

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

**TEOREMA DEL VIRIALE E
APPLICAZIONI ASTROFISICHE**

Tesi di laurea

Presentata da:
Emma Ferri

Relatore:
**Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa**

Anno Accademico 2018-2019

Sommario

In questo trattato verrà proposta una breve analisi del Teorema del Viriale. Il primo capitolo è dedicato alla derivazione del Teorema in forma tensoriale e scalare, partendo dal noto problema degli N corpi. Nel trattare alcune delle numerose applicazioni astrofisiche verrà prima di tutto introdotta la definizione di sistema autogravitante, per poi passare ai concetti alla base della formazione stellare e del quesito della materia oscura.

Indice

| | | |
|----------|-------------------------------------|----------|
| 1 | Teorema del Viriale | 1 |
| 1.1 | Il problema degli N corpi | 1 |
| 1.1.1 | Tempo di rilassamento | 2 |
| 1.1.2 | CBE | 2 |
| 1.2 | Teorema del Viriale | 3 |
| 2 | Applicazioni Astrofisiche | 5 |
| 2.1 | Sistemi autogravitanti | 5 |
| 2.1.1 | Piano viriale | 6 |
| 2.2 | Formazione stellare | 7 |
| 2.2.1 | Criterio di Jeans | 8 |
| 2.2.2 | Collasso di una nube | 8 |
| 2.3 | Materia oscura | 10 |
| 2.3.1 | Coma Cluster | 11 |

Capitolo 1

Teorema del Viriale

Il Teorema del Viriale è un importante strumento matematico che ci permette di studiare come variano l'energia potenziale e cinetica di un sistema stabile di N corpi. Esso è applicabile a strutture stazionarie, le cui proprietà non cambiano nel tempo.

In astrofisica il teorema diventa particolarmente rilevante nello studio della dinamica delle galassie e delle stelle. Infatti, questi sistemi possono essere considerati stazionari nell'arco di tempo in cui noi li osserviamo che, su scala cosmologica, è praticamente istantaneo.

1.1 Il problema degli N corpi

Il problema degli N corpi rappresenta lo studio di sistemi costituiti da N punti materiali identici che interagiscono gravitazionalmente. Molte strutture astrofisiche possono essere considerate sistemi a N corpi in quanto la probabilità che avvengano collisioni fra le componenti del sistema è sostanzialmente nulla.

Nel campo della dinamica stellare vengono studiati sistemi composti da un numero altissimo di unità. Basti pensare che la nostra galassia, la Via Lattea, è composta da 10^{11} stelle e $10^{69} GeV/(mc^2)$ particelle di materia oscura. I computer odierni non sono in grado di lavorare con numeri così grandi. Di conseguenza, sono stati sviluppati due metodi di risoluzione del problema degli N corpi che si differenziano nello studio di sistemi collisionali e sistemi non collisionali.

I sistemi stellari, in quanto non collisionali, sono di particolare interesse poichè possono essere trattati come un insieme di punti materiali.

Ogni particella del sistema si muove con una velocità v e, ad un tempo t , si trova in una determinata posizione. Le N particelle, interagendo gravitazionalmente, generano uno spazio delle fasi di dimensione $6N + 1$; per $N \geq 3$ non è possibile trovare una soluzione analitica al problema, in quanto non si riescono a formulare $6N - 1$ integrali del moto. Per superare questa difficoltà si utilizza un approccio statistico, ovvero l'attenzione viene rivolta al moto di una singola particella che si muove nello spazio 3-dimensionale.

In questo modo, si può sostituire la distribuzione discreta delle N componenti con una distribuzione omogenea $\rho(x, t)$. Ora la particella non si trova più ad interagire con le altre particelle, ma risulta immersa in un campo gravitazionale ed un potenziale continui dovuti alle altre componenti.

Dall'equazione di Poisson si ha $\Delta\phi = 4\pi G\rho$ dove ϕ è il potenziale *liscio*; esso descrive il moto di una particella nel campo di forze ed è dato da:

$$\phi(x, t) = -G \int \frac{\rho(y, t) d^3y}{\|x - y\|} \quad (1.1)$$

Con questa approssimazione lo spazio delle fasi si riduce a 6 dimensioni. Il problema di questa generalizzazione è che, realmente, il moto di ogni particella i è dovuto ad un potenziale discreto:

$$\phi_{true} = -G \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j}{\|x_i(t) - x_j(t)\|} \quad (1.2)$$

La differenza $(\phi_{true} - \phi)$ è chiamata *termine di granularità*, esso indica di quanto il potenziale discreto si allontani da quello continuo. Ovvero, quanto sia buona l'approssimazione di non collisionalità assunta in principio. Il tempo oltre il quale questa approssimazione non è più valida è il tempo di rilassamento.

