

**Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Dipartimento di Fisica e Astronomia  
Corso di Laurea in Astronomia

# **Equazioni di Stato della Materia in Astrofisica**

Tesi di laurea

Presentata da:  
**Giovanni di Bari**

Relatore:  
**Chiar.mo Prof.  
Daniele Dallacasa**

---

Appello IV  
Anno Accademico 2019-2020



## **Abstract**

Un'equazione di stato è un'equazione che mette in relazione pressione, temperatura e densità di un sistema fisico.

Così come la meccanica Newtoniana può essere considerata alla base della fisica, allo stesso modo le equazioni di stato (EdS) possono essere considerate alla base della termodinamica e della fluidodinamica. Inoltre, così come la meccanica è stata estesa a condizioni estreme, come oggetti con velocità prossime alla velocità della luce (meccanica relativistica) o oggetti microscopici (meccanica quantistica), così le EdS sono state estese per descrivere sistemi in condizioni di estrema densità e temperatura.

In questo elaborato verranno introdotte le equazioni di stato con il formalismo della meccanica statistica.

Verrà successivamente mostrato come queste equazioni possano essere applicate allo studio di sistemi stellari, e le varie forme che esse assumono in astrofisica, al variare dello stato della materia che si sta descrivendo (degenere o non, relativistico, ...).

L'equazione di stato rappresenta una delle sette equazioni fondamentali necessarie alla descrizione degli interni stellari. Per poter studiare una struttura stellare tipicamente è necessario considerare tutte queste equazioni, ma esistono modelli particolari, chiamati politropici, in cui è possibile considerare meno equazioni. Vedremo cosa si intende per "modello politropico" e come sia possibile ricavare alcune proprietà della stella nell'ambito di questo modello.

# Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni di Stato in Meccanica Statistica</b>	<b>1</b>
1.1	Introduzione . . . . .	1
1.2	Metodo di Boltzmann . . . . .	1
1.2.1	Limite del continuo . . . . .	3
1.3	Sistemi non degeneri . . . . .	3
1.3.1	Distribuzione di Maxwell-Boltzmann . . . . .	5
1.4	Sistemi degeneri . . . . .	5
1.4.1	Limite del continuo . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Equazioni di Stato in Astrofisica</b>	<b>7</b>
2.1	Gas perfetto . . . . .	7
2.2	Gas degenere . . . . .	8
2.3	Pressione di radiazione . . . . .	10
2.4	Diagramma densità - temperatura . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Modelli politropici</b>	<b>12</b>
3.1	Trasformazioni politropiche . . . . .	12
3.2	Equazione di Lane-Emden . . . . .	13
3.3	Determinazione di proprietà stellari a partire dell'equazione di Lane-Emden . . . . .	13
3.3.1	Raggio . . . . .	14
3.3.2	Massa . . . . .	14
3.3.3	Densità centrale . . . . .	15
3.3.4	Pressione centrale . . . . .	15

# Capitolo 1

## Equazioni di Stato in Meccanica Statistica

### 1.1 Introduzione

Storicamente la termodinamica nasce come scienza a sé stante, per descrivere alcune proprietà dei corpi. In seguito alla prima "quantizzazione" della materia, dovuta ad Avogadro, si iniziò a pensare che anche i sotto-sistemi che formavano un determinato corpo potessero essere studiati con le stesse equazioni che descrivevano il corpo macroscopico. Nasce così il collegamento tra proprietà macroscopiche termodinamiche e proprietà microscopiche dinamiche.

Il collegamento formale avviene tramite il teorema di Liouville<sup>1</sup>. Se inoltre si assume che la media temporale di una funzione dinamica non dipenda dalle condizioni iniziali<sup>2</sup>, si ottiene un primo risultato fondamentale: i valori termodinamici di equilibrio relativi a qualsiasi funzione dinamica si ottengono senza bisogno di risolvere le equazioni del moto, è solamente necessario mediare la funzione dinamica nello Spazio delle Fasi del sistema. Questa media deve essere fatta attraverso una distribuzione di probabilità, chiamata Micro-canonica. Questa distribuzione fa riferimento ai sistemi micro-canonici, in cui energia e gradi di libertà<sup>3</sup> si conservano.

### 1.2 Metodo di Boltzmann

Boltzmann sviluppò un metodo per calcolare questi valori termodinamici: dividere un sistema micro-canonico in sotto-sistemi canonici<sup>4</sup> distinguibili ed identici, e descrivere questi sistemi non più con le coordinate nello spazio delle fasi, ma con le popolazioni  $n_\alpha(t)$ , ovvero il numero di sotto-sistemi canonici che ad un dato istante

---

<sup>1</sup>Può essere espresso come: le superfici descritte dai punti dello Spazio delle Fasi di un sistema Hamiltoniano autonomo possono cambiare forma e posizione nel tempo, ma mantengono la stessa area.

<sup>2</sup>Ipotesi ergodica.

<sup>3</sup>E quindi il numero di sistemi.

