

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Materia degenerare: fisica e applicazioni astrofisiche

Relatore:
Chiar.mo Prof. Daniele
Dallacasa

Presentata da:
Silvio Albini

Anno Accademico 2018/2019

Indice

Indice	I
1 Fisica della materia degenere	1
1.1 Sistemi micro-canonici e sistemi canonici	1
1.2 Metodo di Boltzmann	2
1.3 Esempio di materia non degenere: gas perfetti	4
1.4 Materia degenere	5
1.5 Funzione di occupazione e livello di Fermi	6
1.6 Elettroni nei materiali condensati: conduttori e non conduttori	8
1.7 Condensazione di Bose	9
2 Applicazioni astrofisiche	10
2.1 Pressione all'interno di una stella	10
2.2 Diagramma $\log\rho - \log T$	12
2.3 Evoluzione stellare	13
2.4 Nane bianche	14
2.5 Stella di neutroni	15
Bibliografia	16

Sommario

Il comportamento della materia risente in maniera rilevante delle particolari condizioni di temperatura e di pressione in cui si trova. Con il seguente elaborato si vuole inizialmente dare una panoramica di come un insieme di particelle si comporta in condizioni termodinamiche "standard", successivamente descrivere come la materia modifichi il proprio comportamento in condizioni di pressione estrema e quali risultano essere le applicazioni astrofisiche.

Nella prima parte, dopo aver descritto un sistema di N particelle, si cercherà di mostrare il confine sottile oltre il quale gli effetti quantistici entrano in gioco in maniera predominante, approfondendo poi le due categorie di particelle utili alla descrizione degli interni stellari: Bosoni e Fermioni.

Nella seconda parte si mostrano tutte le componenti che contribuiscono alla pressione totale negli interni stellari, riassumendoli in un grafico utile alla collocazione delle Stelle nelle loro diverse fasi evolutive.

Dopo aver dato una panoramica dei diversi stadi caratterizzanti la vita di una stella in base alla propria massa iniziale, ci concentreremo su due casi specifici in cui la pressione di degenerazione gioca un ruolo fondamentale: le nane bianche e la stella di neutroni.

Capitolo 1

Fisica della materia degenere

1.1 Sistemi micro-canonici e sistemi canonici

Il primo passo utile a descrivere il comportamento di N particelle è la definizione di una N -pla di parametri Lagrangiani $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ e dei relativi momenti coniugati $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Lo Spazio delle fasi (SdF) è rappresentato dalle 2 N -ple $z = (p, q)$ e il moto, considerando la conservazione dell'energia, avviene su una superficie dello SdF equi-energetica $\Sigma(E) = \{z; H(z) = E\}$. La connessione tra dinamica e termodinamica avviene attraverso il teorema di Liouville secondo il quale la superficie $\sigma(t)$, formata da tutti gli $z(t)$ partiti da una superficie $\sigma_0 \subseteq \Sigma(E)$, ha una misura integrale invariante nel tempo. In altri termini, le superfici descritte dai punti dello SdF di un sistema Hamiltoniano autonomo possono cambiare forma e posizione nel tempo, ma mantengono la stessa area. In tal caso, per ogni funzione dinamica $F(z)$, si ha:

$$\int_{\Sigma(E)} F(z) d_\sigma z = \int_{\Sigma(E)} F(z(t, z_0)) d_\sigma z_0 \quad \text{per ogni } t. \quad (1.1)$$

Sotto l'ipotesi di ergodicità, detta $\mu(E) = \int_{\Sigma(E)} d_\sigma z$, si dimostra inoltre che:

$$F(T, V) = \frac{1}{\mu(E)} \int_{\Sigma(E)} F(z) d_\sigma. \quad (1.2)$$

Tale risultato ci dice che i valori termodinamici di equilibrio relativi a qualunque funzione dinamica $F(z)$ si ottengono senza bisogno di risolvere le equazioni del moto per calcolare le medie temporali. Tutto ciò che si richiede è una media di $F(z)$ nello SdF del sistema, fatta attraverso una distribuzione di probabilità uniforme sulla superficie del moto $\Sigma(E)$, tale cioè che ogni punto (o stato classico) della $\Sigma(E)$ ha la stessa probabilità degli altri. Tale distribuzione prende il nome di **micro-canonica**. Questa distribuzione fa riferimento a sistemi isolati, la cui energia e il cui numero di gradi libertà N si conservano: tali sistemi, nella terminologia della Termodinamica, prendono il nome di **Micro-Canonici**.

Si può dimostrare che la condizione necessaria affinché un sistema sia ergodico è che non lo si possa scomporre in sistemi non interagenti, ovvero l'Hamiltoniana di un sistema ergodico S , suddiviso in N sotto-sistemi S_1, S_2, \dots, S_N , ognuno caratterizzato dal proprio SdF, si deve quindi presentare nella forma $H = \sum_{n=1}^N h_n(z_n) + \text{interazioni tra gli } S_n$.

Quando le interazioni tra gli S_n sono rappresentati da scambi di calore allora si possono trascurarne gli effetti nei calcoli termodinamici, ottenendo $\Sigma_{sep}(E) = \{z; H_{sep}(z) = E\}$: in tal caso i sotto-sistemi S_n sono detti canonici.

