

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Scuola di Scienze
Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Fisica

**Studio numerico dell'evoluzione del
background cosmologico e della crescita di
perturbazioni lineari in modelli di energia
oscura interagente**

Relatore:
Prof. Marco Baldi

Presentata da:
Pietro Paolo Gambelli

Anno Accademico 2018/2019

Indice

	Abstract	2
1	Introduzione	2
	1.1 Il modello Λ CDM	2
	1.2 I limiti del modello Λ CDM	4
	1.3 I modelli di quintessenza	5
2	Modelli di quintessenza interagenti	7
	2.1 Background cosmologico	7
	2.2 Aspetti caratteristici del campo ϕ	12
3	Perturbazioni lineari	14
	3.1 Evoluzione delle perturbazioni	14
	3.2 Analisi numerica	16
4	Conclusioni	19
5	Appendice	20
	5.A Stabilità della soluzione	20
	5.B Il codice c++	22

Abstract

Il modello Λ CDM della cosmologia presenta delle incongruenze tra previsioni ed osservazioni. In questo elaborato studiamo un'alternativa, ovvero un modello di quintessenza accoppiato, mostriamo che le teorie di quintessenza possono riprodurre la stessa evoluzione di Λ CDM. Questo modello di quintessenza considera un campo scalare ϕ accoppiato alla materia oscura al posto della costante cosmologica, ne ricaviamo l'espressione e studiamo le sue caratteristiche. I due modelli presentano delle differenze riguardanti l'accrescimento delle perturbazioni di materia. E' possibile tramite la scrittura di codici informatici, studiare il modello variando i due parametri più rappresentativi: β ovvero la forza dell'accoppiamento e $\sigma_8(0)$ ovvero l'ampiezza di perturbazioni lineari all'istante attuale. Infine troviamo i parametri ottimali risultati da un confronto con le osservazioni, concludiamo che un modello accoppiato descrive leggermente meglio il comportamento delle strutture, rispetto al modello Λ CDM.

1 Introduzione

Il modello più accurato che possediamo al giorno d'oggi, per la descrizione dell'universo, è il risultato di un lavoro di ricerca che va avanti da circa un secolo e raccoglie un fondamentale lavoro teorico e molteplici conferme osservative. Esso prende il nome di Λ CDM: Lambda Cold Dark Matter. Il modello è caratterizzato dalla presenza di due componenti di energia la cui natura è tuttora ignota: l'energia oscura sotto forma di una costante cosmologica Λ , e la materia oscura fredda, non visibile direttamente e non relativistica. Descriveremo brevemente questo modello, le sue conferme osservative e i suoi limiti i quali ci inducono a modificarne alcuni elementi fondamentali al fine di presentare un modello alternativo.

1.1 Il modello Λ CDM

Riassumiamo gli aspetti principali del modello Λ CDM. Esso si basa su i due principi euristici quali il principio Copernicano ed il principio Cosmologico. Il primo ci garantisce che non occupiamo un punto privilegiato del cosmo, quindi ciò che vediamo è un campione generico dell'universo, e dunque le osservazioni che facciamo possono avvalorare teorie cosmologiche. Il secondo afferma che su grandi scale l'universo è omogeneo ed isotropo, e dunque ci garantisce che esistono sei e non più di sei simmetrie universali, tre rotazionali e tre traslazionali, le quali riducono la metrica dello spaziotempo ad una forma del tutto generale ma relativamente semplice detta FLRW (la metrica di Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi) \right) \quad (1)$$

] Dove ds è l'elemento di lunghezza, il segno - davanti al primo termine è una convenzione e fissa la segnatura della metrica $(-, +, +, +)$, t è il tempo cosmico ovvero il tempo misurato da un osservatore comovente con il fluido cosmico, a è il fattore di scala e K la costante di curvatura sempre normalizzabile a 1, 0 o -1. Il valore corretto di K è ottenibile soltanto misurando la curvatura dello spazio, in quanto ogni valore è in linea di principio compatibile con le Equazioni di Einstein. Le più recenti osservazioni della CMB (Cosmic Microwave Background, la luce più antica che possiamo osservare, risale al tempo in cui il raffreddamento cosmico ha reso l'universo trasparente alla radiazione), effettuate dai satelliti WMAP e Planck ed ampiamente descritte in [1] e [2] ci permettono di considerare un universo piatto ed un valore di $K = 0$. Un universo piatto è però altamente improbabile, si forma soltanto se la densità è esattamente un valore critico (ρ_{crit}). Una misura diretta della densità di materia ordinaria (ρ_b) e radiazione (ρ_r) rivela che queste forme di energia contribuiscono soltanto per pochi punti percentuali, $\frac{\rho_b}{\rho_{crit}} \approx 0.05$, $\frac{\rho_r}{\rho_{crit}} \approx 10^{-5}$: la loro somma è ben lontana dall'essere uguale ad uno, valore necessario per avere un universo piatto. Da qui la necessità di considerare altre due specie non osservabili direttamente ma in grado di interagire gravitazionalmente: una componente di materia oscura "fredda" (ρ_{cdm}) ovvero non relativistica ed una di energia oscura (ρ_Λ). La scelta dei due fluidi non è casuale, ognuno risolve uno specifico problema osservativo. La prima evidenza di materia oscura viene dalla dispersione di velocità in ammassi di galassie [3], altri studi più recenti mostrano che la velocità di rotazione delle galassie in funzione della distanza dall'asse è per lo più costante [4], indicando la presenza di una massa aggiuntiva che ricopre un volume di spazio maggiore di quello della galassia. Un buon candidato per spiegare queste osservazioni è appunto la Cold Dark Matter. Non è ancora abbastanza per spiegare l'evoluzione dell'universo, viene proposto un nuovo fluido, l'energia oscura. La sua equazione di stato è $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$, la densità rimane costante nel tempo come la sua pressione negativa responsabile dell'espansione accelerata dell'universo osservata studiando la relazione magnitudine-redshift delle supernovae di tipo Ia [5] e le BAO (Baryon Acoustic Oscillation) [6]. Individuati i componenti principali possiamo scrivere le equazioni di Einstein per un universo sopra descritto.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (2)$$

$$T_{\mu\nu} = \sum T_{\mu\nu}^{(x)} \quad (3)$$

$g_{\mu\nu}$ è la metrica sopra esposta da cui si definiscono i simboli di Christoffel $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\alpha,\mu} - g_{\mu\nu,\alpha})$ e il tensore di Riemann che racchiude tutte le proprietà della metrica: $R_{\mu\nu\xi}^\lambda = \Gamma_{\mu\xi,\nu}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu,\xi}^\lambda + \Gamma_{\mu\xi}^\alpha\Gamma_{\nu\alpha}^\lambda - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha\Gamma_{\xi\alpha}^\lambda$. Particolari contrazioni del tensore di Riemann prendono il nome di Tensore di Ricci $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha$ e Curvatura Scalare $R = R^\alpha_\alpha$.

$$T_{\mu\nu}^{(x)} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (4)$$

è il tensore energia impulso di una delle componenti ($x = b, r, cdm$), indichiamo con l'apice b la Materia Barionica, con r la radiazione e con cdm la Materia Oscura Fredda, $T_{\mu\nu}$ è il tensore complessivo la cui densità e pressione saranno indicate con ρ e p ; viene inoltre aggiunto un termine costante, Λ qui da interpretare come energia del vuoto quantistico oppure assorbibile all'interno di $T_{\mu\nu}$ evidenziando la presenza del quarto fluido.

Dalle componenti (00) ed (ii) delle equazioni di Einstein otteniamo due equazioni non triviali, le equazioni di Friedmann che descrivono l'evoluzione nel tempo del fattore di scala:

$$\ddot{a} + \frac{4}{3}\pi G(\rho + 3p)a = 0 \quad (5)$$

$$\dot{a}^2 + k - \frac{8}{3}\pi G\rho a^2 = 0 \quad (6)$$

Risolvendo le due equazioni in maniera accoppiata si ricava l'espressione del fattore di scala o della funzione di Hubble $H = \frac{\dot{a}}{a}$. $\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G}$ è la densità tale per cui $k = 0$, permettendoci di definire i parametri di densità come $\Omega_x = \frac{\rho_x}{\rho_{crit}}$:

$$k = \dot{a}^2 \left(\frac{8\pi G\rho}{3H^2} - 1 \right) \quad (7)$$

Studiando l'evoluzione del cosmo possiamo riconoscere tre periodi caratterizzati dalla prevalenza di una determinata specie sulle altre, la prima è la RDE (Radiation dominated era) ovvero un periodo in cui la densità di energia dell'universo è dominata dalle componenti relativistiche. Poichè la densità di energia delle specie relativistiche $\rho_r \sim a^{-4}$ diluisce più rapidamente della materia $\rho_{b,cdm} \sim a^{-3}$. Dopo un punto di svolta detto Matter-Radiation equality (approssimativamente 47'000 anni dopo il Big Bang, qui consideriamo la somma delle densità di materia ordinaria ed oscura) si osserva uno scambio di ruoli e si entra nella MDE (Matter dominated era). Poichè infine tutte le densità diminuiscono al trascorrere del tempo tranne quella dell'energia oscura che rimane costante, in un'epoca relativamente recente (circa 5 miliardi di anni fa) siamo entrati nella ADE (Λ dominated era).

1.2 I limiti del modello Λ CDM

Il quadro sopra presentato ha delle forti conferme osservative ma lascia ancora perplessi i cosmologi. Il valore corretto di Λ necessario per descrivere il fenomeno dell'espansione universale deve essere scelto ad hoc, mentre un vero modello dovrebbe avere delle ipotesi ragionevoli che spieghino l'origine di questa costante senza inserire termini correttivi appositamente costruiti, inoltre questo valore di Λ è 120 ordini di grandezza inferiore rispetto alle previsioni della teoria dei campi quantizzati ([7]) e genera delle condizioni iniziali poco ragionevoli, infatti se si modifica di poco il suo valore iniziale otterremo un universo completamente diverso dal nostro, segnale di una soluzione instabile delle equazioni: scegliendo un valore superiore avremmo un'espansione così rapida da allontanare

a tal punto la materia da prevenire la formazione di strutture su larga scala, mentre con un valore inferiore ci troveremmo ancora nella MDE.

