

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

Nane Bianche e Limite di Chandrasekhar

Relatore:
Prof. L. Ferrari

Presentata da:
Giuseppe Nazareno Di Gesu

Anno Accademico 2019/2020

Sommario

Lo scopo della tesi è una trattazione del limite di Chandrasekhar e l'introduzione parallela delle Nane Bianche (o White Dwarfs) con le loro peculiari caratteristiche. Per ricavare il limite di Chandrasekhar si otterranno le espressioni delle pressioni agenti nelle Nane Bianche, spiegandone la natura e i loro effetti sulle stelle stesse. Particolare attenzione verrà posta sulle pressioni causate dalla materia degenere.

Indice

1	Materia degenera	1
1.1	Gas Non Degeneri	1
1.1.1	Condizione di Non Degenerazione	1
1.1.2	Gas Perfetti	2
1.2	Gas Degeneri	3
1.2.1	Bosoni e Fermioni	3
1.2.2	Fermioni Degeneri	3
1.2.3	Le Energie Libere di Helmholtz per i Fermioni	5
2	Applicazioni Astrofisiche	7
2.1	Pressione negli interni stellari	7
2.1.1	Pressione di Radiazione	7
2.1.2	Pressione di Degenerazione	8
2.2	Evoluzione stellare	11
2.3	Diagramma di stato della materia stellare	13
3	Nane Bianche e Limite di Chandrasekhar	14
3.1	La scoperta di Sirio B	14
3.2	Nane Bianche	15
3.2.1	Classi di Nane Bianche	15
3.2.2	Pressione gravitazionale nelle Nane Bianche	16
3.2.3	Spettro e Composizione della Superficie	17
3.3	Il Limite di Chandrasekhar	17
3.3.1	La relazione Massa-Volume	17
3.3.2	Stima del Limite di Chandrasekhar	18
4	Conclusioni	21
	Bibliografia	22

Capitolo 1

Materia degenera

In un'introduzione alla descrizione della materia degenera è necessario presentare alcuni dei principali risultati della Termodinamica Statistica. Nei successivi paragrafi di questo capitolo verranno quindi illustrate le basilari nozioni con cui approcciarsi alle equazioni di stato di un sistema termodinamico, che ci permetteranno di trattare gli interni stellari delle nane bianche.

Nel primo paragrafo trattando i gas non degeneri, troveremo la condizione di non degenerazione, definiremo cosa sono i Gas Perfetti e arriveremo a enunciare la famosa *Legge dei Gas Perfetti*.

Nel secondo paragrafo studieremo i gas degeneri introducendo la distinzione tra Fermioni e Bosoni e svilupperemo i comportamenti dei Fermioni nel caso degenera, i quali saranno di cruciale importanza nello studio degli interni stellari. L'ultima sezione sarà interamente dedicata a specifiche considerazioni sull'Energia Libera di Helmholtz dei Fermioni che ci torneranno utili nel Secondo Capitolo.

La trattazione di questo capitolo è per la gran parte ottenuta da [1].

1.1 Gas Non Degeneri

1.1.1 Condizione di Non Degenerazione

La degenerazione è uno specifico stato della materia che si manifesta in particolari condizioni di temperatura e densità. In presenza tali condizioni, il numero più probabile di particelle, in un particolare stato, con energia ϵ non segue più la distribuzione di Maxwell-Boltzmann:

$$\rho_v(\mathbf{v}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\beta m\mathbf{v}^2/2} \quad (1.1)$$

e non seguirà l'Equazione dei Gas Perfetti. A livello microscopico la condizione di non degenerazione, presuppone che sia trascurabile la probabilità per due sistemi (in questo

caso particelle) di occupare lo stesso stato energetico $\{\epsilon_\alpha, g_\alpha\}$ ¹, ovvero

$$\frac{n_\alpha}{g_\alpha} \ll 1 \quad \text{oppure} \quad \frac{N}{Z_C} \ll 1 \quad . \quad (1.2)$$

Dove Z_C , la funzione di partizione canonica, nel limite del continuo per un gas non degenere, si esprime come

$$Z_C = \frac{1}{h^D} \int e^{-\beta h(\mathbf{z})} d\mathbf{z} \quad (1.3)$$

in cui la variabile D indica le dimensioni del sistema considerato e, quindi, h^D è il più piccolo volume considerato nello spazio delle fasi. Nel caso in 3 dimensioni, per una singola particella, la funzione canonica diventa

$$Z_C^{sing} = \frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \quad (1.4)$$

così da poter definire il cosiddetto *parametro di degenerazione* η :

$$\eta = \frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}} \quad . \quad (1.5)$$

Perciò si arriva alla condizione di non degenerazione $\eta \ll 1$. In altri termini, si può pensare che la degenerazione non influisca fintanto che la distanza media tra due particelle è molto maggiore della loro lunghezza d'onda di de Broglie, ovvero

$$d \gg \frac{h}{(2mkT)^{1/2}}$$

1.1.2 Gas Perfetti

Il Gas Perfetto costituisce il più antico modello microscopico proposto per l'interpretazione delle proprietà fisiche di un sistema macroscopico. Si definisce come: *"un sistema formato da N particelle puntiformi e massive (di massa m), senza campi esterni, senza struttura interna (spin o altro), libere di muoversi in una regione spaziale Ω di volume V , che si scambiano energia solo attraverso urti, in condizione di non degenerazione"*[1]. Ora dalla (1.4) possiamo ricavare la funzione di partizione canonica complessiva, nel caso di più sottosistemi distinguibili o indistinguibili.

$$Z_C^{dist} = \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \quad (1.6)$$

$$Z_C^{ind} = \frac{Z_C^{dist}}{N!} = \frac{1}{N!} \left[\frac{V(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \right]^N \quad (1.7)$$

¹ ϵ_α è uno dei possibili livelli discreti di energia che può assumere ognuno degli N sottosistemi canonici, g_α è la molteplicità corrispondente alla rispettiva energia ϵ_α

Considerando i sistemi indistinguibili, dalla (1.7) e dalla seguente relazione

$$P = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial V}\right)_T = kT\left(\frac{\partial Z_C}{\partial V}\right)_T \quad (1.8)$$

si ottiene

$$P = \frac{NkT}{V} \quad (1.9)$$

ovvero la nota *Equazione di Stato dei Gas Perfetti*.

