Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Matematica

CONTRIBUTI DI MATEMATICI POLACCHI NEL PERIODO TRA LE DUE GUERRE MONDIALI

Relatore:
Chiar.mo Prof.
PIERO PLAZZI

Presentata da:
LUCA MARZADURI

Sesta Sessione
Anno Accademico 2019/2020

Indice

Introduzione e un po' di storia

Nel diciannovesimo secolo, l'unico contributo significativo allo sviluppo della matematica mondiale proveniente dalla Polonia è dovuto agli importanti studi di Stanisław Zaremba sulle equazioni differenziali e a Kazimierz Żorawski, che si è occupato di calcolo differenziale e fluidodinamica.

Lo spirito nazionalistico che si respirava in Polonia in seguito al raggiungimento dell'indipendenza alla fine della prima guerra mondiale (la Seconda Repubblica di Polonia fu costituita nel 1918 e riconosciuta tre anni dopo anche dall'Unione Sovietica con il Trattato di Riga), dopo cento anni di dominio straniero, accompagnò lo sviluppo di una delle più grandi "scuole" matematiche. La mancanza di istituzioni di alta cultura scientifica in Polonia dirottò gli interessi di molti matematici ad argomenti internazionali. Zygmunt Janiszewski (1888, Varsavia - 1920, Lviv) in particolare fu un vero e proprio promotore, proponendo nell'articolo *On the needs of mathematics in Poland* (1918) di formare dei gruppi di matematici legati da pochi interessi scientifici comuni; suggerì inoltre la fondazione di una rivista che si occupasse esclusivamente di tali argomenti.

In tale direzione si mosse Varsavia: nel 1920, poco dopo la prematura scomparsa di Janiszewski a causa di una pandemia influenzale, uscì il primo numero della rivista *Fundamenta Mathematicae*, curata da Stefan Mazurkiewicz e Wacław Sierpiński e specializzata originariamente in teoria degli insiemi e logica. *Fundamenta Mathematicae*, prima rivista polacca dedicata interamente alla matematica, è tuttora pubblicata. Stefan Mazurkiewicz (1888 – 1945) si è occupato principalmente di topologia e teoria della probabilità. Dimostrò nel 1920, indipendentemente da F. Cantelli, la legge forte dei grandi numeri. Ottenne molti risultati studiando la struttura topologica delle curve. Tra i suoi studenti ricordiamo Stanisław Saks (1897 - 1942), Antoni Zygmund (1900 - 1992), Kazimierz Kuratowski (1896 - 1980).

Saks viene ricordato per i suoi lavori sulla teoria della misura, in particolare per il teorema di Vitali–Hahn–Saks, e sulla teoria degli integrali; quest'ultimo è l'argomento di *Zarys teorii całki*, pubblicato nel 1930 per *Monografje Matematyczne* (*Monografie matematiche*). Kuratowski si occupò principalmente di topologia e teoria degli insiemi;

ha dimostrato il lemma di Zorn nel 1922, tredici anni prima dello stesso Zorn.

Lo studio dell'analisi armonica è stato portato avanti da Antoni Zygmund e Otton M. Nikodym (1887 – 1974); ricordiamo quest'ultimo anche per i suoi contributi in teoria della misura, in particolare per aver dimostrato nel 1930 la forma generale del teorema di Radon-Nikodym.

Tra i logici che operavano a Varsavia ricordiamo Alfred Tarski (vedi 1.2), Stanisław Leśniewski (1886 – 1939), Jan Łukasiewicz (1878 – 1956) e Adolf Lindenbaum (1904 – 1941).

Intanto a Leopoli si studiavano le basi dell'analisi funzionale. Sulle orme dei colleghi varsaviani, nel 1929 venne fondata la rivista *Studia Mathematica*, che fece conoscere al mondo l'importante lavoro di Banach e colleghi. La pubblicazione della rivista fu interrotta all'inizio della seconda guerra mondiale e ripresa nel 1948, fino ad oggi. Un ruolo fondamentale giocò l'atmosfera che si respirava allo *Scottish Café*, un locale dove Banach e colleghi erano soliti trascorrere le giornate per discutere problemi di ricerca matematica. Inizialmente i risultati venivano scritti sui tavolini del bar, finché, stanchi di vedere i loro lavori cancellati dal cameriere il giorno dopo, seguirono il consiglio della moglie di Banach e cominciarono a trascrivere i problemi e le eventuali soluzioni in un quaderno. Da esso nacque lo *Scottish Book*, un edizione a stampa che raccoglie i 193 problemi originali, alcuni dei quali tuttora irrisolti. Tra i principali frequentatori dello *Scottish Café* erano Stefan Banach, Hugo Steinhaus (vedi 1.3.1), Stanisław Mazur (1905-1981), Stanislaw Saks e Stanisław Marcin Ulam (1909 - 1984).

Mazur si occupò principalmente di analisi funzionale; nell'ambito della teoria degli spazi di Banach si ricorda il risultato noto come lemma di Mazur: per ogni successione convergente debolmente in uno spazio di Banach esiste una successione di combinazioni convesse dei suoi membri che converge fortemente allo stesso limite.

Ulam si occupò anche di teoria dei numeri e teoria degli insiemi; ha partecipato inoltre al progetto Manhattan, nell'ambito del quale formalizzò, insieme a E. Fermi e J. von Neumann, il metodo Monte Carlo.

Mentre a Cracovia i matematici si dedicavano principalmente allo studio delle equazioni differenziali, delle funzioni analitiche e della geometria differenziale, a Vilnius (dal 1922 appartenente alla Polonia ma oggi capitale della Lituania) iniziava lo studio della teoria delle serie trigonometriche sotto la guida di Antoni Zygmund. Nel 1931 comincia la pubblicazione delle *Monografie matematiche*, curata da Banach e Steinhaus a Leopoli, e da Bronisław Knaster (1893 – 1980), Kuratowski, Mazurkiewicz e Sierpiński a Varsavia; parallelamente viene fondata la rivista internazionale *Acta Arithmetica* che si occupa di algebra e teoria dei numeri.

L'"esplosione" matematica in Polonia, consumatasi in poco più di un ventennio, si interruppe bruscamente all'inizio della seconda guerra mondiale nel 1939, con l'invasione delle truppe tedesche e sovietiche da est e da ovest; tale avvenimento segnò la fine della Seconda Repubblica di Polonia. Molti furono i matematici vittime del conflitto e molti manoscritti e intere biblioteche andarono distrutte.

Nel periodo tra le due guerre mondiali la Polonia ha assunto, grazie alla fortunata concentrazione di menti brillanti e un forte spirito di collaborazione, un ruolo centrale nella matematica internazionale, in ambito sia di ricerca che divulgativo e didattico. Tra le figure significative che meriterebbero di essere ricordate ne approfondiamo quattro in particolare, Hugo Steinahus, Stefan Banach, Alfred Tarski e Wacław Sierpiński, di cui abbiamo selezionato solo alcuni dei risultati importanti, specificando il contesto storico e riportandone una formulazione moderna, spesso più accessibile. Nello specifico vedremo il teorema di Hahn-Banach e il teorema di Banach-Steinhaus per quanto riguarda l'analisi funzionale [Banach, 1929, Banach-Steinhaus, 1927, Banach, 1931, Rudin, 1973, Brezis, 2010]; il teorema di Banach-Tarski, un famoso risultato all'apparenza paradossale che fa uso dell'assioma della scelta [Banach-Tarski, 1924, French, 1987]; il libro di Steinhaus *Mathematical Snapshots*, un testo interessante per gli spunti didattici e divulgativi che offre [Steinhaus, 1938]; infine il teorema di Sierpiński, un risultato fondamentale della teoria degli insiemi [Abian, 1965, Sierpiński, 1947].

Capitolo 1

Alcune figure significative

Nel seguente paragrafo esponiamo alcuni cenni biografici su Stefan Banach seguendo [Kałuża, 1996], tenendo conto che quest'ultima è una biografia incentrata soprattutto sulla figura umana e non tratta in profondità la sua figura di matematico. Per quanto riguarda la produzione matematica il riferimento è a [1, 2], a cui si rimanda anche per la parte biografica di 1.2, 1.3 e 1.4.

1.1 Stefan Banach

Stefan Banach nasce il 30 Marzo 1892 a Ostrowsko, un villaggio a 50 km a sud di Cracovia; gli viene dato il nome del padre, Stefan Greczek, un funzionario fiscale, e il cognome della madre, la quale Banach non conobbe mai: lei lo abbandonò ancora in tenera età. Trascorre l'infanzia a casa della nonna paterna. Negli anni del liceo condivide la passione per la matematica con l'amico Witold Wilkosz, che diventerà in seguito matematico e fisico di rilievo. Al termine del liceo, si iscrive alla facoltà di ingegneria all'Università di Leopoli, laureandosi nel 1914. A causa di un'inabilità a un occhio, non presta servizio militare durante la Grande Guerra.

Nel 1916 Banach viene notato da Steinhaus mentre discute di matematica con Otto Nikodym in un parco di Cracovia: dal loro incontro nasce una profonda amicizia e la fondazione nel 1919 della Società Matematica di Cracovia, divenuta l'anno successivo Società Matematica Polacca. Nel 1920 sposa Łucja Braus, conosciuta tramite Steinhaus; lei era infatti la segretaria del cugino paterno dello stesso Steinhaus.

In questo periodo Banach attira l'attenzione della comunità scientifica con la pubblicazione del suo primo articolo, firmato insieme a Steinhaus nel 1918, sul bollettino dell'Accademia di Cracovia. Ottiene il ruolo di assistente del professore di matematica Antoni Marian Łomnicki presso il Politecnico di Leopoli. Diviene inoltre membro dell'Accademia Polacca della Cultura.

Banach consegue il dottorato nel 1920; la tesi viene pubblicata due anni dopo su *Fundamenta Mathematicae* con il titolo *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrales*. Nell'opera viene assiomatizzata l'analisi funzionale in modo completo: introdotto il concetto di spazio di Banach e la nozione di trasformazione lineare (operatore) tra spazi di Banach, individua due proprietà fondamentali: la prima è che il limite puntuale di di una sequenza di operatori lineari e continui è anch'essa lineare e continua; la seconda è il teorema delle contrazioni.

Nel 1922 Banach ottiene l'abilitazione all'insegnamento e viene nominato professore straordinario presso l'Università di Leopoli. Nel 1924 pubblica insieme a Tarski *Sur la décomposition des ensembles des points en parties respectivement congruentes*, dove viene presentato il risultato noto come teorema di Banach-Tarski (vedi 1.2.1). Nel 1927 pubblica *Sur le principe de la condensation de singularités*, scritto con Steinhaus. La collaborazione con Steinhaus continua e sfocia nella fondazione della rivista *Studia Mathematica* nel 1929.

Nel 1931 Banach pubblica *Theory of Linear Operations* (vedi 1.1.1). Negli anni successivi pubblica diversi articoli che ampliano la portata dell'analisi funzionale, indicando nuovi campi di applicazione. Nel 1936 la sua vasta attività editoriale comprende già 47 articoli, spesso frutto di collaborazioni con altri matematici. Nel 1939 viene premiato dall'Accademia Polacca della Cultura per l'articolo *Sur le fonctionelle linéaires*, pubblicato nel 1929 per il primo numero della rivista *Studia Mathematica*; tuttavia egli non ha accesso al premio in denaro depositato sul suo conto: il primo di ottobre le truppe sovietiche occupano Leopoli e tutti i conti bancari vengono congelati.