1.2 Metodo di Boltzmann

In caso di sotto-sistemi distinguibili, la N -pla è rappresentativa del sistema in quanto, scambiando tra loro z_j e z_n (diversi), si ottiene uno stato globale differente. Se invece consideriamo dei sotto-sistemi indistinguibili, non esiste nessuna misura che vada a differenziare un eventuale scambio, per cui la N -pla $z = (z_1, z_2, \dots, z_N)$ non risulta essere una rappresentazione biunivoca del sistema, in quanto qualsiasi permutazione delle z_j rappresenta il medesimo stato fisico del sistema. Prima di approfondire gli impatti di questo problema in termodinamica, illustriamo il metodo di Boltzmann per calcolare l'integrale (1.2), considerando un sistema micro-canonico S suddiviso in N sistemi canonici distinguibili e identici S_1, S_2, \dots, S_N . L'idea vincente di Boltzmann per il calcolo del suddetto integrale è di operare un cambio di variabile: invece delle variabili canoniche $z_j(t)$, si introducono le popolazioni $n(t)$ dei livelli, cioè il numero di sistemi canonici che, ad un dato istante, occupano i livelli ϵ_α . La conservazione dell'energia totale e del numero di sotto-sistemi canonici comporta due condizioni sul vettore popolazione $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots, n_\alpha, \dots)$, che determinano l'insieme

$$\Gamma = \left\{ \vec{n}; \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha \epsilon_\alpha = E, \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha = N \right\}. \quad (1.3)$$

La probabilità $P(\vec{n})$ di avere un certo vettore popolazione è data semplicemente dal rapporto tra il numero di modi diversi di realizzare una data popolazione \vec{n} , dato dal numero $W_{Boltz}(\vec{n}) = N! \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha^{n_\alpha}}{n_\alpha!}$, e il numero totale di modi di realizzarne una qualunque rimanendo in Γ :

$$P(\vec{n}) = \frac{W_{Boltz} \vec{n}}{\sum_{\vec{n}' \in \Gamma} W_{Boltz}(\vec{n}')}. \quad (1.4)$$

L'integrale (1.2) diventa

$$F(T, V) = \sum_{\vec{n} \in \Gamma} P(\vec{n}) F(\vec{n}) \approx \int_{\vec{n} \in \Gamma} P(\vec{n}) F(\vec{n}) d\vec{n}. \quad (1.5)$$

Nell'ipotesi $N \gg 1$ si dimostra che la probabilità diventa: $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\vec{n}) = \delta(\vec{n} - \underline{n})$ per cui avremo: $F(T, V) = F(\underline{n})$. Il vettore popolazione di equilibrio \underline{n} , viene calcolato attraverso il metodo dei moltiplicatori di Lagrange,

$$\left(\frac{\partial \ln W_{Boltz}}{\partial n_\alpha} \right)_{\underline{n}} = \gamma + \beta \epsilon_\alpha \implies n_\alpha = g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha - \gamma}, \quad (1.6)$$

dove i due moltiplicatori di Lagrange γ e β si riferiscono rispettivamente alla conservazione del numero di sotto-sistemi e all'energia. Eliminando γ attraverso l'equazione $N = \sum_\alpha n_\alpha$ si ottiene

$$n_\alpha = N \frac{g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha}}{Z_c}, \quad \text{con} \quad Z_c = \sum_{\alpha=0}^{\infty} g_\alpha e^{-\beta \epsilon_\alpha}, \quad (1.7)$$

dove $\beta = (kT)^{-1}$, con k costante di Boltzmann, e Z_c viene definita funzione di partizione canonica.

Fino ad ora ci siamo occupati dei sistemi micro-canonici e canonici che sono tenuti in equilibrio rispettivamente da un vincolo di isolamento e di scambio di calore, ma non di materia. Per quanto riguarda invece i sistemi aperti che scambiano sia calore che particelle, questi sono detti Gran-canonici: per descrivere tali sistemi bisogna introdurre una modifica al primo principio, in quanto il contenuto dell'energia totale dipende da N . In particolare avremo:

$$dE = \overbrace{TdS}^{\delta Q} - \overbrace{PdV}^{\delta L} + \mu dN \quad (1.8)$$

dove la quantità μ è detta potenziale chimico e rappresenta l'energia che occorre fornire o sottrarre al sistema per inserirvi un nuovo sotto-sistema, mantenendo il volume e l'entropia costante. Ponendo $dS = dV = 0$ nella precedente si ottiene $\mu = \left(\frac{\partial E}{\partial N} \right)_{S, V}$. Introducendo l'energia libera di Helmholtz $\Phi(T, V)$:

$$\Phi(T, V) = E - TS \implies d\Phi = d(E - TS) = \mu dN - PdV - SdT, \quad \text{dunque} \quad (1.9)$$

$$\mu = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial N} \right)_{T, V}. \quad (1.10)$$

In questo modo si può nuovamente interpretare il potenziale chimico come la quantità di energia libera che bisogna aggiungere (o togliere) al sistema per inserirvi un ulteriore sotto-sistema, mantenendo costante temperatura e volume. In analogia con il caso canonico, nel caso di sistemi gran-canonici, si definiscono allo stesso modo la funzione di partizione gran-canonica e l'energia libera Ψ detta gran potenziale.

Nel caso di sistemi identici ma distinguibili, ciascuno con funzione di partizione $Z_c^{sing} = \sum_{\alpha} g_{\alpha} e^{-\beta \epsilon_{\alpha}}$, il sistema totale avrà:

$$Z_c^{dist} = (Z_c^{sing})^N = \sum_{\vec{\alpha}} \overbrace{g_{\alpha_1} g_{\alpha_2} \dots g_{\alpha_N}}^{G_{\vec{\alpha}}^{dist}} e^{-\beta(\epsilon_{\alpha_1} + \epsilon_{\alpha_2} + \dots + \epsilon_{\alpha_N})}, \quad (1.11)$$

$$G_{\vec{\alpha}}^{nd} = \frac{G_{\vec{\alpha}}^{dist}}{N!} \implies Z_c^{nd} = \frac{(Z_c^{sing})^N}{N!} \quad (1.12)$$