1.2 Gas Degeneri

Come abbiamo visto la differenza tra materia degenera e non degenera è da individuarsi nel grado di occupazione degli stati quantici per ogni livello energetico. Nel caso degenera l'indistinguibilità delle particelle non si traduce più in una semplice divisione per $N!$ come in (1.7) del numero di stati distinguibili, ma richiede un conteggio specifico. Per valori alti di grado di occupazione, ovvero per materia fortemente degenera, si hanno risultati molto differenti a secondo della natura delle particelle *quantiche* che compongono il sistema.

1.2.1 Bosoni e Fermioni

Le particelle quantiche in esame possono essere di due tipi: *Fermioni* o *Bosoni*. Per i primi vige il *Principio di esclusione di Pauli*, due fermioni non possono occupare lo stesso stato quantico; i bosoni, al contrario, non rispettano tale principio ed uno stesso stato quantico può essere occupato da un numero indefinitamente grande di bosoni. La procedura per il calcolo del numero di stati dell'intero gas in funzione delle popolazioni n_α dei livelli energetici ϵ_α è frutto di alcune regole del calcolo combinatorio da cui si ottiene che la conservazione del numero N di particelle di un gas è data da

$$N = \sum_{\alpha=0}^{\infty} n_\alpha^\pm = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g_\alpha}{e^{\beta(\epsilon_\alpha - \mu)} \pm 1} \quad (1.10)$$

dove $\beta = 1/kT$ e μ è un parametro detto *Potenziale Chimico*. In quest'equazione e nelle seguenti, per convenzione si attribuisce il segno superiore alla statistica di Fermi-Dirac e quello inferiore alla statistica di Bose-Einstein.

1.2.2 Fermioni Degeneri

Nel caso dei *Fermioni Degeneri* e nel limite del continuo la relazione (1.10) diviene:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1} \quad , \quad (1.11)$$

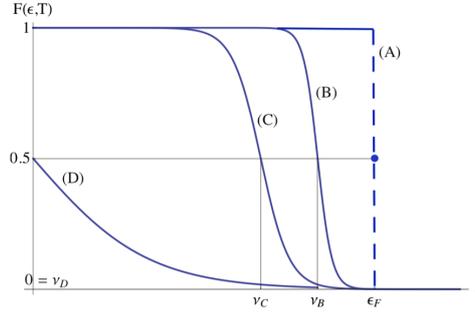


Figura 1.1: Funzione di occupazione fermionica a varie temperature

per i nostri scopi definiamo la *Funzione di Occupazione* che per un singolo fermione è:

$$F(\epsilon, T) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} \quad . \quad (1.12)$$

Chiaramente questa funzione rappresenta la percentuale di stati occupati a una certa energia, dunque possiamo scrivere:

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1} = \int_0^\infty F(\epsilon, T)g(\epsilon)d(\epsilon) \Rightarrow \mu = \mu(T) \quad (1.13)$$

che dà l'equazione per il potenziale chimico dei fermioni. A tal proposito si definisce il *Livello di Fermi* come l'energia tale che:

$$\epsilon_F = \lim_{T \rightarrow 0} \mu(T) \quad . \quad (1.14)$$

Applicando il limite $T \rightarrow 0 (\beta \rightarrow \infty)$ alla Funzione di Occupazione si ha:

$$F(\epsilon, 0) = \begin{cases} 1 & \text{per } \epsilon < \epsilon_F \\ \frac{1}{2} & \text{per } \epsilon = \epsilon_F \\ 0 & \text{per } \epsilon > \epsilon_F \end{cases} \quad (1.15)$$

La (1.15) rappresenta una funzione-gradino di altezza ϵ_F 1.1.

La curva A in 1.1 descrive un'occupazione totale di tutti gli stati al di sotto dell'energia di Fermi e un'occupazione nulla al di sopra di questa, ed è quello che ci si aspetta allo zero assoluto per un gas di Fermioni. A tale temperatura il gas si trova nello stato di minima energia, ma a causa del principio di esclusione di Pauli, i fermioni non possono occupare tutti insieme il livello fondamentale $\epsilon = 0$. Aumentando la temperatura, la distribuzione di Fermi-Dirac addolcisce il gradino (1.15) che diventa una curva ripida ma continua (curve (B)(C) 1.1). In corrispondenza, il potenziale chimico $\mu(T) = \epsilon_F + \Delta\mu(T)$ cambia di poco. Aumentando ancora la temperatura, μ si annulla (vedi curva(D)in 1.1), poi diventa negativo, finché $e^{-\beta\mu} \gg 1$, quindi la funzione di occupazione per energie positive si riduce ad una piccola coda esponenziale.

1.2.3 Le Energie Libere di Helmholtz per i Fermioni

Ricordiamo che per un sistema canonico qualunque, i cui livelli energetici $E(\vec{\xi})$ dipendono da un indice $\vec{\xi}$ (in generale a più componenti), l'energia libera di Helmholtz Φ e la FPC canonica Z_C si scrivono come:

$$\Phi = -kT \ln Z_C \quad ; \quad Z_C = \sum_0^\infty G(\vec{\xi}) e^{-\beta E(\vec{\xi})}, \quad (1.16)$$

dove $G(\vec{\xi})$ è il numero di stati corrispondenti al livello energetico $E(\vec{\xi})$. Nel caso del gas fermionico, l'energia e il numero di stati dipendono dall'indice $\vec{n} = (n_0, n_1, \dots)$ che rappresenta l'insieme delle popolazioni. Infatti:

$$E(\vec{n}) = \sum_\alpha n_\alpha \epsilon_\alpha, \quad (1.17)$$

e si ha nel caso dei fermioni che

$$G(\vec{\xi}) = \prod_{\alpha=0}^\infty \frac{g_\alpha}{n_\alpha! (g_\alpha - n_\alpha)!} = \prod_\alpha w_\alpha^{ferm.}(n_\alpha) \quad . \quad (1.18)$$

