

Alma Mater Studiorum Università di Bologna

SCUOLA DI SCIENZE
Corso di Laurea in Astronomia
Dipartimento di Fisica e Astronomia

EMISSIONE DI CORPO NERO E APPLICAZIONI ASTROFISICHE

Tesi di laurea

Relatore:
Chiar.mo Prof.
Daniele Dallacasa

Candidato:
Orso Peruzzi

Sessione IV
Anno Accademico 2018/2019

Abstract

Nel presente compendio saranno esposti, passando per un breve inquadramento storico, la genesi del concetto di Corpo Nero, una sua prima definizione offerta dal fisico G. Kirchhoff, la soluzione della quantizzazione di Planck per ovviare al fenomeno della Catastrofe Ultravioletta derivante dall'approccio classico di Rayleigh e Jeans e la determinazione dello spettro di Corpo Nero con relative proprietà e leggi che ne regolano l'andamento. Saranno infine presentate alcune applicazioni in ambito astrofisico del modello di Corpo Nero, discutendone le relative caratteristiche che li discostano dall'oggetto teorico, in particolare: Stelle e Radiazione Cosmica di Fondo.

Indice

1	Il Corpo Nero	1
1.1	Definizione di Corpo Nero	1
1.2	Cenni storici	1
1.3	Il Teorema di Kirchhoff	2
1.3.1	Le Cavit� Isoterme	3
1.4	Leggi empiriche	3
1.4.1	Legge dello spostamento di Wien	4
1.4.2	Legge di Stefan Boltzmann	4
1.5	Lo spettro di Corpo Nero	5
1.5.1	Approccio classico di Rayleigh e Jeans	5
1.5.2	Approccio di Planck	7
1.5.3	Approssimazioni alla Legge di Planck	10
2	Applicazioni astrofisiche	11
2.1	Premessa	11
2.2	Le Stelle	12
2.2.1	Classificazione spettrale delle Stelle	12
2.2.2	Spettro del Sole	13
2.3	La Radiazione Cosmica di Fondo (CMB)	14
2.3.1	L'origine cosmologica della CMB	14
2.3.2	Distribuzione spettrale della CMB	14
	Bibliografia	17

Capitolo 1

Il Corpo Nero

1.1 Definizione di Corpo Nero

Si dice **Corpo Nero** un oggetto fisico ideale rappresentato da un corpo la cui superficie assorbe qualsiasi radiazione elettromagnetica che incida su di esso, senza alcuna riflessione¹, e che può a sua volta emettere le stesse radiazioni assorbite. In base a tale definizione, il Corpo Nero è una sorgente capace di emettere radiazioni a qualunque lunghezza d'onda.

1.2 Cenni storici

La storia del corpo nero ha inizio attorno al 1860 in seguito all'indagine svolta da G. Kirchhoff sulle "righe nere" presenti negli spettri solari raccolti da Fraunhofer. Da questo studio prese avvio, insieme a Robert Wilhelm Bunsen, l'analisi chimica a distanza sui corpi celesti. L'anno successivo Kirchhoff e Bunsen pubblicarono un famoso lavoro, che introduceva e definiva il problema del corpo nero. Lo spettro di corpo nero tuttavia venne correttamente interpretato per la prima volta da Max Planck, il quale dovette assumere che la radiazione elettromagnetica può propagarsi solo in pacchetti discreti, o quanti, la cui energia è proporzionale alla frequenza dell'onda elettromagnetica.

¹Da qui il termine "nero".

1.3 Il Teorema di Kirchhoff

Il problema di come l'energia elettromagnetica potesse trasformarsi in calore e viceversa, ovvero, di come la radiazione elettromagnetica potesse raggiungere un equilibrio termico, si traduce ora nella misura e nel calcolo di due quantità fondamentali:

- **potere assorbente** di un corpo alla frequenza ν e alla temperatura T

$$P_{ass}(\nu, T) = \frac{\text{potenza e.m. assorbita}}{\text{potenza e.m. incidente}}$$

- **potere emissivo** del corpo stesso $P_{em}(\nu, T)$ che rappresenta la potenza emessa dal corpo per unità di superficie, a date frequenza ν e temperatura T .

Mentre non vi sono dubbi su ciò che significa "potenza e.m. emessa", è utile chiarire che cosa si intende per "potenza e.m. assorbita": per potersi dire *assorbita* una radiazione elettromagnetica deve entrare a far parte dell'energia *termica* del corpo².

Il **teorema di Kirchhoff** stabilisce che il raggiungimento dell'equilibrio termico tra due corpi diversi in contatto è possibile solo se il rapporto P_{em} e P_{ass} è una funzione *universale*; in altre parole se a date T e ν (o lunghezza d'onda, secondo la relazione $\lambda = \frac{c}{\nu}$ ³) tale rapporto è lo stesso per tutti i corpi, indipendentemente dalla loro natura:

$$\frac{P_{em}}{P_{ass}} = f(\nu, T) \quad (1.1)$$

La "caccia" alla funzione universale $f(\nu, T)$ è stato uno dei problemi più importanti che hanno portato alla nascita della Meccanica Quantistica.

In base al Teorema di Kirchhoff, la definizione di Corpo Nero lo porta a considerare un sistema in cui

$$P_{ass} = 1 \quad (1.2)$$

per tutte le frequenze e temperature. Da ciò deriva che $f(\nu, T)$ eguaglia il **potere emissivo di Corpo Nero** P_{em}^{CN} e che quindi all'equilibrio termico è impossibile emettere più energia di un Corpo Nero.