<sup>4</sup>In cui sono permessi scambi di calore.

occupano il livello energetico  $\epsilon_\alpha$ . I sotto-sistemi interagiscono tra di loro solo attraverso urti<sup>5</sup>, perciò l'energia del sistema micro-canonico è conservata.

A questo punto la nostra funzione termodinamica è esprimibile nel seguente modo, dando per scontato che la funzione dinamica sia esprimibile in termini delle popolazioni:

$$F(T, V) = \sum_{\vec{n} \in \Gamma} P(\vec{n}) F(\vec{n}) \approx \int_{\vec{n} \in \Gamma} P(\vec{n}) F(\vec{n})$$

dove

$$\Gamma = \left\{ \vec{n} \mid \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha \epsilon_\alpha = E, \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha = N \right\}$$

rappresenta l'insieme che contiene i vettori popolazioni ammissibili e il passaggio da sommatoria a integrale è giustificato nel limite  $N \gg 1$ , dove  $N$  rappresenta il numero di sotto-sistemi canonici.  $P(\vec{n})$  rappresenta la probabilità di avere un certo vettore popolazione.

Nel limite in cui  $N \gg 1$  si possono applicare altre approssimazioni, che ci conducono ad un risultato chiave:

$$F(T, V) = F(\vec{n}')$$

dove  $\vec{n}'$  è il vettore popolazione di equilibrio, che rende massimo  $W_{Boltz}$ <sup>6</sup>. Il calcolo della  $F(T, V)$  si è ridotto da un integrale su tutte le popolazioni al calcolo su una singola popolazione.

A questo punto non rimane che trovare il vettore di popolazione di equilibrio  $\vec{n}'$  che, attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, risulta essere:

$$n'_\alpha = N \frac{g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha}}{Z_c}$$

dove

$$Z_c = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha}$$

è chiamata Funzione di Partizione Canonica e rappresenta una quantità fondamentale per ricavare altre quantità termodinamiche.

Il fattore  $\beta$  rappresenta uno dei due moltiplicatori di Lagrange, si riferisce alla conservazione dell'energia e si può dimostrare essere uguale a  $1/(k_B T)$ <sup>7</sup>.

A questo punto, nota la funzione di partizione, possiamo ricavare le funzioni termodinamiche come:

$$Z_c(T, V) = \sum_{\alpha} g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha} = e^{-\beta \Phi} \quad (1.1)$$

$$E(T, V) = - \left( \frac{\partial \ln Z_c}{\partial \beta} \right)_V = \sum_{\alpha} \epsilon_\alpha \rho'_\alpha \quad (1.2)$$

<sup>5</sup>Processi in cui quantità finite di energia, e quindi calore, vengono scambiate in tempi infinitesimi.

<sup>6</sup> $W_{Boltz}(\vec{n}) = N! \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha^{n_\alpha}}{n_\alpha!}$  e rappresenta il numero di modi diversi di realizzare la popolazione  $\vec{n}$

<sup>7</sup> $k_B = 1.38 \times 10^{-16} \text{ erg } K^{-1}$  è la costante di Boltzmann.

$$S(T, V) = k_B \ln Z_c + \frac{E}{T} = k_B \sum_{\alpha} \rho'_{\alpha} \ln \left( \frac{g_{\alpha}}{\rho'_{\alpha}} \right) \quad (1.3)$$

$$\Phi(T, V) = -k_B T \ln Z_c = E - TS = \sum_{\alpha} \rho'_{\alpha} \left[ \epsilon_{\alpha} - k_B T \ln \left( \frac{g_{\alpha}}{\rho'_{\alpha}} \right) \right] \quad (1.4)$$

Osserviamo come le funzioni di stato dipendano implicitamente solo da  $T$ , mentre la dipendenza da  $V$  è "nascosta" all'interno delle  $\epsilon_{\alpha}$ .

L'ultima equazione di stato definisce l'energia libera di Helmholtz  $\Phi$  e risulta utile per ottenere un'equazione che legghi pressione, temperatura e volume. Infatti, eseguendo una trasformazione reversibile<sup>8</sup> a  $T$  costante che modifichi  $\Phi$  e ricordando il primo principio della termodinamica<sup>9</sup> si ottiene:

$$P = - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial V} \right)_T = k_B \left( \frac{\partial \ln Z_c}{\partial V} \right)_T \quad (1.5)$$

È importante osservare che queste funzioni di stato non dipendono dal tipo di vincolo che mantiene in equilibrio il sistema, perciò descrivono sia il sistema che i singoli sotto-sistemi.

