M_\odot$. Ora, la stella M_1 inizia a bruciare Elio nel suo nucleo, avendo terminato tutto l'Idrogeno precedentemente, mentre la stella M_2 , essendo più massiccia, può iniziare la sua evoluzione, bruciando idrogeno che proveniva dal traferimento di massa. La prima stella evolve rapidamente ed esplose come Supernova di tipo *II*, durante l'esplosione espelle altra massa e resta come una stella compatta (stella di neutroni) con massa di $M_1 = 2M_\odot$. La massa che è stata espulsa viene persa e quindi il sistema diventa più largo. Contemporaneamente, la stella M_2 si sta evolvendo, perchè è in fase di Sequenza Principale e sta bruciando idrogeno nel suo nucleo, ma la nuova configurazione del sistema fa sì che non ci sia più scambio di massa tra le due stelle compagne, e ciò è dovuto proprio all'allontanamento tra le componenti dopo l'esplosione.

Al termine dell'evoluzione della seconda stella, essa inizia ad espandersi e a riempire il suo Lobo di Roche; la materia in eccesso viene portata via dal vento stellare. Una parte di questa viene anche attratta dalla stella compatta e quindi vi è emissione di raggi X. In seguito, quando la massa di M_2 eccede dal suo Lobo, termina l'emissione di raggi X; il sistema perde rapidamente massa.

Si giunge al termine quando il sistema è composto dalla stella compatta di $M_1 = 2M_\odot$ e dalla sua stella compagna, che sarà una stella di Elio. Quest'ultima esploderà come supernova e potrà portare alla rottura del sistema, anche se per alcuni valori rimarrà ancora legato, ossia quando la massa espulsa è minore della metà della massa del sistema. La seguente figura riassume i passaggi principali dell'evoluzione appena descritta.

