

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

---

SCUOLA DI SCIENZE  
Corso di Laurea in Matematica

**DETERMINAZIONE DELLE LEGGI DI  
KEPLERO NEL PROBLEMA DEI DUE CORPI E  
STUDIO DEI MOTI KEPLERIANI**

**Tesi di Laurea in Fisica Matematica**

**Relatore:**  
Chiar.ma Prof.ssa  
EMANUELA CALICETI

**Presentata da:**  
MICHELA CIMAGLIA

**Sessione VI  
Anno Accademico 2018-2019**



*Ai miei genitori*



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>3</b>
<b>1 Cenni storici</b>	<b>5</b>
<b>2 Il problema dei due corpi</b>	<b>9</b>
2.1 Cinematica relativa del punto . . . . .	9
2.2 Forze . . . . .	12
2.3 Dinamica relativa del punto . . . . .	15
<b>3 Seconda legge di Keplero</b>	<b>19</b>
3.1 Velocità areolare . . . . .	19
3.2 Moto piano di un punto sotto l'azione di un campo centrale di forze . .	22
3.3 Costante delle aree . . . . .	23
<b>4 Problema di Keplero e terza legge</b>	<b>25</b>
4.1 Conservazione dell'energia, riduzione alle quadrature . . . . .	25
4.2 Determinazione delle orbite del problema di Keplero . . . . .	28
4.3 L'ellisse di Keplero e la terza legge . . . . .	33
<b>5 Moti kepleriani</b>	<b>37</b>
5.1 Descrizione dei moti kepleriani . . . . .	37
5.2 Elementi orbitali . . . . .	43
5.3 Cenni al problema dei tre corpi . . . . .	45
<b>Bibliografia</b>	<b>47</b>
<b>Ringraziamenti</b>	<b>49</b>



# Introduzione

Questo lavoro di tesi, articolato in cinque capitoli, si propone come obiettivo l'analisi completa di una delle più importanti questioni della meccanica classica, ovvero il problema dei due corpi, con particolare riguardo alle soluzioni del cosiddetto problema di Keplero. Verranno enunciate e dimostrate, anche in più varianti, le leggi di Keplero e si descriveranno nel dettaglio i moti kepleriani, integrando con considerazioni di tipo astronomico e storico: a tal proposito, il primo capitolo contiene una panoramica storica, attinta principalmente da [1], degli eventi più significativi che hanno portato alla (faticosa) formulazione da parte di Keplero dei famosi tre principi.

Le fondamenta per lo sviluppo del problema dei due corpi si identificano con due temi della meccanica razionale. Il primo è la cinematica relativa del punto, che ci consente di stabilire una relazione per la velocità (nel *teorema di composizione delle velocità*) e accelerazione (nel *teorema di Coriolis*) di un punto materiale rispetto a due sistemi di riferimento in moto generico nel tempo l'uno rispetto all'altro; il secondo è la dinamica relativa del punto, nel cui ambito viene esaminata la dinamica del punto rispetto a un osservatore non inerziale, che ci permetterà, nota la forza di attrazione gravitazionale Newtoniana, di impostare il problema dei due corpi, dove identificheremo il corpo di massa maggiore (Sole) con l'origine del sistema non inerziale e il corpo di massa minore (pianeta) con un punto materiale mobile. Tutto ciò verrà esposto nel secondo capitolo, basato su [2] e [5].

Il terzo capitolo, basato su [2] e [3], è interamente dedicato alla seconda legge di Keplero. A partire dalle premesse del secondo capitolo, verranno mostrati alcuni risultati sulla velocità areolare (o areale) e sul momento della quantità di moto; ciò porterà all'enunciato del secondo principio: *le aree spazzate dal raggio vettore sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle*.

Nel quarto capitolo si indagherà la soluzione del problema di Keplero, il cui risultato costituisce il contenuto della prima legge: *le orbite descritte sono delle ellissi, delle quali il corpo di massa maggiore occupa uno dei due fuochi*. La determinazione delle traiettorie verrà proposta con due metodi differenti: il primo sfrutta il principio di conservazione dell'energia e si basa sull'equazione differenziale del primo ordine che ne consegue, mentre il secondo parte dall'equazione della dinamica relativa del punto e prevede l'utilizzo della *formula di Binet*. Verrà inoltre esposta la deduzione del

terzo principio, dimostrando che *il quadrato del periodo di rivoluzione di un pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell' orbita ellittica*, con costante di proporzionalità che non dipende dalle condizioni iniziali del moto del pianeta e con buona approssimazione nemmeno dalla massa del pianeta se questa viene considerata trascurabile rispetto a quella del Sole. Questa parte si basa prevalentemente su [3] e su [5].

Infine, nel quinto e ultimo capitolo basato su [3] e [4], si tratterà dei moti kepleriani, in particolare dell'energia totale di un moto kepleriano e del suo legame con l'eccentricità dell'orbita. Si deriveranno le equazioni parametriche dei moti ellittici e l'*equazione di Keplero*, che lega fra loro le principali proprietà geometriche dell'orbita di un moto kepleriano. L'elaborato si conclude con alcune nozioni astronomiche sulla descrizione delle traiettorie ellittiche nel nostro sistema solare e con dei brevi cenni al problema dei tre corpi.

# Capitolo 1

## Cenni storici

Keplero pubblicò nel 1609, dopo dieci anni di lavoro, il trattato “Astronomia Nova”, che conteneva due dei suoi tre principi. Ma gli albori dello studio dei moti dei pianeti risalgono alla Grecia antica: si deve ai Pitagorici infatti il merito di essere stati i primi a pensare che il mondo potesse essere compreso tramite la logica. Una delle sfide più rilevanti fu quella di cercare di elaborare un modello che descrivesse il moto degli oggetti celesti; il primo modello che venne universalmente accettato fu quello del geocentrismo: il Sole, la Luna, le stelle e gli altri pianeti ruotano circolarmente attorno alla Terra, che rimane invece ferma. Anche gli abitanti dell’antico Oriente giunsero alle stesse conclusioni dei Greci; tuttavia, ben presto si accorsero osservando i cinque pianeti visibili ad occhio nudo (Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno) che non sempre questi si muovono sulla sfera celeste di moto diretto, da ovest a est, ma spesso sembrano tornare indietro di moto retrogrado, anche per settimane o mesi, per poi riprendere il loro percorso (come rivela l’etimologia greca, “pianeta” significa stelle vagabonde). Ad esempio, Marte compie il suo moto retrogrado circa ogni ventidue mesi. Il modello geocentrico venne quindi aggiornato, prima da Apollonio di Perga e Ipparco di Nicea nel secondo secolo a.C., poi da Tolomeo nel secondo secolo d.C., quando pubblicò il noto trattato astronomico composto da ben tredici volumi: l’Almagesto. Secondo la visione Tolemaica, ogni pianeta si muove lungo un cerchio minore, detto epiciclo, il cui centro ruota a sua volta lungo un cerchio più grande, chiamato deferente, centrato approssimativamente nella Terra. Sia l’epiciclo che il deferente seguono lo stesso verso di rotazione (antiorario): così i Greci si spiegarono i moti retrogradi osservati nei pianeti. Nell’Almagesto di Tolomeo si trovano le descrizioni delle grandezze delle orbite e delle velocità di rotazione che più si accordarono con i dati osservativi raccolti in centinaia di anni, a disposizione di Tolomeo nella grande biblioteca di Alessandria. L’accuratezza del modello e la precisione delle previsioni che poteva fornire fecero del sistema Tolemaico il riferimento più utilizzato dagli astronomi per i successivi mille anni. La spiegazione Tolemaica si rivelò insoddisfacente già nel Medioevo, sia nella cultura Islamica che in quella Europea, per la mancanza di una relazione che legasse i vari

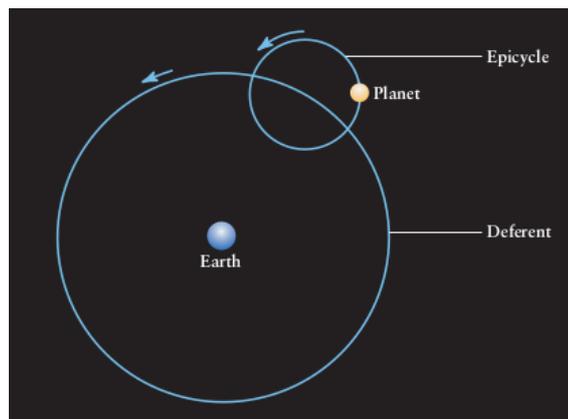


Figura 1.1: *Il modello Tolemaico (immagine presa da [1])*

pianeti fra di loro: Tolomeo trattò la descrizione di ogni pianeta indipendentemente dall'esistenza degli altri, ed emerse l'esigenza di trovare delle regole semplici che si potessero applicare a tutti i pianeti, abbandonando il meccanicismo dei calcoli *ad hoc*. Nonostante una teoria eliocentrica fosse già stata proposta (ma anche subito accantonata) ben quattro secoli prima di Tolomeo da parte di Aristarco di Samo, il quale dimostrò che il Sole è più grande della Terra ed è quindi probabile centro di rotazione, bisognerà attendere l'astronomo, matematico e presbitero polacco Niccolò Copernico, nel Cinquecento, per costruire un modello più naturale dell'universo, che ponga il Sole al centro del moto degli altri pianeti. Copernico capì che Mercurio e Venere si trovano in realtà molto più vicini al Sole di quanto lo siano la Terra e gli altri pianeti visibili, ma non solo: il moto retrogrado si poté spiegare ugualmente e con più facilità, assumendo che i pianeti orbitino attorno al Sole con velocità diverse. Copernico riuscì anche a calcolare con una precisione per quei tempi sbalorditiva il periodo di rivoluzione dei pianeti visibili e la loro distanza media dal Sole: questi dati gli permisero di giungere alla cruciale conclusione che più il pianeta si trova lontano dal Sole, più tempo impiega per compiere un'orbita; pertanto più l'orbita è grande, meno velocemente il pianeta si muove. Tuttavia, Copernico era convinto come i suoi predecessori che la forma delle traiettorie dei pianeti fosse circolare, anche se la circonferenza non sembrava descrivere in modo completamente corretto i tragitti osservati: fece ammenda aggiungendo un epiciclo ad ogni pianeta, per far tornare i calcoli. Il suo lavoro, chiamato "De revolutionibus orbium coelestium", venne pubblicato l'anno della sua morte, nel 1543, ma per alcuni decenni non venne preso in considerazione da parte della comunità scientifica, poiché come strumento di predizione non risultò essere tanto più preciso del sistema Tolemaico; inoltre le orbite dei pianeti restavano descritte come combinazioni di cerchi, non molto diversamente dal modello geocentrico.

Solo trent'anni dopo la morte di Copernico vennero raccolti abbastanza dati osservativi da convincere gli astronomi della validità del sistema Copernicano; il merito si deve

al danese Tycho Brahe, che l'11 Novembre 1572, all'età di venticinque anni, ebbe la fortunata occasione di osservare la morte di una stella molto massiccia, che oggi chiamiamo supernova. L'oggetto apparve perfino più luminoso di Venere e scomparve gradualmente dopo diciotto mesi: Tycho Brahe ne approfittò per stimare, servendosi del fenomeno di parallasse, la distanza della stella dalla Terra, che risultò essere molto più grande di ciò che si pensava, confutando la visione aristotelica di una volta celeste immutabile e permanente. Grazie a considerazioni di questo tipo si cominciò a crede-

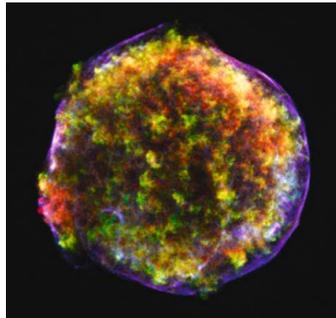


Figura 1.2: *I resti di supernova esplosa nel 1572 ai raggi X (immagine presa da [4])*

re che l'universo non fosse qualcosa di assolutamente statico, ma che a sua volta può evolvere nel tempo: l'importanza di questo cambio di paradigma fu tale da sollecitare il re di Danimarca a finanziare la costruzione di due osservatori astronomici accessoriati con strumenti più moderni, a disposizione di Tycho Brahe che colse l'opportunità per calcolare con maggior precisione le posizioni delle stelle e dei pianeti. Brahe cercò una corrispondenza fra i suoi dati e la teoria di Copernico, e in particolare tentò di individuare l'effetto di parallasse che le stelle più vicine alla Terra avrebbero dovuto mostrare se fosse stata la Terra a essere in movimento: non ci riuscì, e concluse che Copernico dovesse aver sbagliato tutto; ma in realtà questo accadde perché non esistevano ancora degli strumenti abbastanza sofisticati per rilevare eventi così lontani: solo nell'Ottocento si riuscì a registrare per la prima volta tale fenomeno. Il modello sostenuto da Brahe, il cosiddetto sistema ticonico, proponeva un compromesso fra quello Tolemaico e quello Copernicano, in cui il Sole girerebbe attorno alla Terra immobile e gli altri cinque pianeti ruoterebbero intorno al Sole. Brahe si trasferì a Praga nel 1598, e divenne astronomo (e astrologo personale) alla corte dell'Imperatore del Sacro Romano Impero Rodolfo II d'Asburgo fino alla sua morte, nel 1601, dovuta allo scoppio della vescica durante un banchetto, in quanto ritenne poco cortese congedarsi prima della sua conclusione.

