Alma Mater Studiorum · Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea Magistrale in Matematica

IL RUOLO DELLE MISCONCEZIONI IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA: UNA SPERIMENTAZIONE IN CLASSE

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatrice:
Prof.ssa Alessia Cattabriga
Correlatore:
Prof. Paolo Negrini

Presentata da:
Flavia Scinicarelli

Sessione Unica
Anno Accademico 2018/2019

All'entusiasmo,
che possa non spegnersi mai
e accompagnarmi sempre.
Bis.

Tutti gli insegnanti sono stati alunni una volta.
Ma pochi di essi se ne ricordano.
Rivisitazione di una frase de Il piccolo principe

Indice

Introduzione

L'obbiettivo della presente tesi è quello di condurre uno studio approfondito circa le misconcezioni relative a un gruppo di studenti frequentanti la scuola secondaria di secondo grado provenienti da due strutture differenti: un noto liceo di Bologna e il liceo scientifico Leonardo Da Vinci di Terracina (LT).
Le misconcezioni sono un ingrediente fondamentale da tenere in forte considerazione per la buona riuscita del processo di insegnamento-apprendimento che si consuma ogni giorno all'interno del contesto d'aula, sempre diverso e in continua evoluzione. Lo studio e l'interesse per le misconcezioni nasce intorno agli anni '70 dello scorso secolo con un approccio quasi esclusivamente negativo: il termine misconcezione veniva usato come sinonimo di "errore", "idea sbagliata" e "malinteso". Solamente in un secondo momento le misconcezioni vengono reinterpretate come il tentativo da parte dello studente di applicare una conoscenza o procedura, che sa essere corretta in un certo contesto, ad un contesto più ampio in cui diviene scorretta; Colette Laborde infatti afferma: «*Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in Matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono.*»

Con l'avvento della teoria costruttivista, secondo la quale il discente è un soggetto attivo che interpreta la realtà, è cambiato anche il ruolo delle misconcezioni all'interno della Didattica della Matematica: gli errori non sono più qualcosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma vengono interpretati come prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione; tale visione viene condivisa da molti studiosi, come Rosetta Zan, Silvia Sbaragli e Bruno D'Amore, il quale afferma: «*Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.*»
Le misconcezioni sono dunque viste come step necessari all'apprendimento del Sapere Scientifico. La costruzione del sapere passa attraverso la costruzione di una successione di oggetti matematici e le misconcezioni possono allora presentarsi quando una o più immagini mentali di un oggetto matematico vengono considerate prematuramente come il modello giusto di ciò di cui si sta parlando, quando ancora non lo sono. Si possono distinguere due tipi di misconcezioni: misconcezioni evitabili, che sono causate da scelte didattiche inadeguate, e misconcezioni inevitabili, in quanto necessarie rappresentazioni iniziali e non complete di un concetto matematico. Non tutte le misconcezioni sono però frutto di una conoscenza precedentemente acquisita (intuitivamente o attraverso trasposizioni didattiche) e accertata come corretta e poi in seguito rivelatasi errata: alcune possono essere frutto di altri tipi di ragionamento da parte degli studenti, come ad esempio le clausole del contratto didattico. In generale, ciò che emerge è che sono frutto di molti fattori differenti e, proprio per questo motivo, sono personali e quindi diverse per ciascuna persona; nonostante ciò hanno delle caratteristiche comuni: si ripetono, nel senso che gli errori che ne provengono sono sistematici e ripetuti, hanno una propria logica e il più delle volte sono impliciti, l'alunno cioè non ne è consapevole. Infine, molte volte le misconcezioni sono frutto di convinzioni locali, motivo per cui è possibile che uno studente presenti contemporaneamente due misconcezioni tra loro contrastanti.

Il primo capitolo della tesi si concentra esclusivamente sulle misconcezioni: viene affrontato lo studio del termine e il suo sviluppo storico; viene spiegato tutto ciò che è alla base delle misconcezioni, dalla teoria costruttivista alla costruzione di oggetti matematici fino ad arrivare alla spiegazione del paradosso di Duval che affronta lo storico "dibattito" tra Noetica e Semiotica. Dopodiché si affronta il problema di come riconoscere le misconcezioni: sicuramente l'errore è il primo segnale di malessere manifestato da un alunno al quale il docente può porre rimedio grazie all'intervento di recupero. Lo scopo della sezione dedicata all'errore è quello di rompere del tutto l'identificazione errore-difficoltà e di analizzare i molteplici motivi che portano lo studente a sbagliare.
Nel Capitolo 2 viene spiegato nel dettaglio la differenza tra misconcezioni evitabili e misconcezioni inevitabili con annessi esempi famosi in letteratura, alcuni dei quali presenti in alcune sperimentazioni effettuate negli anni. Viene affrontato il caso delle frazioni, dell'infinito, le misconcezioni relative alla relazione perimetro/area di figure piane, quelle legate alle operazioni di addizione e sottrazione, alla probabilità, alla divisione e a molti altri temi.
Il Capitolo 3 è il cuore della tesi: dopo aver affrontato uno studio teorico circa le misconcezioni, si è voluto mettere in atto la teoria testando un gruppo di 194 studenti per appurare la presenza o meno di alcune misconcezioni. La sperimentazione si divide in due parti: un'analisi verticale e un'analisi orizzontale. L'analisi verticale consiste nel confrontare i risultati ottenuti durante una sperimentazione avvenuta nell'ottobre del 2017 ad opera di una laureanda all'Università di Bologna su un campione di 40 alunni, con i risultati ottenuti dalla mia sperimentazione attraverso la somministrazione agli stessi alunni (37) a distanza di due anni dello stesso questionario. L'obbiettivo era quello di vedere se, con il passare del tempo, ci fosse stato un miglioramento nelle risposte o se le misconcezioni individuate nel 2017 fossero ancora presenti nel 2019. L'analisi orizzontale invece consiste nell'analizzare i risultati ottenuti dallo stesso questionario somministrato a un campione di 157 alunni con l'obbiettivo di testare la presenza o meno di alcune misconcezioni ipotizzate a priori e di vedere se le due classi oggetto dell'analisi verticale fossero "in media" rispetto ad un campione più vasto preso in considerazione per

l'analisi orizzontale. Ciò che era importante al fine della buona riuscita della sperimentazione era la "regola" di motivare ogni risposta, così da rendere più facile l'interpretazione delle concezioni di ogni studente e la catalogazione delle varie risposte in diversi campi. L'analisi ha solo un carattere qualitativo e interpretativo, non ha la pretesa di essere un'analisi statistica né tantomeno una stima dell'andamento medio degli studenti italiani; ciò non toglie che tale sperimentazione possa essere uno spunto sia per docenti che per alunni al fine di favorire una riflessione sulle misconcezioni in Matematica e la programmazione di attività didattiche innovative volte a limitare (o meglio, far conoscere, creare familiarità con) le misconcezioni.
Infine, nel Capitolo 4 viene riportata un'intervista rivolta ai docenti (per la precisione, i docenti dei ragazzi a cui è stato somministrato il questionario del Capitolo 3) al fine di stabilire un dialogo aperto con loro circa le misconcezioni; il mio obbiettivo era quello di confrontarmi con le diverse idee che gli insegnanti hanno a riguardo e con le diverse tipologie di approccio per quanto riguarda l'intervento di recupero.

Capitolo 1

Che cos'è una misconcezione

In questo capitolo descrivo e analizzo le misconcezioni e il loro ruolo all'interno del processo di insegnamento-apprendimento della Matematica: studio la nascita del termine misconcezione e come il significato ad esso attribuito cambi radicalmente nel tempo, da qualcosa di negativo a qualcosa di importante per l'apprendimento; analizzo come avviene l'apprendimento del Sapere Matematico e le varie costruzioni mentali ad esso connesse; presento l'errore come indice di disagio cognitivo e dunque come mezzo per capire che qualcosa non và, a tal proposito analizzo alcune delle cause che portano lo studente a commettere errori.
I testi di riferimento utilizzati sono [4], [8], [9], [11], [29], [30], [31], [32] e [33].

1.1 Il termine misconcezione e primi usi

Un termine usato da decenni nella ricerca in didattica della Matematica è la parola "misconcezione" (o "misconcetto"); tale parola viene interpretata in modi diversi dai vari autori: inizialmente assume solamente connotati negativi, come sinonimo di "errore", "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; in seguito si trova inteso anche nel senso più esteso di "concezione fallace". Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.
Riporto di seguito una breve storia del termine e dei significati ad esso attribuiti.

I primi usi di questo termine si hanno nel dominio della fisica o dell'economia con riferimento ai lavori di diSessa [12], Kahneman e Tversky [19] e Voss [1]. Una delle prime apparizioni documentate del termine "misconception" in Matematica avviene negli USA nel 1981 ad opera di Wagner in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni [28]; appaiono poi numerosi lavori nei quali il termine "misconcezione" è esplicito; Schoenfeld, Saughnessy e Silver, rispettivamente in [25], [26], e [27], lo usano per lo più a proposito di *problem solving*: parlando delle convinzioni, ovvero le idee tipiche di ogni individuo, vedono come queste interagiscano con la risoluzione dei problemi; in [11] viene riportato quanto detto in [27] da Silver, cioè che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le concezioni errate, e in [25] da Schoenfeld, il quale evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda le procedure. Prendendo in prestito le argomentazioni di [6], si vede come gli studenti rivelino le proprie misconcezioni quando applicano correttamente regole scorrette, cioè inadatte alla situazione; spesso all'origine di questo fatto c'è una mancata comprensione o un'errata interpretazione dei messaggi dell'insegnante.
Negli anni '80 c'è dunque un intenso lavoro degli studiosi in didattica della Matematica su questo tema, che prosegue anche negli anni seguenti. Significativo è l'estratto seguente di una lettera privata di Colette Laborde del 2005 ripresa da [11, pag. 8]:

> *«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in Matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono.»*

Questa attenzione al significato e al valore da attribuire al termine misconcezione è stata molto produttiva perché ha portato gli studiosi a non identificare più gli errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma ad interpretarli come prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione; sempre più negli anni si è venuto a delineare un significato condiviso di "misconcezioni" come cause di errori o meglio come cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili e a volte addirittura convincenti. Rosetta Zan per esempio dice: «*Le convinzioni specifiche scorrette ("misconceptions") sulla Matematica sono quelle responsabili di errori, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile.*» [29, pag. 91] È dunque innegabile il fatto che questo tipo di studi abbia costretto a prendere in esame l'interpretazione della realtà da parte del soggetto e a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza, non come un'assoluta mancanza di conoscenza. Bruno D'Amore afferma: «*Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.*» [9, pag. 7].

1.2 Alla base delle misconcezioni

1.2.1 La teoria costruttivista

Per poter comprendere appieno il ruolo della misconcezione all'interno del processo di insegnamento-apprendimento della Matematica (e di ogni disciplina in generale) è fondamentale avere come quadro teorico di riferimento quello della *teoria costruttivista* secondo la quale, come riportato in [32], il discente non è un contenitore vuoto da riempire di conoscenza, ma un soggetto attivo che interpreta la realtà, che mette in relazione i fatti osservati con le esperienze precedenti, che costruisce schemi interpretativi alla luce dei quali anticipa le esperienze future; le *convinzioni* (o *credenze*) sono il frutto di questo continuo processo di interpretazione. Il soggetto viene dunque posto al centro del processo di apprendimento come protagonista attivo e a lui sono indirizzate gran parte delle attenzioni: si cerca di interpretare l'apprendimento della Matematica secondo il suo punto di vista per andare incontro alle sue esigenze e alle sue difficoltà.

1.2.2 Modelli primitivi e linguaggio

È proprio nel quadro della teoria costruttivista che si inseriscono i tentativi, da parte di vari autori, di analizzare il processo di insegnamento-apprendimento della Matematica; tali studi, come riportato in [33], hanno portato i diversi autori a porsi le seguenti domande: Come nascono i misconcetti? Più in generale, quali fattori dirigono l'interpretazione che l'allievo fa dei messaggi dell'insegnante? Anche se i misconcetti possono essere frutto di interpretazioni estremamente personali, si può riconoscere nel processo che porta alla loro costruzione il ruolo fondamentale di due elementi: i modelli primitivi taciti e intuitivi e il linguaggio[1]. Vediamo di cosa si tratta.

In [16] viene raccontato come la ricerca sui misconcetti mette in luce che in alcuni casi il soggetto fa riferimento ad un *modello primitivo tacito* del fenomeno o del concetto in questione, cioè ad un'interpretazione significativa di quella nozione Matematica, che si sviluppa ad uno stadio iniziale del processo di apprendimento e che continua a influenzare tacitamente le interpretazioni e le decisioni risolutive dell'allievo. Il termine "tacito" significa semplicemente che l'individuo non è consapevole di questa influenza, oppure, per lo meno, della sua estensione.
«*Il concetto di "conoscenza tacita" può essere considerato un aspetto fondamentale del ragionamento scientifico.[...] Se il tacito processo di integrazione porta a soluzioni errate, l'attività correttiva ha la possibilità di individuare e di analizzare questi meccanismi, inizialmente nascosti, e sottoporli al controllo individuale; "Tacito"*

[1]Per un approfondimento sul significato di modello mentale si veda la Sottosezione 1.2.3.

non significa, a nostro avviso, misterioso, irrazionale, genuinamente irresponsabile; [...] I concetti matematici e le operazioni sono fondamentalmente costruzioni astratte e formali. Il loro significato e la loro coerenza non sono garantiti da prove empiriche, ma piuttosto da vincoli assiomatici. Il problema psicologico principale è che non siamo naturalmente attrezzati per manipolare concetti e operazioni, la cui coerenza non è supportata da prove empiriche. Pensare di manipolare simboli puri che obbediscono solo a costrizioni formali è in pratica impossibile; conseguentemente, produciamo modelli che conferiscono a questi modelli qualche significato comportamentale, pratico, unificante. Inoltre, come abbiamo detto, questi modelli tendono a sostituire, tacitamente, l'originale nel nostro processo di ragionamento. Molto spesso, il modello è suggerito dall' iniziale esperienza empirica della realtà da cui il concetto matematico è stato estratto. Quello che succede è che continuiamo a ricorrere, tacitamente, alle fonti primitive dei concetti matematici astratti, molto tempo dopo che queste fonti avrebbero dovuto perdere il loro impatto nel processo di ragionamento.[...] Molte delle difficoltà che gli studenti si trovano ad affrontare in ambito scientifico sono dovute all'influenza di modelli intuitivi taciti che agiscono in modo non vincolante nel ragionamento.[...] I modelli possono essere intuitivi o astratti; esterni o mentali; taciti o espliciti; analogici o paradigmatici; primitivi o elaborati.» [16, pag. 9].

È proprio nei modelli primitivi taciti che si crea subito una corrispondenza diretta tra la situazione proposta e il concetto matematico che si sta utilizzando: questo modello si sviluppa di solito come conseguenza della proposta da parte dell'insegnante di un'immagine forte e convincente di un concetto[2], che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze; si possono formare cioè dei modelli dominati sul piano intuitivo proprio grazie a questa rispondenza tra situazione descritta e Matematica utilizzata per farlo. Ma non è detto che questo modello rispecchi il concetto in questione; in questo caso ci si scontra con modelli creatisi con la ripetizione ma niente affatto auspicati; Fischbein, come riporta [11, pag. 12], afferma: «*L'esistenza di incompatibilità e di contraddizione nelle relazioni tra*

[2]Per un approfondimento sul significato di immagine mentale si rimanda alla Sottosezione 1.2.3.

il livello concettuale e il fondamento intuitivo rappresenta una delle principali fonti di idee sbagliate e di errori nell'attività Matematica dei bambini.»
In situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo di un concetto emerge con energia. Si può ipotizzare infatti che, anche quando lo studente più evoluto si è costruito un modello corretto di un concetto, modello assai vicino al sapere matematico, in condizioni di normalità il modello intuitivo riappare, dimostrando la sua persistenza.

Ad esempio, in [11] si dimostra come, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra naturali rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (cosiddetto "per schieramento") e avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, si forma quel *modello parassita* che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre; analogo è il *modello parassita* della divisione che "diminuisce sempre". La cosa interessante è che tali modelli tenderanno a riapparire sempre, anche in studenti esperti[3].

Come si evince da [30], un altro elemento fondamentale dal punto di vista costruttivista è il ruolo del linguaggio, particolarmente evidente nel caso dei misconcetti: è chiaro infatti che il processo di interpretazione che l'allievo mette in atto quando fa Matematica è fortemente influenzato dai messaggi verbali mandati dall'insegnante, dai testi che legge e che produce, dall'interazione verbale in classe. Negli esempi che si trovano in letteratura emerge chiaramente l'importanza di questi fattori, e insieme la problematicità intrinseca alla mescolanza di due linguaggi, quello quotidiano e quello specifico della Matematica, mescolanza inevitabile nella comunicazione in classe; il fatto che un termine venga usato anche nel linguaggio quotidiano con significati diversi è motivo frequente di confusione. A tal proposito, si riportano un paio di esempi in cui la mescolanza tra linguaggio quotidiano e linguaggio specifico matematico ha contribuito alla nascita di misconcezioni nella mente degli studenti:

i) Per quanto riguarda il misconcetto legato alla moltiplicazione sopra descrit-

[3]Tale modello è oggetto del questionario presente in Appendice A e viene analizzato e approfondito nella Sezione 3.1.

to (per cui "la moltiplicazione accresce sempre"), vediamo che anche questo può essere alimentato dall'uso del termine "moltiplicare" nel linguaggio quotidiano: nella Sacra Bibbia compare il messaggio "Amatevi e moltiplicatevi" oppure si trova la famosa scena miracolosa de "La moltiplicazione dei pani e pei pesci" in cui da pochi pani se ne ricavano molti di più (vi è un accrescimento, appunto); il titolo di un libro da poco uscito in commercio è "L'amore si moltiplica"[4] per indicare che, dopo la nascita dei figli, vi è molto più amore all'interno della famiglia; e ancora, durante un'intervista per la rivista digitale "Freeda"[5] una ragazza afferma: "l'amore si moltiplica, non si divide", per spiegare come lei sia capace di dare ancora più amore. Risulta perciò chiaro come l'uso frequente del termine "moltiplicare" nel linguaggio quotidiano, con significato diverso rispetto al termine "matematico", accresca le difficoltà e la confusione negli studenti, portandoli a sviluppare misconcezioni anche molto radicate riguardo questo tema.

ii) In [33] viene trattato il caso di Alice, quarta ginnasio, che deve riconoscere in alcuni enunciati di teoremi qual è l'ipotesi e qual è la tesi, ma *regolarmente* sbaglia e chiama ipotesi la tesi; dopo un attento dialogo con il docente che, dopo aver ripetuto inutilmente la definizione di ipotesi e tesi, cerca di comprendere il ragionamento di Alice, si giunge all'esplicitazione della sua argomentazione: «*Quando in un discorso normale, o anche nelle scienze, diciamo "faccio un'ipotesi" poi però dobbiamo far vedere che è vera... cioè la dobbiamo dimostrare.*» Tale spiegazione appare addirittura convincente: l'uso di termini diversi per indicare la stessa cosa in contesti diversi, naturale per docenti o per persone esperte in Matematica, appare fuorviante per ragazzi che si accingono ad apprendere concetti nuovi e alimenta quindi convinzioni errate, misconcetti, come nel caso di Alice.

[4]The Pozzolis Family, *L'amore si moltiplica*, Mondadori, (2019).
[5]http://www.freedamedia.com/

1.2.3 Immagini mentali e modelli mentali

Nella sottosezione precedente abbiamo parlato di modelli primitivi, qui discuteremo, più in generale, seguendo la trattazione di [11], cosa si intenda per modello mentale e come questo si formi a partire da una serie di immagini mentali.
«*Un'immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione interna o esterna; è condizionata da influenze culturali e stili personali; in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può essere elaborata più o meno coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende dall'individuo), tuttavia l'immagine mentale è interna e almeno in prima istanza involontaria. L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente), tutte relative ad un certo concetto, costituisce il* modello mentale *(interno) del concetto stesso.*» [11, pag. 14]
Detto in altro modo, lo studente si costruisce un'immagine I_1 di un concetto C; egli la crede stabile, definitiva. Ma ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni su C che non sono contemplate dall'immagine I_1 che aveva. Egli deve allora adeguare la "vecchia" immagine I_1 ad una nuova, più ampia, che non solo conservi le precedenti informazioni, ma accolga anche le nuove. Di fatto si costruisce una nuova immagine I_2 di C. Tale situazione può ripetersi più volte durante la storia scolastica di un allievo.
Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi da un'immagine a un'altra più potente e si può immaginare questa successione di costruzioni concettuali $I_1, I_2, I_3, ..., I_n, I_{n+1}...$ come una specie di scalata, di "avvicinamento" a C. Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine cui si è pervenuti dopo vari passaggi "resiste" a sollecitazioni diverse, si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che arrivano rispetto al concetto C che rappresenta; un'immagine di questo tipo, dunque stabile e non più mutevole, si può chiamare modello M del concetto C. Farsi un modello di un concetto, quindi, significa rielaborare successivamente immagini (deboli, instabili) per giungere ad una di esse definitiva (forte, stabile). Può capitare che lo studente, nel tempo, possa aver assunto un concetto ed esser-

sene fatto un'immagine; questa immagine può essere stata rinforzata nel tempo da prove, esperienze ripetute. Ma può capitare che tale immagine si rilevi inadeguata, prima o poi, rispetto ad un'altra dello stesso concetto, per esempio proposta dall'insegnante stesso o da altri, e non attesa, in contrasto cioè con la precedente. Si crea così *conflitto* (detto anche *conflitto cognitivo*) tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva (il *dominio di validità* di cui parla Colette Laborde riportato a pag. 11): è in questo caso, quando non ci si affida alla nuova immagine più stabile ma si rimane ancorati alla vecchia, che possono nascere le misconcezioni. Durante la costruzione di un modello mentale, infatti, si possono verificare due casi:

1) Il modello si forma al momento giusto, nel senso che si tratta davvero del modello atteso, auspicato in quel momento, proprio quello previsto per quel concetto dal Sapere Matematico al momento in cui si sta parlando; in questo caso l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello atteso del concetto.

2) Il modello si forma troppo presto, quando ancora avrebbe dovuto essere solamente un'immagine debole che necessitava di essere ulteriormente ampliata; a questo punto per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello che si è costruito è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.

È nel secondo caso che si può sviluppare un modello intuitivo: quando un insegnante propone un'immagine forte e convincente, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze, di un concetto C, l'immagine si trasforma in *modello intuitivo*. C'è insomma rispondenza diretta tra la situazione proposta e il concetto matematico che si sta utilizzando, ma questo modello potrebbe non essere ancora il modello che ci si aspetta del concetto C all'interno del Sapere Matematico. Dunque, tra i modelli, si riserva il nome di "modello intuitivo" a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte; si parla talvolta anche di *modelli parassiti*.

Legata alle idee di "immagine mentale" e di "conflitto" c'è un'importante questione che riguarda la *misconcezione*; infatti, come già visto, citando Bruno D'Amore a pag. 12, non è escluso che, per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda *necessario* passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione; l'apprendimento richiede continuamente una ricostruzione cognitiva che implica un periodo di conflitto e confusione. Quindi, le immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto, non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, ma sono anzi a volte necessarie. Fungono da ostacolo all'apprendimento del Sapere Matematico quando esse, ancora instabili e incerte, diventano forti e stabili modelli di un concetto. Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere Matematico che si vuole raggiungere.

Ecco che emerge già il primo ruolo giocato dalle misconcezioni nel processo di insegnamento-apprendimento: misconcezione come step *necessario* alla costruzione, da parte dell'allievo, del Sapere Matematico.

1.2.4 Concetti e oggetti: Noetica VS Semiotica

Nella sottosezione precedente abbiamo visto come si costruisce cognitivamente un concetto nell'ambito di una teoria di tipo costruttivista. Negli anni '70 le domande sulla natura cognitiva dei concetti matematici e del significato degli oggetti matematici sottolinearono la necessità di far luce sulla natura del significato stesso; nacquero così due diverse teorie: le *teorie realiste* e le *teorie pragmatiche*, che verranno presentate di seguito seguendo la trattazione di [8]:

- Nelle teorie realiste il significato è «*una relazione convenzionale tra segni ed entità concrete o ideali che esistono indipendentemente dai segni linguistici; di conseguenza* [i realisti] *suppongono un realismo concettuale.*»[3, pag. 4] Si attribuiscono alle espressioni linguistiche funzioni puramente semantiche: il significato di un nome proprio è l'oggetto che tale nome proprio indica.

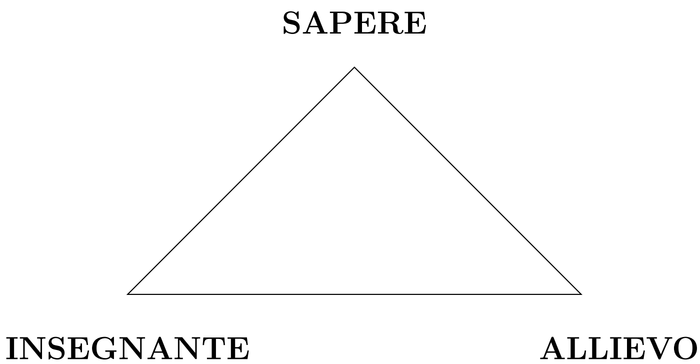
Applicando la teoria realista alla Matematica se ne trae una visione platonica degli oggetti matematici: in essa nozioni, strutture etc. hanno una reale esistenza che non dipende dall'essere umano, in quanto sono appartenenti a un dominio ideale; "conoscere" da un punto di vista matematico significa scoprire enti e loro relazioni in tale dominio. Tale visione comporta un assolutismo della conoscenza Matematica in quanto sistema di verità sicure, eterne, non modificabili dall'esperienza umana, dato che sono ad esse precedenti o, almeno, ad esse estranee e indipendenti.

- Nelle teorie pragmatiche le espressioni linguistiche hanno significati diversi a seconda del contesto in cui si usano e quindi risulta impossibile ogni osservazione scientifica in quanto l'unica analisi possibile è personale, soggettiva, circostanziata e non generalizzabile: la parola, dunque, non ha di per sé un significato e tuttavia può essere significativa. Gli oggetti matematici sono dunque simboli di unità culturali che emergono da un sistema di utilizzazioni che caratterizzano le pragmatiche umane e che si modificano continuamente nel tempo, anche a seconda dei bisogni. Di fatto, gli oggetti matematici ed il significato di tali oggetti dipendono dai problemi che in Matematica si affrontano e dai processi della loro risoluzione.

È chiaro, dunque, che rispondere alla domanda "cosa sono gli oggetti matematici?" non è per niente facile; per la teoria realista sono qualcosa che esiste in sé, mentre sono il frutto di una convenzione per la teoria pragmatica.
È necessario quindi effettuare un'analisi più attenta dei concetti e degli oggetti matematici: come afferma Radford in [22] «*Si può sopravvivere bene facendo Matematica senza adottare alcuna esplicita ontologia, cioè una teoria che tratti della natura degli oggetti matematici. [...] La situazione è profondamente diversa quando parliamo di conoscenza Matematica. [...] Le questioni teoriche circa i contenuti della conoscenza ed il modo in cui un contenuto viene trasmesso, acquisito o costruito ci ha condotto al punto in cui non possiamo più a lungo evitare di prendere in seria considerazione l'ontologia.*»
A volte in Matematica si parla di "concetti" e a volte di "oggetti": ma che differenza c'è? Distinguere il "concetto" dalla sua costruzione non è facile: un concetto

è continuamente in fase di costruzione e in questa costruzione, che gli autori chiamano *concettualizzazione*, sta la parte più problematica e dunque ricca del suo significato. Prima di tutto è necessario sottolineare che ogni concetto in Matematica ha rinvii a "non-oggetti"; dunque la concettualizzazione non può essere basata su significati che poggiano sulla realtà concreta: in altre parole, in Matematica non sono possibili rinvii ostensivi. Ogni concetto matematico è inoltre costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono oggetti da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi che non possono essere univoci. In Matematica si parla più spesso di "oggetti matematici" che non di "concetti matematici" in quanto si studiano preferibilmente oggetti piuttosto che concetti; a tal proposito, in [6, pag. 12], troviamo il pensiero di Duval, che dice: «*La nozione di oggetto è una nozione che non si può non utilizzare dal momento in cui ci si interroga sulla natura, sulle condizioni di validità o sul valore della conoscenza.*»
È chiaro che in Matematica l'acquisizione concettuale di un oggetto passa necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche; Duval afferma: «*Non c'è noetica senza semiotica!*», intendendo per semiotica la teoria che studia le diverse rappresentazioni all'interno di opportuni registri, e per noetica l'acquisizione concettuale di un oggetto.
Si giunge così a quello che in letteratura è conosciuto come *Paradosso di Duval*: da una parte, l'apprendimento degli oggetti matematici non può che essere un apprendimento concettuale e, d'altra parte, è solo per mezzo di rappresentazioni semiotiche che è possibile un'attività su degli oggetti matematici. Questo paradosso può costituire un vero e proprio circolo vizioso per l'apprendimento. Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici rende la confusione quasi inevitabile. E, al contrario, come possono essi acquisire la padronanza dei trattamenti matematici, necessariamente legati alle rappresentazioni semiotiche, se non hanno già un apprendimento concettuale degli oggetti rappresentati? In questa fase "paradossale" dell'apprendimento

bisogna essere molto attenti: da un lato lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbero invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, d'altra parte, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni.
Per evitare ai ragazzi di cadere nella confusione prodotta dal paradosso di Duval, l'insegnante dovrebbe attuare alcune strategie in grado di controllare e limitare il conflitto cognitivo e dunque la nascita di misconcezioni: dare più rappresentazioni semiotiche di uno stesso oggetto matematico può essere una valida alternativa all'uso sistematico della stessa rappresentazione per un dato oggetto; in questo modo lo studente allena (con l'aiuto del docente) le attività cognitive legate alla semiotica in modo da avere una visione più elastica del concetto matematico in questione, che eviti il formarsi di modelli mentali prematuri[6]. Proprio perché la fase dell'apprendimento di un concetto matematico è così delicata, per i motivi esposti poc'anzi, è fondamentale che l'insegnate sia in grado di attuare una buona *trasposizione didattica*. Chiudiamo la sezione richiamando cosa si intende per trasposizione didattica, come presentata in [9]; consideriamo il *triangolo della didattica*:



È chiaro che l'insegnante si trova implicato in una serie di rapporti di estrema delicatezza in quanto deve operare una trasposizione didattica dal *Sapere* (che è il Sapere Matematico, scientifico, della ricerca), al *Sapere insegnato* (quello della

[6]Per un approfondimento sulla nascita di misconcezioni in questi casi si veda la Sezione 2.2.

pratica in aula); in realtà il passaggio è molto più complesso perché va dal *Sapere matematico*, al *Sapere da insegnare*, al *Sapere insegnato*, per giungere infine al *Sapere appreso*: obbiettivo della didattica è di giungere alla situazione in cui il Sapere insegnato coincida con il Sapere appreso.
La trasposizione didattica consiste quindi nell'estrarre un elemento di sapere dal suo contesto per riambientarlo nel contesto sempre singolare, sempre unico della propria aula; la trasposizione didattica produce allora un certo numero di effetti: semplificazione e dedogmatizzazione, creazione di artefatti o produzione di oggetti totalmente nuovi[7]. Dal momento in cui entra in un programma scolastico, un dominio del sapere, un concetto, subisce una trasformazione massiccia, è snaturato per trovare un altro statuto, entra in un'altra logica, in un'altra razionalità.

