

Alma Mater Studiorum – Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia
Corso di Laurea in Astronomia

Campi magnetici in astrofisica

Tesi di laurea

Presentata da:

Roberto Ciarlariello

Relatore:

Chiar.mo Prof. Daniele Dallacasa

Sessione III

Anno accademico 2019/2020

Sommario

I campi magnetici rivestono un ruolo fondamentale in astrofisica in un vasto numero di fenomeni e sono presenti in una grande quantità di circostanze. Il seguente elaborato ha lo scopo di analizzare come il campo magnetico influenzi la propagazione di onde elettromagnetiche in un plasma (un gas ionizzato e globalmente neutro) e valutare quale sia il ruolo del campo magnetico nei meccanismi di accelerazione delle particelle, arrivando a descrivere i fenomeni che permettono ad alcune particelle di raggiungere energie elevatissime. A tale scopo nel primo capitolo si introducono i principi della magnetoidrodinamica facendo riferimento alle approssimazioni necessarie per studiare le interazioni fra campo magnetico e fluidi astrofisici. Nei capitoli successivi vengono illustrati i meccanismi della rotazione di Faraday (capitolo 2.) e dell'accelerazione di Fermi (Capitolo 3.). Il capitolo finale presenta due analisi relative rispettivamente al contributo della rotazione di Faraday nella magnetosfera di una pulsar e al ruolo dell'accelerazione di Fermi nella produzione di raggi cosmici ad energie elevate.

Indice

1. Magnetoidrodinamica	4
1.1 <i>Plasmi e approssimazione magnetoidrodinamica</i>	4
1.2 <i>Equazioni di maxwell in magnetoidrodinamica</i>	4
2. Onde elettromagnetiche in un plasma	6
2.1 <i>Frequenza di plasma e Misura di dispersione</i>	7
2.2 <i>Rotazione di faraday</i>	8
3. Meccanismi di accelerazione	11
3.1 <i>Accelerazione di Fermi</i>	11
3.2 <i>Distribuzione Spettrale</i>	14
3.3 <i>Accelerazione tramite shock waves</i>	14
4. Applicazioni Astrofisiche	15
4.1 <i>Rotazione di Faraday nella magnetosfera delle pulsar</i>	16
4.2 <i>Raggi cosmici e meccanismi di accelerazione</i>	17
Bibliografia	19

1. Magnetoidrodinamica

La magnetoidrodinamica è la disciplina che si occupa dello studio delle interazioni di fluidi elettricamente conduttori con un campo magnetico. I fluidi astrofisici solitamente hanno temperature molte elevate, dell'ordine di 10^6 - 10^7 K e, per tali valori, ioni ed elettroni non sono più legati in un unico atomo ma formano un plasma. Definiamo plasma un gas ionizzato la cui densità di carica totale è nulla. Poiché per un gas ordinario la ionizzazione inizia a temperature di circa 10^4 K, nell'intervallo di temperature tipico di molti casi astrofisici, la materia è completamente ionizzata.

1.1 Plasmi e approssimazione magnetoidrodinamica

I plasmi astrofisici devono soddisfare le seguenti caratteristiche:

1. La dimensione lineare di un fenomeno deve essere maggiore della lunghezza di Debye definita come:

$$\lambda_D = \left(\frac{kT}{4\pi n_e e^2} \right)^{1/2} = 6.9 [cm] \left(\frac{T [k]}{n_e [cm^{-3}]} \right)^{1/2} \quad (1.1a)$$

con T temperatura del gas, k costante di Boltzmann, n_e numero di elettroni, ed e carica del singolo elettrone.

2. La velocità del fluido deve essere molto minore della velocità della luce ($v \ll c$). (1.1b)
3. Il campo elettrico deve essere irrilevante, . (1.1c)
4. La conduttività elettrica deve essere elevata ($\sigma \rightarrow \infty$), ciò equivale a supporre che le correnti di spostamento siano trascurabili . (1.1d)
5. La fisica del fluido deve essere dominata dalle collisioni: la frequenza delle collisioni deve essere molto maggiore della frequenza caratteristica in esame e dunque le dimensioni del fluido devono essere molto maggiori del libero cammino medio per collisioni delle particelle. (1.1e)

Tali condizioni sono solitamente soddisfatte in ambienti astrofisici dunque, è possibile considerare sempre valida tale approssimazione magnetoidrodinamica.