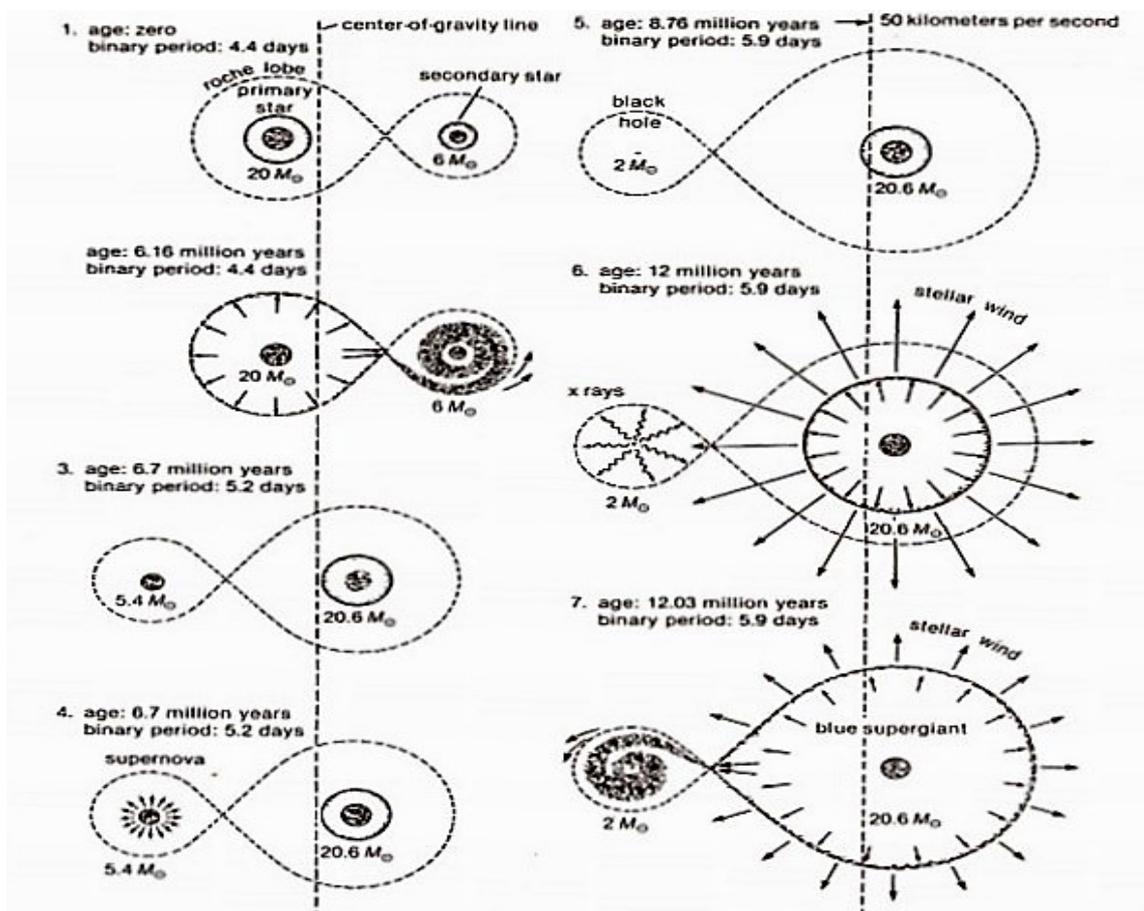


Figura 3.2: Evoluzione di un sistema binario massiccio. Fonte: Ferraro F.R., Slides del corso *Evoluzione Stellare - Parte V*.

3.2 Feedback positivo e negativo

Lo scopo di questa sezione sarà quello di mettere in luce tutti gli aspetti sinora analizzati solo dal punto di vista teorico e fornire delle applicazioni sperimentali delle formule enunciate nei capitoli precedenti. Al termine del secondo capitolo abbiamo esplicitato le seguenti due formule:

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = 2\dot{M}_1 \frac{M_1 - M_2}{M_1 M_2} \quad (3.2)$$

dove si evidenziano le variazioni nel tempo della separazione del sistema binario (ossia a) e della frequenza angolare dell'orbita (ossia w).

Utilizzando proprio quest'ultime possiamo fornire due esempi applicativi:

1. Si considerino due stelle con masse $M_1 > M_2$, quindi una prima conclusione sarebbe quella di affermare che essendo la stella di massa M_1 predominante sarà lei ad evolversi più rapidamente e quindi occupare prima tutto il proprio Lobo di Roche. Ciò implica che M_1 trasferisce la sua massa in eccesso su M_2 , naturalmente attraverso il punto lagrangiano L_1 posto tra di essi; di conseguenza si avrà che $\frac{dM_1}{dt} < 0$.

Ma allora, utilizzando la formula (3.2), visto che

$$\dot{M}_1 < 0 \quad (M_1 - M_2) > 0$$

ciò implica il fatto che $\frac{da}{dt} < 0$.

Possiamo quindi concludere che il valore di $a = l_1 + l_2$ diminuisce nel tempo, quindi la separazione delle due componenti diminuisce, avvicinandole. Dunque, il rapporto $\frac{M_2}{M_1}$ aumenta.

Applicando questo risultato all'espressione matematica di l_1 , espressa nell'equazione 2.25, deduciamo che l_1 diminuisce, quindi il raggio del Lobo di Roche diminuisce e il trasferimento di massa aumenta. Questo è un esempio di feedback positivo.

2. Supponiamo, ora, che la massa predominante del sistema abbia terminato la sua evoluzione e si sia raffreddata come Nana Bianca; la massa M_2 inizierà la sua evoluzione, sino a riempire il suo Lobo di Roche. Come conseguenza, la massa in eccesso sarà trasferita sulla Nana Bianca. Supponendo sempre che $M_1 > M_2$ allora avremo che

$$\dot{M}_1 > 0 \quad (M_1 - M_2) > 0$$

da cui deduciamo che $\frac{da}{dt} > 0$.

In questo caso, il valore di a aumenta, il Lobo di Roche di M_2 si espande e quindi abbiamo un feedback negativo poichè il trasferimento di massa diminuisce.