Grazie ai buoni rapporti coltivati con i matematici sovietici, Banach riesce a mantenere la sua cattedra all'università; la sua vita nei primi mesi della guerra non cambia significativamente. La situazione peggiora quando la Germania invade l'Unione Sovietica; Banach, che si trovava a Kiev, fa immediatamente ritorno a Leopoli, occupata dai tedeschi nel giugno del 1941. Sopravvive agli anni della guerra lavorando nel centro di ricerca del biologo Rudolf Weigl, il quale era alla ricerca di un vaccino per il tifo per le truppe tedesche; l'incarico, che consisteva nel donare il sangue necessario al nutrimento delle coltivazioni di pidocchi, vettori del tifo, implicava un alto rischio di infezioni. L'istituto di Weigl significava protezione e supporto per molti intellettuali polacchi: i donatori del sangue ricevevano razioni di cibo addizionali e soprattutto evitavano il lavoro forzato o la deportazione nei campi di concentramento.

Nel 1944 le truppe sovietiche riprendono Leopoli. Ristabiliti i contatti con i sovietici, Banach accetta la cattedra offertagli dall'Università di Cracovia; tuttavia non ricoprì mai l'incarico: a causa di un cancro ai polmoni è costretto a stabilirsi a Leopoli fino al giorno della sua morte, avvenuta il 31 agosto 1945.

1.1.1 Teoria degli operatori lineari

Théorie des opérations linéaires, traduzione in francese di [Banach, 1931], è la prima delle *Monografie matematiche.* Il trattato, in cui prende forma la teoria degli operatori lineari, racchiude molti risultati di articoli precedenti e li integra con nuovi teoremi e applicazioni; ne risulta una teoria moderna ed elegante.

Tale teoria racchiude come casi particolari la teoria delle equazioni integrali e del calcolo delle variazioni e mette in luce nuove interpretazioni sulla teoria degli insiemi e sulla topologia; ad esempio il teorema del punto fisso, anche noto come teorema di Banach-Caccioppoli, può essere traslato nel classico teorema dell'esistenza della soluzione per le equazioni differenziali.

Esponiamo qualche risultato tratto dall'opera, cominciando con un teorema sull'estensione di operatori lineari, dimostrato originariamente da Hans Hahn; Banach dà la sua dimostrazione nell'articolo [Banach, 1929].

Teorema 1.1 (di Hahn-Banach, forma originale di Banach)**.** *Sia E uno spazio vettoriale dotato della norma $\|\cdot\|$ e sia G un suo sottospazio vettoriale; sia $f(x)$ un funzionale lineare*[1] *definito su G. Si mostra facilmente che esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M\|x\|$; il più piccolo tra gli M è detta la norma di $f(x)$ in G, e la denotiamo con $\|f\|_G$. Allora esiste un funzionale lineare $\varphi(x)$, definito su E, tale che*

$$f(x) = \varphi(x) \text{ per ogni } x \in G,$$

$$\|\varphi\| = \|f\|_G.$$

Vediamo ora l'enunciato in una forma moderna del teorema tratta da [Rudin, 1973, pagina 56, teorema 3.2], la cui dimostrazione fa uso del principio di massimalità di Hausdorff.

Lemma 1.2 (principio di Hausdorff)**.** Un insieme S non vuoto totalmente ordinato, sottoinsieme di un insieme A parzialmente ordinato, è contenuto in un sottoinsieme di A massimale totalmente ordinato.

Teorema 1.3 (di Hahn-Banach)**.** *Supponiamo che*

- *M è un sottospazio di uno spazio vettoriale X su $\mathbb{R}$;*

[1] Nell'articolo la definizione di continuità di un funzionale è inclusa nella definizione di linearità.

- *$p : X \to \mathbb{R}$ soddisfa*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \ \textit{e} \ p(tx) = tp(x)$$

con $x \in X$, $y \in X$ e $t \geq 0$;

- *$f : M \to \mathbb{R}$ è lineare e $f(x) \leq p(x)$ su M.*

Allora esiste un funzionale lineare $\Lambda X :\to \mathbb{R}$ tale che

$$\Lambda x = f(x) \ \textit{per ogni} \ x \in M$$

e

$$-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x) \ \textit{per ogni} \ x \in X.$$

Dimostrazione. Se $M \neq X$, scegliamo $x_1 \in X$, $x_1 \notin M$, e definiamo

$$M_1 = \{x + tx_1 : x \in M, t \in \mathbb{R}\}.$$

Chiaramente M_1 è uno spazio vettoriale. Da

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x - x_1) + p(x_1 + y),$$

otteniamo

$$f(x) - p(x - x_1) \leq p(y - x_1) - f(y) \text{ con } x, y \in M.$$

Sia

$$\alpha = \sup_{x \in M} f(x) - p(x - x_1);$$

allora

$$f(x) - \alpha \leq p(x - x_1) \text{ con } x \in M \tag{1.1}$$

e

$$f(y) + \alpha \leq p(x + x_1) \text{ con } y \in M. \tag{1.2}$$

Definiamo f_1 su M_1 in questo modo:

$$f_1(x + tx_1) = f(x) + t\alpha \text{ con } x \in M, t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Così $f_1 = f$ su M e f_1 è lineare su M_1.

Preso $t > 0$, rimpiazziamo x con $t^{-1}x$ nella (1.1), rimpiazziamo y con $t^{-1}y$ nella (1.2) e moltiplichiamo le disuguaglianze risultanti per t. In combinazione con la (1.3) questo prova che $f_1 \leq p$ su M_1.

Per dimostrare la seconda parte del teorema usiamo il principio di massimalità di Hausdorff, il cui enunciato è equivalente al lemma di Zorn. Sia P la collezione di tutte le coppie ordinate (M', f'), dove M' è un sottospazio di X contenente M e f' è un funzionale lineare su M' che estende f e soddisfa $f' \leq p$ su M'. Definiamo la relazione d'ordine parziale $(M', f') \leq (M'', f'')$ che significa che $M' \subset M''$ e $f' = f''$ su M'. Per il principio di massimalità di Hausdorff, esiste un sottoinsieme massimale totalmente ordinato Ω di P.

Sia Φ la collezione di tutti gli M' tale che $(M', f') \in \Omega$. Allora Φ è totalmente ben ordinato dall'inclusione insiemistica, e l'unione $\tilde{M}$ di tutti gli elementi di Φ è quindi un sottospazio di X. Se $x \in \tilde{M}$ allora $x \in M'$ per qualche $M' \in \Phi$; definiamo $\Lambda x = f'(x)$, dove f' è la funzione che compare nella coppia $(M', f') \in \Omega$.

È facile verificare che Λ è ben definito su $\tilde{M}$, che Λ è lineare e che vale $\Lambda \leq p$. Se $\tilde{M}$ fosse un sottospazio in senso stretto di X, la prima parte della dimostrazione darebbe un'ulteriore estensione di Λ, e questo contraddirebbe la massimalità di Ω. Quindi $X = \tilde{M}$.

Infine, la disuguaglianza $\Lambda \leq p$ implica che

$$-p(-x) \leq -\Lambda(-x) = \Lambda(x)$$

per ogni $x \in X$. Questo completa la dimostrazione. $\square$

Il teorema di Hahn-Banach è considerato uno dei teoremi fondamentali dell'analisi funzionale, insieme al principio dell'uniforme limitatezza, che tratteremo nel capitolo 1.3, e al teorema dell'applicazione aperta con alcune conseguenze come il teorema del grafico chiuso [Brezis, 2010, p. 35], che vediamo subito dopo aver introdotto alcune definizioni di base, ovviamente con linguaggio "moderno". Da qui alla fine del capitolo seguiamo [Brezis, 2010].

Definizione 1.4. Uno **spazio di Banach** è uno spazio vettoriale (su $\mathbb{R}$ o su $\mathbb{C}$) normato completo rispetto alla sua norma.

Definizione 1.5. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ completo e sia Y uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Un'applicazione $T : X \to Y$ che ad ogni $x \in X$ associa $T(x) \in Y$ è detta **operatore**.

Teorema 1.6 (dell'applicazione aperta)**.** *Siano X e Y due spazi di Banach e sia T un operatore lineare continuo e suriettivo da X in Y. Sia U un sottoinsieme aperto di X. Allora $T(U)$ è aperto.*

Nella dimostrazione si utilizza il celebre risultato dovuto a René-Louis Baire:

Teorema 1.7 (della categoria di Baire)**.** *Sia X uno spazio metrico completo non vuoto. Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di sottoinsiemi chiusi tali che*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X;$$

allora esiste n_0 tale che la parte interna di X_{n_0} è non vuota.

Dimostrazione del teorema 1.6. Definiamo la famiglia di insiemi $X_n = n\overline{T(B_X(0,1))}$[2]. Per la suriettività di T, vale

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = Y;$$

per il teorema della categoria esiste n_0 tale che

$$Int(X_{n_0}) \neq \emptyset.$$

Segue che

$$Int[\overline{T(B(0,1))}] \neq \emptyset.$$

Prendiamo $c > 0$ e $y_0 \in Y$ tali che

$$B(y_0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))}; \tag{1.4}$$

in particolare, $y_0 \in \overline{T(B(0,1))}$ e per simmetria anche

$$-y_0 \in \overline{T(B(0,1))}. \tag{1.5}$$

Dalle relazioni 1.4 e 1.5, si ha che

$$B(0, 4c) \subset \overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))}.$$

Per la convessità di $\overline{T(B(0,1))}$, si ha

$$\overline{T(B(0,1))} + \overline{T(B(0,1))} = 2\overline{T(B(0,1))}, \text{ da cui } \overline{T(B(0,1))} \supset B(0, 2c).$$

Sia $y \in Y$ tale che $\|y\| < c$. Dalla conclusione precedente sappiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z \in X$ tale che

$$\|z\| < \frac{1}{2}, \ \|y - Tz\| < \varepsilon.$$

[2] $B_X(x,r)$ è la sfera aperta $\{y \in X; \|x - x_0\| < r\}$; se l'insieme di appartenenza è ovvio, verrà indicata con $B(x,r)$.

Per $\varepsilon = \frac{c}{2}$, esiste $z_1 \in X$ tale che

$$\|z_1\| < \frac{1}{2}, \ \|y - Tz_1\| < \frac{c}{2}.$$

Allo stesso modo possiamo trovare $z_2 \in X$ tale che

$$\|z_2\| < \frac{1}{4}, \ \|(y - Tz_1) - Tz_2\| < \frac{c}{4}.$$

Definiamo allora per induzione la successione (z_n) tale che

$$\|z_n\| < \frac{1}{2^n}, \ \|y - T(z_1 + z_2 + ... + z_n)\| < \frac{c}{2^n}.$$

La successione (x_n), con $x_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, è quindi di Cauchy.