Il matematico tedesco Johannes Kepler, diventato alunno di Tycho Brahe a Praga e suo successore come astronomo di corte, seppe interpretare la mole di dati raccolti dal maestro e convogliarli in tre principi, rappresentanti i moti degli oggetti celesti. La novità principale apportata da Keplero sta nella rottura con un vecchio pregiudizio: le orbite

dei pianeti non riproducono una circonferenza, figura geometrica che rimanda alla perfezione degli astri e del divino, ma è l'ellisse la traiettoria che meglio realizza i risultati di Tycho Brahe. Keplero pubblicò questo suo primo principio nel 1609, a cui oggi ci si riferisce come *prima legge di Keplero: l'orbita di un pianeta attorno al Sole è un'ellisse con il Sole in uno dei due fuochi*. Sempre nel 1609 venne pubblicata la sua seconda intuizione: la velocità del pianeta varia a seconda di dove si trova nell'orbita, in particolare quando si trova vicino al Sole si muove più velocemente di quando si trova nel punto più lontano; la *seconda legge di Keplero* viene enunciata in questo modo: *la linea che collega il pianeta al Sole spazza aree uguali in tempi uguali*. L'ultimo principio, pubblicato nel 1618, è una sorprendente relazione che lega pianeti diversi che orbitano attorno allo stesso Sole: la *terza legge di Keplero* asserisce che *il quadrato del periodo siderale di un pianeta è direttamente proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'orbita*. La corrispondenza viene verificata anche da quei pianeti che ai tempi di Keplero non si conoscevano ancora.

La rivoluzione kepleriana sta, oltre che nel connubio tanto cercato fra semplicità e accuratezza, nella versatilità dei tre principi: questi infatti non valgono solo per pianeti specifici, ma per tutti gli oggetti che si trovano nello spazio e che vi orbitano, come stelle binarie, satelliti, navicelle e persino galassie. Ultima, ma non meno importante, è la funzione che le leggi di Keplero hanno avuto nell'affermazione dell'eliocentrismo, prima con Galileo Galilei, poi con Isaac Newton: Galileo, puntando verso il cielo il telescopio inventato dagli olandesi, contribuì ad ampliare in modo massiccio i dati osservativi raccolti fino a quel momento, suggerendo sempre più indubbiamente che è il Sole il centro di rivoluzione dei pianeti; Newton mostrò che i principi di Keplero si possono derivare logicamente (e quindi è possibile confermarne la validità) dalle sue tre leggi della dinamica e dalla legge di gravitazione universale, la prima in assoluto a descrivere non le posizioni e le velocità, ma il perché del moto dei corpi, sia sulla Terra che nel cosmo.

# Capitolo 2

## Il problema dei due corpi

### 2.1 Cinematica relativa del punto

In un sistema di riferimento  $(O) \equiv (O, x, y, z)$  in  $\mathbb{R}^3$ , il moto di un punto materiale  $P$  si può descrivere tramite l'equazione vettoriale del moto:  $t \mapsto P - O = P(t) - O$  dove  $O$  è l'origine e  $P \equiv P - O$  è il vettore posizione tale che  $P = P(t)$ ,  $\forall t \geq t_0$ . La variabile  $t \in \mathbb{R}$  denota la variabile temporale e  $t_0$  rappresenta l'istante iniziale. Nella rappresentazione di un vettore come classe di equivalenza di segmenti orientati (muniti di freccia) aventi stessa lunghezza (modulo del vettore), direzione e verso, abbiamo identificato il segmento orientato  $P - O$  (e il vettore che esso rappresenta) con il suo secondo estremo (con freccia)  $P$ . In questo modo l'equazione vettoriale del moto di  $P$  può essere riscritta come

$$P = P(t), \quad t \geq t_0$$

e questa è equivalente alle tre equazioni scalari

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad \forall t \geq t_0,$$

che costituiscono le equazioni parametriche della traiettoria, cioè della curva geometrica su cui si muove il punto. Indicando con  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  la base canonica di  $\mathbb{R}^3$ , la posizione di  $P$  al generico istante  $t$  può essere scritta come

$$P(t) = P(t) - O = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad (2.1)$$

o, più brevemente, sottintendendo la dipendenza da  $t$ :  $P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ . Con questa sintassi possiamo esprimere la velocità e l'accelerazione del punto  $P$

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \frac{d(P - O)}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2(P-O)}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k},$$

dove le derivate prime e seconde rispetto al tempo sono indicate, secondo la convenzione standard, con un punto e con due punti rispettivamente:  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ ,  $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ ,  $\dot{z} = \frac{dz}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ ,  $\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}$ .

Supponiamo ora di introdurre un secondo sistema di riferimento  $(O_1) \equiv (O_1, x_1, y_1, z_1)$  con la base ortonormale canonica  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ , in modo che i due sistemi siano in moto generico nel tempo l'uno rispetto all'altro e che il punto materiale  $P \in \mathbb{R}^3$  sia mobile sia rispetto ad  $(O)$  che ad  $(O_1)$ . Possiamo allora affermare i seguenti risultati.

**Proposizione 2.1.**  $\exists! \vec{\omega} \in \mathbb{R}^3$ , detto vettore di Poisson o velocità angolare, tale che soddisfi le formule di Poisson:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{i}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}_1 \\ \frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}_1 \\ \frac{d\vec{k}_1}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Convenzionalmente chiameremo il sistema  $(O)$  assoluto (o fisso) e il sistema  $(O_1)$  relativo (o mobile).

I due teoremi che seguono stabiliscono un'importante relazione fra la velocità e accelerazione assolute di  $P$  e quelle relative.

**Teorema 2.2** (di composizione delle velocità). *La velocità di un punto  $P \in \mathbb{R}^3$  rispetto al sistema assoluto  $(O)$  è data dalla formula*

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_r(P) \quad (2.3)$$

dove  $\vec{v}_1(P)$  è la velocità del punto rispetto al sistema relativo  $(O_1)$  e  $\vec{v}_r(P)$  è la velocità di trascinamento di  $P$ , cioè la velocità che  $P$  avrebbe se fosse rigidamente connesso con  $(O_1)$ .

*Dimostrazione.* Poiché

$$P - O = (P - O_1) + (O_1 - O) = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1 + (O_1 - O)$$

allora

$$\vec{v}(P) = \left[ \frac{d(P-O)}{dt} \right]_{(O)} = \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1 + x_1\dot{\vec{i}}_1 + y_1\dot{\vec{j}}_1 + z_1\dot{\vec{k}}_1 + \frac{dO_1}{dt}. \quad (2.4)$$

Innanzitutto, osserviamo che il termine  $\vec{v}_1(P) \equiv \dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1$  rappresenta la velocità di  $P$  rispetto al sistema relativo  $(O_1)$ . Inoltre, per le formule di Poisson si ha che

$$\vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + x_1\vec{\omega} \times \vec{i}_1 + y_1\vec{\omega} \times \vec{j}_1 + z_1\vec{\omega} \times \vec{k}_1 + \frac{dO_1}{dt} = \vec{v}_1(P) + \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1)$$

$$\Rightarrow \vec{v}(P) = \vec{v}_1(P) + \vec{v}_\tau(P) ,$$

dove  $\vec{v}_\tau(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1)$  è effettivamente la velocità che  $P$  avrebbe se fosse rigidamente connesso con  $(O_1)$ , ossia fisso rispetto ad  $(O_1)$ , perché in tal caso la velocità relativa  $\vec{v}_1(P)$  sarebbe nulla. A tal riguardo è opportuno ricordare anche la *formula fondamentale* della cinematica del corpo rigido (si veda [2] per i dettagli), secondo cui se  $P$  e  $O_1$  sono due generici punti di un corpo rigido si ha

$$\vec{v}(P) = \vec{v}(O_1) + \vec{\omega} \times (P - O_1), \quad (2.5)$$

essendo  $\vec{\omega}$  il vettore di Poisson di un sistema di riferimento solidale col corpo rigido.  $\square$

**Teorema 2.3** (di Coriolis). *L'accelerazione di un punto  $P \in \mathbb{R}^3$  rispetto al sistema assoluto  $(O)$  è data dalla formula*

$$\vec{a}(P) = \vec{a}_1(P) + \vec{a}_\tau(P) + \vec{a}_c(P) \quad (2.6)$$

dove  $\vec{a}_1(P)$  è l'accelerazione del punto rispetto al sistema relativo  $(O_1)$ ,  $\vec{a}_\tau(P)$  è l'accelerazione di trascinamento di  $P$  (cioè l'accelerazione che  $P$  avrebbe se fosse fisso a  $(O_1)$ ) e  $\vec{a}_c(P)$  è l'accelerazione complementare o di Coriolis definita da  $\vec{a}_c(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1(P)$ .

*Dimostrazione.* Essendo

$$\vec{a}(P) = \left( \frac{d^2 P}{dt^2} \right)_{(O)} = \left( \frac{d\vec{v}(P)}{dt} \right)_{(O)} ,$$

dalla (2.4) si ha

$$\vec{a}(P) = \ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \vec{j}_1 + \ddot{z}_1 \vec{k}_1 + 2(\dot{x}_1 \dot{\vec{i}}_1 + \dot{y}_1 \dot{\vec{j}}_1 + \dot{z}_1 \dot{\vec{k}}_1) + x_1 \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \ddot{\vec{k}}_1 + \frac{d^2 O_1}{dt^2}.$$

Per le formule (2.2) si ha che

$$\vec{a}(P) = \vec{a}_1(P) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1(P) + \vec{a}_\tau(P) = \vec{a}_1(P) + \vec{a}_c(P) + \vec{a}_\tau(P)$$

dove  $\vec{a}_1(P) = \ddot{x}_1 \vec{i}_1 + \ddot{y}_1 \vec{j}_1 + \ddot{z}_1 \vec{k}_1$  è l'accelerazione relativa di  $P$ ;  $\vec{a}_\tau(P) = x_1 \ddot{\vec{i}}_1 + y_1 \ddot{\vec{j}}_1 + z_1 \ddot{\vec{k}}_1 + \frac{d^2 O_1}{dt^2}$  e  $\vec{a}_c(P) = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1(P)$ .  $\square$

**Osservazione 2.4.**

$$\vec{a}_c = 0 \iff \begin{cases} \vec{\omega} = 0 & \Leftrightarrow (O_1) \text{ trasla rispetto a } (O) \\ \vec{v}_1(P) = 0 & \Leftrightarrow P \text{ è fisso su } (O_1) \\ \vec{v}_1(P) \text{ è parallelo a } \vec{\omega}. \end{cases}$$

## 2.2 Forze

Ricordiamo innanzitutto che dal punto di vista fisico una forza è un ente in grado di alterare lo stato di quiete o di moto di un corpo, ossia di generare un'accelerazione. In termini matematici si ha la seguente.

**Definizione 2.5.** *Dal punto di vista matematico, una forza è un vettore applicato, ossia una coppia  $(\vec{F}, P)$  con  $\vec{F}$  vettore della forza e  $P$  punto di applicazione. Inoltre il vettore  $\vec{F}$  in generale dipende dalla posizione di  $P$ , dalla sua velocità e dal tempo, ossia*

$$\vec{F} = \vec{F}(P, \vec{v}, t) = \vec{F}(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t).$$

Una forza  $(\vec{F}, P)$  si dice *posizionale* se  $\vec{F}$  non dipende dalla velocità di  $P$ , né dal tempo  $t$ , ma solo dalla posizione di  $P$ :  $\vec{F} = \vec{F}(P)$ .

Ricordiamo ora una grandezza centrale nella dinamica dei sistemi meccanici, ossia la nozione di lavoro. Per questo dobbiamo innanzitutto introdurre la nozione di spostamento infinitesimo di un punto. Più precisamente uno *spostamento infinitesimo reale* di un punto, denotato  $dP$ , avviene realmente portando il punto da una posizione  $P_0$  a una posizione  $P_1$ , con velocità finita  $\vec{v}$  in un tempo infinitesimo  $dt$ . Formalmente si ha

$$dP = \vec{v}dt = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}. \quad (2.7)$$

Lo spostamento invece si dice *virtuale* se è immaginario, fittizio, non avviene effettivamente ma è uno degli infiniti spostamenti possibili, consentiti dai vincoli. Immaginiamo pertanto che avvenga con velocità infinita in un tempo  $\delta t = 0$ . Lo denoteremo con  $\delta P$  e si ha

$$\delta P = \delta x\vec{i} + \delta y\vec{j} + \delta z\vec{k}. \quad (2.8)$$

**Definizione 2.6.** *Si chiama lavoro elementare reale (rispettivamente virtuale) di una forza  $(\vec{F}, P)$  corrispondente allo spostamento reale  $dP$  (rispettivamente, virtuale  $\delta P$ ) del punto  $P$  il seguente prodotto scalare*

$$dL = \vec{F} \cdot dP = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (2.9)$$

(rispettivamente:  $\delta L = \vec{F} \cdot \delta P = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z$ ), dove  $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ .

**Definizione 2.7.** *Una forza  $(\vec{F}, P)$  posizionale si dice conservativa se il suo lavoro virtuale  $\delta L$  è un differenziale esatto, cioè se  $\exists \mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z) \in C^{(1)}$  tale che*

$$\delta L = \delta \mathcal{U} \quad (2.10)$$

ossia

$$F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} \delta z$$

che equivale a dire

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathcal{U}. \quad (2.11)$$

La funzione  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x, y, z)$ , definita a meno di una costante additiva, si chiama potenziale della forza.

**Definizione 2.8.** Una forza  $(\vec{F}, P)$  si dice centrale se  $\vec{F}$  è sempre diretta verso un polo  $O$  e dipende solo dalla distanza  $\rho = |P - O|$ , ossia  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$  dove  $\vec{r} = \frac{P-O}{\rho}$  e  $|\vec{F}| = |f(\rho)|$ .