1.1.1 Tempo di rilassamento

Ammettere che una galassia sia non collisionale è un'approssimazione ragionevole nei tempi in cui essa viene studiata. Ogni sistema reale è collisionale o destinato a diventarlo, tuttavia, se la sua età è minore del suo tempo di rilassamento t_{2b} allora è possibile trascurare gli effetti dell'interazione gravitazionale a lungo range. Assumendo che le interazioni tra le particelle siano indipendenti si ha che:

$$t_{2b} = \frac{0.1 N t_{cross}}{\ln N} \quad (1.3)$$

dove N è il numero di elementi appartenenti al sistema e t_{cross} è il tempo di attraversamento del sistema, dato da $t_{cross} = \frac{2R}{v_*}$ (con R dimensione del sistema e v_* velocità della particella). Quindi, il tempo di rilassamento rappresenta il tempo entro il quale si possono trascurare le interazioni gravitazionali fra i corpi del sistema.

Nel caso delle galassie ellittiche, per esempio, $t_{2b} \simeq 10^{16}$ anni (assumendo $N \simeq 10^{11}$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^8$ anni). Questo tempo, molto maggiore del tempo di Hubble, suggerisce che queste strutture siano approssimabili a sistemi totalmente non collisionali.

Il tempo di rilassamento aumenta all'aumentare del numero di componenti N , quindi sistemi stellari più piccoli hanno minore probabilità di essere non collisionali. Nel caso degli ammassi globulari si ha $t_{2b} \simeq 10^9$ anni (assumendo $N \simeq 10^6$ e $t_{cross} \simeq 2 \times 10^6$ anni). Essendo questo tempo minore dell'età dell'universo, non è possibile trascurare l'effetto delle collisioni. Incontri ravvicinati fra tre o più particelle non solo contribuiscono a scambi di energia, ma possono anche portare alla formazione di subsistemi legati fra loro, come ad esempio le stelle binarie.

1.1.2 CBE

Nello svolgere la derivazione del Teorema del Viriale verranno considerati sistemi che si trovano all'equilibrio sotto la condizione che t_{2b} sia arbitrariamente grande. Viene assunto che questi sistemi stellari siano formati da N punti materiali identici, che possono essere stelle o particelle di materia oscura.

La derivazione della Collisionless Boltzmann Equation (CBE) viene eseguita considerando il limite ideale $N \rightarrow \infty$, $t_{2b} \rightarrow \infty$. Questo ci permette di trattare il problema in un *continuo non collisionale*, ovvero in modo tale che l'approssimazione di non collisionalità sia valida per ogni tempo.

L'idea è quella di trovare una descrizione statistica del sistema partendo dalla funzione di distribuzione di una singola particella $f(\vec{x}, \vec{v}, t)$ dove $f(\vec{x}, \vec{v}, t) d^3x d^3v$ rappresenta la probabilità di trovare una particella in un elemento di volume 6-dimensionale $d^3x d^3v$ al tempo t . Grazie a questa semplificazione si possono definire tutte le proprietà del sistema tramite la funzione di distribuzione.

Si può derivare la CBE dal teorema di Liouville:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} - \frac{\partial \phi_T}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (1.4)$$

La (4) rappresenta l'evoluzione della funzione di distribuzione in un sistema non collisionale. $\phi_T = \phi + \phi_{ext}$ è il potenziale totale che genera il campo di forza. Quando $\phi_{ext} = 0$ si parla di sistema *autogravitante* in quanto ϕ_{ext} dipende da tutta la materia non appartenente al sistema. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{\partial \phi_T}{\partial x} \end{cases} \quad (1.5)$$

si ottengono le soluzioni della CBE. Nonostante ciò, la risoluzione rimane ancora troppo difficile, per questo si cerca di estrapolare delle informazioni da tale equazione utilizzando il metodo dei momenti. Tale metodo permette di ottenere delle equazioni più semplici della CBE che descrivano i momenti della funzione di distribuzione.