Considerando una popolazione di equilibrio n_{α} del livello ϵ_{α} , la probabilità che almeno uno dei g_{α} stati disponibili sia occupato da più di un sistema è $\frac{n_{\alpha}}{g_{\alpha}}$, se tale rapporto è molto piccolo. Di conseguenza le equazioni (1.12) valgono nel limite

$$\frac{n_{\alpha}}{g_{\alpha}} = N \frac{e^{-\beta \epsilon_{\alpha}}}{Z_c^{sing}} \ll 1 \quad \forall \alpha \implies N \frac{e^{-\beta \epsilon_0}}{Z_c^{sing}} \ll 1, \quad (1.13)$$

che viene detto limite di non degenerazione, dove ϵ_0 è detto livello fondamentale, cioè quello ad energia più bassa. Nel momento in cui il volume di confinamento diventa arbitrariamente grande, i livelli energetici si infittiscono e si parla in tal caso di limite del continuo (LC) nel quale le somme si trasformano in integrali. Considerando il principio di indeterminazione di Heisenberg, il parametro Lagrangiano e il suo coniugato risultano essere correlati dalla relazione $\Delta q_n \Delta p_n \geq h_p$, dove $h_p = 6,603 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$, per cui la nostra funzione di partizione diventa:

$$Z_c^{sing} = \int g(\epsilon; V) e^{-\beta \epsilon} d\epsilon = \frac{1}{h_p^N} \int e^{-\beta h(z)} dz. \quad (1.14)$$

1.3 Esempio di materia non degenere: gas perfetti

Il Gas Perfetto è il primo modello microscopico utilizzato per indagare sulle proprietà fisiche di un sistema macroscopico. Esso può essere definito come un sistema costituito da N particelle puntiformi e massive (massa m), libere di muoversi in una certa regione spaziale Ω di volume V . Tra le particelle, che seguono una distribuzione di velocità di Maxwell, non ci sono forze interagenti e l'unico modo per scambiarsi energia è dato da urti perfettamente elastici. Tale modello, soprattutto attraverso il lavoro di Avogadro, è il frutto di un passaggio storico-scientifico in cui le singole particelle venivano viste come dei sotto-sistemi dotati di una propria massa e di una individualità dinamica e possiamo considerarlo come il primo passo verso la "quantizzazione" della materia. La termodinamica e la fluidodinamica inizialmente erano delle scienze empiriche che assumevano dei principi ad hoc e successivamente, consapevoli del fatto che un sistema macroscopico era costituito da "corpuscoli" massivi, si pensò di applicare i principi della dinamica al fine di spiegare la termodinamica: ecco come nasce la dinamica microscopica.

Per quanto detto in precedenza, in base alla equazione (1.14) avremo

$$Z_c^{part} = \frac{1}{h_p^3} \int_{\Omega} dr \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} dp = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h_p^3}. \quad (1.15)$$

Consideriamo una particella puntiforme di massa m libera di muoversi in una regione Ω di volume V . L'indeterminazione sulla componente x (o y , o z) della posizione risulta essere $\Delta x \approx V^{1/3}$. Dal principio di Heisenberg segue che la minima indeterminazione su p_x sarà $\Delta p_x \approx \frac{h}{V^{1/3}}$. Per tale ragione l'energia cinetica non può essere zero, a causa delle fluttuazioni quantistiche di p , e avremo dunque un valore minimo dato da: $\epsilon_0 \approx \frac{(\Delta p^2)}{2m} \approx \frac{h^2}{2mV^{2/3}}$. Tale risultato mostra che, per una particella massiva m libera di muoversi, il livello fondamentale $\epsilon_0 \approx V^{-2/3}$. Nel LT, cioè per $V \rightarrow \infty \implies \epsilon_0 = 0$, la (1.13) diventa:

$$\eta = \frac{Nh_p^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \ll 1. \quad (1.16)$$

Il limite di non degenerazione può anche essere espresso in un altro modo considerando che gli effetti quantistici non influiscano fintantoché la distanza media tra due particelle è molto maggiore della loro lunghezza d'onda di De Broglie, cioè:

$$d \gg \frac{h}{(2mkT)^{1/2}} \implies T > 2,4 \cdot 10^{-22} \frac{\rho^{2/3}}{m}. \quad (1.17)$$

1.4 Materia degenera

Nel momento in cui l'equazione (1.16) non è rispettata si parla di gas degenera e il passaggio da particelle distinguibili a indistinguibili non può avvenire semplicemente tenendo conto del numero $N!$ di permutazioni, ma richiede un conteggio specifico. Tale conteggio dipende dalla natura delle particelle, che si possono distinguere in due categorie: Bosoni e Fermioni. I primi possono occupare il medesimo stato in numero arbitrario, i secondi non possono essere più di uno per ogni stato, in base al famoso principio di esclusione di Pauli. Tale differenza è legata a una variabile interna delle particelle denominata spin, che si comporta come un momento angolare quantistico. La sua componente lungo una direzione qualunque è determinata da un indice discreto $m_s = -s, -s+1, \dots, s-1, s$. Per i Bosoni si ha $s = 0, 1, 2, \dots$ (spin intero), per i Fermioni $s = 1/2, 3/2, \dots$ (spin semi-intero). Il numero di stati quantici corrispondenti allo stato semi-classico individuato da p e r è dato dal fattore di molteplicità spinoriale $g_s = 2s + 1$.