Per $x_n \to x$ vale $\|x\| < 1$ e, per la continuità di T, $y = Tx$. Segue che

$$T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,c).$$

Consideriamo ora un insieme aperto $U \subset X$. Fissato $y_0 \in T(U)$, si ha $y_0 = Tx_0$ per un qualche $x_0 \in U$. Sia $r > 0$ tale che $B(x_0, r) \subset U$, cioè tale che $x_0 + B(0, r) \subset U$. Ne segue che

$$y_0 + T(B_X(0,r)) \subset T(U),$$

da cui

$$T(B_X(0,r)) \supset B_Y(0,rc).$$

Quindi

$$B_Y(y_0, rc) \subset T(U);$$

questo implica la tesi. □

Vediamo alcune conseguenze del teorema dell'applicazione aperta, utili per caratterizzare gli spazi di Banach e gli operatori lineari [Brezis, 2010, pp. 35 e seguenti].

Corollario 1.8. Siano X e Y due spazi di Banach e sia T un operatore lineare continuo da X in Y biiettivo. Allora T^{-1} è continuo.

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione del teorema dell'applicazione aperta abbiamo provato che

$$T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,c).$$

Inoltre T è iniettivo. Quindi se $x \in X$ è tale che $\|Tx\| < c$, allora $\|x\| < 1$. Per ogni $x \in X$ vale

$$\|x\| \leq \frac{1}{c}\|Tx\|.$$

Quindi T^{-1} è continuo. □

Corollario 1.9. Sia X uno spazio vettoriale provvisto di due norme, $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$. Supponiamo che X sia di Banach per entrambe le norme e che esista una costante $C \geq 0$ tale che

$$\|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \ \forall x \in X.$$

Allora le due norme sono equivalenti, cioè esiste $c > 0$ tale che

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \ \forall x \in X.$$

Dimostrazione. Basta applicare il corollario precedente con $X = (X, \| \ \|_1)$, $Y = (Y, \| \ \|_2)$ e prendendo come T la funzione identità. $\square$

Un'altra conseguenza fondamentale del teorema della funzione aperta è il seguente

Teorema 1.10 (del grafico chiuso). *Siano X e Y due spazi di Banach e sia T un operatore lineare da X in Y. Se il grafico di T*

$$G(T) := \{(x, y) \ \textit{tale che} \ x \in X, \ y = T(x)\}$$

è chiuso in $X \times Y$, allora T è continuo.

Dimostrazione. Definiamo su X la norma

$$\|x\|_1 = \|x\|_X + \|Tx\|_Y.$$

Supponendo che $G(T)$ sia chiuso, è facile mostrare che X è uno spazio di Banach per la norma $\| \ \|_1$. D'altra parte, X è uno spazio di Banach per la norma $\| \ \|_X$ e $\| \ \|_X \leq \| \ \|_1$. Grazie al corollario 1.9 ne deduciamo che le due norme sono equivalenti, cioè esiste una costante $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_X$. Si conclude che $\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X$. $\square$

1.2 Alfred Tarski

Alfred Teitelbaum nasce il 14 gennaio 1901 a Varsavia in una famiglia ebrea. Nella giovinezza gli viene impartita un'istruzione di rilievo; il giovane Alfred si dimostra brillante in tutte le discipline. Trascorso un breve periodo nell'esercito durante la guerra, si iscrive all'Università di Varsavia, con l'intenzione di laurearsi in biologia. I suoi progetti cambiano dopo aver frequentato un corso di logica tenuto da Stanisław Leśniewski, durante il quale manifesta la sua grande predisposizione per la matematica. Leśniewski era un logico e filosofo della matematica; con Tarski e Łukasiewicz (quest'ultimo ricordato come l'inventore della notazione polacca o prefissa) formava nel periodo interbellico a Varsavia uno dei centri principali di ricerca di logica formale.

Nel 1921 Tarski firma i suoi primi articoli sulla teoria degli insiemi. Nel 1923, in seguito alla conversione al cattolicesimo e nel clima di acceso nazionalismo che si respirava in Polonia, Alfred modifica il cognome originario, Teitelbaum, in Tarski. Intanto prosegue gli studi sotto la supervisione di Leśniewski e consegue il dottorato nel 1924. Nello stesso anno pubblica insieme a Banach l'articolo *Sur la décomposition des ensembles des points en parties respectivement congruentes*, in cui compare il teorema Banach-Tarski (vedi 1.2.1).

Dal 1922 insegna dapprima logica al Polish Pedagogical Institute, poi matematica e logica all'Università di Varsavia. Fino al 1939 è professore di matematica in un liceo di Varsavia e assistente di Łukasiewicz. Nel 1929 sposa Maria Witkowski, una collega del liceo.

Dal 1930 prende contatto con il circolo di Vienna del positivismo logico tramite Gödel. Nel 1933 pubblica *The concept of truth in formalized languages*, uno dei più importanti trattati sulla logica matematica. Del 1936 è l'articolo *On the concept of logical consequence* dove afferma che la conclusione di un argomento segue logicamente dalle sue premesse se e solo se tutti i modelli delle premesse sono un modello delle conclusioni. Nonostante goda di fama internazionale, Tarski non riesce ad accedere a nomine più prestigiose dell'insegnamento nelle scuole superiori.

La mattina del primo settembre 1939, i tedeschi invadono la Polonia; fortunatamente Tarski si trova negli Stati Uniti, dove sta partecipando a un convegno all'Università di Harvard. I tentativi della moglie e i due figli di raggiungerlo in America sono inutili; si ricongiungono a Tarski soltanto alla fine del conflitto, nel 1946. Non ebbero la stessa sorte i genitori e la cognata, che non scamparono alla strage.

Dal 1942 lavora al dipartimento di matematica dell'Università di California, dove continuerà a svolgere la sua attività di ricerca fino al termine della sua carriera. Nel 1945 ottiene la cittadinanza americana.

Nell'ambito della logica, formula tra gli anni '50 e '60 la teoria dei modelli. Ha fornito diversi enunciati equivalenti dell'assioma della scelta e ha mostrato la decidibilità e l'indecidibilità di molte teorie matematiche; in questo senso si muove l'articolo *Undecidable Theories* del 1953. Si occupa inoltre di algebre cilindriche e riprende il calcolo delle relazioni binarie di E. Schröder.

Muore a Berkeley il 26 ottobre 1983.

1.2.1 Il teorema di Banach-Tarski

Approfondiamo in questa sezione il teorema di Banach-Tarski seguendo [French, 1987], da cui sono anche tratte le figure 1.1 e 1.2.

Definizione 1.11. Due figure geometriche[3] si dicono **congruenti** (direttamente) se esiste un'isometria (diretta) che manda l'una nell'altra.

Definizione 1.12. X e Y si dicono **equiscomponibili** se esiste una partizione di X e una di Y con lo stesso numero finito di pezzi tale che ciascun pezzo di X sia congruente a un pezzo di Y e viceversa.

Il seguente teorema, conosciuto come **paradosso di Hausdorff** (1914), è alla base del teorema di Banach-Tarski.

Teorema 1.13 (di Hausdorff)**.** *Consideriamo $S \setminus D$ in $\mathbb{R}^3$, dove S è una sfera (superficie sferica) e D è un insieme infinito numerabile di punti. È possibile suddividere $S \setminus D$ in tre insiemi disgiunti A, B e C in modo tale che A, B, C e $B \cup C$ siano congruenti tra loro.*

Dimostrazione. Data una sfera S, seleziono due assi F e G passanti per il centro, in modo che formino un angolo di 45°. sia f una rotazione in senso orario di 180° rispetto a F e sia g una rotazione in senso orario di 120° rispetto a G. Osserviamo che $f^2 = Id$ e $g^3 = Id$; le rotazioni ottenibili tramite composizioni di f e g sono dunque descritte da f, g e g^2. Osserviamo inoltre che $fg \neq gf$.

Definiamo per induzione l'insieme Q delle rotazioni descritte da f, g e g^2 seguendo queste regole (figura 1.1):

- Id, f, g e g^2 appartengono a Q;
- da ogni elemento che inizia per f se ne definisce un nuovo elemento aggiungendo g a sinistra e un altro nuovo elemento aggiungendo $g^2 (= \overline{g})$ a sinistra;
- da ogni elemento che inizia per g o g^2 se ne definisce uno nuovo aggiungendo f a sinistra.

Costruiamo ora tre insiemi I, J e K tali che

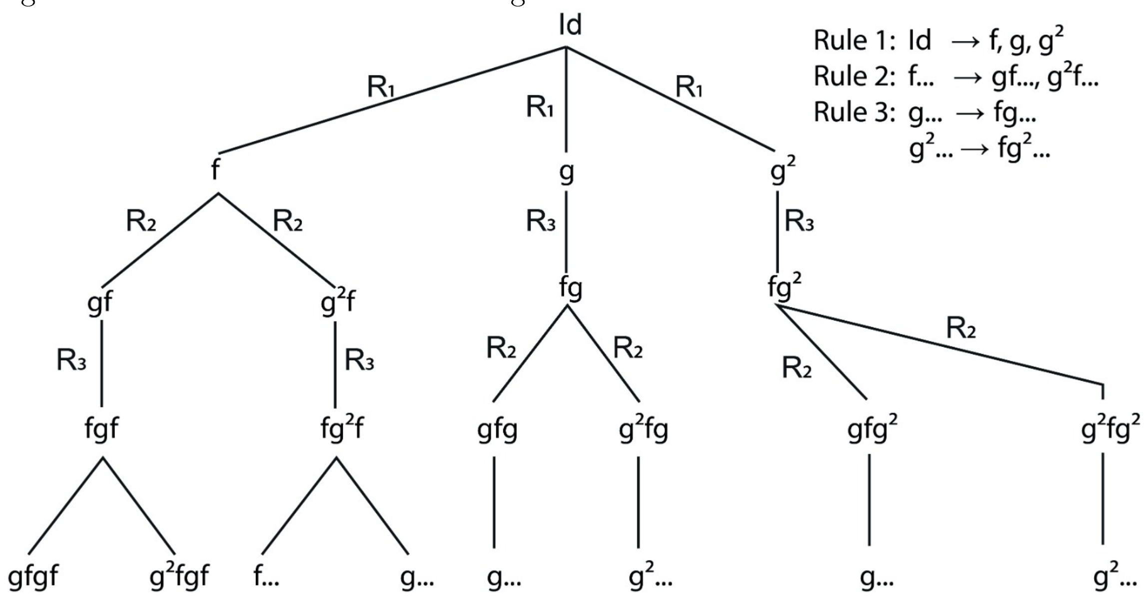
$$I \cup J \cup K = Q,\ fI = J \cup K,\ gI = J,\ g^2 I = K;$$

la scelta dell'insieme di appartenenza dipenderà dalla lettera più a sinistra, come mostrato in figura 1.2.

Chiamiamo D l'insieme numerabile dei punti invarianti per almeno una rotazione di Q. Applicando tutte le trasformazioni a ciascun punto $p \in S \setminus D$, otteniamo un insieme

[3] Con figura geometrica intendiamo sottoinsiemi del piano o dello spazio euclideo.