Sostituendo le precedenti relazioni nella 1.16 si ottiene la seguente espressione della FPC:

$$\begin{aligned} Z_{FD} &= \sum_{\vec{n} \in \Gamma} G(\vec{\xi}) \exp \left[-\beta \sum_{\alpha=0}^\infty n_\alpha \epsilon_\alpha \right] \\ &= \sum_{\vec{n} \in \Gamma} \exp \left(-\beta \sum_\alpha \phi_\alpha(n_\alpha) \right) \end{aligned} \quad (1.19)$$

dove Γ è l'insieme degli \vec{n} tali che $\sum_\alpha n_\alpha = N$, cioè che conservano il numero totale di particelle. Il calcolo esplicito della Z_{FD} , che risulta piuttosto lungo (vedi appendice C di [1]), viene svolto attraverso una procedura standard: costruzione dell'energia libera di Helmholtz in funzioni di alcuni parametri incogniti (\vec{n}); minimizzazione per la ricerca dei valori di equilibrio dei parametri (\vec{n}_{FD}); calcolo dell'espressione dell'energia libera di Helmholtz all'equilibrio $\Phi_{FD} = F_{FD}(\vec{n}_{FD})$. Si può osservare che inoltre il limite del continuo porta a scrivere direttamente $d\mathbf{p}d\mathbf{r}/h^3$ come numero (infinitesimo) di stati semiclassici della singola particella, presenti nel volume $d\mathbf{p}d\mathbf{r}$ attorno a un qualunque punto dello Spazio delle Fasi. Questo permette di esprimere, usando ancora la 1.16, l'energia libera di Helmholtz per i fermioni nella forma più generale possibile:

$$\Phi_{FD} = \mu N - \frac{kT}{h^3} \sum_{\vec{\xi}} g_{\vec{\xi}} \int d\mathbf{p}d\mathbf{r} \ln \left[1 + e^{-\beta[h(\mathbf{p},\mathbf{r},\vec{\xi}) - \mu]} \right] \quad (1.20)$$

dove $h(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \vec{\xi})$ è una generica *Hamiltoniana* di singola particella. Osservando la 1.20 notiamo la sua dipendenza lineare dal potenziale chimico μ , sappiamo inoltre dalla 1.14 che nel caso di forte degenerazione ($T \rightarrow 0$) il potenziale chimico corrisponde all'Energia di Fermi e che il secondo termine dell'equazione si annulla. Per cui dalla 1.8 possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}
 P &= -\left(\frac{\partial(N\epsilon_F)}{\partial V}\right)_{T=0} \\
 &= -\left(\frac{\partial E_{deg}}{\partial V}\right)_{T=0}
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

che ci tornerà utile nel calcolo delle pressioni nelle nane bianche.

Capitolo 2

Applicazioni Astrofisiche

In questo capitolo useremo le relazioni trovate precedentemente per ricavare le pressioni che agiscono negli interni stellari (§ 2.1), discutendo brevemente l'evoluzione stellare (§ 2.2) e costruendo il Diagramma di stato della materia (§ 2.3) per evidenziare i comportamenti delle varie stelle in relazione alle loro funzioni di stato interne.

2.1 Pressione negli interni stellari

Le stelle, a causa della loro temperatura, sono sistemi gassosi. Nella maggior parte delle stelle, la materia si comporta come un gas perfetto o come un gas completamente degenere: in entrambi i casi l'Equazione di Stato è abbastanza semplice. Per esempio, all'interno del Sole la correzione sulla pressione derivante dall'utilizzo di (1.9), è circa lo 0.43% e nei casi di stelle dello stesso tipo ma più dense è il 2%. Dalla formula (1.5) osserviamo che la degenerazione è favorita per le particelle poco massive. Proprio per questa ragione nelle nane bianche, dove la densità è molto elevata, gli elettroni formano un gas completamente degenere. Nei nuclei però la densità che li farebbe degenerare è dell'ordine di $10^{12}g/cm^3$, che corrisponde ad un valore oltre mille volte superiore alla densità stimata dagli astronomi. In sintesi possiamo trattare il gas nei nuclei delle nane bianche come un gas perfetto, che genera una pressione trascurabile rispetto alla degenerazione data dagli elettroni [2].

2.1.1 Pressione di Radiazione

Negli interni stellari è da considerare anche il contributo alla pressione della radiazione elettromagnetica. La pressione totale sarà dunque la somma di:

$$P_{tot} = P_{gas} + P_{rad} \quad . \quad (2.1)$$

Per ricavare questo apporto di pressione dato dai *fotoni* utilizziamo l'espressione dell'energia libera di Helmholtz per un gas di bosoni senza massa:

$$\Phi_{BE} = -\frac{8\pi^5(kT)^4V}{45c^3h^3} . \quad (2.2)$$

Ricordando l'equazione (1.8) si ricava l'espressione per la *Pressione di radiazione*

$$P_{rad} = \frac{4\sigma T^4}{3c} \quad (2.3)$$

dove σ è la costante di Stefan-Boltzmann ($5.67 \cdot 10^5 \text{ erg sec}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$). La (2.3) evidenzia una forte dipendenza di questa pressione dalla temperatura assoluta T.

2.1.2 Pressione di Degenerazione

Per quanto visto in 1.2.2, possiamo ottenere l'equazione per l'Energia di Fermi per gli elettroni semplicemente usando la 1.15 nella 1.13:

$$N = 2 \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon \quad (2.4)$$

dove la funzione $g(\epsilon)d\epsilon$ indica la densità degli stati con energia ϵ e il fattore 2 dipende dal fatto che in un determinato stato quantico possiamo avere due elettroni con spin opposti. In condizioni di degenerazione a causa del *Principio di Indeterminazione* di Heisenberg, la precedente espressione diventa più generale nella forma

$$N = \frac{2}{h^D} \int_{h(\mathbf{p}, \mathbf{q}) < \epsilon_F} d\mathbf{p} d\mathbf{q} . \quad (2.5)$$

Nel caso degli elettroni negli interni stellari possiamo sviluppare la precedente relazione in tre dimensioni:

$$\begin{aligned} N &= \frac{2}{h^3} \int_{|\mathbf{p}| < p_F} d\mathbf{p} d\mathbf{r} \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp \\ &= \frac{8\pi V}{3h^3} p_F^3 \end{aligned} \quad (2.6)$$

da cui ricaviamo anche l'espressione del cosiddetto momento di Fermi:

$$p_F = h \left(\frac{3N_{el}}{8\pi V} \right)^{1/3} . \quad (2.7)$$

Facendo una stima del momento di Fermi nelle Nane Bianche, con $n_{el} = \frac{N_{el}}{V} \simeq 10^{30} \text{ cm}^{-3}$ si trova che

$$\frac{p_F}{mc} \simeq 1.1 \quad , \quad (2.8)$$

quindi le quantità fisiche trattate a queste densità devono essere espresse in forma relativistica. Adesso possiamo ricavare l'espressione per l'energia totale posseduta dagli elettroni fortemente degeneri in regime relativistico:

$$E_{el} = E(0) = \frac{2}{h^3} \int_{|\mathbf{p}| < p_F} \epsilon d\mathbf{p} d\mathbf{r} \quad (2.9)$$

in cui però, l'energia ϵ da integrare è data da

$$\epsilon = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2 = mc^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} - 1 \right] \quad . \quad (2.10)$$