1.2 Equazioni di Maxwell in magnetoidrodinamica

L'approssimazione magnetoidrodinamica può essere applicata anche alle equazioni di Maxwell che assumeranno la seguente forma:

- $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ (1.2a)

- $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ (1.2b)

- $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$ (1.2c)

- $\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ (1.2d)

Considerando la legge di Ohm per la *densità di corrente*:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

con σ *conducibilità del fluido*, questa può essere riscritta tramite approssimazione magnetoidrodinamica nel seguente modo:

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{v}{c} \times \vec{H} \right)$$

Sostituendo tale densità di corrente nella (1.2c), si ottiene l'equazione dell'induzione:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) + \eta_m \nabla^2 \vec{H} \quad (1.1e)$$

in cui η_m è detta *viscosità magnetica* ed è pari a:

$$\eta_m = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

L'equazione dell'induzione è costituita da due termini che ci dicono che la variazione nel tempo del campo magnetico è determinata dalla convezione del campo da parte del fluido ($\nabla \times (\vec{v} \times \vec{H})$) e dalla diffusione ($\eta_m \nabla^2 \vec{H}$).

Dall'equazione dell'induzione posso estrarre due casi limite:

Diffusione del campo magnetico:

Nel caso di $v = 0$ e dunque di plasma fermo, l'equazione si riduce alla forma:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \eta_m \nabla^2 \vec{H} \approx -\frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{H}{L^2}$$

in cui il termine diffusivo risulta dominante. Separando le variabili ed integrando si ricava la seguente relazione per H:

$$H(t) = H_0 e^{-t/\tau}$$

con $\tau = \frac{L^2 4\pi\sigma}{c^2}$ rappresentante il tempo caratteristico di diffusione del campo magnetico. Essendo l'esponentiale negativo, con il passare del tempo il campo magnetico decadrà diffondendosi nell'ambiente circostante.

Congelamento del campo magnetico:

Per un plasma astrofisico, la conducibilità elettrica è molto elevata (1.1d). Se considero un sistema a velocità non nulla, l'equazione dell'induzione assume la forma:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H})$$

Se ora si considera la variazione nel tempo del flusso di \vec{H} attraverso una superficie, si può dimostrare la validità della seguente relazione:

$$\frac{d}{dt} \int_s \vec{H} d\vec{S} = \int_s \left[\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) \right] d\vec{S} = 0 \quad (1.1f)$$

che implica la conservazione del flusso ossia il congelamento del campo magnetico. Ciò significa che il campo magnetico segue le sorti del fluido in cui si trova. Le linee di campo saranno dunque costituite dalle stesse particelle di fluido e non potranno essere attraversate dalla materia in moto che può solo piegare le linee di campo. Nel caso di plasma in espansione la forza del campo diminuisce e viceversa.

Posso definire una *pressione magnetica*:

$$P_{\text{mag}} = \frac{H^2}{8\pi}$$

considerabile come pressione di plasma. Se un fluido si muove in un plasma con

$$P_{\text{fluid}} + \rho v^2 < P_{\text{mag}}$$

le linee di campo saranno moderatamente piegate ma il plasma continuerà a confinare la materia. Viceversa per

$$P_{\text{fluid}} + \rho v^2 \gg P_{\text{mag}}$$

Le linee saranno distrutte e il moto della materia non sarà più legato allo scheletro magnetico.

E' possibile definire una quantità adimensionale che permette di valutare in quale dei due casi ci si trova. Tale quantità è il *numero di Reynolds magnetico* R_m che confronta i due regimi ed è definito come:

$$R_m = \frac{vL}{\eta_m}$$

Per $R_m < 1$, siamo nel caso in cui il fluido è fermo. Per $R_m \gg 1$ invece il fluido è in movimento e siamo nel secondo caso. Nei casi astrofisici, solitamente la conducibilità è molto elevata ($\sigma \rightarrow \infty$) e si ha a che fare con scale di lunghezza L molto alte. Ne segue che avremo viscosità magnetica molto piccola ($\eta_m \rightarrow 0$) e numero di Reynolds molto alto ($R_m \gg 1$) dunque l'equazione dell'induzione avrà la forma vista nel caso di fluido in movimento.

2. Onde elettromagnetiche in un plasma

In Astrofisica le cariche libere giocano un ruolo fondamentale nel determinare le proprietà di propagazione di un mezzo. In questa sezione sono analizzate alcune proprietà che influenzano la propagazione di onde elettromagnetiche in un plasma.

2.1 Frequenza di plasma e misura di dispersione

Considero un plasma formato da elettroni con densità n_e ed isotropo. Avrà *densità di corrente* data da:

$$\vec{j} = -\frac{n_e e^2}{i\omega m_e} \vec{E} = \sigma \vec{E} \quad (2.1a)$$

con σ *conduttività elettrica* pari a $\sigma = \frac{in_e e^2}{\omega m_e}$.