Figura 1.1: l'albero descrive come vengono costruite ricorsivamente le trasformazioni.



che chiameremo $Q(p)$. Dati due punti $p \neq p'$, è chiaro che $Q(p)$ e $Q(p')$ coincidono o sono disgiunti. Da ciascuno di questi insieme scegliamo un punto e con essi formiamo l'insieme M; per questa operazione ci avvaliamo dell'assioma della scelta.

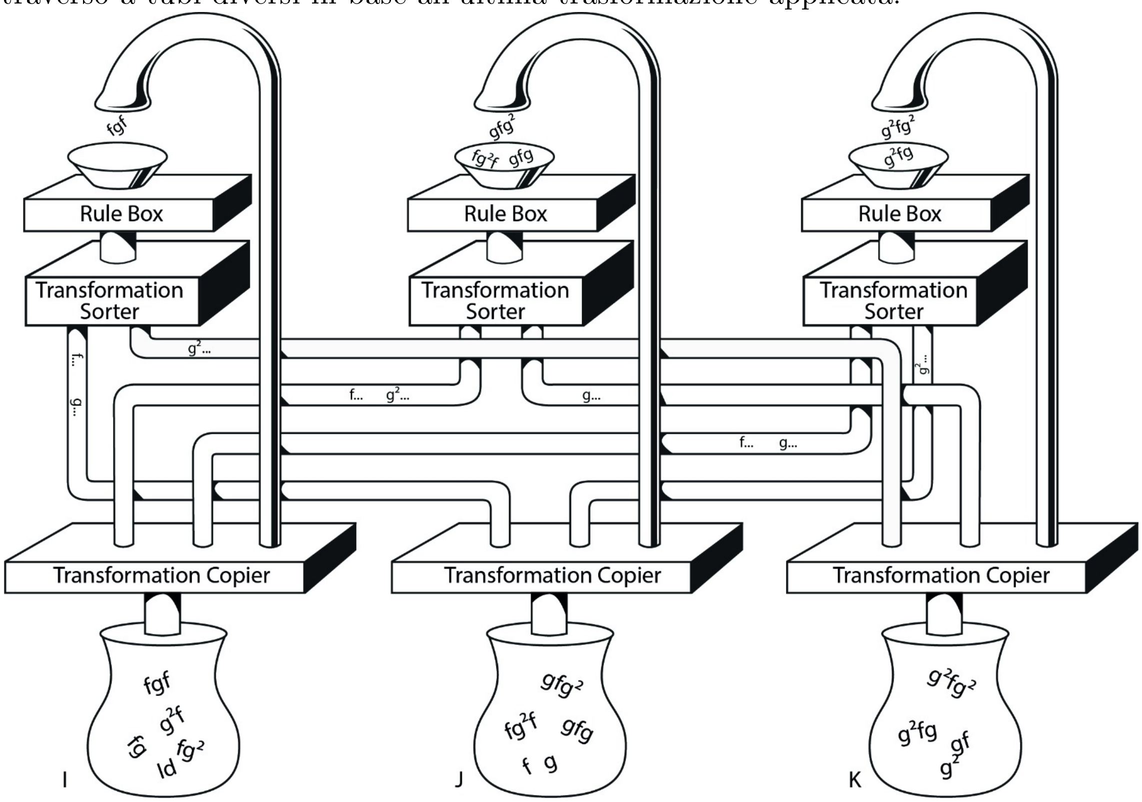
Definiamo ora A come l'insieme dei punti ottenuti applicando tutte le trasformazioni di I a M. Analogamente B e C sono definiti applicando le trasformazioni rispettivamente di J e K a M. Siccome $fI = J \cup K$, allora $f(A) = B \cup C$; dal momento che f è soltanto una rotazione di 180°, concludiamo che A è congruente a $B \cup C$. Analogamente A è congruente a B e a C. Per la transitività della congruenza, A, B, C e $B \cup C$ sono a due a due congruenti.

Dalla congruenza tra A e $B \cup C$, possiamo scomporre A in due insiemi disgiunti A_1 e A_2, ciascuno dei quali è congruente ad A. Allo stesso modo otteniamo B_1, B_2, C_1 e C_2. Riassumendo:

$$S = A \cup B \cup C \cup D = (A_1 \cup A_2) \cup (B_1 \cup B_2) \cup (C_1 \cup C_2) \cup D = (A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D) \cup (A_2 \cup B_2 \cup C_2).$$

Da $(A_1 \cup B_1 \cup C_1 \cup D)$ possiamo ottenere una sfera S_1 equivalente per scomposizioni finite a S; $(A_2 \cup B_2 \cup C_2)$ è equivalente a $S_2 \setminus D$, cioè può essere riassemblata in una "sfera" a cui manca un insieme numerabile di punti. Per dimostrare che S_2 e $S_2 \setminus D$ sono equivalenti, basta riassorbire D tramite una rotazione r passante per l'origine tale che D, $r(D)$, $r^2(D)$, $r^3(D)$, ... siano tutti disgiunti (basta scegliere un angolo di rotazione irrazionale). In conclusione, abbiamo $S = S_1 \cup S_2$, con S, S_1 e S_2 a due a due equiscomponibili. $\square$

Figura 1.2: La macchina usata per generare tutte le trasformazioni e dividerle negli insiemi I, J, K: le nuove trasformazioni costruite con le regole descritte, vengono mandate attraverso a tubi diversi in base all'ultima trasformazione applicata.



Il risultato di Hausdorff si riferisce alla superficie di una sfera; se ora immaginiamo di applicare il procedimento a una sfera cava via via più spessa, otteniamo che una sfera privata del centro è equiscomponibile a due sfere private del centro uguali alla prima.

Possiamo ora ottenere che una sfera privata del centro è equiscomponibile a una sfera intera: si riassorbe il centro con una rotazione non periodica per un asse non passante per il centro. La conclusione a cui si giunge è conosciuta come **teorema di Banach-Tarski**. La formulazione originale, più generale, del teorema, compare in [Banach-Tarski, 1924].

Teorema 1.14 (di Banach-Tarski)**.** *In uno spazio euclideo di dimensione $n \geq 3$ due insiemi limitati X e Y con parte interna non vuota sono equiscomponibili.*

Nell'articolo viene mostrato anche che il teorema corrispondente in spazi euclidei a una o due dimensioni è falso.

Questo risultato, all'apparenza paradossale, avrebbe motivato per molti l'inopportunità dell'uso dell'assioma della scelta (AC) nel ragionamento matematico; l'assioma è infatti necessario per dimostrare il teorema di Banach-Tarski. Tuttavia la pubblicazione non raggiunse lo scopo sperato: molti altri matematici consideravano il teorema non un paradosso distruttiva, ma semplicemente un risultato controintuitivo. È interessante notare come la discussione sia sorta con la pubblicazione di Banach e Tarski e non precedentemente con l'altrettanto paradossale teorema di Hausdorff.

Formalmente introdotto nel 1904 da Ernst Zermelo, AC dice che

> data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, esiste una funzione che ad ogni insieme fa corrispondere un suo elemento.

Un sistema è detto **consistente** se ogni teorema dedotto dagli assiomi non può essere vero e falso allo stesso tempo. Gödel dimostrò nel 1938 che se il sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel ZF è consistente, allora anche $ZF + AC$ è consistente (l'insieme $ZF + AC$ è solitamente indicato con ZFC). Infine P. J. Cohen dimostrò che AC non può essere dimostrato a partire da ZF.

1.2.2 Contributi alla logica

Nel periodo interbellico Tarski raggiunge risultati importanti nell'ambito della logica, occupandosi tra l'altro di conseguenza logica, sistemi formali e semantica della verità. Il lavoro sfocia nella teoria dei modelli, che prende forma negli anni '50 e '60.

Dato un linguaggio proposizionale, un'**interpretazione** del linguaggio è un'applicazione dall'insieme delle lettere nell'insieme dei valori booleani $B = \{T, F\}$. La definizione di un'interpretazione v si estende all'applicazione v^* sull'insieme di tutte le proposizioni in questo modo:

- $v^*(P) = v(P)$ per ogni lettera P;
- $v^*(\neg A) = F$ se e solo se $v^*(A) = T$;
- $v^*(A \wedge B) = F$ se e solo se $v^*(A) = F$ e $v^*(B) = F$;
- $v^*(A \vee B) = F$ se e solo se $v^*(A) = F$ oppure $v^*(B) = F$;
- $v^*(A \Rightarrow B) = F$ se e solo se non si dà il caso che $v^*(A) = F$ e $v^*(B) = T$.

Per molti tipi di logica, la teoria dei modelli è già significativa nel caso proposizionale, estendendo l'idea di interpretazione o di connettivo (logiche modali ecc.)

Per la matematica è significativa l'estensione nella logica predicativa, dove l'interpretazione dà luogo a strutture in cui si può valutare la verità di enunciati.

Se per un'interpretazione v si ha $v^*(A) = T$, diciamo che v soddisfa A e scriviamo $v \models A$; diciamo anche che v è un **modello** di A. Se per un insieme T di proposizioni (in un linguaggio predicativo) esiste un'interpretazione v tale che $v \models A$ per ogni $A \in T$, diciamo che v è un **modello** di T e scriviamo $v \models T$. La lettera T sta per "teoria"; con teoria intendiamo un insieme di proposizioni chiuso per derivazione.

Un primo risultato significativo per la teoria dei modelli è il teorema di Löwenheim-Skolem-Tarski.

Teorema 1.15 (di Löwenheim-Skolem-Tarski all'ingiù)**.** *Se un insieme di enunciati T ha un modello infinito, allora T ha un modello numerabile.*

Per la prova si veda ad esempio [Lolli, 1998], dove il teorema viene dimostrato come corollario del teorema del modello. Esiste anche un risultato speculare del teorema.

Teorema 1.16 (di Löwenheim-Skolem-Tarski all'insù)**.** *Se un insieme al più numerabile di enunciati ha un modello infinito, allora ne ha uno in ogni cardinalità infinita.*

Nell'articolo [Tarski, 1936], Tarski dimostra un importante risultato limitativo della logica matematica. Cominciamo con una definizione. L'aritmetica di Peano (PA) è la teoria che ha gli assiomi

- $\mathbf{0} \neq Sx$
- $Sx = Sy \Rightarrow x = y$
- $x + \mathbf{0} = x$
- $x + Sy = S(x + y)$

- $x \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$
- $x \times Sy = x \times y + x$

e il principio di induzione. Nell'interpretazione standard il simbolo $\mathbf{0}$ indica il numero naturale 0; il simbolo S rappresenta la funzione successore; i simboli $+$ e $\times$ rappresentano le operazioni binarie di addizione e moltiplicazione; il simbolo $=$ rappresenta la relazione di identità.

Teorema 1.17 (di Tarski)**.** *Sia $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}; 0; S; +; \cdot)$ il modello standard di PA. $Th(\mathfrak{N})$ (cioè l'insieme degli enunciati veri nel modello standard) non è descrivibile mediante nessuna formula aritmetica.*

Gli enunciati (in particolare quelli veri nel modello standard) si possono codificare in numeri naturali in maniera effettiva e reversibile. L'insieme dei numeri naturali è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ non descrivibile con una formula aritmetica (di PA).