**Osservazione 2.9.** Nel caso particolare di forza posizionale e centrale, si ha che la forza è anche conservativa, se  $\vec{F} \in C^{(1)}$ . Infatti in questo caso è utile rappresentare il moto in coordinate polari  $(\rho, \theta)$  rispetto al polo  $O$ , con base ortonormale  $(\vec{r}, \vec{h})$ , essendo  $\vec{r} = \frac{P-O}{\rho}$  e  $\vec{h} = \frac{d\vec{r}}{d\theta}$ . Si ricorda che  $\theta$  è l'angolo che il vettore  $P - O$  forma con il semiasse polare di riferimento. Si ha pertanto

$$P = P - O = \rho\vec{r}$$

da cui

$$\delta P = \frac{\partial P}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial P}{\partial \theta} \delta \theta = \delta \rho \vec{r} + \rho \delta \theta \vec{h}. \quad (2.12)$$

Pertanto per il lavoro virtuale  $\delta L$  si ha

$$\delta L = \vec{F} \cdot \delta P = f(\rho) \delta \rho. \quad (2.13)$$

La forza sarà conservativa se e solo se esiste una funzione  $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\rho)$  tale che  $f(\rho) \delta \rho = \frac{d\mathcal{U}}{d\rho} \delta \rho$ . Quindi basta prendere

$$\mathcal{U}(\rho) = \int f(\rho) d\rho. \quad (2.14)$$

**Esempio 2.10** (Forza gravitazionale di Newton e potenziale gravitazionale). Rispetto a un sistema di riferimento inerziale, ossia solidale con le stelle fisse, fra due punti  $P$  e  $O$  di masse  $m$  e  $M$  rispettivamente si esercita la forza di attrazione gravitazionale Newtoniana. In particolare su  $P$  agisce da parte di  $O$  la forza di vettore

$$\vec{F} = -k \frac{mM}{\rho^2} \vec{r},$$

essendo  $k > 0$  la costante di gravitazione universale,  $\rho = |P - O|$  e  $\vec{r}$  il versore diretto da  $O$  verso  $P$ . Si noti che  $f(\rho) = -k \frac{mM}{\rho^2} < 0$ . Pertanto si ha che

$$\mathcal{U}(\rho) = -k \int \frac{mM}{\rho^2} d\rho = k \frac{mM}{\rho} + \mathcal{U}_0.$$

**Secondo principio della dinamica di Newton.** *Se, rispetto a un osservatore ( $O$ ), su un punto  $P$  di massa costante  $m$  agisce una forza di vettore  $\vec{F}$ , allora l'accelerazione  $\vec{a}$  prodotta è data dalla legge*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.15)$$

**Osservazione 2.11.** In generale, se su  $P$  agisce un generico sistema di forze

$$(\vec{F}_1, P), \dots, (\vec{F}_N, P),$$

allora l'accelerazione  $\vec{a}$  di  $P$  è data da

$$m\vec{a} = \vec{R}, \quad (2.16)$$

dove  $\vec{R} = \sum_{s=1}^N \vec{F}_s$  è il vettore risultante del sistema di forze. Ricordando che le forze agenti su un corpo si dividono in *reazioni vincolari* (dovute all'azione dei vincoli cui è soggetto il corpo) e *forze attive* (tutte le altre), la (2.16) può essere riscritta come

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi}, \quad (2.17)$$

dove  $\vec{F}$  indica il vettore risultante delle forze attive e  $\vec{\Phi}$  il vettore risultante delle reazioni vincolari agenti sul corpo.

Ricordando che la *linea d'azione* di una forza  $(\vec{F}, P)$  è la retta parallela a  $\vec{F}$  passante per  $P$ , possiamo richiamare il terzo principio della dinamica di Newton.

**Principio di azione e reazione.** *Se su un punto  $A$  agisce, da parte di un punto  $B$ , una forza  $(\vec{F}, A)$  allora su  $B$  agisce, da parte di  $A$ , una forza di vettore  $-\vec{F}$  avente la stessa linea d'azione (la retta  $AB$ ).*

Dati due vettori  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$  indicheremo con  $\vec{a} \times \vec{b}$  il prodotto vettoriale di  $\vec{a}$  per  $\vec{b}$ . Siamo così in grado di introdurre la nozione di momento di una forza.

**Definizione 2.12.** *Data una forza  $(\vec{F}, P)$  e un punto  $O \in \mathbb{R}^3$ , è detto momento della forza rispetto al polo  $O$  il seguente prodotto vettoriale*

$$\vec{\Omega}(O) = \vec{F} \times (O - P).$$

**Osservazione 2.13.** Si può mostrare che in un sistema di forze il momento varia al variare del polo, e che la condizione necessaria e sufficiente affinché il momento di un sistema di forze non dipenda dalla scelta del polo è che  $\vec{R} = 0$ . È il caso ad esempio di una coppia di forze del tipo azione-reazione. Infatti, poiché il momento è nullo se fatto rispetto a qualsiasi polo appartenente alla linea d'azione di  $(\vec{F}, P)$ , per una coppia di forze del tipo azione-reazione è nullo il momento rispetto al punto di applicazione di una delle due forze, in quanto appartiene alla linea d'azione comune alle due forze.

## 2.3 Dinamica relativa del punto

**Definizione 2.14.** *Due sistemi di riferimento  $(O) \equiv (O, x, y, z)$  e  $(O_1) \equiv (O_1, x_1, y_1, z_1)$  si dicono equivalenti se e solo se si muovono di pura traslazione uniforme l'uno rispetto all'altro, ovvero se e solo se  $\vec{\omega} = 0$  e i punti di  $(O_1)$  si muovono con velocità costante nel tempo:  $\vec{d}(P) = 0, \forall P \in (O_1)$ . In particolare, un sistema di riferimento inerziale è un sistema equivalente a quello delle stelle fisse.*

Si può dimostrare il seguente risultato (si veda [2] per i dettagli).

**Proposizione 2.15.** *Due sistemi  $(O)$  e  $(O_1)$  sono equivalenti se e solo se  $\vec{d}(P) = \vec{a}_1(P), \forall P \in \mathbb{R}^3$ .*

Ne consegue immediatamente il seguente principio.

**Principio di relatività Galileiana.** *Le leggi della dinamica sono le stesse per sistemi di riferimento equivalenti.*

Le trasformazioni di Galileo permettono il passaggio da un sistema di riferimento ad un altro equivalente, lasciando invariate le leggi della dinamica.

Vediamo ora la validità della seconda legge della dinamica di Newton in un sistema di riferimento relativo  $(O_1)$ , generalmente non inerziale. Dalla (2.17) si ha che rispetto al sistema assoluto  $(O)$ :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{\Phi} \quad (2.18)$$

e analogamente per il sistema relativo  $(O_1)$  si ha

$$m\vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{\Phi}_1, \quad (2.19)$$

dove  $\vec{F}_1$  e  $\vec{\Phi}_1$  sono rispettivamente i vettori risultanti delle forze attive e delle reazioni vincolari agenti sul dato punto  $P$ , rispetto a  $(O_1)$ .

Osserviamo innanzitutto che le reazioni vincolari hanno un carattere intrinseco e non variano con il sistema di riferimento, quindi  $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_1$ . Varia invece la risultante delle forze attive, infatti dal teorema di Coriolis (equazione (2.6)) si ha

$$m\vec{a}_1 = m\vec{a} - m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_c.$$

Combinando questa equazione con la (2.18) e la (2.19) si ottiene

$$\vec{F}_1 + \vec{\Phi}_1 = \vec{F} + \vec{\Phi} - m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_c$$

da cui

$$\vec{F}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_\tau - m\vec{a}_c. \quad (2.20)$$

Le espressioni  $\vec{F}_\tau := -m\vec{a}_\tau$  e  $\vec{F}_c := -m\vec{a}_c$  vengono dette rispettivamente forza di trascinamento e forza di Coriolis.

Vediamo ora di impostare e illustrare il cosiddetto problema dei due corpi. Si tratta di due corpi di masse  $m$  e  $M$ , assimilati a punti materiali (come se tutta la massa fosse concentrata nei rispettivi baricentri) denotati rispettivamente  $P$  e  $O_1$ . Come già richiamato nell'Esempio (2.10), rispetto ad un sistema di riferimento solidale con le stelle fisse, denotato  $(O)$ , su di essi agisce la forza di attrazione gravitazionale Newtoniana. In particolare se indichiamo con  $(\vec{F}, P)$  la forza agente su  $P$  da parte di  $O_1$ , si ha

$$\vec{F} = -k \frac{mM}{\rho^2} \vec{r}, \quad (2.21)$$

con  $\rho = |P - O_1|$  e  $\vec{r} = \frac{P-O_1}{\rho}$ . Per il principio di azione e reazione su  $O_1$  agisce la forza di vettore  $-\vec{F}$ .

Nelle applicazioni concrete, con particolare riferimento alle leggi di Keplero,  $P$  e  $O_1$  rappresentano due corpi celesti, ad esempio  $O_1$  può rappresentare il Sole e  $P$  un pianeta del sistema solare. Il problema di interesse consiste nello studio del moto relativo di  $P$  rispetto ad  $O_1$ , ossia rispetto ad un sistema con origine su  $O_1$  e in moto di traslazione rispetto al sistema assoluto  $(O)$ . Il sistema relativo  $(O_1)$  non è inerziale poiché la velocità di  $O_1$  non è costante, avendosi infatti dalla legge di Newton

$$M\vec{a}_{O_1} = -\vec{F}, \quad (2.22)$$

dove  $\vec{a}_{O_1}$  indica l'accelerazione assoluta di  $O_1$ . La dinamica assoluta di  $P$  è immediatamente determinata dall'equazione

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (2.23)$$

dove  $\vec{a}$  denota l'accelerazione di  $P$  rispetto a  $(O)$ .

Dunque dalle (2.19) e (2.20), essendo in questo caso  $\vec{\Phi} = 0$ , l'equazione della dinamica relativa di  $P$  è data da

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_c - m\vec{a}_\tau. \quad (2.24)$$

L'accelerazione di trascinamento del pianeta  $P$  coincide con l'accelerazione del Sole, perché  $(O_1)$  trasla per ipotesi, quindi tutti i punti hanno la stessa velocità ad ogni istante e dunque la stessa accelerazione:

$$\vec{a}_\tau = \vec{a}_{O_1}.$$

Anche l'accelerazione di Coriolis  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_1$  è nulla, poiché è nulla la velocità angolare  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{a}_c = 0.$$

Pertanto la (2.24) si riduce a

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} - m\vec{a}_{O_1} \quad (2.25)$$

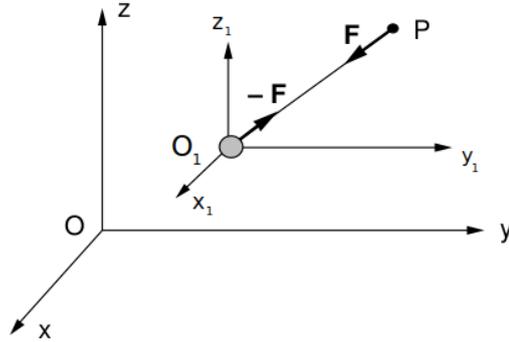


Figura 2.1: Sistemi di riferimento assoluto e relativo nel problema dei due corpi (immagine presa da [5])

che combinata con la (2.22) diventa

$$m\vec{a}_1 = \vec{F} + \frac{m}{M}\vec{F} = \frac{M+m}{M}\vec{F}. \quad (2.26)$$

A questo punto la (2.26) può essere riscritta in due forme equivalenti:

$$\vec{F}_1 = \frac{M+m}{M}\vec{F} \quad (2.27)$$

oppure

$$\frac{mM}{m+M}\vec{a}_1 = \vec{F}. \quad (2.28)$$

**Osservazione 2.16.** La (2.27) ci dice come varia la forza nel sistema di riferimento relativo; in particolare in modulo risulta maggiore a  $|\vec{F}|$ . La (2.28) invece dice che rispetto al sistema  $(O_1)$  il punto  $P$  si muove come se su di esso agisse la stessa forza  $\vec{F}$  ma fosse dotato di una *massa ridotta*  $\mu := \frac{mM}{m+M}$ . In altre parole, la dinamica non inerziale di un punto si può ricondurre alla stessa legge della dinamica inerziale, a patto di sostituire alla massa del punto  $P$  la massa ridotta.

**Osservazione 2.17.** La massa ridotta si chiama così perché è minore della massa di ciascuno dei due corpi, in particolare della massa del pianeta. La massa ridotta fornisce una misura quantitativa del grado di non inerzialità dell'osservatore relativo: essa tende alla massa del pianeta,  $m$ , quando l'osservatore relativo tende a diventare inerziale, mentre si discosta da  $m$  tanto più quanto più grande è l'accelerazione del Sole, cioè quanto meno inerziale è l'osservatore relativo. Infatti:

$$\frac{mM}{M+m} = \frac{\frac{mM}{M}}{\frac{m+M}{M}} = \frac{m}{\frac{m}{M} + 1} = \mu.$$

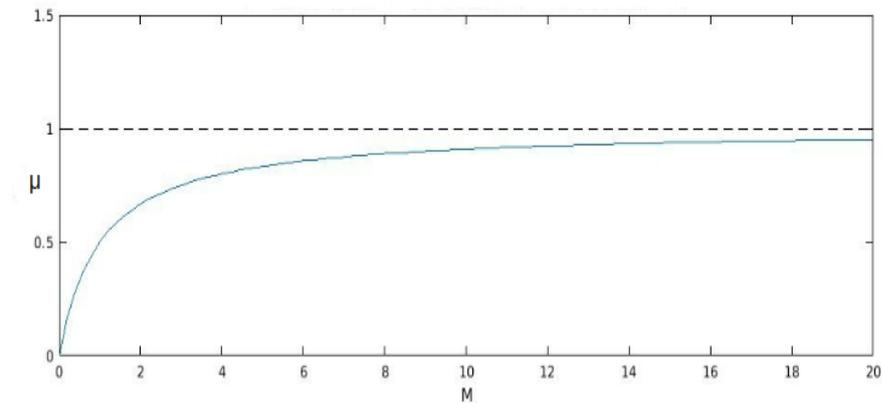


Figura 2.2: Andamento della massa ridotta  $\mu$  rispetto a  $M$  con  $m = 1$

Se  $m$  è molto più piccola rispetto a  $M$ , allora il rapporto  $\frac{m}{M}$  risulta trascurabile e  $\mu$  può essere approssimata con  $m$ . Se invece  $m$  è molto vicina a  $M$  (come può accadere nei sistemi di stelle binarie), allora  $\mu$  è molto vicina a  $\frac{m}{2}$ .