1.3 Misconcezioni: riconoscerle per intervenire

Se, come visto nella Sezione 1.1, è estremamente difficile dare una definizione rigorosa di "misconcezione", si possono però riconoscere alcune caratterizzazioni implicite importanti, presentate e analizzate in [30]: le misconcezioni hanno una coerenza locale e sono piuttosto stabili e, per la loro stessa natura, non sono facili da individuare. In genere non sono riconoscibili attraverso domande dirette, perché in questo caso il soggetto può attivare processi di controllo che gli permettono di far ricorso alla conoscenza formale acquisita; se invece il soggetto si trova in condizioni tali da non richiedere l'attivazione di processi di controllo, oppure concentra i propri processi di controllo in altre direzioni, è facile che le misconcezioni vengano alla luce.
Ad esempio, se chiediamo a un soggetto se il numero $-a$ è negativo, probabilmente in molti casi ci sentiremo rispondere che dipende da come è il numero a: se a è positivo allora $-a$ è negativo, mentre se a è negativo allora $-a$ è positivo; ben diverso è il caso se la domanda che ci interessa è inserita in un gruppo di domande, possibilmente numerose. In questo caso i processi di controllo diminuiscono note-

[7]Si veda l'esempio dei "numeri frazionari" nella Sottosezione 2.2.1.

volmente e, di conseguenza, cresce in modo impressionante il numero di soggetti che risponde che "$-a$ è sempre negativo[8]." Un altro modo per far emergere le misconcezioni è quello di utilizzare contesti che costringano il soggetto a concentrare i propri processi di controllo in altra direzione: sono ideali in questo senso i problemi. Non a caso, infatti, come già visto nella Sezione 1.1, lo studio delle misconcezioni emerge inizialmente nell'ambito del *problem solving* e, proprio in questo ambito, si hanno i primi usi del termine. Se l'influenza delle misconcezioni si evidenzia soprattutto nel contesto dell'attività di risoluzione dei problemi, non è facile però per l'insegnante riconoscere che *quell'* errore particolare è dovuto alla presenza di misconcetti. Inoltre, accanto alle misconcezioni tipiche della quasi totalità di alunni, ci sono quelle del tutto personali di un singolo allievo: l'attenzione dell'insegnante si deve spostare dai prodotti ai processi. Deve essere dunque sottolineata l'importanza di far descrivere agli allievi i propri processi di pensiero: deve essere chiaro che gli obbiettivi che l'insegnante si pone nel cercare di individuare eventuali concezioni errate non è quello di completare o motivare un giudizio negativo, ma quello di poter costruire percorsi di recupero efficienti; diventano competenze preziose per l'insegnante il saper fare domande e, naturalmente, ascoltare.

1.3.1 Errori e misconcezioni: quale relazione?

Alla luce di quanto esposto nella Sezione 1.2, riprendiamo qui l'analisi del legame tra misconcezioni ed errori introdotta nella Sezione 1.1.
L'esplicitazione da parte dell'allievo di una misconcezione avviene con quella segnalazione di un malessere cognitivo che si chiama usualmente e banalmente "errore": lo studente sbaglia, cioè non dà la risposta attesa dall'insegnante. Come visto, dare agli errori solo connotazioni negative e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo è troppo semplicistico e banale.
Spesso viene affidata all'intuizione la responsabilità degli errori da parte degli studenti: sbagliano perché si affidano solamente alla loro intuizione non attingendo alla conoscenza formale e non attivando i processi di controllo dettati dal rigore Matematico; Enriques, al contrario, pensa che «*L'errore non appartiene né alla*

[8] Per un approfondimento si rimanda alla convinzione riportata a pag. 30.

facoltà logica né all'intuizione, ma s'introduce nel momento delicato del loro raccordo» [11, pag. 10]. Anche Fischbein afferma: «*Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. A nostro parere, così come avviene nei processi psicoanalitici, lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti. Ciò può essere fatto discutendo con gli studenti gli errori dovuti specificatamente all'intuizione e cercando insieme a loro l'origine di questi errori. In ogni caso, questo processo di chiarificazione verbale non è sufficiente. Gli studenti devono sviluppare la capacità di analizzare le loro supposizioni implicite, di usare le strategie formali per verificare tali supposizioni intuitive.*» [11, pag. 17]

Come è stato già detto nella Sottosezione 1.2.2, il modello intuitivo emerge sempre, anche quando è in contrasto con il modello formale, atteso dal docente, che rispecchia il Sapere Scientifico; il dialogo tra questi due modelli (intuitivo e formale) non è sempre semplice, spesso l'uno esclude l'altro e, quando questo avviene, si genera un conflitto cognitivo.

Il diverso rapporto che i docenti e gli studenti hanno con l'errore viene analizzato in [31]: troppo spesso quello che gli studenti apprendono dai comportamenti e dalle reazioni degli insegnanti è che è preferibile non sbagliare, non commettere errori: anche quando il docente afferma "sbagliando s'impara", è sempre chiaro il messaggio implicito: "ma tu non sbagliare che è meglio per te!" Dietro a questa paura dell'errore molto spesso vi è, da parte dell'insegnante, l'identificazione errore-difficoltà: tale identificazione è poco praticabile in quanto non permetterebbe di cogliere alcuni elementi tipici delle difficoltà; in particolare, mentre la difficoltà rimanda al rapporto alunno/sapere, e quindi il suo riconoscimento ha elementi di soggettività, il riconoscimento dell'errore rimanda ad un sapere istituzionalizzato, e quindi è oggettivo.

Tra le conseguenze dell'identificazione errore/difficoltà vi sono i seguenti assunti:

1. L'assenza di errori *certifica* l'assenza di difficoltà.

2. L'assenza di difficoltà *garantisce* l'assenza di errori.

Tutto questo porta gli insegnanti a privilegiare domande, attività e, più in genera-

le, scelte didattiche, che comportino "meno rischi"; come sottolinea Rosetta Zan, e riportato in [4, pag. 66]: «*Implicita nella preoccupazione di evitare domande "troppo difficili" c'è spesso la valorizzazione della correttezza dei prodotti, che viene considerata più importante dell'attivazione dei processi di pensiero significativi, anche se, come già detto, tale correttezza si può ottenere banalizzando le richieste e di per sé non garantisce un effettivo apprendimento.*» Si perpetua così quello che lo psicologo Howard Gardner chiama *il compromesso delle risposte corrette*: «*Insegnanti e studenti non sono disposti ad assumersi i rischi del comprendere e si accontentano dei più sicuri "compromessi delle risposte corrette". In virtù di tali compromessi, insegnanti e studenti considerano che l'educazione abbia avuto successo quando gli studenti sono in grado di fornire le risposte accettate come corrette.*» [4, pag. 66]
Tutto ciò contrasta con la convinzione che la scuola dovrebbe essere considerata l'ambiente ideale -in quanto protetto- nel quale mettere in difficoltà gli allievi affinché imparino, e in particolare imparino ad uscire dalle difficoltà. Come sottolinea Enriques, parlando di quelli che chiama "errori propriamente detti": «*Sono esperienze didattiche che egli [il maestro] persegue, incoraggiando l'allievo a scoprire da sé la difficoltà che si oppone al retto giudizio, e perciò anche a errare per imparare a correggersi. Tante specie di errori possibili sono altrettante occasioni di apprendere.*» [4, pag. 67]
In Matematica, il compromesso delle risposte corrette corrisponde a scelte educative che privilegiano attività di tipo riproduttivo (esercizi che gli studenti hanno già visto come fare) ad attività di tipo produttivo (problemi), focalizzando l'attenzione sul prodotto (risultato) piuttosto che sulla significatività dei processi di pensiero attivati. Tutto questo porta a due conseguenze note in letteratura e da tenere in considerazione a livello di pratica didattica in Matematica per gli effetti che hanno: la diffusione della paura di sbagliare e la costruzione di teorie del successo che valorizzano esclusivamente aspetti riproduttivi.
In questo contesto si sviluppano i lavori di Raffaella Borasi rispetto all'approccio all'errore, considerato una vera e propria risorsa didattica: «*Un approccio agli errori come opportunità di apprendimento e di ricerca sarà sviluppato e utilizzato*

come mezzo per creare il tipo di esperienze didattiche auspicato nella riforma della Matematica scolastica e come strategia per fare emergere riflessioni sia sulla Matematica scolastica che sulla Matematica come disciplina.» [4, pag. 72]
È importante quindi per il docente sottolineare che l'errore non è necessariamente sintomo di mancanza di conoscenza; esso può derivare da intuizioni scorrette e spesso precoci che possono coesistere, nella mente del soggetto, con la conoscenza formale successivamente acquisita.
Inserendosi nell'ottica in cui l'errore viene visto come occasione di apprendimento, è significativo quello che dice a proposito Enriques: «*Il maestro sa che la comprensione degli errori dei suoi allievi è la cosa più importante della sua didattica.*»
Ci deve essere un'attenzione particolare agli errori, ci si deve chiedere quali ne siano le cause e ci si deve interrogare su quale sia il miglior modo di intervenire per correggere tali errori. «*Quello che appare fondamentale per l'insegnamento non è quindi evitare gli errori, ma dedicare molti più esperimenti alle tecniche di sviluppo che permettano agli studenti di diventare consapevoli dell'influenza delle loro restrizioni intuitive, tacite e aiutare gli studenti a costruire efficienti sistemi di controllo concettuale che avrebbero il compito di controllare l'impatto di questi modelli».* [30, pag. 66]
L'attenzione torna quindi sulla necessità di sviluppare capacità di tipo metacognitivo (consapevolezza, processi di controllo) che permettano una gestione produttiva dell'errore; in particolare è importante che gli studenti imparino, alla luce della consapevolezza sulle proprie misconcezioni, a riconoscere, nella routine scolastica, situazioni problematiche, che richiedono l'attivazione di comportamenti strategici e, in particolare, di processi di controllo.

1.3.2 L'importanza del contratto didattico, delle convinzioni, degli obbiettivi e del contesto.

Non sempre gli errori degli studenti sono dovuti a misconcetti: in genere le misconcezioni causano errori sistematici, ma, spesso, gli errori che fanno gli studenti non sono sistematici, al contrario, sembrano il frutto di risposte date a caso o dovute ad altri tipi di ragionamento. Ci sono altri fattori che possono contribuire al manifestarsi di errori: in questa sezione ne analizzeremo alcuni.

Nello studio e nell'analisi degli errori degli studenti, è assolutamente necessario tenere in considerazione l'importanza, per gli effetti che ha su studenti e docenti, del *contratto didattico*: il primo tentativo di definizione di contratto didattico è frutto di Brousseau e risale al 1986: «*In una situazione d'insegnamento, preparata e realizzata da un insegnante, l'allievo ha generalmente come compito di risolvere un problema (matematico) che gli è presentato, ma l'accesso a questo compito si fa attraverso un'interpretazione delle domande poste, delle informazioni fornite, degli obblighi imposti che sono costanti del modo di insegnare del maestro. Queste abitudini (specifiche) del maestro attese dall'allievo e i comportamenti dell'allievo attesi dal docente costituiscono il contratto didattico*». [9, pag. 2] Spesso queste attese non sono dovute ad accordi espliciti, ma sono riconducibili alla concezione che lo studente ha della scuola, della Matematica, alla ripetizione di modalità etc. Vediamo alcuni esempi, ripresi da [9]:

- Concezione della scuola: L'allievo ritiene che la scuola sia direttiva e valutativa; quindi anche se l'insegnante chiede all'allievo di scrivere *liberamente* quel che pensa, l'allievo ritiene di doverlo fare con un linguaggio il più possibile rigoroso perché suppone che sotto quella richiesta vi sia comunque una prova, un controllo. Non scriverà affatto liberamente ma cercherà invece di dare la definizione che ritiene essere quella "corretta", cioè quella che ritiene essere attesa dall'insegnante.

- Concezione della Matematica: Lo studente ritiene che in Matematica si *devono* fare dei calcoli; per cui, anche se la risposta alla domanda posta in un problema può essere data solo rispondendo a parole, lo studente è a disagio e tende a far uso dei dati numerici per dare comunque una risposta formale. Le convinzioni generali sulla Matematica inoltre giocano un ruolo determinante nella utilizzazione delle risorse cognitive; esempi di convinzioni di questo tipo molto diffuse sono:

  - Solo pochi fortunati possono riuscire in Matematica. E quindi: l'impegno in Matematica conta fino a un certo punto.
  - Le regole matematiche si devono imparare ma non si possono (o devono) capire.
  - Per fare gli esercizi di Matematica non serve studiare la teoria.
  - Un problema con tante domande è più difficile di un problema con una domanda sola.

- Ripetizione delle modalità: Per tre lunedì consecutivi l'insegnante di Matematica fa svolgere esercizi alla lavagna; da quel punto in poi l'allievo sa che ogni lunedì sarà così; una modifica del programma atteso genera sorpresa. Lo stesso vale, per esempio, quanto all'attesa del programma possibile nel corso di un'interrogazione: se l'insegnante ha sempre e solo fatto domande sul programma svolto nelle ultime lezioni, non può, a detta dello studente, fare domande su argomenti oggetto di lezione in un passato più remoto...

Queste concezioni sulla scuola, sulla Matematica e le ripetizioni delle modalità da parte del docente hanno conseguenze molto importanti facilmente riscontrabili in classe ad ogni livello scolare: ad esempio con l'espressione *effetto età del capitano* si designa la condotta di un allievo che calcola la risposta di un problema utilizzando una parte o la totalità dei numeri che sono forniti nell'enunciato, allorché questo problema non possieda una soluzione numerica; se anche l'allievo si rende conto dell'assurdità del problema posto, necessita di farsi carico personale di una rottura del contratto didattico, per poter rispondere che il problema non si può risolvere. Ma lo studente non ha la forza di rompere il contratto didattico e preferisce rispettarne le supposte clausole pur di non rischiare. Altra conseguenza del contratto didattico è la clausola chiamata *esigenza della giustificazione formale* secondo la quale è necessario fare conti per giustificare una risposta dettata dall'istinto, dall'intuizione o semplicemente una risposta che non necessitava di alcun calcolo; la gravità di tale clausola risiede nel fatto che, spesso, i calcoli non hanno alcun senso, però gli studenti sentono assolutamente la necessità di svolgerli. Un'altra clausola del contratto didattico molto presente è quella conosciuta col nome di *delega for-*

male: lo studente legge il testo del problema, decide l'operazione da effettuare e i numeri con i quali deve operare; a quel punto non tocca più allo studente ragionare e controllare: sia che faccia i calcoli a mano, sia che faccia uso della calcolatrice, si instaura quella clausola che disimpegna le facoltà razionali, critiche di controllo. L'impegno dello studente è finito e ora tocca all'algoritmo lavorare per lui; il compito successivo dello studente sarà quello di trascrivere il risultato, qualsiasi cosa sia e non importa che cosa esso significhi nel contesto problematico.
Appare chiaro, quindi, come molti errori commessi dagli studenti siano "semplicemente" il frutto di clausole attribuibili al contratto didattico e non siano dovuti a mancanza di conoscenza o alla presenza di misconcezioni su tali argomenti.

Fallimenti e successi non si possono spiegare solo in termini di conoscenze possedute dal soggetto: altri fattori sono determinanti in tal senso e tra questi ci sono le convinzioni, gli obbiettivi, il contesto. Seguendo l'esposizione di [29], il concetto di *convinzione* assume un ruolo centrale nella teoria costruttivista in quanto le convinzioni sono il frutto del continuo processo di interpretazione da parte del soggetto della realtà. Le convinzioni si organizzano per lo più in strutture relativamente stabili, i cosiddetti *sistemi di convinzioni*; la struttura di tali sistemi presenta caratteristiche rilevanti per l'apprendimento della Matematica, ma più in particolare per l'interpretazione di alcune difficoltà:

- Ci sono convinzioni *primarie* e convinzioni *derivate*.
- Le convinzioni non hanno tutte la stessa "forza" psicologica; in questo senso si possono distinguere *convinzioni centrali* (quelle più consolidate) e *convinzioni periferiche* (più soggette a cambiamento).
- Le convinzioni sono strutturate in settori relativamente isolati: questo isolamento fa sì che un soggetto possa avere contemporaneamente convinzioni apparentemente contradditorie.

L'importanza dei sistemi di convinzioni sta nel fatto che essi agiscono da guida nei processi decisionali di un soggetto, inibendo in certi casi l'utilizzazione delle conoscenze possedute. A livello superiore una convinzione implicita molto forte e

diffusa è: "un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno $-$." Tra le conseguenze di tale convinzione ci sono la confusione fra integrale e area, l'idea che $\log(-x)$ non è mai definito e la convinzione che un punto generico del terzo quadrante sia $(-x; -y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$[9].
Un altro importante sistema di convinzioni, con una forte componente affettiva, riguarda quelle relative all'idea che un soggetto ha di sé: molti studenti con difficoltà costruiscono, dall'interpretazione delle proprie esperienze scolastiche, in particolare dai propri fallimenti, convinzioni su di sé talmente negative da determinare la rinuncia a priori di provare a pensare, a risolvere problemi. Hanno perciò un grosso peso i comportamenti dell'insegnante: un insegnamento poco incoraggiante, la tendenza ad estendere la valutazione dal compito alla persona, la difficoltà a rivedere i giudizi inizialmente dati, sono tutti elementi che favoriscono nello studente in difficoltà un'immagine di sé come individuo poco capace, piuttosto che come un soggetto che ha bisogno di un impegno mirato per recuperare. Le convinzioni dei ragazzi sono spesso influenzate dalle convinzioni degli insegnanti: dai comportamenti di quest'ultimi si possono intuire alcune convinzioni significative, come per esempio quella che le lacune di base ad una certa età non sono più recuperabili, oppure che il successo in Matematica è dovuto all'intelligenza, una dote naturale e non modificabile.
Le convinzioni appena analizzate, agendo da guida nei processi decisionali di un soggetto, possono, con la loro forza psicologica, radicarsi nella mente degli studenti e diventare sempre più forti e persistenti, diventando così vere e proprie misconcezioni.

Un altro fattore da tenere in considerazione è legato agli obbiettivi del processo di insegnamento-apprendimento, che possono essere differenti per studenti e insegnanti. Rosetta Zan in [31] studia e analizza proprio l'importanza degli obbiettivi posti dall'insegnante e dall'allievo al fine di capire le cause e le motivazioni degli errori.
Per individuare comportamenti fallimentari, come del resto per individuare errori,

[9]La presenza di tale convinzione viene analizzata nel quesito 9 del questionario a pag. 104.

è necessario essere esperti della disciplina, ma riconoscere un comportamento come fallimentare richiede anche ipotesi su un presunto rapporto di causa ed effetto fra il comportamento stesso e il mancato raggiungimento di un obbiettivo: da un lato è necessario distinguere fra l'obbiettivo che si è posto l'allievo e l'obbiettivo cui fa riferimento l'insegnante, dall'altro bisogna tener presente che allievo e insegnante, in quanto soggetti diversi, hanno anche una percezione diversa della realtà.
In particolare può capitare che l'insegnante riconosca un fallimento che l'allievo invece non riconosce, per diversi motivi:

- perché si è posto obbiettivi diversi.
- perché non si è posto obbiettivi.
- perché usa criteri diversi per valutare se un obbiettivo è stato raggiunto.

Il caso in cui l'allievo non percepisce il fallimento perché si è posto obbiettivi diversi è particolarmente frequente; ad esempio a scuola spesso l'allievo si pone obbiettivi di prestazione piuttosto che di apprendimento, ed è alla luce di quelli che valuta un esito come fallimentare o meno: così può capitare che l'allievo non percepisca il fallimento che invece l'insegnante riconosce. Questo accade ad esempio quando l'insegnante corregge un errore che non ha effetti sul risultato finale: se l'allievo si è posto l'obbiettivo di fornire una risposta corretta può riconoscere un errore senza che questo significhi necessariamente prendere atto di un fallimento. Un altro esempio riguarda il fenomeno così frequente in classe delle risposte date "a caso": alcuni allievi rispondono immediatamente, senza riflettere, perché cercano l'attenzione dell'insegnante; questo è un altro caso in cui l'allievo non può percepire il fallimento in quanto, pur dando risposte scorrette, raggiunge il proprio scopo di catturare l'attenzione dell'insegnante.
Una strategia per recuperare la percezione del fallimento da parte dell'allievo può consistere nel proporre situazioni in cui il mancato raggiungimento dell'obbiettivo cui fa riferimento l'insegnante abbia come conseguenza il mancato raggiungimento dell'obbiettivo dell'allievo. Inoltre, anche assumendo che insegnante e allievo condividano la percezione del fallimento, non si può comunque assumere che l'allievo condivida con l'insegnante il riconoscimento dei comportamenti fallimentari

da modificare.

Un'ultima riflessione riguarda anche il contesto in cui opera l'allievo, che influisce moltissimo sulla capacità di dare, o meno, la risposta corretta ad un dato problema; lo studente adopererà un tipo di ragionamento a seconda del contesto in cui si sviluppa il problema dato dall'insegnante: normalmente i ragazzi tendono a usare le conoscenze intuitive per quanto riguarda la risoluzione di problemi "reali", mentre tendono a usare le conoscenze matematiche, tipiche del Sapere Scientifico, quando si trovano a dover risolvere un problema "di Matematica", anche se tali conoscenze sono in contrasto tra loro; infatti le intuizioni ingenue che un individuo sviluppa riguardo ad alcuni aspetti della realtà possono coesistere con la conoscenza formale acquisita in merito, anche se tale conoscenza è in manifesta contraddizione con esse per cui, in merito ad un problema posto dall'insegnante, la stessa persona può ricorrere alla conoscenza formale per una versione del problema eppure dare un'interpretazione qualitativa del fenomeno contraddittoria in un'altra versione. Come appena visto, il ricorso, quasi forzato, alla conoscenza formale può essere dettato dalle clausole del contratto didattico, sempre presente negli studenti: un problema di Matematica ha sicuramente bisogno, per essere risolto, di formule e numeri con cui svolgere dei conti; il ricorso alla conoscenza "intuitiva", invece, è sicuramente dettato dalla forza e dalla persistenza dei modelli intuitivi, di cui è stato ampiamente discusso nella Sottosezione 1.2.2.

Come visto in questa sottosezione, possono essere molteplici le motivazioni che portano lo studente a sbagliare ed è compito dell'insegnante individuarle per poterle superare; Rosetta Zan dice: «*Se i comportamenti fallimentari causano errori, l'individuazione dei comportamenti fallimentari riconduce al classico filone di ricerca -trasversale- che è dato dall'interpretazione degli errori. Appaiono interessanti in questo senso tutti i contributi che avanzano ipotesi interpretative sull'origine degli errori.*» [11, pag. 5].

1.3.3 L'intervento dell'insegnante

Una volta che l'errore viene alla luce, l'insegnante ha il compito di capirne la natura per poter intervenire attraverso il processo di recupero: un intervento efficace richiede, come visto, un'osservazione preliminare che non si limiti al controllo delle conoscenze, ma che esplori le abilità metacognitive degli studenti, le loro convinzioni, le loro emozioni, il loro atteggiamento nei confronti della Matematica. Come scrive Rosetta Zan in [32], l'intervento tradizionale di recupero parte dall'osservazione di un errore o comunque di un processo risolutivo inadeguato; tale errore, o processo risolutivo, è considerato segnale non solo del fatto che qualcosa non va, ma anche del fatto che qualcosa non va *proprio in quel contesto in cui l'errore (o il processo risolutivo inadeguato)* si è verificato. Tale contesto diventa quindi in modo naturale quello in cui ha luogo l'intervento di recupero, basato in genere sulla ripetizione degli argomenti ritenuti necessari per poter rispondere in modo corretto: se poi questi interventi non ottengono l'effetto sperato e gli errori si ripetono, allora forse l'intervento si allargherà e magari gli si dedicherà uno spazio specifico. L'intervento tradizionale spesso non funziona: spiegare di nuovo, e ancora, correggere gli errori, spiegare perché sono errori, far vedere qual è il modo corretto di procedere... sono tutti comportamenti che costano all'insegnante una gran fatica, in termini di energie e di tempo, ma raramente portano a un risultato proporzionato a tale fatica: gli errori si ripetono e le difficoltà sembrano essere sempre le stesse. L'eventuale fallimento di questi interventi risiede proprio nel fatto che sono "locali", circoscritti al contesto in cui l'errore o il fallimento si presentano, e addirittura spesso circoscritti agli argomenti necessari per produrre una risposta corretta. C'è un passaggio implicito in questa scelta, più precisamente c'è una fase spesso sottovalutata fra il processo di osservazione (quello in cui si prende atto delle difficoltà) e quello dell'intervento: è la fase di *interpretazione*, cruciale per rendere l'intervento efficace. Per esemplificare la centralità della fase di interpretazione e i diversi tipi di intervento, si riporta qui l'ultima scena del colloquio immaginario descritto nel libro *L'insegnamento come attività sovversiva* [21] in cui gli autori, attraverso varie tipologie di medici, descrivono in realtà altrettante tipologie di insegnanti.

Il dottor Gillupsie ha chiamato molti dei suoi chirurghi interni del Blear General Hospital. Essi stanno per cominciare la loro relazione settimanale sulle varie operazioni compiute negli ultimi quattro giorni...

GILLUPSIE: E lei, Carstairs, come vanno le cose?

CARSTAIRS: Temo di essere stato sfortunato, dottor Gillupsie. Niente operazioni questa settimana, ma solo tre pazienti morti.

GILLUPSIE: Bene; dovremmo parlarne un po', non le pare? Di che cosa sono morti?

CARSTAIRS: Non lo so con certezza, dottor Gillupsie, ma comunque ho dato a ciascuno di loro un bel po' di penicillina.

GILLUPSIE: Ah! Il sistema tradizionale della cura "buona per se stessa", eh, Carstairs?

CARSTAIRS: Beh, non esattamente, capo. Pensavo solo che la penicillina li avrebbe fatti stare meglio.

GILLUPSIE: Per che cosa li stava curando?

CARSTAIRS: Insomma, stavano proprio male, capo, e io so che la penicillina fa star meglio gli ammalati.

GILLUPSIE: Certamente, Carstairs. Penso che lei abbia fatto bene.

CARSTAIRS: E i morti, capo?

GILLUPSIE: Cattivi, figlio mio, cattivi pazienti. E non c'è niente che possa fare un buon dottore quando si trova di fronte dei cattivi pazienti. E nessuna medicina può farci nulla, Carstairs.

CARSTAIRS: Eppure mi è rimasta ancora la seccante impressione che non avevano bisogno di penicillina, che servisse qualcos'altro.

GILLUPSIE: Sciocchezze! La penicillina non fa mai cilecca su dei buoni pazienti. Lo sanno tutti. Al suo posto non mi preoccuperei troppo, Carstairs.

Intanto il dottor Gillupsie si rivolge all'ultimo dottore, il dottor Thinking...

GILLUPSIE: E i suoi pazienti, Thinking, come vanno?

THINKING: Bene, dottore. In via di guarigione.
GILLUPSIE: Fantastico, Thinking. [Rivolto a tutti] Come vedete, coi bravi pazienti la penicillina funziona!
THINKING: A dir la verità, dottore, non gli ho dato la penicillina. Si ricorda di quel paziente che aveva da anni quei dolori tremendi alle gambe?
GILLUPSIE: Ah, quello! Avevo consigliato di tagliargli le gambe, mi pare.
THINKING: Beh, invece è guarito. Pensi che tutto il suo problema derivava dalle scarpe correttive che gli avevano detto di portare!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! E da quali valori delle analisi se ne è accorto?
THINKING: A dir la verità, dottore, non me ne sono accorto dalle analisi. L'ho guardato camminare...
GILLUPSIE: Lei è proprio un originale, Thinking! E l'ha dimesso?
THINKING: Beh, ora deve fare un po' di riabilitazione, ma è contento.
GILLUPSIE: La riabilitazione costa, Thinking. Era meglio se gli tagliava le gambe. Comunque, mi dica dell'altro paziente...
THINKING: Bene. Quello l'abbiamo dimesso. Si ricorda quelle crisi spaventose di allergia?
GILLUPSIE: Già. Secondo me di origine alimentare: avevo suggerito che non mangiasse.
THINKING: Invece ho scoperto la causa. Ho ricostruito tutta la sua storia, ho analizzato le informazioni, e ho trovato la causa dell'allergia!
GILLUPSIE: Incredibile, Thinking! Lei non finisce mai di stupirmi! E come ha fatto ad avere tutte queste informazioni? Quale macchinario nuovo ha usato? Ce lo dica, lo compriamo subito. E poi ci serve la tabella delle medie, della deviazione standard, quantili e tutte queste cose qui: mica improvvisiamo, noi. Conosciamo bene il valore dei numeri.
THINKING: A dir la verità, dottor Gillupsie, non ho usato un nuovo macchinario.
GILLUPSIE: Ma benedetto figliolo, non faccia il misterioso! Come ha scoperto tutte quelle cose sul suo paziente? Chi gliele ha dette?
THINKING: Lui, dottor Gillupsie. Quando gliele ho chieste.