Le funzioni di stato dei sotto-sistemi (canonici) son collegate a quelle del sistema da:

$$\Phi_{tot} = \sum_i \Phi_i \quad P_{tot} = \sum_i P_i \quad Z_{tot} = \prod_i Z_i$$

### 1.2.1 Limite del continuo

Nel caso in cui il volume di confinamento del sistema diventa arbitrariamente grande, i livelli energetici tendono ad "infittirsi", rendendo necessario il passaggio da quantità discrete a continue:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha} &\rightarrow \epsilon \text{ reale} \\ g_{\alpha} &\rightarrow g(\epsilon; T, V) \\ \rho'_{\alpha} &\rightarrow \frac{g(\epsilon; T, V)}{Z_c} d\epsilon \\ Z_c &\rightarrow \int d\epsilon e^{-\beta\epsilon} g(\epsilon; T, V) \end{aligned}$$

Anche se il volume di confinamento non tende ad infinito, è possibile applicare il limite del continuo nel caso in cui

$$\beta(\epsilon_1 - \epsilon_0) \ll 1$$

## 1.3 Sistemi non degeneri

Per sistema non degeneri si intende un sistema in cui le condizioni termiche permettono di trascurare a priori la probabilità di occupazione multipla di un livello

<sup>8</sup>Trasformazione in cui il sistema raggiunge lo stato finale attraverso stati di equilibrio termodinamico.

<sup>9</sup> $\delta Q = dE + \delta L$ , gli scambi di calore sono scambi di energia.

energetico.

La relazione generale che ci permette di stabilire se il sistema in esame è in condizione di non degenerazione o meno è ottenibile dalle regole del calcolo combinatorio, e può essere espressa come:

$$\frac{n'_\alpha}{g_\alpha} = N \frac{e^{-\beta\epsilon_\alpha}}{Z_c} \ll 1 \text{ per ogni } \alpha \Rightarrow N \frac{e^{-\beta\epsilon_0}}{Z_c} \ll 1$$

Un esempio di sistema non degenero è rappresentato dal gas perfetto, ovvero un sistema composto da  $N$  particelle puntiformi massive (massa  $m$ ), senza campi esterni, senza struttura interna (spin o altro), libere di muoversi in una regione spaziale di volume  $V$ , che scambiano energia solo attraverso urti e in condizioni di non degenerazione. Si assume  $N$  e  $V$  arbitrariamente grandi. Poiché ogni particella può essere considerata come un sistema canonico posso calcolare la funzione di partizione per un sotto-sistema come

$$Z_c^{part} = \frac{1}{h_P^3} \int d\vec{z} e^{-\beta h(\vec{z})} = \frac{V(2\pi m k_B T)^{3/2}}{h_P^3}$$

Grazie alla condizione di non degenerazione la funzione di partizione del sistema diventa

$$Z_c^{gp} = \frac{1}{N!} (Z_c^{part})^N = \left[ \frac{V(2\pi m k_B T)^{3/2} e}{N h_P^3} \right]^N$$

A questo punto le funzioni di stato diventano:

$$\begin{aligned} E_{gp} &= \frac{3}{2} N k_B T \\ S_{gp} &= N k_B \ln \left[ \frac{V(2\pi m k_B T)^{3/2} e^{5/2}}{N h_P^3} \right] \\ \Phi_{gp} &= -k_B T \ln Z_c^{gp} = -k_B T \ln \left[ \frac{V(2\pi m k_B T)^{3/2} e}{N h_P^3} \right] \\ P_{gp} &= \frac{N k_B T}{V} \\ \mu_{gp} &= -k_B T \ln \left[ \frac{V(2\pi m k_B T)^{3/2}}{N h_P^3} \right] \end{aligned}$$

La funzione di stato  $\mu$  rappresenta la quantità di energia che bisogna cedere o sottrarre ad un sistema per inserire un nuovo sotto-sistema, ed è chiamata potenziale chimico.

### Condizione di non degenerazione

La condizione di non degenerazione, in caso di limite termodinamico<sup>10</sup> può essere espressa attraverso quantità termodinamiche come:

$$\eta = \frac{h_P^3 N}{V(2\pi m k_B T)^{3/2}} \ll 1 \quad (1.6)$$

Questa quantità risulta molto importante anche nella trattazione dei gas degeneri.

<sup>10</sup>Limite in cui si assume  $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $N/V = \text{cost} < \infty$



### 1.3.1 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

La distribuzione canonica per un gas perfetto è:

$$\rho_c(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{\exp\left\{-\frac{\vec{p}^2}{2mk_B T}\right\}}{V(2\pi mk_B T)^{3/2}}$$

per una particella che si trova entro la regione spaziale, e nulla fuori. Integrando sulle posizione si ottiene la distribuzione di probabilità degli impulsi. Facendo uso dell'uguaglianza tra probabilità infinitesime  $\rho_p(\vec{p})d\vec{p} = \rho_v(\vec{v})d\vec{v}$  si ottiene la distribuzione in termini del vettore velocità:

$$\rho_v(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m\vec{v}^2}{2k_B T}\right\}$$