1.3 Hugo Steinhaus

Hugo Dyonisy Steinhaus nasce il 14 gennaio 1887 in una famiglia di intellettuali ebrei. Jasło, la città natale, faceva parte dell'Austria dal 5 Agosto 1772, anno della prima spartizione della Polonia.

Compiuti gli studi inferiori, Steinhaus si trasferisce in Germania, per studiare matematica all'Università di Gottinga. Nel 1911 conclude il dottorato sotto la supervisione di David Hilbert, con la dissertazione *Anwendungen des Dirichlet'schen Prinzips* (Nuove applicazioni dei principi di Dirichlet).

Dopo avere servito la Legione Polacca per un breve periodo durante la prima guerra mondiale, nel 1916 si stabilisce a Cracovia dove incontra Banach. Lavora come assistente nell'università di Leopoli fino al 1920, anno della nomina a professore straordinario.

Nel 1923 Steinhaus è il primo, in un articolo pubblicato nel 1923 su *Fundamenta Mathematica*, a descrivere in modo rigoroso l'esperimento del lancio delle monete attraverso la teoria della misura. Nel 1925 precorre la teoria dei giochi definendo e discutendo il concetto di strategia. Con Banach pubblica nel 1927 l'articolo *Sur le principe de la condensation de singularités*; sempre insieme a Banach fonda nel 1929 la rivista *Studia Mathematica*, consacrata allo studio dell'analisi funzionale.

Steinhaus partecipa abitualmente ai ritrovi nello *Scottish Café*. Nel 1938 pubblica la sua opera divulgativa più conosciuta, *Mathematical Snapshots*, in cui sono discusse applicazioni della matematica a problemi reali e situazioni concrete. Nel corso degli anni contribuisce alla stesura dello *Scottish Book* con dieci problemi, tra cui l'ultimo dell'opera, inserito il 31 maggio 1941; il giorno dopo le truppe naziste occupano la città. A causa delle sue origini ebraiche, Steinhaus è costretto a trascorrere gli anni della guerra nascosto, inizialmente a Leopoli, poi in una piccola città vicina a Zamość. Nonostante i disagi, medita su nuove e idee e progetti che prenderanno forma negli anni successivi al conflitto.

La bibliografia di Steinhaus contiene 170 articoli, riguardanti varie branche della matematica. Importante è il lavoro compiuto sulle serie trigonometriche e sulle funzioni ortogonali; nell'ambito della teoria della probabilità è stato il primo a definire i concetti di indipendenza e distribuzione uniforme. Accanto a *Mathematical Snapshots* si colloca il libro *One Hundred Problems in Elementary Mathematics*, contenente cento problemi formulati, risolti e commentati dall'autore.

Muore a Breslavia il 25 febbraio 1972.

1.3.1 Il teorema di Banach-Steinhaus

Apparso per la prima volta in [Banach-Steinhaus, 1927], il teorema di Banach-Steinhaus (o dell'applicazione aperta) è considerato un risultato fondamentale dell'analisi funzionale, e insieme al teorema di Hahn-Banach e al teorema dell'applicazione aperta, ne costituisce il cardine. Nel capitolo manteniamo le notazioni introdotte in 1.1.

Chiamiamo $\mathcal{L}(X,Y)$ lo spazio degli operatori continui lineari da X in Y equipaggiato con la norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X,Y})} = \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|\leq 1}} \|T(x)\|.$$

Teorema 1.18 (di Banach-Steinhaus)**.** *Siano X e Y spazi di Banach e sia $(T_q)_{q\in I}$ una famiglia di operatori lineari continui da X in Y. Supponiamo che*

$$\sup_{q\in I} \|T_q(x)\| < +\infty \text{ per ogni } x \in X. \tag{1.6}$$

Allora

$$\sup_{q\in I} \|T_q\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X,Y})} < +\infty. \tag{1.7}$$

Dimostrazione. Per ogni $n \geq 1$, sia

$$X_n = \{x \in X \text{ tale che per ogni } q \in I \text{ valga } \|T_q(x)\| \leq n\}.$$

X_n è chiuso, quindi per l'ipotesi 1.6 vale

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = X.$$

Dal teorema della categoria di Baire, che abbiamo esposto in 1.1.1, segue che per un certo $n_0 \geq 1$, la parte interna di X_{n_0} è non vuota.

Prendiamo $x_0 \in X$ e $r > 0$ tali che $B(x_0, r) \subset X_{n_0}$. Vale

$$\|T_q(x_0 + rz)\| \leq n_0 \text{ per ogni } q \in I, \text{ per ogni } z \in B(0,1);$$

da cui segue

$$r\|T_q\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X},\mathrm{Y})} \leq n_0 + \|T_q(x_0)\|.$$

Quindi vale la relazione 1.7. □

Questa versione del teorema viene mostrata in [Brezis, 2010, p. 32]. Per contrapposizione, essa equivale all'enunciato originale del teorema:

Teorema 1.19 (di Banach-Steinhaus, forma originale)**.** *Sia X uno spazio vettoriale metrico completo, e sia Y uno spazio vettoriale metrico. Sia $\{T_{p,q}(x)\}$ una successione doppia di funzionali lineari di dominio X e codominio Y. Se per ogni p esiste x_p tale che*

$$\lim_{q \to +\infty} \sup \|T_{p,q}(x_p)\| = +\infty;$$

allora esiste x (indipendente da p) che soddisfa

$$\lim_{q \to +\infty} \sup \|T_{p,q}(x)\| = +\infty.$$

1.3.2 Mathematical snapshots

[Steinhaus, 1938], traduzione inglese dell'originale *Kalejdoskop Matematyczny*, è una raccolta di problemi legati alla realtà didatticamente interessanti che possono essere risolti da un punto vista matematico in maniera elegante. Presentiamo in questa sezione due esempi, per capire lo scopo divulgativo e didattico dell'opera.

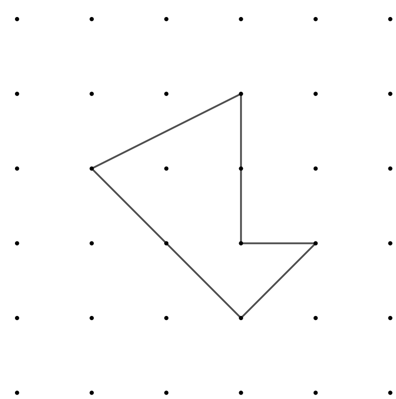
Il teorema di Pick

Questo risultato è stato dimostrato da Georg Alexander Pick nel 1899. Consideriamo un poligono (non necessariamente convesso) P i cui vertici hanno coordinate intere. Sia i il numero di punti con coordinate intere interni al poligono e sia p il numero di punti con coordinate intere appartenenti al perimetro di P.

Teorema 1.20 (di Pick)**.** *L'area di P è data da*

$$A(P) = i + \frac{p}{2} - 1. \tag{1.8}$$

Figura 1.3: Teorema di Pick



Prendiamo per esempio il poligono della figura 1.3. In tal caso $i = 1$ e $p = 7$; quindi $A = 1 - \frac{7}{2} - 1 = 3,5$.

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che l'espressione $i+\frac{p}{2}-1$ è additiva per poligoni adiacenti esternamente su un solo lato. Infatti due poligoni che coinvolgono rispettivamente $i_1 + p_1$ e $i_2 + p_2$ punti, hanno un lato in comune contenente $n \geq 0$ punti di coordinate intere e i due vertici del lato; perciò vale

$$i = i_1 + i_2 + n,\ p = p_1 + p_2 - 2n - 2 \text{ da cui}$$

$$i + \frac{p}{2} - 1 = (\frac{p_1}{2} + i_1 - 1) + (\frac{p_2}{2} + i_2 - 1).$$

Il teorema è facilmente verificabile per un rettangolo di base m e altezza n, con $m, n \in \mathbb{N}$: i punti della griglia appartenenti al perimetro sono $p = 2m + 2n$, mentre i punti interni sono $i = (n-1)(m-1)$; quindi vale

$$i + \frac{p}{2} - 1 = (n-1)(m-1) + \frac{2m+2n}{2} - 1 = mn = A.$$

I parallelogrammi sono sempre ottenibili a partire da un rettangolo: si ritaglia un triangolo rettangolo di cui un cateto corrisponde a una dimensione del rettangolo, e l'altro cateto giacente sull'altra dimensione del rettangolo; a questo punto si fa combaciare il primo cateto con il lato di egual misura rimasto del rettangolo. Quindi per l'additività appena mostrata la formula vale per un parallelogramma arbitrario.

Spezzando il parallelogramma in due triangoli con una diagonale, osserviamo che la formula vale anche per un triangolo qualsiasi. Dal momento che ogni poligono è decomponibile in triangoli, segue la tesi. □

Esistono diverse generalizzazioni del teorema; vediamone due che riguardano il caso di poligoni intrecciati e il caso di solidi in $\mathbb{R}^3$ [Scott, 1987].

I) Prendiamo un poligono intrecciato, cioè che soddisfi le seguenti condizioni:

- se due bordi si intersecano, la loro intersezione è un vertice del poligono P;
- ogni punto del bordo appartiene a un triangolo non degenere contenuto in P;
- l'area racchiusa da P è la somma delle aree delle regioni raggiungibili dall'esterno attraversando il perimetro di P un numero dispari di volte.

La formula dell'area sarà allora

$$A(P) = i + \frac{p}{2} + k,$$

con $k = -\chi(P) + \frac{1}{2}\chi(\partial P)$, dove la funzione χ è la caratteristica di Eulero:

$$\chi(P) = V - S + F,$$

$$\chi(\partial P) = V - S.$$

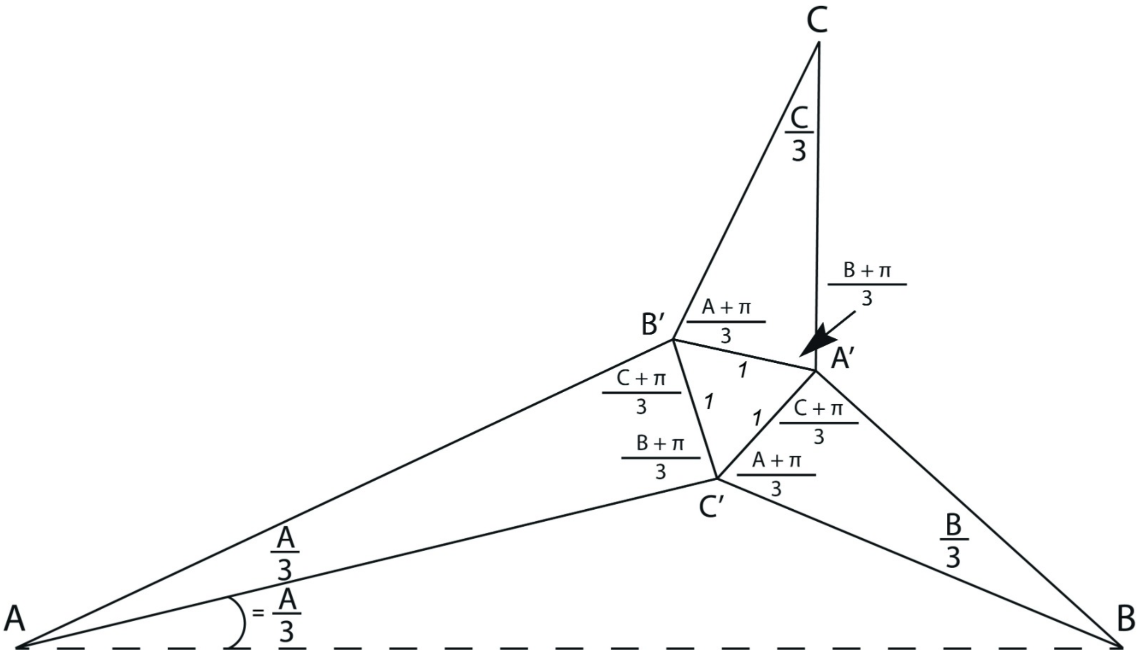
V, S e F sono rispettivamente il numero di vertici, i lati e le facce del poligono. Per poligoni semplici $F = 1$ e $E = p$, e si ha la formula di Pick.