Considerando solo i momenti del primo e secondo ordine, quelli relativi allo spazio delle velocità, si ottengono le **equazioni di Jeans**:

per ogni $i, j = 1, 2, 3$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial x_i} = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial \phi_T}{\partial x_i} \quad (1.7)$$

1.2 Teorema del Viriale

Il Teorema del Viriale permette di ottenere informazioni sulla struttura e la dinamica del sistema studiato. Esso è applicabile a diverse configurazioni e non è necessario che la struttura in esame sia in regime non collisionale.

Le equazioni di Jeans sono state ricavate svolgendo delle medie su v , ora, mediando su x si potrà arrivare al Teorema del Viriale in forma tensoriale.

Partiamo con l'introdurre le seguenti grandezze tensoriali:

Tensore momento d'inerzia:

$$I_{ij} = \int_{R^3} \rho x_i x_j d^3x \quad Tr(I_{ij}) = \int_{R^3} \rho (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) d^3x = I \quad (1.8)$$

Tensore energia cinetica di dispersione:

$$\Pi_{ij} = \int_{R^3} \rho \sigma_{ij}^2 d^3x \quad Tr(\Pi_{ij}) = \int_{R^3} \rho (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) d^3x = \Pi \quad (1.9)$$

dove σ_{ij}^2 è il tensore di dispersione delle velocità.

Tensore energia cinetica totale:

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho \overline{v_i v_j} d^3x \quad Tr(K_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) d^3x = K \quad (1.10)$$

Tensore energia cinetica ordinata:

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho \bar{v}_i \bar{v}_j d^3x \quad Tr(T_{ij}) = \frac{1}{2} \int_{R^3} \rho (\bar{v}_1^2 + \bar{v}_2^2 + \bar{v}_3^2) d^3x = T \quad (1.11)$$

dato che i tensori sopra scritti sono simmetrici ($ij = ji$) si ha $K_{ij} = T_{ij} + \frac{\Pi_{ij}}{2}$ la cui traccia è $K = T + \frac{\Pi}{2}$

Tensore autoenergia:

$$U_{ij} = - \int_{R^3} \rho x_i \frac{\partial \phi}{\partial x_j} d^3x \quad \text{Tr}(U_{ij}) = U \quad (1.12)$$

Tensore energia di interazione:

$$W_{ij} = - \int_{R^3} \rho x_i \frac{\partial \phi_{ext}}{\partial x_j} d^3x \quad \text{Tr}(W_{ij}) = W \quad (1.13)$$

Moltiplicando la seconda equazione di Jeans

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = -\rho \frac{\partial \phi_T}{\partial x_i} \quad (1.14)$$

per x si ricava il Teorema del Viriale in **forma tensoriale**:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 I_{ij}}{\partial t^2} = 2K_{ij} + U_{ij} + \frac{(W_{ij} + W_{ji})}{2} \quad (1.15)$$

La cui traccia riconduce alla più conosciuta **forma scalare**:

$$2K + U = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Se si considerano sistemi in regime stazionario, ovvero per i quali $\ddot{I} = 0$, allora il Teorema assume la forma:

$$2K + U = 0 \quad (1.17)$$

Nel caso in cui si avesse $\ddot{I} \neq 0$ allora il moto del sistema sarebbe limitato. Verrebbero quindi considerati i valori medi dell'energia cinetica e potenziale:

$$2\bar{K} = -(\bar{U} + \bar{W}) \quad (1.18)$$

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

In questa sezione verranno presentate alcune delle numerose applicazioni astrofisiche del Teorema del Viriale.

Naturalmente, questo capitolo è lontano dall'essere esaustivo poichè il Teorema presenta la sua utilità in innumerevoli situazioni, quindi, si proverà a descrivere alcuni interessanti casi in cui i vantaggi del Viriale sono rilevanti.

2.1 Sistemi autogravitanti

Un caso di grande interesse è quello dei sistemi autogravitanti. Queste strutture sono costituite da N particelle, ognuna di queste risente solo della forza dovuta alle altre componenti all'interno del sistema, ovvero:

$$W_{ext} = 0 \quad (2.1)$$

Senza il processo di *self-gravitation*, oggetti come le galassie, gli ammassi stellari e gli ammassi galattici si espanderebbero e disperderebbero.

Tuttavia, dato che la gravità è una forza molto debole, solo oggetti relativamente massivi diventano autogravitanti. I nostri corpi, per esempio, non sono tenuti insieme dalla gravità, ma dai legami chimici fra gli atomi e le molecole di cui siamo costituiti.