La distribuzione sulle singole componenti è gaussiana, con valor medio nullo, ovvero tante particelle si muovono in una direzione quante se ne muovono in quella opposta. Passando alle coordinate polari ed integrando su tutto l'angolo solido si ottiene la distribuzione in modulo:

$$\rho_v(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2k_B T}\right\}$$

Il valore più probabile di velocità corrisponde al massimo della distribuzione, pari a

$$\bar{v} = \sqrt{2k_B T/m} \quad (1.7)$$

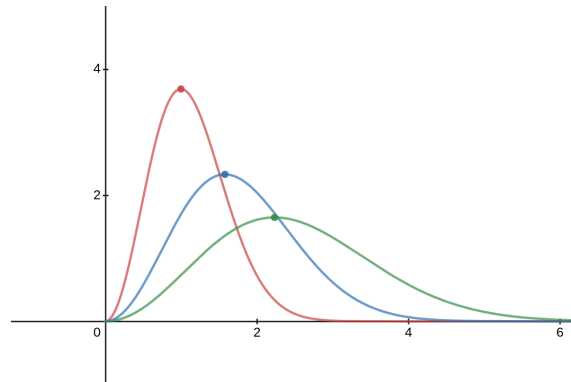


Figura 1.1: Distribuzione del modulo delle velocità a tre temperature diverse. La curva rossa è quella a temperatura minore, quella blu ad una temperatura  $T_2 = 2.5T_1$  e quella verde a temperatura  $T_3 = 5T_1$

## 1.4 Sistemi degeneri

Un sistema degenere è un sistema in cui la condizione di non degenerazione non è più rispettata.

In questo caso è possibile l'occupazione multipla di un livello energetico, e perciò bisogna considerare anche il tipo delle particelle che formano il sistema:

- i Bosoni (particelle con spin intero), possono occupare lo stesso stato in numero arbitrario di particelle (statistica di Bose-Einstein);
- i fermioni (spin semi-intero), a causa del principio d'Esclusione di Pauli, non possono essere più di uno in ogni stato (statistica di Fermi-Dirac).

Con elementi di calcolo combinatorio si ottiene il numero di stati dell'intero sistema di fermioni o bosoni:

$$W_{FD} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - n_{\alpha})!}$$

$$W_{BE} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(g_{\alpha} - 1 + n_{\alpha})!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - 1)!}$$

Possiamo a questo punto scrivere la funzione di partizione canonica come<sup>11</sup>:

$$Z^{\pm} = \sum_{\vec{n} \in \Gamma} W^{\pm}(\vec{n}) \exp \left\{ -\beta \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_{\alpha} \epsilon_{\alpha} \right\}$$

A partire da questa possiamo ottenere le funzioni di stato con le equazioni 1.1, già viste in precedenza.

### 1.4.1 Limite del continuo

Come fatto nel caso dei gas non degeneri, è opportuno studiare il limite in cui il volume di confinamento tenda ad infinito. In questo caso però sarà necessario considerare anche i gradi di libertà interni (spin,...), identificati da  $\vec{\xi}$ . Il limite al continuo si ottiene con le seguenti sostituzioni:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha} &\rightarrow \epsilon + \epsilon_{\vec{\xi}} \\ g_{\alpha} &\rightarrow g_{\vec{\xi}} g(\epsilon) d\epsilon \\ n_{\alpha} &\rightarrow n^{\pm}(\epsilon, \vec{\xi}) d\epsilon \end{aligned}$$

che porta a riscrivere l'energia libera di Helmholtz (che servirà per la pressione di radiazione) come:

$$\Phi^{\pm} = \mu N \mp \frac{k_B T}{h_P^3} \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int d\vec{p} d\vec{r} \ln \left[ 1 \pm e^{-\beta [h(\vec{p}, \vec{r}, \vec{\xi}) - 1]} \right] \quad (1.8)$$

---

<sup>11</sup>Si usa la convenzione che il simbolo superiore si riferisce ai fermioni, mentre quello inferiore ai bosoni.

# Capitolo 2

## Equazioni di Stato in Astrofisica

Il gas che compone una stella è un plasma di ioni ed elettroni. Infatti le alte temperature hanno permesso la ionizzazione del gas, separando gli elettroni dal nucleo. Procedendo verso il centro della stella la temperatura aumenta, così come la percentuale di gas ionizzato.

Il gas può comportarsi come gas perfetto o come gas degenerare, avremmo quindi EdS diverse per le due condizioni. Inoltre, oltre la pressione del gas, devo considerare anche la pressione esercitata dai fotoni, che però risulta trascurabile negli interni stellari, ma non nelle atmosfere.

Anche se il gas perfetto rappresenta un modello teorico, l'assunzione è molto giustificata: infatti la correzione alla pressione del Sole, calcolata come gas perfetto, è dello 0.43%, mentre per stelle più dense aumenta leggermente.

### 2.1 Gas perfetto

Per un gas perfetto, l'equazione di stato è molto semplice:

$$P = \frac{Nk_B T}{V}$$

dove  $N$  è il numero totale di particelle. Possiamo dividere e moltiplicare per una massa media  $\bar{m} = \mu H$ , dove  $\mu$  è il peso molecolare medio, e dipende dal gas considerato, mentre  $H$  è la massa dell'idrogeno. Osservando che  $N\mu H = M$  è la massa totale e  $M/V = \rho$  è la densità otteniamo:

$$P = \rho \frac{k_B T}{\mu H} \tag{2.1}$$

Poiché composizioni chimiche diverse si riflettono in pesi molecolari medi diversi, è utile scrivere  $\mu$  in funzione delle abbondanze chimiche:

- $X$  abbondanza in massa dell'idrogeno;
- $Y$  abbondanza in massa dell'elio;
- $Z$  abbondanza in massa degli altri elementi più pesanti.