Per quanto detto in precedenza usando la 2.10 nella 2.9 abbiamo:

$$\begin{aligned} E_{el}^{rel} &= \frac{2}{h^3} \int_{|\mathbf{p}| < p_F} \epsilon d\mathbf{p} d\mathbf{r} \\ &= \frac{8\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp \\ &= \frac{8\pi V mc^2}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \left[\sqrt{1 + \frac{p^2}{(mc)^2}} - 1 \right] dp \end{aligned}$$

che attraverso un cambio di coordinate ($\frac{p}{mc} = x$) diventa

$$E_{el}^{rel} = \frac{m^4 c^5 8\pi V}{h^3} \int_0^{\frac{p_F}{mc}} x^2 \left[\sqrt{1 + x^2} - 1 \right] dx \quad . \quad (2.11)$$

Nella 2.9 abbiamo scritto $E_{el} = E(0)$ dove con $E(0)$ abbiamo indicato l'energia di punto zero, o l'energia dello stato fondamentale del gas fermionico: questa relazione risulta vera se ci troviamo in presenza di particelle molto degeneri. In realtà l'energia per i fermioni ha in generale dipende dalle potenze pari di kT . Negli elettroni all'interno delle Nane Bianche questa dipendenza è trascurabile perché si ha che

$$\frac{\epsilon_F}{kT} \simeq 10^2 \gg 1 \quad (2.12)$$

da cui concludiamo che gli elettroni sono molto degeneri.

Per quanto detto in precedenza i valori della temperatura all'interno delle Nane Bianche

possono essere trascurati a causa degli altissimi valori delle densità. Questo ci permette di usare la 1.21 per calcolare la Pressione:

$$P_{el}^{(rel.)} = -\frac{\partial E_{el}^{rel}}{\partial V} = \frac{8\pi}{h^3} m^4 c^5 \left[\left(\frac{p_F}{mc} \right)^3 \frac{1}{3} \left(\sqrt{\left(\frac{p_F}{mc} \right)^2 - 1} \right) - \int_0^{\frac{p_F}{mc}} x^2 \left(\sqrt{1+x^2} - 1 \right) dx \right]$$

dove si ha che l'integrale nella seconda uguaglianza è risolvibile integrando due volte per parti e riconoscendo un integrale noto legato all'arcoseno iperbolico, ottenendo

$$\int_0^{r_F} x^2 \left(\sqrt{1+x^2} - 1 \right) dx = \frac{1}{8} \sqrt{1+r_F^2} (r_F + 2r_F^3) - \left[\frac{r_F^3}{3} + \frac{1}{8} \text{Arcsinh}(r_F) \right] \quad \text{con} \quad r_F = \frac{p_F}{mc} \quad .$$

Possiamo quindi esprimere la formula per la Pressione come:

$$P_{el}^{(rel.)} = \frac{8\pi m^4 c^5}{h^3} \left[\frac{r_F^3}{12} \sqrt{1+r_F^2} + \frac{1}{8} \text{Arcsinh}(r_F) - \frac{r_F}{8} \sqrt{1+r_F^2} \right] \quad . \quad (2.13)$$

in buon accordo con la formula ricavata nel paragrafo 8.3 di [3].

Si può notare che in presenza di materia degenerate la pressione non dipende dalla temperatura. Adesso studieremo i due casi limite della 2.13, ovvero il caso non relativistico e quello ultra relativistico.

Regime non relativistico

Per ottenere l'espressione dell'energia posseduta dagli elettroni degeneri in regime non relativistico agiamo in maniera analoga a quanto fatto nel caso relativistico, l'unica differenza è che nella 2.9 usiamo la forma classica dell'energia invece di quella relativistica all'interno dell'integrale:

$$\begin{aligned} E_{el}^{(n.r.)} &= \frac{2}{h^3} \int_{|\mathbf{p}| < p_F} \epsilon d\mathbf{p} d\mathbf{r} \\ &= \frac{8\pi}{h^3} \int_{p < p_F} \frac{p^4}{2m} dp \\ &= \frac{4\pi V p_F^5}{5h^3 m} \\ &= \frac{3^{5/3} h^2 N_{el}^{5/3}}{40(\pi)^{2/3} m V^{2/3}} \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove nella terza uguaglianza si è usata la 2.7 per il momento di Fermi. Sappiamo dalla (1.8) che la pressione a temperatura costante è data da:

$$P_{el}^{(n.r.)} = -\left(\frac{\partial E_{el}^{(n.r.)}}{\partial V} \right)_T = \frac{8\pi p_F^5}{15h^3 m} \quad (2.15)$$

che utilizzando la 2.7 per il momento di Fermi possiamo esprimere in funzione della densità di elettroni considerati

$$P_{el}^{(n.r.)} = \frac{h^2}{10m} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} n_e^{5/3} \quad . \quad (2.16)$$

Regime ultra relativistico

Per ottenere un espressione più compatta della 2.13 a velocità prossime a quella della luce possiamo considerare il caso ultra relativistico ($\frac{p_F}{mc} \gg 1$). Ponendo $\epsilon = pc$ nella 2.9 si ha

$$E_{el}^{u.r.} = \frac{8\pi cV}{h^3} \int_0^{p_F} p^3 dp = \frac{2\pi cV}{h^3} p_F^4 \quad (2.17)$$

e sapendo che

$$\frac{\partial(p_F)}{\partial V} = -\frac{h}{3V^{4/3}} \left(\frac{3N_{el}}{8\pi}\right)^{1/3} = -\frac{1}{3} \frac{p_F}{V} \quad (2.18)$$

si ottiene l'espressione per la pressione nel caso ultra relativistico:

$$P_{el}^{(u.r.)} = \frac{2\pi c}{3h^3} p_F^4 = \frac{\pi ch}{24} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{4/3} n_e^{4/3} \quad . \quad (2.19)$$

2.2 Evoluzione stellare

Il fenomeno della Degenerazione è fondamentale per la comprensione e lo studio dell'evoluzione stellare. Esso si presenta in fasi evolutive via via più avanzate al crescere della massa stellare: infatti, con masse elevate si raggiungono a Densità inferiori e Temperature sufficienti a innescare le varie reazioni nucleari, che bilanciano la gravità senza Degenerazione impedendo ulteriori aumenti di densità. Le diverse tipologie di evoluzione stellare dipendono dunque dall'innescò delle reazioni nucleari in noccioli degeneri o meno: nel primo caso infatti, le reazioni risulterebbero particolarmente violente, capaci in qualche caso di distruggere la stella stessa [4].