Questo dialogo è molto significativo proprio perché mostra come, a volte, l'intervento tradizionale non solo non trovi successo all'interno dell'azione didattica del docente, ma risulti addirittura deleterio per quegli studenti che avrebbero bisogno di un'azione di recupero progettata alla luce di una corretta e più vasta interpretazione delle loro difficoltà.

Capitolo 2

Misconcezioni famose in letteratura

In questo capitolo presenterò alcune misconcezioni molto studiate nella letteratura in didattica della Matematica e cercherò di analizzare i motivi che ne causano la presenza nella mente degli studenti; verrà spiegata la differenza tra misconcezioni evitabili e misconcezioni inevitabili al fine di catalogare le misconcezioni elencate nel seguito, tra le quali ci saranno alcune delle misconcezioni oggetto di indagine nel capitolo successivo.
I testi di riferimento utilizzati sono [2], [6], [9], [10], [14], [15], [23] e [24].

Come detto precedentemente nella Sottosezione 1.2.3, le immagini deboli e instabili che uno studente si fa di un concetto, possono essere in certi casi delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni errate delle informazioni ricevute. Le misconcezioni intese in questo modo sono state distinte in due grandi categorie: *inevitabili* ed *evitabili*.
Secondo la trattazione di [6], le ***misconcezioni inevitabili*** non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente né dall'ingegneria didattica[1], ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo anche a causa delle caratteristiche *ontogenetiche*[2] legate all'allievo. Tali misconcezioni

[1]Cioè da libri di testo, materiali, risorse... scelti dall'insegnante.

[2]Legate all'immaturità dello studente o quando l'età mentale è insufficiente rispetto al progetto proposto.

sono quindi imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere iniziale da dover necessariamente comunicare in modo non eccepibile. In questo caso, in accordo con il pensiero di D'Amore esposto a pag. 12, le misconcezioni possono essere viste come inevitabili momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che derivano dalle rappresentazioni che gli insegnanti sono costretti a fornire per poter iniziare la loro presentazione, rappresentazioni che potrebbero contenere delle informazioni non del tutto corrette del concetto matematico che si vuole trattare. Come già detto in precedenza, nel presentare un concetto in Matematica si è costretti a fare ricorso alla semiotica, necessaria per garantire il primo passo verso la noetica; eppure, qualsiasi rappresentazione (un disegno, una frase, un grafico, un modello tridimensionale..) non avrà mai le caratteristiche concettuali di astrattezza, idealità, perfezione, generalità tipiche della Matematica e questo potrebbe essere la fonte di alcune di quelle misconcezioni che abbiamo chiamato inevitabili.

Le ***misconcezioni evitabili*** dipendono invece proprio dalle scelte che l'insegnante fa per effettuare la trasposizione didattica e scelte concernenti l'ingegneria didattica; queste misconcezioni sono state assai studiate e sembrano dipendere dalla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi. Ad esempio capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, a volte derivanti dalle proposte di libri di testo, programmi, riviste..., di fornire all'allievo, giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così assunte dall'allievo come univoche e anzi obbligate a causa del contratto didattico instaurato in classe. Le continue e univoche sollecitazioni dell'insegnante fanno sì che lo studente confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere; ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta, ai contesti e alle modalità d'uso dei segni che rappresentano il concetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi.
Risulta doveroso sottolineare che non c'è una netta distinzione tra misconcezioni evitabili e misconcezioni inevitabili; spesso le misconcezioni evitabili lo sono solamente in parte: come vedremo negli esempi delle Sottosezioni 2.1.8, 2.2.1 e 2.2.2, le

misconcezioni sono il frutto di *ostacoli epistemologici*[3] evidenti, aggravati da scelte didattiche errate. Anche con un'eccellente trasposizione didattica e con ottime scelte dell'insegnante, alcune difficoltà rimarrebbero tali agli occhi degli studenti.

2.1 Esempi di misconcezioni inevitabili

Verranno presentati di seguito esempi di misconcezioni inevitabili.

2.1.1 Confronto tra numeri

Molto interessante è un esempio presentato da Stavy e Tirosh e riportato in [6] che ha origine nella scuola primaria e si ripercuote nei livelli scolastici successivi: «*In Matematica, alcune proprietà spesso funzionano fino a un certo numero, ma crollano quando la realtà dei numeri si fa più estesa. Ad esempio, quando confrontiamo due numeri naturali mediante la linea dei numeri, si potrebbe affermare che il numero più lontano dallo zero sia il numero più grande. Quando viene applicata ai numeri relativi, tuttavia, questa regola può spingerci, non correttamente, a stabilire, ad esempio, che -5 è più grande di -2 perché esso è più lontano dallo zero. La regola "il più lontano- il più grande" è valida per tutti i numeri naturali, ma non per quelli relativi.*»[6, pag. 120]
Tale misconcezione può essere interpretata come inevitabile a meno che l'insegnante, invece di cercare di superarla e di non radicarla nella mente dello studente, la espliciti e confermi nel momento in cui tratta i numeri interi. Ancora le due autrici continuano dicendo: «*In generale, quando due numeri naturali n e $n + a$ (con a anche numero naturale), vengono confrontati, gli studenti, sin da piccoli, sanno che $n + a > n$. Molti studi sull'educazione matematica riportano che quando si chiede di confrontare una coppia di espressioni numeriche o algebriche [...], spesso gli studenti applicano in modo non corretto la loro conoscenza dei numeri naturali [...]. Quando chiedemmo di confrontare due espressioni, ad*

[3]Legati alla natura stessa dell'argomento. Concetti che presentano discontinuità nel loro processo di costruzione-evoluzione storica o su cui si presenta un errore ricorrente possono essere ostacoli epistemologici.

esempio $4x$ e $2x$, gli studenti dedussero che $4x > 2x$. Allo stesso modo, quando gli allievi confrontano due espressioni comprendenti n e $n + a$, essi affermano che "$-(n + a) > -n$, $x(n + a) > xn$, $(n + a)^x > n^x$, $x^{n+a} > x^n$, e così via...". [...] Gli studenti deducono che, poiché $n + a$ è maggiore di n, il senso dell'ineguaglianza tra le intere espressioni sarà conservato.»[6, pag. 121]

2.1.2 Le potenze

Situazioni analoghe possono essere pensate per le potenze; interessante è l'esempio presentato da Kopelevich, e riportato in [6], quando chiese ad allievi di seconda media, prima, seconda e terza superiore di confrontare le seguenti espressioni:
Rami sostiene che se t è maggiore di m ($t > m$), allora $a^t > a^m$. Ha ragione Rami?
Dana sostiene che se a è maggiore di b ($a > b$), allora $a^t > b^t$. Ha ragione Dana?[4]

Almeno il 50% degli allievi di ognuna di queste classi eseguì in maniera sbagliata ciascuno di questi problemi, affermando che se $t > m$, allora $a^t > a^m$ e che se $a > b$, allora $a^t > b^t$, e anche quando venne chiesto agli stessi studenti di mettere il simbolo giusto ($>$, $<$, $=$) tra le espressioni a^3 e a^4, oltre il 65% di allievi di ciascuna classe affermò che $a^4 > a^3$. Questi errori sono dovuti al fatto che i ragazzi, una volta accettata come vera una disuguaglianza in un dato contesto (molto spesso in $\mathbb{N}$), credono che tale disuguaglianza debba mantenersi vera in ogni altro contesto che gli viene presentato.
Sempre a proposito di potenze, più recentemente, le prove Invalsi del 2010 riportate in [6] e somministrate in I media hanno messo in evidenza come gli allievi tendano a trasferire regole già apprese in altri ambiti (addizione di numeri naturali, somma degli esponenti delle potenze quando si moltiplicano potenze con la stessa base), senza cogliere il cambio del contesto.

[4]Questo stesso esercizio è stato inserito nel questionario a pag. 121 e i risultati della sua analisi sono riportati nella Sezione 3.2.

A quale valore corrisponde il risultato della seguente operazione?

$$2^3 + 2^6$$

A) 512 (6%)

B) 2^9 (41%)

C) 72 (41%)

D) 2^{18} (11%)

Si nota un'ampia percentuale di risposte scorrette, alcune derivanti dalla somma degli esponenti delle potenze. In questo caso tale risultato è stato dettato dall'applicazione di una regola che gli studenti conoscono (sommare gli esponenti quando vi è un prodotto tra potenze con la stessa base) in un contesto in cui non andava fatto: le potenze con la stessa base non vengono moltiplicate ma aggiunte.

2.1.3 L'operazione di addizione e sottrazione

Come abbiamo visto nel Capitolo 1, più precisamente a pag. 25, molti dei misconcetti che presentano gli alunni sono dovuti a una non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo: il Sapere Scolastico, quello imposto dagli insegnanti e dalla scuola in generale, stride con il sapere intuitivo, frutto delle esperienze dei ragazzi e accumulato lungo tutto l'arco della loro vita. Esempi di questi tipi di misconcezioni si trovano affrontando il concetto di addizione e di sottrazione:

L'addizione.
Al fine di far emergere questa non corrispondenza tra significato intuitivo e significato formale, si riportano di seguito i risultati di una sperimentazione, ripresa da

[9], in cui vengono proposti 3 problemi additivi a una tappa, cioè che si risolvono con una sola operazione:

P1) Intorno ad un tavolo ci sono 4 ragazzi e 7 ragazze. Quanti sono in tutto?

P2) Giovanni ha speso 4 franchi. Egli ha ora in tasca 7 franchi. Quanti franchi aveva prima?

P3) Roberto ha giocato due partite. Nella prima ha perso 4 punti, ma alla fine della seconda partita si è ritrovato in vantaggio di 7 punti. Che cosa è successo nella seconda partita?

Tutti e tre i problemi, è ovvio, si risolvono con la stessa operazione $4 + 7$ ma essi hanno percentuali di successo incredibilmente diverse.

- P1 è ben risolto già in seconda elementare (all'età di 7 anni): i risolutori arrivano a sfiorare il 100%. Qui, d'altra parte, c'è una perfetta coincidenza tra significato formale e significato intuitivo: l'addizione è l'operazione che risolve problemi di unione tra raccolte (prive di elementi comuni).

- P2 è risolto, anche se con difficoltà, in quarta o quinta elementare (all'età di 9 o 10 anni); le soluzioni corrette con consapevolezza raggiungono una discreta percentuale.

- P3 è causa di insuccesso pressoché totale. Ancora in prima e seconda media (all'età di 11 o 12 anni) ha percentuali di risoluzione solo di circa il 25%, o anche meno.

Tuttavia, è ovvio che qui non si tratta solo di giustificati formali e intuitivi dell'addizione. Qui si tratta anche e forse soprattutto di difficoltà di gestione "narrativa" del testo. Questo tipo di prove, da un punto di vista didattico applicativo, evidenziano per lo meno che è falso quel supposto criterio di difficoltà della risoluzione dei problemi in base al quale l'aumentare del numero di operazioni da eseguire nella risoluzione è sinonimo di aumento della difficoltà. Quest'ultima opinione è legata alla forte influenza del contratto didattico, soprattutto per quanto riguarda la concezione della Matematica posseduta dagli alunni, esposta a pag. 28.

La sottrazione.
La sottrazione, per sua stessa natura, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a dispetto di un unico significato formale, che si possono evidenziare ricorrendo a due problemi suggeriti da Fischbein e presentati in [9]:

P1) Se togliamo 3 palline da un insieme di 10 palline, quante palline rimarranno?

P2) Ho 3 palline, ma me ne occorrono 10 per giocare. Quante palline devo aggiungere a quelle che ho già, per poter cominciare a giocare?

È ovvio che entrambi i problemi si risolvono con la stessa sottrazione $10 - 3$; ma nel primo caso, quello del *togliere via* (come lo chiama Fischbein) la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nel secondo caso sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive del tipo $3 + ... = 10$. D'altra parte è additiva ogni strategia di *completamento a*, come, per esempio, l'operazione di dare il resto in un negozio: il negoziante di solito non fa la differenza, ma fa, passo passo, il complementare a partire dalla spesa fino ad arrivare alla somma versata. Abbiamo dunque tra gli allievi una certa percentuale di risposte scorrette; al posto della sottrazione, c'è chi fa l'addizione $3+10$ o $10+3$ legata al fatto che c'è la parola "aggiungere" che suggerisce l'uso dell'addizione (a conferma del fatto di quanto il linguaggio utilizzato rimandi a specifiche scelte risolutive e influenzi quindi le scelte degli studenti).
C'è un forte contrasto tra l'operazione ingenua e spontanea di conteggio che verrebbe di fatto ad essere usata in una situazione concreta (cioè il conteggio: $3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$, con la risposta 7 legata al numero dei $+1$ necessari per giungere a 10 nel problema P2) e il significato formale della sottrazione. Se esistesse un'operazione specifica che esprime il numero di quei $+1$ che permettono di passare da 3 a 10, probabilmente la percentuale di successo salirebbe nettamente; qualcuno potrebbe dire che quell'operazione esiste ed è proprio la sottrazione espressa da $10 - 3$; ma le prove fatte e le considerazioni effettuate finora mostrano che non è questo il significato intuitivo con cui gli studenti costruiscono nel loro

cognitivo la sottrazione.

L'inevitabilità di queste misconcezioni risiede proprio nel fatto che lo studente, nel corso della sua carriera scolastica, dovrà sempre "combattere" tra il significato intuitivo e il significato formale di un dato concetto, tra il Sapere Scolastico e il sapere costruitosi con l'esperienza; il docente potrà facilitargli il lavoro effettuando una buona trasposizione didattica ed esplicitando il più possibile queste difficoltà, ma non potrà mai eliminarle del tutto.

2.1.4 La probabilità

«*Il concetto di probabilità è il più importante della scienza moderna, soprattutto perché nessuno ha la più pallida idea del suo significato.*»
Questa famosa frase, che Bertrand Russel pronunciò nel 1929, esplica alla massima potenza le difficoltà intrinseche del concetto matematico di "probabilità", difficoltà che si incontrano sin nella scuola secondaria e si ritrovano ancora all'università. Esplicativo della difficoltà della teoria probabilistica è il fatto che, nella pratica d'aula e supportata dalla maggioranza dei testi scolastici, esistono ben tre interpretazioni diverse di essa: l'interpretazione classica, l'interpretazione frequentista/statistica e l'interpretazione soggettivista. A volte queste difficoltà vengono incrementate anche dall'insegnante, quando, ad esempio, introduce il concetto di probabilità secondo la definizione classica e poi tenta di giustificare tale definizione mediante "esperienze" di lanci ripetuti di monete e di dadi per far vedere che, ad esempio, l'attribuzione della probabilità $\frac{1}{2}$ a testa e a croce ha una giustificazione empirica nella frequenza di uscita tra due eventi; così facendo il docente fonde tra loro il concetto di probabilità classica e quello di probabilità frequentista, creando ancora più confusione. Le tre diverse interpretazioni appena presentate vengono racchiuse nell'approccio assiomatico.
Questa difficoltà intrinseca ha portato la probabilità ad essere una branca della Matematica ricca di misconcetti, come ad esempio:

- **Equiprobabilità**: Lo studente tende a far sempre riferimento alla definizione classica e a considerare tutti gli eventi equiprobabili. Abitualmente,

nei libri di testo scolastici la definizione di probabilità assume la seguente formulazione:
Sia E un evento relativo ad uno spazio campionario (finito) Ω in cui tutti gli eventi elementari hanno la stessa probabilità di verificarsi. Si supponga che E sia formato da k eventi elementari (detti "casi favorevoli") e lo spazio campionario Ω da n eventi elementari (detti "casi possibili"). Si definisce probabilità dell'evento E il rapporto tra il numero di casi favorevoli e il numero di casi possibili.
Solitamente questo è l'approccio che rimane più impresso nella mente degli studenti e, pertanto, capita non di rado che sia applicato in maniera errata o a situazioni non trattabili con tale modello. Ci sono infatti casi che possono trarre in inganno uno studente disattento portandolo a conteggiare i cosiddetti "casi favorevoli" anche quando questi non sono tutti equiprobabili; un esempio, ripreso da [5, pag. 104], evidenzia come, nel rispondere alla seguente domanda: "Qual è la probabilità che il Real Madrid, giunto alle semifinali, vinca la Champions League?", lo studente sia portato a rispondere: "In Champions League rimangono 4 squadre, quindi $\frac{1}{4}$". Lo studente calcola la probabilità facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, senza considerare il valore delle squadre impegnate, ma considera (sbagliando) ogni evento come equiprobabile.

- **Rappresentatività**: Per molti la probabilità di un evento dipende da quanto questo è rappresentativo della popolazione, cioè se è o meno tipico. Questo approccio nel valutare la probabilità può portare a seri errori in quanto la somiglianza, o rappresentatività, non è necessariamente influenzata dagli stessi fattori che invece interessano l'assegnazione di una probabilità. Talvolta ci si aspetta che una qualsiasi sequenza di eventi (anche molto breve) generata da un processo casuale sia rappresentativa del processo intero e ne riporti i caratteri essenziali. Chiariamo il concetto con un esempio, ripreso da [5, pag. 83]; ad alcuni studenti viene posta la seguente domanda: "Nel gioco del SuperEnalotto vengono estratti (senza reinserimento) sei numeri da un contenitore che contiene novanta palline identiche al tatto e numerate da 1 a 90. Se dovessi scegliere se giocare la sestina (1,2,3,4,5,6) oppure la sestina (2,5,31,48,73,82), quale sceglieresti?" La misconcezione in questione può agire, in questo caso, inducendo lo studente a ritenere meno probabile l'uscita della sequenza più regolare (1,2,3,4,5,6) in quanto vista come non rappresentativa del processo casuale da cui ha origine.

Come nel caso visto nella sottosezione precedente, anche in probabilità, molte difficoltà derivano dalla non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo: [5] riporta che molti autori, come ad esempio Piaget, sono d'accordo sul fatto che le intuizioni probabilistiche sono proprie anche di bambini in età prescolare. Inoltre, l'influenza della società e i contenuti dei curricula scolastici favoriscono nello studente principalmente lo sviluppo dell'aspetto deterministico. Questo può in parte spiegare perché i giudizi probabilistici delle persone sono spesso errati ed espressi nella forma di opinioni e superstizioni.

2.1.5 I numeri razionali

Risultano numerose le misconcezioni legate al concetto di numero razionale, presentate e analizzate in [6]; l'idea di "successivo" di un numero che l'allievo ha appreso e usato con successo nell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e che estende intuitivamente a tutti gli altri domini numerici comporta che per diversi allievi il "successivo" di 0.2 sia 0.3, così come nella forma frazionaria il successivo di $\frac{2}{5}$ è, per alcuni studenti $\frac{3}{5}$, perché 3 è il successivo di 2 in $\mathbb{N}$. Emergono di conseguenza difficoltà nell'ordinare i numeri razionali. Per esempio, la frazione $\frac{2}{3}$ è considerata minore di $\frac{4}{9}$ perché $2 < 4$. Questa "giustificazione" ha un'analogia sviante nell'ordine tra numeri decimali: $2.3 < 4.9$ perché $2 < 4$. La letteratura specifica dimostra che anche adulti con un buon livello di scolarizzazione tendono a non saper ordinare le frazioni sulla retta numerica perché si basano essenzialmente sul confronto dei numeratori delle frazioni o sul concetto che più grande è il denominatore, più piccola sarà la frazione (anche quando i numeratori sono differenti). Inoltre, se si tratta di mettere in ordine 1.2 e 1.15, è noto che la competenza acquisita sui naturali può dare problemi interpretativi; la letteratura segnala casi in cui lo studente afferma: "A parità di parte intera, siccome $15 > 2$, allora $1.15 > 1.2$". Non sempre si rivela naturale scrivere 1.2 nella forma 1.20; ad impedire la naturalezza di questo passaggio sta anche una regola acquisita precedentemente, in base alla quale aggiungendo uno 0 "in fondo" al numero lo si moltiplica per 10: anche in questo caso una regola valida in $\mathbb{N}$ viene erroneamente e impropriamente estesa ai numeri razionali. Fin dagli anni '60, la letteratura segnala inoltre studenti che non sanno gestire l'equivalenza tra frazioni; come riportato da Fandino Pinilla in [6], sono state sottoposte a studenti di età variabile le seguenti uguaglianze, nelle quali dovevano riempire i posti mancanti e si è rilevato come a_1 e b_1 siano più facili da gestire che non le altre e che ancora a 15 anni, meno del 30% degli studenti sa risolvere con sicurezza b_2.

$a_1)\ \frac{1}{3} = \frac{2}{...}$ $\qquad a_2)\ \frac{4}{12} = \frac{1}{...}$

$b_1)\ \frac{2}{7} = \frac{...}{14}$ $\qquad b_2)\ \frac{2}{7} = \frac{...}{14} = \frac{10}{...}.$

2.1.6 Il caso della divisione

Lo studente, nel corso della sua carriera scolastica, ha sempre diviso un numero grande per uno più piccolo; detto in altre parole, si è fatto l'immagine che il dividendo *deve* essere maggiore del divisore. Lo stesso modo in cui la divisione è proposta spinge a ciò: si tratta sempre di ripartire molti oggetti tra poche scatole o cose del genere (divisione di ripartizione); si tratta sempre di contenitori che raccolgono diversi oggetti ciascuno (divisione di contenenza). Ma ciò comporta che, di fronte ad un problema del tipo:
"15 amici si dividono 5 kg di biscotti. Quanti ne spettano a ciascuno?"
lo studente, anche delle scuole superiori (età 14-19 anni) venga spontaneamente spinto a eseguire 15 : 5 (calcolando non quanti biscotti spettano a ciascun bambino ma "quanti amici a ciascun kg di biscotto"); è evidente come tra l'immagine intuitiva dell'operazione e quella poi costruita in modo più raffinato e profondo, ci sia

conflitto: lo studente "cade" nella trappola tesagli dal suo stesso modello intuitivo.

In [9] viene riportato un articolo di Fischbein del 1985 in cui compare un interessantissimo test che si compone di due esercizi:
P1: Una bottiglia di aranciata, che contiene $0.75l$, costa 2 dollari. Qual è il prezzo di $1l$?
P2: Una bottiglia di aranciata, che contiene $2l$, costa 6 dollari. Qual è il prezzo di $1l$?
Se si dà da risolvere solo P1, celando alla vista P2, si noterà sempre tra i presenti un tempo di imbarazzo più o meno lungo. Dato poco dopo anche P2 ed evidenziato il fatto che si tratta dello stesso problema, molti saranno disposti ad ammettere con sincerità che, mentre il secondo problema si risolve immediatamente con la divisione $6 : 2$, risolvere il primo con l'analoga divisione $2 : 0.75$ crea forti imbarazzi. Lo stesso Fischbein afferma, a questo proposito: «*Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no.*» [9, pag. 12]

2.1.7 Relazione tra quadrato e rettangolo

Lo studente ha imparato negli anni a riconoscere il quadrato e il rettangolo tramite sollecitazioni scolastiche ed extra-scolastiche. In [23] viene riportata la seguente situazione: un giorno l'insegnante di scuola primaria analizza più a fondo da un punto di vista logico la definizione di quadrato a partire dal rettangolo e mostra come la richiesta che evidenzia la "differenza specifica" tra il "genere prossimo" rettangoli e il "sottogenere" quadrati riguarda solo la lunghezza dei lati (che devono essere tutti congruenti). Quindi, dopo aver disegnato alla lavagna un quadrato sostiene che esso è un particolare tipo di rettangolo. La misconcezione che negli anni potrebbe essersi celata nell'allievo che l'immagine prototipo di rettangolo è una figura che deve avere i lati consecutivi di lunghezze diverse, potrebbe a questo punto creare conflitto cognitivo con la nuova immagine proposta dall'insegnante. Tale possibile misconcezione iniziale è inevitabile in quanto dipende dalla necessaria gradualità dell'introduzione dei saperi che, per essere proposti, si devono ancorare a rappresentazioni semiotiche che spesso nascondono la totalità e la complessità del concetto. Risulta in effetti impensabile poter proporre inizialmente tutte le considerazioni necessarie per poter caratterizzare un concetto dal punto di vista matematico e questa scelta obbligata dipende soprattutto dagli ostacoli ontogenetici.

2.1.8 L'infinito

Nella prefazione di un suo testo[5], Francesco Speranza scriveva:
«*L'infinito: difficile immaginare un tema più affascinante per la scienza. Possiamo avere esperienza diretta, concreta, solo del "finito": all'infinito possiamo arrivare solo con un atto d'ardimento della mente, un volo della fantasia.*»
Con questa frase si mette subito in chiaro come il concetto di infinito sia un concetto molto delicato da affrontare per gli studenti, proprio perché non si hanno riscontri diretti con la realtà; nonostante questo, però, l'infinito, in Matematica, si incontra ovunque: che si tratti della cardinalità degli insiemi numerici o dei punti di una figura geometrica, oppure nascosto nei concetti basilari dell'analisi. In [2] si legge di come, entrando nella scuola odierna, si può far esperienza di come gli ostacoli epistemologici che concernono l'apprendimento di concetti che implicano l'infinità siano ancora presenti nella mente degli studenti: così gli allievi, davanti alla questione se vi sono più numeri naturali o numeri pari, difficilmente sanno rispondere in modo corretto.
Il concetto di infinito matematico, per la sua complessità, comporta la presenza di misconcezioni, che verranno presentate di seguito seguendo la trattazione di [24]:

- **Dipendenza**: Consiste nella difficoltà che hanno gli studenti ad accettare la corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{N}$ e il suo sottoinsieme dei numeri pari; dietro questa difficoltà si cela la caratterizzazione di un insieme infinito dal punto di vista teorico: un insieme è infinito se può essere messo in corrispondenza

[5]Speranza Francesco, *Il linguaggio della matematica*, Zanichelli, (1992).

biunivoca con una sua parte propria. Per gli studenti vi sono più punti in un segmento più lungo rispetto ad uno più corto; lo stesso fenomeno riguarda non solo l'ambito geometrico: si parla infatti di dipendenza della cardinalità della "grandezza" di insiemi numerici. Dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, gli studenti pensano che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi. Questa convinzione è basata sulla veridicità dell' VIII nozione comune di Euclide: "Il tutto è maggiore della parte", sia per il finito che per l'infinito; questo fenomeno di dipendenza si basa dunque sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti.

- **Appiattimento**: consiste nel ritenere tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, ossia nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ debbano avere la stessa cardinalità, risulta molto frequente la generalizzazione che tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità. Anche questo fenomeno si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti.

Come accennato a inizio capitolo a pag. 39, non è facile distinguere tra misconcezioni evitabili e misconcezioni inevitabili e a volte capita che, uno stesso argomento Matematico, possegga entrambi i tipi di misconcezioni, alcuni dovuti a ostacoli epistemologici (misconcezioni inevitabili), altri dovuti a ostacoli *didattici*[6] (misconcezioni evitabili). È il caso dell'infinito, che presenta le misconcezioni inevitabili appena analizzate e misconcezioni evitabili, spesso causate dalla presentazione da parte dell'insegnante o dei libri di testo di modelli scorretti, come per esempio il modello della **Collana di perle**. Secondo tale modello, il segmento viene concepito come una "collana di perle", ossia considerato come un filo-segmento formato da perline-punti a contatto l'una con l'altra. Tale modello è legato a misconcezioni riguardanti il punto matematico considerato come ente avente una

[6]Legati alle scelte strategiche del docente, all'errata trasposizione didattica o di scelta di libri di testo, materiali, risorse...

qualche dimensione, che porta ad idee erronee relative alla topologia della retta.
Tale misconcezione riguarda il tema dell'infinito in quanto porta alla convinzione che la cardinalità delle perle-punti dipenda dalla lunghezza del sostegno-segmento: cioè lo studente immagina che valga l'implicazione "maggior lunghezza $\rightarrow$ cardinalità dei punti maggiore".
Un altro motivo che rende questa misconcezione "pericolosa", risiede nel fatto che molti ragazzi, pensando alla retta dei numeri reali, possano, anche in questo contesto, applicare il modello della collana di perle: i numeri naturali vengono spesso rappresentati su di una retta in cui i numeri vengono simboleggiati attraverso le perline di una lunghissima collana; quando si affrontano i numeri reali e si parla della retta reale è chiaro a molti che quella reale sia una retta con molti più numeri-punti in confronto a quella dei numeri naturali ma non è, spesso, chiaro a tutti che hanno caratteristiche completamente diverse, e che l'immagine dei numeri naturali come collana di perle non deve passare per analogia alla retta dei numeri reali.
Come si è visto, il tema dell'infinito nasconde al suo interno moltissime criticità che spesso gli studenti portano con sé durante tutti gli anni della scuola dell'obbligo e che, scelti curricula precisi nell'ambito universitario, verranno eventualmente risolti solo in seguito.

2.2 Esempi di misconcezioni evitabili

Verranno presentati di seguito esempi di misconcezioni evitabili.