Posso definire la *costante dielettrica* ϵ_r e successivamente l'indice di rifrazione per un plasma n_r come:

- $\epsilon_r = 1 - \frac{4\pi\sigma}{i\omega} = 1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e \omega^2}$
- $n_r = \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{4\pi e^2 n_e}{m_e \omega^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v}\right)^2}$

Dove v_p è detta *frequenza di plasma* ed ha valore

$$v_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\pi m_e}} \approx 10^4 n_e^{1/2} \text{ Hz} \quad (2.1b)$$

Solo le onde con frequenza maggiore della frequenza di plasma possono attraversare la regione. Per valori di frequenza inferiore alla frequenza di plasma, il plasma si comporta come uno specchio e le onde vengono riflesse.

Consideriamo il caso $v > v_p$, posso identificare due velocità caratteristiche:

- Velocità di fase

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_r}$$

- Velocità di gruppo

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = c n_r = c \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v}\right)^2}$$

Le onde elettromagnetiche si muovono alla velocità di gruppo. Considerando $v \gg v_p$ posso approssimare la velocità di gruppo come:

$$v_{gr} \approx c \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{v_p}{v}\right)^2 \right]$$

Supponendo la densità elettronica costante, il tempo necessario ad un'onda per viaggiare da una posizione A ad una B per un dato valore della frequenza sarà dato da:

$$T_{A,B}(v) = \frac{L}{c} + \frac{1}{2c} \left(\frac{e^2}{\pi m_e v^2} \right) \int_0^L n_e dl$$

Il primo termine indica il tempo di transito nel vuoto mentre il secondo è una correzione per il plasma e contiene un integrale definito come *misura di dispersione*:

$$D.M. = \int_0^L n_e dl \quad (2.1c)$$

Osservando a due frequenze differenti si avranno dunque tempi di arrivo differenti e l'intervallo di tempo fra le due misure sarà pari a :

$$\Delta T_{v_1-v_2} = \frac{D.M.}{2c} \frac{e^2}{\pi m_e} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right)$$

Da questa relazione si nota che nei casi in cui è possibile osservare a due frequenze differenti, si riesce a misurare direttamente la densità elettronica lungo la linea di vista grazie alla misura di dispersione $D.M.$.

2.2 Rotazione di Faraday

Considero ora gli effetti di propagazione di un'onda elettromagnetica nel caso in cui sia presente un campo magnetico \vec{H}_0 statico ed esterno. Le proprietà delle onde avranno dipendenza dovuta alla loro direzione di propagazione rispetto a quella del campo e si parlerà quindi di trasmissione anisotropa. Inoltre, essendo presente un campo magnetico, potrò considerare la frequenza di ciclotrone per gli elettroni:

$$\omega_H = \frac{eH}{m_e c}$$

definita come la frequenza di girazione di un elettrone intorno alle linee di campo.

Lungo la direzione del campo, un elettrone subirà una forza pari a:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H}_0 \right) \quad (2.2a)$$

Assumo che l'onda elettromagnetica che si propaga nel plasma sia sinusoidale e polarizzata circolarmente dunque della forma:

$$\vec{E}(t) = E_0 e^{-i\omega t} (\vec{\epsilon}_1 \pm \vec{\epsilon}_2) \quad (2.2b)$$

in cui i segni $-$ e $+$ corrispondono rispettivamente a polarizzazione circolare sinistra (LCP) ed a polarizzazione circolare destra (RCP).

In tale situazione la costante dielettrica non sarà più uno scalare ma un tensore il cui valore dipenderà dalla direzione delle onde.

Assumo che l'onda si propaghi lungo la direzione del campo magnetico:

$$\vec{H}_0 = H_0 \vec{\epsilon}_3 \quad (2.2c)$$

Sostituendo le equazioni (2.2b) e (2.2c) alla (2.2a) si ottiene il seguente valore per a velocità:

$$\vec{v}(t) = -\frac{ie}{m_e(\omega \pm \omega_H)} \vec{E}(t)$$

tramite cui è possibile ricavare un valore della costante dielettrica pari a:

$$\epsilon_{R,L} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_H)}$$

Dunque in presenza di campo magnetico il mezzo discrimina fra le direzioni di polarizzazione e, pertanto, i due valori della costante dielettrica forniranno due indici di rifrazione differenti che saranno pari a:

$$(n_r)_{R,L} = \sqrt{1 - \left(\frac{v_p}{v}\right)^2 \frac{1}{1 \pm (v_H/v) \cos \vartheta}}$$

Dove ϑ rappresenta l'angolo fra la direzione di propagazione dell'onda e il campo magnetico \vec{H}_0 . Si avranno quindi due velocità differenti per ciascuno dei modi ortogonali inoltre, essendo un'onda piana polarizzata sovrapposizione lineare di onde a polarizzazione circolare destra e sinistra, avrà un piano di polarizzazione che non resterà costante ma ruoterà insieme all'onda durante la sua propagazione. Tale effetto è noto come *effetto Faraday* e, la regione che causa tale rotazione viene definita *schermo di Faraday*.