In primo luogo ci occuperemo di trovare un'alternativa più convincente rispetto al "fine-tuning" della costante cosmologica, in secondo luogo sembra che stiamo vivendo in un'epoca speciale dove si osserva una "coincidence" tra densità di materia ed energia oscura per la prima volta dalla formazione dell'universo: perchè proprio adesso hanno dei valori inspiegabilmente molto prossimi?

Questi dubbi separano la comunità dei fisici tra alcuni che non li reputano problemi ed altri che sostengono che le proprietà di un sistema non devono far affidamento su improbabili situazioni, come la scelta ad hoc di un parametro o condizioni iniziali particolari. E' quindi necessaria una revisione del concetto di energia e materia oscura. Esistono molti altri effetti e osservazioni che mettono in dubbio il modello, eccone altri esempi: il valore di H_0 teorico non coincide perfettamente con quello misurato (da qui in avanti indicheremo tramite il pedice 0 i valori delle funzioni calcolati al tempo presente), inoltre misure diverse della stessa H_0 effettuate da telescopi diversi o sfruttando diversi osservabili restituiscono dei valori intorno a 71km/s/Mpc ma non sempre del tutto in accordo tra loro. Probabilmente il più importante dubbio sul modello è nell'esistenza stessa di materia oscura, nonostante sia stata teorizzata per la prima volta ottanta anni fa, nessuno ha mai direttamente rivelato durante gli innumerevoli esperimenti una di queste particelle non barioniche.

1.3 I modelli di quintessenza

Negli ultimi due decenni sono state proposte numerose teorie alternative al fine trovare delle risposte agli interrogativi aperti dal modello standard. Di particolare interesse per gli scopi di questo elaborato sono le teorie di quintessenza, una classe di modelli accomunate da alcune idee innovative: descrivere l'energia oscura come un campo scalare che indicheremo con ϕ soggetto a un certo potenziale V , studiare l'evoluzione dei fluidi cosmici e tramite l'uso di calcolatori simulare l'accrescimento delle strutture cosmiche su grandi scale. Variando il campo, il potenziale o introducendo degli accoppiamenti tra le diverse specie si ottengono universi con caratteristiche peculiari, non sempre coerenti con quelle osservate nel nostro universo. Prenderemo in considerazione un accoppiamento tra Materia Oscura ed Energia Oscura β , la densità di Materia Oscura ρ_c differisce da quella del modello Λ CDM per l'accoppiamento al campo ϕ . Stiamo quindi prendendo in considerazione una quinta forza della natura, il campo ϕ è il suo mediatore, ricaveremo le equazioni di evoluzione di ϕ e cercheremo il potenziale V , le risolveremo numericamente per diversi valori di β fissando lo stesso background di Λ CDM. Otterremo quindi la stessa evoluzione H del cosmo ampiamente avvalorata dalle osservazioni. I due modelli risultano distinguibili al livello perturbativo, livello a cui emerge il contributo di ϕ nella modifica dell'accrescimento delle fluttuazioni della densità di materia δ , cercheremo il valore ottimale di β per ottenere lo spettro di energia più simile a quello osservato. Di

particolare interesse è il parametro σ_8 , vediamo la sua definizione: sia $\langle \rho_b \rangle$ la media della densità in un volume Ω le cui dimensioni sono molto maggiori di quelle a cui si registrano fluttuazioni,

$$\delta(\vec{x}) = \frac{\rho_b(\vec{x}) - \langle \rho_b \rangle}{\langle \rho_b \rangle} \quad (8)$$

la varianza σ^2 della densità ci introduce al concetto di spettro di potenza $P(k)$, nel limite in cui Ω tende all'infinito

$$\sigma^2 = \langle \tilde{\delta}_k^2 \rangle \rightarrow \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty P(k) k^2 dk \quad (9)$$

dove $\tilde{\delta}_k$ è la trasformata di fourier di $\delta(\vec{x})$. Grazie alle proprietà di omogeneità e isotropia, cioè grazie al principio cosmologico lo spettro di potenza perde la dipendenza da \vec{k} ed è funzione soltanto del suo modulo k , permettendoci di calcolare immediatamente la parte angolare. In cosmologia è spesso interessante occuparsi di alcune regioni di spazio invece che dell'intero universo per studiare l'accrescimento di strutture, è possibile definire la varianza delle fluttuazioni su sfere di raggio R tramite funzioni selezionatrici $F(\vec{x}; R)$, costanti dentro la sfera ed uguali a zero fuori, le quali permettono di andare a studiare le proprietà dell'aggregazione della materia su diverse scale:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} P(k) \tilde{F}^2(kR) k^2 dk \quad (10)$$

con \tilde{F} è indicata la trasformata di fourier della funzione F , σ_8 è dunque la radice quadrata della varianza delle fluttuazioni in una regione sferica di raggio 8 in unità di Megaparsec.

2 Modelli di quintessenza interagenti

Le teorie di quintessenza rappresentano delle ottime alternative alla cosmologia standard. Esse si propongono di risolvere problemi aperti e alleviare tensioni tra predizioni ed osservazioni. Ratra, Peebles propongono in [8] e Wetterich in [9] nel 1988 il primo modello che fa uso di un campo scalare per descrivere l'energia oscura dando inizio ad una serie di studi sempre più approfonditi riguardanti il settore oscuro dell'universo. Il presente elaborato, in particolare, tratta una teoria di quintessenza con un accoppiamento conforme tra materia ed energia oscura recentemente proposta da Barros et al. in [10]. Il sistema che studiamo è l'universo nel suo insieme, su scale di migliaia di megaparsec ($10^{25}m$). Possiamo descrivere le componenti dell'universo tramite dei fluidi continui: stelle, galassie e super ammassi possono essere considerati come puntiformi. Due tra i fluidi che pervadono l'universo sono piuttosto familiari, si tratta di materia barionica e radiazione. Come accade nel caso del modello Λ CDM queste due specie non sono sufficienti a spiegare l'evoluzione cosmica, la materia oscura e l'energia oscura vanno affiancate alla materia barionica per spiegare l'assenza di curvatura rilevata dalle osservazioni, l'espansione accelerata dell'universo invece necessita di una qualche forma di energia oscura. L'energia oscura descritta da un campo scalare in un potenziale $V(\phi)$ è più verosimile rispetto ad una costante cosmologica, in quanto è in grado di evolvere come gli altri fluidi, mentre una costante cosmologica ha invece bisogno di essere fissata all'istante iniziale. L'epoca privilegiata in cui ci troviamo descritta dal modello Λ CDM in cui densità di materia e di costante cosmologica hanno dei valori molto prossimi può essere soltanto una coincidenza improbabile, altrimenti è sintomo di un errore o almeno un indizio dell'incompletezza del modello.

2.1 Background cosmologico

L'interazione dominante nell'universo è senz'altro quella gravitazionale, escludendo regioni particolari, supera di molti ordini di grandezza tutte le altre, ne segue che ai fini di scrivere le leggi comiche, si trascurano le altre forze agenti sulla materia ordinaria. Al contrario, non abbiamo informazioni riguardo la materia ed energia oscure: potrebbero possedere un accoppiamento, ne consideriamo uno particolarmente semplice o soltanto approssimato. La densità di lagrangiana dell'intero sistema è scrivibile come:

$$L = \frac{R}{2k^2} + \sum_{\alpha} L_{\alpha}(\rho_{\alpha}) + L_{\phi}(\phi) + I(\phi, \rho_c) \quad (11)$$

con $\alpha = b, r, c$, R è lo scalare di ricci, le L sono, andando in ordine, le densità di lagrangiana dei vari fluidi cosmici: materia barionica (b), radiazione (r), materia oscura fredda (c) e energia oscura (ϕ), nella lagrangiana del sistema non sono presenti altri

termini misti oltre $I(\phi, \rho_c)$ che descrive l'accoppiamento di materia ed energia oscure

$$L_\phi = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi). \quad (12)$$

Minimizzando il funzionale d'azione:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g}L \quad (13)$$

dove g è il determinante delle metrica di FRLW, troviamo le equazioni di Eulero, esse ci conducono alle relazioni di evoluzione per le singole specie. Un altro approccio per ricavare le stesse equazioni sfrutta l'identità di Bianchi

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0 \quad (14)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}. \quad (15)$$

Questa relazione si dimostra sfruttando le simmetrie del tensore di Riemann, quindi proprietà geometriche dello spaziotempo. Richiediamo che il tensore energia impulso del nostro sistema risolva le equazioni di Einstein

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \quad (16)$$

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + p(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \quad (17)$$

applicando l'identità di Bianchi (15) otteniamo l'equazione di conservazione per i quattro fluidi:

$$\nabla_\mu T_\nu^\mu = 0 \quad (18)$$

$$T_\nu^\mu = \sum_i T_{(i)\nu}^\mu. \quad (19)$$

Per quanto sopra anticipato, soltanto materia barionica e radiazione si conservano separatamente

$$\nabla_\mu T_{(b)\nu}^\mu = 0 \quad (20)$$

$$\nabla_\mu T_{(r)\nu}^\mu = 0 \quad (21)$$

mentre l'interazione nella Lagrangiana ci impone di vincolare le componenti oscure

$$\nabla_\mu T_{(c)\nu}^\mu = C_\nu^{(c)} \quad (22)$$

$$\nabla_\mu T_{(\phi)\nu}^\mu = C_\nu^{(\phi)}, \quad (23)$$

$$C_\nu^{(c)} = -C_\nu^{(\phi)} \quad (24)$$

L'accoppiamento considerato è quello conforme ovvero $C_\nu^{(c)} = \kappa\beta\rho_c\nabla_\nu\phi, \kappa^2 = 8\pi G$, β è una costante adimensionale che esprime l'intensità dell'interazione nel limite in cui $\beta = 0$ otteniamo un universo in cui le quattro specie interagiscono soltanto da un punto di vista gravitazionale. Questo caso particolare ci riporta al modello Λ CDM (per una trattazione approfondita degli accoppiamenti del campo scalare fare riferimento a [12]). Confrontando il tensore energia-impulso e la lagrangiana del campo scalare $T_{\mu\nu}^{(\phi)} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}L_\phi$, otteniamo in un primo momento la relazione di continuità in funzione di ϕ , in un secondo possiamo definire rispettivamente densità e pressione anche per il campo