Le strutture trattate in seguito sono autogravitanti e all'equilibrio, ovvero *virializzate*. L'importanza del Teorema del Viriale sta nel fatto che può essere utilizzato per trovare la massa di questi sistemi.

Dato che i movimenti di materia all'interno di una struttura virializzata sono casuali, essi sono caratterizzati da una qualche dispersione intorno alla velocità media. Se l'oggetto è una galassia, possiamo stimare la dispersione dei moti stellari al suo interno utilizzando la spettroscopia per misurare la larghezza delle righe spettrali interessate dal *Doppler shift*.

Se l'oggetto è un ammasso di galassie, è necessario misurare il redshift di ogni galassia al suo interno. Il redshift medio corrisponderà al moto medio dell'ammasso causato dall'espansione dell'universo; la dispersione attorno a questo valore rappresenta i moti propri delle galassie dovuti alla *self-gravity* della materia nell'ammasso.

Consideriamo un oggetto con geometria sferica e dimensione fisica R , l'energia potenziale gravitazionale totale avrà la forma $-\alpha \frac{GM^2}{R}$, dove α è un coefficiente numerico che dipende dalla geometria del sistema; in questo caso si avrebbe $\alpha = \frac{3}{5}$. Utilizzando il Teorema del Viriale si ha che:

$$M = \frac{Rv^2}{\alpha G} \quad (2.2)$$

con v^2 dispersione delle velocità. Nella (19) tutte le grandezze sono direttamente misurabili; di conseguenza, l'equazione rappresenta un ottimo strumento per il calcolo della massa di questi oggetti.



Figura 2.1: Immagine dell'ammasso di galassie SDSS J0333+0651, un sistema autogravitante.
Image credit: *ESA/Hubble and NASA*

2.1.1 Piano viriale

Consideriamo un sistema che sia:

- All'equilibrio
- Autogravitante
- A distribuzione sferica
- Formato da componenti di egual massa

si ha, inoltre, che $K = -\frac{U}{2}$, per il Teorema del Viriale.

É utile considerare una rappresentazione grafica del Teorema del Viriale: il **piano Viriale**.

Ogni sistema isolato rispetta il principio di conservazione dell'energia $K - |U| = E$ quindi si verrà a trovare su rette parallele alla bisettrice, data da $K = |U|$. Come si può vedere dalla Figura 2.2, sistemi auto gravitanti che abbiano $E > 0$ non possono essere virializzati, infatti non intersecano la retta del viriale.

Al crescere di $|U|$ si hanno sistemi più densi, mentre al crescere di K si hanno sistemi più caldi. Si consideri un sistema all'equilibrio che si trova sulla retta del viriale nel punto A. Se il sistema ha temperatura maggiore rispetto all'ambiente circostante, esso perderà energia cinetica spostandosi verso il punto B, appartenente ad una retta di energia inferiore; ora, il sistema ha temperatura minore rispetto a prima e non si trova più all'equilibrio.

Esso ritornerà all'equilibrio sul punto C muovendosi lungo la retta energetica in cui si trova, poichè, per la conservazione dell'energia, è ad essa vincolato.

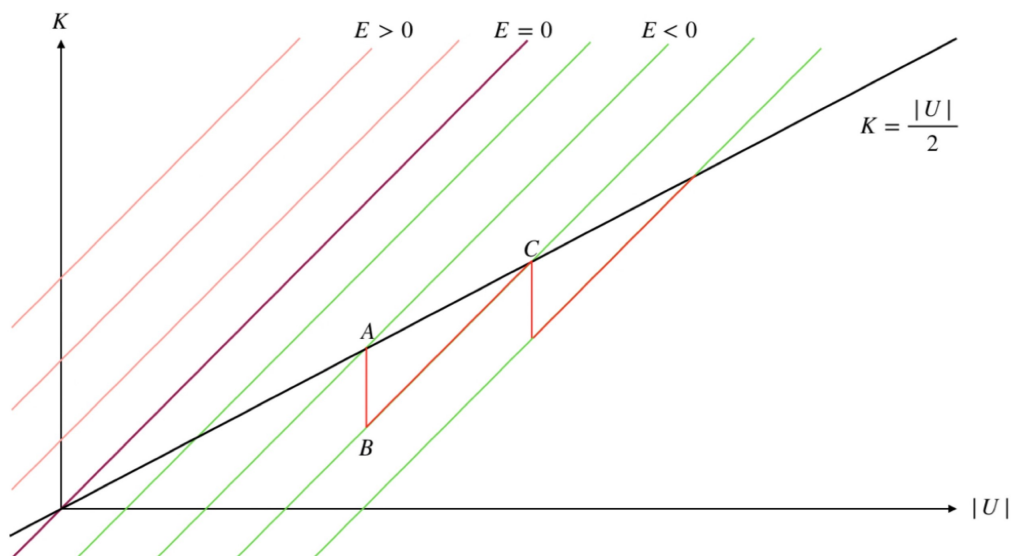


Figura 2.2: *piano Viriale*
Image credit: *Angela Cratere, Università di Bologna*