- Per Masse $M \leq 0.08M_{\odot}$ la Degenerazione subentra prima ancora del bruciamento dell'Idrogeno: per $M \geq 13M_J$ (Masse Gioviiane) si innescherà la fusione del Deuterio, e per $M \geq 65M_J$ quella del Litio. Questi oggetti non diverranno mai vere e proprie stelle: la loro contrazione sarà fermata dalla Pressione di Degenerazione prima di raggiungere temperature sufficienti all'innescò della fusione dell'Idrogeno e si raffredderanno lentamente come Nane Brune.
- Per $0.08M_{\odot} \leq M \leq 2M_{\odot}$ il nucleo diventa Degenero quando il bruciamento dell'Idrogeno è già avvenuto: vi sarà dunque un nucleo di Elio degenero. La fusione

dell'Elio sarà ritardata dalla Degenerazione, ovvero vi sarà una fase molto più lunga di RGB (Red Giant Branch), ma, quando avverrà, sarà particolarmente violenta (Flash dell'Elio), tale da rimuovere la Degenerazione ma non da distruggere la stella. Alla fine della loro vita queste stelle espelleranno l'*envelope*¹, che andrà a formare una Nebulosa Planetaria; il core invece sussisterà come una sfera di Elio per le stelle meno massicce ($M < 0.5M_{\odot}$)² o più frequentemente come una sfera di Carbonio e Ossigeno, sostenuto dalla Pressione degenera degli elettroni: si è formata una nana bianca.

- Per $2M_{\odot} \leq M \leq 8M_{\odot}$ la Degenerazione subentra ancora dopo, quando il core della stella è composto principalmente di Carbonio e Ossigeno. Al centro della Nebulosa Planetaria rimarrà una nana bianca al C-O, il tipo di nana bianca più comune nell'Universo.
- Stelle con $8M_{\odot} \leq M \leq 11M_{\odot}$ sviluppano un nocciolo non degenera di Carbonio e Ossigeno, ma una volta bruciato tutto il Carbonio formano un nucleo degenera di Neon e Ossigeno. Infine rimarrà quindi una Nana Bianca composta di Neon e Ossigeno, o, in rari casi in cui si innesca la fusione parziale del Neon in Magnesio, una nana bianca all'O-Ne-Mg.
- Con $11M_{\odot} \leq M \leq 25M_{\odot}$ si riescono a raggiungere le Temperature sufficienti a innescare tutte le reazioni nucleari fino al Ferro. Il Ferro è l'elemento più stabile in natura, la sua fusione quindi non rilascia energia, ma ne richiede. Il nucleo inizia a collassare: Densità e Temperatura continuano ad aumentare, la fotodisintegrazione nucleare a opera dei raggi gamma prodotti dalla radiazione di Corpo Nero è anch'essa energeticamente sfavorevole, si attiva il processo Urca, che fa reagire elettroni e protoni formando neutroni e neutrini. Questo processo ha il doppio effetto di far diminuire gli elettroni liberi che potrebbero contribuire a una Pressione di Degenerazione elettronica e di provocare una forte perdita di energia tramite i neutrini, che attraversano tutta la stella a velocità prossime a quelle della luce. Il nucleo di Ferro è in caduta libera, ma viene fermato dalla Pressione di Degenerazione dei neutroni, formati in gran numero dallo stesso processo Urca. Tutto il materiale esterno al nucleo di Ferro collassa, data la mancanza del sostegno del *core*, rimbalza sul nucleo supercompatto e viene espulso a grandissime velocità nello spazio interstellare, con un'esplosione detta Supernova di tipo II : tramite questo meccanismo, il mezzo interstellare viene arricchito di tutti gli elementi presenti in Natura, prodotti durante la vita della stella e dall'esplosione stessa. Il

¹parte esterna della stella non legata gravitazionalmente al nucleo della stella

²stelle di massa così piccola hanno tempi di vita così lunghi da essere paragonabili all'età dell'Universo: se ne spiega l'osservazione tramite un altro meccanismo di formazione, che prevede una binaria in cui una componente accresce del materiale dall'altra, privandola dell'involucro e lasciandone solo il nucleo di Elio.

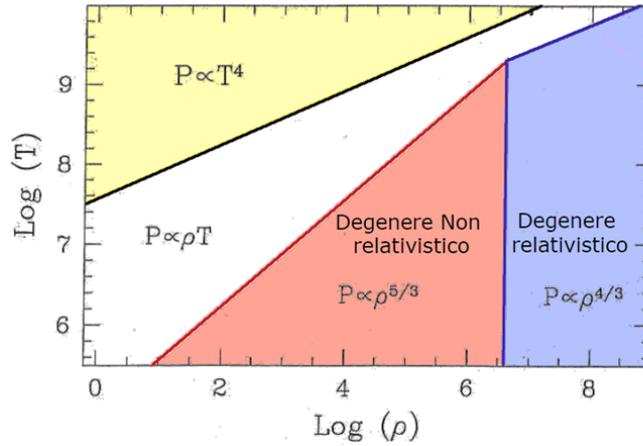


Figura 2.1: Piano $\text{Log}\rho\text{-Log}T$

nucleo è ora sostenuto dalla Pressione di Degenerazione del gas di neutroni di cui è in larga parte composto, in rapida rotazione in conseguenza della conservazione del momento angolare: una Stella di Neutroni.

- Per $M \geq 25M_{\odot}$ neanche la Pressione di Degenerazione dei neutroni può controbilanciare il collasso; si forma un buco nero (anche se ipotesi recenti inseriscono tra stella di neutroni e buco nero uno stato intermedio: la stella di quark, un oggetto sostenuto dalla pressione degenerare dei quark).

2.3 Diagramma di stato della materia stellare

Per il calcolo della Pressione Totale si devono quindi sommare diversi contributi: quelli dovuti alla Pressione di Radiazione, alla Pressione del Gas Perfetto dei nuclei atomici e quelli dovuti alla componente elettronica. Di quest'ultima si distinguono tre casi: non degenerare, degenerare relativistico e degenerare non relativistico. Per capire quale contributo prevale sugli altri, è utile costruire un piano che metta in relazione Densità e Temperatura (2.1). Nel grafico 2.1, le stelle di Sequenza Principale si troverebbero nella zona non degenerare, dove la Pressione preponderante è quella del Gas Perfetto; le Giganti Rosse tra Gas Perfetto e non relativistico, le Nane Bianche tra Degenerare Classico e Relativistico.