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (25)$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (26)$$

Le evoluzioni delle quattro specie sono state ricavate dalle equazioni di continuità (15) e dalla definizione del tensore energia impulso

$$\begin{cases} \dot{\rho}_b + 3H\rho_b = 0 \\ \dot{\rho}_r + 4H\rho_r = 0 \\ \dot{\rho}_c + 3H\rho_c = -\kappa\beta\dot{\phi}\rho_c \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = -\kappa\beta\rho_c. \end{cases} \quad (27)$$

Il precedente sistema non può essere risolto da solo, i vincoli e le condizioni al contorno non sono sufficientemente restrittive, non conosciamo il potenziale di ϕ e nemmeno il suo valore o quello della sua derivata in nessun punto. Le equazioni di Friedmann forniscono la relazione per la curvatura dell'universo:

$$\Omega = \frac{\kappa^2}{3H_{\Lambda CDM}^2} \quad (28)$$

dove $H_{\Lambda CDM}$ è la funzione di Hubble ricavata nel contesto di Λ CDM. Le evidenze di un universo piatto indicano che il valore di $\Omega_{tot} = \sum \Omega_i$ sia 1, anche in questo caso introduciamo la materia oscura fredda e l'energia oscura sotto forma di densità di campo scalare per raggiungere il valore critico di densità ottenendo:

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_b + \rho_r + \rho_c + \rho_\phi). \quad (29)$$

Il background cosmologico del modello Λ CDM è ben noto ed ha delle ottime conferme osservative e possiamo richiedere che il modello accoppiato abbia la stessa evoluzione, tramite l'imposizione di $H = H_{\Lambda CDM}$, approccio proposto da Barros et al. in [10]. Da

questo vincolo e dalla sua derivata possiamo esprimere le equazioni per le densità e pressioni in funzione di quantità note del modello Λ CDM.

$$H_{\Lambda CDM}^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_b + \rho_r + \rho_{cdm} + \rho_\Lambda) \quad (30)$$

Consideriamo la relazione che lega i background e la sua derivata

$$H_{\Lambda CDM} = H \quad (31)$$

$$\frac{dH_{\Lambda CDM}}{dt} = \frac{dH}{dt} \quad (32)$$

dalla prima otteniamo immediatamente

$$\rho_\phi = \rho_\Lambda + \rho_{cdm} - \rho_c \quad (33)$$

sviluppando la seconda e sapendo che $H = \frac{\dot{a}}{a}$

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}_{\Lambda CDM}}{a_{\Lambda CDM}} - \frac{\dot{a}_{\Lambda CDM}^2}{a_{\Lambda CDM}^2} \quad (34)$$

riutilizzando la (31) e la relazione di Friedmann $3\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho + 3p)$ possiamo scrivere

$$\rho + 3p = \rho_{\Lambda CDM} + 3p_{\Lambda CDM} \quad (35)$$

dove ρ e p indicano le densità e pressioni complessive per il medello di quintessenza (senza pedici) e per il modello Λ CDM. Infine otteniamo anche l'espressione per la pressione dell'energia oscura sapendo che $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$:

$$p_\phi = p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (36)$$

Non è necessario conoscere il potenziale, per la risoluzione del sistema, in quanto il vincolo che abbiamo imposto su H definisce la dinamica del sistema, lo troveremo successivamente attraverso la seguente espressione:

$$V(\phi) = \rho_\Lambda + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \quad (37)$$

Procediamo con la soluzione delle equazioni del sistema (27)

$$\rho_b(t) = \rho_b(t_0)a^{-3}(t) \quad (38)$$

$$\rho_r(t) = \rho_r(t_0)a^{-4}(t) \quad (39)$$

per la terza possiamo scrivere:

$$\frac{d\rho_c(t)}{dt} \frac{1}{\rho_c} = -3H - \kappa\beta \frac{d\phi}{dt} \quad (40)$$

separando le variabili ed integrando otteniamo la seguente espressione

$$\rho_c(t) = \rho_c(t_0)e^{-3N - \kappa\beta(\phi(t) - \phi(t_0))} \quad (41)$$

dove t_0 indica il tempo attuale. L'andamento di materia e radiazione è lo stesso del modello Λ CDM infatti la densità di materia ordinaria è inversamente proporzionale al volume mentre la radiazione è soggetta anche al redshift cosmologico. Materia oscura ha un andamento leggermente più complesso, come vediamo se $\beta\dot{\phi} > 0$ possiamo interpretare l'accoppiamento come un passaggio di energia dal campo alla materia oscura, se $\beta\dot{\phi} < 0$ viceversa la densità di materia diminuisce trasferendo energia al campo scalare. L'ultima equazione del sistema ci permette di trovare il campo scalare ϕ e la sua derivata se risolta numericamente, è infatti un'equazione differenziale di secondo grado a coefficienti non costanti, soltanto casi particolari presentano delle soluzioni analitiche, non il caso generale. Sommando assieme le espressioni per densità e pressione del campo (25), (26) e sostituendo a ρ_ϕ l'equazione (33) ed a p_ϕ l'equazione (36) ricaviamo:

$$\dot{\phi}^2 = \rho_{cdm} - \rho_c \quad (42)$$

Derivando e conoscendo le espressioni di $\dot{\rho}_{cdm}$ e $\dot{\rho}_c$ arriviamo ad una semplice espressione per il campo scalare:

$$2\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \kappa\beta\rho_c = 0. \quad (43)$$

Tramite un cambio di variabile nell'equazione (43), passando ad $N = \ln(a(t))$, indicando con un apice la derivata rispetto ad N , e utilizzando i parametri di abbondanza

$$\Omega_i = \frac{\kappa^2}{3H^2}\rho_i \quad (44)$$

otteniamo una forma che meglio si presta ad essere risolta numericamente. Appaiono soltanto il campo scalare e funzioni di N note dal modello Λ CDM:

$$2\phi'' + \phi'(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta\phi') - \frac{3\beta}{\kappa}\Omega_{cdm} = 0 \quad (45)$$

. Possiamo, prima di procedere con la risoluzione numerica, studiare l'equazione da un punto di vista analitico. Tramite lo studio del jacobiano del sistema si è studiata la stabilità della soluzione, fare riferimento all'appendice A per i dettagli sul procedimento. Le informazioni che ricaviamo sono preziose in quanto ci dicono che $\pm\infty$ sono due punti di equilibrio, per cui la derivata di $\phi(N)$ si annulla, dandoci la possibilità di ricavare le condizioni iniziali per l'ultima equazione. Non appare ϕ nelle equazioni perciò la soluzione è definita a meno di una costante additiva, siamo liberi di scegliere il valore di $\phi(N_i)$ dove N_i è l'istante iniziale.

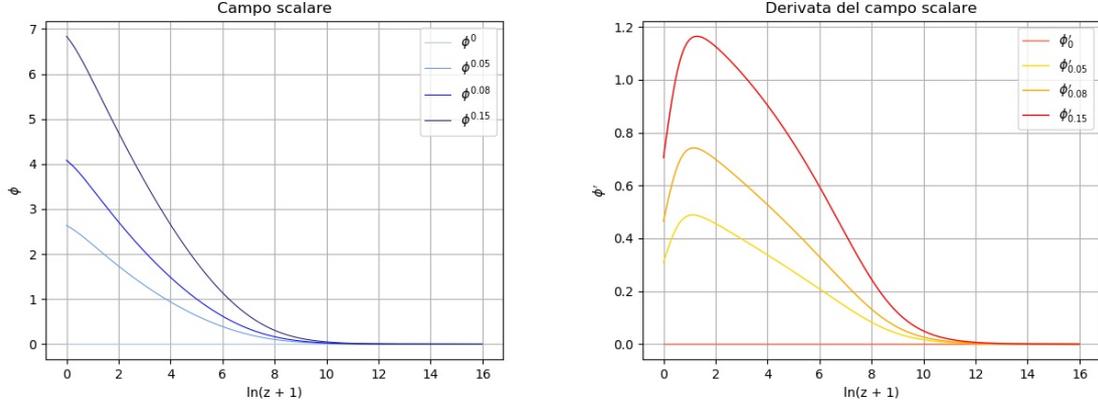


Figura 1: Al variare dell'accoppiamento β sono state raffigurate diverse curve per i valori di $\beta = 0.15$, $\beta = 0.08$, $\beta = 0.05$ e $\beta = 0$ per ϕ e ϕ' , tutte le variabili sono state opportunamente riscalate al fine di ottenere numeri puri: $\phi_{puro} = \frac{k}{\sqrt{6}}\phi$, $\phi'_{puro} = \frac{k}{\sqrt{6}}\phi'$.