2.2.1 Il caso emblematico delle frazioni

In [15] viene affrontato il problema della trasposizione del concetto di numero, in quanto l'introduzione a questo concetto nelle scuole non viene mai trattata seguendo la costruzione storica (per esempio tramite gli assiomi di Peano o la costruzione di Von Neumann). Ci si pongono dunque le seguenti domande:

- Che cosa del concetto di numero deve essere oggetto della didattica?

- Quali immagini di numero sono opportune ai vari livelli scolastici?

Fra tutti gli aspetti "scolastici" del numero, ad un certo punto appaiono i numeri "frazionari": tali oggetti non esistono nel sapere accademico, nel quale al loro posto esistono i numeri razionali, che sono definiti come le classi di equivalenza $[(a, b)]$ ottenute in $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ grazie alla relazione d'equivalenza:

$$[(a, b)] \cong [(c, d)] \iff (ad = bc).$$

Nel sapere accademico non c'è posto per le frazioni, per i numeri frazionari, dato che non ce n'è bisogno: nel sapere scolastico ci sono argomenti attesi, tipici, specifici che però sono assenti nel sapere accademico. Infatti, nel curriculum scolastico le frazioni compaiono ben prima dell'introduzione formale dei numeri razionali (che avviene nella scuola secondaria di I grado): già durante la scuola primaria infatti si richiede al bambino di saper riconoscere e utilizzare rappresentazioni diverse di oggetti matematici (numeri decimali, frazioni, percentuali, scale di riduzione...). Questo processo, come detto, continua poi nella scuola secondaria di I grado in cui, tra gli obbiettivi specifici di apprendimento, vi è una voce interamente dedicata all'approfondimento e ampliamento del concetto di numero (la frazione come rapporto e come quoziente, i numeri razionali, scrittura decimale dei numeri razionali, operazioni e confronto tra numeri razionali...).
Il numero frazionario, dunque, può essere pensato come l'insieme delle sue interpretazioni o rappresentazioni; non c'è un'unica rappresentazione del numero frazionario, dato che ne esistono molte che fanno riferimento sia alla realtà oggettiva concreta sia alla realtà scolastica. Seguendo la trattazione di [15], ecco quindi un elenco delle possibili rappresentazioni del numero frazionario, molte delle quali hanno chiaramente sovrapposizioni:

Frazione come relazione parte/tutto:

- Parte di un insieme o raccolta di oggetti distinti: $\frac{3}{4}$ di 12 oggetti è 9 oggetti.
- Misura lineare: inserire $\frac{3}{4}$ sulla retta numerica vuol dire misurare $\frac{3}{4}$ di una determinata unità stabilita; oppure: $\frac{3}{4}$ della lunghezza di un segmento è una

certa lunghezza, minore, di un segmento che è una parte del primo.

- Area: colorare i $\frac{3}{4}$ di un rettangolo.
- ...

Frazione come rapporto:
La frazione $\frac{a}{b}$ esprime il rapporto tra a e b in diverse situazioni:

- Scale.
- Proporzionalità.
- Percentuali.
- ...

Frazione come divisione:
Ricerca sul quoziente, il che comporta competenze su:

- Numeri con la virgola.
- Sistema Metrico Decimale.
- ...

Frazione come espressione della probabilità:

- Misura della probabilità di un evento.
- Presentazione di situazioni su cui fare ipotesi: su 10 persone, 3 hanno gli occhiali; qual è la probabilità che, scegliendo a caso una persona, essa abbia gli occhiali?
- ...

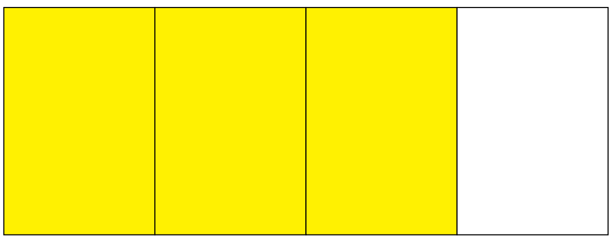
Frazione come operatore:

- Esempio: i $\frac{2}{5}$ di $\frac{3}{4}$ sono $\frac{3}{10}$: non è una misura, né una vera divisione.

- ...

È proprio la moltitudine di rappresentazioni diverse a cui le frazioni sono oggetto ad essere fonte di incomprensione da parte dei ragazzi; una volta deciso che i punti precedenti costituiscono in un determinato momento della carriera scolastica un sapere da insegnare, sorge il problema dell'ingegneria didattica: come insegnare questi concetti? E soprattutto: come far sì che gli studenti li apprendano evitando il formarsi di misconcetti? Come spiegato nel capitolo precedente, la cosa importante è che lo studente non passi dalle immagini ai modelli troppo presto e soprattutto che non si costruisca modelli solo di uno degli aspetti parziali detti. Da parte del docente occorre infatti dare una pluralità, il più estesa possibile, di immagini della frazione, ma purtroppo esistono ancora insegnanti o testi che si limitano a una sola o che ne privilegiano solamente una. Ad esempio, nel presentare la frazione come relazione parte/tutto, è importante far notare cosa si stia evidenziando, tenendo fermo il registro semiotico e cambiando però rappresentazioni:

- Dire ad alta voce "tre quarti".
- Scrivere sulla lavagna o sul quaderno "tre quarti".
- In cifre "$\frac{3}{4}$".
- Colorare:



È necessario che tutte le attività che hanno come obbiettivo finale la formalizzazione della nozione di frazione vincolino l'esistenza delle frazioni all'unità: la

"misura" della metà di un "qualche cosa" è funzione di questo "qualche cosa"; ciò evita che gli studenti ignorino il contesto nel quale si sta lavorando e che questo successivamente si converta in un ostacolo per la nozione di frazione in un contesto discreto; ad esempio: la metà della distanza Roma-Innsbruck e la metà della distanza Bressanone-Innsbruck, pur essendo una metà di "qualche cosa", sono tra loro ben diverse, perché sono frazioni di misure diverse in ciascun caso considerate come unità.
Sia nel numero frazionario come area, sia nel numero frazionario come misura lineare, tutti sappiamo bene che è sempre possibile trovare una data frazione. Per esempio, si sa che è possibile trovare i $\frac{22}{25}$ di area di una data figura o di una data distanza, anche se fisicamente la cosa potrebbe risultare complicata. Ma vi sono frazioni, intese come parti di un insieme/tutto, per le quali è impossibile trovare un'immagine significativa. Per esempio, se l'insieme di partenza è formato da 5 persone, è impossibile pensare e rappresentare in modo ingenuamente realistico i $\frac{3}{4}$ di tale insieme. Diventa allora interessante chiedersi: Per quali frazioni ha senso porsi domande di fronte ad una raccolta di 5 persone?
C'è inoltre un aspetto fondamentale che riguarda i numeri frazionari ed è l'uguaglianza tra frazioni: ogni insegnante vuole che i propri allievi sappiano riconoscere che $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = ...$ e che sappiano trovare altre frazioni uguali; è però necessario notare come il modello concreto si converta in un ostacolo all'apprendimento, dato che per trovare frazioni equivalenti con numeratore e denominatore *più grandi*, l'azione aritmetica è di *dividere* ulteriormente l'unità. Per esempio, per passare da $\frac{2}{3}$ a $\frac{4}{6}$, l'unità (che era divisa in 3 parti) va idealmente divisa in più parti (ossia 6). Dunque, apparentemente, per arrivare a numeri (numeratore e denominatore) più grandi, bisogna dividere l'unità in parti più piccole. Mentre la cosiddetta semplificazione, che è una riscrittura con numeri al numeratore e al denominatore *più piccoli*, si ottiene facendo parti *più grandi*. Per esempio, per semplificare $\frac{4}{6}$ ed ottenere $\frac{2}{3}$, bisogna idealmente prendere le 6 parti nelle quali era divisa l'unità, a due a due, dunque bisogna prendere parti dell'unità più grandi.
Giungiamo infine alle "frazioni-mostro", le cosiddette frazioni improprie del tipo $\frac{m}{n}$, con $m > n,\ n \neq 0$.

Nei casi continui è relativamente facile pensare ai $\frac{3}{2}$ di una data figura o di una data unità, anche se il modello unitario usuale (pizza o torta da dividere in parti uguali) non funziona più. Ma se abbiamo un insieme di 4 persone, trovarne i $\frac{3}{2}$ costituisce un ostacolo: anche se lo studente accetta che tale frazione rappresenti alla fine 6 persone, entra però in contrasto con immagini precedenti: cessa di esser vero che le 4 persone (raccolta discreta) rappresentino l'unità.

2.2.2 La relazione Perimetro/Area

Il misconcetto che verrà ora presentato è dovuto a due tipi di ostacoli: epistemologici, il che lo rende in parte un misconcetto inevitabile, e didattici, spesso dovuti alla presenza del misconcetto nell'insegnante.

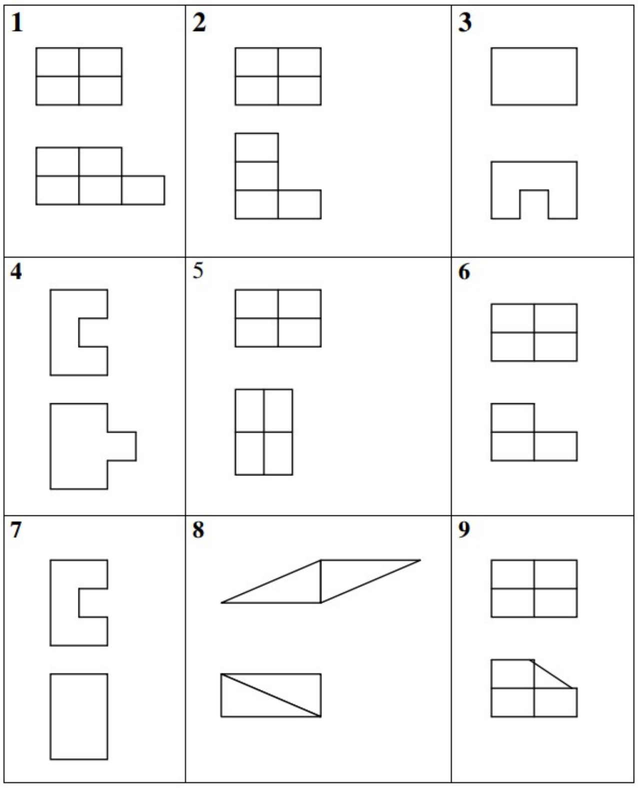
Le riflessioni critiche sul problema dell'apprendimento dei concetti di perimetro e area delle figure piane possono vantare il fatto di essere state tra le prime ad essere studiate; tali studi erano basati soprattutto sugli insuccessi dei giovani allievi a determinati stadi-età e mettevano in evidenza la grande difficoltà da parte dei ragazzi di appropriarsi dell'idea di superficie. In particolare, le ricerche evidenziavano come, al variare della forma, lo studente giovane tenda a non essere capace di accettare l'invarianza della misura superficiale.
Oltre il concetto di superficie, un altro tema che gli studenti si ritrovano ad affrontare (con qualche difficoltà) nel percorso di apprendimento della Matematica è quello della relazione tra area e perimetro; è noto che i due concetti geometrici *area* e *perimetro* di una figura piana hanno molti elementi comuni sul piano scientifico, ma ne hanno anche molti altri che sono semplicemente supposti sul piano delle misconcezioni, assai diffuse tra gli studenti di ogni livello scolastico. Le difficoltà legate a false relazioni tra area e perimetro, di fatto, sembrano perdurare fino ai 12 anni; per esempio, la letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti, del tipo: *Siano A e B due figure piane, allora la relazione che vale tra*

il perimetro di A e il perimetro di B deve valere anche tra l'area di A e l'area di B (se perimetro di $A>$ *perimetro di B, allora area di* $A>$ *area di B), e viceversa* (scambiando il perimetro con l'area).
Difficilmente questo tema viene preso in esame didatticamente in modo esplicito, anche per una supposta difficoltà, secondo gli insegnanti; ci si potrebbe allora chiedere se presso gli insegnanti, a qualsiasi livello scolastico, vi sia piena consapevolezza sul tema o se, per caso, anche presso alcuni insegnanti vi siano problemi di costruzione concettuale.
In [10] viene riportato il pensiero di Azhari, secondo il quale se vi sono due relazioni con qualche mutuo legame reciproco, lo studente tenta di applicare la seguente "legge di conservazione": se tal cosa cresce, anche quest'altra ad essa relazionata cresce (e viceversa). L'esempio che lega tra loro perimetro e area sembra calzare a pennello con le considerazioni di Azhari.
Se mettiamo in relazione i perimetri di due figure A e B, con le loro rispettive aree, un modo convincente per evidenziare che le "leggi" di cui sopra NON valgono, è quello di mostrare un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi:

p	S	p	S	p	S
$>$	$>$	$>$	$=$	$>$	$<$
$=$	$>$	$=$	$=$	$=$	$<$
$<$	$>$	$<$	$=$	$<$	$<$

La prima casella $>$ $>$ dice: trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l'area cresca, e così via.
Sono riportati di seguito 9 esempi (delle relazioni area/perimetro) di cui si è appena parlato:

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<



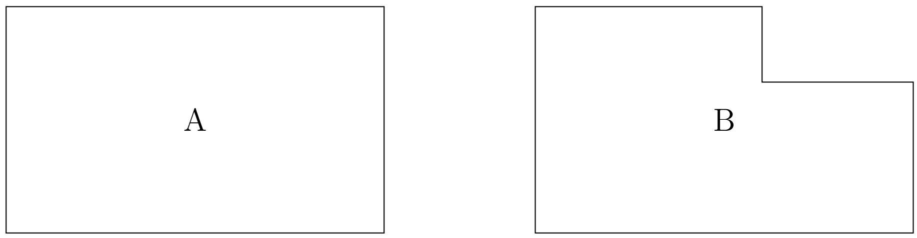
Sulla scia di queste considerazioni, riporteremo da [10] una ricerca che si è servita di collaboratori (docenti di scuola primaria, secondaria, università) e studenti. Ai collaboratori è stato chiesto di mettersi in gioco rispondendo alla seguente domanda di ricerca:

D1: È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo per convincersi che le cose non stanno così?

Successivamente, è stato chiesto ai collaboratori di intervistare alunni di scuola primaria, secondaria e università introducendo un discorso qualsiasi su perimetro

e area di figure piane e di effettuare su di esse trasformazioni geometriche per cercare di risolvere i 9 casi visti nella tabella precedente e al fine di rispondere alla seguente domanda di ricerca:
D2: Con quanta naturalezza e spontaneità gli studenti riescono ad accettare che non esistono relazioni obbligate tra perimetro e area delle figure piane? Come varia questa accettazione con l'età? Risulta facile accettare i 9 esempi? Come esprimono le loro convinzioni a proposito?

Dopodiché i collaboratori sono stati invitati a sottoporre a studenti diversi, che non erano stati sottoposti al test precedente, la seguente prova: essi dovevano consegnare ai nuovi soggetti una scheda contenente le due figure seguenti



nelle quali l'esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra.
A metà degli studenti andavano poste le due seguenti domande:
d1: La superficie di A è minore, uguale o maggiore della superficie di B? E il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?
All'altra metà, invece, si dovevano porre le seguenti domande (uguali a d1 ma poste in ordine inverso):
d2: Il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B? E l'area di A è minore, uguale o maggiore dell'area di B?
Il tutto per poter rispondere alla seguente domanda di ricerca:
D3: Può l'ordine invertito delle domande che caratterizza d1 e d2 modificare radicalmente le risposte degli studenti?

Ciò che si è visto durante questa sperimentazione è stato che, persino presso persone di alto livello culturale (quali i collaboratori) vi sono state, almeno di primo acchito, misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetro e area di figure piane: «*Ho avuto maggiori difficoltà a trovare figure nei casi dove il perimetro deve diminuire e l'area deve rimanere uguale o crescere*» afferma uno dei collaboratori.
Quasi ogni intervista iniziava con il famoso "problema di Galileo": Un paese ha due piazze A e B; il perimetro della piazza A è maggiore del perimetro della piazza B; quale delle due piazze ha area maggiore?
Moltissimi degli intervistati (40 su 43) hanno affermato che ha area maggiore la piazza con perimetro maggiore, salvo poi:

- Correggersi spontaneamente, affermando che "non è detto", ancor prima di effettuare tutte le prove previste dall'intervista.

- Accettare che la propria risposta fosse criticabile e scorretta, ma solo dopo aver eseguito le prove.

Dunque, il cambio di convinzioni è palese, a volte forte e in parecchi casi sono state necessarie prove e riflessioni non banali.
Dopo aver visto gli esempi, sono (quasi) del tutto scomparse le persistenze delle misconcezioni legate all'intuizione e si è giunti a frasi piene di consapevolezza, come la seguente: «*Dunque, due figure equiestese non sono automaticamente anche isoperimetriche*».

Durante la fase della ricerca inerente a **D2**, una volta mostrato, da parte dei ricercatori, che i 9 casi che esauriscono tutte le possibilità sono davvero tutti possibili, si hanno avute le seguenti reazioni:

- Più della metà degli studenti ha mostrato sorpresa dovuta all'uso di figure concave, dichiarando: «*Queste non sono figure geometriche*» oppure «*A scuola non si usano*».

- Più della metà degli studenti ha capito il senso della proposta ammettendo di aver subito un cambio di convinzione; tale atteggiamento non è statisticamente legato all'età.

- Nei casi di non riuscita, lo studente ha spesso dato la colpa alla mancanza di svolgimento di tali temi da parte dell'insegnante.

Per quanto riguarda il quesito **D3**, si è visto come l'ordine delle domande è fondamentale nelle risposte: la risposta corretta alla domanda **d1** infatti è stata data spontaneamente e immediatamente nel 90% dei casi a tutti i livelli, mentre la risposta corretta alla domanda **d2** è stata data inizialmente in pochi casi, anche ad alti livelli di scolarità, ed è stata data solo dopo vari ripensamenti nell'85% dei casi. Le risposte dunque non sono legate a quella supposta "legge di conservazione", ma a misconcezioni legate all'evidenza percettiva che nel caso dell'area è immediata mentre nel caso del perimetro no.
Le misconcezioni rilevate sono dovute anche al fatto che quasi tutti i modelli figurali che hanno accompagnato tali questioni nella storia scolastica siano stati realizzati con figure piane convesse piuttosto usuali, il che spinge a credere che si possa affrontare il problema solo con tali figure. Come accennato a inizio sottosezione, l'ostacolo che pare evidente rispetto alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente sulle relazioni tra perimetro e area non è solamente di natura epistemologica ma anche (assai di più) di natura didattica.
La natura epistemologica è evidente e ha molteplici aspetti:

a) Non è un caso che storielle e leggende che legano area e perimetro siano antichissime e si ripetano nel tempo (basti pensare al mito della fondazione di Cartagine da parte di Didone e al celebre indovinello di Galileo): questo è un segnale di ostacolo epistemologico.

b) Per compiere queste analisi si devono operare trasformazioni geometriche sulle figure; ebbene, solo alla fine del XIX secolo queste trasformazioni, la loro potenza, la loro necessità, si sono rivelate completamente agli occhi dei matematici (prima dominava la staticità degli *Elementi* di Euclide): anche questo ritardo nell'introduzione-accettazione è ovvio segnale di ostacolo epistemologico.

D'altra parte, su questi ostacoli epistemologici si innestano anche ostacoli didattici che risiedono nelle scelte didattiche:

a) Si usano sempre e solo figure convesse, provocando la misconcezione che non sia utile o necessario usare le figure concave.

b) Si usano sempre e solo figure standard (triangolo, rettangolo, cerchio..) provocando la misconcezione che viene spesso espressa con la frase «Ma questa non è una figura geometrica».

c) Quasi mai si mettono esplicitamente in relazione area e perimetro della stessa figura; spesso si insiste sulle loro differenze e mai sulle reciproche relazioni.

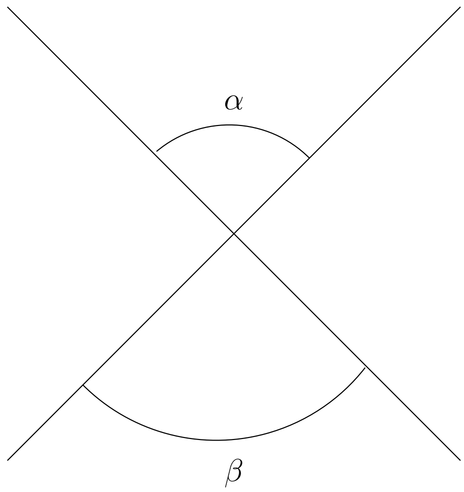
d) Quasi mai si operano trasformazioni sulle figure in modo da conservare o modificare area e perimetro, creando una misconcezione sul significato che ha il termine "trasformazione": molti studenti interpretano infatti con "trasformazione" una modifica che deve consistere solo in un rimpicciolimento o in un ingrandimento, o in un cambio di posizione.

In conclusione, tale sperimentazione ha mostrato come le misconcezioni legate alla relazione area/perimetro di figure piane siano diffuse in molti studenti e anche in molti insegnanti: questo risultato dovrebbe far riflettere sull'importanza di affrontare questi temi in classe con attenzione particolare alle scelte didattiche dell'insegnante.

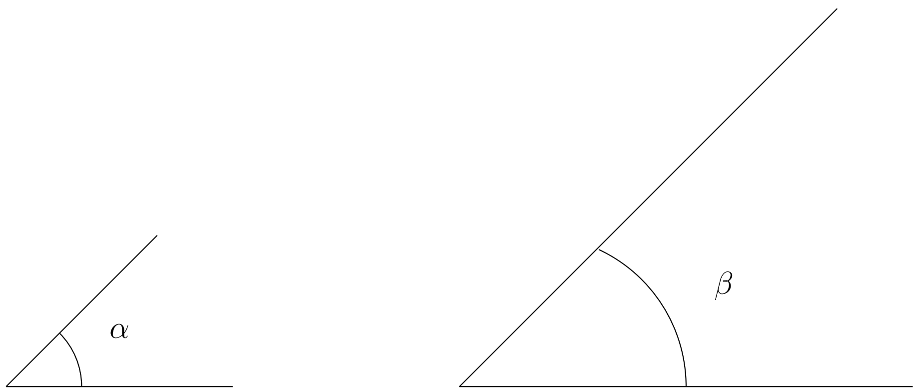
2.2.3 La definizione di angolo

Tra gli esempi di misconcezioni evitabili vi sono quelli che dipendono dalla scelta delle rappresentazioni semiotiche fornite dagli insegnanti, a volte in contrasto con la definizione scelta; emblematico da questo punto di vista risulta l'esempio dell'angolo: come riferiscono Tirosh e Stavy, ripreso da [6], sono diverse le ricerche

che si sono occupate delle misconcezioni relative agli angoli. Ad esempio, se si mostra il seguente disegno ad allievi dalla scuola dell'infanzia alla scuola superiore e si chiede di stabilire se i due angoli sono uguali o ce n'è uno più "grande" dell'altro, molti allievi rispondono: «*L'angolo β è più grande dell'angolo α perché il suo arco è più lungo*».



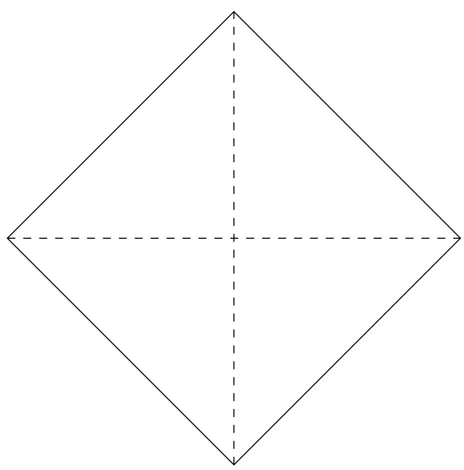
La stessa situazione si presenta, ma con una percentuale inferiore di risposte sbagliate, proponendo le seguenti domande inerenti le due figure sotto rappresentate: Gli angoli α e β sono uguali? Se non lo sono, qual è il più grande? Perché?



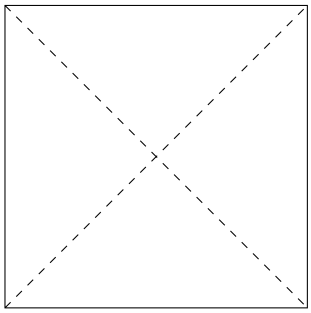
Si nota quanto la rappresentazione semiotica possa essere fuorviante per stabilire relazioni fra le ampiezze degli angoli. Le decisioni prese dagli insegnanti per presentare l'argomento angolo spesso si basano su proposte univoche e vincolanti derivanti dai libri di testo più che da scelte personali consapevoli e vertono sul fornire all'allievo sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali senza analizzarne i tratti distintivi con gli allievi stessi; altra importante causa di difficoltà sono le incoerenze nell'intenzionalità degli insegnanti derivanti da un uso limitato e inconsapevole dei mezzi semiotici di oggettivazione (ad esempio l'archetto dell'angolo che limita la parte di piano) rispetto all'aspetto concettuale e culturale del sapere al quale si vuole far giungere i propri allievi (definizione di angolo come parte di piano limitata da due semirette con l'origine in comune). La complessità dell'apprendimento del concetto di angolo è dunque amplificata dalle scelte dell'insegnante riguardanti la trasposizione didattica del sapere e l'ingegneria didattica adottata.

2.2.4 Quadrato/Rombo

Durante una sperimentazione in una classe IV di scuola primaria di Mirano (VE), ripresa da [23], si è presentata la seguente situazione, ampiamente studiata in letteratura di ricerca in didattica della Matematica: dopo aver costruito dei fogli quadrati di carta dove si erano anche evidenziate le pieghe delle diagonali, il ricercatore ha disposto il proprio modello di quadrato nella seguente inaspettata posizione, rispetto a quella classica scelta dai bambini per parlare di quadrato:



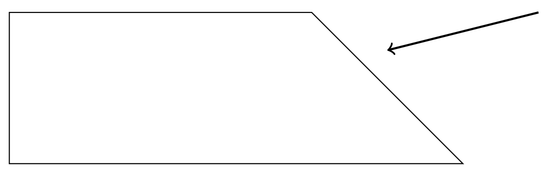
A questa provocazione i bambini hanno obbiettato: «*Quello che hai in mano tu è un rombo, quello che abbiamo in mano noi è un quadrato.*» I bambini tenevano in mano il quadrato disposto nel seguente modo rispetto all'osservatore:



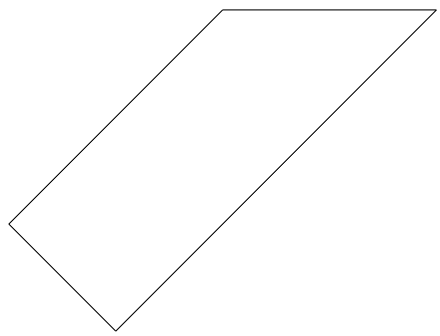
Il ricercatore ha allora sollecitato la discussione domandando loro: «*Perché quello che ho io è un rombo e il vostro è un quadrato?*» Bambini: «*Perché la maestra ci ha detto che il rombo ha le diagonali orizzontali e verticali, mentre il quadrato ha le diagonali oblique.*»
Nella logica di ciò che era stato loro insegnato, i bambini avevano ragione: la risposta risultava coerente rispetto all'insegnamento che avevano ricevuto. La rappresentazione e l'indicazione verbale che l'insegnante aveva fornito ai propri allievi, in buona fede, allo scopo di aiutarli, risultava in realtà un ostacolo all'apprendimento, dato che fissava l'attenzione solo su una particolare posizione assunta dall'oggetto, posizione che risultava intuitiva, essendo percettivamente immediata, ma che celava le caratteristiche matematiche del concetto. Le misconcezioni evitabili rilevate in questo caso sembrano dipendere da due diverse cause: la ripetitività della rappresentazione proposta dall'insegnante (che consiste con il quadrato disegnato coi lati orizzontali e verticali rispetto al punto di vista del lettore e che viene proposto dai libri di testo in modo quasi esclusivo) e soprattutto l'istituzionalizzazione verbale di tale scelta.

2.2.5 Il lato obliquo di figure piane

Interessante e molto utile è una sezione di [6] in cui viene spiegato come una convenzione accettata da anni da quasi tutto il mondo della scuola italiana, e per questo presente in tutti i libri di testo, sia quella di chiamare il lato del trapezio, indicato con una freccia nel seguente disegno, con il nome di "lato obliquo".



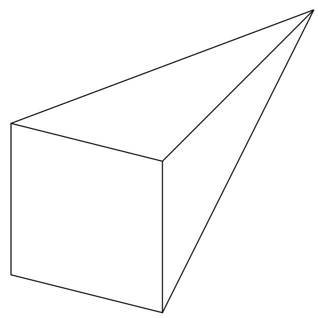
Tale scelta potrebbe creare nella mente degli allievi misconcezioni evitabili, dato che essa vincola la posizione da far assumere all'oggetto. Nella seguente figura, che rappresenta un trapezio congruente a quello della figura precedente ma disposto in modo diverso rispetto ai margini del foglio, tutti i lati risultano obliqui rispetto al lettore, tranne quello che per convenzione è chiamato obliquo.



A questo punto lo studente potrebbe non riconoscere più il trapezio o per farlo potrebbe doverlo riportare nella posizione da lui considerata standard; con il lato che è stato etichettato come obliquo disposto in modo che lo sia effettivamente rispetto al proprio punto di vista. Tali misconcezioni sono evitabili in quanto dipendono dalla scelta linguistica dei termini che danno maggiore risalto alla posizione assunta dall'oggetto del quale si sta parlando, piuttosto che all'essenza dell'oggetto stesso, valorizzando così saperi esterni al contesto della Matematica che bloccano l'apprendimento concettuale corretto.