Capitolo 3

Nane Bianche e Limite di Chandrasekhar

3.1 La scoperta di Sirio B

Nel 1838 Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) usò la tecnica della parallasse per trovare la distanza dalla stella 61 Cygni. In seguito a questo primo successo nella misurazione della distanza stellare, Bessel si focalizzò su un altro possibile candidato: Sirio, la stella più luminosa visibile nel cielo. Studiando l'orbita della stella nel cielo, Bessel notò che essa deviava leggermente da una linea retta. Dopo dieci anni di accurate osservazioni, Bessel concluse nel 1844 che Sirio fosse in realtà un sistema stellare binario. Nonostante si stato incapace di trovare la stella compagna della stella più luminosa, dedusse che l'orbita del suo periodo era di circa 50 anni (attualmente si è stimato che questo valore corrisponde a 49.9 anni) e ne predisse la posizione. Da allora iniziò la ricerca della cosiddetta stella "cucciola", ovvero la debole compagna della luminosa "stella madre".

I telescopi al tempo di Bessel erano incapaci di trovare la stella cucciola a causa della luminosità della stella vicina, e in seguito alla morte di Bessel nel 1846 l'entusiasmo per questa ricerca scemò. In fine, nel 1862, Alvan Graham Clark (1832-1887), figlio di un importante fabbricatore di lenti americano, testò il nuovo rifrattore del padre (di circa 8 cm più largo di ogni precedente strumento) su Sirio e immediatamente scoprì la stella cucciola nella posizione predetta da Bessel. La stella dominante denominata Sirio A fu scoperto essere mille volte più luminosa della stella debole, da allora chiamata Sirio B. I dettagli delle loro orbite rispetto al loro centro di massa rivelarono che Sirio A e Sirio B hanno masse di circa $2.3M_{\odot}$ e $1.0M_{\odot}$ rispettivamente. Un più recente studio sulla massa di Sirio B ha stabilito che il suo valore è $1.053 \pm 0.028M_{\odot}$, ed è quello a cui faremo riferimento.

La scoperta di Sirio B da parte di Clark fu fatta in prossimità del momento in cui le due stelle erano maggiormente lontane tra di loro: la grande differenza di luminosità

($L_A = 23.5L_\odot$ e $L_B = 0.03L_\odot$) rende molto più difficile l'osservazione di Sirio B in qualunque altro momento.

Quando, cinquanta anni dopo, si poté ripetere la stessa osservazione di Sirio B si erano messi appunto strumenti per misurare la temperatura della sua superficie. A causa della debole luminosità di Sirio B, gli astronomi si aspettavano che la stella fosse fredda e rossa. Rimasero perciò sconcertati quando Walter Adams (1876-1956), scoprì che, al contrario, Sirio B è calda ed è una stella blu-bianca che emette la maggior parte della sua energia in raggi ultravioletti. Una moderna stima della temperatura di Sirio B è 27000 K, molto più alta di quella di Sirio A (9910 K).

Le implicazioni di questa scoperta per lo studio delle caratteristiche fisiche di una stella furono sbalorditive. Dalla luminosità della stella si riuscì a ricavare analiticamente il raggio di Sirio B, che risultò avere un valore solamente di $5.5 \cdot 10^6 m \approx 0.008 R_\odot$. Sirio B ha la massa del Sole confinata entro un volume più piccolo di quello terrestre. La densità media di Sirio B è $3.0 \cdot 10^6 g cm^{-3}$, e l'accelerazione dovuta alla gravità sulla sua superficie è circa $4.6 \cdot 10^6 m s^{-2}$. Questa potente forza di gravità si rivela nello spettro di Sirio B: produce un'immensa pressione vicino alla superficie che si traduce in un allargamento delle linee di assorbimento dell'Idrogeno.

La prima reazione degli astronomi alla scoperta di Sirio B fu di non accettare i risultati ottenuti, considerandoli "assurdi". Tuttavia, i calcoli erano così semplici e chiari che presto questo atteggiamento dovette cambiare. Come tutte le scienze, l'astronomia avanza più velocemente quando si confronta con le eccezioni alle sue teorie [5].

3.2 Nane Bianche

Chiaramente Sirio B non è una normale stella. E' una *Nana Bianca*, una classe di stelle che ha approssimativamente la massa del Sole e le dimensioni della Terra. Nonostante un quarto delle stelle nelle vicinanze del Sole potrebbero essere Nane Bianche, le caratteristiche medie di queste stelle sono state difficili da determinare in quanto un campione completo è ottenibile solamente ad una distanza superiore di 10 parsec dal Sole.

3.2.1 Classi di Nane Bianche

Nonostante le Nane Bianche sono solitamente più bianche delle normali stelle, il loro nome è fuorviante dato che possono in realtà essere di diversi colori, con temperature di superficie che vanno da meno di $5000K$ a più di $80,000K$. Il più grande gruppo (circa due terzi del numero totale, incluso Sirio B), chiamate *Nane Bianche DA*, mostrano solo uno spettro dell'Idrogeno allargato. Le linee di assorbimento dell'Idrogeno sono invece assenti nelle *Nane Bianche DB* (8%), le quali mostrano solo linee di assorbimento dell'Elio, e nelle *Nane Bianche DC* (14%) che non rivelano nessun tipo di linee di assorbimento, solo un uno spettro continuo privo di caratteristiche. I rimanenti tipi includono le *Nane Bianche*

DQ, che esibiscono caratteristiche del Carbone nel loro spettro, e le *Nane Bianche DZ* le quali evidenziano delle linee di assorbimento tipiche dei metalli.

3.2.2 Pressione gravitazionale nelle Nane Bianche

Per stimare le condizioni di pressione al centro di una data nana bianca di massa M_{tot} e di raggio R , usiamo i valori di Sirio B dati nelle precedenti sezioni. Assumendo che la stella sia completamente sferica e abbia densità costante ρ , si ha che la massa in funzione del raggio è data da

$$M(r) \int_0^r \rho dr = M_{tot} \frac{r^3}{R^3} . \quad (3.1)$$

Considerando il differenziale del potenziale gravitazionale che agisce sulla stella sappiamo che

$$\begin{aligned} dU &= - \frac{M(r) dm G}{r} \\ &= - \frac{M(r) G}{r} 4\pi r^2 \left(\frac{M_{tot}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \right) dr \\ &= - \frac{3GM_{tot}^2 r^4}{R^6} dr \end{aligned} \quad (3.2)$$

da cui si ha

$$U(R) = - \frac{3GM_{tot}^2}{R^6} \int_0^R r^4 dr = - \frac{3}{5} \frac{GM_{tot}^2}{R} . \quad (3.3)$$

Adesso grazie alle precedenti relazioni siamo in grado di scrivere l'espressione della pressione gravitazionale:

$$P_{gr}(R) = - \frac{dU(R)}{dR} \frac{1}{4\pi R^2} = - \frac{3GM_{tot}^2}{20\pi R^4} , \quad (3.4)$$

nel caso di Sirio B questa pressione ha un valore di circa $3.8 \cdot 10^{22} \text{ N m}^{-2}$ quasi 1.5 milioni di volte più grande della pressione al centro del Sole.