II) Consideriamo ora un tetraedro in $\mathbb{R}^3$ di vertici $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ e $(0,0,k)$, con $k \in \mathbb{Z}^*$. Per questo tetraedro, al variare di k, varrà sempre $p = 4$ e $i = 1$; il volume di un tetraedro non può dunque essere espresso soltanto in termini di p e i. Per generalizzare la formula in $\mathbb{R}^3$, è necessario introdurre per ogni $n \in \mathbb{Z}^*$ l'insieme L_n dei punti di coordinate $(a/n, b/n, c/n)$, con a, b e $c \in \mathbb{Z}$. Chiamiamo T_n il numero di punti di L_n sul bordo e interni a P e chiamiamo B_n il numero di punti di L_n sul bordo di P. Allora vale la formula

$$2(n-1)n(n+1)V(P) = 2(T_n - nT_1) + (B_n - nB_1),$$

dove $V(P)$ è il volume di P.

Figura 1.4: La costruzione che ci permette di dimostrare il teorema di Morley.



Il teorema di Morley

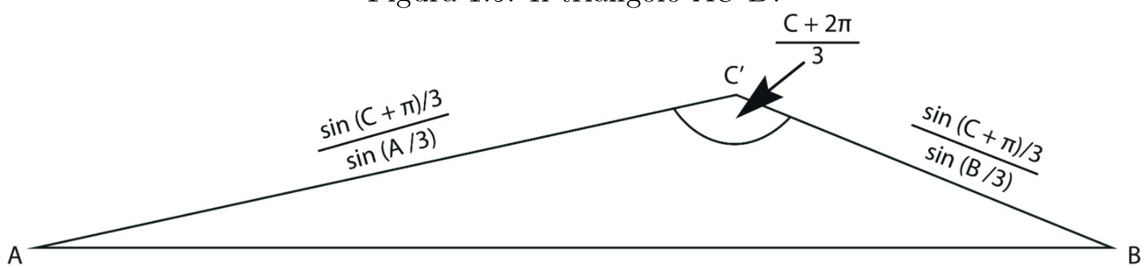
Teorema 1.21 (di Morley). *Dato un triangolo qualsiasi ABC, detti A', B' e C' le intersezioni delle trisettrici adiacenti degli angoli interni, il triangolo di vertici A', B' e C' è equilatero.*

Steinhaus non riporta nell'opera una dimostrazione del teorema, ma cita in bibliografia l'articolo [Morley, 1907]; la dimostrazione che presentiamo, tratta da [Gale, 1996], richiede solamente qualche nozione di base di trigonometria.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema procedendo a ritroso: partiamo da un triangolo equilatero e costruiamo un triangolo generico, che in seguito identificheremo col triangolo ABC.

Preso un triangolo equilatero $A'B'C'$ di lato 1, scegliamo opportunamente tre punti A, B e C in modo che il triangolo ABC sia simile a un triangolo arbitrario e che i triangoli $AB'C'$, $B'CA'$ e $C'A'B$ abbiano come angoli interni i valori richiesti in figura 1.4. Indichiamo con A, B e C gli angoli interni del triangolo ABC. Mostreremo che AC' e AB', BC' e BA', CB' e CA' sono le trisettrici rispettivamente degli angoli A, B e C.

Figura 1.5: Il triangolo $AC'B$.



Risolviamo il triangolo $AC'B$, partendo dal fatto che

$$\widehat{B'AC'} = \pi - \frac{C + \pi/3}{3} - \frac{B + \pi/3}{3} = \frac{\pi - B - C}{3} = \frac{A}{3},$$

$$\widehat{A'BC'} = \frac{B}{3}.$$

Banalmente,

$$\widehat{AC'B} = 2\pi - \frac{A + \pi}{3} - \frac{B + \pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{C + 2\pi}{3}.$$

Il teorema dei seni applicato al triangolo $AB'C'$ dà

$$\frac{AC'}{\sin{(C + \pi)/3}} = \frac{1}{\sin{(A/3)}} \text{ da cui}$$

$$AC' = \frac{\sin{(C + \pi)/3}}{\sin{(A/3)}}.$$

Analogamente si ottiene

$$BC' = \frac{\sin{(C + \pi)/3}}{\sin{(B/3)}}$$

e quindi la figura 1.5.

Di questo triangolo conosciamo due lati e l'angolo compreso; gli angoli rimanenti sono dunque determinati e devono valere $A/3$ e $B/3$: questo viene verificato ancora una volta con il teorema dei seni.

Risolvendo in modo analogo i triangoli $A'BC$ e $AB'C$, si trova che le trisettrici di A, B e C si incontrano per formare il triangolo equilatero $A'B'C'$. Come già visto, A, B e C sono scelti in modo da ottenere un triangolo simile a quello voluto; perché sia proprio uguale basta scalare l'intera figura. $\square$

Enunciato per la prima volta da Morley nel 1899, il teorema ha avuto una rapida diffusione nella comunità scientifica: tantissimi matematici hanno dato la loro versione del teorema, dando luce a numerose generalizzazioni e arrivando a definire diversi triangoli di Morley. Pur essendo un risultato assai elementare, il teorema è stato dimostrato relativamente tardi; probabilmente questo ritardo è dovuto all'impossibilità di trisecare un angolo generico con "riga e compasso", ovvero col solo utilizzo di rette e circonferenze.

In figura 1.6 un triangolo di Morley si ottiene prendendo in considerazione le intersezioni delle trisettrici dei complementari degli angoli del triangolo ABC.

1.4 Wacław Sierpiński

Oltre ai riferimenti citati, per la biografia di Sierpiński si segue [Kuratowski, 1972].

Wacław Franciszek Sierpiński nasce a Varsavia il 14 marzo 1882, mentre la Polonia è sotto il dominio della Russia; suo padre Konstanty Sierpiński è un rinomato fisico. La politica zarista scoraggia l'istruzione tra gli studenti polacchi; tuttavia Sierpiński, terminati brillantemente gli studi superiori, decide nel 1899 di iscriversi all'Università di Varsavia. Il nome ufficiale dell'istituto è dal 1869 "Università dello Zar"; l'organico è composto esclusivamente di russi e le lezioni stesse si tengono in lingua russa. I suoi interessi sono influenzati verso la teoria dei numeri dal matematico russo G. Voronoj. Nel 1903 vince il primo premio (una medaglia d'oro) di un concorso all'interno del Dipartimento di Fisica e Matematica.

Nonostante le difficoltà, Sierpiński si laurea nel 1904. Trascorso un breve periodo come insegnate di matematica e fisica presso una scuola femminile di Varsavia, si trasferisce a Cracovia per proseguire gli studi di dottorato, conseguito nel 1906 presso l'Università Jagellonica. Nel 1908 viene assegnato all'Università di Leopoli.

L'interesse per la teoria degli insiemi nasce nel 1907 e nel 1909 tiene il primo corso interamente dedicato a tale argomento e nel 1912 pubblica *Zarys teorii mnogości* (*Cenni alla teoria degli insiemi*), una delle prime formulazioni sintetiche di questa teoria. Nel 1915 Sierpiński descrive un famoso frattale, il triangolo di Sierpiński. Il frattale può essere ottenuto a partire da un triangolo equilatero: congiungendo i punti medi dei lati di tale triangolo si ottengono quattro triangoli equilateri congruenti tra loro; si sopprime il triangolo centrale capovolto e si applica il procedimento a ciascuno dei tre triangoli rimasti ricorsivamente all'infinito (figura 1.7).

Lo studio dei frattali diventerà di moda molto più tardi: il termine "frattale" viene coniato nel 1975 dal matematico polacco Benoît Mandelbrot (Varsavia, 1924 – Cambridge 2010). I frattali si comportano in certi casi diversamente dalle figure geometriche finite; per esempio, se il raggio di una palla in $\mathbb{R}^3$ viene raddoppiato, il volume aumenta di otto

Figura 1.6: Un triangolo equilatero è ottenuto a partire dalle trisettrici degli angoli complementari agli angoli interni del triangolo ABC