**Osservazione 2.18.** Osserviamo che i risultati ottenuti in quest'ultimo paragrafo, in particolare le equazioni (2.26), (2.27) e (2.28), sono state ottenute senza fare esplicito riferimento all'espressione di  $\vec{F}$ ; pertanto tali risultati sono validi anche nel caso più generale in cui  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$  sia una generica forza centrale, non necessariamente la forza di attrazione gravitazionale rappresentata dalla (2.21).

# Capitolo 3

## Seconda legge di Keplero

### 3.1 Velocità areolare

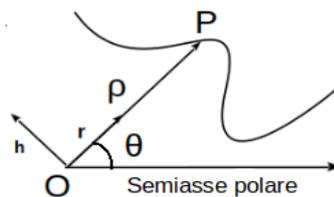


Figura 3.1: *Sistema di coordinate polari*

Come già ricordato nel precedente capitolo (Osservazione 2.9), faremo uso delle coordinate polari per rappresentare il moto piano. Siano  $\rho = |P - O|$ ,  $\theta$  l'angolo fra  $(P - O)$  e il semiassse polare, e  $(\vec{r}, \vec{h})$  la base di rappresentazione dove:

$$\vec{r} = \frac{P - O}{|P - O|},$$
$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{d\theta} = \vec{h}, \\ \frac{d\vec{h}}{d\theta} = -\vec{r}, \end{cases}$$

La velocità e l'accelerazione del punto  $P$  si possono esprimere quindi nel seguente modo:

$$\vec{v} = \frac{d(P - O)}{dt} = \frac{d(\rho\vec{r})}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\vec{r}}{dt}$$

dove  $\theta = \theta(t)$  e  $\vec{r} = \vec{r}(\theta(t))$ . Quindi

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\frac{d\vec{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\vec{h} = v_{\rho}\vec{r} + v_{\theta}\vec{h}$$

dove  $v_\rho = \dot{\rho}$  è detta velocità radiale e  $v_\theta = \rho\dot{\theta}$  velocità trasversa. Analogamente si ottiene

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{r} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{h} + \dot{\rho}\ddot{\theta}\vec{h} + \rho\ddot{\theta}\vec{h} - \rho\dot{\theta}^2\vec{r} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{r} + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{h} = a_\rho\vec{r} + a_\theta\vec{h}$$

con  $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2$  accelerazione radiale e  $a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}$  accelerazione trasversa.

Sia ora  $S(t)$  l'area delimitata, al tempo  $t$ , dal raggio vettore  $P - O$ , da  $P_0 - O$  e dalla traiettoria percorsa da  $P$  nell'intervallo di tempo  $[t_0, t]$ , essendo  $t_0$  l'istante iniziale, con

$$\begin{cases} P = P(t), & P_0 = P(t_0) \\ \theta = \theta(t), & \theta_0 = \theta(t_0) \end{cases}$$

e  $t \geq t_0$ .

**Definizione 3.1.** Si chiama velocità areolare di  $P$  all'istante  $t$  la velocità con cui il raggio vettore descrive le aree, ossia la seguente derivata rispetto al tempo

$$S'(t) := \frac{dS(t)}{dt}.$$

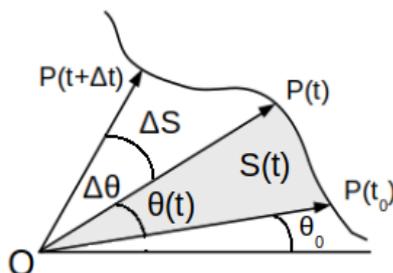


Figura 3.2: La velocità areolare è l'area spazzata per unità di tempo dal vettore  $P(t) - O$

Illustriamo ora alcuni utili risultati sulla velocità areolare.

**Proposizione 3.2.** Si ha

$$S'(t) = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}. \quad (3.1)$$

*Dimostrazione.* Dalla definizione di derivata si ha

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t}.$$

Se  $\Delta\theta$  è molto piccolo, allora  $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t)$  si può approssimare all'area del settore circolare di raggio  $\rho$ , centro  $O$  e ampiezza angolare  $\Delta\theta$  data da  $\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta$ . Si ha pertanto

$$S'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}\rho^2\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta}.$$

□

**Proposizione 3.3.** Vale la seguente relazione fra  $S'(t)$  e  $a_\theta$ :

$$a_\theta = \frac{2}{\rho} \frac{dS'(t)}{dt}.$$

*Dimostrazione.* Dalla (3.1) si ha

$$\frac{2}{\rho} \frac{dS'(t)}{dt} = \frac{2}{\rho} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} \right) = \frac{1}{\rho} (2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} + \rho^2 \ddot{\theta}) = 2\dot{\rho} \dot{\theta} + \rho \ddot{\theta} = a_\theta.$$

□

**Corollario 3.4.**

$$S'(t) = cost \iff a_\theta = 0.$$

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione 3.3. □

Osserviamo che se  $a_\theta = 0$ , allora  $\vec{a} = a_\rho \vec{r}$ . In questo caso la formula seguente permette, conoscendo la traiettoria di  $P$ ,  $\rho = \rho(\theta)$ , di determinare l'accelerazione radiale  $a_\rho$ .

**Proposizione 3.5** (Formula di Binet). Se  $S'$  è costante si ha

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \right) \quad (3.2)$$

dove  $S' = \frac{c}{2}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Dalla Proposizione 3.2 otteniamo

$$\frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta} = \frac{c}{2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}.$$

Ricordando l'espressione  $a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$  per l'accelerazione radiale, cerchiamo innanzitutto una espressione per il termine  $\ddot{\rho}$ . Si ha infatti

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{c}{\rho^2} = -c \frac{d \frac{1}{\rho}}{d\theta}$$

da cui

$$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -c \frac{d \frac{1}{\rho}}{d\theta} \right) = \frac{d}{d\theta} \left( -c \frac{d \frac{1}{\rho}}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} = -c \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} \dot{\theta} = -\frac{c^2}{\rho^2} \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2}.$$

Pertanto si ottiene che

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} \right) - \rho \frac{c^2}{\rho^4} = -\frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \right).$$

□

## 3.2 Moto piano di un punto sotto l'azione di un campo centrale di forze

**Definizione 3.6.** Un punto materiale di massa  $m$ , che si sposta con velocità  $v$ , ha una quantità di moto

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

Il momento della quantità di moto, o momento angolare rispetto a  $O$ , è

$$\vec{K}(O) = m\vec{v} \times (O - P).$$

**Proposizione 3.7.** Rispetto al sistema relativo  $(O_1)$  di origine  $O_1$ , il momento della quantità di moto in un campo di forze centrali si conserva lungo il moto, cioè

$$\vec{K}(O_1) = \text{cost.}$$

*Dimostrazione.* Basta provare che la derivata di  $\vec{K}(O_1)$  è nulla: si ha infatti

$$\left. \frac{d\vec{K}(O_1)}{dt} \right|_{(O_1)} = m\vec{a}_1 \times (O_1 - P) + m\vec{v}_1 \times \frac{dO_1}{dt} - m\vec{v}_1 \times \vec{v}_1$$

perché  $\frac{dO_1}{dt} = 0$  in quanto  $O_1$  è fisso rispetto a  $(O_1)$  e  $\vec{v}_1 \times \vec{v}_1 = 0$ . Quindi

$$\left. \frac{d\vec{K}(O_1)}{dt} \right|_{(O_1)} = \vec{F}_1 \times (O_1 - P).$$

Dalla Definizione 2.8 di forza centrale, essendo  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$  con  $\vec{r} = \frac{P-O_1}{\rho}$ , e dalla (2.27) si ha

$$\left. \frac{d\vec{K}(O_1)}{dt} \right|_{(O_1)} = \left( \frac{m+M}{M} \right) \vec{F} \times (O_1 - P) = 0$$

perché  $\vec{r}$  è parallelo a  $(O_1 - P)$ . □

Pertanto un campo di forze centrali ammette l'integrale primo  $\vec{K}(O_1)$ .

**Corollario 3.8.** Il moto  $t \mapsto P(t) - O_1$  di un punto sotto l'azione di un campo di forze centrali giace sempre in un piano.

*Dimostrazione.* Possiamo scegliere il sistema di riferimento in modo da far giacere il vettore  $\vec{K}(O_1)$  sull'asse  $z$ , quindi si può scrivere  $\vec{K}(O_1) = K_z(O_1)\vec{k}$ . Poiché  $m\frac{dP}{dt} \times (O_1 - P(t)) = K_z(O_1)\vec{k}$ , il piano sotteso dai vettori  $P(t) - O_1$  e  $\frac{dP}{dt}$  è perpendicolare a  $\vec{k}$ , che è fisso (la direzione di  $\vec{K}(O_1)$  è costante) e pertanto è esso stesso fisso. Pertanto posizione e velocità giacciono sullo stesso piano  $\forall t$ : il piano ortogonale a  $\vec{K}(O_1)$  e passante per  $O_1$ . Quindi il moto è piano e contenuto nel piano  $Oxy$ .

Se in particolare  $\vec{K} = 0$ , allora  $P(t) - O_1$  e  $\frac{dP}{dt}$  sono paralleli, e poiché  $\frac{dP}{dt}$  è tangente a  $P(t) - O_1$ , allora giacciono sulla stessa retta. □

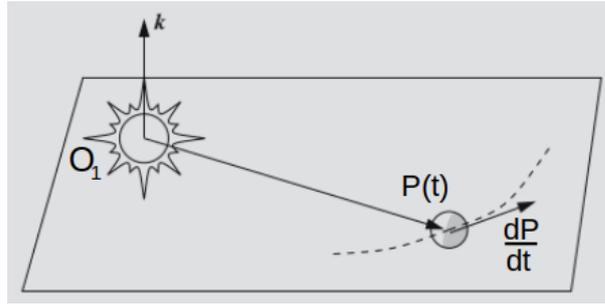


Figura 3.3: Il moto è piano (immagine presa da [4])

### 3.3 Costante delle aree

Come conseguenza dei risultati precedenti (in particolare del Corollario 3.8) possiamo riferire il moto del punto  $P$ , identificato con un generico pianeta in riferimento alle leggi di Keplero, a un sistema di coordinate polari  $(\rho, \theta)$  con polo  $O_1$ , identificato con il Sole, e base  $(\vec{r}, \vec{h})$ . Abbiamo già visto che l'accelerazione del punto  $P$  in coordinate polari è data da

$$\vec{a} = a_\rho \vec{r} + a_\theta \vec{h}.$$

Dalla seconda legge della dinamica di Newton  $\vec{F} = m\vec{a}$ , dove  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$  e  $m$  è la massa del punto  $P$ , si ottiene la seguente uguaglianza:

$$f(\rho)\vec{r} = m(a_\rho \vec{r} + a_\theta \vec{h}),$$

pertanto  $a_\theta = 0$ .

Poiché la forza ha solo la componente radiale, dalla (3.1) e dal Corollario 3.4 segue che

$$S' = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} = \text{cost.} \quad (3.3)$$

Questo risultato motiva la denominazione di *costante delle aree* per la velocità areolare, ed è un modo di affermare la seconda legge di Keplero.

In una formulazione più vicina a quella originale si ha il seguente.

**Teorema 3.9** (Seconda legge di Keplero). *Il raggio vettore  $P(t) - O_1$  di un punto in moto in un campo di forze centrali spazza aree uguali in intervalli di tempo uguali.*<sup>1</sup>

**Osservazione 3.10.** Una delle conseguenze più immediate dell'enunciato è che il pianeta si muove più velocemente quando è vicino al Sole e più lentamente quando si trova distante.

<sup>1</sup>In una versione ancora più fedele: *le aree spazzate dal raggio che congiunge il pianeta al Sole sono proporzionali ai tempi impiegati a percorrerle.*

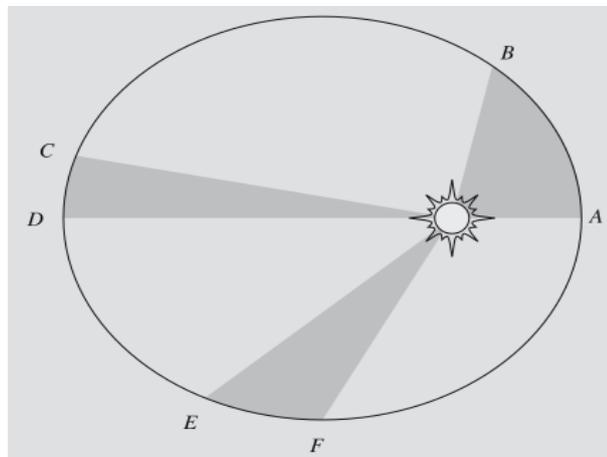


Figura 3.4: Per la seconda legge di Keplero le aree dei settori evidenziati sono uguali: il pianeta impiega lo stesso arco di tempo per percorrere le distanze  $AB$ ,  $CD$  ed  $EF$  (immagine presa da [4])

# Capitolo 4

## Problema di Keplero e terza legge

### 4.1 Conservazione dell'energia, riduzione alle quadrature

Mostriamo ora che l'energia di un punto di massa ridotta mobile in un campo di forze centrali può essere espressa in funzione della sola coordinata radiale del moto piano, della velocità radiale e della velocità areolare. Ricordiamo innanzitutto la definizione di energia totale di un punto e delle sue componenti: energia cinetica ed energia potenziale.