Vogliamo esprimere la 3.4 in funzione di $r_F = \frac{p_F}{mc}$ e per fare ciò ricaviamo dalla 2.7 che il volume può essere scritto come

$$V = \frac{h^3}{m^3 c^3} \left(\frac{3M_{tot}}{4\pi m_{He}} \right) \frac{1}{r_F^3} \quad (3.5)$$

dove abbiamo usato la seguente approssimazione:

$$N_{el} \simeq 2 \left(\frac{M}{m_{He}} \right) \quad (3.6)$$

in cui consideriamo la stella composta solo di Elio. Questa approssimazione verrà usata anche in seguito sulle pressioni di degenerazione.

Usando la 3.5 nella 3.4 scritta in funzione del volume otteniamo la seguente espressione per la pressione gravitazionale:

$$P_{gr} = - \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{5/3} \frac{Gm^4 c^4}{h^4} (m_{He})^{4/3} M_{tot}^{2/3} r_F^4 \quad (3.7)$$

che ci tornerà utile nel seguito.

3.2.3 Spettro e Composizione della Superficie

L'eccezionale forza di gravità della nana bianca è responsabile del caratteristico spettro delle nane bianche DA. I nuclei più pesanti sono spinti al di sotto della superficie mentre l'Idrogeno, essendo più leggero, sale in cima, causando un sottile strato esterno di Idrogeno che ricopre uno strato di Elio che a sua volta avvolge un *core* di Carbonio-Ossigeno. Nelle condizioni iniziali di estremo calore della stella, questa stratificazione verticale dei nuclei rispetto alle loro masse impiega solo un centinaio di anni per attuarsi. L'origine delle nane bianche non DA (cioè DB e DC) non è ancora chiara. Durante la perdita di massa di una Gigante Rossa, cioè nel processo di formazione di una nana bianca, si potrebbero verificare dei fenomeni che sottraggono la quasi totalità dell'Idrogeno posseduto dalla nana bianca. In alternativa, una singola nana bianca potrebbe trasformarsi dal tipo DA ad un tipo non DA attraverso delle miscelazioni convettive sulla sua superficie. Ad esempio, la penetrazione di una zona convettiva dell'Elio al di sopra di un sottile strato di Idrogeno potrebbe tramutare una DA in una nana bianca DB grazie alla diluizione dell'Idrogeno con l'Elio aggiunto.

3.3 Il Limite di Chandrasekhar

La necessità che la pressione degenera debba sostenere una nana bianca ha profonde implicazioni. Nel 1931, all'età di 21 anni, il fisico Indiano Subrahmanyan Chandrasekhar annunciò la scoperta che *esisteva un massimo per la massa di una nana bianca*. In questa sezione considereremo la fisica che conduce a questa straordinaria conclusione.

3.3.1 La relazione Massa-Volume

La relazione tra il raggio R_{wd} , di una nana bianca e la sua massa, M_{wd} , può essere trovata uguagliando la pressione centrale, 3.4, alla pressione di degenerazione degli elettroni in regime non relativistico, 2.16:

$$\frac{4}{15} \pi G \rho^2 R_{wd} = \frac{h^2}{10m} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \left(\frac{2}{m_{He}} \right) \rho^{5/3} \quad (3.8)$$

Usando $\rho = M_{\text{wd}}/\frac{4}{3}\pi R_{\text{wd}}^3$ (assumendo la densità costante), questo porta a stimare il raggio di una nana bianca come,

$$R_{\text{wd}} \propto \frac{\hbar^2}{GmM_{\text{wd}}^{1/3}} \left(\frac{1}{m_{\text{He}}} \right)^{5/3} . \quad (3.9)$$

Si è arrivati quindi al sorprendente risultato che

$$M_{\text{wd}}V_{\text{wd}} = \text{costante} . \quad (3.10)$$

Il volume di una nana bianca è inversamente proporzionale alla sua massa, quindi le nane bianche più massive sono anche le più piccole. Questa *relazione massa-volume* è un effetto del tentativo della stella di autosostenersi tramite la pressione di degenerazione elettronica. Gli elettroni devono essere più vicini per generare una maggiore pressione di degenerazione, richiesta per supportare una stella più massiva. Infatti, la relazione massa-volume implica che $\rho \propto M_{\text{wd}}^2$.

Secondo la relazione massa-volume, accumulare sempre più massa in una nana bianca dovrebbe produrre il risultato di un restringimento della stella fino ad un punto con volume nullo, quando la massa diventa infinita. Tuttavia, se la densità eccede circa 10^6 g cm^{-3} , si registra un'attenuazione della relazione massa-volume. Per capire il motivo di questo fenomeno, utilizziamo la 2.7 per stimare la velocità degli elettroni in Sirio B:

$$v = \frac{p_F}{m} = \frac{\hbar}{m} \left[\left(\frac{3}{4\pi} \right) \frac{\rho}{m_{\text{He}}} \right] \simeq 1.1 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1} , \quad (3.11)$$

quindi il risultato è oltre un terzo la velocità della luce. Se la relazione massa-volume fosse costante, le nane bianche più piccole di Sirio B sarebbero così piccole e dense che i loro elettroni supererebbero il valore limite della velocità della luce. Questo paradosso mostra la pericolosità di trascurare gli effetti della relatività nella nostra espressione 3.11. Poiché gli elettroni si muovono più lentamente di quanto dovrebbero, rispetto alla velocità non relativistica, c'è meno pressione elettronica disponibile per sostenere la stella. Quindi una nana bianca molto massiva è addirittura più piccola di quanto lascia prevedere la relazione massa-volume; in altre parole, c'è un limite al quantitativo di materia che può essere sostenuto dalla pressione degenerazione elettronica.