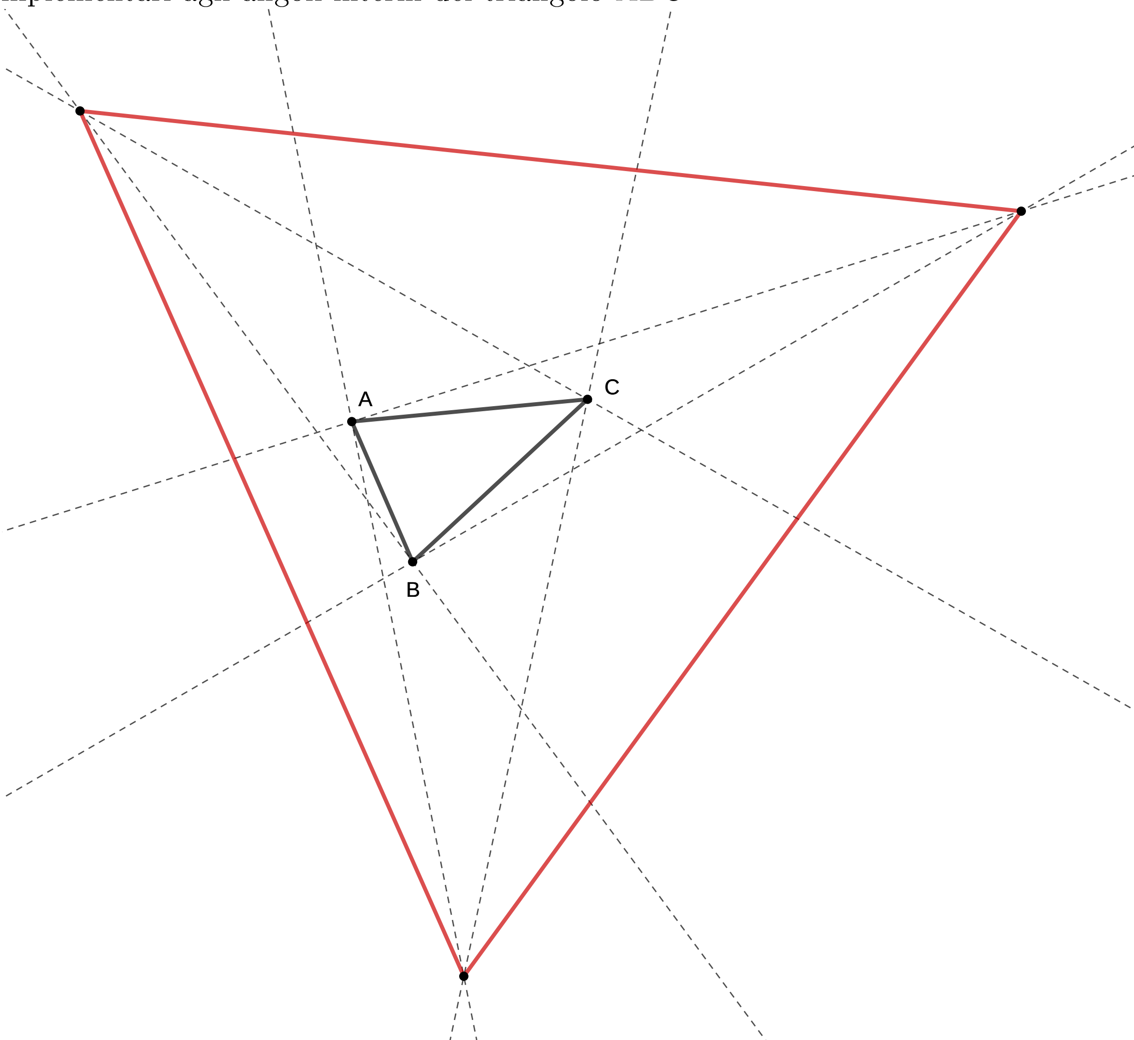
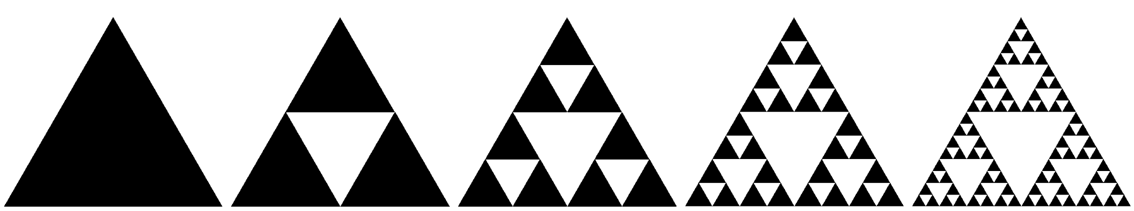


Figura 1.7: Il triangolo di Sierpiński dopo quattro iterazioni.



volte; oppure se il perimetro di un poligono viene raddoppiato, l'area aumenta quattro volte. Nel caso di frattali invece non necessariamente la figura scala di un numero intero; per questo motivo viene definita la dimensione frattale (una di queste è la dimensione di Hausdorff). La dimensione di Hausdorff del triangolo di Sierpiński è $\ln 3/\ln 2 \approx 1,58$.

Allo scoppio della prima guerra mondiale, Sierpiński, che si trovava in Russia, viene portato prigioniero a Vjatka (ora Kirov). Grazie ai matematici russi Egorov e Luzin viene trasferito a Mosca dove ha la possibilità di lavorare con Luzin, con il quale studia gli insiemi analitici e proiettivi[4] e la teoria delle funzioni reali; non riportiamo le definizioni. Nel 1917 è il primo a dare un esempio di numero normale assoluto; in una data base b, un numero è detto normale se ogni sua cifra compare con frequenza $1/b$, ogni sua coppia di numeri compare con frequenza $1/b^2$, e in generale ogni n-upla compare con frequenza $1/b^n$; ad esempio $0,12345678910111213\dots$ è un numero normale in base 10. Un numero è detto normale assoluto se è normale in ogni base $b \geq 2$.

A guerra finita, dopo un breve periodo trascorso all'Università di Leopoli, accetta la nomina a professore alla rinata Università di Varsavia, dove rimane per tutta la vita. Nel 1920 fonda con Janiszewski e Mazurkievicz la rivista *Fundamenta Mathematicae*. Il periodo tra le due guerre mondiale è il più prolifico: oltre che di teoria degli insiemi, si interessa anche di topologia generale e funzioni di variabile reale. Studia una curva frattale che descrive un cammino chiuso che contiene ogni punto interno di un quadrato; la lunghezza di tale curva, conosciuta come curva di Sierpiński, è infinita, mentre l'area racchiusa è i 5/12 dell'area del quadrato (in senso euclideo). Nel 1934 pubblica il suo fondamentale lavoro *Hypothèse du continu* per la serie *Monografie matematiche*, di cui è co-fondatore.

Durante la seconda guerra mondiale, è impegnato in una delle reti clandestine di istruzione sorte durante la guerra, l'Università Sotterranea di Varsavia, mentre ufficialmente lavora come impiegato negli uffici del consiglio di Varsavia. Durante la guerra riesce a far stampare i suoi articoli in Italia, così da non interrompere le sue pubblicazioni. Nei primi dell'agosto 1944, in seguito alla rivolta di Varsavia, viene catturato dai tedeschi vicino a Cracovia; la sua casa, compresa la sua nutrita libreria e la sua corrispondenza, viene data alle fiamme.

Dopo la liberazione della città, tiene lezioni per un breve periodo all'Università Jagellonica; nell'autunno del 1945 torma ad occupare il suo ruolo precedente all'Università di Varsavia. Dal 1958 è caporedattore di *Acta Arithmetica*, una rivista dedicata alla teoria dei numeri, la cui pubblicazione si era interrotta durante la guerra. Nello stesso anno pubblica *Cardinal and Ordinal Numbers* sulla teoria degli insiemi; sei anni più tardi pub-

[4] Si tratta di famiglie di sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$ (o di altri spazi topologici) legati alla σ-algebra di Borel.

blica *Elementary Theory of Numbers*: negli ultimi venti anni della sua vita i suoi studi si concentrano soprattutto sulla teoria degli insiemi. Nel 1960 si ritira dall'insegnamento. Alla morte, avvenuta a Varsavia il 21 ottobre 1969, le sue pubblicazioni comprendono 724 articoli e 50 libri.

In connessione coi suoi studi sull'ipotesi del continuo ottiene nel 1947 un importante risultato [Sierpiński, 1947]: l'ipotesi generalizzata del continuo, nel sistema assiomatico di Zermelo-Fraenkel, implica l'assioma della scelta.

1.4.1 L'ipotesi generalizzata del continuo

Per valutare l'importanza di questi risultato, è necessario introdurre alcuni fondamenti di aritmetica transfinita.

Definizione 1.22. Un numero **ordinale** è un insieme ben ordinato dalla relazione d'appartenenza $\in$ tra i suoi elementi e tale che ogni suo elemento è anche un suo sottoinsieme.

Sono ordinali:

- $0 = \emptyset$
- $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
- $2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
- $3 = \{0, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$
- $\ldots$ (numerali di Von Neumann)
- $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$

Ogni numero naturale, così come l'insieme dei numeri naturali, è un numero ordinale. Anche gli insiemi

$$\omega \cup \{\omega\},\ \omega \cup \{\omega\} \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}, \ldots$$

sono numeri ordinali.

Addizione di numeri ordinali

Dati due numeri ordinali u e v, consideriamone l'unione disgiunta

$$u \sqcup v = (u \times \{0\}) \cup (v \times \{1\})$$

e la ordiniamo in modo che ogni elemento di u sia più piccolo di un elemento di v. Si può dimostrare che ogni insieme ben ordinato è simile a un (unico) numero ordinale.

Definizione 1.23. La **somma** di due numeri ordinali u e v, indicata con $u+v$, è l'unico ordinale simile all'insieme ben ordinato $u \sqcup v$.

Moltiplicazione di numeri ordinali

Dati due numeri ordinali u e v, consideriamone il prodotto cartesiano

$$u \times v = \bigsqcup_{k \in v} u \times \{k\}$$

che è ben ordinato con l'ordine antilessicografico.

Definizione 1.24. Il prodotto di due numeri ordinali u e v, indicato con uv, è definito come l'unico numero ordinale simile all'insieme ben ordinato $u \times v$.

La moltiplicazione e la somma tra ordinali non sono commutative; ad esempio,

$$1 + \omega = \omega \neq \omega + 1,$$

$$2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega.$$

Elevamento a potenza di numeri ordinali

Come anche sarebbe possibile per la somma e il prodotto tra ordinali, definiamo l'elevamento a potenza direttamente per induzione transfinita:

$$\begin{cases} \beta^0 = 1 \\ \beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta \\ \beta^\gamma = \cup_{\gamma<\alpha} \beta^\gamma \text{ se } \alpha \text{ è limite} \end{cases}$$

Nel sistema le prime due uguaglianze coincidono con l'idea intuitiva di elevamento a potenza per i numeri naturali; un'importante differenza si riscontra nel caso di ordinali limite. Ad esempio, per come è stato definito, vale

$$2^\omega = \omega.$$

Aritmetica cardinale

Un particolare tipo di numeri ordinali sono i numeri cardinali.

Definizione 1.25. Consideriamo per ogni numero ordinale u la classe (che è anche un insieme) di tutti i numeri ordinali equipollenti a u; tale insieme, detto **classe numero** di u, viene denotato con $Z(u)$. Se u è un numerale di Von Neumann, $Z(u) = u$.

Definizione 1.26. Sia u un numero ordinale. Un numero ordinale $\overline{\overline{u}}$ è detto **numero cardinale** di u se è il più piccolo numero ordinale di $Z(u)$, ovvero se è contenuto in ogni numero ordinale di $Z(u)$. Qualunque elemento di u ha cardinale $\overline{\overline{u}}$. Per esempio, ω è il cardinale di ω, $\omega + 1$, $\omega + 2$, $\dots$, $\omega + \omega$, $\dots$ Un cardinale è un ordinale $v = \overline{\overline{v}}$.

Se A è un insieme ben ordinabile, allora è simile a un ordinale α dipendente dal buon ordinamento di A; il cardinale $\overline{\overline{\alpha}}$ ne è indipendente e quindi si può porre $\overline{\overline{A}} = |A| = \overline{\overline{\alpha}}$. Per attribuire un ordinale ad ogni insieme bisogna postulare la buona ordinabilità, e quindi l'assioma della scelta.

Per ogni numero ordinale esiste un numero cardinale più grande ed esiste il minimo cardinale più grande; per ogni cardinale possiamo definire quindi il cardinale successore (diverso da quello ordinale). I cardinali transfiniti formano così una ORD-successione:

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+ \text{ cardinale successore di } \aleph_\alpha \\ \aleph_\beta = \bigcup_{\gamma<\beta} \aleph_\gamma \text{ se } \beta \text{ ordinale limite} \end{cases}$$

Il concetto di successore di un cardinale è diverso da quello di un ordinale; ad esempio per ω, che abbiamo visto essere anche un numero cardinale, vale

$$S(\omega) = \omega + 1 \text{ mentre}$$

$$\omega^+ = \aleph_0^+ = \aleph_1 > \omega + 1.$$

La somma (prodotto) tra due numeri cardinali λ e k è il cardinale della somma (prodotto) di λ e k come ordinali; somma e prodotto tra naturali sono quelli ordinari. Come conseguenza risulta inoltre che

$$k \oplus \lambda = k \otimes \lambda = \max\{k; \lambda\}$$

se k è transfinito e con $\lambda \neq 0$ per $\otimes$.