In questa nuova configurazione il sistema è più legato e ha guadagnato energia cinetica; complessivamente, si trova in una nuova posizione di equilibrio, con energia inferiore rispetto all'inizio. Viceversa, se il sistema acquistasse energia, nel tornare all'equilibrio si porterebbe ad una situazione di energia maggiore, temperatura (K) minore ed ($|U|$) minore. Questo tipo di sistemi è detto a **calore specifico negativo** poichè dopo un iniziale "riscaldamento", nel nuovo stato di equilibrio presentano un'energia maggiore, ma non un'energia cinetica maggiore.

Alcune strutture stellari, come gli amassi globulari, hanno un tempo di rilassamento a due corpi minore della loro età. Di conseguenza, gli urti sono dominanti e può avvenire la cosiddetta *evaporazione gravitazionale*. In questi sistemi una frazione delle stelle può avere velocità maggiore della velocità di fuga dell'ammasso.

Questa perdita di massa comporta una diminuzione di energia cinetica ed un conseguente raffreddamento. Nondimeno, essendo il calore specifico negativo, la perdita di energia porta il sistema ad un nuovo stato nel quale K e $|U|$ sono maggiori.

L'ammasso è ora più denso e caldo, quindi si ha una maggiore frequenza per gli urti che porta il processo a ripetersi. Il sistema perde altre stelle e si contrae, questo porta ad una *Catastrofe Gravotermica*.

2.2 Formazione stellare

Le primissime fasi della formazione stellare coinvolgono la condensazione di un'irregolarità della densità in una nube di gas nel mezzo interstellare (ISM). Questo avviene sotto l'azione della gravità o, in alternativa, di una *shock wave* proveniente da una supernova.

In un sistema in equilibrio idrostatico la forza gravitazionale è bilanciata dalla forza di pressione, e questo previene il collasso o l'espansione della nube.

Per capire quando una nube collasserà è necessario trovare la massa minima per la quale l'energia termica ($\propto M$) è minore dell'energia potenziale gravitazionale ($\propto M^2$).

Dal Teorema del Viriale, la condizione per l'*instabilità di Jeans*, che innesca il collasso è:

$$2K < |U| \tag{2.3}$$

2.2.1 Criterio di Jeans

Consideriamo una nube molecolare di raggio R , massa M e densità ρ alla temperatura T che soddisfi, inizialmente, $2K = -U$. Il termine dell'energia cinetica, in questo caso, è l'energia termica

$$K = \frac{3}{2}NkT \quad (2.4)$$

per N particelle, e l'energia potenziale gravitazionale per una sfera di densità uniforme è

$$U = -\frac{3GM^2}{5R} \quad (2.5)$$

Per una nube composta principalmente da H_2 si ha $N \simeq M/2m_p$ e $M = (4/3)\pi R^3 \rho$, quindi

$$\frac{4\pi}{3}GR^2\rho = \frac{5kT}{2m_p} \quad (2.6)$$

allora

$$R_J = \left(\frac{15kT}{8\pi m_p G \rho} \right)^{1/2} \simeq 8.5 \times 10^6 \left(\frac{T}{\rho} \right)^{1/2} \text{ m} \quad (2.7)$$

Questo è il **Raggio di Jeans**.

La massa contenuta in una regione con tale raggio è la **Massa di Jenas**:

$$M_J = \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} \left(\frac{5kT}{2Gm_p} \right)^{3/2} \quad (2.8)$$

Inoltre, si definisce la **Densità di Jeans** come:

$$\rho_J = \frac{3}{4\pi M^2} \left(\frac{3kT}{Gm} \right)^3 \quad (2.9)$$

con $m \simeq 2m_p$.

Per masse maggiori della massa di Jeans, la forza di pressione non è in grado di contrastare la gravità e mantenere l'equilibrio idrostatico. Se la stessa massa è confinata in uno spazio più piccolo il termine gravitazionale eccederà il termine di pressione ed il sistema diventerà sempre più piccolo e denso.