2.2.6 La base nelle figure geometriche

Ragionamento analogo vale per la parola "base", introdotta da molti insegnanti nell'ambito della geometria solida nello spazio, affermando che è la faccia sulla quale "appoggia" il solido. Allo stesso tempo, ai solidi vengono dati particolari nomi, del tipo: piramide a base quadrata, prismi a base triangolare...
Queste scelte didattiche congiunte possono provocare misconcezioni evitabili, dato che, come nel caso precedente, vincolano la posizione che deve assumere il solido nello spazio. Eppure, ciò che si dovrebbe auspicare in ambito geometrico è che lo studente riesca a osservare le proprietà matematiche dell'oggetto, invarianti rispetto la posizione assunta, come citato da Brousseau e ripreso in [6, pag. 130]: «*La geometria non consiste nel descrivere ciò che si vede ma nello stabilire ciò che deve essere visto*». A tal proposito, viene presentato il seguente episodio avvenuto durante una sperimentazione in una scuola media e riportato in [6]:
In una III media, dopo aver disposto un modello di piramide quadrangolare con una faccia triangolare appoggiata sulla cattedra, si è chiesto di quale solido si trattasse.



Una studentessa ha risposto immediatamente: «*Non so che cosa sia, ma se lo rigiri diventa una piramide a base quadrata.*» (intendendo: con la faccia quadrata appoggiata sulla cattedra)
In questo caso la proposta della studentessa risulta coerente con ciò che le è stato insegnato: la base è la faccia sulla quale "appoggia" il poliedro; quel solido si chiama piramide a base quadrata solo se "appoggia" sulla faccia quadrata. Eppure in Matematica non vi sono piani di "appoggio", ogni faccia può essere considerata come "base", indipendentemente da come è disposta nello spazio. La "base" può

essere una qualsiasi faccia sulla quale si presta l'attenzione, così come, nel piano, la "base" di un poligono può essere un qualsiasi lato, comunque disposto rispetto ai margini del foglio o al punto di vista del lettore. E, allo stesso modo, come conseguenza dell'aver richiesto che la base di una figura geometrica sia disposta orizzontalmente rispetto al lettore, l'altezza diventa esclusivamente posizionata verticalmente, creando così anche una misconcezione relativa all'altezza. Quest'ultima misconcezione deriva dal mondo reale, dato che in questo ambito si parla di solito di altezza come quella distanza che viene individuata tramite la direzione del filo a piombo: verticale dal punto di vista dal quale tradizionalmente si osserva il mondo. La presenza dell'oggetto assunto come modello per aiutare la comprensione del concetto può esasperare il riferimento a caratteristiche legate alla percezione che causano deformazione nella costruzione concettuale: termini "relativi" legati alla posizione assunta dall'oggetto rispetto all'osservatore, costituiscono la fonte di misconcezioni evitabili che vincolano l'apprendimento geometrico. La geometria deve essere considerata come uno strumento utile per la lettura del mondo che ci circonda, una modellizzazione dello spazio materiale nel quale siamo immersi; ma un obbiettivo che si deve raggiungere in àmbito geometrico è che lo studente riesca a osservare un oggetto matematico nella sua essenza, analizzando con elasticità le sue peculiari caratteristiche. Questo è possibile solo se non si assoggetta l'apprendimento a rigidi vincoli spaziali; se ci si abitua ad analizzare gli oggetti, indipendentemente dalla posizione che essi assumono, si è poi più abili a riconoscere e analizzare la situazione anche al cambiare della proposta; in definitiva: si diventa più capaci di modellizzare la realtà e di dominare le situazioni spaziali in tutta la loro complessità.

Gli ultimi tre casi di misconcezioni analizzate, nelle Sottosezioni 2.2.4, 2.2.5 e 2.2.6, riguardano delle misconcezioni dovute all'uso inappropriato di determinati vocaboli da parte del docente o da parte dei libri di testo (o entrambi). Ancora una volta si conferma quanto detto nella Sottosezione 1.2.2 a proposito del linguaggio: il processo di interpretazione che l'allievo mette in atto quando fa Matematica è fortemente influenzato dai messaggi verbali mandati dall'insegnante, dai testi che legge e che produce, dall'interazione verbale in classe.. Un uso attento e consapevole del linguaggio da parte dell'insegnante agevola l'alunno nell'apprendimento della Matematica.

Capitolo 3

Sperimentazione in classe

In questo capitolo presento una sperimentazione effettuata con i ragazzi della scuola secondaria di II grado attraverso la somministrazione di un questionario[1] teso ad indagare la presenza di alcune misconcezioni. Il questionario è lo stesso utilizzato per la sperimentazione presentata in [17]. Nell'elaborato si analizzano i risultati emersi dalla somministrazione del questionario, effettuata nell'anno scolastico 2017/2018, a due classi seconde e due classi quinte di liceo scientifico. Lo studio presentato in questa tesi consiste nella somministrazione dello stesso questionario:

1) agli stessi studenti coinvolti nell'indagine del 2017, che all'epoca frequentavano la seconda superiore ed ora si trovano quarta superiore, per analizzare l'evoluzione verticale dei risultati (analisi verticale);

2) ad altre 9 classi quarte di liceo scientifico, per avere un campione ampio con cui raffrontare i risultati ottenuti in (1) (analisi orizzonatale).

Dopo un approfondimento sulle due somministrazioni, nelle prossime sezioni, per ogni quesito sarà fatta un'analisi a priori, in cui, alla luce di quanto detto nei capitoli precedenti, si presentano e si analizzano tutte le misconcezioni che la domanda in questione può far emergere, dopodiché verranno esposte le ipotesi di ricerca

[1]Riportato in Appendice A.

seguite dalla discussione dei risultati emersi.

Analisi verticale

L'analisi in verticale, come richiamato brevemente sopra, consiste nel confrontare l'andamento dei questionari completati dagli studenti di due classi quarte di un liceo bolognese (4A, 4F) con quelli emersi dalla somministrazione dello stesso questionario agli stessi studenti quando frequentavano la classe seconda: da un lato lo scopo è verificare se alcune misconcezioni presenti due anni fa sono state superate o se invece sono ancora presenti negli studenti e, dall'altro, vedere come si è sviluppata negli anni la modalità di ragionamento degli studenti attraverso un attento studio delle motivazioni fornite dagli studenti stessi nelle risposte del questionario.

Il campione oggetto di studio nel 2017 era formato da 40 studenti appartenenti alle classi 2A e 2F; lo stesso numero forma il campione dei ragazzi appartenenti alle classi 4A e 4F a cui ho somministrato il questionario. Purtroppo, nonostante il numero di ragazzi sia lo stesso, non tutti quelli che due anni fa frequentavano la classe seconda erano presenti nelle stesse classi in quarta e, in più, nelle quarte vi erano in tutto 7 ragazzi che non erano presenti in seconda nel 2017 (3 nella sezione F e 4 nella sezione A). Ho deciso dunque di non considerare nell'analisi i tre compiti provenienti da ragazzi della 4F che non avevano risposto al questionario nel 2017: il campione, da 40, si è ridimensionato a 37 alunni (purtroppo non è stato possibile non considerare i 4 compiti della 4A a causa di una confusione generatasi successivamente alla prova che non ha permesso ai ragazzi in questione di riconoscere il proprio compito per poterlo escludere dall'analisi).

Analisi orizzontale

L'analisi orizzontale invece consiste nello studio di un campione di 9 classi quarte (per un totale di 157 alunni), di cui 3 dello stesso liceo di Bologna (4C, 4D, 4G) e le restanti 6 del liceo statale "Leondardo Da Vinci" di Terracina (4A, 4B, 4C, 4D, 4E, 4F) chiamate a rispondere allo stesso questionario: obbiettivo dello studio è quello di riconoscere o meno la presenza di alcune misconcezioni ipotizzate a priori

e di vedere se le classi prese in esame per l'analisi in verticale (4A, 4F Bologna) erano "in media" rispetto ad un campione più significativo come quello preso in esame per l'analisi orizzontale.
Nonostante la dislocazione territoriale dei due licei sia diversa, alla luce dei risultati dei test, non sono emerse differenze significative tra le sezioni bolognesi e quelle terracinesi, quindi i risultati sono stati accorpati considerando gli studenti delle 9 sezioni come un unico campione.

Modalità
Per non influenzare il risultato del test, sono state rispettate le modalità utilizzate nella sperimentazione del 2017 dalla collega Chiara Gamberi: il questionario è stato somministrato ai ragazzi durante l'orario delle lezioni e il tempo dato loro per rispondere alle domande è stato di 45 minuti. Ai ragazzi è stata data l'indicazione di motivare il più possibile le proprie risposte; per questo motivo tutti i questionari sono stati raccolti in forma anonima (ho segnato solamente la classe di appartenenza di ogni alunno) al fine di far sentire i ragazzi liberi di esprimersi nella maniera che preferivano e a loro più consona. Prima del questionario è stato spiegato loro che i risultati ottenuti sarebbero stati oggetto di analisi nella mia tesi e, per non influenzare in alcun modo le loro risposte, ho deciso di non introdurre le nozioni matematiche che avrebbero incontrato nei quesiti e ho deciso di non rispondere alle loro domande/dubbi che mi ponevano durante la prova; dopo la consegna dei questionari in quasi ogni classe c'è stato un momento di dialogo in cui i ragazzi potevano esprimere i propri dubbi e in cui io rispondevo alle loro domande.

In entrambi i casi, sia per l'analisi orizzontale che per quella verticale, la ricerca ha avuto finalità prettamente esplorative, descrittive e interpretative, dunque i metodi di ricerca utilizzati sono stati di tipo prettamente qualitativo, in quanto reputo che essi siano quelli che in questo caso forniscono risposte più ricche, significative e utili[2].

[2]Per ulteriori informazioni circa le caratteristiche generali dell'analisi qualitativa si rimanda il lettore all'Appendice B.

Prima di passare alla descrizione ed analisi dei singoli quesiti del questionario, riporto la legenda che serve per la lettura dei grafici presenti questo capitolo.

= risposte corrette

= risposte mancanti

= risposte errate

3.1 Quesito 1

Senza svolgere calcoli, indica quale delle seguenti operazioni dà risultato maggiore e perché:

$$179 \cdot 0.257 \quad \text{oppure} \quad 179 : 0.257.$$

Analisi della domanda

La risposta corretta è la divisione: 179 : 0.257 dà il risultato maggiore.

Tale quesito ha lo scopo di verificare l'esistenza o meno, nello studente, della misconcezione legata all'operazione di moltiplicazione, già citata a pag. 15, secondo la quale "la moltiplicazione accresce sempre" o, equivalentemente, "il prodotto di due numeri è sempre maggiore di entrambi i fattori" (tale misconcezione è l'analoga della misconcezione legata all'operazione inversa -la divisione- secondo la quale "la divisione diminuisce sempre").
Nella Sottosezione 1.2.2, si è visto come alla base di alcune misconcezioni possa esserci la presenza di un (o più) modello primitivo; in questo caso, il modello primitivo che potrebbe emergere da questa domanda è quello della moltiplicazione come un'addizione ripetuta: l'alunno, nella scuola primaria e secondaria di primo

grado, ha fatto esperienza della moltiplicazione nell'insieme dei numeri naturali e ha verificato il fatto, certamente vero in $\mathbb{N}$, che la moltiplicazione accresce sempre; il problema è che tale ragionamento perde di senso nel momento in cui vi è ampliamento degli insiemi numerici e si passa quindi dall'insieme dei numeri naturali, all'insieme dei numeri interi o razionali in cui tale "regola" è falsa (ho appositamente utilizzato il termine "regola" in quanto nella mente dello studente nella maggior parte dei casi si tratta effettivamente di una regola, una legge che non viene e non può essere violata). Se, in $\mathbb{N}$, la scrittura $3 \cdot 5$ assume il significato "sommare il numero 3 per 5 volte" (cioè fare $3 + 3 + 3 + 3 + 3$), lo studente interiorizza tale "algoritmo" per le moltiplicazioni che incontrerà nel futuro; non stupisce quindi che, in $\mathbb{Q}$, la corrispondente traduzione di $3 \cdot 0.25$ in "sommare il numero 3 per 0.25 volte" perde completamente di significato e lo studente entra perciò in crisi (o sarebbe più opportuno parlare di conflitto cognitivo, come viene presentato nella Sottosezione 1.2.3).
Un'altra spiegazione della presenza di tale misconcezione è legata alla rappresentazione grafica di tale operazione: la moltiplicazione $3 \cdot 5$ viene raffigurata come un rettangolo i cui lati misurano, rispettivamente, 3 e 5 (usando il cosiddetto "schieramento"): è sì giustificata allora l'idea che la moltiplicazione accresce sempre, ma, ancora una volta, solo se si rimane nell'ambito dei numeri naturali: una volta che si lavora in $\mathbb{Z}$ o in $\mathbb{Q}$ tale rappresentazione perde di senso e genera conflitto cognitivo.
Le Indicazioni Nazionali, tra gli obbiettivi specifici dell'apprendimento del primo biennio, prevedono: "Sarà sviluppata la padronanza del calcolo (mentale, con carta e penna, con strumenti) con numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale. [...] Si introdurranno in maniera intuitiva i numeri reali (con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta), acquisendo familiarità con la rappresentazione esponenziale." Nonostante ciò, i ragazzi continuano a manifestare la concezione secondo la quale la moltiplicazione accresce sempre e, lavorando coi numeri, agiscono come se si trattasse sempre di numeri naturali; tale concezione rimane presente nelle loro menti, prendendo così la forma (e svolgendo il ruolo) di modello parassita,

presentato nella Sottosezione 1.2.2.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: 33 risposte corrette, 1 risposta mancante e 6 risposte errate su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.1). Dei sei studenti che hanno risposto in modo errato, quattro hanno giustificato la propria risposta con «*Perché è una moltiplicazione quindi il numero aumenta mentre nella divisione diminuisce*» manifestando così di essere completamente "vittime" della misconcezione sopra descritta.
Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto dei risultati migliori per due motivi: i ragazzi avranno affrontato il tema degli ampliamenti numerici, come riportato da [20], e col passare del tempo avranno avuto modo di lavorare, insieme ai propri docenti, sulla questione.

Analisi verticale

In Figura 3.1 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

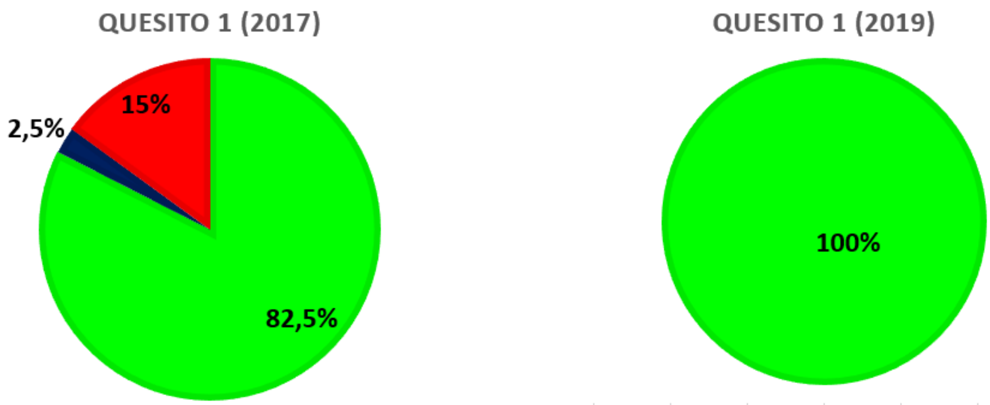


Figura 3.1

Come si evince dai risultati, c'è stato un completo miglioramento: tutti hanno risposto correttamente alla domanda mostrando l'assenza della misconcezione legata alla moltiplicazione di cui 4 studenti erano stati vittime nella sperimentazione in seconda. Nonostante i brillanti risultati, la maggior parte delle motivazioni date dai ragazzi sono state solo parzialmente corrette: 4 studenti hanno motivato la propria risposta con frasi del tipo «179 : 0.257 *dà un risultato maggiore perché la divisione di un numero intero con un decimale dà un numero più alto rispetto alla moltiplicazione*»; credono dunque di avere tale risultato con ogni numero decimale non cogliendo l'importanza che tale numero decimale (0.257) sia compreso tra 0 e 1 (è infatti proprio questa proprietà che rende vera la risposta). Nel 10.8% dei casi è emersa la convinzione (sbagliata) che dividendo per un numero negativo il risultato sia maggiore rispetto alla moltiplicazione per lo stesso numero negativo, come si evince da una risposta data: «*L'operazione che dà risultato maggiore è la divisione perché si divide per un numero minore di zero e quindi è maggiore rispetto a moltiplicare*»: tali studenti credono dunque che il numero 0.257 sia negativo (oppure non lo credono, mostrando però confusione nella terminologia) per cui, anche se danno la risposta corretta, il ragionamento che li ha portati a tale risposta è scorretto.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti soni riportati in Figura 3.2.

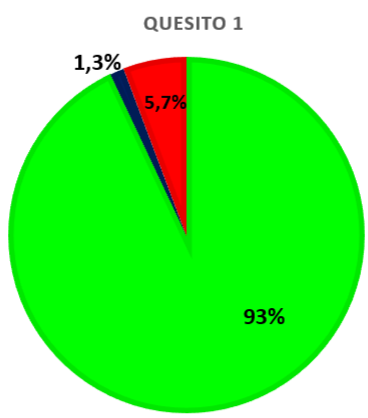


Figura 3.2

I ragazzi oggetto dell'analisi verticale hanno avuto più successo nel rispondere al quesito 1 rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale (100% di risposte corrette contro il 93%). Delle 9 risposte errate, 6 di queste sono argomentate: per 5 ragazzi (3.8% dei casi), la risposta errata è stata dettata dalla misconcezione legata alla moltiplicazione come qualcosa che accresce sempre; uno di loro motiva infatti così: «*Viene maggiore il primo siccome moltiplicando si aggiunge mentre dividendo si toglie [...].*». Un altro alunno invece scrive: «*La prima perché* 0.257 *deve essere sommato per* 179 *volte mentre nella seconda* 0.257 *deve essere diviso* 179 *volte*» facendo emergere in questo caso la percezione della moltiplicazione come una somma ripetuta che lo porta quindi a dare la risposta sbagliata.
Oltre la presenza di misconcezioni, tale quesito è risultato molto interessante in quanto ha diviso i ragazzi in due categorie in base alla tipologia di ragionamento applicata: chi ha risposto alla domanda grazie a un ragionamento generico e chi, invece, ha deciso di svolgere i calcoli (gli stessi dell'esercizio o no) per poter dare una risposta; l'8.9% dei ragazzi ha visto la divisione come una frazione esplicita, nel senso che, per poter rispondere alla domanda, hanno riscritto la divisione $179 : 0.257$ nella forma frazionaria $\frac{179}{0.257}$, cercando di capire "quante volte il denominatore fosse contenuto nel numeratore", come da loro esplicitamente riportato.
Nel campione allargato si confermano le stesse tendenze di ragionamento viste nell'analisi verticale: c'è stato qualcuno (il 10.8% dei ragazzi) che ha motivato la propria risposta appellandosi alla proprietà del numero 0.257 di essere decimale e non di essere un decimale compreso fra 0 e 1 e poi c'è stato chi ha attribuito al numero 0.257 la proprietà di essere negativo e lo ha utilizzato per giustificare il fatto che la divisione fosse l'operazione che dava il risultato maggiore (il 9.5% dei ragazzi hanno ragionato in questo modo). Ho notato in alcuni anche una certa difficoltà nella comprensione della domanda: in molti pensavano di dover trovare l'operazione che desse il risultato maggiore di 179, confrontando così i risultati delle operazioni con 179 e non tra loro; nel 10.8% dei casi i ragazzi hanno invece deciso di rispondere alla domanda trasformando la divisione in una moltiplicazione (dividere per un numero è equivalente a moltiplicare per il numero inverso), confrontando quindi due moltiplicazioni scegliendo come risposta la moltiplicazione

di 179 per il numero maggiore.

3.2 Quesito 2

Se $a > b > 0$ allora è vero che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $a^t > b^t$?

Analisi della domanda
La risposta corretta è NO e per motivarla è sufficiente far vedere che la disuguaglianza è falsa per valori negativi (o nulli) di t.

Tale quesito ha lo scopo di verificare le competenze degli alunni nel ragionare all'interno dei numeri reali. L'esercizio chiede di verificare una disuguaglianza, partendo da un'altra disuguaglianza data; l'argomento in questione è l'elevamento a potenza e il rischio è quello di ri-cadere nella misconcezione legata alla moltiplicazione (analizzata nel quesito 1) in quanto molti studenti vedono l'elevamento a potenza solamente come moltiplicazione ripetuta. Un'altra misconcezione facilmente riscontrabile in questo esercizio è quella, analizzata nella Sottosezione 2.1.2, secondo la quale, una volta accettata come vera una disuguaglianza in un dato contesto, i ragazzi credono che tale disuguaglianza debba mantenersi vera in ogni altro contesto che gli viene presentato; nello specifico continuano a lavorare in $\mathbb{N}$, nonostante nel testo sia esplicita l'appartenenza di t ad $\mathbb{R}$.
Come già spiegato nella Sottosezione 1.2.2, questa perseveranza nell'errore deriva dal fatto che lo studente, per svolgere il proprio compito, fa appello al proprio *modello intuitivo* (denominato da Fischbein *modello tacito primitivo*) che, in assenza di un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, con la diminuzione dei processi di controllo, riemerge sempre.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: 11 risposte corrette, 1 risposta mancante e 28 risposte errate su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.3). La maggior parte degli studenti ha dato la risposta sbagliata e gran parte di questi errori sono dovuti al fatto che i ragazzi hanno considerato solamente valori naturali di t per cui tale disuguaglianza si verificava sempre; altri studenti invece hanno ragionato (sbagliando) nel modo seguente: "se $a > b$ allora la potenza rispetta tale relazione", cedendo alla misconcezione sopra descritta.
Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto una percentuale decisamente più bassa di risposte errate, ma non del tutto inesistente: come si evince leggendo il programma svolto in entrambe le classi, i ragazzi hanno affrontato al terzo anno con i rispettivi docenti l'argomento "esponenziali e logaritmi", in particolare: "proprietà della funzione esponenziale; definizione di funzione esponenziale; grafico di funzione esponenziale"; inoltre, la sezione F ha affrontato nella classe terza lo studio delle funzioni crescenti e decrescenti e i loro grafici: nella classe quarta dovranno quindi essere in grado di riconoscere che, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la funzione (in questo caso la potenza) può essere crescente o decrescente e quindi avranno i giusti mezzi per rispondere correttamente alla domanda. Le stesse Indicazioni Nazionali prevedono nel secondo biennio lo studio di relazioni e funzioni: "Sarà approfondito lo studio delle funzioni elementari dell'analisi e, in particolare, delle funzioni esponenziale e logaritmo.[...] Lo studente dovrà essere in grado di analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni, operare su funzioni composte e inverse[...]." Mi aspetto comunque qualche risposta errata, non perché non abbia fiducia nella riflessione degli studenti in questi anni, ma perché credo che la tendenza dei ragazzi ad agire limitatamente all'interno dei numeri naturali nella risoluzione degli esercizi sia così forte e diffusa da mietere almeno qualche vittima anche nelle classi quarte.

Analisi verticale

In Figura 3.3 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

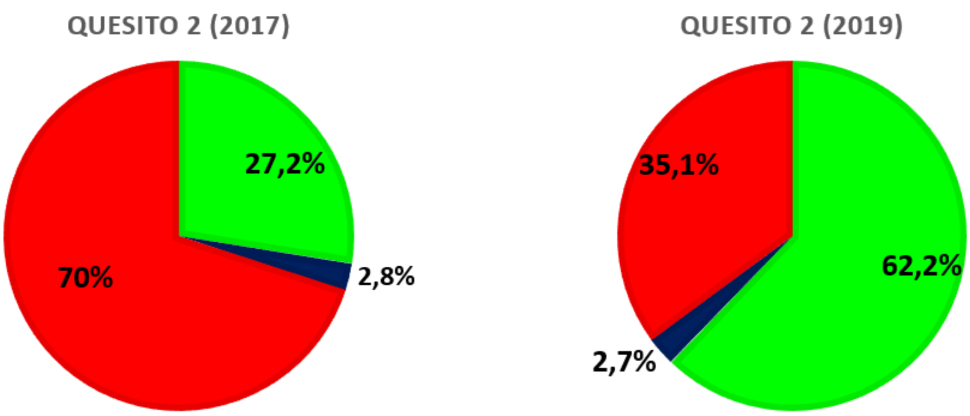


Figura 3.3

Dai risultati si evince che anche in questa domanda c'è stato un miglioramento; tra coloro che hanno dato la risposta errata, il 24.3% degli alunni aveva l'idea che la disuguaglianza fosse verificata in quanto con l'elevamento a potenza si mantiene la relazione data dal testo ($a > b$), usando le parole di un ragazzo: «*Vero in quanto se $a > b$ e si eleva a e b per uno stesso numero questa condizione resterà uguale [...]*»; altri invece (il 4.5% dei ragazzi) hanno dato la risposta errata perché hanno ragionato in $\mathbb{N}$, nonostante nel testo sia stata specificata l'appartenenza di t in $\mathbb{R}$ e hanno fornito un esempio per avvalorare la propria tesi. Tale evenienza era stata prevista a priori proprio perché la tentazione negli alunni di lavorare e ragionare all'interno dei numeri naturali è sempre molto forte; interessante è la risposta data da un ragazzo: «*Vero perché due numeri moltiplicati per lo stesso numero aumentano allo stesso modo*» confondendo l'operazione di moltiplicazione con l'operazione di elevamento a potenza. Tra coloro che invece hanno risposto correttamente, la maggior parte ha preso in considerazione valori negativi di t, mentre alcuni hanno presentato un controesempio assegnando a t il valore 0.

Nessuno presenta la misconcezione che vede l'elevamento a potenza una moltiplicazione ripetuta.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.4.

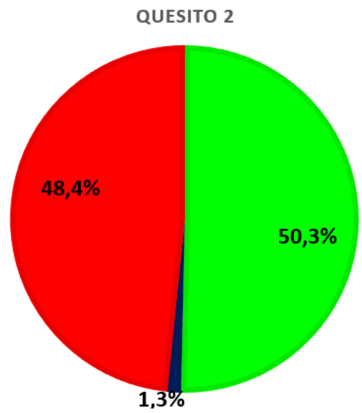


Figura 3.4

L'andamento del quesito è peggiore rispetto alle aspettative: la percentuale di risposte corrette è molto bassa se consideriamo il livello scolastico a cui gli alunni appartengono: tre ragazzi presentano addirittura la misconcezione legata alla potenza come moltiplicazione ripetuta, come esplicitano nella loro motivazione: «*Sì perché sia a che b aumentano il loro valore moltiplicandosi t volte.*» oppure «*Sì perché elevare un numero ad un altro numero significa moltiplicarlo per sé stesso tante volte quanto indicato dall'esponente, quindi un numero più grande moltiplicato per sé stesso dà un risultato maggiore rispetto al numero dato dalla potenza con base minore*». Come osservato già nell'analisi verticale, molti errori (il 33.7% dei casi) sono stati causati dalla misconcezione secondo cui la relazione data inizialmente dal problema si mantiene elevando entrambi i membri per lo stesso numero, come motiva un ragazzo: «*Sì, perché se un numero (a) è maggiore di un altro numero (b), sarà sempre maggiore se elevato allo stesso numero (t)*»; il 13.4% dei ragazzi invece sbagliano perché ragionano in $\mathbb{N}$: anche in questo caso, nonostante sia specificato nel testo che $t \in \mathbb{R}$, la tendenza dei ragazzi è quella di assegnare alla variabile valori naturali, per i quali la relazione è mantenuta. Qualcuno ha anche mostrato confusione tra l'operazione di moltiplicazione e l'operazione di elevamento a potenza usando i termini propri dell'una e dell'altra nella propria motivazione. I motivi che portano gli studenti a sbagliare sono dunque gli stessi trovati sia nell'analisi verticale che in quella orizzontale, anche se nel primo caso si è registrata una percentuale di risposte corrette più elevata.

3.3 Quesito 3

È vero che se la distanza di $x \in \mathbb{R}$ da 0 è inferiore alla distanza di $y \in \mathbb{R}$ da 0, allora $x < y$?

Analisi della domanda

La risposta corretta è NO e per motivarla è sufficiente notare che tale disuguaglianza è falsa quando la x assume valori positivi e la y assume valori negativi, oppure quando entrambe le variabili sono negative.

Ancora una volta, scopo del quesito è quello di indagare l'abilità dei ragazzi nel "muoversi" all'interno della retta reale; unico ostacolo alla corretta risoluzione di tale quesito è risolvere il problema lavorando sulla semiretta dei numeri non negativi per la quale vale la regola, a cui molti studenti sono particolarmente affezionati e presentata nella Sottosezione 2.1.1, secondo la quale il numero più lontano dallo zero è il numero più grande. Per questo problema valgono considerazioni analoghe a quelle del quesito 2.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: 9 risposte corrette, 1 risposta mancante e 30 ri-

sposte errate su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.5). Impressionante il numero di studenti che hanno dato la risposta sbagliata: considerare la totalità dei numeri come (solamente) numeri non negativi è un atteggiamento molto diffuso.
Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta spero in un risultato nettamente migliore, in quanto gli studenti di entrambe le classi hanno affrontato nel loro programma: "I punti del piano cartesiano: distanza tra punti e punto medio di un segmento" e "Ripasso della retta e del piano cartesiano", come previsto anche dalle Indicazioni Nazionali le quali specificano, tra gli obbiettivi specifici di apprendimento del primo biennio, "Lo studente acquisirà una conoscenza intuitiva dei numeri reali, con particolare riferimento alla loro rappresentazione geometrica su una retta".