Il calcolo del numero di stati dell'intero gas in funzione delle popolazioni $\{n_\alpha\}$, dei livelli energetici $\{\epsilon_\alpha\}$ e delle molteplicità $\{g_\alpha\}$, nel caso dei Fermioni è relativamente semplice e deve tener conto che un singolo stato, che include lo spin, può essere occupato da una particella oppure è vuoto. Partiamo dal primo livello energetico ϵ_0 : in tal caso

vi sono $N!/[n_0!(N - n_0)!]$ modi per scegliere n_0 particelle per popolarlo. La prima ha g_0 stati, la seconda avrà $g_0 - 1$ e così via. Ragionando in questo modo anche per gli altri, avremo un numero totale di stati:

$$W_{Ferm}^{dist} = N! \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - n_{\alpha})!}, \quad (1.18)$$

e, andando a dividere per $N!$, si ottiene il numero di stati del gas di Fermioni indistinguibili dato da W_{FD} :

$$W_{FD} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_{\alpha}!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - n_{\alpha})!}, \quad W_{BE} = \prod_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(g_{\alpha} - 1 + n_{\alpha})!}{n_{\alpha}!(g_{\alpha} - 1)!}, \quad (1.19)$$

dove W_{FD} indica la statistica di Fermi-Dirac per i fermioni, mentre W_{BE} quella secondo Bose-Einstein nel caso dei Bosoni (per la quale è stato necessario un altro tipo di conteggio). Si osserva che per $n_{\alpha}/g_{\alpha} \ll 1 \quad \forall n_{\alpha}$ si ritorna al caso di non degenerazione $\frac{W_{Boltz}}{N!}$. Le popolazioni di equilibrio, indicando con il segno + la statistica di FD e con il segno - quella di BE, saranno:

$$n_{\alpha}^{\pm} = \frac{g_{\alpha}}{e^{\beta(\epsilon_{\alpha} - \mu)} \pm 1}, \quad (1.20)$$

dove il parametro μ corrisponde proprio al potenziale chimico nell'equazione (1.10). Nel caso degenerare si deduce che $\mu \leq 0$ per i Bosoni in quanto, se così non fosse, la popolazione n_0^- del livello fondamentale $\epsilon_0 = 0$ nell'equazione (1.20) sarebbe negativa. Nel caso fermionico μ può essere positivo, e ciò è un effetto del principio di esclusione di Pauli che, in caso di regime di degenerazione rilevante, rende energeticamente sfavorevole aggiungere fermioni al gas.

1.5 Funzione di occupazione e livello di Fermi

Nel momento in cui siamo di fronte a Fermioni fortemente degeneri, conviene definire la cosiddetta funzione di occupazione (FdO) nel LC:

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}. \quad (1.21)$$

Definendo il livello di Fermi come l'energia $\epsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T)$, allora per $T \rightarrow 0$ ($\beta \rightarrow \infty$) la precedente diventa:

$$F(\epsilon, T) = \begin{cases} 1 & \epsilon < \epsilon_F \\ 1/2 & \epsilon = \epsilon_F \\ 0 & \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (1.22)$$

Quanto mostrato si traduce in un'occupazione di tutti gli stati sotto il livello di Fermi e un'occupazione nulla dei livelli superiori. Quanto detto avviene in un gas di fermioni allo zero assoluto, ovvero in uno stato di minima energia nel quale, grazie al principio di Pauli, i fermioni non possono occupare il solo livello fondamentale $\epsilon = 0$, e la minima energia si realizza occupando tutti gli stati disponibili in ordine di energie crescenti. Nella figura (3.1) si osserva che aumentando la temperatura, rimanendo comunque in condizioni di forte degenerazione, la curva si "smussa" e la larghezza dell'intervallo tra la zona in cui $F_T(\epsilon, T) \approx 1$ e quella in cui $F_T(\epsilon, T) \ll 1$ è dell'ordine di kT . Se aumentiamo ulteriormente T , μ si annulla (curva D) fino a diventare negativo, giungendo nuovamente al caso di $e^{-\beta\mu}$, ovvero la condizione di non degenerazione. In quest'ultimo caso la FdO si riduce a una piccola coda esponenziale che rappresenta il fattore di Boltzmann.

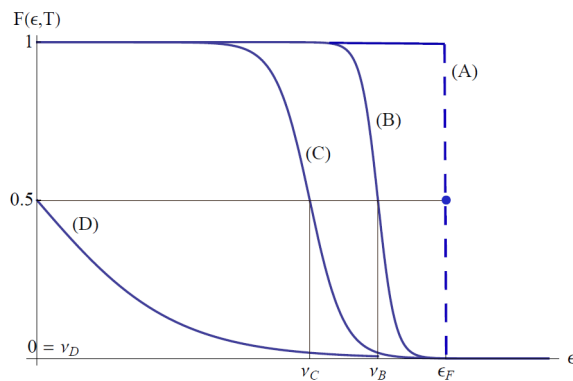


Figura (3.1): Funzione di Occupazione fermionica a varie temperature. Il valore del potenziale chimico μ corrisponde alle energie per le quali $F(\epsilon, T) = 1/2$. (A): $T=0$, $\mu = \epsilon_F$ (B) e (C): $kT \ll \mu$, $\mu > 0$ (D): $\mu = 0$.

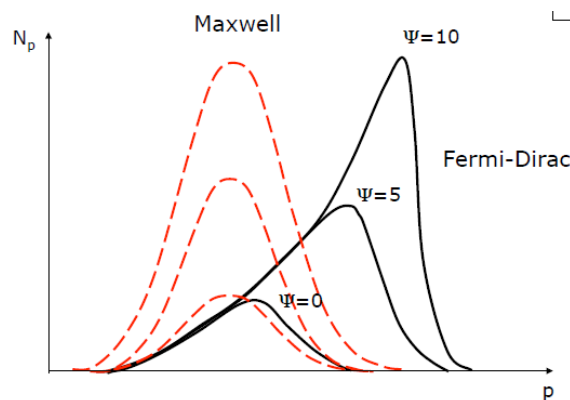


Figura (3.2): confronto tra statistica di Maxwell e Fermi-Dirac.