3.3 Il Sistema Sole-Terra

Nonostante sinora abbiamo focalizzato l'attenzione solamente sui sistemi binari stellari, tutto ciò precedentemente analizzato ha validità in ogni sistema binario. In questo capitolo prenderemo in riferimento il sistema Sole-Terra. Ponendo come $M_1 = M_{Sole}$, $M_2 = M_{Terra}$ e $a =$ distanza Sole-Terra (ossia 1AU) nelle equazioni 2.25 e 2.26, si ricava

$$l_1 = a(0.5 - 0.227 \log(\frac{M_{Terra}}{M_{Sole}})) = 1502000km \quad (3.3)$$

$$l_2 = a(0.5 + 0.227 \log(\frac{M_{Terra}}{M_{Sole}})) = 1492000km \quad (3.4)$$

Come si può osservare nella Figura 3.3 e considerando le osservazione già citate al termine del paragrafo 2.2.2, il punto L_1 del sistema Sole-Terra è un ideale punto di osservazione del Sole, in quanto lì non è mai eclissato dalla Terra o dalla Luna; quest'ultimo è posto ad una distanza di circa 1,5 milioni di chilometri dalla Terra.

Il punto L_2 , invece, giace anch'esso sulla stessa retta di L_1 , però è situato oltre la massa più piccola M_2 , ossia la Terra. In questo punto la forza gravitazionale combinata dei due corpi uguaglia la forza centrifuga. Il punto L_2

del sistema Sole - Terra è un eccellente punto di osservazione dello spazio, a causa della stabilità dell'illuminazione solare che facilita la gestione termica della strumentazione e il puntamento verso lo spazio profondo. Anche'esso è posto ad una distanza di circa 1,5 milioni di chilometri dalla Terra.

Come i precedenti, anche L_3 giace sulla medesima retta, ma oltre il Sole, leggermente all'esterno dell'orbita del Sole intorno alla Terra.

I punti L_4 e L_5 giacciono nei terzi vertici dei due triangoli equilateri nel piano dell'orbita aventi come base il segmento che unisce i centri di massa del Sole e della Terra. In L_4 e L_5 le distanze tra essi e le due masse sono uguali, per cui sono punti di equilibrio.

Dal punto di vista astrofisico, i punti lagrangiani sono di notevole importanza in quanto sono gli unici punti in cui si possono posizionare corpi esterni minori e infatti essi vengono usati soprattutto per lanciare telescopi e satelliti. In L_1 troviamo SOHO, telescopio spaziale che studia il Sole, e ACE, satellite artificiale che studia le particelle energetiche del vento solare. I satelliti Gaia, Planck Surveyor ed Herschel Space Observatory, tutti dell'Agenzia Spaziale Europea (ESA), sono già in orbita attorno ad L_2 , anche il satellite Spektrum Roentgen Gamma che trasporta il telescopio a raggi X e Rosita è stato lanciato nel 2019 ed è lì in orbita. L_2 sarà anche la destinazione del telescopio spaziale James Webb Space Telescope (JWST), erede di Hubble, il cui lancio è previsto per il 2021 e, in tempi ancora più lontani, del telescopio a raggi X Athena (2032).