**Definizione 4.1.** Per un punto  $P$  di massa  $m$  e velocità  $\vec{v}$ , l'energia cinetica  $T$  è definita dalla quantità scalare

$$T = \frac{1}{2}mv^2. \quad (4.1)$$

Se il punto è soggetto a forze centrali conservative di potenziale  $\mathcal{U}(\rho) = \int f(\rho)d\rho$  (si veda la (2.14)) la quantità

$$V = V(\rho) = -\mathcal{U}(\rho) = -\int f(\rho)d\rho \quad (4.2)$$

è detta energia potenziale. Infine la somma

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + V(\rho) \quad (4.3)$$

è chiamata energia totale del punto.

Si può facilmente dimostrare il seguente

**Principio di conservazione dell'energia.** L'energia totale  $E$  si conserva, ovvero è costante nel tempo.

*Dimostrazione.* Basta far vedere che  $\frac{dE}{dt} = 0$ . Si ha infatti

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 + V(\rho) \right) = m\vec{a} \cdot \vec{v} + \frac{dV}{d\rho} \dot{\rho} \\ &= f(\rho)\vec{r} \cdot \vec{v} - \frac{d\mathcal{U}}{d\rho} \dot{\rho} = f(\rho)\dot{\rho} - \frac{d\mathcal{U}}{d\rho} \dot{\rho} = 0,\end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla (2.14), essendo  $f(\rho) = \frac{d\mathcal{U}}{d\rho}$ .  $\square$

**Proposizione 4.2.** *L'energia totale di un punto  $P$  di massa  $\mu$  mobile in un campo di forze centrale è*

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V_c(\rho), \quad (4.4)$$

dove  $V_c(\rho)$  è il potenziale efficace. In particolare

$$V_c(\rho) := V(\rho) + \frac{\mu c^2}{2\rho^2} \quad (4.5)$$

con  $c := \rho^2\dot{\theta} = \text{cost}$ . La quantità  $\frac{\mu c^2}{2\rho^2}$  è detta potenziale centrifugo.

*Dimostrazione.* Abbiamo già visto che la velocità del punto  $P$  in coordinate polari è  $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\vec{h}$ . Ricordando che per la seconda legge di Keplero  $S' = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\theta} := \frac{c}{2}$  con  $c \in \mathbb{R}$ , dalla formula per l'energia cinetica  $T$  si ha:

$$T = \frac{1}{2}\mu (\dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\vec{h})^2 = \frac{1}{2}\mu (\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) = \frac{1}{2}\mu \left( \dot{\rho}^2 + \frac{c^2}{\rho^2} \right).$$

Si ottiene pertanto

$$E = T + V = \frac{1}{2}\mu\dot{\rho}^2 + V(\rho) + \frac{\mu c^2}{2\rho^2}.$$

$\square$

**Osservazione 4.3.** Poiché l'energia totale  $E$  si conserva, si può trovare la dipendenza di  $\rho$  dal tempo  $t$  con una quadratura: dalla (4.4),

$$\dot{\rho} = \sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_c(\rho))} \quad (4.6)$$

dove senza perdere di generalità, per la radice quadrata è stato scelto il segno positivo. Integrando la (4.6) per separazione delle variabili si ottiene la seguente

**Proposizione 4.4.** *Ogni moto  $t \mapsto \rho_{E,\rho_0}(t)$  ad energia  $E$  della coordinata radiale  $\rho$  con la condizione iniziale  $\rho(0) = \rho_0$  è la funzione inversa di  $t \mapsto t_{E,\rho_0}(\rho)$  definita da*

$$t_{E,\rho_0}(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} (E - V_c(\rho))}}. \quad (4.7)$$

**Osservazione 4.5.** Noto il moto  $t \mapsto \rho(t)$  della coordinata radiale, l'integrale primo delle aree fornisce immediatamente il moto dell'anomalia vera  $\theta$ : ricordando che  $c = \rho^2 \dot{\theta} = cost$ , otteniamo il seguente corollario.

**Corollario 4.6.** Ogni moto dell'anomalia  $t \mapsto \theta(t)$ , con la condizione iniziale  $\theta(0) = \theta_0$  è dato da

$$\theta(t) = c \int_0^t \frac{d\tau}{\rho(\tau)^2} + \theta_0, \quad c = \rho_0^2 \dot{\theta}_0.$$

**Osservazione 4.7.** Eliminando  $t$  dalle equazioni  $\rho = \rho(t)$  e  $\theta = \theta(t)$  si ottiene l'equazione dell'orbita: tuttavia, l'esistenza degli integrali primi dell'energia e della velocità areolare permette di evitare il calcolo esplicito di queste funzioni, che non si riesce a svolgere nemmeno nel caso newtoniano.

**Proposizione 4.8.** L'equazione dell'orbita in coordinate polari è

$$\theta(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c/r^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_c(r))}} dr. \quad (4.8)$$

*Dimostrazione.* Per la (4.7) si ha

$$\theta(\rho) = \theta(t(\rho)),$$

da cui

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{d\rho} = \frac{c}{\rho^2} \frac{dt}{d\rho}, \quad (4.9)$$

essendo  $\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}$ . Inoltre, dalla (4.7) si ha che

$$\frac{dt}{d\rho} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_c(\rho))}},$$

e quindi dalla (4.9) si ottiene infine

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{c/\rho^2}{\sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V_c(\rho))}}.$$

Integrando fra  $\rho_0$  e  $\rho$  otteniamo il risultato. □

## 4.2 Determinazione delle orbite del problema di Keplero

Dicesi problema di Keplero lo studio del moto di un corpo di massa  $m$  in un campo centrale di forze con potenziale

$$V(\rho) = -\frac{kmM}{\rho}.$$

Verranno ora esposti due metodi differenti per la determinazione delle traiettorie del corpo: il primo sfrutta il risultato della Proposizione 4.8 e il potenziale efficace per il calcolo della (4.8). Determiniamo innanzitutto una espressione per il potenziale efficace. Nel caso di interesse del problema dei due corpi, identificati con i punti  $O_1$ , rappresentante il Sole, e  $P$ , rappresentante un pianeta, di masse rispettivamente  $M$  ed  $m$ , si hanno le seguenti equazioni del moto

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 O_1}{dt^2} &= -\frac{dV}{d\rho} \vec{r} \\ m \frac{d^2 P}{dt^2} &= \frac{dV}{d\rho} \vec{r}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

ricordando che  $\vec{F} = -f(\rho)\vec{r} = -\frac{dU}{d\rho}\vec{r} = \frac{dV(\rho)}{d\rho}\vec{r}$  è la forza agente su  $P$  e, per il principio di azione e reazione,  $-\vec{F}$  è quella agente su  $O_1$ . Moltiplicando per  $m$  la prima equazione e per  $M$  la seconda, e sottraendo la seconda equazione dalla prima, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d^2(P - O_1)}{dt^2} &= -\frac{(m + M)}{mM} \frac{dV}{d\rho} \vec{r} \\ &= -\frac{(m + M)}{mM} \frac{kmM}{\rho^2} \vec{r} \\ &= -\frac{k(m + M)}{\rho^2} \vec{r}, \end{aligned}$$

ossia

$$\frac{d^2(P - O_1)}{dt^2} = -\frac{k(m + M)}{\rho^2} \vec{r}. \quad (4.11)$$

Confrontando la (4.11) con la (2.28) si osserva che il moto relativo di  $P$  (rispetto al sistema traslante  $(O_1)$ ) equivale a quello di un punto di massa ridotta  $\mu = 1$  soggetto a una forza di energia potenziale

$$V_1(\rho) := -\frac{k(m + M)}{\rho}. \quad (4.12)$$

Dall'equazione (4.5) si ottiene pertanto

$$V_{1,c}(\rho) = -\frac{k(m+M)}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}. \quad (4.13)$$

Le traiettorie generate da questo potenziale si trovano esplicitamente.

**Teorema 4.9.** *Comunque si scelgano l'energia totale  $E$  e la costante  $c = \rho^2\dot{\theta}$ , l'equazione della traiettoria è*

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)} \quad (4.14)$$

dove

$$p = \frac{c^2}{k(m+M)}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2Ec^2}{k^2(m+M)^2}}.$$

*Dimostrazione.* Dall'equazione dell'orbita (4.8) con  $\mu = 1$  si ha

$$\theta = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c dr}{r^2 \sqrt{2(E - V_{1,c}(r))}}.$$

Utilizzando la (4.13) e operando la seguente sostituzione:

$$x = \frac{1}{r}, \quad dr = -\frac{1}{x^2} dx,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \theta &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{c dr}{r^2 \sqrt{2E + \frac{2k(m+M)}{r} - \frac{c^2}{r^2}}} \\ &= - \int_{\frac{1}{\rho_0}}^{\frac{1}{\rho}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{2k(m+M)x}{c^2} - x^2}} \\ &= - \int_{\frac{1}{\rho_0}}^{\frac{1}{\rho}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2(m+M)^2}{c^4} - \left(x - \frac{k(m+M)}{c^2}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Effettuando l'ulteriore sostituzione

$$x - \frac{k(m+M)}{c^2} = u \Rightarrow dx = du,$$

si ottiene

$$\theta = - \int_{\frac{1}{\rho_0} - \frac{k(m+M)}{c^2}}^{\frac{1}{\rho} - \frac{k(m+M)}{c^2}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2(m+M)^2}{c^4} - u^2}}. \quad (4.15)$$

L'integrale in (4.15) può essere risolto utilizzando la formula

$$\int_a^b \frac{du}{\sqrt{z^2 - u^2}} = \arccos\left(\frac{b}{z}\right) - \arccos\left(\frac{a}{z}\right).$$

Precisamente, ponendo  $Z^2 := \frac{2E}{c^2} + \frac{k^2(m+M)^2}{c^4}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \theta &= - \int_{\frac{1}{\rho_0} - \frac{k(m+M)}{c^2}}^{\frac{1}{\rho} - \frac{k(m+M)}{c^2}} \frac{du}{\sqrt{Z^2 - u^2}} \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{1}{\rho} - \frac{k(m+M)}{c^2}}{\sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2(m+M)^2}{c^4}}}\right) - \arccos\left(\frac{\frac{1}{\rho_0} - \frac{k(m+M)}{c^2}}{\sqrt{\frac{2E}{c^2} + \frac{k^2(m+M)^2}{c^4}}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{c}{\rho} - \frac{k(m+M)}{c}}{\sqrt{2E + \frac{k^2(m+M)^2}{c^2}}}\right) - \arccos\left(\frac{\frac{c}{\rho_0} - \frac{k(m+M)}{c}}{\sqrt{2E + \frac{k^2(m+M)^2}{c^2}}}\right). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Ponendo

$$\theta_0 = - \arccos\left(\frac{\frac{c}{\rho_0} - \frac{k(m+M)}{c}}{\sqrt{2E + \frac{k^2(m+M)^2}{c^2}}}\right),$$

la (4.16) può essere così riscritta

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \arccos\left(\frac{\frac{c}{\rho} - \frac{k(m+M)}{c}}{\sqrt{2E + \frac{k^2(m+M)^2}{c^2}}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{c^2 - \rho k(m+M)}{\rho}}{\sqrt{2Ec^2 + k^2(m+M)^2}}\right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Siano ora  $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$  ed  $e = \sqrt{1 + \frac{2Ec^2}{k^2(m+M)^2}}$ ; sostituendo nella (4.17) si ha

$$\begin{aligned} \theta - \theta_0 &= \arccos\left(\frac{\frac{1}{k(m+M)} \frac{c^2 - \rho k(m+M)}{\rho}}{\frac{1}{k(m+M)} \sqrt{2Ec^2 + k^2(m+M)^2}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\frac{p}{\rho} - 1}{e}\right). \end{aligned}$$

Pertanto la dipendenza di  $\rho$  dall'anomalia vera  $\theta$  è data da

$$\rho = \frac{p}{e \cos(\theta - \theta_0) + 1}.$$

□

Si può facilmente verificare che l'equazione ottenuta è quella di una conica: si ha infatti il seguente corollario.

**Corollario 4.10.** *La traiettoria è una sezione conica di parametro  $p$  ed eccentricità  $e$ . La conica ha un fuoco nell'origine ed è:*

1. *un'ellisse, se  $|e| < 1$  (e una circonferenza se  $e = 0$ );*
2. *una parabola, se  $|e| = 1$ ;*
3. *un'iperbole, se  $|e| > 1$ .*

*Dimostrazione.* Per mostrare che si tratta di una conica si trasforma in coordinate cartesiane con origine in  $O_1$ .

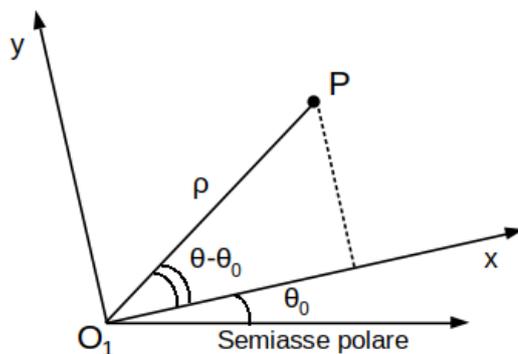


Figura 4.1: *Passaggio da coordinate polari a coordinate cartesiane: il punto  $P$  ha coordinate cartesiane  $(\rho \cos(\theta - \theta_0), \rho \sin(\theta - \theta_0))$*

Ponendo  $\cos(\theta - \theta_0) = \frac{x}{\rho}$  e  $\sin(\theta - \theta_0) = \frac{y}{\rho}$  si ha

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{p}{e \frac{x}{\rho} + 1} \\ &= p \frac{\rho}{ex + \rho}, \end{aligned}$$

da cui si ottiene l'equazione  $ex + \rho - p = 0$ , ovvero  $\rho = p - ex$ . Elevando al quadrato si ha

$$\rho^2 = p^2 - 2epx + e^2x^2, \quad (4.18)$$

ed essendo  $\rho^2 = x^2 + y^2$  la (4.18) diventa

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2epx = p^2,$$

che rappresenta l'equazione cartesiana di una conica con i fuochi lungo l'asse  $x$ .  $\square$

**Osservazione 4.11.** Poiché i pianeti percorrono orbite chiuse, la conica descritta dalla loro traiettoria è un'ellisse.