Posso scrivere:

$$\mu H = \frac{\sum_i N_i m_i}{\sum_i N_i}$$

dove  $N_i$  è il numero di atomi dell' $i$ -esimo elemento,  $m_i$  è la corrispettiva massa, che può essere riscritta come  $m_i = A_i H$ , ed  $A_i$  il peso atomico. A questo punto otteniamo:

$$\mu = \frac{\sum_i N_i A_i}{\sum_i N_i}$$

Inoltre, in caso di ionizzazione totale dobbiamo dividere per  $1 + Z_i$ , dove  $Z_i$  è il numero atomico, in quanto in seguito alla ionizzazione avremo  $Z_i$  elettroni ed 1 nucleo. Quindi, indicando con  $X_i$  l'abbondanza in massa dell' $i$ -esimo elemento:

$$\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^3 \frac{X_i(1+Z_i)}{A_i}}$$

Ora possiamo calcolare il termine della sommatoria per i vari elementi:

- $i = 1$ , Idrogeno:  $Z = 1$ ,  $A = 1$  quindi:

$$\frac{X(1+1)}{1} = 2X$$

- $i = 2$ , Elio:  $Z = 2$ ,  $A = 4$  quindi:

$$\frac{Y(1+2)}{4} = \frac{3}{4}Y$$

- $i = 3$ , elementi più pesanti:  $Z > 2$ ,  $A \simeq 2Z$  quindi:

$$\frac{Z(1+Z)}{2Z} \simeq \frac{1}{2}Z$$

Perciò

$$\mu_I = \frac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$$

## 2.2 Gas degenere

Dalla condizione di non degenerazione 1.6 risulta che particelle più leggere, come gli elettroni, sono più portate ad entrare in un regime degenere, mentre gli ioni, più pesanti, possono essere ancora considerati come gas perfetto.

Poiché gli elettroni sono fermioni, essi obbediscono al Principio di Esclusione di Pauli, perciò, aumentando il numero di particelle, queste andranno ad occupare tutti i livelli energetici, e non più solo quello più probabile come nel caso di un gas perfetto, fino al livello energetico massimo  $E_0$  o  $p_0$  (energia o impulso di Fermi). Visto che era la temperatura a definire lo stato energetico più popolato 1.7, l'introduzione di molte particelle, ed il conseguente ingresso nel regime degenere, cancella la dipendenza

dalla temperatura.

Il numero di elettroni con impulso compreso tra  $p$  e  $p + dp$  sarà dato da:

$$n(p)dp = \frac{8}{h_p^3} \pi p^2 dp$$

Per ottenere il numero totale di particelle dovrò integrare sull'impulso tra 0 e l'impulso massimo, l'impulso di Fermi  $p_0$ :

$$N_e = \int_0^{p_0} dp \frac{8\pi}{h_p^3} p^2 = \frac{8\pi}{3h_p^3} p_0^3$$

Ma il numero di particelle è anche dato da  $N_e = \rho_e / (\mu_e H)^1$ , sostituendo possiamo ricavare il momento di Fermi:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h_p^3}{8\pi\mu_e H} \rho}^{1/3}$$

L'espressione del momento di Fermi ci servirà valutare la pressione degenera.

Nota la distribuzione dell'impulso, la pressione è data da<sup>2</sup>:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} dp N(p) p v = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} dp \frac{8\pi}{h_p^3} p^3 v$$

### Gas degenera non relativistico

In caso non relativistico abbiamo:

$$P = \frac{8\pi}{3h_p^3 m} \int_0^{p_0} dp p^4 = \frac{8\pi}{3h_p^3 m} \frac{p_0^5}{5}$$

Ricordando l'espressione dell'impulso di Fermi otteniamo:

$$P = K_1 \rho^{5/3}$$

dove  $K_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$ .

### Gas degenera relativistico

In regime relativistico, l'impulso non è più  $p = mv$ , ma è necessario considerare anche il fattore di Lorentz,  $p = \gamma m_e v$ . Il fattore di Lorentz dipende dall'impulso della particella, il che porta a dover risolvere un integrale più complesso, il cui calcolo è omesso. Il risultato finale è:

$$P = \frac{2\pi c}{3h_p^3} p_0^4$$

Sostituendo di nuovo l'impulso di Fermi otteniamo:

$$P = K_2 \rho^{4/3}$$

dove  $K_2 = 1.2 \times 10^{15} \mu_e^{-4/3}$ .

Osserviamo che in regime degenera, la pressione non dipende dalla temperatura, come ci aspettavamo dal ragionamento iniziale.

<sup>1</sup>Da considerazioni analoghe a quelle fatte per il peso molecolare medio degli ioni, abbiamo  $\mu_e^{-1} = (X + 1)/2$

<sup>2</sup>Si ottiene considerando che la pressione è una forza diviso un'area, e che una forza può essere scritta come una variazione di impulso in un intervallo di tempo.