Riscrivendo la funzione di distribuzione in una forma generale in termini di momenti e di un parametro Ψ , detto indice di degenerazione, si ottiene

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} \frac{p^2}{e^{\left[\frac{p^2}{2mkT} - \Psi\right]} + 1} dp \quad \text{dove} \quad \Psi \propto \frac{1}{kT} \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{2/3}. \quad (1.23)$$

Considerando un livello di degenerazione totale, cioè $\Psi \rightarrow \infty$ si ricade nella statistica FD:

$$N_p dp = \frac{8\pi}{h^3} p^2 dp. \quad (1.24)$$

In figura (3.2) il confronto tra statistica di Maxwell e FD dove si mostra che la prima “lavora” in un regime in cui il numero di particelle è talmente piccolo rispetto ai possibili stati energetici (in un regime a bassa densità), che non risente del principio di esclusione di Pauli. Nel caso degenerare, aumentando la temperatura, non vi è una conseguente crescita della pressione, che invece avviene nel caso non degenerare.

1.6 Elettroni nei materiali condensati: conduttori e non conduttori

Gli elettroni sono dei Fermioni di spin $s=1/2$ e di massa dell'ordine di 10^{-28} g. Nel momento in cui si considera un materiale condensato la densità degli stati degli elettroni risulta essere a bande di energia, separate dalle cosiddette zone proibite (dette anche gaps) in cui non vi sono stati elettronici $g(\epsilon) = 0$. Nel momento in cui gli atomi sono posti a distanze relativamente piccole gli elettroni di valenza (quelli di maggiore interesse di studio) tendono a condividere i siti atomici, trasformando la loro funzione d'onda da localizzata su un singolo atomo ad estesa. In corrispondenza della delocalizzazione della funzione d'onda il livello atomico si allarga formando una banda continua. Le bande generate da livelli atomici diversi tendono ad essere separate da gap di energia. Osserviamo che, considerando le densità elettroniche $\approx 10^{21-23} \text{cm}^{-3}$ e la loro piccola massa, la condizione (1.16) non viene rispettata, per cui, a temperature ambientali, siamo in una condizione di forte degenerazione. L'importanza del livello di Fermi ϵ_F è dovuto al fatto che definisce la differenza tra i conduttori e non conduttori: nel caso in cui ϵ_F cada in un gap, ovvero in un intervallo definito di energie dove vale $g(\epsilon) = 0$, allora si parlerà di non conduttori. Nel caso in cui invece il livello di Fermi cada in un intervallo di energia dove gli eventuali zeri di $g(\epsilon)$ sono punti isolati, si parlerà di conduttori. In condizione di forte degenerazione non tutti gli elettroni contribuiscono allo stesso modo ai processi termici. Considerando che in tali processi la quantità di energia scambiata è dell'ordine di kT , gli elettroni che si trovano in stati significativamente al di sotto di quello di Fermi trovano, sia sopra che sotto il proprio livello, stati già occupati, per cui,

considerando il principio di Pauli, la probabilità che scambino energia con l'ambiente è praticamente nulla (elettroni congelati). Lo stesso discorso vale per energie messe in gioco da eventuali differenze di potenziale elettrostatico, dunque anche in tal caso gli elettroni “congelati” non daranno un contributo in termini di conduzione elettrica. Al contrario gli elettroni la cui energia eccede il livello di Fermi, essendo in una zona in cui $F(\epsilon, T) \ll 1$, e quindi a energie scarsamente popolate, la percentuale di stati vuoti sarà molto alta. Questi ultimi elettroni vengono detti efficaci e formano a tutti gli effetti un gas ND e partecipano a fenomeni elettrici e termici. Andando a calcolare il numero degli elettroni efficaci nei 2 scenari si ottiene:

$$N_{eff}^{cond} \propto T^{2n+1}, \quad N_{eff}^{ncond} \propto T^{\gamma_2} e^{-\beta\epsilon_g/2}, \quad (1.25)$$

dove ϵ_g è l'energia di gap mentre γ_2 è legata allo sviluppo in serie di $g_j(\epsilon)$. Da tali risultati si evincono le notevoli differenze tra conduttori e non conduttori: i primi sono caratterizzati da una legge di potenza della temperatura, per quanto riguarda i secondi la legge di potenza viene “smorzata” da un fattore esponenziale negativo dovuto all'ampiezza del gap. Per quanto detto, al di sotto di certe temperature, gli effetti termo-elettrici dei non conduttori saranno piccoli rispetto a quelli dei conduttori.

1.7 Condensazione di Bose

Consideriamo la popolazione di equilibrio nel caso Bosonico nell'equazione (1.20). Per $T \rightarrow 0$, ricordando che $\mu \leq 0$, si ottiene che l'intero gas raggiunge lo stato di minima energia e va a localizzarsi nel cosiddetto condensato. In tale situazione tutti i Bosoni sono nel livello fondamentale che può accogliere un numero estensivo di Bosoni. Essendo la μ non positiva e una funzione non crescente di T , ci sarà una certa temperatura T_b , detta temperatura di Bose, per la quale $\mu(T_b) = 0$ e, per quanto detto, $\mu(T) = 0$ per ogni $T < T_b$. In conclusione avviene una transizione brusca da $\mu < 0$ per $T > T_b$ a $\mu = 0$ per $T \leq T_b$, in cui il potenziale chimico si annulla: tale processo critico è denominato Condensazione di Bose-Einstein (CdB). L'importanza concettuale di tale brusca transizione è dovuta al fatto che uno stato quantico (o un numero limitato e piccolo di stati quantici) può dar vita a degli effetti macroscopici, in quanto al suo interno sono presenti un numero enorme di Bosoni che possono dar luogo a una forma di superfluidità. A differenza di una normale corrente, dove un eventuale campo esterno agisce sulle singole particelle in modo che queste si muovano in maniera incoerente l'una dall'altra, il condensato si comporta come un unico blocco di Bosoni identici che si muovono come un corpo unico. Nel primo caso ogni particella dissipa individualmente parte dell'energia acquisita, nel secondo caso l'energia viene dissipata in maniera collettiva con una probabilità trascurabile. In questo modo un condensato si comporta come un superfluido.