Il fisico tedesco dimostrò inoltre che, in condizioni di equilibrio termico, la radiazione presente in una cavità avente pareti opache è della stessa entità di quella di un Corpo Nero alla medesima temperatura: fu possibile realizzare in laboratorio un apparato che consentisse di effettuare delle misure, costituito da una cavità isoterma con un foro di dimensioni trascurabili rispetto all'intero sistema (in modo da non perturbare sensibilmente l'oggetto).

²Più propriamente l'energia e.m. viene *termalizzata*.

³Dove c rappresenta la velocità della luce.

1.3.1 Le Cavit  Isoterme

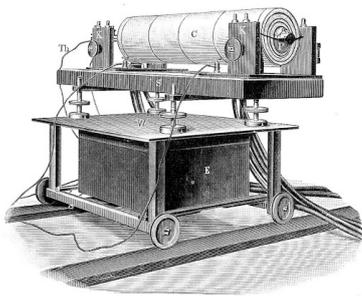


Figura 1.1: Esperimento di Corpo Nero di Lummer e Kurlbaum (1898)

L'idea che delle cavit  isoterme potessero essere impiegate per lo studio della radiazione di Corpo Nero fu confermata nel 1884 da Christiansen e relizzata nel 1895, sottoforma di apparati da laboratorio costituiti da un cilindro di platino con un tubo in ceramica, per opera di Wien, Lummer e Kurlbaum.

La radiazione in ingresso viene assorbita (quasi totalmente) mentre la radiazione uscente da un piccolo foro rappresenta un campione di quella prodotta dal raggiungimento dell'equilibrio termico con le pareti interne.

Ai giorni nostri, le cavit  isoterme vengono utilizzate per i test e la calibrazione di sensori a infrarossi in ambito industriale e per lo studio e la diffusione di quantit  fotometriche dall'ultravioletto fino all'infrarosso a scopi di ricerca. Gli strumenti pi  recenti raggiungono alti livelli di precisione in un intervallo di temperature dai -170°C fino a 3000°C .

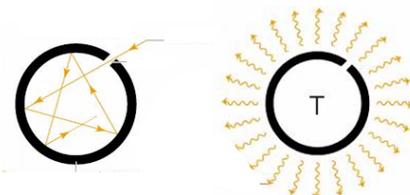


Figura 1.2: Rappresentazione grafica di una cavit  isoterma

1.4 Leggi empiriche

Le osservazioni sperimentali portarono alla definizione di due leggi empiriche. Tali leggi, quella di Stefan-Boltzmann e quella di Wien, furono formulate attenendosi alla Meccanica Newtoniana e all'Elettromagnetismo: seguendo lo stesso tipo di percorso Rayleigh e Jeans provarono a descrivere l'andamento dello spettro di Corpo Nero ricadendo per  in un fenomeno che fu denominato "**catastrofe ultravioletta**"⁴ in contrasto con i dati raccolti. Si dovr  attendere la descrizione della radiazione di Corpo Nero da parte di Max Planck⁵ agli inizi del '900, per poter dare una soddisfacente spiegazione alle suddette leggi empiriche, modello che verr 

⁴La cosiddetta catastrofe ultravioletta fu citata da William Thomson Kelvin, sul finire dell'ottocento, come "nube oscura" che si sarebbe abbattuta sulla visione, largamente condivisa fino all'epoca, di una Fisica costituita da un «sistema perfettamente armonioso ed essenzialmente completo» capace di dare spiegazione a qualsiasi fenomeno osservabile. Occorreva un grande sforzo culturale, nonch  umano, per accogliere le teorie che ebbero la loro genesi da esperienze come quella riguardante il Corpo Nero: la Meccanica Quantistica e la Relativit .

⁵Come gi  anticipato, Max Planck ipotizz  che la radiazione elettromagnetica potesse essere emessa da oscillatori armonici presenti sulle pareti della cavit  per mezzo di pacchetti di Energia in quantit  discrete, detti **quanti**.

esposto e approfondito successivamente.

1.4.1 Legge dello spostamento di Wien

La legge di Wien mette in evidenza come la densità di Energia di un Corpo Nero, emessa in funzione della lunghezza d'onda λ a una data temperatura, presenti un massimo caratteristico che si sposta al variare di T .

Nel 1893 Wilhelm Wien dimostrò che la densità di Energia della radiazione elettromagnetica contenuta in una cavità isoterma è data dalla relazione:

$$u(\nu, T) = \nu^3 f(\nu, T) \quad (1.3)$$

Da cui riuscì a ottenere la **legge di spostamento** del picco di emissione:

$$\boxed{\lambda_{max} = \frac{\alpha}{T}} \quad \alpha \cong 0,29 cmK \quad (1.4)$$

Dunque:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \quad \rightarrow \quad \frac{\nu_{max}}{T} = 5,878 \cdot 10^{10} s^{-1} K^{-1}$$

la legge di Wien rappresentò un'evidenza sperimentale della validità del modello di Planck, in contrasto col modello di Rayleigh-Jeans che non prevede alcuna presenza di massimi nello spettro.

1.4.2 Legge di Stefan Boltzmann

Era il 1879 quando il fisico Josef Stefan scoprì che la **radianza spettrale** $R(\nu, T)$, integrata su tutto lo spettro di frequenze, nondimeno l'Energia erogata per unità di superficie e unità di tempo, è uguale alla quarta potenza della temperatura T a meno di una costante (σ):

$$R(T) = \int_0^{+\infty} R(\nu, T) d\nu = \sigma T^4 \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \frac{erg}{cm^2 s K^4} \quad (1.5)$$

I risultati iniziali riguardanti tale legge empirica furono approssimativi in quanto non era possibile disporre di dati sufficientemente accurati per giungere a conclusioni affidabili: questa legge venne infatti dimostrata teoricamente da Ludwig Boltzmann cinque anni dopo (da cui *Legge di Stefan-Boltzmann*).