2.2 Aspetti caratteristici del campo ϕ

In questa sezione ci occupiamo di trovare e descrivere come il campo scalare interagisce con la materia oscura e quindi con il resto del sistema universo ed evidenziamo differenze importanti rispetto al modello Λ CDM. In precedenza sono state ricavate le equazioni da risolvere numericamente. A questo punto poniamo le condizioni iniziali iniziali a $N = -16$, ci troviamo in piena RDE, questo valore di N ci assicura che il valore di ϕ' non si discosta significativamente da zero. In questa era il termine di sorgente dell'equazione (45) è infatti ancora prossimo a zero, Ω_c è dell'ordine di 10^{-4} impedendo l'aumento del campo ϕ e giustificando l'imposizione di $\phi'(N_i) = 0$. Tutti i dettagli sulla risoluzione delle equazioni, quali codici e metodi utilizzati sono presentati nel paragrafo 3.2, in questa sezione ci limitiamo ad esporre i risultati relativi alle funzioni ϕ , ϕ' e V . Al variare del parametro β , in fig. 1 sono state rappresentate le curve per quattro valori significativi. Se $\beta = 0$ si riproduce il modello Λ CDM in cui non è presente un campo scalare costante, equivalente ad una costante cosmologica. Al crescere di β la materia non barionica e il campo ϕ scambiano più energia secondo la seguente relazione:

$$\rho_c(N) = \rho_c(t_0)e^{-3N}e^{-\kappa\beta\phi(N)} \quad (46)$$

ρ_c si diluisce più rapidamente di ρ_{cdm} quando $\phi' > 0$, ad $z \approx 4$ troviamo il massimo di ϕ' (fig. 2 (sinistra)) epoca oltre la quale il campo e la materia oscura subiscono una diminuzione del flusso di energia che fluisce dall'una all'altra. Strutture cosmiche e densità di materia appaiono differenti tra i modelli e ci offrono la possibilità, effettuando misurazioni accurate di parametri cosmologici, di valutare l'accuratezza dell'uno o l'altro modello. Il confronto diretto tra le evoluzioni delle specie è visibile nella fig. 2 (sinistra) evidenziando le differenze sopra descritte, inoltre la "matter-dark energy equality", che

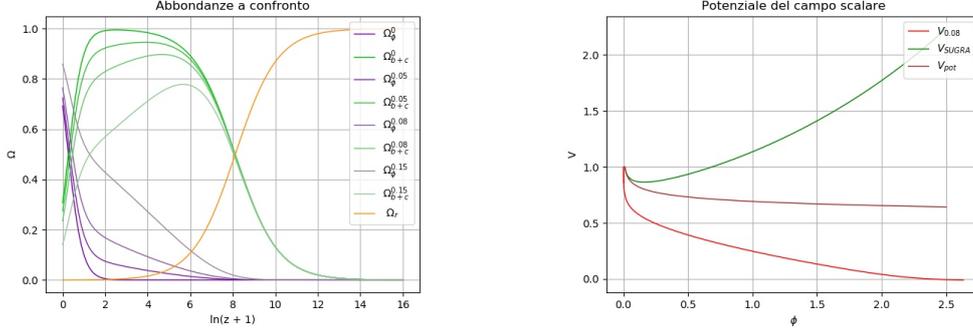


Figura 2: A sinistra: Evoluzione dei fluidi cosmici, in arancione l'abbondanza di radiazione, in verde l'abbondanza totale di materia, in viola l'abbondanza di energia oscura, curve più chiare corrispondono ad un accoppiamento maggiore. A destra: Potenziali in funzione di ϕ normalizzati, in rosso il potenziale per il valore di $\beta = 0.08$, in verde e marrone due delle proposte più promettenti come potenziali per i modelli di quintessenza, anch'essi riscaldati tramite la relazione: $V_{puro} = \frac{k^2}{3H^2} V$

è fonte del "coincidence problem" in Λ CDM si anticipa all'aumentare di β , anche se il problema sussiste in quanto le densità di materia ed energia oscura sono ancora simili. Il peculiare comportamento del campo è dovuto alla presenza del potenziale introdotto in (12) e riprodotto in fig. 2 (destra) e confrontato con uno dei potenziali proposti più interessanti, il potenziale "SUGRA" (Brax, Martin, [14]) la cui espressione analitica più generale è

$$V_{SUGRA}(\phi) = A\phi^{-\beta}e^{\phi^2/2} \quad (47)$$

e con un secondo potenziale detto "Inverse power-law" (Ratra, Peebles, [14])

$$V_{pot}(\phi) = A\phi^{-\beta} \quad (48)$$

L'obiettivo delle teorie di quintessenza è creare un modello cosmologico autoconsistente, ricorrere all'imposizione del background di Λ CDM ci permette però di recuperare i risultati positivi di questo modello e testare la bontà di diversi potenziali ed indicare una direzione alle future ricerche. Si suppone che il potenziale sia una caratteristica dei campi presenti nell'universo, la cui espressione potrebbe essere semplice come in V_{pot} o esponenziale (V_{SUGRA}) come spesso emergono in fisica delle particelle elementari o altri ancora.

3 Perturbazioni lineari

Studiamo l'evoluzione delle strutture cosmiche perturbando le soluzioni omogenee trovate nell'approssimazione di perfetta omogeneità. Esistono numerosi studi sulle strutture cosmiche, le prime evidenze sono state studiate da Abell nella pubblicazione [15] mentre possiamo citare [16] e [17] come ricerche sull'effetto di un campo scalare accoppiato sull'accrescimento delle strutture. Le strutture cosmiche ci danno la possibilità di confrontare i valori di parametri osservabili, si pensi ad esempio alla costante di Hubble o a σ_8 , con quelli che otterremo attraverso il modello che stiamo trattando. Selezioneremo quindi i valori ottimali di β ed il valore di $\sigma_8(0)$ per massimizzare la fedeltà del modello a ciò che osserviamo.

3.1 Evoluzione delle perturbazioni

Introduciamo perturbazioni dipendenti dalle coordinate spaziali e dal tempo per ogni specie e studiamo la loro evoluzione. I principi cosmologici pongono una condizione di omogeneità perfetta nella fase di formazione universale, l'universo che osserviamo però è tutt'altro che omogeneo, basti pensare alla terra, al sistema solare ed alle migliaia di stelle che popolano il cielo notturno. Come sappiamo delle fluttuazioni di materia sono consentite dalla meccanica quantistica fintanto che si rispetti il principio di indeterminazione, in particolare la massa virtuale è inversamente proporzionale al tempo che intercorre tra la sua apparizione e la sua distruzione ovvero se $\Delta m \Delta t \leq \frac{\hbar}{2}$ ($c = 1$ in tutta la trattazione), esiste la possibilità di rompere in alcune regioni di spazio l'omogeneità iniziale. L'inflazione cosmica, una rapidissima espansione del tessuto spaziotemporale, avvenuta nei primissimi istanti del cosmo, ha reso queste fluttuazioni macroscopiche, giustificando la presenza di regioni sovradense dalle quali si possono sviluppare per collasso gravitazionale delle strutture cosmiche

$$\phi(\vec{x}, t) = \bar{\phi}(\vec{x}, t) + \delta\phi(\vec{x}, t) \quad (49)$$

$$\rho_\alpha(\vec{x}, t) = \bar{\rho}_\alpha(\vec{x}, t) + \delta\rho_\alpha(\vec{x}, t) \quad (50)$$

$$p_\alpha(\vec{x}, t) = \bar{p}_\alpha(\vec{x}, t) + \delta p_\alpha(\vec{x}, t) \quad (51)$$

con $\alpha = b, r, c$, i valori medi indicati tramite la barra non sono altro che le soluzioni delle equazioni (45), (38), (39) e (41). Tutte le pressioni si ricavano invece con semplicità dalla relazione $p = \omega\rho$ ponendo ω uguale ad $\frac{1}{3}$ per la radiazione, $\omega = 0$ per la materia ordinaria ed oscura. Definiamo i contrasti di densità attraverso:

$$\delta_\alpha = \frac{\delta\rho_\alpha}{\bar{\rho}_\alpha} \quad (52)$$

da un punto di vista fisico quest'ultimo parametro permette di tracciare l'evoluzione delle strutture cosmiche, essendo queste regioni dello spazio ad alta densità. La sua derivata

temporale descrive il loro accrescimento. Sotto l'effetto del campo gravitazionale le regioni sovradense collassano su se stesse e intensificano il campo gravitazionale attraendo a sè la materia circostante fino a dar vita alle strutture cosmiche, al contrario regioni sottodense si svuotano ed ingrandiscono creando i vuoti cosmici. Uno degli obiettivi di questo studio è capire il ruolo del campo ϕ , e come influisce su questi processi.

Ogni metrica $g_{\mu\nu}$ si può espandere in serie:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\epsilon + O(\epsilon^2) \quad (53)$$

Nel limite in cui la metrica sia localmente indipendente dal tempo e nel limite in cui le velocità in questione non siano relativistiche, il che è vero per l'accrescimento delle strutture cosmiche su scale delle decine di megaparsec, il limite Newtoniano è un'ottima approssimazione. I termini della metrica di ordine superiore al primo non sono quindi strettamente necessari per la descrizione dei processi considerati. La metrica così formata presenta due termini, ritroviamo la metrica di Minkosky $\eta_{\mu\nu}$ più il termine perturbativo $h_{\mu\nu}$. In maniera alternativa è possibile scrivere la metrica perturbata linearmente nel limite Newtoniano utilizzando i potenziali standard di Bardeen ([18]) Ψ e Φ , scegliamo questo secondo procedimento poichè facilita notevolmente la risoluzione delle equazioni, la metrica assume la forma:

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi(t, x^i))dt^2 + (1 - 2\Phi(t, x^i))dx^i dx_i. \quad (54)$$

Riprendendo le equazioni di Einstein nella nuova metrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ risolviamo per la componente 00

$$\tilde{R}_{00} - \frac{1}{2}\tilde{g}_{00}\tilde{R} = 8\pi GT_{00} \quad (55)$$

Perturbando la soluzione in questa metrica otteniamo la seguente equazione di evoluzione per il contrasto di materia oscura:

$$\ddot{\delta}_c - 3\ddot{\Phi} + \kappa\beta\delta\ddot{\phi} + a^{-2}(\kappa\beta\nabla^2\delta\phi - \nabla^2\Psi) + (\dot{\delta}_c - 3\dot{\Phi} + \kappa\beta\delta\dot{\phi})(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) = 0 \quad (56)$$