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Pressione all'interno di una stella

Al fine di applicare quanto visto nella prima parte andiamo a considerare una stella. Affinché la struttura sia autogravitante è necessario che la risultante di tutte le forze agenti su un elemento di materia sia nulla, in particolare deve avvenire che $F_{pres} + F_{grav} = 0$, che è l'equazione dell'equilibrio idrostatico. In realtà la storia evolutiva di una struttura stellare è caratterizzata da continue contrazioni che vengono ciclicamente arrestate dall'innesco delle reazioni termonucleari: per tali ragioni i modelli teorici considerano l'evoluzione come una sequenza di strutture statiche al variare del tempo. Per quanto detto risulta fondamentale capire il comportamento della materia negli interni stellari: a causa delle altissime temperature gli elettroni sono separati dai nuclei e dunque il gas sarà costituito da un plasma di ioni e elettroni. Considerando, in prima approssimazione, che il plasma si comporti come un gas perfetto, allora:

$$P_{gas} = \rho \frac{kT}{\mu H}, \quad (2.1)$$

dove μ è il peso molecolare medio mentre H è la massa del nucleo di idrogeno. La pressione totale sarà $P = P_{gas} + P_{rad}$, dove P_{rad} è la pressione di radiazione:

$$P_{rad} = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^4}{c}, \quad (2.2)$$

dove $\sigma = 5,6 \cdot 10^{-5} \text{erg sec}^{-1} \text{cm}^{-2} \text{K}^{-4}$ è detta costante di Stefan, cioè la pressione esercitata dai fotoni (Bosoni). Osserviamo che la pressione di radiazione diventa tanto più importante man mano che T aumenta e ci troviamo a basse densità: negli interni stellari la P_{rad} è trascurabile rispetto alla P_{gas} .

Dall'equazione (1.17) si evince che per particelle "pesanti" come i protoni ($\approx 10^{-24}g$), tale relazione può essere soddisfatta e di conseguenza è possibile trascurare gli effetti

quantistici mentre, per quanto riguarda gli elettroni ($\approx 10^{-27}g$), gli effetti della degenerazione diventano rilevanti: per tale ragione gli ioni potrebbero non violare il limite di non degenerazione, a differenza degli elettroni. Considerando un gas costituito da soli elettroni, in generale la pressione sarà data da:

$$P = \frac{1}{3} \int_0^\infty N(p) p v dp. \quad (2.3)$$

Considerando la (1.24) si trova quindi

$$P = \frac{1}{3} \int_0^{p_0} \frac{8\pi}{h^3} p^3 v dp, \quad (2.4)$$

dove p_0 è il momento di Fermi, ovvero il massimo momento possibile che un sistema di fermioni può assumere ad una certa temperatura e vale:

$$p_0 = \sqrt[3]{\frac{3h^3}{8\pi} \frac{\rho}{\mu H}}. \quad (2.5)$$

A questo punto bisogna distinguere due casi: il regime non relativistico e quello relativistico. Nel primo caso si assume $p_0 \ll m_e c$, per cui dalla (2.4) si trova:

$$P = K_1 \rho^{5/3}, \quad (2.6)$$

mentre per $p_0 \simeq m_e c$

$$P = K_2 \rho^{4/3}, \quad (2.7)$$

con $K_1 = 10^{13} \mu_e^{-5/3}$ e $K_2 = 1,2 \cdot 10^{15} \mu_e^{-4/3}$.

Per quanto detto, nel momento in cui l'indice di degenerazione è basso (basse densità), allora il numero di stati quantici corrispondenti ad un certo livello è molto maggiore rispetto al numero di particelle che occupano quel determinato livello. In queste circostanze le particelle seguono la statistica di Maxwell e la pressione aumenta in funzione della temperatura. Nel momento in cui il numero di particelle aumenta in maniera considerevole, allora tutte le particelle sono costrette ad occupare tutti i livelli meno energetici di quello di Fermi, eliminando di fatto la dipendenza da T. Il fatto che in tali condizioni la temperatura non rappresenti una incognita, determina che gli interni stellari si possano studiare considerando solamente le equazioni di equilibrio idrostatico e continuità della massa, in aggiunta all'equazione di stato. In tal caso si parla di modelli politropici nei quali vale:

$$P(\rho) = k \rho^{1+\frac{1}{n}}, \quad (2.8)$$

dove $n=1,5$ nel caso non relativistico mentre, nel caso relativistico, $n=3$.

2.2 Diagramma $\log\rho - \log T$

Per quanto detto finora il contributo della pressione totale è dato da un termine dovuto alla pressione di radiazione, uno ottenuto dalla legge dei gas perfetti in quanto considerazioni che difficilmente si trovano in condizioni di degenerazione grazie alla loro massa e, infine, un termine che può assumere diverse connotazioni a seconda del particolare regime in cui si trovano gli elettroni, riassumendo:

$$P_{tot} = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^4}{c} + \frac{k\rho T}{\mu_i H} + \begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu_e H} & \text{Non degenera} \\ K_1 \rho^{5/3} & \text{Degenera Classico} \\ K_2 \rho^{4/3} & \text{Degenera Relativistico} \end{cases} \quad (2.9)$$

Riscriviamo quindi le equazioni (2.1),(2.2),(2.6) e (2.7):

$$\begin{cases} \frac{k\rho T}{\mu H} = \frac{a}{3} T^4 & \implies \log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7,57 \\ \frac{k\rho T}{\mu_e H} = K_1 \rho^{5/3} & \implies \log T = \frac{2}{3} \log \rho + 4,88 \\ K_1 \rho^{5/3} = K_2 \rho^{4/3} & \implies \log \rho = 6,6 \\ \frac{k\rho T}{\mu_e H} = K_2 \rho^{4/3} & \implies \log T = \frac{1}{3} \log \rho + 7,57 \end{cases} \quad (2.10)$$

Riportando tali equazioni in un piano $\log\rho - \log T$ otteniamo il grafico che ci permetterà di comprendere, in base ai valori di temperatura e densità di una stella, quale componente della pressione prevale. Nel grafico le stelle di sequenza principale si collocano nella zona non degenera dove domina la pressione del gas perfetto dipendente dalla temperatura. Le giganti rosse sono a cavallo tra la zona di degenerazione non relativistica e la zona di non degenerazione. Infine le nane bianche e le stelle di neutroni si trovano tra le due zone di degenerazione, quella non relativistica e relativistica.