La definizione dell'elevamento a potenza è più complicata. Se definiamo k^λ come il cardinale dell'insieme $F(\lambda; k)$ delle funzioni da λ in k, ci serve l'assioma di scelta perché k^λ sia ben ordinabile.

L'ipotesi del continuo, avanzata da Georg Cantor nel 1878, afferma che non esiste un insieme di cardinalità intermedia tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$. Successivamente Cantor stesso generalizzò l'ipotesi: non esiste un insieme A di cardinalità intermedia tra quella di un insieme M e quella di $\mathcal{P}(M)$. Se vale l'assioma di scelta, l'ipotesi generalizzata del continuo si può esprimere con $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ per ogni $\aleph_\alpha$.

In [Sierpiński, 1947] viene dimostrato un risultato interessante: l'ipotesi generalizzata del continuo, nel sistema assiomatico di Zermelo-Frankel, implica l'assioma di scelta. Per dimostrarlo è sufficiente mostrare che se vale l'ipotesi generalizzata del continuo, allora ogni insieme (e possiamo limitarci a insiemi infiniti) si può ben ordinare; è sufficiente dunque provare che l'ipotesi generalizzata del continuo implica che ogni insieme è equipollente a un sottoinsieme di un numero cardinale, dato che ogni numero cardinale è ben ordinato.

Osservazione 1.27. La potenza di un insieme M è strettamente minore della potenza del suo insieme delle parti $\mathcal{P}(M)$ ed M si può mettere in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei suoi singoletti, che è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(M)$. Se dunque $\mathcal{P}(M)$ è equipollente a un sottoinsieme di un numero cardinale, tale equipollenza ci dà un buon ordinamento per l'insieme M. Lo stesso vale anche per $\mathcal{P}^2(M)$ e $\mathcal{P}^3(M)$. Per dimostrare che l'ipotesi generalizzata del continuo implica l'assioma della scelta, Sierpinski mostra che per ogni insieme M, succede che $\mathcal{P}^n(M)$, con $n = 1, 2$ o 3, è equipollente a un sottoinsieme di un qualche numero cardinale.

Nel seguito seguiremo [Abian, 1965]. Indicheremo con $\cong$ la relazione di equipollenza e utilizzeremo la seguente notazione: $M \preceq N$ se M è equipollente a un sottoinsieme di N. L'ipotesi generalizzata del continuo si può formulare come segue:

$$M \preceq N \preceq \mathcal{P}(M) \text{ implica } N \cong \mathcal{P}(M) \text{ oppure } N \cong M \tag{1.9}$$

I seguenti lemmi sono indipendenti dall'assioma della scelta.

Lemma 1.28. [Abian, 1965, p. 780 lemma 3]. Dati due insiemi M e N, $M \cup N \cong \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ implica $\mathcal{P}(M) \preceq N$, e quindi $M \preceq N$.

Inoltre, se M è infinito, vale

$$\mathcal{P}^2(M) \times \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^2(M) \tag{1.10}$$

(vedi [Abian, 1965, p. 780 formula (47)]).

Lemma 1.29. [Abian, 1965, p. 781 lemma 4]. Per ogni insieme M esiste un numero cardinale $\aleph(M)$ tale che

$$\aleph(M) \not\preceq M,\ \aleph(M) \preceq \mathcal{P}^3(M).$$

Teorema 1.30 (di Sierpiński)**.** *L'ipotesi generalizzata del continuo implica l'assioma della scelta.*

Dimostrazione. Sia M un insieme infinito. Banalmente,

$$\mathcal{P}^3(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M).$$

Per il lemma 1.29

$$\mathcal{P}^3(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \preceq \mathcal{P}^4(M) \times \mathcal{P}^4(M) \text{ che per la (1.10) implica}$$

$$\mathcal{P}^3(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \preceq \mathcal{P}^4(M) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^3(M)).$$

Per l'ipotesi generalizzata del continuo (1.9) vale dunque una tra le due possibilità

$$\text{I) } \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^4(M) \text{ oppure II) } \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^3(M).$$

I) se $\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^4(M)$ allora per la (1.10)

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^4(M) \cong \mathcal{P}^2(\mathcal{P}^2(M)) \times \mathcal{P}^2(\mathcal{P}^2(M)) \cong \mathcal{P}(\mathcal{P}^3(M)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}^3(M))$$

da cui, per il lemma 1.28,

$$\mathcal{P}^3(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)).$$

Quest'ultima ci dà un'equipollenza di $\mathcal{P}^3(M)$ con un sottoinsieme di un numero cardinale e per quanto osservato in 1.27 la tesi è dimostrata.

II) se $\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^3(M)$, allora per il lemma 1.29

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \npreceq \mathcal{P}(M),\ \aleph(\mathcal{P}(M)) \preceq \mathcal{P}^3(M),$$

e seguendo il ragionamento iniziale otteniamo

$$\mathcal{P}^2(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \preceq \mathcal{P}^3(M) \times \mathcal{P}^3(M) \text{ che per la (1.10) implica}$$

$$\mathcal{P}^2(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \preceq \mathcal{P}^3(M).$$

Per l'ipotesi generalizzata del continuo (1.9) vale dunque una tra le due possibilità

$$\text{II.1) } \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^3(M) \text{ oppure II.2) } \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^2(M).$$

II.1) se $\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^3(M)$, per la (1.10) si ha

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^3(M) \cong \mathcal{P}^2(\mathcal{P}(M)) \times \mathcal{P}^2(\mathcal{P}(M)) \cong \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(M)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}^2(M)),$$

da cui per il lemma 1.28 si ottiene

$$\mathcal{P}^2(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)).$$

$\mathcal{P}^2(M)$ è così equipollente a un sottoinsieme di un numero cardinale e per quanto osservato in 1.27 la tesi è dimostrata.

II.2) se $\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}^2(M) \cong \mathcal{P}^2(M)$, allora

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \not\preceq \mathcal{P}(M),\ \aleph(\mathcal{P}(M)) \preceq \mathcal{P}^2(M).$$

Da

$$\mathcal{P}(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \preceq \mathcal{P}^2(M)$$

otteniamo quindi

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \cong \mathcal{P}(M) \text{ oppure } \aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \cong \mathcal{P}^2(M).$$

Dal lemma 1.29 si vede che $\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \cong \mathcal{P}(M)$ è impossibile. Se invece

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \cong \mathcal{P}^2(M), \text{ per la 1.10 si ha}$$

$$\aleph(\mathcal{P}(M)) \cup \mathcal{P}(M) \cong \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$$

da cui per il lemma 1.28 si ottiene

$$\mathcal{P}(M) \preceq \aleph(\mathcal{P}(M)).$$

$\mathcal{P}(M)$ è così equipollente a un sottoinsieme di un numero cardinale e per quanto osservato in 1.27 la tesi è dimostrata. □

Nell'articolo [Sierpiński, 1947] viene esposta una dimostrazione di 1.30, in sostanza equivalente a quella che abbiamo visto prima, ma con notazioni e metodo profondamente diversi. Come spesso accade, in questo caso le notazioni della formulazione originale del teorema appesantiscono la lettura.

Vengono chiamati aleph le cardinalità di insiemi ben ordinati (infiniti); nel caso generale, in mancanza dell'assioma della scelta, la cardinalità si ottiene per astrazione e viene indicata con una doppia sopralineatura. La cardinalità di M verrà allora indicata con $\overline{\overline{M}}$. Possiamo parlare di equipollenza ($\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$) se c'è una corrispondenza biunivoca tra M ed N e di cardinalità

$$\overline{\overline{M}} \leq \overline{\overline{N}}$$

se esiste una funzione $f : M \to N$ iniettiva. In mancanza dell'assioma della scelta due cardinalità non sono sempre confrontabili; sono però confrontabili le cardinalità di insiemi ben ordinati.

Nell'articolo la cardinalità di un insieme M viene indicata per esempio con $\overline{\overline{M}} = m$ e la cardinalità del suo insieme delle parti sarà quindi $\overline{\overline{\mathcal{P}(M)}} = 2^m$.

Vediamo come viene riportato nell'articolo l'equivalente del lemma 1.29.

Lemma 1.31. Sia M un insieme qualunque. Possiamo determinare un insieme ben ordinato N di elementi (distinti) di $\mathcal{P}^3(M)$ tale che la sua potenza non è inferiore né uguale a quella dell'insieme M.

Allo stesso modo la dimostrazione di 1.30 del 1947 è in sostanza analoga a quella esposta e riportarla qui sarebbe ridondante.

Bibliografia e sitografia

[Abian, 1965] Alexander Abian. *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*. W. B. Saunders Company, 1965

[Banach, 1929] Stefan Banach. *Sur le fonctionelle linéaires*. Studia Mathematica, 1: pp. 223-239. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1929

[Banach, 1931] Stefan Banach. *Theory of Linear Operations*. North Holland, 1987

[Banach-Steinhaus, 1927] Stefan Banach & Hugo Steinhaus. *Sur le principe de la condensation de singularités*. Fundamenta Mathematica, 9: pp. 50-61. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1927

[Banach-Tarski, 1924] Stefan Banach & Alfred Tarski. *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*. Fundamenta Mathematicae, 6: pp. 244-277. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1924

[Brezis, 2010] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010

[French, 1987] Robert M. French. *The Banach-Tarski Theorem*. The Mathematical Intelligencer, 10(4): p. 21-28. Springer Verlag, 1988

[Gale, 1996] David Gale. *Triangles and Proofs*. The Mathematical Intelligencer, 18(1): pp. 31-34. Springer Verlag, 1996

[Kałuża, 1996] Roman Kałuża. *Through a Reporter's Eyes - The Life of Stefan Banach*. Birkhäuser, 1996

[Kuratowski, 1972] Kazimierz Kuratowski. *Wacław Sierpiński (1882-1969)*. Acta Arithmetica, 21: p. 1-5. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1972

[Lolli, 1998] Gabriele Lolli. *Introduzione alla logica formale*. Il Mulino, 1991

[Morley, 1907] Frank Morley. *On reflexive geometry*. Transactions, 8: pp. 14-24. American Mathematical Society, 1907

[Rudin, 1973] Walter Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill Book Company, 1973

[Scott, 1987] Paul R. Scott. *The Fascination of the Elementary*. American Mathematical Monthly, 94(8): p. 759-768. Mathematical Association of America, 1987

[Sierpiński, 1947] Wacław Sierpiński. *L'hypotèse généralisée du continu et l'axiome du choix*. Fundamenta Mathematicae, 34: pp. 1-5. Institute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences, 1947

[Steinhaus, 1938] Hugo Steinhaus. *Mathematical Snapshots*. Oxford University Press, 1951

[Tarski, 1936] Alfred Tarski. *On the Concept of Following Logically*. History and Philosophy of Logic, 23: 155-196

[1] `https://it.wikipedia.org/wiki`

[2] `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/index.html`