1.5 Lo spettro di Corpo Nero

L'idea alla base del modello sviluppato da Max Planck, all'inizio del '900, fu l'introduzione di oscillatori armonici che costituissero le pareti di una cavità isoterma in grado di scambiare Energia con l'ambiente per mezzo della radiazione elettromagnetica: ciò era consentito dal fatto che la radiazione di Corpo Nero è indipendente dal materiale di cui è costituita la cavità. Attraverso un processo di irreversibilità, qualora gli oscillatori avessero raggiunto l'equilibrio con la radiazione, quella sarebbe stata la radiazione di Corpo Nero. Tuttavia, prima di affrontare la derivazione dello spettro di Corpo Nero, sebbene il risultato sia scorretto, vale la pena seguire il ragionamento di Rayleigh e Jeans in quanto il loro approccio si rivelò sostanzialmente corretto, mancando però della ipotesi fondamentale proposta da Planck, ciò che inevitabilmente condusse alla già citata catastrofe ultravioletta.

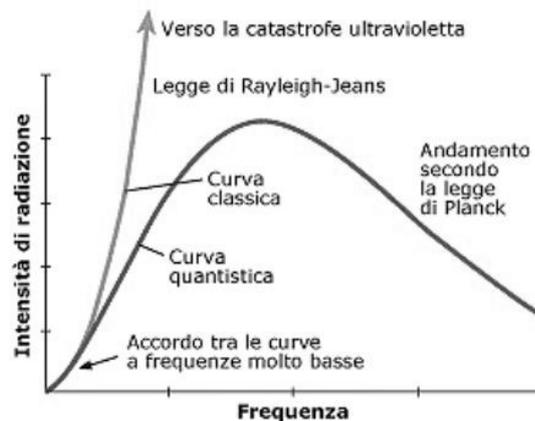


Figura 1.3: Confronto tra spettri di Corpo Nero secondo teoria quantistica e teoria classica.

1.5.1 Approccio classico di Rayleigh e Jeans

I fisici britannici proposero una legge per l'intensità di luce $I(\lambda)$ in funzione della lunghezza d'onda λ

$$I(\lambda) \propto T/\lambda^4 \quad (1.6)$$

Per ricavare tale relazione è necessario innanzitutto calcolare la densità di energia di radiazione contenuta nella cavità di frequenza compresa tra ν e $\nu + d\nu$

$$\rho(\nu)d\nu = \bar{\epsilon}N(\nu)d\nu \quad (1.7)$$

dove $\bar{\epsilon}$ è l'energia media degli oscillatori delle pareti della cavità in risonanza con la frequenza ν e $N(\nu)d\nu$ è il numero di onde stazionarie all'interno della cavità, assunta di forma cubica di lato L . Le onde si propagano in tutte le direzioni con vettore di propagazione di componenti $(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cos\theta_3)$. Se prendessimo in esame il caso monodimensionale, un'onda stazionaria dovrebbe avere un numero intero di mezza lunghezze d'onda pari al lato L , ma in tre dimensioni è necessario imporre questa condizione in tutte e tre le direzioni del cubo. Allora un'onda stazionaria risonante ha

$$n_i = \frac{2L}{\lambda} \cos\theta_i \quad \text{con } i = 1, 2, 3$$

nodi⁶ da cui, quadrando e sommando

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = \frac{4L^2}{\lambda^2} = \frac{4\nu^2}{c^2} L^2$$

che rappresenta l'equazione dei punti a coordinate intere positive o nulle sulla sfera di raggio $R = \frac{2}{c}$. Il numero di onde stazionarie tra ν e $\nu + d\nu$ è uguale al numero di punti a coordinate intere nell'ottante positivo del guscio sferico compreso tra R e $R + dR$ con $dR = \frac{2Ld\nu}{c}$. Quando tale numero è molto grande, cioè quando vale il limite termodinamico⁷, esso approssima il volume dell'ottante sferico:

$$V = \frac{1}{8}4^2 dR = \frac{1}{8}4\pi \left(\frac{2L\nu}{c}\right)^2 \left(\frac{2Ld\nu}{c}\right) = \frac{4\pi\nu^2}{c^3} L^3 d\nu$$

La densità di modi di vibrazione permessi è uguale al numero di onde stazionarie diviso il volume della cavità cubica moltiplicato per 2, in quanto esistono due direzioni di polarizzazione indipendenti per le onde elettromagnetiche. Quindi:

$$N(\nu)d\nu = 8\pi \frac{\nu^2 d\nu}{c^3} \quad (1.8)$$

Per ottenere la densità di Energia $u(\nu)$ cercata dai due fisici, bisogna moltiplicare la densità di modi di vibrazione permessi per il valor medio dell'Energia di un oscillatore armonico. Per determinare $\bar{\varepsilon}$ si può far uso della procedura di media statistica con la distribuzione di Boltzmann:

$$f(\varepsilon) = C e^{-\beta\varepsilon} \quad (1.9)$$

Questa funzione esprime la probabilità che un oscillatore del nostro ensemble abbia energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\int_0^\infty \varepsilon e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon}{\int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon} = -\frac{d}{d\beta} \log \int_0^\infty e^{-\beta\varepsilon} d\varepsilon = \frac{d}{d\beta} \log \beta = \frac{1}{\beta} = kT \quad (1.10)$$

Il risultato ottenuto è quanto previsto dal *Teorema di Equipartizione dell'Energia*, che afferma che ogni addendo dell'Hamiltoniana che contiene un parametro Lagrangiano o un momento coniugato al quadrato contribuisce all'Energia totale con un termine $kT/2$ ⁸. Grazie a questo risultato è possibile scrivere la densità di energia:

$$u(\nu)d\nu = \frac{dN_{onde}}{V} \bar{\varepsilon} = 8\pi kT \frac{\nu^2}{c^3} d\nu \quad (1.11)$$

ed esprimendo quest'ultima relazione in funzione della lunghezza d'onda λ si ottiene infine la **Legge di Rayleigh-Jeans**

$$u(\lambda) = 8\pi \frac{kT}{\lambda^4} \quad (1.12)$$

⁶I nodi di un'onda stazionaria sono definiti come quei punti che rimangono fissi, ovvero, dove l'onda è sempre nulla.