2.2.2 Collasso di una nube

Il criterio di Jeans fornisce le condizioni per il collasso di una nube che porta alla formazione stellare.

Consideriamo una tipica nube molecolare

$$M \sim 1000M_\odot \quad T \sim 20K \quad (2.10)$$

essendo il gas tutto molecolare, si ha $m \sim 2m_p$. Le condizioni per il collasso sono:

- $M > M_J$
- $R > R_J$
- $\rho > \rho_J$

Per una tipica nube molecolare gigante si ha

$$\rho_J = 3 \times 10^{-24} \left(\frac{M}{1000M_\odot} \right)^{-2} \left(\frac{T}{20} \right)^3 \text{ g cm}^{-3} \quad (2.11)$$

ovvero

$$n_J = \frac{\rho_J}{m} = \left(\frac{M}{1000M_\odot} \right)^{-2} \left(\frac{T}{20} \right)^3 \text{ cm}^{-3} \quad (2.12)$$

La tipica densità media delle nubi molecolari giganti è

$$n \sim 10^2 - 10^4 \text{ cm}^{-3} \gg n_J \quad (2.13)$$

Di conseguenza, questo tipo di strutture può facilmente iniziare a collassare. Il collasso avviene in un tempo $t_{dyn} = 1/\sqrt{G\rho}$, detto tempo dinamico. Talvolta, quando una struttura inizia a collassare può subire la cosiddetta *violent relaxation*: il materiale di cui è formata la struttura si adatta rapidamente in modo da raggiungere un certo equilibrio tra le forze di pressione e gravità. Le velocità delle particelle al suo interno diventano casuali e la struttura si assesta in una configurazione di equilibrio; in questo stato le proprietà non subiscono ulteriori cambiamenti. Questo processo è chiamato *virializzazione*.

A questo punto, si ha una struttura *quasi-statica* che può iniziare ad essere considerata come una vera e propria *protostella* controllata dal Teorema del Viriale:

$$2K + U = 0 \quad (2.14)$$

dunque si ha che

$$E = U + K \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow E = -\frac{U}{2} + U \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow E = \frac{U}{2} \quad (2.17)$$

con E energia totale interna del sistema.

La struttura stellare continua a contrarsi, il guadagno di energia derivante da questo processo supplisce alla perdita di energia per irraggiamento e contribuisce all'aumento della temperatura interna. Precisamente, si ha che metà della variazione di energia potenziale andrà spesa per aumentare l'energia cinetica interna (e dunque la temperatura). La restante metà verrà irraggiata.

La luminosità di una struttura stellare è data dalla variazione di energia interna E :

$$L = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} \left| \frac{dU}{dt} \right| \quad (2.18)$$

$$\Rightarrow \int_0^t L dt = \frac{1}{2} |U| \quad (2.19)$$

Si ricava il tempo scala di **Kelvin-Helmholtz**:

$$t_{kh} = \frac{|U|}{2L} \quad (2.20)$$

Il tempo di Kelvin-Helmholtz è il tempo necessario affinché una struttura stellare perda tutta la sua energia cinetica interna per irraggiamento, al suo attuale *luminosity rate*. Tuttavia, si osserva che questo tempo è molto minore dell'età di qualsiasi stella osservata. Ciò è dovuto al