Un secondo metodo per la derivazione dell'equazione dell'orbita prevede l'utilizzo della formula di Binet. Come già visto, poiché la forza di interazione che il Sole di massa  $M$  esercita sul pianeta di massa  $m$  è una forza centrale, allora  $\vec{F} = f(\rho)\vec{r}$  dove  $f(\rho) = -\frac{kmM}{\rho^2}$  per la legge di gravitazione universale; inoltre, per la seconda legge di Keplero  $S' = cost = \frac{c}{2}$  con  $c \in \mathbb{R}$ , e l'accelerazione trasversa è nulla, quindi si può esprimere l'accelerazione radiale tramite la formula (3.2). Pertanto dalla (2.28) si ha

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \mu a_\rho \vec{r} \\ &= -\mu \frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 1/\rho}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \right) \vec{r},\end{aligned}$$

da cui si ottiene l'equazione

$$-\mu \frac{c^2}{\rho^2} \left( \frac{d^2 1/\rho}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} \right) = -\frac{kmM}{\rho^2}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$\frac{d^2 1/\rho}{d\theta^2} + \frac{1}{\rho} = \frac{kmM}{\mu c^2} = \frac{k(m+M)}{c^2} := \frac{1}{p}. \quad (4.19)$$

La (4.19) è una equazione differenziale lineare non omogenea del secondo ordine, con  $\frac{1}{p} = cost$ . Ponendo  $\chi := \frac{1}{\rho}$  si ha che

$$\chi'' + \chi = \frac{1}{p}. \quad (4.20)$$

L'equazione omogenea associata è identica all'equazione di un moto armonico di pulsazione unitaria, con la differenza che invece del tempo  $t$  compare l'angolo  $\theta$ :

$$\chi'' + \chi = 0.$$

La soluzione, l'integrale generale  $\chi(\theta)$  di (4.20), è data dalla somma dell'integrale generale  $\tilde{\chi}(\theta)$  dell'equazione omogenea associata e di un integrale particolare  $\chi_1(\theta)$  dell'equazione non omogenea:

$$\chi(\theta) = \tilde{\chi}(\theta) + \chi_1(\theta),$$

con  $\tilde{\chi}(\theta) = A \cos(\theta + \gamma)$ , dove  $A, \gamma$  dipendono dai dati iniziali per  $\theta = 0$ . In particolare,  $\gamma$  è l'angolo che il raggio vettore congiungente il Sole con il pianeta forma con

l'orientazione positiva delle ascisse, in corrispondenza di  $\theta = 0$ , e può essere reso nullo scegliendo opportunamente il semiasse polare. Dunque

$$\tilde{\chi}(\theta) = A \cos \theta.$$

Per quanto riguarda  $\chi_1(\theta)$ , la scelta più semplice è quella di prendere

$$\chi_1(\theta) = \frac{1}{p},$$

che è soluzione particolare della (4.20). Pertanto:

$$\begin{aligned} \chi(\theta) &= A \cos \theta + \frac{1}{p} \\ &= \frac{pA \cos \theta + 1}{p} \\ &= \frac{e \cos \theta + 1}{p}, \end{aligned}$$

dove si è posto  $e := pA = cost$ . Infine, si ottiene

$$\rho = \frac{p}{e \cos \theta + 1} \tag{4.21}$$

che è l'equazione di una conica della quale il Sole è uno dei fuochi, ed  $e$  è l'eccentricità. Possiamo quindi enunciare il seguente

**Teorema 4.12** (Prima legge di Keplero). *Le orbite descritte dai pianeti sono delle ellissi delle quali il Sole occupa uno dei due fuochi.*

**Osservazione 4.13.** Si è anche mostrato che la parabola e l'iperbole sono orbite possibili nel problema dei due corpi.

### 4.3 L'ellisse di Keplero e la terza legge

Le eccentricità delle orbite dei pianeti nella realtà sono molto piccole, e un'ellisse con piccola eccentricità è molto simile ad una circonferenza: per questo motivo la scoperta della prima legge fu molto faticosa prima della conferma matematica di Newton, in quanto erano a disposizione solo i dati osservativi. Ad esempio, Venere è il pianeta del sistema solare con l'orbita più circolare, con una eccentricità  $e = 0.007$ , mentre l'orbita terrestre ha eccentricità  $e = 0.0167$ .

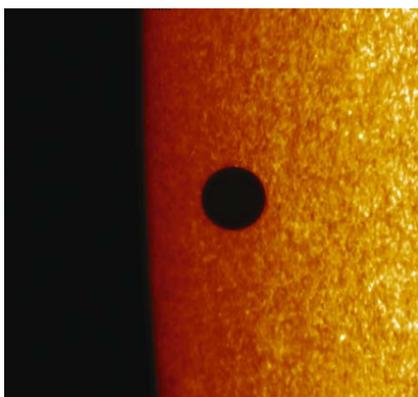


Figura 4.2: Mercurio in orbita davanti al Sole; foto scattata dallo Swedish Solar Telescope situato alle Isole Canarie (immagine presa da [4])

**Osservazione 4.14.** Il parametro  $p$  e l'eccentricità  $e$  sono legati al semiasse maggiore  $a$  dell'ellisse dalla seguente relazione:

$$2a = \frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e} = \frac{2p}{1-e^2}. \quad (4.22)$$

Infatti si ha che  $2a = \rho_{min} + \rho_{max}$ , dove  $\rho_{min}, \rho_{max}$  sono le distanze radiali minima e massima del pianeta dall'origine (Sole). Queste sono determinate dai punti di inversione del moto radiale, cioè dalle soluzioni dell'equazione  $E - V_{1,c}(\rho) = 0$  con  $V_{1,c}(\rho) = -\frac{k(m+M)}{\rho} + \frac{c^2}{2\rho^2}$ . Si ha

$$E + \frac{k(m+M)}{\rho} - \frac{c^2}{2\rho^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{c^2}{2} \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 - k(m+M) \left( \frac{1}{\rho} \right) - E = 0,$$

che ha come soluzioni

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{min,max}} &= \frac{1}{c^2} \left( k(m+M) \pm \sqrt{k^2(m+M)^2 + 2Ec^2} \right) \\ &= \frac{k(m+M)}{c^2} \left( 1 \pm \sqrt{\frac{2Ec^2}{k^2(m+M)^2} + 1} \right) \\ &= \frac{1 \pm e}{p} \end{aligned}$$

dove si è posto  $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$ ,  $e = \sqrt{\frac{2Ec^2}{k^2(m+M)^2} + 1}$ .

**Definizione 4.15.** La distanza radiale minima  $\rho_{min} = \frac{p}{1+e}$  è detta perielio. La distanza radiale massima  $\rho_{max} = \frac{p}{1-e}$  è detta afelio.

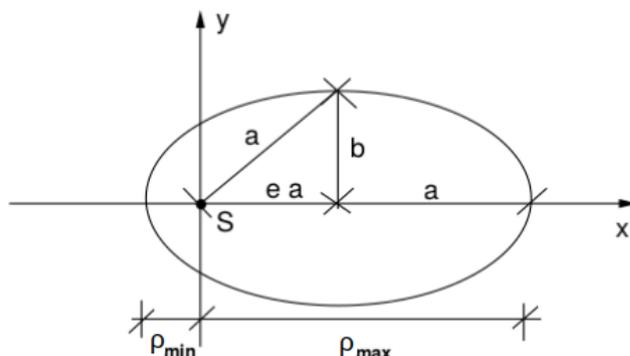


Figura 4.3: Distanze radiali minima e massima dal fuoco  $S$  (Sole). Immagine presa da [5]

Il perielio dell'orbita terrestre si trova a circa 147 milioni di chilometri dal Sole, mentre l'afelio a 152 milioni di km; la Terra si trova nel perielio all'inizio del mese di gennaio. In realtà, a causa delle perturbazioni dovute alle interazioni fra pianeti, il perielio cambia gradualmente posizione. Il periodo che passa fra due passaggi dal perielio si chiama anno anomalistico, ed è leggermente più lungo dell'anno siderale (il periodo in cui la Terra completa una rivoluzione attorno al Sole): 365.259635864 giorni è la durata dell'anno anomalistico, mentre l'anno siderale dura 365.256363051 giorni. Una particolare relazione lega il periodo di rivoluzione di un pianeta al semiasse maggiore della sua orbita.

**Terza legge di Keplero.** *I quadrati dei periodi di rivoluzione di due pianeti che si muovono su diverse orbite ellittiche attorno a uno stesso sole stanno tra loro come i cubi dei corrispondenti semiasse maggiori, se si considera trascurabile il rapporto  $\frac{m}{M}$ . In tale approssimazione si ha*

$$\frac{P^2}{a^3} = cost \quad (4.23)$$

per tutti i pianeti del sistema solare, dove  $P$  è il periodo siderale ed  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita.

*Dimostrazione.* Si può calcolare la costante per un pianeta partendo dall'integrale primo delle aree: siano  $a, b$  i semiasse dell'orbita del pianeta,  $P$  il periodo siderale e  $c = \rho^2 \dot{\theta} = cost$ ; allora

$$S' = \frac{c}{2} = \frac{\pi ab}{P} \Rightarrow c = 2 \frac{\pi ab}{P},$$

da cui

$$P = \frac{2\pi ab}{c}$$

e pertanto

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{c^2 a}. \quad (4.24)$$

Poiché in un'ellisse i semiassi sono legati dalla relazione  $b^2 = a^2(1 - e^2)$ , dalla (4.22) si ha

$$\begin{aligned} a = \frac{p}{1 - e^2} &\Rightarrow b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2} \\ &\Rightarrow \frac{b^2}{a} = p. \end{aligned}$$

La (4.24) può essere quindi riscritta come  $\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 p}{c^2}$ . Poiché si è posto  $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$ , si ottiene infine

$$K := \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k(m+M)}. \quad (4.25)$$

Le masse  $M, m$  rappresentano la massa del Sole e la massa del pianeta, molto più piccola rispetto a quella del Sole. Solo a condizione che  $m \ll M$  la quantità  $K$  risulta indipendente dal pianeta. Infatti in tal caso

$$K = \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{kM} \frac{1}{\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

dove il rapporto  $\frac{m}{M}$  è trascurabile. L'errore più sensibile si rileva con il pianeta Giove, la cui massa è due volte e mezzo superiore rispetto a quella di tutti gli altri pianeti del sistema solare messi assieme, 317,938 volte la massa della Terra. Inoltre altri errori sono dovuti alle variazioni nel periodo dovute alle interazioni fra pianeti. In ogni caso dalla (4.25) segue che il rapporto  $K$  è indipendente dai dati iniziali relativi ai moti dei pianeti, e in tal senso è costante.  $\square$

**Osservazione 4.16.** La terza legge di Keplero è operativamente utile per la determinazione delle masse: infatti essa è valida anche per satelliti (naturali o artificiali) che orbitano attorno allo stesso centro. Osservando il periodo del satellite, la massa del centro di rotazione può essere determinata tramite la terza legge. Questo metodo viene usato per calcolare le masse dei sistemi binari di stelle.

# Capitolo 5

## Moti kepleriani

### 5.1 Descrizione dei moti kepleriani

**Definizione 5.1.** Si definisce kepleriano il moto di un corpo la cui traiettoria è descritta dalla sezione conica di equazione polare

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \quad (5.1)$$

con parametro  $p$  ed eccentricità  $e$ , sotto l'azione della forza di attrazione newtoniana di costante di gravitazione universale  $k$ .

Analizziamo ora il legame fra l'energia totale di un moto kepleriano e la traiettoria del corpo. Innanzitutto troviamo un'espressione per l'energia totale che legghi l'energia meccanica all'eccentricità dell'orbita: si ha la seguente

**Proposizione 5.2.** L'energia totale di un moto kepleriano vale

$$E = -\frac{k(m+M)}{2p}(1-e^2). \quad (5.2)$$

*Dimostrazione.* Come già visto in precedenza, l'energia potenziale assume l'espressione (4.12):

$$V = -\frac{k(m+M)}{\rho}.$$

Dalla formula per l'energia cinetica  $T = \frac{1}{2}\mu(\vec{v})^2$  con  $\mu = 1$  e  $\vec{v} = \dot{\rho}\vec{r} + \rho\dot{\theta}\vec{h}$  si ha

$$T = \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2).$$

Poiché dalla (5.1)  $\rho^{-1} = \frac{1+e\cos\theta}{p}$ , si ha

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{\rho^2} \frac{d\rho}{d\theta} = -c \frac{d\rho^{-1}}{d\theta} = c \left( \frac{e}{p} \sin \theta \right),$$

con  $c = \rho^2 \dot{\theta}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Ancora dalla (5.1) e da  $\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \left[ \frac{c^2 e^2}{p^2} \sin^2 \theta + \frac{c^2}{\rho^2} \right] \\ &= \frac{c^2}{2p^2} \left[ e^2 \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta)^2 \right]. \end{aligned}$$

Essendo  $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$ , dalla formula per l'energia totale  $E = T + V$  si ottiene

$$\begin{aligned} E &= \frac{k(m+M)}{2p} \left[ e^2 \sin^2 \theta + (1 + e \cos \theta)^2 \right] - \frac{k(m+M)}{\rho} \\ &= \frac{k(m+M)}{2p} \left[ e^2 + 1 + 2e \cos \theta - \frac{2p}{\rho} \right] \\ &= \frac{k(m+M)}{2p} \left[ e^2 + 1 + 2e \cos \theta - 2(e \cos \theta + 1) \right] \\ &= -\frac{k(m+M)}{2p} (1 - e^2). \end{aligned}$$

□

**Corollario 5.3.** *L'energia totale di un corpo che si muove di moto kepleriano è negativa, nulla o positiva a seconda che l'orbita sia rispettivamente un'ellisse (quindi  $|e| < 1$ ), una parabola (ossia  $|e| = 1$ ) o un'iperbole (cioè  $|e| > 1$ ).*

*Dimostrazione.* Segue direttamente dalla Proposizione 5.2. □

**Osservazione 5.4.** Un pianeta è sempre legato alla stella attorno a cui gravita, perciò la sua orbita è ellittica; ma ci sono corpi celesti che possono teoricamente realizzare anche gli altri due casi. Nella realtà, è raro che un oggetto celeste abbia energia totale esattamente nulla, ed è quindi molto difficile che abbia un'orbita parabolica: è stato osservato che l'eccentricità dell'orbita  $e$  si avvicina molto all'unità solo per alcune comete.