⁷Il limite termodinamico prevede che il numero di particelle che costituiscono il sistema tenda all'infinito ($N \rightarrow \infty$).

⁸Dove k è la costante di Boltzmann : $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ ergK}^{-1}$.

Questa legge, dedotta usando principi classici in cui la radiazione è trattata rigorosamente come un'onda che a ogni frequenza può essere emessa con qualunque energia, porta a una evidente contraddizione con i dati sperimentali (vedi Figura 1.3) e soprattutto al fatto che la formula diverge per piccole lunghezze d'onda, prevedendo quindi una emissione enorme per lunghezze d'onda corrispondenti all'ultravioletto e ai raggi X, ricadendo nella già menzionata catastrofe ultravioletta che una teoria corretta del Corpo Nero non doveva avere.

1.5.2 Approccio di Planck

La soluzione arrivò, come preannunciato, nel 1900 con l'introduzione da parte di Planck dell'ipotesi secondo cui la radiazione potesse essere emessa dagli oscillatori delle pareti solo a pacchetti energetici discreti, i *quanti*, che per ogni frequenza potevano trasportare solo una ben precisa energia $\epsilon = h\nu$ con h una costante *universale*.

L'Energia elettromagnetica è trasportata nel vuoto da onde piane monocromatiche di vettore d'onda \vec{k} di frequenza angolare $\omega(k) = c|\vec{k}|$ alla velocità della luce c . Nel piano di propagazione dell'onda⁹ i vettori campo elettrico \vec{E} e campo magnetico \vec{B} ruotano, con frequenza ω , perpendicolarmente fra di loro. Quindi le componenti cartesiane (nel piano di propagazione dell'onda) di \vec{E} , così come quelle di \vec{B} , si comportano come la posizione e l'impulso di un oscillatore armonico 1-dimensionale lineare, di ampiezza $|\vec{E}|$ e $|\vec{B}|$, rispettivamente. Dalla relazione

$$E_{e.m.} = \frac{1}{8\pi} \int_{\Omega} [|\vec{E}|^2 + |\vec{B}|^2] dr \quad (1.13)$$

per l'energia e.m. contenuta in una regione Ω di volume V , si nota subito che tale Energia corrisponde alla somma delle Energie di N oscillatori armonici lineari di frequenza $\omega(k)$ (due per ciascuna onda).

Poiché questo è un regime di stazionarietà, la condizione sulle onde e.m. sarà quella di *risonanza*, ottenuta imponendo che le onde stesse si annullino sulla superficie di Ω . Nel caso di nostro interesse Ω rappresenta il "forno" la cui bocca è il Corpo Nero, cioè la cavità entro cui le onde e.m. si termalizzano.

Assumendo che ogni oscillatore armonico sia un sistema canonico¹⁰ l'*Energia libera di Helmholtz* (Φ)¹¹, per gli oscillatori, coincide con quella determinata con la statistica di Bose-Einstein¹². Preso $\beta = \frac{1}{kT}$:

$$\Phi_{BE} = kT g_{int} \int_0^{\infty} g(\epsilon) \ln(1 - e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon$$

$$\Phi_{osc} = kT \int_0^{\infty} g_{osc} \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega}) d\omega + \underbrace{\frac{\hbar}{2} \int_0^{\infty} \omega g_{osc} d\omega}_{E_0} \quad (1.14)$$

⁹ \vec{k} è perpendicolare al piano di propagazione dell'onda.

¹⁰Ci rifacciamo alla definizione di sistema canonico in Termodinamica Statistica, ossia di un sistema in grado di scambiare calore con l'ambiente senza scambio di materia.

¹¹Dalla definizione di Energia Libera di Helmholtz, $\Phi = E - TS$, con E Energia, T Temperatura, S Entropia del sistema considerato.

¹²A meno di un costante (E_0) che rappresenta l'*Energia di punto zero*.

$$\Phi_{BE} = \Phi_{osc} \longleftrightarrow \epsilon = \hbar\omega; \quad g_{int}g(\epsilon) = \frac{g_{osc}(\omega)}{\hbar}$$

Dove g rappresenta la molteplicità degli stati energetici.

Tale condizione dipenderebbe dalla forma e dal volume V della cavità, ma grazie all'assunzione del Limite Termodinamico **LT**, per il quale, secondo la Termodinamica Statistica, $V \rightarrow \infty$ (e anche $N \rightarrow \infty$), si può utilizzare una cavità di forma cubica di lato L (Figura 1.5), come nell'approccio classico.