Analisi verticale

In Figura 3.5 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

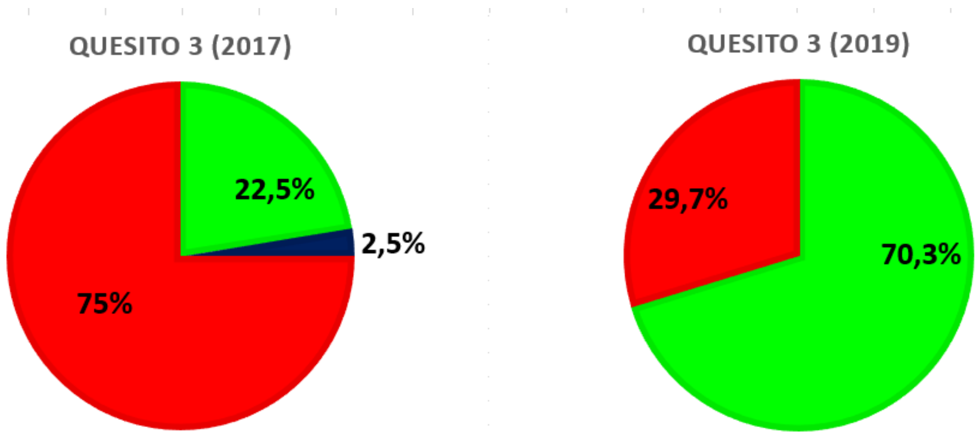


Figura 3.5

Ancora una volta, c'è stato un netto miglioramento nelle risposte; tra i 12 ragazzi che hanno dato la risposta errata, 8 di loro (21.6%) lo hanno fatto perché hanno ragionato nei numeri non negativi, dando dei controesempi o facendo valere la regola *numero più lontano dallo zero-numero più grande*. Chi ha risposto correttamente ha invece preso in considerazione casi in cui la y potesse assumere valori negativi e la x valori positivi rendendo falsa la disuguaglianza. Nonostante il miglioramento, il numero di risposte errate è da considerarsi ancora elevato, soprattutto se si tiene conto che la maggior parte di coloro che hanno sbagliato, lo hanno fatto perché pensano solo e sempre a numeri reali positivi.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.6.

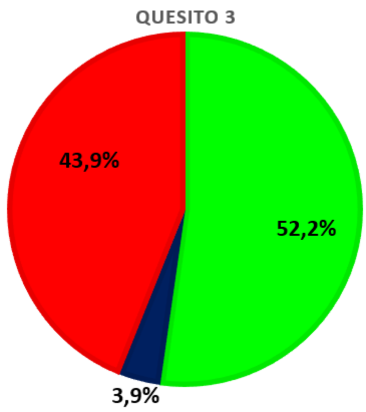


Figura 3.6

Come si è verificato nei quesiti precedenti, anche in questo caso gli studenti oggetto dell'analisi verticale hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette significativamente maggiore rispetto agli studenti oggetto dell'analisi orizzontale. Ancora una volta, chi ha sbagliato (26% dei ragazzi) conferma la tendenza già descritta sopra ad applicare la regola *numero più lontano dallo zero- numero più grande*. Questo errore è da ritenersi grave in quanto i ragazzi in aula hanno sicuramente affrontato il tema dei numeri reali e della loro rappresentazione sulla retta reale (come esplicitato sia dai programmi sia dalle Indicazioni Nazionali) per cui dovrebbero avere chiaro che non è la distanza di un punto dall'origine a determinarne il valore, come motiva un ragazzo che ha risposto correttamente alla domanda: «[...]*la vicinanza di un numero allo zero non indica necessariamente che* *questo sia più grande di un altro*». Tutti quelli che hanno risposto correttamente hanno argomentato usando dei validi controesempi o semplicemente presentando il caso in cui x è positivo e y negativo o entrambe le variabili negative. Tra coloro che hanno risposto in modo errato, il 3.8% dei ragazzi ha confuso la x come ascissa e la y come ordinata di un punto dando quindi una motivazione senza senso o comunque scorrelata dal contesto della domanda.

3.4 Quesito 4

Siano x, a numeri reali. Completa gli spazi con:
$<$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
$>$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;
? quando i dati a disposizione non permettono di stabilire la disuguaglianza e in questo caso spiega il perché.

$$\text{A) } 2+a \text{ ..... } 3+a; \qquad \text{B) } \frac{7}{2} \text{ .....} \frac{7}{3}; \qquad \text{C) } -7(a^2+1) \text{ ..... } -5(a^2+1);$$

$$\text{D) } x(2+a) \text{ ..... } 2x; \qquad \text{E) } \frac{7}{3}x \text{ .....} \frac{7}{2}x.$$

Analisi della domanda

Le risposte corrette sono:
A)$<$; B)$>$; C)$<$; D)?; E)?.

Tale quesito verte sulla capacità degli studenti di ragionare nell'insieme numerico dei numeri reali, al variare o meno di una variabile; la misconcezione che potrebbe celarvisi è quella che in letteratura viene chiamata *More of A-more of B*, causata dalla regola intuitiva per la quale, nel confrontare due espressioni similari composte sia da una parte letterale che da una numerica, il valore maggiore verrà assunto automaticamente dall'espressione con la parte numerica maggiore, senza minimamente considerare i possibili valori delle variabili (è il caso esplicito del punto A,C,E). Esempi di come questa misconcezione influisca sulla risoluzione di problemi da parte degli studenti sono riportati nella Sottosezione 2.1.1. Se tale misconcezione porta comunque alla risposta corretta nel caso degli esercizi A e C, lo stesso non vale per il punto E. L'ostacolo per il punto B è rappresentato dal fatto che molti studenti potrebbero rispondere in modo scorretto alla domanda seguendo il ragionamento "$2 < 3$, allora $\frac{7}{2} < \frac{7}{3}$", non considerando il ruolo di numeratore e denominatore; altri tipi di misconcezioni legate all'ordinamento tra frazioni sono state analizzate nella Sottosezione 2.1.5. Un altro possibile errore legato ai punti B ed E sta nel fatto che molti, rispondendo in modo esatto al quesito B, possano "trasportare" tale relazione anche in E non considerando tutti i valori della variabile x.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: le risposte corrette sono state per A 36, per B 40, per C 33, per D 27 e per E 18, su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.7). Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto la quasi totalità delle risposte corrette in quanto le misconcezioni che potrebbero essere (o che sono state effettivamente) alla base degli errori sono superabili dal momento in cui si affronta uno studio più mirato e specifico dei numeri reali previsto dalle Indicazioni Nazionali nel corso del secondo biennio.

Analisi verticale

In Figura 3.7 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

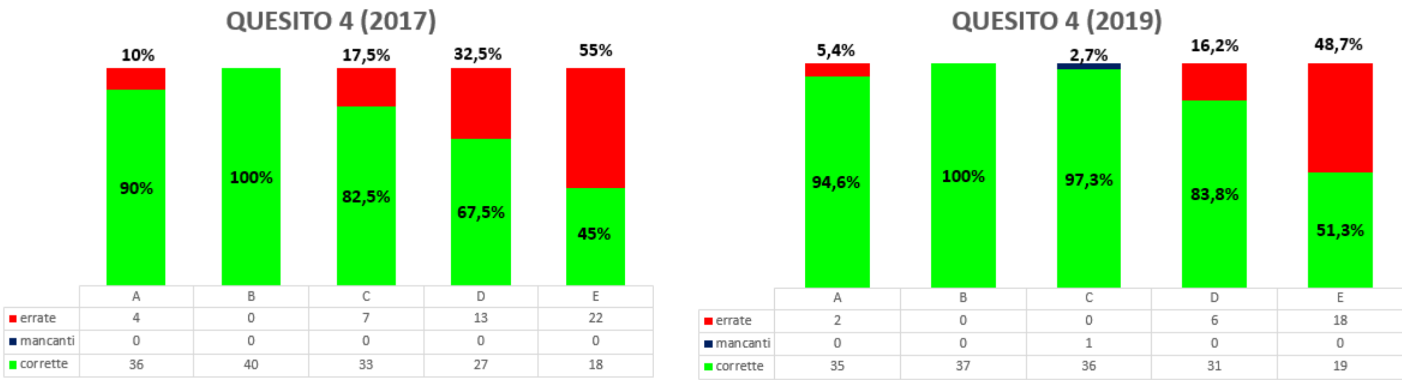
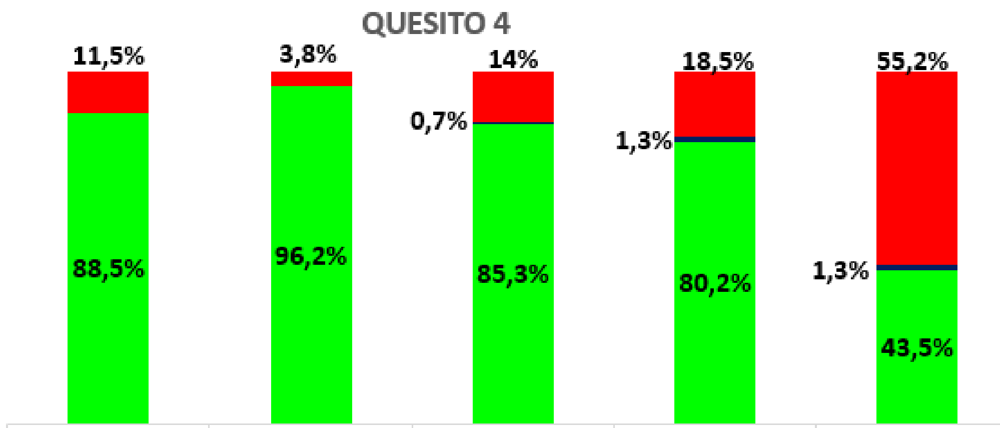


Figura 3.7

Anche in questo caso l'esito del test è stato positivo in quanto c'è stato un aumento di risposte corrette rispetto alla sperimentazione nelle seconde; ciò che ha portato i ragazzi a sbagliare è stato il considerare, nelle domande D ed E, valori positivi (addirittura naturali, ancora una volta!) delle incognite x e a: molti di coloro che hanno sbagliato il quesito E lo hanno fatto perché hanno riportato la relazione del punto B non considerando la x o considerandola solo e sempre positiva. In altre parole, il ragionamento alle spalle di tale risposte è: "poiché $\frac{7}{2} > \frac{7}{3}$, allora $\frac{7}{2}x > \frac{7}{3}x$"; questo risultato potrebbe essere indice della misconcezione *More of A-More of B*, che però non è stata dichiarata esplicitamente da nessun alunno. Per quanto riguarda le altre domande si ha avuta la quasi totalità di risposte corrette e, nei casi in cui è stata data la risposta errata, questa non è stata motivata. Nessuno ha risposto in maniera errata al punto B, indice della mancanza di misconcezione sopra descritta.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.8.



	A	B	C	D	E
errate	18	6	22	29	86
mancanti	0	0	1	2	2
corrette	139	151	134	126	69

Figura 3.8

Come si evince dai risultati, la domanda che ha avuto più risposte errate è stata l'ultima: la maggior parte dei ragazzi che l'ha sbagliata ha risposto correttamente al punto B per cui ha pensato che la relazione dovesse mantenersi anche nel punto E non considerando la variabile x oppure assegnandole solo valori positivi; come già accennato prima, dietro tale ragionamento c'è probabilmente la misconcezione *More of A-More of B*. Il punto B è stato invece quello che ha avuto più risposte corrette; questo è indice del fatto che i ragazzi non sono vittime delle misconcezioni circa l'ordinamento tra frazioni, non hanno cioè seguito il ragionamento: "poiché $2 < 3$, allora $\frac{7}{2} < \frac{7}{3}$". Per quanto riguarda le altre domande, le risposte errate sono frutto di distrazione oppure derivano dall'aver assegnato alle variabili solo valori positivi.

Per questa domanda si ha avuto una percentuale di risposte corrette lievemente maggiore nei ragazzi oggetto dell'analisi verticale rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale; si è mantenuta infatti essenzialmente invariata la relazione tra le percentuali di risposte corrette nelle due analisi: la domanda con più risposte corrette è stata la B, seguita dai punti A e C che hanno totalizzato percentuali simili di risposte corrette, poi D ed infine E.

3.5 Quesito 5

Indica con SÌ se i seguenti numeri sono posti in ordine strettamente crescente oppure con un NO se non lo sono, indicando poi l'ordine corretto.

A) 1.3//1.2//1.35 ....   B) $\frac{1}{4}//\frac{1}{3}//\frac{1}{2}$ ....

C) $\frac{1}{3}//\frac{1}{12}//\frac{3}{12}$ ....   D) 1.10//1.55//1.90 ....

Analisi della domanda
Le risposte corrette sono:
A)no: 1.2//1.3//1.35;   B)sì;   C)no: $\frac{1}{12}//\frac{3}{12}//\frac{1}{3}$;   D)sì.

Tale quesito si pone l'obbiettivo di indagare se gli studenti sono in grado di ordinare in modo corretto i numeri sulla retta reale utilizzando ciò che spesso li trae più in inganno e si trova alla base di molte misconcezioni: le frazioni e i numeri decimali. Tali numeri, come già è stato spiegato nella Sottosezione 2.1.5, rappresentano infatti una delle maggiori criticità che gli studenti incontrano durante la scuola primaria di primo grado e che spesso portano con sé durante i primi anni della scuola secondaria di secondo grado.

Ipotesi di ricerca
Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: le risposte corrette sono state per A 32, per B 32, per C 35, per D 39, su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.9). Come

si vede dai risultati, la maggior parte degli studenti ha risposto correttamente dimostrando di aver superato le misconcezioni appena analizzate; per questo motivo per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto la quasi (se non completa) totalità delle risposte corrette.

Analisi verticale

In Figura 3.9 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

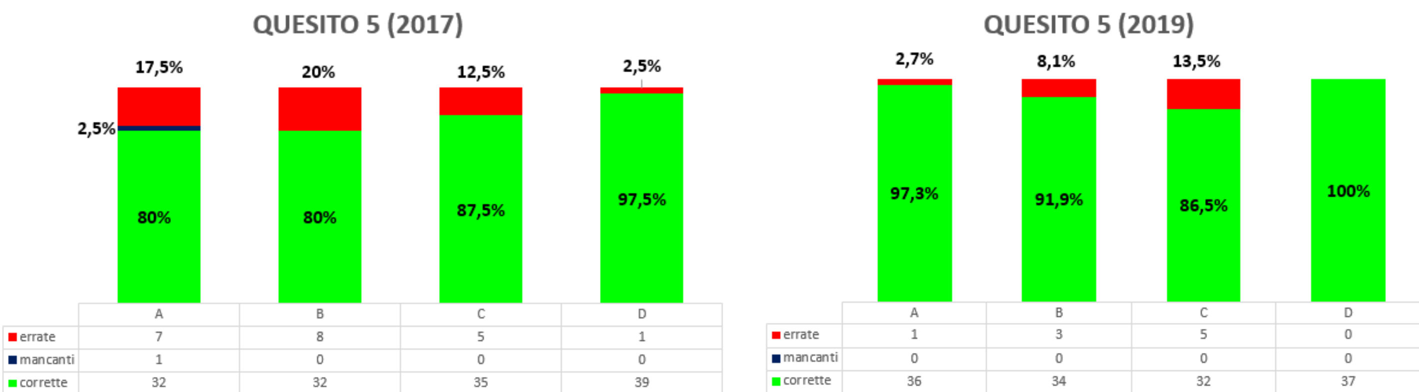
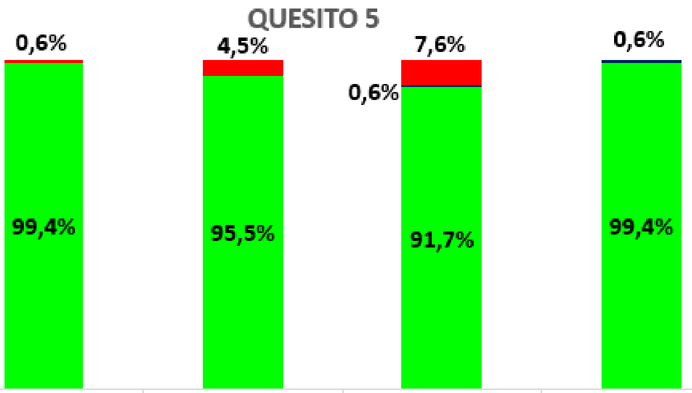


Figura 3.9

Il quesito 5 vede un miglioramento globale delle risposte degli alunni a distanza di due anni, più precisamente i quesiti A e B hanno visto un netto miglioramento mentre le percentuali di risposte corrette sono rimaste pressoché invariate per i punti C e D: poche infatti sono le risposte errate e nessuna per il punto D (l'unica risposta sbagliata per il punto A ritengo sia frutto di distrazione). L'8.1% degli studenti ha invece risposto erroneamente perché ha ordinato in modo scorretto le frazioni: ciò che gli studenti hanno fatto è stato mettere in ordine crescente i denominatori. Nonostante il miglioramento generale, è preoccupante constatare che ci sono ancora episodi in cui emergono le misconcezioni degli alunni ad un livello scolare in cui dovrebbero essere già superate.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.10.



	A	B	C	D
errate	1	7	12	0
mancanti	0	0	1	1
corrette	156	150	144	156

Figura 3.10

Le percentuali di risposte corrette ottenute da queste domande sono abbastanza alte ma, nonostante ciò, tra coloro che hanno sbagliato il quesito B e C, il 2.5% dei ragazzi ha presentato la misconcezione legata all'ordinamento dei numeri razionali (o, come vengono chiamati dagli studenti, numeri frazionari o numeri con la virgola): nell'ordinare le frazioni, hanno ordinato in modo crescente i denominatori. Tale comportamento potrebbe essere indice di una mancata comprensione della domanda: si potrebbe pensare che tali ragazzi abbiano ordinato in modo decrescente i numeri, ma tenderei a escludere questa ipotesi in quanto non hanno sbagliato le domande A e D e questo mi induce a pensare che, per loro, l'ordinamento crescente di frazioni si esegua ordinando in modo crescente i denominatori. Nel 3.8% dei casi, invece, l'esercizio è risultato incompleto: una volta affermato che i numeri nei punti A e C non erano in ordine crescente, i ragazzi non hanno indicato l'ordine corretto, non so se per distrazione o per mancata capacità.

In questo quesito i ragazzi oggetto dell'analisi verticale hanno raggiunto una percentuale di risposte corrette leggermente inferiore rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale.

3.6 Quesito 6

Nell'insieme dei numeri reali, è vero che la cardinalità dell'intervallo $[0, 100]$ è uguale alla cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$?

Analisi della domanda
La risposta corretta è SÌ.

Tale quesito vuole indagare il livello di conoscenza degli studenti circa il concetto matematico "cardinalità"; la domanda è, apparentemente, molto semplice: si tratta di riconoscere che nella retta reale due segmenti di diversa lunghezza sono equipotenti; in realtà cela moltissime misconcezioni comuni tra i ragazzi sul concetto di infinito che sono state ampiamente presentate e analizzate nella Sottosezione 2.1.8.

Ipotesi di ricerca
Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: 14 risposte corrette, 12 risposte mancanti e 14 risposte errate su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.11); tali risultati ci dicono che l'argomento "cardinalità" è sicuramente un argomento ostico per gli studenti che crea non poche difficoltà.
Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto più o meno gli stessi risultati: i ragazzi, come mi è stato comunicato dai rispettivi docenti, nel corso del tempo hanno incontrato l'infinito solamente quando si trattava di indicare intervalli illimitati; il concetto di "infinito matematico" viene presentato durante il quarto anno, come si evince dalle Indicazioni Nazionali: "In

questa occasione sarà approfondita la formalizzazione dei numeri reali anche per iniziare lo studente alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico)".
C'è inoltre da tenere in considerazione che gli studenti in questione, come confermato dai rispettivi docenti, non hanno mai utilizzato il termine "cardinalità" con gli attuali docenti: sono in grado di verificare l'esistenza o meno di funzioni biunivoche tra due o più insiemi, ma ignorano tutto l'apparato delle cardinalità di insiemi e, di conseguenza, di insiemi equipotenti.

Analisi verticale

In Figura 3.11 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

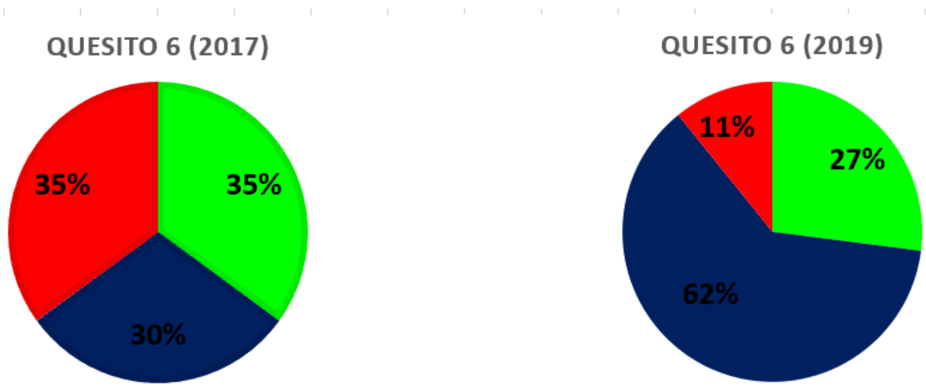


Figura 3.11

Tale quesito ha visto, nel corso del tempo, la diminuzione di risposte corrette ed errate e l'aumento delle risposte mancanti: questo è dovuto al fatto che gli alunni in questione non sapevano cosa fosse la cardinalità, come previsto. Moltissimi di loro non hanno risposto alla domanda giustificando con frasi del tipo «*Non so cosa sia la cardinalità*», mentre per gli altri la risposta (giusta o sbagliata) è stata data completamente a caso. Un ragazzo ha associato al termine "cardinalità" il concetto di numero cardinale e numero ordinale; si è riscontrata anche una confusione generale sul concetto di intervallo: il 5.4% di loro non ha riconosciuto la scrittura dell'intervallo e ha perciò interpretato la scrittura $[0,1]$ col numero $0,1$ e, analogamente, la scrittura $[0,100]$ col numero $0,100$ portando così ad una risposta affermativa ma completamente decontestualizzata. In un solo caso c'è stata risposta corretta con motivazione parzialmente corretta: «*Sì perché i numeri sono infiniti in entrambi i casi*». Il ragazzo mostra di conoscere il significato del termine "cardinalità" per insiemi finiti ma lo generalizza in maniera errata al caso di insiemi infiniti mostrando così di essere vittima della misconcezione chiamata *appiattimento*, spiegata nella Sottosezione 2.1.8; nel 5.4% di casi è invece emersa la misconcezione di *dipendenza*, anch'essa spiegata nella Sottosezione 2.1.8. Come già accennato, il docente di classe aveva spiegato il concetto di funzione biunivoca tra due insiemi, così, a questionario terminato, nella 4A la domanda è stata riformulata nel modo seguente: "*È possibile trovare una corrispondenza biunivoca tra l'intervallo* $[0,1]$ *e l'intervallo* $[0,100]$*?*". Tale domanda è stata compresa dalla maggior parte dei ragazzi e ha avuto esito positivo (un ragazzo ha addirittura consigliato la funzione in modo brillante).

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.12.

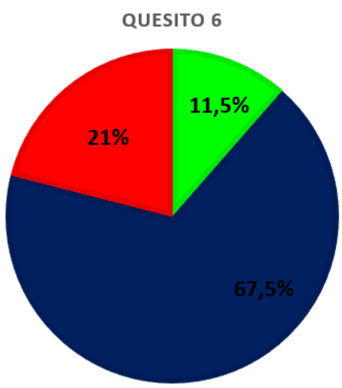


Figura 3.12

Questo quesito ha visto la stessa tendenza di ragionamento dei ragazzi nelle due analisi (orizzontale e verticale), seppur con percentuali diverse: i ragazzi oggetto dell'analisi verticale hanno raggiunto una percentuale di risposte corrette maggiore rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale. La maggior parte delle domande sono rimaste senza risposta in quanto i ragazzi non conoscevano il concetto "cardinalità", come da loro confessato. Nonostante ciò, molti hanno risposto al quesito facendo capire che conoscevano il termine (magari solo a livello intuitivo) e hanno perciò motivato la risposta per avvalorare la propria tesi; tra questi, il 5.1% dei ragazzi ha presentato la misconcezione di *dipendenza*, mentre il 3.8% ha invece presentato la misconcezione di *appiattimento*, per cui questi ragazzi hanno risposto correttamente "sì" alla domanda motivando però con frasi tipo «*Sì perché entrambi gli intervalli contengono infiniti punti*». Per tutti gli altri che hanno risposto correttamente, ritengo che la risposta sia stata data "a caso" in quanto non è stata motivata oppure sono state date motivazioni apparentemente senza senso, come: «*Sì, ma dipende da come conti, se da 0 a 1 o da 0 a 100*» oppure «*Sì, entrambi possono tendere all'infinito*». Il 7.6% dei ragazzi ha invece confuso la scrittura dell'intervallo con la scrittura di un numero decimale, portando ad una risposta affermativa dovuta all'uguaglianza dei numeri e delle cifre significative.

3.7 Quesito 7

Indica se le seguenti affermazioni sono VERE o FALSE:

A) $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ .... B) $-0.5 \in \mathbb{Q}$ .... C) $\sqrt{16} \in \mathbb{Q}$ .... D) $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ......

E) $0.5 \in \mathbb{Z}$ .... F) $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ .... G) $\frac{10}{2} \in \mathbb{Z}$ ....

Analisi della domanda

Le risposte corrette sono:

A)vero; B)vero; C)vero; D)vero; E)falso; F)falso; G)vero.

Scopo di questo esercizio è verificare le competenze degli studenti circa l'appartenenza o meno dei numeri a determinati insiemi numerici; le misconcezioni che possono presentarsi sono legate all'errata comprensione delle leggi di inclusione dei vari insiemi numerici e alla rappresentazione dei numeri (per cui l'appartenenza di un numero ad un insieme numerico dipende solamente dalla sua scrittura): per molti una frazione è sempre un numero razionale e non può essere un numero naturale; di per sé è vero che una frazione è sempre un numero razionale, ma solo se è chiaro il concetto che l'insieme dei numeri razionali include l'insieme dei numeri naturali. Si vedano per esempio il punto C e il punto G: per il primo lo studente potrebbe essere portato a rispondere "falso" in quanto, vedendo la radice, collegherà tale simbolo direttamente ai numeri irrazionali non facendo caso che, "svolgendo i calcoli" $\sqrt{16} = 4$, che è addirittura un numero naturale (e quindi razionale); analogo discorso vale per il punto G: vedendo il numero sotto forma di frazione, lo studente potrebbe essere spinto a pensare che non appartenga all'insieme dei numeri interi (come conseguenza la risposta dovrebbe essere "falso"), non facendo caso che $\frac{10}{2} = 5$ che è un numero naturale e quindi anche un numero intero, il che rende vera l'affermazione.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: le risposte corrette sono state per A 31, per B 23, per C 16, per D 26, per E 29, per F 25, per G 31, su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.13); come si può notare moltissimi studenti hanno risposto in modo errato alla domanda C manifestando di essere vittime della misconcezione secondo la quale è la scrittura di un numero a determinare la sua appartenenza all'insieme numerico.

Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto la quasi totalità delle risposte corrette: confido nel fatto che, crescendo, gli studenti superino la misconcezione sopra descritta e abbiano una visione più critica e una conoscenza più profonda dei numeri non lasciandosi ingannare dalle "apparenze".