Trasformando tutte le funzioni secondo $F(f(\vec{k})) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-i\vec{k}\vec{x}} f(\vec{x})d\vec{x}$ e passando nello spazio di Fourier, sostituiamo gli operatori ∇^2 con $-k^2$ dove k è il numero d'onda. Se le lunghezze d'onda in questione sono sufficientemente piccole in confronto alle dimensioni cosmiche, esattamente se $(\frac{k}{a})^2 \gg H^2$, ci troviamo nel limite delle piccole scale e possiamo trascurare le derivate dei potenziali e i differenziali di ordine 2, l'equazione (56) si riduce come segue:

$$\ddot{\delta}_c + \dot{\delta}_c(2H - \kappa\beta\dot{\phi}) - \frac{\kappa^2}{2}\rho_c\delta_c(1 + 2\beta^2) - \frac{\kappa^2}{2}\rho_b\delta_b = 0, \quad (57)$$

passando alla consueta variabile N ed esplicitando le dipendenze dalle densità del modello Λ CDM otteniamo la forma definitiva:

$$\delta_c'' + (2 + \frac{H'}{H} - \kappa\beta\phi')\delta_c' - \frac{3}{2}(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2)(1 + 2\beta^2)\delta_c - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0. \quad (58)$$

Analogamente si può procedere per il contrasto di densità della materia ordinaria

$$\delta_b'' + \left(2 + \frac{H'}{H}\right)\delta_b' - \frac{3}{2}(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\phi'^2)\delta_c - \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b = 0. \quad (59)$$

Anche se il background è lo stesso del modello Λ CDM, i valori dei contrasti di densità differiscono per i termini di interazione con il campo ϕ e le altre specie come appare con chiarezza nelle (58) e (59). Sia la materia oscura che ordinaria formano le strutture cosmiche, è quindi utile definire anche il contrasto di densità totale:

$$\delta = \frac{\delta\rho_b + \delta\rho_c}{\bar{\rho}_b + \bar{\rho}_c} \quad (60)$$

mentre la funzione di crescita ed il tasso di accrescimento si definiscono:

$$g = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad (61)$$

$$f = \frac{d\ln(\delta)}{d\ln(a)} = \frac{\delta'}{\delta}. \quad (62)$$

Abbiamo così la possibilità, utilizzando la semplice relazione

$$f(N)\sigma_8(N) = fg\sigma_8(0) = \sigma_8(0)\frac{\delta'(N)}{\delta(0)}, \quad (63)$$

di studiare la formazione delle strutture in regioni dell'ordine dei megaparsec e contemporaneamente confrontare il modello in questione con le numerose misurazioni del RSD (redshift-space distortion) ([20], [21]) e riassunte in [22], per rilevare la presenza di un campo scalare di quintessenza interagente con la materia oscura. Possiamo sfruttare le osservazioni per fissare il parametro libero β ovvero la forza dell'accoppiamento tra le componenti oscure. Minimizzando il χ^2 della funzione $f(N)\sigma_8(N)$ con i valori osservati cerchiamo i valori ottimali di β e $\sigma_8(0)$ affinché il modello riproduca i dati osservati.

3.2 Analisi numerica

Nei paragrafi precedenti abbiamo ricavato le equazioni differenziali le cui soluzioni sono le funzioni $\phi(N)$, δ_b e δ_c . Questa scelta ci permette, risolvendo un sistema di sei equazioni al primo ordine, di avere un facile accesso a tutte le altre quantità interessanti tra cui il potenziale V , le abbondanze delle quattro specie descritte e $f\sigma_8$. L'approccio alla risoluzione di equazioni tramite la scrittura di codici è spesso necessario in cosmologia, l'universo non ci offre la possibilità di sperimentare ma soltanto di osservare tramite lo studio della radiazione. Ogni modello viene testato simulando l'evoluzione cosmica e predicendo quantità osservabili. Procediamo risolvendo le equazioni facendo evolvere

le perturbazioni, cercando il valore di β che meglio riproduce i parametri osservativi. Nell'appendice B è allegato il codice c++ che è stato eseguito nel Cluster Bladerunner del dipartimento di Fisica e Astronomia a Bologna. Gli strumenti utilizzati per risolvere le equazioni sono implementati nelle librerie GSL (Gnu Scientific Library) e vanno sotto il nome di *gsl_odeiv2*. Per aumentare l'efficienza del programma il sistema che va risolto è un sistema di sei equazioni differenziali al primo ordine, le quali hanno come incognita il campo scalare ϕ , δ_b , δ_c e le relative derivate:

$$\begin{cases} \phi' = \psi \\ \psi' = \frac{3\beta}{2\kappa}\Omega_{cdm} - \frac{\psi}{2}(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta\psi) \\ \delta'_b = \sigma_b \\ \delta'_c = \sigma_c \\ \sigma'_b = -\sigma_b\left(2 + \frac{H'}{H}\right) + \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b + \frac{3}{2}(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\psi^2)\delta_c = 0 \\ \delta'_c = -\delta'_c\left(2 + \frac{H'}{H} - \kappa\beta\psi\right) + \frac{3}{2}(\Omega_{cdm} - \frac{\kappa^2}{3}\psi^2)(1 + 2\beta^2)\delta_c + \frac{3}{2}\Omega_b\delta_b. \end{cases} \quad (64)$$

In questo modo si ha la certezza di avere tutti i valori di ψ necessari a risolvere le equazioni per σ' , inoltre risolvendole simultaneamente il tempo di computazione della soluzione diminuisce e si impiegano meno risorse. Utilizzando una notazione più compatta possiamo dire che cerchiamo una funzione vettoriale $\vec{x}(N)$ che soddisfa il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \vec{y}'(\vec{y}, N; \beta) = \vec{f}(\vec{y}, N; \beta) \\ \vec{x}(N_i; \beta) = \vec{x}_i \end{cases} \quad (65)$$

dove in x_0 sono contenuti i valori delle variabili all'inizio della simulazione. I metodi *gsl_odeiv2* richiedono per la soluzione la definizione del sistema, per aumentare la precisione forniamo anche la matrice jacobiana ($J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right]$) e quella delle derivate parziali rispetto ad N ($D = \left[\frac{\partial f_i}{\partial N}\right]$). La funzione di *step* tiene traccia di tutti i valori all'istante N , la funzione *evolve* evolve il sistema dall'istante N a quello al valore $N + h$, utilizzando l'algoritmo di Runge-Kutta Prince-Dormand e un controllo adattivo del passo, ovvero il valore successivo di h viene scelto affinché gli errori assoluto e relativo sulle componenti di $\vec{y}(N + h)$ siano minori di un valore prefissato, che qui scegliamo essere pari a 10^{-10} . Per aumentare ulteriormente l'accuratezza delle funzioni risolviamo il sistema da N_i a valori crescenti N_f , ottenendo successioni discrete $a(N_f)$, poi interpolate per costruire le soluzioni continue vere e proprie. Le condizioni iniziali per ϕ sono le stesse descritte nella sezione 2.2, per le perturbazioni vanno effettuate opportune considerazioni. Le equazioni per le perturbazioni sono state ricavate in un regime lineare, giustificabile soltanto tramite la scelta di valori di $\delta_b(N_i)$ e $\delta_c(N_i)$ sufficientemente piccoli, le misurazioni più accurate di queste quantità provengono dalla superficie di ultima diffusione ($z \approx 1100$), teniamo fisso quindi il sistema delle perturbazioni fino al valore di $N = -7$ ed imponiamo

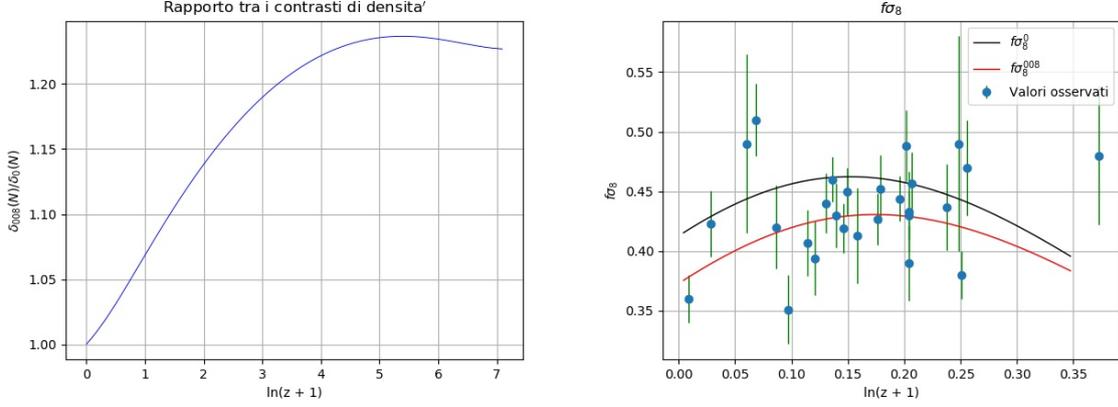


Figura 3: Rapporto $\frac{\delta_0}{\delta_{008}}(\ln(z+1))$ per il valore $\sigma_8(0) = 0.778$ a sinistra. A destra la funzione $f\sigma_8$ per gli stessi valori di β , come valore di $\sigma_8(0)$ è stato scelto il valore ottimale per entrambe le curve.

le seguenti condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \delta_b = 3 \cdot 10^{-6} \\ \delta_c = 1 \cdot 10^{-4} \\ \sigma_b = 0 \\ \sigma_c = 0 \end{cases} \quad (66)$$

Variando i due parametri β e $\sigma_8(0)$ e cercando i valori che minimizzano il χ^2 , otteniamo le seguenti miglior stime: $\beta = 0.081 \pm 0.001$ e $\sigma_8(0) = 0.798 \pm 0.001$. Un confronto di sigma con le osservazioni della sonda Planck [1] che restituisce un valore di $\sigma_8(0) = 0.745 \pm 0.038$ consolida il nostro modello, siamo in accordo con le misurazioni effettuate. Nella Fig. 3 a sinistra troviamo il grafico del confronto del contrasto di densità tra il modello Λ CDM ed il contrasto di densità trovato per i valori ottimali di β e $\sigma_8(0)$.