Considerata una lunghezza d'onda λ , le condizioni di risonanza per un vettore d'onda \vec{k} sono:

$$\frac{k_a}{k}L = n_a \frac{\lambda}{2} \quad n_a = 0, 1, 2 \dots \quad a = x, y, z \quad (1.15)$$

La condizione di risonanza rispetto alle frequenze ν , secondo la relazione $\nu = \frac{c}{\lambda}$, si ottiene dall'equazione precedente elevando entrambi i membri al quadrato e sommando sulle tre componenti cartesiane:

$$\nu^2(\vec{n}) = \frac{c^2}{4L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad (1.16)$$

Nel **LT** in cui il volume V diverge, la differenza che intercorre tra una frequenza risonante e quelle contigue tende a zero: si può quindi introdurre il *Limite del Continuo LC* e calcolare il numero di onde $N_{onde}(\nu)$ risonanti con frequenza minore di ν , come il volume dell'ottante sferico positivo di raggio $2L\nu/c$ (in Figura 1.4):

$$N_{onde}(\nu) = \frac{1}{8} \int_{n < \frac{2L\nu}{c}} d\vec{n} = \frac{4\pi V}{3c^3} \nu^3 \quad (1.17)$$

La condizione di risonanza appena determina, difatti, una superficie sferica, della

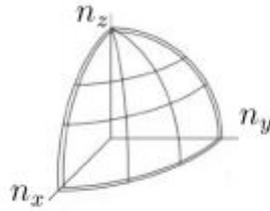


Figura 1.4: Ottante sferico positivo

quale bisogna considerare solo la parte¹³ con $n_a \geq 0$. La densità di oscillatori corrispondenti alle onde risonanti con la superficie è:

$$g_{osc}(\nu) = 2g_{onde}(\nu) = 2 \frac{dN_{onde}}{d\nu} = \frac{8\pi V \nu^2}{c^3}$$

Inserendo quest'ultima equazione all'interno dell'*Energia Libera di Helmholtz* del Corpo Nero, già introdotta nell'approccio classico, per unità di volume:

$$\frac{\Phi_{CN}}{V} = kT \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \nu^2 \ln(1 - e^{-\beta h\nu}) d\nu \quad (1.18)$$

¹³Da cui il fattore $\frac{1}{8}$.

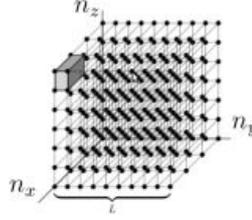


Figura 1.5: Cavità cubica di lato L

che è risolvibile attraverso una sostituzione:

$$x = \beta h\nu; \beta h d\nu = dx \Rightarrow \frac{\Phi_{CN}}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{c^3 h^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = -\frac{8\pi^5 (kT)^4}{45 c^3 h^3}$$

A questo punto è possibile calcolare l'**Energia per unità di volume** mediante la relazione generale

$$E = \frac{\partial(\beta\Phi)}{\partial\beta}$$

ottenendo:

$$\varepsilon_{CN} = \frac{E_{CN}}{V} = \int_0^\infty \underbrace{\frac{8\pi h\nu^3}{c^3(e^{\beta h\nu} - 1)}}_{u(\nu, T)} d\nu = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 c^3 h^3} \quad (1.19)$$

Infine, dalla densità di Energia specifica per la radiazione $u(\nu, T)$, si può determinare la **Funzione di Planck**, raffigurata in Figura 1.6, che identifica lo Spettro di Corpo Nero:

$$\boxed{I(\nu, T) \equiv P_{em}^{CN} = \frac{c}{4} u(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\beta h\nu} - 1}} \quad (1.20)$$

Analogamente, è possibile esprimere la suddetta funzione in funzione della lunghezza d'onda λ , tenendo in considerazione il fatto che la quantità da considerare, nel cambiamento di variabili, è la $I(\nu, T)d\nu$ e non la $I(\nu, T)$.

Infatti:

$$I(\nu, T)d\nu = I(\lambda, T)d\lambda$$

$$I(\nu, T) \neq I(\lambda, T)$$

Utilizzando la relazione $\nu = c/\lambda$, che lega la frequenza e la lunghezza d'onda, si ottiene:

$$\boxed{I(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{\beta hc}{\lambda}} - 1}}$$

La Formula di Planck è ottenuta dall'ipotesi che un oscillatore lineare scambi solo ed esclusivamente Energia in quantità discrete $h\nu$.

Le curve che descrivono la legge di Planck sono denominate **planckiane**, esse danno importanti informazioni sul corpo analizzato, come la sua temperatura: una certa curva, infatti, è determinata dalla temperatura dell'oggetto. Si può seguire il ragionamento inverso: avendo un punto sulla planckiana è possibile ricavare la temperatura del corpo che l'ha prodotta. La temperatura, una volta disegnata la curva, viene determinata in maniera univoca dal momento che le planckiane non si intersecano mai.

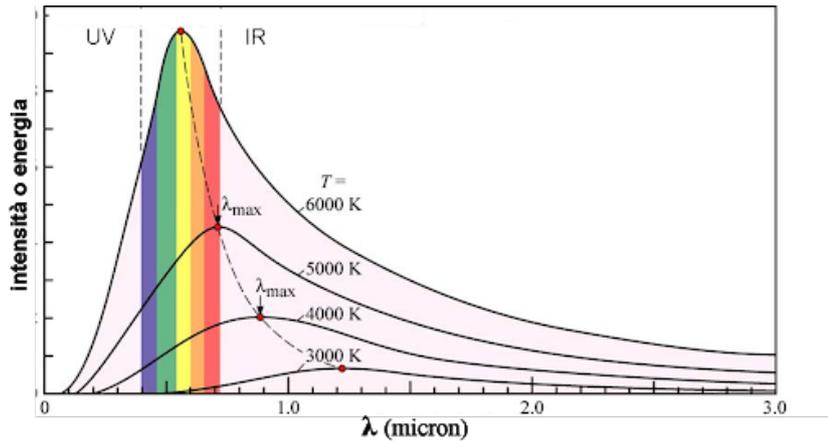


Figura 1.6: Legge di Planck in funzione della lunghezza d'onda λ

1.5.3 Approssimazioni alla Legge di Planck

Lo spettro individuato da Planck offre due approssimazioni: due regimi dello spettro, uno per i fotoni a bassa energia, l'altro per quelli ad alta energia.