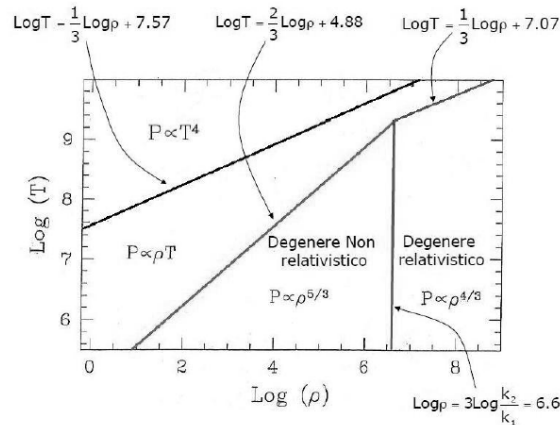


Figura (3.3): Grafico $\log\rho - \log T$ che ci permette di conoscere quale componente di pressione prevale negli interni stellari.

2.3 Evoluzione stellare

Il fenomeno della degenerazione è fondamentale per la comprensione del percorso evolutivo di una stella. Per comprendere il ruolo della degenerazione durante la vita di una stella, consideriamo le fasi principali che lo caratterizzano: la sequenza principale, la fase post-sequenza principale e la fase finale. La durata della fase di sequenza principale varia in base alla massa secondo la legge $t_{MS} \approx \frac{M}{L} \approx M^{1-\alpha}$, dove tipicamente $\alpha = 3$ per $M > M_{\odot}$, per cui se la massa è maggiore allora t_{MS} è inferiore. Tale fase è quella più lunga dell'evoluzione di una stella, durante la quale l'idrogeno viene fuso in elio, cioè la stella è in equilibrio idrostatico. Osserviamo che nella formula precedente, siccome la luminosità aumenta più rapidamente della massa, t_{MS} è tanto più piccolo quanto è più massiccia la stella. Tutte le stelle che si trovano nella fase di fusione dell'idrogeno possono essere collocate in una fascia detta sequenza principale all'interno del diagramma H-R, ciascuna caratterizzata da una temperatura, colore e luminosità ben definite. Nel momento in cui l'idrogeno si sta per esaurire e quindi l'energia prodotta dalle reazioni termonucleari non è sufficiente a controbilanciare la pressione degli strati più esterni, l'equilibrio idrostatico viene a mancare. A questo punto ci sarà una fase di contrazione che porterà alla fusione dell'idrogeno restante e alla fusione dell'elio in carbonio, che produrrà un sovrariscaldamento della stella con una conseguente espansione degli strati più esterni al fine di dissipare l'energia in eccesso. La stella diventa una gigante rossa, una stella più fredda spostata quindi verso il rosso e più luminosa rispetto alle stelle in MS. A questo punto l'evoluzione dipende in maniera sostanziale dalla massa iniziale [5]:

- $M < 2,2M_{\odot}$: l'evoluzione attiva termina nella fase di gigante rossa. Per tali masse, nel momento in cui il bruciamento dell'idrogeno è terminato, il nucleo è costituito da elio degenere che non permette un'ulteriore contrazione e dunque la sua fusione. In tali circostanze la minore produzione di energia dall'interno determina un'espansione degli strati più esterni che porterà la stella nel diagramma H-R verso il ramo delle giganti rosse. In tale fase avvengono i cosiddetti flash (quando il nucleo ha una massa $> 0,5M_{\odot}$) che trasformano l'elio in carbonio e ossigeno, la stella diventa instabile e gli strati esterni iniziano a pulsare, fino a quando vengono espulsi in direzione radiale lasciando scoperto il nucleo caldo e denso, che darà vita a una nana bianca. L'insieme del nucleo e della nube di gas espulso prende il nome di nebulosa planetaria. Osserviamo che per masse $< 0,5M_{\odot}$ il core sarà ancora costituito da Elio senza formazione della nana bianca.
- $2,2M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$: in tal caso il nucleo entra in una condizione di degenerazione nel momento in cui il core della stella è costituito da carbonio e ossigeno, che darà luogo a una nana bianca.
- $8M_{\odot} \leq M \leq 11M_{\odot}$: si forma un nucleo non degenere di carbonio e ossigeno. Tali oggetti possiedono la giusta combinazione di temperatura e pressione necessaria a

consentire la fusione di elementi più pesanti del carbonio e dell'ossigeno, come il neon. A questo punto ci sono due possibilità in base alla massa del nucleo: se questa supera il limite di Chandrasekhar allora avverrà un'esplosione in una supernova, altrimenti si spengono come nane bianche (ossigeno e neon).