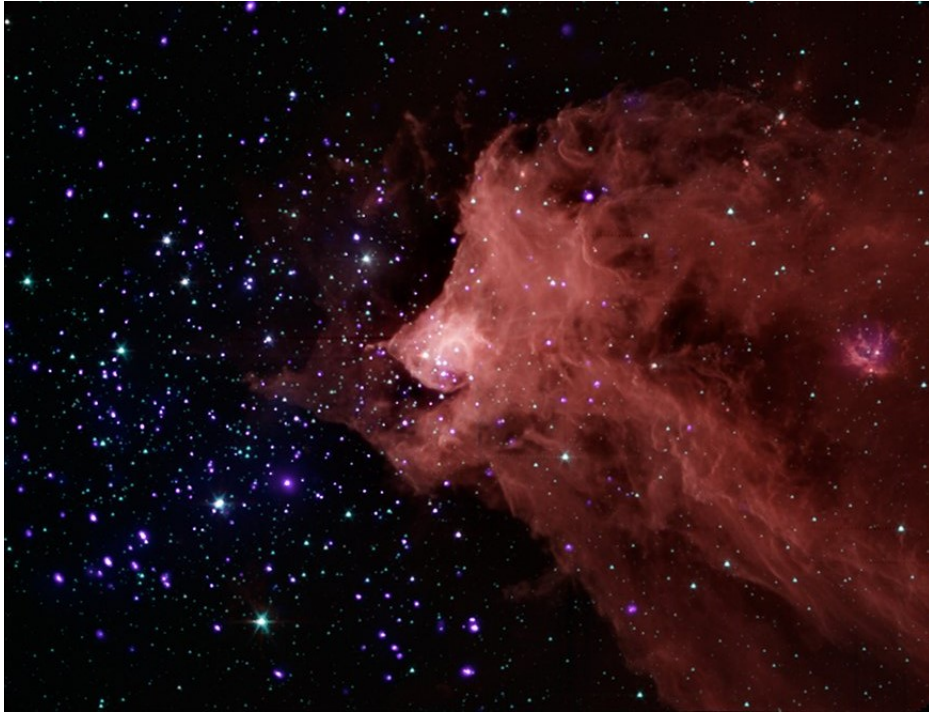


Figura 2.3: La nube molecolare Cepheus B, localizzata a 2400 anni luce dalla Terra.
Image credit: NASA/JPL-Caltech

fatto che, ad una certa fase dell'evoluzione stellare, si innescano le reazioni termonucleari nel nucleo. Queste si attivano ad una certa temperatura limite del nucleo e bilanciano le perdite radiative, rallentando notevolmente la contrazione.

Prendiamo come esempio il Sole:

$$t_{kh\odot} \simeq 3 \times 10^7 \text{anni} \quad (2.21)$$

Nondimeno, l'età del sistema solare è $\simeq 4.6 \times 10^9$ anni; questa discrepanza è dovuta, appunto, alle reazioni termonucleari nel nucleo solare.

2.3 Materia oscura

Modelli teorici sulla composizione dell'universo uniti ad una serie di osservazioni cosmologiche, hanno portato alla conclusione che il cosmo sia formato per il $\sim 70\%$ da energia oscura, $\sim 25\%$ da materia oscura ed il restante $\sim 5\%$ dalla comune materia barionica. Poco si sa su cosa sia esattamente la materia oscura, finora le poche convinzioni sono su cosa *non è*, ovvero sappiamo che non è nella forma di stelle, pianeti o sistemi astronomici visibili. In secondo luogo, non è nella forma di nubi oscure di materia normale, formate anch'esse da particelle barioniche. Questa sicurezza proviene dal fatto che le nubi barioniche sono individuabili grazie all'assorbimento della radiazione che le attraversa. Inoltre, non è *antimateria* poichè non si osservano i particolari raggi gamma che quest'ultima emette quando si annichilisce con la materia. Infine, si può escludere che la materia oscura consista di buchi neri grandi quanto una galassia sulla base del numero di eventi osservati di *gravitational lensing*.

Quindi, il quesito della materia oscura è tuttora oggetto di numerosi studi e ricerche, che provano a spiegare di cosa sia esattamente costituita.

2.3.1 Coma Cluster

Il primo a scoprire l'esistenza di un'anomalia gravitazionale negli ammassi di galassie fu Fritz Zwicky.

Egli utilizzò il Teorema del Viriale per calcolare la massa totale del cluster Coma. A partire da osservazioni sulle velocità radiali di 8 galassie nell'ammasso, ottenne una dispersione di velocità inaspettatamente alta. Zwicky concluse che, per un risultato così alto, l'ammasso dovesse avere una densità media 400 volte più grande di quella derivante dalla materia barionica. È importante notare che Zwicky sovrastimò il rapporto massa-luminosità del Coma cluster poiché assunse un valore della costante di Hubble pari a $H_0 = 558 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. La sua deduzione riguardo la densità si ridurrebbe quindi da 400 a ~ 50 , che conferma, comunque, la conclusione sulla presenza di materia oscura.