## 2.3 Pressione di radiazione

Consideriamo un sistema di fotoni, ovvero bosoni senza massa. L'energia libera di Helmholtz può essere scritta, in virtù della 1.8, come:

$$\Phi = \frac{8\pi k_B T V}{c^3} \int_0^\infty d\nu \nu^2 \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right) = -\frac{8\pi^5 (k_B T)^4 V}{45 c^3 h_p^3}$$

Ma ricordando la 1.5 si ottiene la pressione di radiazione

$$P = \frac{8\pi^5 k_B^4 T^4}{45 c^3 h_p^3} = \frac{a}{3} T^4$$

dove  $a = 7.6 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{K}^{-4}$ . Questa pressione dipende unicamente dalla temperatura, e diventa rilevante ad alte temperature e basse densità.

## 2.4 Diagramma densità - temperatura

Il diagramma  $\log \rho - \log T$  è un utile diagramma che permette di determinare, note densità e temperatura, quale tipo di pressione predomina sulle altre.

L'idea di base è imporre l'uguaglianza tra due equazioni della pressione, ed ottenere una retta che metta in relazione temperatura e densità.

- Pressione di radiazione e pressione di gas perfetto:

$$\frac{a}{3} T^4 = \frac{k_B \rho T}{\mu H} \rightarrow \log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.57$$

- Pressione di gas perfetto e pressione di gas degenere non relativistico:

$$\frac{k_B \rho T}{\mu_e H} = K_1 \rho^{5/3} \rightarrow \log T = \frac{2}{3} \log \rho + 4.88$$

- Pressione di gas degenere relativistico e non relativistico:

$$K_2 \rho^{4/3} = K_1 \rho^{5/3} \rightarrow \log \rho = 3 \log \frac{K_2}{K_1} = 6.6$$

- Pressione di gas degenere relativistico e pressione di gas perfetto:

$$K_2 \rho^{4/3} = \frac{k_B \rho T}{\mu_e H} \rightarrow \log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7.07$$

Graficando queste rette in un piano  $\log \rho - \log T$  in funzione di  $\log \rho$  otteniamo il diagramma densità - temperatura 2.1.

Riassumendo, la pressione, in forma generale può essere scritta come:

$$P = P_{rad} + P_i + P_e$$

dove:

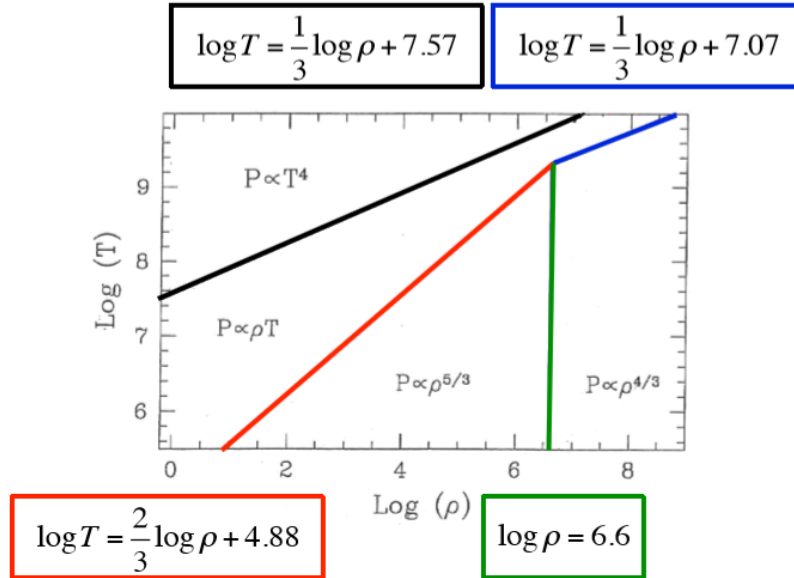


Figura 2.1: Diagramma densità - temperatura

- $P_{rad}$  è la pressione di radiazione;
- $P_i$  è la pressione esercitata dagli ioni, che si comportano sempre come un gas perfetto;
- $P_e$  è la pressione esercitata dagli elettroni, che possono comportarsi come gas perfetto o degenerare, relativistico o non.

Le pressioni  $P_i$  e  $P_e$  vanno a costituire quella che è chiamata pressione del gas, che può essere espressa in maniera generale come:

$$P_{gas} = \begin{cases} \frac{k_B \rho T}{\mu_I H} + \frac{k_B \rho T}{\mu_e H} & \text{Gas perfetto} \\ \frac{k_B \rho T}{\mu_I H} + 10^{13} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} & \text{Gas degenerare non relativistico} \\ \frac{k_B \rho T}{\mu_I H} + 1.2 \times 10^{15} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} & \text{Gas degenerare relativistico} \end{cases}$$

# Capitolo 3

## Modelli politropici

Un modello politropico è un modello in cui la pressione è una funzione della sola densità, e nonostante siano modelli abbastanza semplicistici, possono essere utilizzati in alcune condizioni particolari.