Analisi verticale

In Figura 3.13 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

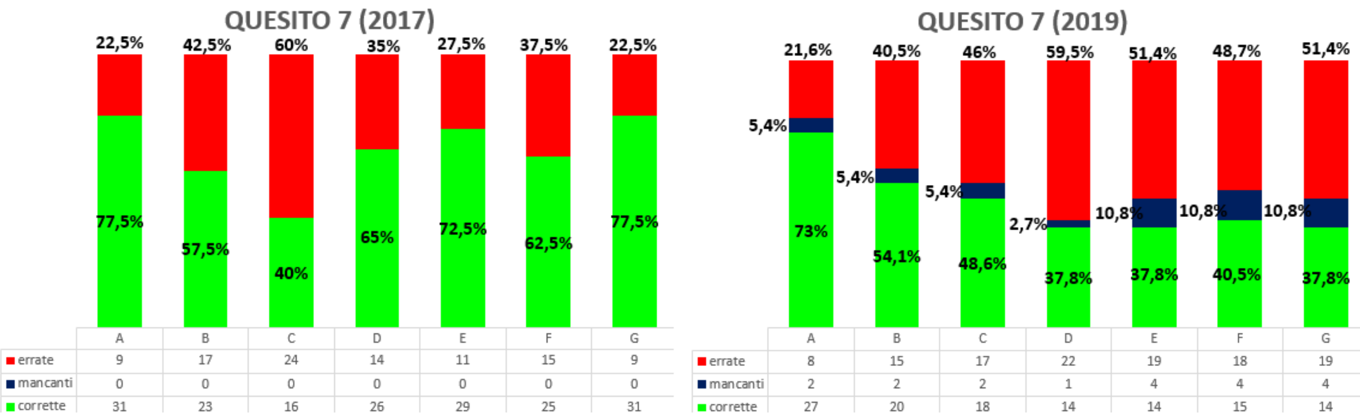


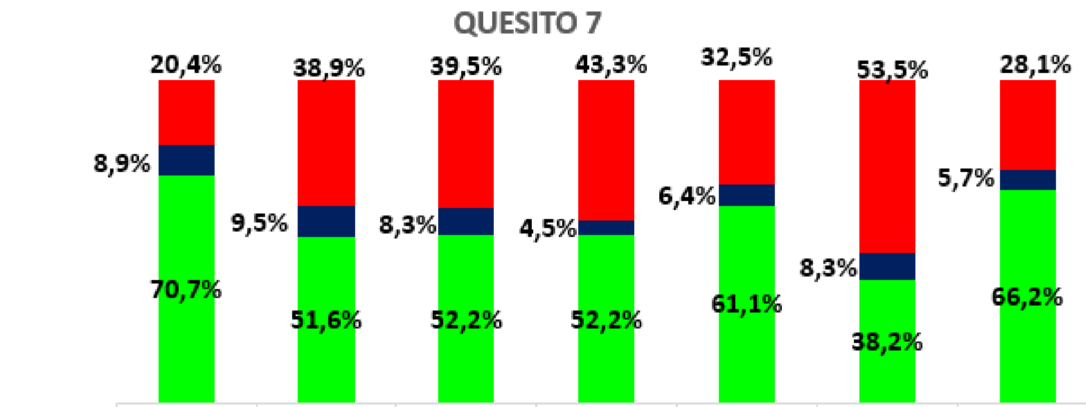
Figura 3.13

A differenza delle altre domande, in questa c'è stata un peggioramento (contro ogni mia previsione) delle risposte dei ragazzi: molti hanno manifestato grande confusione per quanto riguarda la natura dei numeri: il 40.5% di loro afferma che $\sqrt{2}$ non appartiene a $\mathbb{R}$ ma appartiene a $\mathbb{Q}$. Tale situazione è giustificabile con il fatto che gli insiemi numerici vengano affrontati in classe nel primo biennio, come citato nelle Indicazioni Nazionali: "Sarà sviluppata la padronanza del calcolo (mentale, con carta e penna, con strumenti) con numeri interi, con i numeri razionali sia nella scrittura come frazione che nella rappresentazione decimale.[...] Lo studio dell'algoritmo euclideo permetterà di approfondire la struttura dei numeri interi e di conoscere un esempio importante di procedimento algoritmico. Si introdurranno in maniera intuitiva i numeri reali (con particolare riferimento al-

la loro rappresentazione geometrica su una retta), acquisendo familiarità con la rappresentazione esponenziale. La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di altri numeri sarà un'importante occasione di approfondimento concettuale. Lo studio dei numeri irrazionali e delle espressioni in cui compaiono fornirà un esempio significativo di applicazione del calcolo algebrico e un'occasione per introdurre il tema dell'approssimazione." Nel secondo biennio è poi previsto: "Lo studio della circonferenza e del cerchio, del numero π, e di contesti in cui compaiono crescite esponenziali con il numero e, permetteranno di riprendere lo studio dei numeri reali, con riguardo alla tematica dei numeri trascendenti. In questa occasione sarà approfondita la formalizzazione dei numeri reali anche per iniziare lo studente alla problematica dell'infinito matematico (e alle sue connessioni con il pensiero filosofico)", ma generalmente questa parte viene affrontata nel secondo quadrimestre della classe quarta, quindi dopo la sperimentazione.
La quasi totalità dei ragazzi, inoltre, non ricorda la "nomenclatura" degli insiemi numerici e le inclusioni che li regolano, come dimostrano alcune affermazioni del tipo: «*L'insieme $\mathbb{Q}$ rappresenta i numeri interi, l'insieme $\mathbb{R}$ i numeri razionali quindi senza radici e $\mathbb{Z}$ li comprende tutti.*» oppure «$\mathbb{Z}$= *irrazionali senza frazioni,* $\mathbb{R}$= *reali tutti i numeri,* $\mathbb{Q}$= *razionali frazioni*». Da questi citati emerge anche il riferimento alla natura dei numeri in base alla loro rappresentazione; si veda ad esempio il ricorso alle parole "frazioni", "radici" per motivare le risposte. Questo atteggiamento può essere ricollegato alla misconcezione legata alla natura dei numeri in base alla loro apparenza descritta sopra, che porta lo studente a decidere che $\sqrt{16}$ è una radice, quindi non un intero. Didatticamente questa seconda situazione è più grave della prima: il fatto di non ricordare i nomi degli insiemi numerici può essere risolto grazie ad un ripasso, mentre la misconcezione legata alla natura dei numeri in base alla loro scrittura deve essere affrontata dal docente in maniera più seria attraverso un adeguato intervento di recupero.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.14.



	A	B	C	D	E	F	G
errate	32	61	62	68	51	84	44
mancanti	14	15	13	7	10	13	9
corrette	111	81	82	82	96	60	104

Figura 3.14

Contro ogni aspettativa, questo esercizio ha avuto una percentuale di risposte corrette molto bassa: anche in questo caso il motivo principale è la mancata conoscenza degli insiemi numerici e delle leggi di inclusione che li regolano; non si conosce la natura dei numeri e quindi si fa fatica a inserirli nel giusto insieme numerico. Molti scrivono «*Non ricordo cosa vogliono dire queste lettere*» oppure «*Ho risposto a caso perché non ricordo i nomi*». Ho riscontrato tanta confusione tra i ragazzi circa gli insiemi numerici e le motivazioni che hanno dato sono del tipo: «$\mathbb{Q}$ *numeri* >0*,* $\mathbb{R}$ *numeri reali e* $\mathbb{Z}$ *numeri fratti o radici*» oppure «*Nell'insieme* $\mathbb{Q}$ *ci sono i numeri radicali, quelli sotto la radice» o ancora «*$\mathbb{Z}$ *sono i numeri irrazionali*». Il 30.6% dei ragazzi è convinto che $\sqrt{2}$ non appartenga a $\mathbb{R}$ ma appartenga a $\mathbb{Q}$. Anche ragazzi che hanno risposto correttamente agli altri esercizi, in questo hanno totalizzato un gran numero di risposte errate e questo è indice del fatto che la confusione sugli insiemi numerici è generale. Per quanto riguarda le misconcezioni ipotizzate a priori, ovvero quelle che definiscono l'appartenenza di un numero a un dato insieme numerico in base alla scrittura del numero stesso, si sono riscontrate solo in 2 studenti (a mio avviso più persone hanno questa misconcezione, ma solo in due lo hanno dichiarato espressamente): dichiarano che $\sqrt{16} \in \mathbb{R}$ perché è una

radice e, analogamente, $\frac{10}{2} \in \mathbb{Q}$ perché è una frazione. In molti altri ragazzi invece vi è la convinzione che in $\mathbb{Z}$ ci siano solo numeri negativi, motivo per cui hanno risposto "falso" ai punti E, G.
In questo caso, i ragazzi oggetti dell'analisi verticale hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette maggiore rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale in alcuni punti (A, B, F) e una percentuale di risposte corrette minore in altri (C, D, E, G).

3.8 Quesito 8

Inserisci al posto dei puntini il numero che verifica l'uguaglianza e motiva la tua risposta:

$$11 - 6 = ... - 11.$$

Analisi della domanda
La risposta corretta è 16.
Tale quesito, ripreso da [7] e apparentemente molto semplice, mira ad analizzare la presenza o meno di misconcezioni "elementari" (elementari perché createsi probabilmente nella scuola primaria o nella scuola secondaria di primo grado) circa il simbolo di uguale e circa le operazioni di addizione e sottrazione. Queste ultime misconcezioni sono state presentate nella Sottosezione 2.1.3 e nascono dalla non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo di un concetto Matematico; le operazioni di addizione e sottrazione, entrambe presenti in questo quesito, in maniera esplicita ed implicita, ne sono un esempio. Numerose inoltre sono le ricerche sul significato generalmente attribuito al segno "=", che viene interpretato (anche da molti ragazzi di scuola superiore) come comando di esecuzione di operazioni: bambini più piccoli, davanti ad espressioni quali "$4 + 5 = 3 + 6$" reagiscono dicendo che dopo il segno "=" ci dev'essere la risposta (il risultato) e non un altro problema, motivo per cui molti studenti potrebbero essere tentati ad inserire nello spazio bianco il numero 5, risultato della prima sottrazione, facendo perdere di

senso la presenza del -11. Un ulteriore motivo di errore potrebbe essere la risoluzione "per simmetria": molti studenti potrebbero essere portati a scrivere nello spazio mancante 6 pensando semplicemente di poter "rigirare" la prima operazione ponendola a sinistra dell'uguale.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si ha avuto la totalità delle risposte corrette (si veda la Figura 3.15): tutti gli studenti hanno dimostrato di non presentare misconcezioni circa il simbolo di uguale e circa le operazioni di addizione e sottrazione: per questo motivo mi aspetto di ottenere lo stesso risultato durante la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta.

Analisi verticale

In Figura 3.15 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

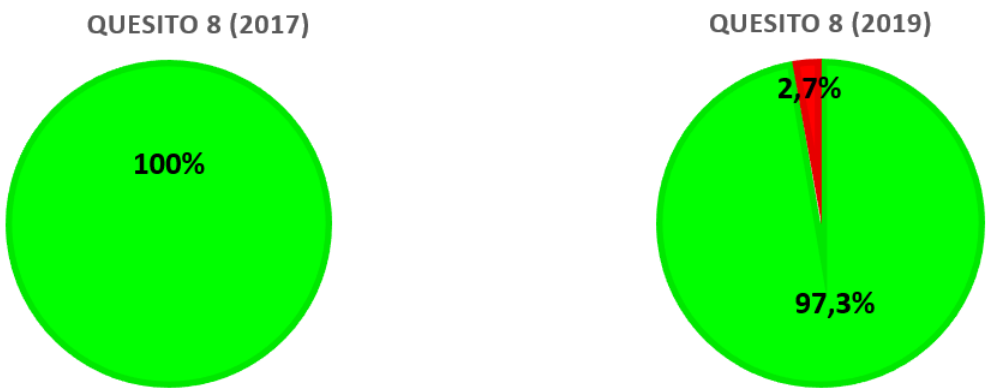


Figura 3.15

Nei risultati delle quarte vi è una sola risposta errata, frutto -a mio parere- di distrazione e non di misconcezioni (la risposta data è 26 anziché 16). Abbiamo così la conferma che gli studenti in questione non sono vittime di misconcezioni legate al simbolo di uguale né alle operazioni di addizione e sottrazione.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.16.

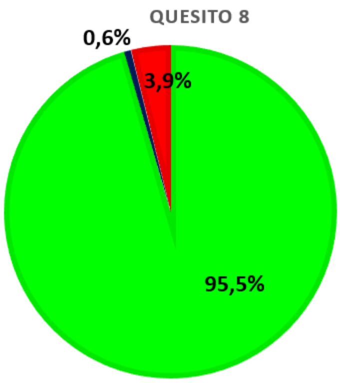


Figura 3.16

I risultati di questa domanda sono stati molto buoni, in quanto si ha avuto la quasi totalità di risposte corrette. Risulta però particolarmente interessante il compito di un ragazzo il quale completa gli spazi vuoti con il numero 5. Tale risposta era stata ipotizzata a priori come risultato della misconcezione legata al simbolo di uguale. Nell'1.3% dei casi si ha avuta la misconcezione denominata "della simmetria", a causa della quale è stato inserito nello spazio vuoto il numero 6. Questi risultati mi hanno sorpreso molto in quanto non pensavo di trovare nelle quarte simili misconcezioni.

Analogamente a quanto accaduto nella maggior parte dei quesiti precedenti, i ragazzi oggetto dell'analisi verticale hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette lievemente maggiore rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale.

3.9 Quesito 9

Siano a, b numeri reali. Indica se le seguenti identità sono vere per qualunque valore delle lettere eventualmente presenti:

A) $|-5| = 5$ ..... B) $|-a| = a$ ..... C) $|-a^2| = a^2$ .....

D) $|a^2| = a^2$ ..... E) $|a| = a$ ..... F) $|2| = 2$ .....

G) $|a-b| = |a+b|$ ..... H) $|a+b| = a+b$ ..... I) $|a| = \pm a$ .....

Analisi della domanda
Le risposte corrette sono:
A)vero; B)falso; C)vero; D)vero; E)falso; F)vero; G)falso; H)falso; I)falso.

Obbiettivo di questo quesito è verificare l'acquisizione delle competenze da parte degli studenti del concetto matematico "valore assoluto"; ostacoli alla sua buona riuscita sono: la concezione del valore assoluto come "cambiatore di segno" e la misconcezione molto forte e diffusa, e riportata a pag. 30, secondo cui "un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica comprare il segno "$-$" (per cui $-a$ è sempre negativo qualsiasi sia il valore di a). Quest'ultima concezione ha delle conseguenze molto gravi nei ragazzi, quali: la confusione tra area e integrali; il fatto che $\log(-x)$ non è mai definito; la convinzione che un punto generico del terzo quadrante sia $(-x; -y)$ con $x, y \in \mathbb{R}$.

Ipotesi di ricerca

Durante la sperimentazione nelle classi seconde avvenuta nell'ottobre del 2017 si hanno avuti i seguenti risultati: le risposte corrette sono state per A 33, per B 7, per C 33, per D 35, per E 7, per F 36, per G 34, per H 14, per I 28, su un totale di 40 alunni (si veda la Figura 3.17). Moltissimi studenti presentano misconcezioni legate alla relazione numero negativo-presenza del segno meno (si veda i risultati alle risposte B,E) e alla considerazione del valore assoluto come "cambiatore di segno" o, peggio, come "operatore che riscrive il numero senza segno".

Per la sperimentazione sugli stessi studenti che ora si trovano in quarta mi aspetto un aumento nelle percentuali di risposte corrette in quanto, nel corso del secondo biennio, hanno approfondito lo studio delle funzioni, come si evince dal loro programma di terzo in cui vi è una voce per "studio di funzioni definite per casi" e come viene richiesto dalle Indicazioni Nazionali: "[...] lo studente approfondirà lo studio delle funzioni elementari dell'analisi [...] sarà in grado di analizzare sia graficamente che analiticamente le principali funzioni e saprà operare su funzioni composte e inverse". [20]

Analisi verticale

In Figura 3.17 sono affiancati i risultati ottenuti nel 2017 e quelli attuali.

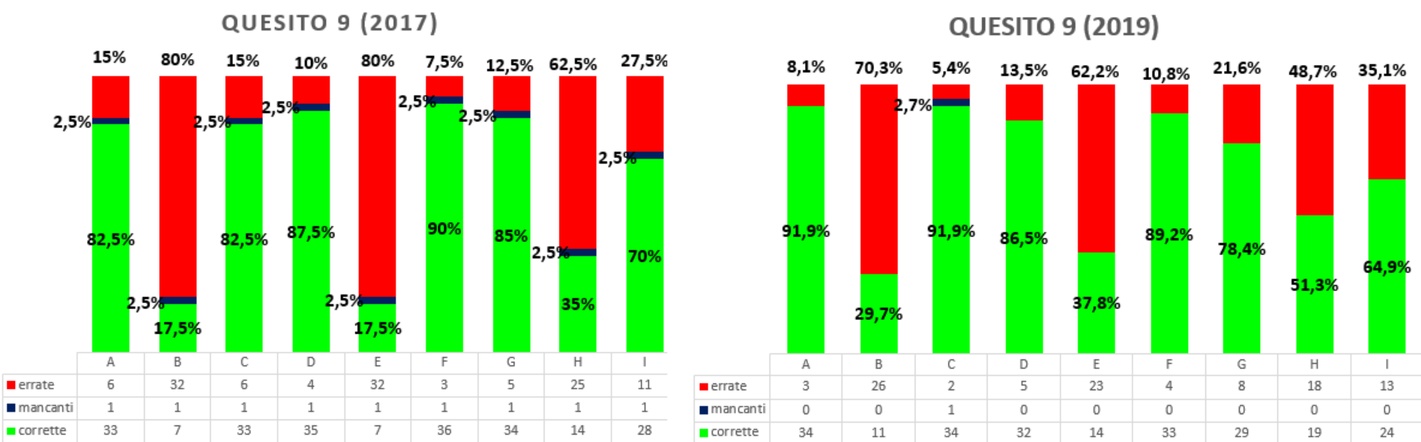
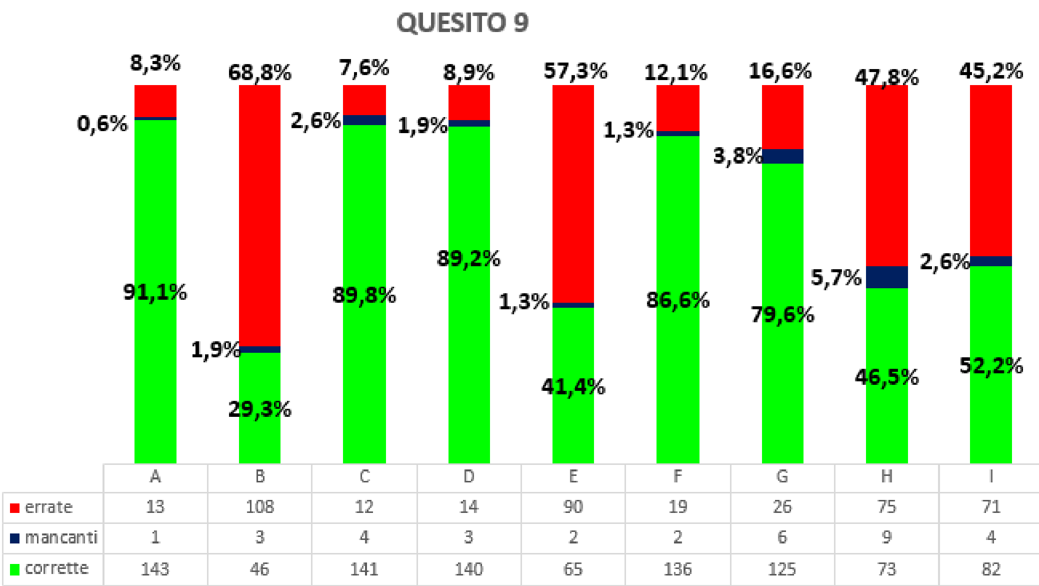


Figura 3.17

L'andamento delle risposte ha subito un cambiamento globale a distanza di due anni: c'è stato un sostanzioso miglioramento per alcune domande (A,B,C,E,H), un lieve peggioramento per altre (D, F) e un netto peggioramento per le restanti (G, I). In generale è presente una confusione circa il valore assoluto: per il 37.8% di studenti il valore assoluto è un "qualcosa" dopo il quale non può assolutamente esserci il segno "-". Questo è il motivo per cui hanno risposto "falso" all'ultima domanda: non perché il valore assoluto non può assumere contemporaneamente due valori, ma perché dopo l'uguale non può esserci "-a", indipendentemente dal segno di a; Per il 16.2% di ragazzi invece il valore assoluto "rende sempre positivo" e questa convinzione li ha portati a rispondere "vero" alle domande B,C,D,E,F,H, a volte con esito positivo, altre volte con esito negativo. In due casi queste due credenze erano presenti contemporaneamente nello stesso studente, mentre per la maggior parte dei casi un singolo studente possedeva l'una o l'altra convinzione.

Analisi orizzontale

I risultati ottenuti sono riportati in Figura 3.18



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
errate	13	108	12	14	90	19	26	75	71
mancanti	1	3	4	3	2	2	6	9	4
corrette	143	46	141	140	65	136	125	73	82

Figura 3.18

Tale quesito ha avuto un buon numero di risposte corrette nei punti A,C,D,F,G e un basso numero di risposte corrette nei punti B,E,H; questo perché il valore assoluto ha fatto emergere tutta la criticità del proprio significato. Gli studenti si sono divisi in tre gruppi: chi pensa che dopo il valore assoluto non ci possa essere mai il segno meno (il 24.8% dei ragazzi), chi pensa che il valore assoluto sia qualcosa che "rende positivo" qualsiasi cosa sia posta al suo interno (il 22.9% dei ragazzi) e chi invece pensa che il valore assoluto sia un operatore che riscrive il numero senza segno (il 9.5% dei ragazzi); è importante specificare che questi insiemi non hanno intersezione vuota: ci sono ragazzi che appartengono a due o a tutti i gruppi contemporaneamente. Come accaduto nell'analisi verticale, più di qualcuno ha risposto "falso" al punto I non perché il valore assoluto non può assumere due valori contemporaneamente, ma perché dopo il valore assoluto non può esserci il segno -, come specificato da un ragazzo «*Essendoci il valore assoluto il numero risultante deve essere per forza positivo, non con il* $\pm$ *e neanche con il -*» oppure «$|a| = \pm a$ *è falsa perché deve essere sempre positivo; è corretto dire* $|\pm a| = a$», facendo emergere la convinzione che porta a ritenere un numero negativo se e solo se nella sua scrittura compare il segno -. Per chi credeva che invece il valore assoluto "renda positivo" è stato naturale rispondere "vero" ai punti A,B,C portando a volte alla risposta giusta (A,C) ma anche alla risposta sbagliata (B). Il punto E ha avuto molte risposte errate in quanto la maggior parte degli studenti ha ritenuto a positivo (proprio per l'assenza del segno -) e quindi in molti hanno risposto "vero" per questo motivo.

Per questo quesito non ci sono state differenze sostanziali tra le percentuali di risposte corrette ottenute dai ragazzi oggetto dell'analisi verticale e quelle ottenute dai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale, fatta eccezione per il punto I a cui i ragazzi dell'analisi verticale hanno risposto in modo corretto con una percentuale di quasi 13 punti più alta rispetto ai compagni dell'analisi orizzontale.

3.10 Considerazioni generali

Per quanto riguarda l'analisi verticale, in generale si sono ottenuti buoni risultati: si ha avuto complessivamente un miglioramento dei risultati a distanza di due anni, indice di una maturazione e crescita avvenuta negli studenti che li ha portati a superare alcune delle misconcezioni che manifestavano nella classe seconda. Tali misconcezioni non sono però sparite del tutto (si vedano i risultati dei quesiti 2,3,4,5) e, in più, si è aggiunta la confusione generale circa gli insiemi numerici che, ammetto, mi ha stupita parecchio.
Un'ulteriore nota positiva di questa sperimentazione sta nel fatto che, come si può vedere dall'analisi della maggior parte dei quesiti, i ragazzi oggetto dell'analisi verticale hanno ottenuto una percentuale di risposte corrette genericamente maggiore rispetto ai ragazzi oggetto dell'analisi orizzontale: gli studenti che avevano già risposto al questionario nel 2017 hanno raggiunto un risultato migliore rispetto ai ragazzi che hanno visto il questionario per la prima volta quest'anno. Tale risultato è molto importante perché indica un miglioramento nel tempo dovuto anche all'esplicitazione di alcune misconcezioni: i ragazzi sbagliano meno se sanno quali sono i propri errori.
Per quanto riguarda l'analisi orizzontale, il questionario è risultato molto utile in quanto dall'analisi delle risposte date sono emerse molte misconcezioni e molte difficoltà che gli alunni non hanno superato nel corso degli anni: tale sperimentazione non vuole assolutamente avere l'obbiettivo di "svalutare" i ragazzi; al contrario, spero che serva a mettere in luce le loro criticità così da migliorarle e rendere i ragazzi più preparati.
Non è detto inoltre che il lavoro che si può fare con i ragazzi sia finito: si possono organizzare delle attività di dialogo in classe in cui si discute in libertà circa le misconcezioni presenti nei singoli ragazzi o anche nuove misconcezioni, di cui si possono trovare numerosi esempi nel Capitolo 2 della presente tesi.
Sono fermamente convinta che un lavoro di esplicitazione, il più sincero possibile da parte dell'insegnante, delle misconcezioni e delle difficoltà che molti argomenti matematici nascondono, sia il primo passo verso un apprendimento più trasparente della Matematica.

Capitolo 4

Il punto di vista dei docenti

In questo capitolo presento un questionario rivolto ai docenti degli alunni oggetto dell'analisi verticale e orizzontale descritta nel Capitolo 3. Il fine di questo questionario è quello di dar voce agli insegnanti per scoprire le loro opinioni sulle misconcezioni e sulla loro presenza in classe.

Per completare il lavoro teorico effettuato sulle misconcezioni e per affiancare l'analisi dei questionari somministrati alle classi quarte durante la sperimentazione, mi è sembrato utile e interessante intervistare i docenti a riguardo. Chi meglio di loro potrebbe esprimere giudizi, opinioni e idee sulle misconcezioni e su come queste andrebbero gestite in aula? I docenti passano gran parte del loro tempo in classe con i propri alunni, giorno dopo giorno mettono in pratica quel delicatissimo processo di insegnamento-apprendimento della Matematica che li porta a doversi confrontare con situazioni sempre nuove: nel Capitolo 1 abbiamo visto come l'apprendimento della Matematica non sia niente affatto lineare e che moltissimi fattori influenzano tale processo. A fronte di ciò, ho pensato che i docenti, con la loro esperienza, avrebbero potuto dare dei consigli utili o per lo meno far emergere dei punti di vista che non erano stati presi in considerazione.
Coerentemente con la sperimentazione nella scuola secondaria di II grado, ho deciso di intervistare i docenti dei ragazzi a cui è stato somministrato il questionario

analizzato nel Capitolo 3. L'intervista non è stata svolta di persona ma attraverso un Modulo Google: ho preparato un questionario semi-strutturato, composto cioè da un certo numero di domande uguali per tutti con risposte predefinite e di altre domande specifiche che lasciavano libertà di risposta, e poi l'ho inviato in privato via e-mail ad ogni docente richiamando il link che li avrebbe portati direttamente al questionario.
Il questionario è stato inviato a 12 docenti in tutto, dei quali solamente 6 hanno deciso di partecipare rispondendo. Anche in questo caso le risposte sono state raccolte in forma anonima: quello che mi interessava erano le idee dei docenti, non da chi provenissero né tantomeno la mia intenzione era quella di collegare le risposte dei singoli docenti con l'andamento dei questionari dei rispettivi studenti.
Il questionario si compone di due parti: la prima, che ho chiamato *Anagrafica*, indaga le esperienze lavorative passate dei docenti, mentre la seconda, che ho chiamato *Errori sistematici*, è il cuore del questionario. Di seguito presenterò le domande poste ai docenti nella seconda parte e, per ognuna di esse, riporterò le risposte che ho ritenuto essere più interessanti.

1) "La moltiplicazione accresce sempre" o, equivalentemente, "il prodotto di due numeri è sempre maggiore di entrambi i fattori" o ancora "il prodotto di due numeri è sempre maggiore del loro quoziente".

1a) Le è mai capitato di incontrare tale errore sistematico nei suoi studenti?
Il 33.3% dei docenti ha risposto "sì", mentre il restante 66.7% ha risposto "no".

1b) Con quale frequenza in una scala da 1 a 10?
Il 33.3% ha risposto "1", mentre il 16.7% ha risposto "2", "3", "4" e "7".

1c) In che grado scolastico li ha rilevati?
Le risposte sono state: *Biennio*, *Terzo liceo* e *Scuola secondaria di II grado*.

1d) Secondo lei qual è il motivo principale che porta gli studenti a commettere tale errore?

Tra le risposte più interessanti ci sono:

-La moltiplicazione viene intesa ancora come una "somma ripetuta", cosa valida solo quando uno dei fattori è un numero naturale.

-Ragionare sin dai primi cicli di istruzione solo con i numeri naturali.

-Proiezione in contesto improprio del contenuto esperenziale ingenuo preadolescenziale relativo ai soli numeri naturali.

Tali risposte sono in accordo con quanto ipotizzato a priori dell'analisi effettuata con i ragazzi e confermano i risultati ottenuti, analizzati nella Sezione 3.1.
Una risposta interessante in altro senso è la seguente:

Errata conoscenza.

che sembra aderire all'identificazione errore-mancata conoscenza, simile all'identificazione errore-difficoltà di cui si è parlato nella Sottosezione 1.3.1, secondo la quale se in un esercizio ci sono errori, allora l'alunno in questione si trova in difficoltà, dovuta probabilmente ad un'errata conoscenza del tema di cui si sta parlando. In poche parole: il ragazzo sbaglia perché non studia abbastanza.

2) "Il successivo di 0.2 è 0.3 e il successivo di 2/5 è 3/5 perché 3 è il successivo di 2."

2a) Le è mai capitato di incontrare tale errore sistematico nei suoi studenti?
Il 16.7% dei docenti ha risposto "sì", mentre il restante 83.3% ha risposto "no".

2b) Con quale frequenza in una scala da 1 a 10?
L' 83.3% ha risposto "1", mentre il 16.7% ha risposto "3".

2c) In che grado scolastico li ha rilevati?
L'unica risposta è stata *Mai.*

2d) Secondo lei qual è il motivo principale che porta gli studenti a commettere tale errore?
Tra le risposte più interessanti ci sono:

-*Una errata estensione del concetto di "successivo", dalle cifre che compaiono nella scrittura dei numeri ai numeri stessi.*

-*Stesso motivo dell'errore precedente. L'insieme dei numeri naturali, il primo con cui gli alunni hanno contatto, crea concrezioni concettuali e operative che sono particolarmente dure da scalfire negli anni successivi.*

Come prima, queste risposte sembrano essere in accordo con quanto visto nella Sottosezione 2.1.5. Di diversa filosofia sembrano essere le due seguenti risposte:

-*Non conoscenza delle proprietà dei numeri reali.*

-*Non conoscere le caratteristiche del campo dei numeri razionali (densità di* $\mathbb{Q}$*).*

dalle quali, come prima, emerge chiaramente l'identificazione errore-mancata conoscenza.

3) "4+5=3+6 non ha senso: dopo il simbolo di = ci deve essere un numero (il risultato), non un'altra operazione." In altre parole: "Il sim-

bolo di uguale è solamente un comando di esecuzione di operazioni e non una relazione d'equivalenza."

3a) Le è mai capitato di incontrare tale errore sistematico nei suoi studenti?
Il 33.3% dei docenti ha risposto "sì", mentre il restante 66.7% ha risposto "no".

3b) Con quale frequenza in una scala da 1 a 10?
L' 83.3% ha risposto "1", mentre il 16.7% ha risposto "3".