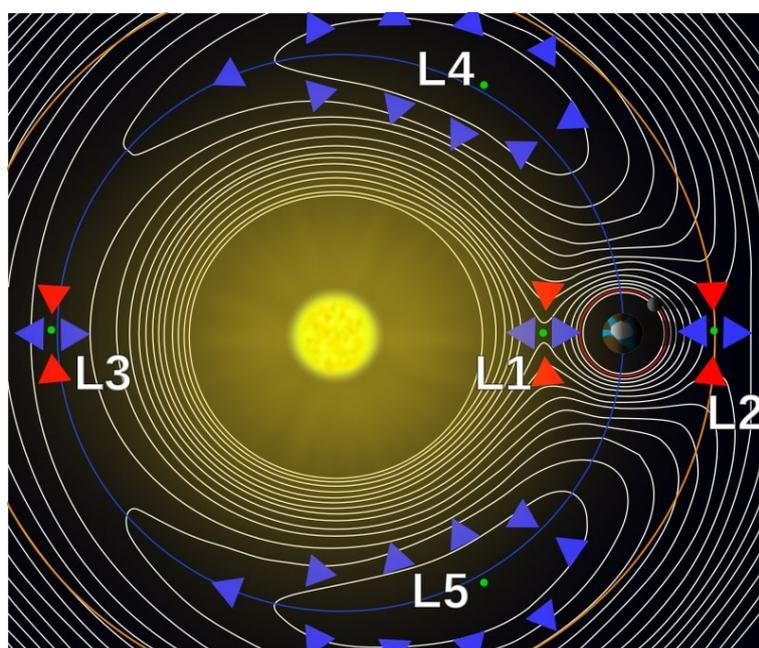


Figura 3.3: Rappresentazione dei punti lagrangiani e delle superfici equipotenziali di un sistema a tre corpi, dove Sole e Terra sono le masse significative. Fonte: NASA. (Figura non in scala).

Bibliografia

- [1] Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; *Fundamental Astronomy*; Springer (2017).
- [2] Pettini Max, *Lecture 18 In: Structure and Evolution of Stars*, University of Cambridge (2013).
- [3] Ferraro F.R., Slides del corso *Evoluzione Stellare - Parte V*, Università di Bologna (2017 – 2018).
- [4] Brusa Marcella, Slides del corso *Fondamenti di Astronomia*, Università di Bologna (2017 – 2018).
- [5] Szebehely V., *Theory of Orbits: The Restricted Problem of Three Bodies*, New York and London: Academic Press (1967)

Ringraziamenti

Desidero rivolgere un sentito ringraziamento alla Prof.ssa Brusa Marcella per avermi affiancata nella stesura di questa tesi con grande professionalità e disponibilità.

Ringrazio di cuore i miei genitori perchè sono sempre stati al mio fianco, nelle gioie e nelle difficoltà di questo percorso; mi hanno insegnato il valore e l'importanza dello studio sin da piccolina ed è grazie a loro se sono giunta a questo primo e importante traguardo. Spero siate fieri di me. Ringrazio mia sorella Serena che ha sempre fatto di tutto per strapparmi un sorriso con la sua ironia, abbiamo riso e pianto assieme perchè è questo che fanno due sorelle, sono sempre lì a sostenersi a vicenda. Ringrazio Alessio, che con la sua sensibilità ha saputo darmi sempre il supporto necessario per affrontare qualsiasi sfida, perchè senza la tua spalla non sarebbe stato lo stesso, perchè nonostante i miei giorni neri sei stato presente sin dall'inizio. Grazie ad Alessandra e Giorgia che, nonostante la lontananza, mi hanno sempre supportata e incoraggiata. Le nostre interminabili chiamate ci legano e non potrei mai rinunciare a voi, mie compagne di vita.

Ringrazio Martina, abbiamo condiviso insieme questo percorso e ci siamo incoraggiate a vicenda, instaurando un legame così solido che non sarà per niente facile liberarti di me. Grazie anche a Fabiana per aver riso e dato di matto con me quando era necessario, ho capito subito che avrei potuto contare su di te sin da quando ci siamo ritrovate per caso compagne di banco. Grazie a Valeria per aver condiviso questo cammino con me quotidianamente nella nostra casina. Grazie a Giacomo, per aver reso più vivace la settimana

piena di infinite lezioni. Ringrazio anche Nicole, Riccardo e tutti gli amici e compagni di corso per avermi dato quella leggerezza che mi ha sollevato il morale.

Infine, un grandissimo ringraziamento va ai miei nonni, Lucia, Francesco, Maria ed Emanuele, perchè con le loro parole piene d'amore sono stati un esempio di vita importante per me. Non sono molto brava con le parole, ma spero di avervi strappato un sorriso e di avervi resi fieri di me. Mi auguro di proseguire questo percorso con la stessa determinazione con cui ho scelto di intraprenderlo e spero di avervi tutti ancora al mio fianco.