### 3.1 Trasformazioni politropiche

Per trasformazione politropica in termodinamica si intende una trasformazione che avviene a calore specifico costante. Dal primo principio della termodinamica abbiamo che  $dQ = dU + PdV$ . Nei modelli politropici avremo  $dQ = 0$ .

L'equazione di stato politropica si ottiene a partire dal gradiente adiabatico<sup>1</sup>:

$$\nabla_{ad} = 1 - \frac{1}{\gamma} \qquad \gamma = \frac{c_P}{c_V} \qquad (3.1)$$

dove  $c_P$  e  $c_V$  sono i calori specifici a pressione e volume costanti, e dalla pressione per un gas non degenero 2.1.

Il gradiente adiabatico può essere riscritto come  $T \propto P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ , mentre dalla pressione del gas abbiamo che:

$$P \propto \rho T \rightarrow T \propto \frac{P}{\rho}$$

Unendo le due relazioni otteniamo l'equazione di stato politropica

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+\frac{1}{n}}$$

L'indice  $n$  è chiamato indice politropico.

Alcuni casi in cui si possono utilizzare questi modelli sono:

- Stelle in equilibrio termico;
- Stelle costituite da materia degenera:
  - $P = K_1\rho^{5/3} \rightarrow n = 1.5$
  - $P = K_2\rho^{4/3} \rightarrow n = 3$
- Nuclei isotermi a temperatura costanti:
  - $P = K\rho \rightarrow n = \infty$

---

<sup>1</sup>Il gradiente adiabatico è definito come  $\nabla_{ad} := \frac{d \log T}{d \log P}$



## 3.2 Equazione di Lane-Emden

L'equazione chiave dei modelli politropici è l'equazione di Lane-Emden, che si ricava a partire dall'equazione dell'equilibrio idrostatico:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP(r)}{dr} \right] = -4\pi G \rho(r)$$

Introduciamo la variabile adimensionale  $\theta(r)$  definita da  $\rho(r) = \rho_c \theta^n(r)$  dove  $\rho_c$  rappresenta la densità centrale ( $r = 0$ ). A questo punto possiamo inserire l'equazione di stato politropica e questa nuova variabile nell'equazione dell'equilibrio idrostatico ed ottenere:

$$\frac{\alpha^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d\theta(r)}{dr} \right] = -\theta^n(r) \quad (3.2)$$

dove  $\alpha$  è una costante data da:

$$\alpha = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \rho_c^{\frac{1}{n}-1} \right]^{1/2}$$

È importante osservare che l'indice politropico  $n$  e la costante di proporzionalità  $K$  sono assunte fisse all'interno della struttura stellare.

Introducendo un'altra variabile adimensionale  $\xi = r/\alpha$  si semplifica notevolmente l'equazione 3.2 ed otteniamo quella che è *l'equazione di Lane-Emden per l'indice politropico  $n$* :

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left[ \xi^2 \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right] = -\theta^n(\xi) \quad (3.3)$$

Essendo un'equazione differenziale al second'ordine, sono necessarie due condizioni al contorno, che sono:

$$\theta(\xi = 0) = 1 \qquad \left. \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0$$

La prima condizione si ottiene ricordando come è definita  $\theta$  e dal fatto che  $\rho_c$  rappresenta la densità a  $r = 0$  ( $\xi = 0$ ), mentre la seconda dal richiedere una soluzione abbastanza regolare. L'equazione di Lane-Emden deve essere risolta per ogni indice politropico  $n$ . Non c'è una soluzione generale, che può essere ricavata solo per alcuni valori dell'indice  $n$  ( $n = 0, 1, 5$ ), però è possibile ottenere un'espansione in serie

$$\theta_n(\xi) = 1 - \frac{1}{3!}\xi^2 + \frac{n}{5!}\xi^4 - \frac{n(8n-5)}{42 \times 360}\xi^6 + \dots$$

Generalmente si trovano tabulate, così come i valori delle derivate e degli zeri. I valori degli zeri e delle derivate sono particolarmente utili nel calcolo di alcune proprietà della stella, come massa e raggio.

## 3.3 Determinazione di proprietà stellari a partire dell'equazione di Lane-Emden

Attraverso l'equazione di Lane-Emden e delle sue soluzioni possiamo ricavare importanti proprietà di una stella.

### 3.3.1 Raggio

Sia  $\xi_1$  il primo zero di  $\theta_n(\xi)$ . Poiché  $\theta = 0$  implica  $\rho = 0$ ,  $\xi = \xi_1$  corrisponde al raggio della stella, perciò:

$$R = \alpha\xi_1 = \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{1/2} \rho_c^{\frac{1-n}{2n}} \xi_1 \quad (3.4)$$

Per i valori con cui è possibile risolvere analiticamente l'equazione di Lane-Emden è interessante osservare che per:

- $n = 0$  non può essere discusso in quanto il membro di destra della 3.4 presenta una divisione per  $n$ ;

- $n = 1$ ,  $\xi_1 = \pi$  otteniamo:

$$R_1 = \left[ \frac{K}{4\pi G} \right]^{1/2} \pi$$

ovvero una massa indipendente dal valore della densità al centro;

- $n = 5$ ,  $\xi = \infty$ , perciò abbiamo un raggio infinito, anche se è possibile associare un valore della massa finito;
- $n > 5$ ,  $\theta(\xi)$  non ha zeri, perciò non rappresenta stati fisici reali.