- **Approssimazione di Rayleigh-Jeans**, valida per i fotoni poco energetici in cui l'esponentiale nella formula di Planck assume un valore molto piccolo:

$$h\nu \ll kT \Rightarrow I(\nu, T) \simeq 2 \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{kT}{h\nu} \left(\frac{\nu}{c}\right)^2 \quad (1.21)$$

- **Approssimazione di Wien**, valida per i fotoni molto energetici. L'esponentiale risulta così grande che il termine unitario al denominatore diventa trascurabile:

$$h\nu \gg kT \Rightarrow I(\nu, T) \simeq 2 \frac{h\nu^3}{c^2} e^{-\frac{h\nu}{kT}} \quad (1.22)$$

Capitolo 2

Applicazioni astrofisiche

2.1 Premessa

La radiazione di Corpo Nero è il modello ideale che più aderisce alle osservazioni di fenomeni termici astrofisici. Gli ambiti più importanti in cui viene applicato sono:

- **le Stelle:** sono corpi neri praticamente perfetti, perché le uniche onde e.m. che non vengono totalmente assorbite dalla superficie sono quelle di lunghezza d'onda più grande o dell'ordine del diametro stellare. Grazie allo studio della loro radiazione si riesce anche a definire una classificazione spettrale in cui vengono catalogate a seconda della loro temperatura;
- **i Pianeti:** la radiazione proveniente dal Sole viene parzialmente assorbita dai pianeti i quali, a loro volta, la riemettono a equilibrio termico raggiunto. Tale riemissione segue la curva di Corpo Nero. La terra, per esempio, ha un'emissione planckiana ad una temperatura di $300K$;
- **i Nuclei Galattici Attivi (AGN):** sono oggetti altamente energetici con uno spettro continuo che si estende dalla banda Radio alla banda Gamma. In corrispondenza della banda dell'Ottico-UV si ritrova il tipico andamento da Corpo Nero a temperature dell'ordine di $T \simeq 10^4 - 10^6 K$. Lo spettro reale è caratterizzato da una sovrapposizione multipla di spettri di Corpo Nero;
- **la Radiazione Cosmica di Fondo (CMB):** è una radiazione isotropa di fondo presente in tutto l'universo, che non è associata ad alcun corpo celeste, stella o galassia che sia. Questa ha una distribuzione spettrale corrispondente alla temperatura di Corpo Nero di $2,73K$.

Nel presente elaborato verranno approfonditi i casi delle Stelle e della CMB, la cui emissione approssima fortemente quella di Corpo Nero.

2.2 Le Stelle

La radiazione e.m. che viene studiata e che determina lo spettro osservato proviene dagli strati più esterni dell'atmosfera stellare: al variare della temperatura dei suddetti strati cambiano le caratteristiche degli spettri stessi. Inoltre, dalla loro analisi è possibile ottenere un notevole numero di ulteriori informazioni, come il colore e gli elementi che compongono l'atmosfera stellare. I fotoni che compongono lo spettro provengono, infatti, dallo strato superficiale esterno detto *fotosfera*. La base di quest'ultima è la superficie dove i fotoni subiscono l'ultimo processo di diffusione (scattering) all'interno della stessa stella. La radiazione emessa alla base della fotosfera, generata nel *core*, viene modificata dal materiale più freddo e trasparente negli strati più esterni che costituiscono il resto della fotosfera.

2.2.1 Classificazione spettrale delle Stelle

Una stella può essere approssimata ad una sfera di raggio R e superficie $S = 4\pi R^2$, da cui, per la legge di Stefan-Boltzmann:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_e^4 \quad (2.1)$$

Poichè le stelle non sono dei Corpi Neri perfetti, la temperatura T_e è definita **temperatura effettiva**, ossia la temperatura che avrebbe la superficie della stella se realmente emettesse come un Corpo Nero. Dalla relazione si comprende che due stelle aventi medesima temperatura effettiva, possano avere luminosità del tutto differenti, variandone il raggio. Sapendo la relazione per il flusso ($F = \frac{L}{4\pi D^2}$ ¹) può essere determinato il flusso superficiale della stella in funzione di T_e :

$$F_{sup} = \sigma T_e^4 \quad (2.2)$$

Nell'analisi spettrale, lo stato di ionizzazione della fotosfera è determinante: oltre allo spostamento del picco descritto dalla legge di Wien, la temperatura determina la comparsa di righe di assorbimento dovute agli ioni degli elementi costituenti la stella (Figura 2.2). La presenza di tali righe, che rivelano la composizione chimica della stella, rappresenta la più evidente differenza dello spettro da quello ideale di Corpo Nero: esse infatti sottraggono radiazione al continuo. In alcuni casi si ha che le righe di assorbimento dei metalli sono talmente fitte da generare una considerevole diminuzione dell'intensità nel continuo, effetto denominato *line blanketing*.