3.3.2 Stima del Limite di Chandrasekhar

Una stima per il valore massimo della massa di una nana bianca si può ottenere uguagliando la pressione gravitazionale, 3.4, all'equazione 2.19 scritta in questa forma

$$P_{el}^{u.r.} = \frac{\pi c \hbar}{24} \left(\frac{9M_{tot}}{2\pi^2 m_{\text{He}}} \right)^{4/3} \frac{1}{R^4} \quad (3.12)$$

utilizzando l'approssimazione 3.6. Nell'uguaglianza descritta il raggio delle nane bianche si cancella, lasciando un'equazione in cui l'unica incognita è M_{tot} . La soluzione di questa equazione ci dà la seguente espressione:

$$M_{tot} = K \left(\frac{ch}{G} \right)^{3/2} \left(\frac{1}{m_{He}} \right)^2 \simeq 2M_{\odot} \quad (3.13)$$

dove $K \simeq 0.94$ è una costante numerica.

Una precisa derivazione di questo risultato risulta in un valore $M_{Ch} = 1.44M_{\odot}$, ed è chiamato *Limite di Chandrasekhar*. Si noti che la 3.13 contiene tre costanti fondamentali (h, c , e G) le quali rappresentano gli effetti combinati della meccanica quantistica, della relatività e della gravitazione Newtoniana sulla struttura di una nana bianca. Non sono mai state scoperte nane bianche con una massa che supera il limite di Chandrasekhar.

Il grafico 3.1 è stato realizzato con il programma Wolfram Mathematica e mostra il rapporto tra la 3.7 e la 2.13 in funzione di r_F e di $\frac{M}{M_{tot}}$.

Dal grafico 3.1 si evince la particolarità del limite di Chandrasekhar, il rapporto tra le pressioni risulta costante solo quando cresce r_F cioè quando si intensifica il carattere relativistico della pressione degenera. Questo risultato è in accordo con l'utilizzo della pressione in regime ultra relativistico nella stima del limite di Chandrasekhar.

E' importante sottolineare che né la formula non relativistica né la formula relativistica usate per la pressione degenera contengono la temperatura. A differenza della pressione di un gas ottenuta applicando la legge dei gas perfetti e a differenza dell'espressione della pressione di radiazione, la pressione completamente degenera di un gas è indipendente dalla sua temperatura. Tutto ciò ha l'effetto di scindere la struttura della stella dalle sue proprietà termali. Tuttavia, la scissione non è mai perfetta in quanto si ha sempre $T > 0$. Come conseguenza, la corretta espressione per la pressione consiste nel trattare il gas come parzialmente degenera e relativistico, ma con $v < c$.

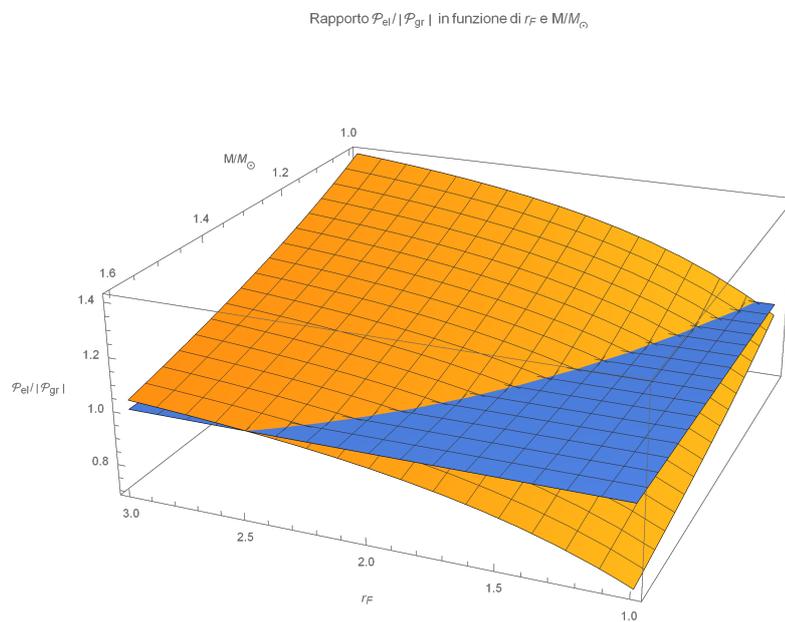


Figura 3.1: Rapporto tra la pressione degenerate relativistica e la pressione gravitazionale.

Capitolo 4

Conclusioni

Lo scopo principale di questo elaborato era trattare del Limite di Chandrasekhar ricavando esplicitamente le pressioni che agiscono nell'interno di una Nana Bianca. Nel Primo capitolo si introduce la materia degenere, vengono mostrati i principali risultati per i Fermioni e in particolare viene fornita la loro espressione dell'energia libera di Helmholtz (1.20). Successivamente ci si è occupati della pressione di radiazione e di degenerazione, per quest'ultima si sono sfruttati i risultati del paragrafo 1.2.2 per ottenere la relazione in pieno regime relativistico (2.13). Dopo una breve digressione sull'Evoluzione stellare e sui vari comportamenti delle stelle rispetto alle loro pressioni si è passati al Terzo Capitolo in cui si sono trattate le Nane Bianche a partire dalla loro scoperta (3.1). Nel paragrafo 3.2.2 ottenuta la pressione gravitazionale all'interno delle nane bianche (3.4) che si è usata per trovare la caratteristica relazione massa-volume (3.10). Infine si è studiato il Limite di Chandrasekhar ricavandone un'espressione analitica (3.13) e anche una stima qualitativa. Concludendo, la tesi ha evidenziato il comportamento peculiare delle Nane Bianche che costituiscono un interessante caso limite rispetto agli effetti della meccanica quantistica, della relatività e della gravitazione Newtoniana.

Bibliografia

- [1] Loris Ferrari. Elementi di termodinamica statistica. *Dispense. Dipartimento di Fisica, Università di Bologna*, 2011.
- [2] Marco Balboni. Equazioni di stato della materia in astrofisica.
- [3] Bruno Cester. *Corso di astrofisica: i dati osservativi, equazioni della struttura stellare, energia nucleare, trasporto della radiazione, politropi, formazione ed evoluzione delle stelle, stadi finali: nane bianche, stelle di neutroni, buchi neri, evoluzione dei sistemi binari, sorgenti X*. U. Hoepli, 1984.
- [4] Giovanni Arico. *Materia degenera: Fisica e applicazioni astrofisiche*. PhD thesis.
- [5] Bradley W Carroll and Dale A Ostlie. *An introduction to modern astrophysics*. Cambridge University Press, 2017.