### 3.3.2 Massa

In generale, la massa contenuta entro un raggio  $r$  è data da:

$$M(r) = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 \rho(r')$$

In termini di  $\xi$  diventa:

$$M(\xi) = 4\pi\alpha^3 \int_0^\xi d\xi' \xi'^2 \rho(\xi')$$

che, integrando, diventa:

$$M(\xi) = 4\pi \left[ \frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \left[ -\xi^2 \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right] \quad (3.5)$$

Calcolata nel punto  $\xi = \xi_1$  dà il valore della massa. Per i casi risolvibili analiticamente si ha che:

- Per  $n = 3$  si ottiene:

$$M_3 \approx 25.36 \left[ \frac{K}{\pi G} \right]^{3/2}$$

ovvero una massa indipendente dalla densità nel centro;

- Per  $n = 5$ , nonostante si ottenga un raggio infinito, attraverso un passaggio al limite è possibile associare un valore della massa, e si ottiene:

$$M(n=5) = 4\sqrt{3}\pi \left[ \frac{3K}{2\pi G} \right]^{3/2} \rho_c^{-1/5}$$

### 3.3.3 Densità centrale

Noti raggio e massa è possibile determinare anche la densità centrale. Infatti possiamo ottenere la densità media come rapporto tra massa e volume.

Come espressione del volume usiamo  $V = (4/3)\pi\alpha^3\xi^3$ , mentre per la massa utilizziamo l'espressione generale della massa in funzione di  $\xi$  3.5. Possiamo così scrivere:

$$\frac{\rho_c}{\bar{\rho}} = \left[ -\frac{3}{\xi_1} \left( \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} \right) \Big|_{\xi=\xi_1} \right]^{-1} \quad (3.6)$$

Come esempio:

- Per  $n = 3$  (che è applicabile al Sole) si ottiene un rapporto tra le due densità pari a  $\rho_c/\bar{\rho} \approx 54.18$ ;
- Per  $n = 0$  si ottiene invece  $\rho_c/\bar{\rho} = 1$ , ovvero corrisponde ad un modello a densità uniforme.

### 3.3.4 Pressione centrale

Usando l'equazione di stato politropica si ha che:

$$P_c = K\rho_c^{1+\frac{1}{n}}$$

La costante  $K$  può essere ricavata dalla relazione massa-raggio<sup>2</sup>, mentre  $\rho_c$  dalle ultime relazioni ottenute per la densità centrale 3.6. Sostituendo otteniamo:

$$P_c = W_n \frac{M^2 G}{R^4}$$

dove

$$W_n = \left[ 4\pi(n+1) \left( \frac{d}{d\xi}\theta(\xi) \right)^2 \xi_1 \right]^{-1}$$

Come esempio:

- Per  $n = 3$  (applicabile al Sole),  $M = M_\odot$ ,  $R = R_\odot$  otteniamo  $P_c \approx 1.24 \times 10^{17}$  dyne cm<sup>-2</sup>;
- Per  $n = 0$  otteniamo la formula della pressione consistente a quella di un modello a densità uniforme.

I valori di  $\xi_1$ , e delle derivate di  $\theta(\xi)$ , necessari per determinare le quantità studiate sopra, sono tabulati.

Questi sono solo alcuni esempi di grandezze che si possono ricavare nel contesto dei modelli politropici, è infatti possibile ricavare anche l'energia potenziale e l'energia interna.

È interessante notare come le ipotesi fatte (pressione funzione della sola densità,  $n$  e  $K$  costanti all'interno della stella,...) permettono di ottenere delle relazioni semplificate tanto quanto importanti, una volta noti i valori degli zeri di  $\theta(\xi)$  e delle sue derivate, che forniscono una buona approssimazione rispetto ai valori corretti.

<sup>2</sup> $M \propto R^{(3-n)/(1-n)}$ , la costante  $K$  è all'interno della costante di proporzionalità.

# Bibliografia

Balboni M., 2019, *Equazioni di stato della materia in astrofisica*. <http://amslaurea.unibo.it/18485/>

Chandrasekhar S., Chandrasekhar S., 1957, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Astrophysical monographs, Dover Publications, <https://books.google.it/books?id=VwPLAgAAQBAJ>

Eliezer S., Ghatak A., Hora H., Teller E., 2002, *Fundamentals of Equations of State*. WORLD SCIENTIFIC (https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/4872), doi:10.1142/4872, <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/4872>

Ferrari L., 2019, *Elementi di Termodinamica Statistica*

Ferraro F. R., 2018, *Dispense del corso di Astrofisica Stellare*