Il 28 dicembre 2019 la cometa 2I/Borisov, la seconda mai osservata proveniente dall'esterno del nostro sistema solare, ha raggiunto la minima distanza dal nostro pianeta (289747444 chilometri), ed è stato possibile osservarne l'orbita iperbolica, di eccentricità  $e = 3.35705727$ .

Ricaviamo ora le equazioni parametriche del moto, cioè le funzioni  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  che esprimono la variazione temporale del raggio vettore e dell'anomalia vera. Ci limitiamo a considerare i moti ellittici, con  $|e| < 1$ .

**Proposizione 5.5.** *Le equazioni parametriche dei moti kepleriani ellittici sono*

$$\begin{cases} \rho(t) = a(1 - e \cos u(t)) \\ \theta(t) = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \left( \frac{u(t)}{2} \right) \right], \end{cases}$$

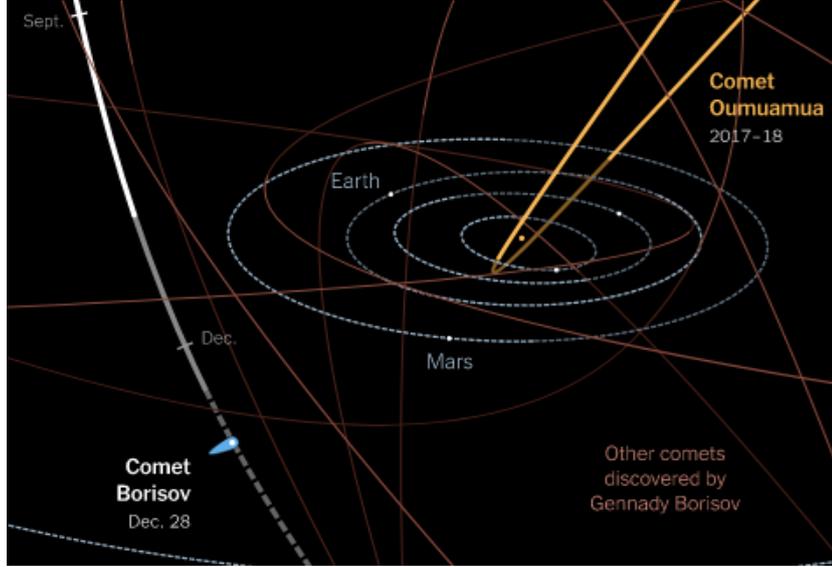


Figura 5.1: *Orbita iperbolica della cometa Borisov nel nostro sistema solare, comparata alla traiettoria del primo oggetto interstellare mai osservato Oumuamua e ad altre comete (immagine presa da [8])*

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita,  $|e| < 1$  e la funzione  $t \mapsto u(t)$ , detta anomalia eccentrica, è la funzione inversa della  $t = t(u)$ ,  $t : \mathbb{R} \rightarrow [0, P]$ , con  $P$  periodo di rivoluzione e

$$t(u) = \frac{1}{\sqrt{k(m+M)}} a^{3/2} (u - e \sin u). \quad (5.3)$$

*Dimostrazione.* Dalla quadratura (4.7) con  $V_c(\rho) = -\frac{k(m+M)}{\rho} + \frac{\mu c^2}{2\rho^2}$  e  $\mu = 1$  si ha

$$\begin{aligned} t &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{2\left(E + \frac{k(m+M)}{\rho} - \frac{c^2}{2\rho^2}\right)}} \\ &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{2E\rho^2 + 2k(m+M)\rho - c^2}}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Assumiamo che il corpo si trovi nel perielio all'istante iniziale con velocità positiva, cioè  $\rho_0 = \rho_{min}$ . Cerchiamo una espressione del radicando che dipenda dall'eccentricità e dal semiasse maggiore: poiché il moto avviene lungo l'ellisse kepleriana, per il Corollario 5.3 si ha che l'energia totale è negativa, cioè  $E = -|E|$ ; combinando la (4.22) e la (5.2) si ha

$$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{k(m+M)}{2|E|}, \quad (5.5)$$

e come visto precedentemente  $b^2 = pa$  con  $p = \frac{c^2}{k(m+M)}$ , quindi  $b^2 = \frac{c^2}{2|E|}$ . Inoltre, come si può vedere nella Figura 4.3, il semiasse focale dell'ellisse è dato da

$$a^2 e^2 = a^2 - b^2 = \frac{k^2(m+M)^2}{4|E|^2} - \frac{c^2}{2|E|},$$

pertanto

$$\begin{aligned} 2E\rho^2 + 2k(m+M)\rho - c^2 &= 2|E| \left[ -\rho^2 + \frac{k(m+M)\rho}{|E|} - \frac{c^2}{2|E|} \right] \\ &= 2|E| \left[ -\left( \rho - \frac{k(m+M)}{2|E|} \right)^2 + \frac{k^2(m+M)^2}{4|E|^2} - \frac{c^2}{2|E|} \right] \\ &= 2|E| \left[ a^2 e^2 - (\rho - a)^2 \right]. \end{aligned}$$

Dalla (5.4) possiamo ora riscrivere l'integrale:

$$t = \frac{1}{\sqrt{2|E|}} \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 e^2 - (\rho - a)^2}}.$$

Applicando la sostituzione  $\rho = a(1 - e \cos u)$  (si noti che il perielio  $\rho_0 = a(1 - e)$  corrisponde a  $u = 0$ ) e utilizzando la (5.5) si ottiene

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{a}{k(m+M)}} \int_0^u \frac{a(1 - e \cos u)(ae \sin u)}{\sqrt{a^2 e^2 - a^2 e^2 \cos^2 u}} du \\ &= \sqrt{\frac{a}{k(m+M)}} \int_0^u \frac{(a - ae \cos u) \sin u}{\sqrt{1 - \cos^2 u}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(m+M)}} a^{3/2} \int_0^u (1 - e \cos u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{k(m+M)}} a^{3/2} (u - e \sin u). \end{aligned}$$

Poiché stiamo considerando il caso ellittico in cui  $|e| < 1$ , si ha che

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{\sqrt{k(m+M)}} a^{3/2} (1 - e \cos u) > 0, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Si può quindi invertire la relazione in funzione di  $t$ , ottenendo  $u = u(t)$  che viene denominata *anomalia eccentrica*. Inserendo  $u(t)$  in  $\rho = a(1 - e \cos u)$  si ottiene  $\rho = \rho(t)$ . Rimane ora da determinare  $\theta(t)$ , l'anomalia vera in funzione di  $t$ . Dalla (4.22) e dalla (5.1) si ha  $\rho(1 + e \cos \theta) = p = a(1 - e^2)$ , da cui, poiché si è posto  $\rho = a(1 - e \cos u)$ ,

$$\rho \cos \theta = \frac{1}{e}(a - ae^2 - \rho) = \frac{1}{e}(-ae^2 + ae \cos u) = a(\cos u - e),$$

ovvero

$$\rho \cos \theta = a(\cos u - e). \quad (5.6)$$

Sommando membro a membro la (5.6) con  $\rho = a(1 - e \cos u)$  e ricordando che  $(1 + \cos \theta) = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$  e  $\frac{1 + \cos u}{2} = \cos^2 \frac{u}{2}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta + \rho &= a(\cos u - e) + a(1 - e \cos u) \\ \Rightarrow 2\rho \cos^2 \frac{\theta}{2} &= a(1 - e) + a \cos u(1 - e) \\ \Rightarrow \rho \cos^2 \frac{\theta}{2} &= a(1 - e) \frac{1 + \cos u}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\sqrt{\rho} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{a(1 - e)} \cos \frac{u}{2}. \quad (5.7)$$

Sottraendo membro a membro dalla (5.6) la relazione  $\rho = a(1 - e \cos u)$  si ha invece, ricordando che  $(1 - \cos \theta) = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  e  $\frac{1 - \cos u}{2} = \sin^2 \frac{u}{2}$ ,

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta - \rho &= a(\cos u - e) - a(1 - e \cos u) \\ \Rightarrow 2\rho \sin^2 \frac{\theta}{2} &= a(1 + e) - a \cos u(1 + e) \\ \Rightarrow \rho \sin^2 \frac{\theta}{2} &= a(1 + e) \frac{1 - \cos u}{2}, \end{aligned}$$

da cui

$$\sqrt{\rho} \sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{a(1 + e)} \sin \frac{u}{2}. \quad (5.8)$$

Infine, dividendo membro a membro la (5.8) per la (5.7) risulta

$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \frac{u}{2},$$

che è la formula che lega l'anomalia eccentrica  $u$  all'anomalia vera  $\theta$ . In particolare, inserendo la funzione  $u(t)$ ,

$$\theta(t) = 2 \arctan \left[ \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \tan \left( \frac{u(t)}{2} \right) \right].$$

□

**Osservazione 5.6.** La terza legge di Keplero si può scrivere come  $P = \frac{2\pi}{\sqrt{k(m+M)}} a^{3/2}$ . Sia ora

$$l := \frac{2\pi t}{P}.$$

Si ha che  $l$  varia fra  $0$  e  $2\pi$ , ed è pertanto un angolo. Tenendo conto di ciò, possiamo riscrivere la (5.3) come

$$t = \frac{P}{2\pi}(u - e \sin u),$$

da cui si ottiene

$$l = u - e \sin u. \quad (5.9)$$

La (5.9) è detta *equazione di Keplero*, e lega l'anomalia eccentrica  $u$  all'angolo  $l$ , chiamato *anomalia media*, che varia linearmente nel tempo: infatti  $l = \tilde{\omega}t$ , dove  $\tilde{\omega} = \frac{2\pi}{P}$  è la pulsazione del moto kepleriano. Si noti in particolare che  $l$  varia di  $2\pi$  a ciascun ritorno del corpo al perielio, e pertanto si dice anche *epoca del passaggio al perielio*. L'anomalia media indica dove si troverebbe il corpo se questo orbitasse su una circonferenza di raggio  $a$  e centro coincidente con il centro dell'ellisse. Se l'orbita fosse una circonferenza, allora varrebbe  $\theta = u = l$ .

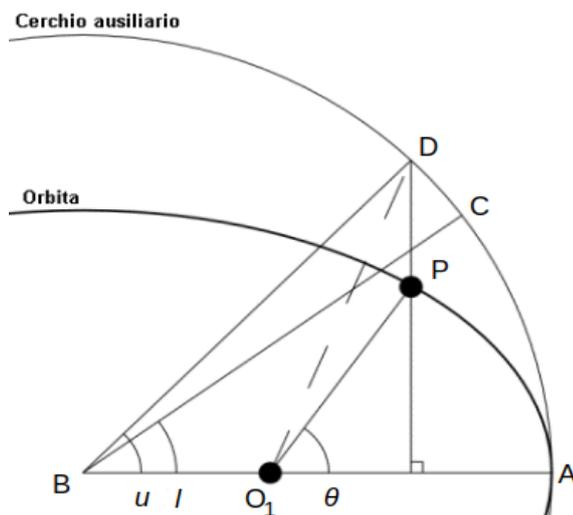


Figura 5.2: Rappresentazione dell'anomalia vera  $\theta$  (angolo  $AO_1P$ ), dell'anomalia eccentrica  $u$  (angolo  $ABD$ ) e dell'anomalia media  $l$  (angolo  $ABC$ ). Il cerchio ausiliario è la circonferenza che ha per centro il centro dell'ellisse e per raggio  $a$ , il semiasse maggiore dell'ellisse (immagine presa da [7])

**Osservazione 5.7.** Per avere le equazioni parametriche del moto  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  occorre in ogni caso invertire l'equazione di Keplero, cosa che non si può fare esplicitamente ma solo tramite sviluppi in serie a piccola eccentricità. La procedura canonica consiste nello scrivere lo sviluppo in potenze di  $e$  per la funzione inversa  $u = u(l; e)$  con il metodo di Lagrange, da lui introdotto nel 1774 proprio in questo contesto.

## 5.2 Elementi orbitali

La forma e l'orientazione dell'orbita ellittica di un pianeta possono essere descritti attraverso sei parametri, chiamati elementi orbitali, per la descrizione dei quali si è attinto da [4], integrando in maniera qualitativa da [6] e [7].