- $M > 11M_{\odot}$: si riescono a raggiungere temperature così alte capaci di generare delle catene di reazioni che portano alla formazione del ferro. In questa fase la struttura della stella diventa stratificata e in ciascun guscio avviene la fusione di un particolare elemento fino alla generazione del ferro nella parte più interna. Il processo va avanti finché il nucleo non raggiunge una massa pari al limite di Chandrasekhar (che vedremo in seguito), oltre il quale inizia il collasso della struttura, in quanto la pressione di degenerazione non riesce più a sostenere la struttura. In queste condizioni gli elettroni interagiscono con i protoni dando vita a neutroni, neutrini e fenomeni di cattura elettronica, con conseguente diminuzione degli elettroni liberi che potrebbero contribuire a una pressione di degenerazione elettronica. Tutta la materia esterna al nucleo, non avendo più il sostegno del core, rimbalza su di esso generando un'onda d'urto, dando origine alla cosiddetta esplosione di supernova di tipo II. In questo modo tutti gli elementi presenti durante la vita della stella vengono riversati nel mezzo interstellare. L'esplosione lascia un remnant che può essere di due tipi a seconda della massa del nucleo:
 - Stella di neutroni, sostenuta dalla pressione di degenerazione dei neutroni se la massa del nucleo è $1,4M_{\odot} \leq M_{nucl} \leq 2,5M_{\odot}$
 - Buco nero se la $M_{nucl} > 2,5M_{\odot}$, in quanto nemmeno la pressione di degenerazione dei neutroni riesce a bilanciare il collasso della struttura

2.4 Nane bianche

Le nane bianche, come detto in precedenza, sono costituite principalmente da C-O. Tipicamente hanno un raggio paragonabile a quello della Terra, ma con masse $\sim M_{\odot}$, se ne deduce quindi che la densità sarà milioni di volte più grande rispetto a quella solare. Tali oggetti risultano essere poco luminosi e, in alcuni di essi, si possono notare anche delle righe allargate di H che, in realtà, risulta essere molto scarso. Tale emissione è dovuta al fatto che, a causa dell'elevata gravità superficiale, i nuclei più pesanti tendono a concentrarsi negli strati più interni mentre, il poco di H e He che ancora non sono stati bruciati si distribuiscono negli strati superficiali. A questo punto riprendiamo l'equazione (2.10): sostituendo i valori $T \approx (10^7)^{\circ}K$ e $\rho \approx 10^6 \frac{gr}{cm^{-3}}$ ci accorgiamo che il gas di una nana bianca risulta essere in uno stato degenero. Nel caso non relativistico, sostituendo i valori nella (2.6), si ottiene che tale pressione è dello stesso ordine di grandezza ($P \approx 10^{23} \frac{dyne}{cm^{-2}}$) della pressione dovuta alla forza di gravità, rappresentata dalla seguente:

$$P_c \approx \frac{2}{3}G\pi\rho^2R^2. \quad (2.11)$$

Tale risultato dimostra che gli elettroni degeneri sono perfettamente in grado di sostenere la pressione gravitazionale al centro di una nana bianca. Inoltre, eguagliando le precedenti, si ottiene un'altra importante relazione che lega la massa al raggio: $M^{1/3}R \approx \text{const}$ cioè all'aumentare della massa deve diminuire il raggio. Concettualmente si spiega considerando che è la pressione di degenerazione ad evitare il collasso della struttura: dunque, se aumenta la massa, l'unico modo per compensare l'aumento di pressione dovuta alla gravità sarà dato dal restringimento del volume che contiene la struttura. Nel caso relativistico l'equazione (2.7) eguagliata all'equazione (2.11) dà luogo alla cosiddetta massa limite di Chandrasekhar: $M_{ch} = 1,44(1 + H)^2M_\odot$ e, considerando l'esigua quantità di H, si ottiene $M_{ch} \approx 1,44M_\odot$.

2.5 Stella di neutroni

Le stelle di neutroni sono il remnant a seguito dell'esplosione di una SNII di una stella massiccia con massa $11M_\odot < M < 25M_\odot$ e sono il risultato del collasso del nucleo di Fe nel momento in cui ha raggiunto M_{ch} . In tal caso il contributo di pressione utile a controbilanciare la forza gravitazionale è dovuto ai neutroni degeneri, i quali sono in grado di sostenere la struttura fino a un valore della massa limite, detto di Oppenheimer-Volkov $\approx 2,5M_\odot$. Il raggio tipico di tali oggetti è dell'ordine di 10-15 Km, la densità centrale $\rho_c \approx 10^{14} - 10^{15}g\text{ cm}^{-3}$ e la temperatura nella fase in cui è diventata stabile $\approx 10^6K$. Come nel caso delle nane bianche, anche le NS seguono la relazione $MV = \text{cost}$, per cui diventano sempre più piccole all'aumentare della massa. Considerando la rotazione del nucleo di Fe che dà origine a una NS, a causa del collasso e del conseguente crollo del raggio, la conservazione del momento angolare garantisce la formazione di una stella di neutroni in rapida rotazione. Inoltre il collasso del nucleo genera anche un aumento dell'intensità del campo magnetico fino a valori dell'ordine di $10^{12} - 10^{13}$ Gauss. L'insieme dei due fenomeni genera un campo elettrico dovuto alla variazione del campo magnetico in ogni punto dello spazio. Essendo il campo elettrico di molti ordini di grandezza superiore alla forza di gravità, alcune particelle si staccano dalla crosta della NS secondo le linee del campo elettrico e vengono forzate a ruotare con la stella creando ciò che viene chiamata magnetosfera. Il fatto che le particelle co-rotanti non possano avere una velocità superiore a quella della luce vincola la dimensione massima delle linee di forza della magnetosfera, detta cilindro di luce. L'emissione avviene sia attraverso il cilindro di luce che attraverso i poli magnetici ma, a causa del fatto che l'asse magnetico non è coincidente con l'asse di rotazione, si produce un effetto pulsato. Ecco perché le NS sono anche denominate pulsar.

Bibliografia

- [1] L. Ferrari (2019), *Elementi di termodinamica statistica*
- [2] F. R. Ferraro (2019), *Astrofisica stellare*
- [3] http://www.brera.inaf.it/~covino/DVG/NEW/A3003EVO.HTM/LaTeX_files/ArteLaTeX.pdf
- [4] <http://www.arcetri.astro.it/~marconi/Lezioni/IntAst14/Lezione06.pdf>
- [5] F. R. Ferraro (2012), *Evoluzione stellare*