La classificazione spettrale alla quale oggi si fa comunemente riferimento è quella di **Yerkes**: in essa, in relazione alla temperatura superficiale T_e , compaiono le classi spettrali di **Harvard**, **O**, **B**, **A**, **F**, **G**, **K**, **M** (con temperature comprese tra $T(\mathbf{M}) < 3500K$ e $T(\mathbf{O}) > 28000K$ e colorazioni apparenti dall'arancione-rosso [**M**] al blu [**O**]) mentre, in relazione alla luminosità, le classi vanno da 0 a VII in ordine decrescente di luminosità (con valori di *Magnitudine assoluta*² tra -15 e +20).

¹La variabile D indica la distanza rispetto al centro della stella.

²Definita la *magnitudine assoluta* come la magnitudine apparente di una stella posta idealmente a 10 parsec di distanza ($1pc = 3 \cdot 10^{18} cm$): $M = -2,5 \log(\frac{L}{10pc})$.

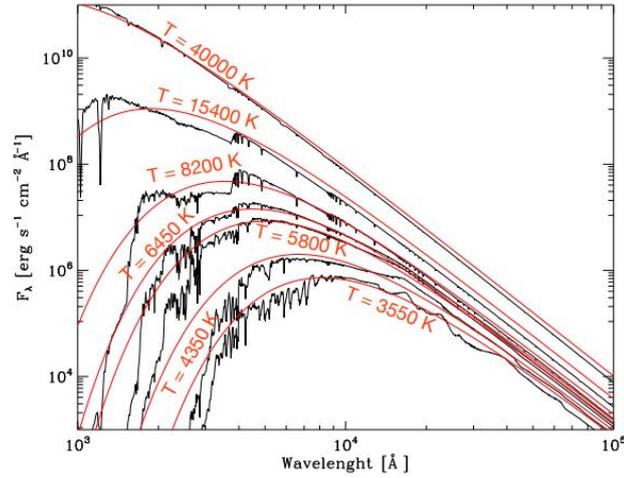


Figura 2.1: Spettri stellari a confronto: si notino lo spostamento del picco di emissione, la forma delle curve di CN al variare della temperatura, il fenomeno di assorbimento dovuto alle atmosfere stellari.

2.2.2 Spettro del Sole

Se si analizza la radiazione solare, si ottiene la curva dell'emissione alle varie lunghezze d'onda. Tramite l'approssimazione di Corpo Nero, la temperatura superficiale del Sole può essere ricavata indirettamente dalla curva valutando il picco dell'intensità dello spettro. Questo è situato nella regione verde (all'interno del range del Visibile), più precisamente a 5030Å . Dalla legge dello spostamento di Wien si ottiene:

$$T_{\odot} = \frac{\alpha}{\lambda_{max}} = \frac{0,29}{5,03 \cdot 10^{-5}} \approx 5800K \quad (2.3)$$

Invece, per quanto riguarda la luminosità, sapendo che il raggio solare $R_{\odot} \simeq 7 \cdot 10^{10}\text{cm}$ allora:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_{\odot}^4 \simeq 4 \cdot 10^{33} \frac{erg}{s} \quad (2.4)$$

Verificando che il Sole si tratta di una stella di classe spettrale G2 V.

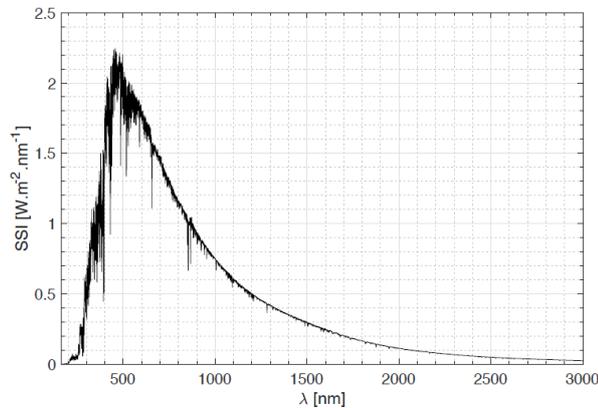


Figura 2.2: Spettro solare, fonte: ESA

2.3 La Radiazione Cosmica di Fondo (CMB)

L'esempio più preciso di Corpo Nero trovato in natura è quello della **Radiazione Cosmica di Fondo** (Cosmic Microwave Background Radiation). Essa fu scoperta nel 1965, in maniera del tutto casuale, dagli ingegneri Arno Penzias e Robert Wilson, per la quale valse loro il Premio Nobel per la Fisica nel 1979.

2.3.1 L'origine cosmologica della CMB

La CMB rappresenta una delle principali prove della teoria del **Big Bang** e della conseguente espansione dell'Universo. Nella sua fase iniziale l'Universo, avente una dimensione molto più ridotta di quella attuale, era costituito da un plasma di protoni ed elettroni liberi alla temperatura dell'ordine di $10^7 - 10^{13}K$. La sua radiazione veniva assorbita e riemessa continuamente tramite processi di scattering. L'espansione dell'Universo portò a una notevole diminuzione della temperatura, con la successiva ricombinazione degli atomi³: questo fenomeno, avvenuto circa poche centinaia di migliaia di anni dopo il Big Bang, consentì ai fotoni di poter viaggiare senza interazioni con la materia e permeare così l'intero Universo.

L'osservazione del cosmo è limitata fino all'epoca della *Ricombinazione*: questo ostacolo al passaggio della radiazione viene detto «*superficie di ultimo scattering (LSS)*». A seguito del disaccoppiamento di radiazione e materia, i fotoni della CMB, termalizzati dai continui processi di scattering Thomson, diminuirono la loro temperatura raggiungendo l'attuale valore di $T_{CMB} = 2,725 \pm 0,002K$.

2.3.2 Distribuzione spettrale della CMB

Come è stato detto, grazie ai continui processi di scattering, la radiazione entrò in equilibrio termico, generando la tipica distribuzione di Corpo Nero. L'espansione universale, rendendo inefficaci le reazioni di produzione dei fotoni, mantenne inalterato lo spettro.