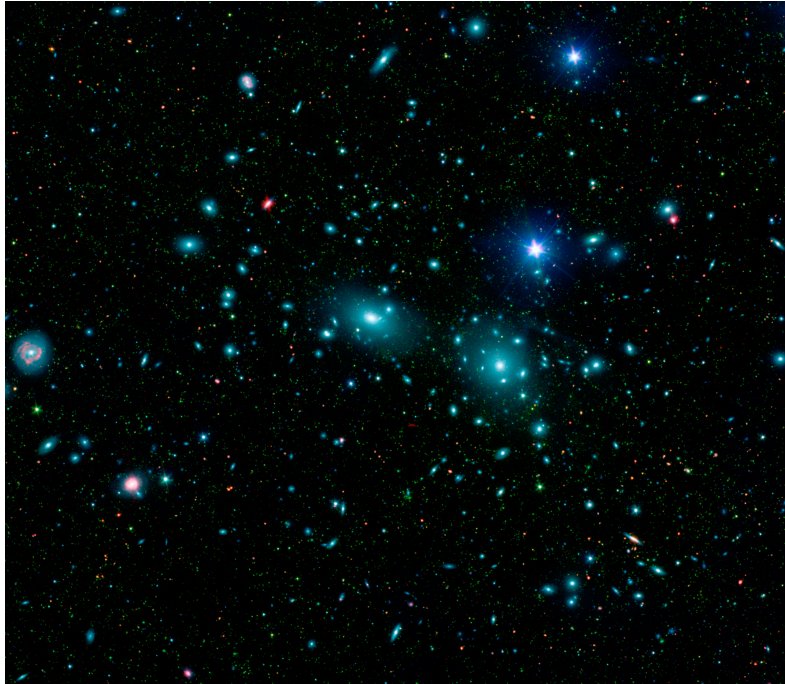


Figura 2.4: Coma cluster.
Image credit: NASA/JPL-Caltech

Zwicky osservò che la massa totale (barionica) all'interno del cluster era:

$$M \sim 8.0 \times 10^{11} M_{\odot} \quad (2.22)$$

Dai tempi di Zwicky, è stata scoperta più massa nel cluster, sotto forma di gas caldo. La nuova stima della massa luminosa è

$$M = 1.6 \times 10^{14} M_{\odot} \quad (2.23)$$

Procediamo ora al calcolo della massa totale, così come fece Zwicky. Per una distribuzione sferica di galassie, l'energia potenziale totale è

$$|U| = \frac{GM^2}{R} \quad (2.24)$$

Con R raggio dell'ammasso.

Con il redshift è possibile misurare solo le velocità parallele alla linea di vista (v_{\parallel}).

Se si assume una distribuzione isotropica delle velocità, la velocità media sarà $\langle v^2 \rangle = 3\langle v_{\parallel}^2 \rangle$. Di conseguenza, l'energia cinetica totale del cluster è

$$K = \frac{3}{2}M\langle v_{\parallel}^2 \rangle \quad (2.25)$$

Combinando l'equazione 2.24 con la 2.25, dal Teorema del Viriale si ottiene:

$$\frac{3}{2}M\langle v_{\parallel}^2 \rangle = \frac{GM^2}{2R} \Rightarrow M = \frac{3R\langle v_{\parallel}^2 \rangle}{G} \quad (2.26)$$

Inserendo i valori delle grandezze in gioco si ha che la massa totale ammonta a

$$M = 1.9 \times 10^{15} M_{\odot} \quad (2.27)$$

Confrontando questo risultato con la stima data della massa barionica (equazione 2.23) si può notare come la massa osservata sia in difetto rispetto a quella totale.

Quasi 90 anni dopo questo lavoro, le deduzioni di Fritz Zwicky rimangono valide ed il mistero riguardo la materia oscura resta, appunto, un mistero.

Bibliografia

- [1] D.MERRITT. *Optimal Smoothing for N-Body Code*. Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, New Brunswick, NJ 08855.
- [2] LUCA CIOTTI *Appunti di dinamica stellare* Bertinoro. 2006.
- [3] LUKE A. CORWIN *The First Evidence for Dark Matter: The Virial Theorem and Galaxy Cluster Motion* South Dakota School of Mines and Technology. 2014.
- [4] MALCOLM BREMER *Appunti del corso Galaxies* presieduto dal Prof. Malcolm Bremer, University of Bristol. A.A 2018/2019.
- [5] A. MARCONI *Appunti del corso di Introduzione all'astrofisica* presieduto dal Prof. A. Marconi, Università degli studi Firenze, A.A 2014/2015.
- [6] CESARE CHIOSI *Struttura ed evoluzione delle stelle*. Università di Padova, dipartimento di Astronomia.
- [7] J.BINNEY, S.TREMAINE *Galactic Dynamics*. Princeton University Press. 2008.