L'accrescimento delle strutture è dunque più lento, il grafico raffigura una funzione crescente in quanto le δ sono normalizzate al valore massimo ovvero a quello attuale, pertanto il contrasto di densità relativo al modello Λ CDM è diviso per un valore maggiore, mentre $\frac{\delta_{0.08}}{\delta_0}(0) = 1$. Rappresentate in Fig. 3 a destra le curve della funzione $f(N)\sigma_8(0)$ al variare di β e confrontate con i dati estratti dallo studio del redshift durante le indagini Sloan Digital Sky Survey, VIMOS-VLT Deep Survey e dall'indagine WiggleZ Dark Energy Survey nello studio delle BAO (baryon acoustic oscillations).

4 Conclusioni

E' stato descritto in maniera accurata un modello di quintessenza la cui peculiarità è un'ipotetica quinta forza della natura che interessa il settore oscuro, ovvero materia ed energia oscure. L'accoppiamento studiato [10] non è il solo possibile ma il modello considerato e' interessante in quanto riproduce il background di Λ CDM. L'introduzione di un campo scalare al posto di una costante cosmologica allevia alcune delle tensioni tra il modello standard dell'universo e le osservazioni non riuscendo però a dare spiegazioni ragionevoli a tutti i problemi cosmologici. Abbiamo visto che perturbazioni di densità di materia barionica ed oscura possono evolvere fino a diventare strutture cosmiche con differenze sostanziali rispetto al modello CDM e che questa caratteristica permette di confrontare i due modelli, in particolare l'attenzione di questo elaborato si sofferma sulla teoria di modelli di quintessenza accoppiati, ricavando le equazioni principali per le densità di energia di tutte le specie presenti nell'universo ed il campo ϕ , la sua derivata ϕ' e il suo potenziale V . Importante è l'analisi con cui abbiamo ricavato la funzione $f\sigma_8(N)$, questa funzione favorisce il modello descritto in questa tesi ottenendo un χ^2 lievemente inferiore, si noti però che abbiamo utilizzato due parametri anzichè uno perciò il valore del $\frac{\chi^2}{N_{\text{dat}}}$ è più vicino ad uno per il Λ CDM. Non tutti i dati sono in accordo tra loro e con le curve, ci aspettiamo che tramite l'evoluzione delle tecnologie e indagini più accurate si arrivi ad un accordo migliore tra osservazioni e previsioni teoriche. Allo stato attuale riusciamo ad estrarre la maggior parte dei dati da regioni dell'universo vicine alla nostra e relative a bassi redshift, non sufficienti a confermare o confutare le teorie, lo studio dei primi istanti cosmici è complesso ma è soltanto all'inizio.

5 Appendice

5.A Stabilità della soluzione

Studiamo la stabilità delle soluzioni dell'equazione differenziale:

$$2\phi'' + \phi'(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta\phi') - \frac{3\beta}{\kappa}\Omega_{cdm} = 0 \quad (67)$$

che equivale, definendo $\eta = \phi'$, al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} \phi' - \eta = 0 \\ 2\eta' + \eta(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta\eta) - \frac{3\beta}{\kappa}\Omega_{cdm} = 0 \end{cases} \quad (68)$$

I punti critici del sistema sono quei punti per i quali le derivate si annullano, imponiamo quindi $(\eta', \phi') = (0, 0)$. Da cui

$$\begin{cases} \eta = 0 \\ \frac{3\beta}{2\kappa}\Omega_{cdm} = 0 \end{cases} \quad (69)$$

esplicitando la funzione $\Omega_{cdm}(N)$ scopriamo che essa si annulla all'infinito, quindi punti critici del sistema si trovano ad $N = \pm\infty$.

$$\Omega_{cdm} = \frac{\kappa^2}{3} \frac{\rho_{cdm}(0)e^{-3N}}{(\rho_{cdm}(0) + \rho_b(0))e^{-3N} + \rho_r(0)e^{-4N} + \rho_\Lambda}, \quad (70)$$

$$\lim_{N \rightarrow \pm\infty} \Omega_{cdm} = 0. \quad (71)$$

Da un punto di vista fisico, quindi, il campo scalare ϕ in una prima fase di vita del cosmo è costante, poi grazie al termine di sorgente Ω_{cdm} , muta per un certo periodo di tempo per infine tornare ad una situazione asintoticamente stazionaria. Procediamo a studiare la stabilità dei due punti critici secondo Ljapunov. Un punto di equilibrio è detto stabile, in questa teoria, se ogni orbita del sistema che parte sufficientemente vicina al punto di equilibrio rimane nelle vicinanze del punto di equilibrio. Perturbiamo la coppia $(\phi(N), \eta(N))$ intorno al punto critico, $(\phi_{cr} + \delta\phi(N), \eta_{cr} + \delta\eta(N))$, mentre $(\phi'(N), \eta'(N))$ diventa $(\delta\phi'(N), \delta\eta'(N))$. Prepariamoci a cercare, tramite il Jacobiano, gli autovalori del sistema perturbato per stabilire quali punti sono stabili. L'equazione perturbata è:

$$\begin{cases} \delta\phi' = \eta_{cr} + \delta\eta \\ \delta\eta' = -\frac{1}{2}(\eta_{cr} + \delta\eta)(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + \kappa\beta(\eta_{cr} + \delta\eta)) + \frac{3\beta}{2\kappa}\Omega_{cdm} \end{cases} \quad (72)$$

Possiamo tralasciare i termini al secondo ordine in δ e, visto che hanno lo stesso Jacobiano, trattare il sistema omogeneo associato.

$$\begin{cases} \delta\phi' = \delta\eta \\ \delta\eta' = -\frac{1}{2}\delta\eta(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + 2\kappa\beta\eta_{cr}) \end{cases} \quad (73)$$

ed in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} \delta\phi' \\ \delta\eta' \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \phi' \\ \eta' \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + 2\kappa\beta\eta_cr) \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Possiamo subito notare che gli autovalori sono $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2}(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + 2\kappa\beta\eta_cr)$. Imponendo le parti reali degli autovalori minori di zero possiamo trovare le condizioni sotto le quali i punti critici sono stabili, nello spazio delle fasi, in figura 1 è presente il grafico schematizzato dello spazio delle fasi della soluzione stabile del sistema.

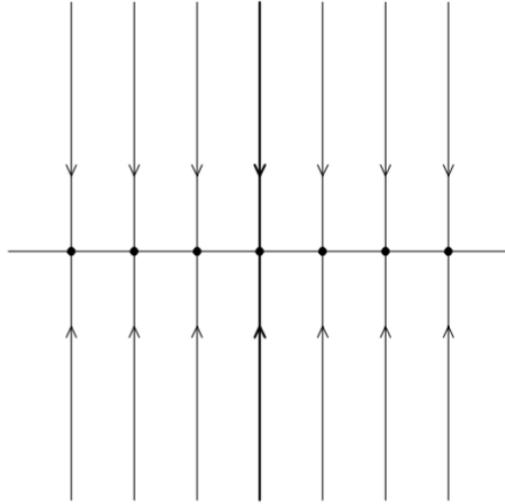


Figura 4: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$

La figura raffigura lo spazio delle fasi, nell'asse delle ascisse abbiamo ϕ , il cui valore come si nota dall'equazione differenziale di partenza non è influente, mentre nell'asse delle ordinate è presente ϕ' , nel punto stabile tende naturalmente a tornare a 0

$$-\frac{1}{2}(3\Omega_\Lambda - \Omega_r + 2\kappa\beta\eta_cr) < 0 \quad (76)$$

da cui:

$$\eta_{cr} > \frac{\Omega_r - 3\Omega_\Lambda}{2\kappa\beta}. \quad (77)$$

i valori di Ω_x sono strettamente minori di 1 quindi il termine destro della disuguaglianza è sicuramente compreso tra $\frac{-3}{2\kappa\beta}$ e $\frac{1}{2\kappa\beta}$, la precedente condizione è quindi soddisfatta soltanto per $\eta_{cr}(+\infty)$. Ragionando in maniera analoga scopriamo che $\eta_{cr}(-\infty)$ è invece un punto critico instabile.