3c) In che grado scolastico li ha rilevati?
L'unica risposta è stata *Mai.*

3d) Secondo lei qual è il motivo principale che porta gli studenti a commettere tale errore?
Tra le risposte più interessanti ci sono:

-*Sembra un errore da istituto tecnico industriale. Nella programmazione con linguaggi di alto livello esiste una distinzione netta tra uguaglianza (tipicamente inserita in un enunciato logicamente consistente) e assegnazione, distinzione rimarcata dall'uso di differenti marcatori simbolici. Essa è evidentemente presente in modo inconscio (e crea un ostacolo semantico rilevante) anche al di fuori di un contesto informatico, determinata dalla convinzione che un "right operand" di un'uguaglianza non possa essere a sua volta equipollente ad un "left operand".*

-*L'uso esteso del simbolo = in esercizi di calcolo, come "$4 + 5 = \dots$", che enfatizzano l'uso operazionale e mettono in ombra quello relazionale. Inoltre tale abitudine è rinforzata dall'uso quotidiano della calcolatrice, il cui tasto "=" significa proprio "esegui il calcolo introdotto"*

le quali sembrano essere d'accordo con quanto detto circa il segno di uguale nella Sezione 3.8. C'è stato invece qualcuno che è sembrato essere più in accordo con la convinzione secondo la quale gli studenti commettono errori perché svolgono gli esercizi in maniera meccanica, senza rifletterci troppo, come si evince dalla seguente risposta:

-Abitudine ad eseguire i calcoli senza ragionarci.

4) Oltre a quelli presentati sopra, le vengono in mente altri errori sistematici commessi dai suoi studenti? Se sì, ne elenchi i principali.

Tra le risposte più interessanti ci sono:

- *Ne elenco quattro:*
  1*) Non rispettare la precedenza delle operazioni. Es.* $5 + 2 \times 3 = 21$.
  2*) Non cambiare il verso di una disequazione quando entrambi i membri vengono moltiplicati per un numero negativo, o non discuterla se viene divisa per una quantità che può assumere valori negativi. Es.* $\sin x > \cos x \rightarrow \tan x > 1$.
  3*) Commutare somma e reciproco:* $\frac{1}{(a+b)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.
  4*) Dimenticare il doppio prodotto nel quadrato del binomio* $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.

- *Risoluzione di equazioni e disequazioni del tipo* $x^2 + 1 = 0$.
  In generale risoluzione di disequazioni con discriminante minore o uguale a zero.

5) Nel rispondere alle seguenti domande faccia riferimento ad uno o più errori sistematici tra quelli elencati sopra o da lei richiamati nella domanda precedente. Secondo lei, esistono strategie didattiche che evitano e limitano gli errori sistematici negli studenti? Se sì, quali?

Tutti i docenti hanno risposto "sì" alla prima domanda, ovvero tutti credono che esistano delle strategie didattiche per evitare e limitare gli errori sistematici; quando poi le hanno elencate, ci sono state le seguenti risposte:

- *Esporre frequentemente dei chiari e memorabili controesempi agli errori, per far fare "esperienza" all'alunno, in modo che non solo eviti quei particolari errori, ma impari strategie per controllare ciò che ha scritto, andando sempre al di là del formalismo delle espressioni. (Per esempio, far notare che sostituendo* $a = 1$ *e* $b = 1$*, l'uguaglianza* $\frac{1}{(a+b)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ *diventa* $\frac{1}{2} = 2$*). Oppure presentare interpretazioni grafiche o geometriche (per es. il quadrato del binomio si può vedere come l'area di un quadrato di lato* $a + b$*, che si scompone in due quadrati di area* a^2 *e* b^2*, e due rettangoli di area ab...)*

- *Elaborazione di attività (auto)correttive con partecipazione diretta degli studenti contenendo al massimo, soprattutto nel caso di alunni che non abbiano raggiunto la maggiore età, l'impiego di indicatori di gravità (cromatici, ad esempio) nella localizzazione dell'errore.*

- *Risoluzione di esercizi dal punto di vista concettuale e non mnemonico e procedurale.*

Queste tre risposte sono, a mio avviso, molto interessanti, perché ognuna di esse rimanda ad un particolare argomento trattato in questa tesi: la prima riprende l'importanza dell'esplicitazione degli errori da parte del docente e sembra essere pienamente d'accordo con il pensiero di Fischbein, riportato a pag. 25, nel quale invita i docenti a discutere con i propri studenti sugli errori da loro commessi al fine di far sviluppare in loro la capacità di analizzare le proprie supposizioni implicite; la seconda sembra sottolineare l'importanza di non estendere il giudizio del docente dall'elaborato alla persona in quanto, così facendo, si potrebbero alimentare delle convinzioni sulla Matematica e sulla scuola in generale, analizzate nella Sottosezione 1.3.2, che non giovano né all'alunno né all'insegnante. Sottolinea inoltre l'importanza di far partecipare attivamente gli studenti all'attività autocorrettiva, in accordo col pensiero di Fischbein sopra enunciato. L'ultima risposta, infine, tenta di eliminare quel *compromesso delle risposte corrette*, di cui si parla nella Sottosezione 1.3.1, che privilegia attività di tipo riproduttivo ad attività di tipo produttivo.

6) Nel caso i suoi alunni commettano errori sistematici, quali strategie adotta per il recupero?

Le risposte ricevute sono state:

- *Sportelli.*
- *Risoluzione di esercizi dal punto di vista concettuale e non mnemonico e procedurale.*
- *Se gli errori sono sistematici di solito comincio a far vedere la fonte dell'errore nel caso particolare in cui si è presentato, facendo però riflettere l'alunno sull'origine più remota dell'errore. Purtroppo però bisognerebbe riproporre situazioni varie in cui l'errore può ripresentarsi, e questo è un po' difficile perché, soprattutto nel triennio, l'attenzione deve rivolgersi frequentemente ad argomenti nuovi, dando (erroneamente) per scontato che certi errori "si correggono da sé" o siano dovuti solo a distrazione.*

Quest'ultima risposta mi sembra particolarmente interessante in quanto il docente in questione inizialmente tenta con un approccio "locale", per poi ampliare il suo campo d'azione cercando di giungere "all'origine più remota dell'errore". Inoltre viene sottolineata l'abitudine (sbagliata) da parte di molti a credere che alcuni errori si correggano da soli o che siano solamente il frutto di distrazione.

Come si evince dalle risposte date dai docenti, questi si dividono in due categorie: chi abbraccia una visione della Matematica più "didattica" in cui si pone attenzione al processo di insegnamento-apprendimento dando valore all'errore come un qualcosa di cui ricercarne le cause per migliorare il proprio lavoro e per facilitare l'apprendimento della materia ai propri alunni, e chi, invece, manifesta un approccio più "tradizionale" nel quale vige l'identificazione errore-mancata conoscenza per cui gli errori sono il frutto di distrazione o di non conoscenza dell'argomento, e mai frutto di misconcezioni o di altre problematiche legate all'alunno. Questa varietà tra le risposte, e quindi tra gli approcci, dimostra come la ricerca in Didattica della Matematica (e, come conseguenza, lo svecchiamento di molte convinzioni) sia di fondamentale importanza per la pratica d'aula: avere un quadro teorico di base in cui collocare le diverse situazioni che ogni giorno si presentano in classe può aiutare docenti e allievi a svolgere meglio il proprio lavoro.

Conclusioni

Alla luce di quanto esposto nei capitoli precedenti, concludo l'elaborato sottolineando come le misconcezioni non siano solamente materiale teorico di ricerca in Didattica della Matematica, ma siano soprattutto presenti all'interno delle classi d'aula e, per questo, da tenere in forte considerazione durante il processo di insegnamento-apprendimento.
Nel Capitolo 1 è stato infatti affrontato il tema della nascita ed evoluzione delle misconcezioni all'interno della ricerca in Didattica della Matematica; questo studio ha poi trovato seguito nel Capitolo 2, in cui sono stati presentati numerosi esempi di misconcezioni scelte tra le più studiate in letteratura a fronte di un'attenta analisi dei processi che ne hanno causato la formazione. Nei Capitoli 3 e 4 è stata presentata una verifica sperimentale di quanto detto, a livello teorico, nelle pagine precedenti: la sperimentazione in classe, (pag. 71), ha portato infatti alla luce quanto le misconcezioni siano presenti nelle classe d'aula a tutti i livelli scolastici; l'intervista rivolta ai docenti, (pag. 109), ha invece svelato le opinioni, a volte contrastanti, degli insegnanti, coloro che mettono in atto, giorno dopo giorno, il processo di insegnamento-apprendimento della Matematica di cui si è molto parlato.
Le sperimentazioni presenti in questa tesi sono entrambe importantissime perché ci inducono a riflettere su molte questioni: il fatto che la maggior parte delle ipotesi di ricerca presentate nel Capitolo 3 e delle idee dei docenti emerse dal questionario del Capitolo 4 siano state confermate dall'analisi dei dati, ci induce a pensare che, nel momento in cui un argomento Matematico viene trattato in classe, si possa attuare una trasposizione didattica volta a limitare e contenere l'insorgere

di misconcezioni "pericolose" per gli studenti. Il docente dovrebbe quindi tenere in considerazione, nella pratica d'aula, la vasta letteratura che c'è sul tema delle Misconcezioni al fine di migliorare l'apprendimento della Matematica dei propri alunni.
Nel Capitolo 4, infine, si è potuto vedere come i docenti, con le proprie idee, ripercorrano in parte l'evoluzione storica in Didattica della Matematica del ruolo e della considerazione delle misconcezioni: molti di loro sono ancora attaccati all'idea iniziale di misconcezione, così come è stata presentata ad inizio Sezione 1.1, mentre altri abbracciano idee più in linea con la teoria costruttivista, secondo le quali le misconcezioni sono non solo utili all'apprendimento, ma addirittura necessarie, così come spiegato lungo tutto il corso del Capitolo 1.

Come appurato, le misconcezioni sono presenti in (quasi) tutti gli alunni, in diversa misura e sotto forme diverse e, in ogni classe di ogni livello scolare, se ne possono trovare diverse. La loro costante presenza è stata uno dei motivi che mi ha spinta a scegliere le misconcezioni come tema della mia tesi; io stessa, come studentessa, ne sono stata vittima, e a volte lo sono tutt'ora: mi rendo conto di quanto le misconcezioni, i modelli intuitivi primitivi e le convinzioni errate si facciano strada all'interno dei processi di ragionamento nella risoluzione di problemi Matematici e di come la loro influenza sia costante nel tempo e sempre presente.
Da (spero) futura insegnante credo sia importante sottolineare l'importanza delle misconcezioni, studiarne la natura, capirne le cause e le conseguenze per cercare di rendere lo studio della Matematica più accessibile a tutti e, perché no, addirittura piacevole.

Mi piacerebbe concludere l'elaborato con una frase di Enriquez, ripresa da [13, pag. 15], che racchiude l'importanza di stabilire un rapporto di sincerità e trasparenza tra docente e allievo: affinché un ragazzo apprenda davvero un concetto Matematico, è necessario che il docente lo accompagni lungo tutto il percorso di apprendimento, sentendo e vivendo insieme a lui la difficoltà che lo caratterizza.

Confessiamo francamente che il compito che ci è proposto è tremendamente, stavo per dire divinamente, difficile. Infatti se il nostro pensiero e la nostra parola debbono muovere l'attività del discepolo, bisogna che qualcosa di vivo che è in noi passi nello spirito di lui, come scintilla di fuoco ad accendere altro fuoco. Ma per ciò occorre dunque che anche noi maestri -nell'atto di insegnare- ripetiamo, non già il resultato freddo degli studi fatti, bensì il travaglio interiore per cui riuscimmo a conquistare la verità, ricreandone dunque la fatica nello spirito nostro, che si allarga e trascina insieme la scuola. Vorrei bene spiegarmi su questo punto: la fatica di cui parlo è reale, non finzione ad uso didattico; infatti non è possibile che ripensiamo una difficoltà che una volta abbiamo vinto, senza scoprire nello stesso problema qualche altra difficoltà, che si risolve in una comprensione nuova e più alta; [...] perché infine codesto possesso medesimo è dubbio e vano, ridicolo l'orgoglio, se di fronte al discepolo ci presentiamo soltanto come discepoli, a ripetere un po' più meccanicamente la vecchia lezione appresa sugli stessi banchi, anziché come maestri, a recare una veduta nostra, più chiara e più larga.

Appendice A: Il questionario

Di seguito si riporta il questionario così come è stato somministrato agli studenti.

QUESTIONARIO

numero:

DATA:
SCUOLA E CLASSE:

Rispondi alle seguenti domande, **motivando sempre la tua risposta.**

1. Senza svolgere calcoli, indica quale delle seguenti operazioni dà risultato maggiore e perché:

$$179 \cdot 0.257 \quad \text{oppure} \quad 179 : 0.257.$$

2. Se $a > b > 0$ allora è vero che per ogni $t \in \mathbb{R}$, $a^t > b^t$?

3. È vero che se la distanza di $x \in \mathbb{R}$ da 0 è inferiore alla distanza di $y \in \mathbb{R}$ da 0, allora $x < y$?

4. Siano x, a numeri reali. Completa gli spazi con:
   $<$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;

   $>$ quando sicuramente vale tale disuguaglianza;

   ? quando i dati a disposizione non permettono di stabilire la disuguaglianza e in questo caso spiega il perché.

$$2 + a \;\ldots\ldots\ldots\; 3 + a$$

$$\frac{7}{2} \ldots\ldots\ldots \frac{7}{3}$$

$$-7(a^2 + 1) \;\ldots\ldots\ldots\; -5(a^2 + 1)$$

$$x(2 + a) \;\ldots\ldots\ldots\; 2x$$

$$\frac{7}{3}x \;\ldots\ldots\ldots \frac{7}{2}x.$$

5. Indica con SÌ se i seguenti numeri sono posti in ordine strettamente crescente oppure con un NO se non lo sono, indicando poi l'ordine corretto.

   1.3//1.2//1.35 ....

   $\frac{1}{4}//\frac{1}{3}//\frac{1}{2}$ ....

   $\frac{1}{3}//\frac{1}{12}//\frac{3}{12}$ ....

   1.10//1.55//1.90 ....

6. Nell'insieme dei numeri reali, è vero che la cardinalità dell'intervallo $[0, 100]$ è uguale alla cardinalità dell'intervallo $[0, 1]$?

7. Indica se le seguenti affermazioni sono VERE o FALSE:

   $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$ ...... $-0.5 \in \mathbb{Q}$ ......

   $\sqrt{16} \in \mathbb{Q}$ ...... $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ ......

   $0.5 \in \mathbb{Z}$ ...... $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ...... $\frac{10}{2} \in \mathbb{Z}$ ......

8. Inserisci al posto dei puntini il numero che verifica l'uguaglianza:

$$11 - 6 = \ldots\ldots - 11.$$

9. Siano a, b numeri reali. Indica se le seguenti identità sono vere per qualunque valore delle lettere eventualmente presenti:

$$|-5| = 5 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |-a| = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |-a^2| = a^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|a^2| = a^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |a| = a \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |2| = 2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|a-b| = |a+b| \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |a+b| = a+b \;\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad |a| = \pm a \;\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Appendice B: L'analisi qualitativa

Scopo di questa breve appendice è quello di delineare le caratteristiche dell'analisi qualitativa per distinguerla da quella quantitativa; di seguito verranno esposte le caratteristiche principali di entrambi i tipi di ricerca per poi vedere come queste possano comunicare tra loro in un tipo di ricerca mista. Le informazioni che verranno riportate nel seguito sono state prese da [18].

La parola *qualitativo* presuppone una particolare attenzione alle qualità degli enti, delle relazioni o dei fenomeni presi in esame, piuttosto che alle loro quantità, misure o frequenze; ai significati o ai sensi che le persone attribuiscono ai fenomeni, alle situazioni o alle loro esperienze, piuttosto che alle relazioni causali tra le variabili che vengono identificate e misurate.
Pur assumendo significati differenti in contesti storici e culturali differenti, gli autori Denzin e Lincoln rilevano che la *ricerca qualitativa* può essere in generale definita come:

> *«Un'attività situata che posiziona il ricercatore nel mondo. Essa consiste di un insieme di pratiche materiali, interpretative che rendono il mondo visibile. Queste pratiche trasformano il mondo. Esse lo mutano in una serie di rappresentazioni, che includono note sul campo, interviste, conversazioni, fotografie, registrazioni, appunti. A questo livello, la ricerca qualitativa richiede un approccio interpretativo e naturalistico del mondo. Questo significa che i ricercatori qualitativi studiano le cose nei loro ambienti naturali, cercando di dare senso a, o di interpretare, i fenomeni in termini dei significati che le persone danno a loro.»* [18,

pag. 93]

Storicamente, gli analisti hanno distinto tra contesti di ricerca sperimentale (laboratorio) e sul campo (naturale); da qui la tesi che la ricerca qualitativa sia naturalista. Successivamente, tale tesi è stata superata in quanto gli stessi autori, hanno rilevato che tutti gli ambienti sono naturali, cioè luoghi in cui si svolge l'esperienza quotidiana.
La ricerca qualitativa evidenzia in particolare la natura socialmente costruita della realtà, la stretta relazione tra il ricercatore e l'oggetto di studio, e i vincoli situazionali che modellano l'indagine. Essa prevede la raccolta di una molteplicità di materiali empirici: studi di caso, esperienze personali, interviste, artefatti, testi, produzioni culturali... Come affermano Denzin e Lincoln, riportato in [18, pag. 94]: *«I ricercatori qualitativi mettono in campo un'ampia gamma di pratiche interpretative interconnesse, sempre nella speranza di ottenere una migliore comprensione dell'argomento in esame. Si assume, comunque, che ciascuna pratica renda il mondo visibile in modo differente.»*
La scelta delle pratiche interpretative da impiegare non è necessariamente stabilita in anticipo; essa è strettamente legata non solo alle domande di ricerca, ma anche al contesto nel quale il ricercatore si trova ad operare, alle eventuali questioni che il contesto solleva e che il ricercatore si trova ad affrontare. Come a dire: la scelta delle pratiche di ricerca dipende dalle domande che vengono poste, e le domande dipendono dal loro contesto; a specificare che tutto è interconnesso e che nulla può essere osservato singolarmente.
Nonostante si possa scegliere in modo molto libero le pratiche interpretative, ci sono alcuni metodi di raccolta materiale più usati di altri; e questi sono: il questionario, l'intervista, il *focus group*[1], il test, l'osservazione e i dati secondari[2]. In

[1]Discussione tra un piccolo gruppo di persone, alla presenza di uno o più moderatori, focalizzata su un argomento che si vuole indagare in profondità. Il moderatore propone ai partecipanti degli "stimoli" da cui far scaturire la discussione.

[2]Sono dati che sono stati raccolti da un altro ricercatore per scopi o questioni di ricerca differenti.

particolare, il questionario (come l'intervista), a seconda delle domande di ricerca, può essere strutturato, semi-strutturato, o non strutturato:

- Il **questionario strutturato** prevede domande identiche per tutti i partecipanti e risposte per lo più precodificate o predefinite.

- Il **questionario semi-strutturato** si basa su un certo numero di domande identiche per tutti i partecipanti e su altre domande specifiche o personalizzate. In ogni caso, le domande sono formulate in modo da lasciare una certa libertà di risposta.

- Il **questionario non strutturato** prevede domande formulate in modo da permettere al partecipante di esprimersi liberamente su un determinato tema.

Quando possibile, è preferibile utilizzare più metodi al fine di fornire una conoscenza più approfondita, o meglio, rappresentazioni differenti, da prospettive differenti, del fenomeno in esame; inoltre, utilizzando diversi metodi qualitativi, si può migliorare la credibilità, trasferibilità, affidabilità e confermabilità dei risultati di ricerca.
La ricerca qualitativa non privilegia una pratica metodologica rispetto ad un'altra, non ha una teoria o un paradigma che la contraddistingua chiaramente e non ha neppure un insieme specifico di metodi o di pratiche che siano interamente pertinenti. Nonostante ciò, ci sono fattori contingenti e contestuali che giocano un ruolo rilevante nell'orientare l'attività di ricerca. Occorre distinguere, però, la metodologia dai metodi di ricerca: i **metodi di ricerca** sono particolari strumenti o tecniche di raccolta o di analisi dei dati, mentre la **metodologia** è una prospettiva teorica generale sulla ricerca, una teoria sui metodi, è l'insieme delle assunzioni teoriche che guidano il ricercatore nella formulazione delle domande di ricerca e nella scelta dei metodi. Si può concludere dicendo che la metodologia è un ponte che unisce il punto di vista filosofico del ricercatore ai metodi di ricerca.

Di altra natura è, invece, l'analisi quantitativa. Come dice la parola stessa, la ricerca quantitativa serve a quantificare, utilizza dati numerici o comunque dati

che possono poi essere facilmente trasformati in statistiche, e misura il comportamento, le opinioni, le attitudini di un campione di soggetti molto vasto; per parlare di "quantitativo" dobbiamo aver intervistato almeno 30 persone, ma in genere sono molti di più. La raccolta dati nella ricerca quantitativa è caratterizzata da un basso grado di interazione con l'intervistato con conseguente minor rischio di contaminazione dei dati da parte del ricercatore. Una caratteristica essenziale dell'analisi quantitativa è il formalismo delle procedure: la raccolta, il trattamento dei dati, l'impiego della matrice di dati e l'uso della statistica seguono dei protocolli definiti e facilmente replicabili. Questa elevata formalizzazione consente al ricercatore di rilevare e immagazzinare una gran quantità di informazioni con strumenti altamente standardizzati. Una volta raccolti i dati di ricerca, questi vengono presentati dal ricercatore attraverso tabelle e grafici, statistiche, analisi a confronto con i dati ottenuti e i dati degli anni passati e con le previsioni fatte a priori.
Seppure i due tipi di analisi appena viste (qualitativa e quantitativa) siano nelle modalità e negli obbiettivi estremamente differenti, non è detto che non possano collaborare al fine di rendere una sperimentazione completa sotto tutti i punti di vista creando così una ricerca di tipo misto. In particolare, ne esistono due diversi tipi:

- **Ricerca a modello misto**, nella quale si mescolano approcci qualitativi e quantitativi all'interno di una o più fasi o tra almeno due fasi del processo di ricerca.

- **Ricerca a metodo misto**, ovvero l'inclusione di una fase quantitativa e di una fase qualitativa, tra loro separate, nella ricerca nel suo complesso.

Particolarmente interessante risulta il primo tipo; un esempio di ricerca a modello misto tra le fasi è una ricerca di tipo esplorativo (con obbiettivi di tipo qualitativo) nella quale il ricercatore, dopo aver effettuato alcune interviste non strutturate o un focus group (per la raccolta di dati qualitativi), calcola le percentuali dei differenti tipi di risposta (analisi quantitativa dei dati). In tal caso, il mescolamento ha luogo tra le fasi del processo di ricerca, in particolare dalla raccolta dei dati

(qualitativi) all'analisi (quantitativa) dei dati.
Questo tipo di ricerca è proprio quello che è stato utilizzato per la sperimentazione in classe esposta a pag. 71: attraverso un questionario semi-strutturato sono stati raccolti su un campione molto vasto dati di tipo qualitativo (ricerca di argomentazioni ricorrenti, parole chiave...). Una volta raccolti i dati di ricerca, è stata effettuata su questi un'analisi di tipo quantitativo per calcolare le percentuali delle diverse risposte date e per confrontare queste percentuali con altre ottenute da una sperimentazione precedente.
Per quanto riguarda invece l'analisi dei questionari rivolti ai docenti esposta a pag. 109, il tipo di lavoro svolto è stato solo di tipo qualitativo: attraverso un questionario semi-strutturato si è voluto porre l'attenzione solamente alle relazioni, ai significati che i docenti attribuivano al fenomeno trattato (gli errori sistematici), alle loro esperienze, e non alle quantità dei dati raccolti (non è stato fatto alcun calcolo di percentuali, statistiche...).

Bibliografia

1. Ahwesh Ellen, Blais Jeffrey, Greene Terry R., Means Mary L., Voss James F.,
   Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals,
   In: Resnick Lauren B., *Knowing, learning and instruction: Essays in honor of Robert Glaser*,
   Lawrence Erlbaum, (1989).

2. Arrigo Gianfranco, D'amore Bruno, Sbaragli Silvia,
   Infiniti infiniti,
   In: Pratiche matematiche e didattiche in aula, Atti del Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica" n.23 Castel San Pietro Terme 6-7-8, novembre 2009.

3. Batanero Carmen, Diaz Godino Juan,
   Significado institucional y personal de los objectos matemáticos,
   Recherches en Didactique des Mathématiques, 14, 325-355, (1994).

4. Beccaglini-Frank Anna, Di Martino Pietro, Natalini Roberto, Rosolini Giuseppe,
   Didattica della Matematica,
   Mondadori, (2017).

5. Benincà Arianna,
   Probabilità e intuizione un'indagine nella scuola secondaria di primo grado,

Tesi di laurea magistrale in Matematica, 2018
https://amslaurea.unibo.it/18185/.

6. Bolondi Giorgio, Fandino Pinilla Marta I.,
I quaderni della didattica. Metodi e strumenti per l'insegnamento e l'apprendimento della Matematica,
Eedises, (2016).

7. Camici Cristina, Cini Annalisa, Cottino Luigina, Dal Corso Erminia, D'Amore Bruno, Ferrini Attilio, Francini Margherita, Maraldi Anna Maria, Michelini Carla, Nobis Giancarla, Ponti Adriana, Ricci Mirella, Stella Chiara,
Uguale: è un segno di relazione o un indicatore di procedura?,
L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, 25, 255-270, (2002).

8. D'Amore Bruno,
Concetti e oggetti in Matematica,
Rivista di Matematica dell'Univeristà di Parma, 3, 143-151, (2000).

9. D'Amore Bruno,
La ricerca in Didattica della Matematica come Epistemologia dell'apprendimento della Matematica,
Scuola & Città, 4, 56-82, (2002).

10. D'Amore Bruno, Fandino Pinilla Marta I.,
Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti,
In: D'Amore Bruno, Fandino Pinilla Marta I., Sbaragli Silvia, *Alcuni spunti di riflessione sulla didattica della Matematica*,
Bologna: Assessorato Istruzione, Formazione Lavoro, (2007).

11. D'Amore Bruno, Sbaragli Silvia,
Analisi semantica e didattica dell'idea di misconcezione,
La Matematica e la sua didattica, 2, 139-163, (2005).

12. diSessa Andrea,
Phenomenology and the evolution of intuition,
In: Gentner Dedre, Stevens Albert, *Mental models*,
Hillsdale, (1983).

13. Enriques Federigo,
Insegnamento dinamico,
Periodico di matematiche, 4, 6-16, (1921).

14. Fandino Pinilla Marta I.,
Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici,
Pitagora, (2005).

15. Fandino Pinilla Marta I.,
La problematica della trasposizione didattica in Didattica della Matematica: il "caso" emblematico delle frazioni,
In: D'Amore Bruno, Fandino Pinilla Marta I., Sbaragli Silvia, *Alcuni spunti di riflessione sulla didattica della Matematica*,
Bologna: Assessorato Istruzione, Formazione Lavoro, (2007).

16. Fischbein Efraim,
Modelli taciti e ragionamento matematico,
In: Fischbein Efraim, Vergnaud Gérard, *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*,
Pitagora, (1992).

17. Gamberi Chiara,
Misconcezioni in matematica: una sperimentazione nella scuola secondaria di secondo grado,
Tesi di laurea magistrale in Matematica, 2017
https://amslaurea.unibo.it/14701/

18. Iori Maura,
La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva

dell'apprendimento della matematica,
Tesi di dottorato in Matematica, 2015
http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Tesi20PhD20Maura20Iori.pdf

19. Kahneman Daniel, Tversky Amos,
On the study of statistical intuitions.
In: Kahneman Daniel, Slovic Paul, Tversky Amos, *Judgement under uncertainty: heuristics and biases*,
Cambridge University Press, (1982).

20. Ministero dell'Istruzione dell'Università e della Ricerca, Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento,
http://www.indicazioninazionali.it

21. Postman Nell, Weingartner Charles,
L'insegnamento come attività sovversiva,
La nuova Italia, (1974).

22. Radford Luis,
Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità,
La Matematica e la sua didattica, 1, 4-23, (2004).

23. Sbaragli Silvia,
Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili",
La Matematica e la sua didattica, 1, 57-71, (2005).

24. Sbaragli Silvia,
Convinzioni e cambi di convinzioni sull'infinito matematico,
In: D'Amore Bruno, Fandino Pinilla Marta I., Sbaragli Silvia, *Alcuni spunti di riflessione sulla didattica della Matematica*,
Bologna: Assessorato Istruzione, Formazione Lavoro, (2007).

25. Schoenfeld Alan Henry,
Mathematical problem solving,
Academic Press, (1985).

26. Shaughnessy J. Michael,
Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance,
In: Silver Edward A., *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*,
Lawrence, (1985).

27. Silver Edward A.,
Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions,
In: Silver Edward A., *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives*,
Lawrence, (1985).

28. Wagner Sigrid,
Conservation of Equation and Function under Transformations of Variable,
Journal for Research in Mathematics Education, 2, 107-118, (1981).

29. Zan Rosetta,
Problemi e convinzioni,
Pitagora Editrice, (1998).

30. Zan Rosetta,
Misconceptions e difficoltà in Matematica,
L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate, 23, 45-68, (2000).

31. Zan Rosetta,
Verso una teoria per le difficoltà in Matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica,
In: Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, Pisa, 2002,
http://www.seminariodidama.unito.it/materiale.pdf.

32. Zan Rosetta,
Difficoltà in Matematica: Osservare, Interpretare, Intervenire,
Springer, (2007).

33. Zan Rosetta,
I misconcetti,
Dispensa di Didattica della Matematica,
http://people.dm.unipi.it/zan/SCIENZEDELLAFORMAZIONE
0POLODILIVORNO/DIDATTICADELLAMATEMATICA
/Dispense_Misconcetti.pdf