La curva della distribuzione spettrale della CMB, non presenta distorsioni rispetto a quella del Corpo Nero, combacia perfettamente con essa⁴. Questa perfetta "aderenza" al Corpo Nero venne ulteriormente dimostrata dalle misure del satellite COBE (COsmic Background Explorer), lanciato nel 1991 fuori atmosfera terrestre per eliminare le aberrazioni dovute all'assorbimento atmosferico (Figura 2.3). Le misure ottenute mostravano uno spettro molto vicino alla distribuzione planckiana (alla temperatura già riportata di circa $2,73K$). Misure il più possibile precise della radiazione cosmica di fondo sono fondamentali in cosmologia poichè qualsiasi modello proposto dell'universo deve essere in grado di spiegare questa radiazione. Utilizzando la legge di Wien, si può calcolare dove cade il picco di emissione. Quest'ultimo si trova nella zona delle microonde alla frequenza $\nu_{max} = 16,2GHz$, corrispondenti ad una lunghezza d'onda di $\lambda_{max} = 1,9mm$.

³Questa epoca dell'evoluzione dell'universo fu chiamata *Ricombinazione*.

⁴Piccoli scostamenti vengono oggi osservati nella regione delle microonde, dovuti a fluttuazioni invarianti presenti sulla *LSS*.

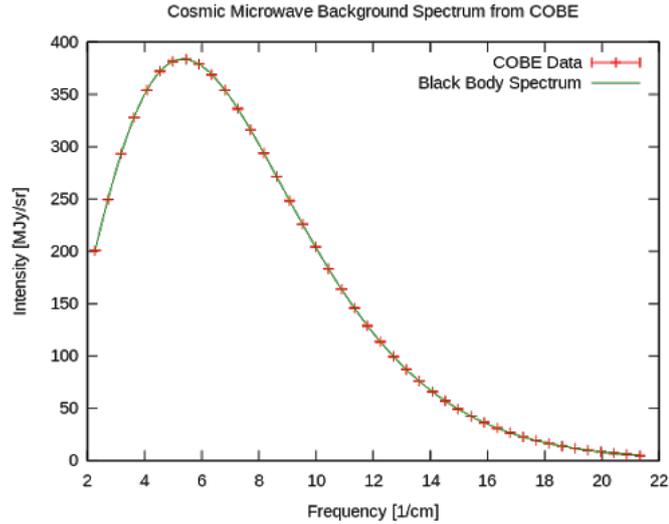


Figura 2.3: Dati di COBE sovrapposti allo spettro di Corpo Nero

La radiazione osservata è pressochè isotropa⁵, e mostra un andamento corrispondente a quello che si otterrebbe da un gas molto caldo e quasi uniforme che si espande fino alle attuali dimensioni dell'universo. Tuttavia la distribuzione spaziale dell'energia dello spettro contiene piccole anisotropie⁶, o fluttuazioni, che variano con la dimensione della regione oggetto di analisi⁷. In particolare, per la CMB esistono lievi anisotropie dovute agli effetti di interazione con la materia dalla LSS, mentre altre determinate dagli effetti dell'interazione con la materia dalla LSS all'osservatore.

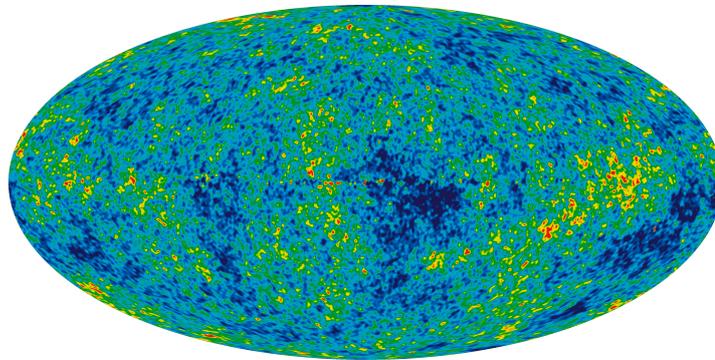


Figura 2.4: Anisotropie della CMB misurate da Planck Surveyor

⁵Ugualmente intensa in ogni direzione.

⁶L'anisotropia (opposto di isotropia) è la proprietà per la quale un determinato ente fisico ha caratteristiche che dipendono dalla direzione lungo la quale vengono considerate.

⁷Tali anisotropie sono state misurate con la missione "Planck Surveyor", dei quali un'immagine è riportata in Figura 2.4.

Bibliografia

- [1] D. Dallacasa, *Processi di Radiazione e MHD* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2017)
- [2] L. Ferrari, *I Fondamenti della Termodinamica Statistica* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2016)
- [3] F. R. Ferraro, *Astrofisica Stellare* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2016)
- [4] F. Ravanini, *Istituzioni di Fisica Teorica* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2016)
- [5] C. Fanti, R. Fanti, *Una finestra sull'Universo "Invisibile"* (dispense), Università degli Studi di Bologna (2012)
- [6] David J. Griffiths, *Introduzione alla meccanica quantistica*, Casa Editrice Ambrosiana (2005)
- [7] George B. Rybicki and Alan P. Lightman, *Radiative Processes in Astrophysics*, John Wiley and Sons (1979)
- [8] Alessandro Marconi, *La misura dei parametri fisici delle stelle* (dispense), Università degli studi di Firenze (2015)
- [9] Ricardo Gabriel Berlasco, *Esperimenti "Classici" in Fisica Moderna*, Università dell'Insubria (2014)