5.B Il codice c++

```
//Ricerca del campo scalare phi per un modello di quintessenza
//avente un accoppiamento tra energia oscura e materia oscura
//Gambelli Pietro Paolo

#include <iostream>
#include <gsl/gsl_math.h>
#include <gsl/gsl_sf_exp.h>
#include <gsl/gsl_odeiv2.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#include <gsl/gsl_spline.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_deriv.h>
#include <fstream>

using namespace std;

//costanti universali
const double G = 6.67*gsl_pow_int(10, -11);
const double k = sqrt(8*M_PI*G);
const double H0 = 72*3.2e-15;
const int DIM = 2500;

//costanti di abbondanza LambdaCDM a t0
const double oB0 = 0.0486;
const double oR0 = 9.18090e-05;
const double oL0 = 0.692599;
double oC0=1.-(oB0+oR0+oL0);

//densita' delle specie in LambdaCDM a t0
const double rB0 = 3*H0*H0/k/k * oB0;
const double rR0 = 3*H0*H0/k/k * oR0;
const double rC0 = 3*H0*H0/k/k * oC0;
const double rL0 = 3*H0*H0/k/k * oL0;

//funzioni di densita' in LambdaCDM
const double rB(double N) {return rB0 * gsl_sf_exp(-3 * N);}
const double rR(double N) {return rR0 * gsl_sf_exp(-4 * N);}
const double rC(double N) {return rC0 * gsl_sf_exp(-3 * N);}
```

```

//funzione di Hubble
const double H2(double N) {return k * k / 3 *(rB(N) + rR(N)
+ rC(N) + rL0);}
const double H(double N) {return sqrt(H2(N)); }
const double Hp(double N) {return -k*k*(3*rB(N)+3*rC(N)
+4*rR(N))/(6*H(N));}
const double Hp_H(double N) {return Hp(N)/H(N);};

//funzioni di abbondanza LambdaCDM
const double oB (double N) { return rB(N) / (rB(N) + rR(N)
+ rC(N) + rL0); }
const double oR (double N) { return rR(N) / (rB(N) + rR(N)
+ rC(N) + rL0); }
const double oC (double N) { return rC(N) / (rB(N) + rR(N)
+ rC(N) + rL0); }
const double oL (double N) { return rL0 / (rB(N) + rR(N)
+ rC(N) + rL0); }

//funzioni di densita' nel modello di quintessenza
const double rhoC(double N, double phip) { return rC(N)
- H2(N) * phip * phip; }
const double rhoPhi(double N, double phip) { return phip
* phip * H2(N) + rL0; }

//funzioni di abbondanza nel modello di quintessenza
const double omegaC(double N, double phip) { return k * k
* rhoC(N, phip) / 3 / H2(N); }
const double omegaPhi(double N, double phip) { return k * k
* phip * phip * H2(N) / 3 + oL(N); }

//classe che da una successione ricava una funzione continua
class costruisci_funzione
{
    double x[DIM];
    double y[DIM];

    public:

    costruisci_funzione(double* X, double* Y);

    double eval(double N);
}

```

```

};

costruisci_funzione::costruisci_funzione(double* X, double* Y)
{
    for(int i = 0; i < DIM; i++) x[i] = X[i], y[i] = Y[i];
}

double costruisci_funzione::eval(double N)
{
    gsl_interp_accel* acc = gsl_interp_accel_alloc();
    gsl_spline* spline = gsl_spline_alloc
(gsl_interp_steffen, DIM);
    gsl_spline_init(spline, x, y, DIM);

    return gsl_spline_eval(spline, N, acc);
}

double derivata(double N, void* param)
{
    costruisci_funzione* funz =
static_cast<costruisci_funzione*>(param);

    return funz->eval(N);
}

//definizione delle equazioni per il campo scalare e per
//l'accrescimento delle strutture da risolvere numericamente
int vetfunc_phi_delta (double N, const double y[6], double
f[6], void* params)
{
    const double b = *(double*)params;

    //sistema di phi
    f[0] = y[1];
    f[1] = 3 * b * oC(N) / (2 * k) - y[1] * (3 * oL(N)
- oR(N) + k * b * y[1]) / 2;

    //sistema di delta
    f[2] = y[4];
    f[3] = y[5];
}

```

```

    f[4] = 3/2*oB(N)*y[2] + 3/2*(oC(N)-y[1]*y[1]/3)*y[3]
    -(2 - 0.67*(-3.0*oL(N) + oR(N) + 3.0))*y[4];
    f[5] = 3/2*oB(N)*y[2] + 3/2*(1+2*b*b)*(oC(N)-y[1]*y[1]/
3)*y[3] - (2 - 0.67*(-3.0*oL(N) + oR(N) + 3.0) - b*y[1])*y[5];

    return GSL_SUCCESS;
}

```

```

//jacobiano del sistema e vettore delle df/dN
int jac_phi_delta(double N, const double y[6], double* dfdy,
double dfdN[6], void* params)
{

```

```

    const double b = *(double*)params;

```

```

    gsl_matrix_view dfdy_mat = gsl_matrix_view_array
(dfdy, 6, 6);
    gsl_matrix *m = &dfdy_mat.matrix;

```

```

    gsl_matrix_set(m, 0, 0, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 0, 1, 1.0);
    gsl_matrix_set(m, 0, 2, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 0, 3, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 0, 4, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 0, 5, 0.0);

```

```

    gsl_matrix_set(m, 1, 0, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 1, 1, -(3/2 * oL(N) - oR(N) / 2));
    gsl_matrix_set(m, 1, 2, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 1, 3, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 1, 4, 0.0);
    gsl_matrix_set(m, 1, 5, 0.0);

```

```

    gsl_matrix_set(m, 2, 0, 0);
    gsl_matrix_set(m, 2, 1, 0);
    gsl_matrix_set(m, 2, 2, 0);
    gsl_matrix_set(m, 2, 3, 0);
    gsl_matrix_set(m, 2, 4, 1);
    gsl_matrix_set(m, 2, 5, 0);

```

```

    gsl_matrix_set(m, 3, 0, 0);
    gsl_matrix_set(m, 3, 1, 0);

```

```

    gsl_matrix_set(m, 3, 2, 0);
    gsl_matrix_set(m, 3, 3, 0);
    gsl_matrix_set(m, 3, 4, 0);
    gsl_matrix_set(m, 3, 5, 1);

    gsl_matrix_set(m, 4, 0, 0);
    gsl_matrix_set(m, 4, 1, -y[1]);
    gsl_matrix_set(m, 4, 2, 3/2*oB(N));
    gsl_matrix_set(m, 4, 3, 3/2*(oC(N) - y[1]*y[1]/3));
    gsl_matrix_set(m, 4, 4, -2 - 0.67*(-3.0*oL(N) + oR(N)
+ 3.0));
    gsl_matrix_set(m, 4, 5, 0);

    gsl_matrix_set(m, 5, 0, 0);
    gsl_matrix_set(m, 5, 1, -y[1] + b*y[5]);
    gsl_matrix_set(m, 5, 2, 3/2*oB(N));
    gsl_matrix_set(m, 5, 3, 3/2*(1 + 2*b*b)*(oC(N)
- y[1]*y[1]/3));
    gsl_matrix_set(m, 5, 4, 0);
    gsl_matrix_set(m, 5, 5, -2 - 0.67*(-3.0*oL(N) + oR(N)
+ 3.0) + b*y[1]);

    dfdN [0] = 0.0;
    dfdN [1] = -3*b/(2*k)*(oR(N)+oL(N))*oC(N)
- y[1]/2*(3*oL(N)*(3*oB(N) + 3*oC(N) + 4*oL(N))
+ oR(N)*(oB(N) + oC(N) + 4*oL(N)));
    dfdN [2] = 0.0;
    dfdN [3] = 0.0;
    dfdN [4] = -(9*oB(N)+9*oC(N)+16*oR(N)+2*Hp_H(N)
*(3*oB(N)+3*oC(N)+4*oR(N)))*y[4]/2 - 3/2*(3+2*Hp_H(N))
*oB(N)*y[2] - 3/2*(3+2*Hp_H(N))*oC(N)*y[3];
    dfdN [5] = -(9*oB(N)+9*oC(N)+16*oR(N)+2*Hp_H(N)
*(3*oB(N)+3*oC(N)+4*oR(N)))*y[5]/2 - 3/2*(3+2*Hp_H(N))
*oB(N)*y[2] - 3/2*(3+2*Hp_H(N))*(1+2*b*b)*oC(N)*y[3];

    return GSL_SUCCESS;
}

int main()
{
//dichiarazione dell'oggetto per il salvataggio su file dei dati

```

```

ofstream save_ott_os("beta_ott.pck");

//dati osservativi del parametro fsigma8(z)
const double z_oss[27] = {0.02, 0.067, 0.15, 0.17, 0.22,
0.25, 0.3, 0.32, 0.35, 0.37, 0.38, 0.4, 0.41, 0.44, 0.5, 0.51,
0.57, 0.59, 0.6, 0.6, 0.6, 0.61, 0.73, 0.77, 0.78, 0.8, 1.36};
const double fs8_oss[27] = {0.36, 0.423, 0.49, 0.51,
0.42, 0.351, 0.407, 0.394, 0.44, 0.46, 0.43, 0.419, 0.45, 0.413,
0.427, 0.452, 0.444, 0.488, 0.43, 0.433, 0.39, 0.457, 0.437,
0.49, 0.38, 0.47, 0.48};
//relativi errori
const double err_oss[27] = {0.04, 0.055, 0.15, 0.06,
0.07, 0.058, 0.055, 0.062, 0.05, 0.038, 0.054, 0.041, 0.04,
0.08, 0.043, 0.057, 0.038, 0.06, 0.04, 0.067, 0.063, 0.052,
0.072, 0.18, 0.04, 0.08, 0.116};

//array in cui salvare tutti i valori di n,phi,phip
// e delta per successivi calcoli
double N_ciclo [DIM];
double phi_ciclo [DIM];
double phip_ciclo [DIM];
double deltaB_ciclo [DIM];
double deltaC_ciclo [DIM];
double deltapB_ciclo [DIM];
double deltapC_ciclo [DIM];
double delta_ciclo [DIM];
double deltap_ciclo [DIM];
double fs8_N [DIM];

//puntatori ai valori ottimali di N, phi, phip...
double dimensione;
double beta_ott = 0;
double s8_0_ott = 0;
double chi_2_ott = 100000000;
double N_ott [DIM];
double phi_ott [DIM];
double phip_ott [DIM];
double deltaB_ott [DIM];
double deltaC_ott [DIM];
double deltapB_ott [DIM];
double deltapC_ott [DIM];