**Definizione 5.8.** *Le seguenti quantità sono chiamate elementi orbitali:*

- *semiasse maggiore  $a$ ,*
- *eccentricità  $e$ ,*
- *inclinazione  $i$ ,*
- *longitudine del nodo ascendente  $\Omega$ ,*
- *argomento del pericentro  $\omega$ ,*
- *longitudine media nell'epoca considerata  $L := l + \omega + \Omega$ , dove  $l$  è l'anomalia media e l'epoca è l'istante di tempo considerato.*

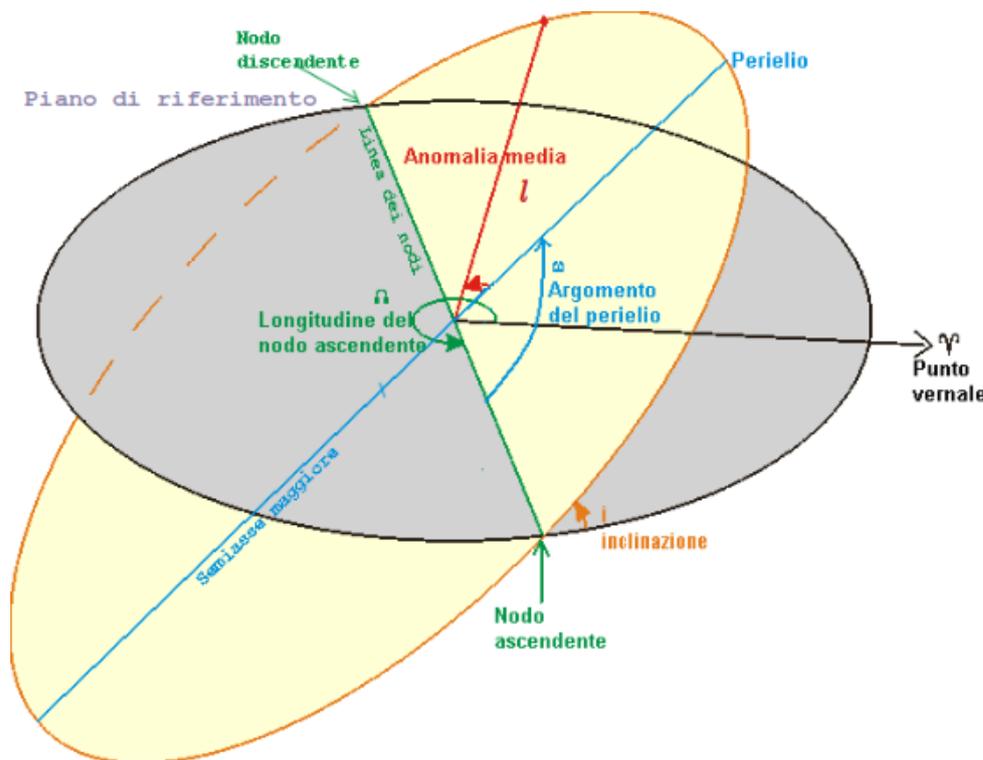


Figura 5.3: Alcuni parametri orbitali (immagine presa da [7])

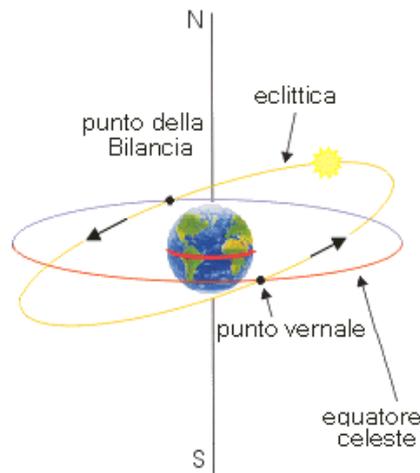


Figura 5.4: *Rappresentazione del punto vernale (immagine presa da [7])*

Il semiasse maggiore e l'eccentricità definiscono la forma e la grandezza dell'orbita, mentre l'inclinazione è la distanza angolare del piano orbitale del pianeta dal *piano dell'eclittica*, ovvero il piano orbitale terrestre, che viene preso come piano di riferimento. La longitudine del nodo ascendente è l'angolo compreso tra il punto d'Ariete  $\gamma$  (detto *punto vernale* o equinozio di primavera, ovvero uno dei due punti in cui il piano dell'eclittica interseca l'equatore celeste) e il nodo ascendente della linea dei nodi, cioè la linea d'intersezione del piano dell'eclittica con il piano dell'orbita. L'angolo  $\Omega$  viene misurato nel piano di riferimento (l'eclittica) nello stesso senso della direzione del moto del corpo, e indica in quale punto il pianeta attraversa il piano dell'eclittica da Sud a Nord.

L'argomento del pericentro, o argomento del perielio se ci si riferisce al sistema solare, è la distanza angolare nel piano orbitale misurata nella direzione del moto dal nodo ascendente al vettore che punta al perielio, ossia il vettore eccentricità  $\vec{e}$ . Un argomento di pericentro di  $0^\circ$  indica che il corpo orbitante sarà nel punto di massima vicinanza al corpo centrale nel momento in cui attraversa il piano di riferimento da Sud a Nord.

Infine, la longitudine media  $L$  viene definita come la somma dell'anomalia media, dell'argomento del pericentro e della longitudine del nodo ascendente, ed è una misura della posizione media del corpo se questo avesse velocità costante; viene misurata prima nel piano dell'eclittica dal punto vernale al nodo ascendente, poi nel piano orbitale fino a raggiungere l'anomalia media.

Questo sesto parametro orbitale non corrisponde ad un angolo fra due oggetti fisici, ma è considerato una misura conveniente; può essere sostituito anche dall'anomalia vera  $\theta$ . Gli angoli  $\Omega, i, \omega$  corrispondono agli angoli di Eulero che determinano l'orientazione dell'orbita. Nonostante gli elementi orbitali siano considerati costanti, nella realtà subiscono piccole variazioni secolari dovute alle interazioni fra i pianeti, perciò sono utili

per fare buone predizioni solo su tempi relativamente brevi.

Come già osservato precedentemente (Osservazione 4.16), tramite la terza legge di Keplero si può derivare la massa di un corpo attorno a cui orbita un pianeta o un satellite, semplicemente osservando il periodo e il semiasse maggiore dell'orbita. Più del 50% delle stelle si trova in sistemi multipli o binari orbitanti attorno al proprio centro di massa, poiché nascono dalla frammentazione di uno stesso nucleo protostellare: misurando i parametri orbitali di questi sistemi, è possibile ricavare la massa delle stelle. È importante poter conoscere la massa di una stella per poter ricavare relazioni fondamentali come quella fra massa e luminosità e quella fra massa, temperatura e raggio: infatti, per una stella appartenente alla cosiddetta *sequenza principale* (ovvero una stella in equilibrio idrostatico che genera energia tramite le reazioni nucleari di fusione dell'idrogeno in elio, come il nostro Sole), avere una grande massa significa avere maggiore luminosità, temperatura di superficie e raggio, mentre una piccola massa comporta bassa luminosità, temperatura di superficie e minor raggio.

### 5.3 Cenni al problema dei tre corpi

Finora abbiamo discusso di sistemi composti da due corpi, che è il caso più complesso di cui si conosce una soluzione completa. Considerando invece un sistema di più corpi, se c'è un corpo la cui gravità domina su tutte le altre, come nel caso del sistema solare, allora le orbite si possono calcolare come nel caso del problema dei due corpi, considerando gli effetti degli altri pianeti come una piccola perturbazione che viene espressa da un'espansione in serie.

Il problema ristretto a un sistema di tre corpi è un caso speciale molto studiato: consiste di due corpi aventi massa dominante, detti *primari*, che si muovono uno attorno all'altro, e di un terzo corpo di piccola massa che si muove sullo stesso piano degli altri due. L'oggetto di massa minore non disturba il moto dei primari, e il problema consiste nel determinarne l'orbita. Risulta che non esiste una espressione finita della sua traiettoria, ma l'astronomo finlandese Karl Frithiof Sundman (1873–1949) dimostrò l'esistenza di una serie infinita convergente, soluzione del problema dei tre corpi. La serie converge in modo talmente lento da non essere conveniente nella pratica, ma come risultato matematico ebbe grande rilievo, in quanto molti matematici da tempo si approcciarono al problema senza però avere successo.

Il problema dei tre corpi ha delle soluzioni particolari molto interessanti. Si può mostrare che esistono dei punti particolari in cui il terzo corpo risulta essere in quiete rispetto ai primari: questi cinque punti sono i cosiddetti *punti Lagrangiani*  $L_1, \dots, L_5$ . Tre di questi ( $L_1, L_2, L_3$ ) si trovano sulla retta congiungente i corpi primari e sono caratterizzati da equilibrio instabile: se un corpo viene perturbato in uno di questi tre punti, tende ad allontanarsi. Gli altri due punti ( $L_4, L_5$ ) sono di equilibrio stabile e formano con i corpi primari due triangoli equilateri. Ad esempio, due asteroidi sono stati trovati nei pressi

dei punti  $L_4, L_5$  di Giove e Marte. Nella Figura 5.6 si possono notare due condensazioni distinte di asteroidi attorno ai punti Lagrangiani di Giove.

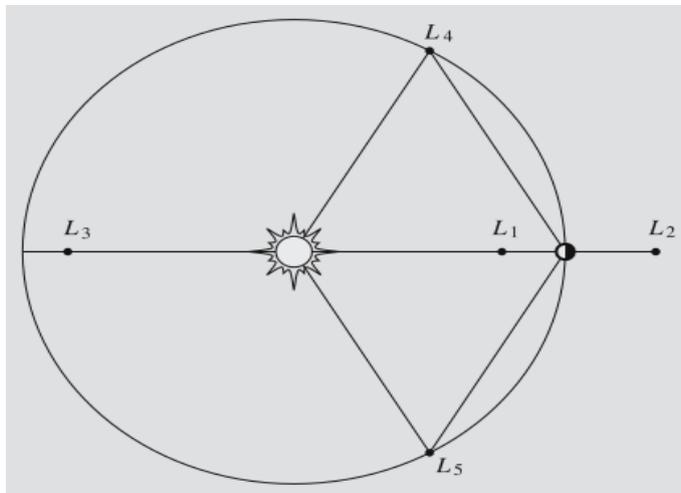


Figura 5.5: *Punti Lagrangiani nel problema dei tre corpi (immagine presa da [4])*

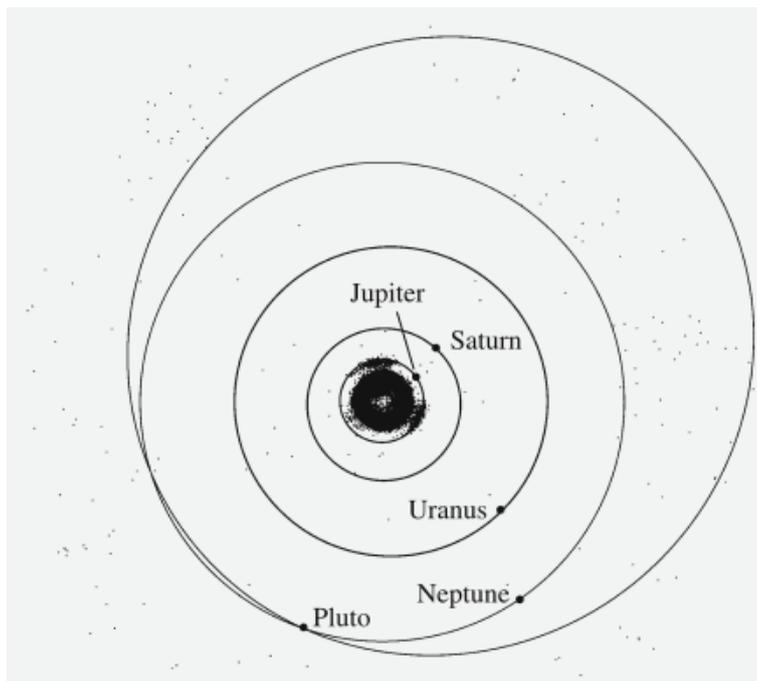


Figura 5.6: *La maggior parte degli asteroidi orbita attorno al Sole nella "cintura degli asteroidi" situata fra Marte e Giove. La figura mostra le posizioni di circa 96000 asteroidi e le orbite di alcuni pianeti (immagine presa da [4])*

# Bibliografia

- [1] Freedman Roger A., Kaufmann III William J., *Universe*, W. H. Freeman and Company, New York, 2008
- [2] Graffi D., *Elementi di meccanica razionale*, Pàtron, Bologna, 1973
- [3] Graffi S., *Appunti di dinamica del professore Sandro Graffi*, <http://www.dm.unibo.it/fismat/didattica.html>
- [4] Karttunen H., Kröger P., Oja H., Poutanen M., Donner K.J.; *Fundamental Astronomy*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 2007
- [5] Strumia A., *Meccanica razionale*, Parte seconda, Nautilus, Bologna, 1996  
[http://www.albertostrumia.it/sites/default/files/images/books/Meccanica/17\\_capitolo17.pdf](http://www.albertostrumia.it/sites/default/files/images/books/Meccanica/17_capitolo17.pdf)
- [6] Slides utilizzate dalla professoressa Marcella Brusa nel corso di Fondamenti di Astronomia (2018-2019)
- [7] Wikipedia, Wikimedia Foundation  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital\\_elements](https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_elements)  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Longitudine\\_del\\_nodo\\_ascendente](https://it.wikipedia.org/wiki/Longitudine_del_nodo_ascendente)  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Argomento\\_del\\_pericentro](https://it.wikipedia.org/wiki/Argomento_del_pericentro)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Mean\\_longitude](https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_longitude)  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Punto\\_vernale](https://it.wikipedia.org/wiki/Punto_vernale)  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Parametri\\_orbitali](https://it.wikipedia.org/wiki/Parametri_orbitali)  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Anomalia\\_media](https://it.wikipedia.org/wiki/Anomalia_media)  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho\\_Brahe](https://en.wikipedia.org/wiki/Tycho_Brahe)
- [8] <https://www.nytimes.com/interactive/2019/12/07/science/comet-borisov-tracker.html>



# Ringraziamenti

Vorrei ringraziare anzitutto la professoressa Emanuela Caliceti, per la piena disponibilità e per la pazienza di avermi guidato nell'elaborazione di questa tesi con preziose indicazioni.

Ringrazio in particolar modo la sig.ra Dada M. e la sig.ra Antonia M., che mi hanno sempre supportato e incoraggiato in questi anni di studi.

Infine, ma non per importanza, ringrazio sinceramente tutte le persone (antiche e nuove conoscenze) che mi hanno accompagnata in questo percorso.