```

```

double delta_ott [DIM];
double fs8_ott [DIM];

costruisci_funzione* Delta;
costruisci_funzione* Gelta;

//parametri e costanti per soluzione nuemrica
double Ni = -16, N0 = 0;
double h = 1.e-10;
double relerr = 1.e-10;
double abserr = 1.e-10;
double Nf, N;
double phi_delta [6];

//risolviamo il sistema al variare di s8_0 e beta
//fino a trovare il valore ottimale
for(double s8_0 = 0.001; s8_0 <= 2; s8_0 += 0.001)
{
    for(double beta = 0.00; beta <= 1; beta += 0.001)
    {
        for(int i = 0; i < DIM; i++)
        {
            N_ciclo [i] = 0;
            phi_ciclo [i] = 0;
            phip_ciclo [i] = 0;
            deltaB_ciclo [i] = 0;
            deltaC_ciclo [i] = 0;
            deltapB_ciclo [i] = 0;
            deltapC_ciclo [i] = 0;
            delta_ciclo [i] = 0;
            deltap_ciclo [i] = 0;
        }

        double* b = &beta;

        for(int i = 0; i < DIM; i++)
        {
            Nf = Ni - (i+1)*(Ni - N0)/DIM;
            N = Ni;

            //condizioni iniziali per il sistema

```

```

//in ordine: phi, phi',
//delta_b, delta_c, delta_b', delta_c'
phi_delta[0] = 0;
phi_delta[1] = 0;
phi_delta[2] = 0.000003;
phi_delta[3] = 0.0001;
phi_delta[4] = 0;
phi_delta[5] = 0;

//definizione del sistema
gsl_odeiv2_system sistema_phi_delta =
{vetfunc_phi_delta, jac_phi_delta, 6, b};
const gsl_odeiv2_step_type* type =
gsl_odeiv2_step_rk8pd;
gsl_odeiv2_step* step =
gsl_odeiv2_step_alloc(type, 6);
gsl_odeiv2_control* control =
gsl_odeiv2_control_y_new(abserr, relerr);
gsl_odeiv2_evolve* evolve =
gsl_odeiv2_evolve_alloc(6);

do
{
    int status_phi_delta =
gsl_odeiv2_evolve_apply(evolve, control, step,
&sistema_phi_delta, &N, Nf, &h, phi_delta);

    if (status_phi_delta
!= GSL_SUCCESS)
    {
        cout << "errore "
<< status_phi_delta << endl;
        break;
    }

    //il sistema per le delta
//rimane bloccato finche' non si arriva
//all'epoca dell'ultima diffusione
    if (N < -7)
    {
        phi_delta[2] =

```

```

0.000003;
0.0001;
0;
0;
                                phi_delta [3] =
                                phi_delta [4] =
                                phi_delta [5] =
                                }
}while(N < Nf);

N_ciclo [i] = Nf;
phi_ciclo [i] = phi_delta [0];
phip_ciclo [i] = phi_delta [1];
deltaB_ciclo [i] = phi_delta [2];
deltaC_ciclo [i] = phi_delta [3];
deltapB_ciclo [i] = phi_delta [4];
deltapC_ciclo [i] = phi_delta [5];
gsl_odeiv2_evolve_free (evolve);
gsl_odeiv2_control_free (control);
gsl_odeiv2_step_free (step);
}

//cerchiamo ora la funzione fsigma8 teorica
dalla serie di punti continui che riceviamo dal programma
double delta_0 = (deltaB_ciclo [DIM-1]
*oB0+deltaC_ciclo [DIM - 1]*(oC0 - k*k/3*phip_ciclo [DIM-1]
*phip_ciclo [DIM - 1]))/(oB0 + oC0 - k*k/3*phip_ciclo [DIM-1]
*phip_ciclo [DIM - 1]);

for(int i = 1; i < DIM; i++)
delta_ciclo [i] = (oB(N_ciclo [i])*deltaB_ciclo [i]+(oC(N_ciclo [i])
-k*k/3*phip_ciclo [i]*phip_ciclo [i])*deltaC_ciclo [i])/
(oB(N_ciclo [i])+oC(N_ciclo [i])-k*k/3*phip_ciclo [i]*phip_ciclo [i]);

Delta = new costruisci_funzione
(N_ciclo , delta_ciclo);
void* v = Delta;
gsl_function F;
double result , abserr = 1e-10;
F.function = &derivata;
F.params = v;

```

```

double chi_2 = 0;
double f;

for(int j = 0; j < 27; j++)
{
    gsl_deriv_central(&F,
- log(1+z_oss[j]), 1e-10, &result, &abserr);
    f = result*s8_0;
    chi_2 += gsl_pow_2
(f-fs8_oss[j])
/f > 0 ? gsl_pow_2(f-fs8_oss[j])/f : -gsl_pow_2
(f-fs8_oss[j])/f;
}

Gelta = new costruisci_funzione
(N_ciclo, delta_ciclo);
void* w = Gelta;
gsl_function G;
double result1, abserr1 = 1e-10;
G.function = &derivata;
G.params = w;

fs8_N[0] = 0;
for(int i = 1; i < DIM-1; i++)
gsl_deriv_central(&G, N_ciclo[i], 1e-10, &result1, &abserr1),
fs8_N[i] = s8_0*result1*H(N_ciclo[i])*1e-11;
fs8_N[DIM] = 0;

//valutiamo il chi^2
if(chi_2 < chi_2_ott)
{
    dimensione = DIM;
    chi_2_ott = chi_2;
    beta_ott = beta;
    s8_0_ott = s8_0;

for(int m = 0; m < DIM; m++)
{
    //salvataggio dei dati ottimali
    N_ott[m] = N_ciclo[m];
}

```

```

        phi_ott[m] = phi_ciclo[m];
        phip_ott[m] = phip_ciclo[m];
        deltaB_ott[m] = deltaB_ciclo[m];
        deltaC_ott[m] = deltaC_ciclo[m];
        deltapB_ott[m] = deltapB_ciclo[m];
        deltapC_ott[m] = deltapC_ciclo[m];
        delta_ott[m] = delta_ciclo[m];
        fs8_ott[m] = fs8_N[m];
    }
}

//salvataggio su file.pck dei dati ottimali
save_ott_os << beta_ott << ' ' << chi_2_ott << ' '
<< dimensione << '\n';

for(int i = 0; i < dimensione; i++)
{
    //N, phi, phi', V
    save_ott_os << N_ott[i] << ' '
<< phi_ott[i] << ' ' << phip_ott[i] << ' '
<< H2(N_ott[i])*phip_ott[i]*phip_ott[i]/2 + rL0 << ' ';
    //funzioni di contrasto in LambdaCDM
    save_ott_os << oB(N_ott[i]) << ' '
<< oR(N_ott[i]) << ' ' << oC(N_ott[i]) << ' '
<< oL(N_ott[i]) << ' ';
    //funzioni di contrasto per le componenti oscure
    //nel presente modello di quintessenza
    save_ott_os << oC(N_ott[i])
-k*k/3*phip_ott[i]*phip_ott[i] << ' '
<< k*k/3*phip_ott[i]*phip_ott[i] + oL(N_ott[i]) << ' '
<< delta_ott[i] << ' ' << fs8_ott[i] << '\n';
}

save_ott_os.close();

return 0;
}

```

Bibliografia

- [1] *Planck 2018 results. VI. Cosmological parameter*, (2019), arXiv:1807.06209v2 [astro-ph.CO].
- [2] R. Nunes et al, (2020), *Cosmological parameter analyses using transversal BAO data* arXiv:2002.09293v1 [astro-ph.CO].
- [3] F. Zwicky "Nebulae as Gravitational Lenses", 1937).
- [4] A. Viznyukv, (2007), *Spherically symmetric problem on the brane and galactic rotation curves* arXiv:0706.0649 [gr-qc].
- [5] L. Amendola, (2019), *Measuring the Hubble function with standard candle clustering*, arXiv:1912.10255 [astro-ph.CO]
- [6] D. J. Eisenstein, (2019), *New Astronomy Reviews, (2003)*, (2003), v. 49, iss. 7-9 [SPECIAL ISSUE], p. 360-365.
- [7] S. Carrol, (2001), *The cosmological constant*, arXiv:astro-ph/0004075. .
- [8] P. Ratra, L. Peebles (1988), *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*. Physical Review D. 37 (12): 3406. Bibcode:1988PhRvD..37.3406R. doi:10.1103/PhysRevD.37.3406.
- [9] C. Wetterich (1988) [http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213\(88\)90193-9](http://dx.doi.org/10.1016/0550-3213(88)90193-9)
- [10] B. J. Barros, L. Amendola, T. Barreiro, N. J. Nunes (2019), arXiv:1802.09216v2 [astro-ph.CO].
- [11] L. Amendola (2000), Phys. Rev. D62, 043511, arXiv:astro-ph/9908023 [astro-ph].
- [12] L. Amendola (1999), Phys. Rev. D60, 043501, arXiv:astro-ph/9904120 [astro-ph].
- [13] V. Pettorino and C. Baccigalupi, Phys. Rev. D77, 103003 (2008), arXiv:0802.1086 [astro-ph].
- [14] P. Brax, J. Martin (1999), Phys. Lett., B468, 40.

- [15] Abell (1958), *GO The distribution of rich clusters of galaxies*, *Astrophys. J. Suppl.*
- [16] C. Wetterich (1988), *Nuclear Physics B* 302, 645-667.
- [17] P.J.E. Peebles, B. Ratra (1988), *Astroph. Journal* 325, L17-L20.
- [18] Bardeen J. M., (1980), *Phys. Rev. D.*, 22, 1982
- [19] E. R. M. Tarrant, C. van de Bruck, E. J. Copeland, and A. M. Green (2012), *Phys. Rev. D* 85, 023503, arXiv:1103.0694 [astro-ph.CO].
- [20] P. Bull (2016), *Astrophys. J.* 817, 26, arXiv:1509.07562 [astro-ph.CO].
- [21] E. Macaulay, I. K. Wehus, and H. K. Eriksen (2013), *Phys. Rev. Lett.* 111, 161301, arXiv:1303.6583 [astro-ph.CO].
- [22] I. Albarran, M. Bouhmadi-Lpez, and J. Morais (2017), *Phys. Dark Univ.* 16, 94, arXiv:1611.00392 [astro-ph.CO].
- [23] P. A. R. Ade et al (2016). (Planck), *Astron. Astrophys.* 594, A13, arXiv:1502.01589 [astro-ph.CO].