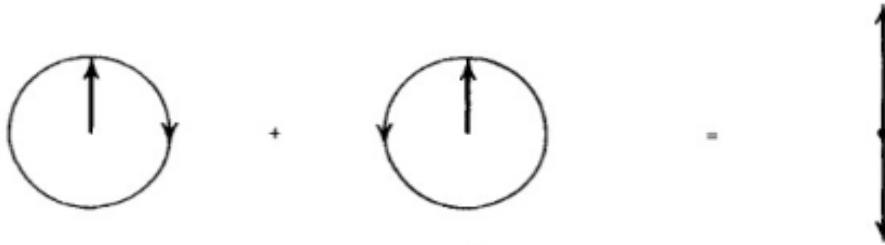


Figura 2.1: Decomposizione della polarizzazione lineare in componente destra e sinistra della polarizzazione circolare. ([George B. Rybicki, Alan P. Lightman], *Radiative Processes in Astrophysics*, p. 231)

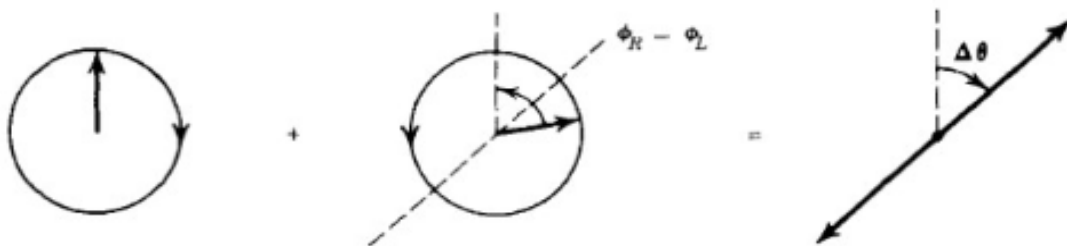


Figura 2.2: Rotazione di Faraday del piano di polarizzazione. ([George B. Rybicki, Alan P. Lightman], *Radiative Processes in Astrophysics*, p. 231)

Il vettore elettrico dell'onda polarizzata circolarmente, viaggiando per una distanza d , ruota di un angolo di fase $\phi = \vec{k} \cdot \vec{d}$. Se il numero d'onda \vec{k} non è costante lungo il cammino, l'angolo di fase fra le due direzioni di polarizzazione sarà dato da:

$$\phi_{R,L} = \int_0^d k_{R,L} dl = \int_0^d \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{R,L}} \quad (2.2d)$$

Se si assume $\omega \gg \omega_H$ ed $\omega \gg \omega_p$, è possibile approssimare il numero d'onda lungo le due direzioni di polarizzazione come:

$$K_{R,L} \approx \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 \mp \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right]$$

Da ciò segue che la (2.2d) può essere scritta nella seguente forma:

$$\phi_{R,L} = \int_0^d (k_R - k_L) dl \approx \int_0^d \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 - \frac{\omega_H}{\omega} \right) - 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \left(1 + \frac{\omega_H}{\omega} \right) \right] dl = \int_0^d \frac{\omega_p^2 \omega_H}{c \omega^2}$$

Un'onda piana polarizzata sarà ruotata di un angolo $\Delta\theta$, avente valore pari a metà $\phi_{R,L}$:

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \phi_{R,L} = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2 \omega^2} \int_0^d n_e H_{\parallel} dl$$

Definisco *misura di rotazione* le seguente quantità:

$$R. M. = \frac{2\pi e^3}{m_e^2 c^2} \int_0^d n_e H_{\parallel} dl$$

Da cui si ottiene un valore dell'angolo di rotazione pari a circa:

$$\Delta\theta \approx \lambda^2 R. M.$$

Tramite la misura di rotazione è possibile determinare il campo magnetico lungo la linea di vista pesato sulla densità elettronica

$$\langle H_{\parallel} \rangle \propto \frac{R.M.}{D.M.} \propto \frac{\int n_e H_{\parallel} dl}{\int n_e dl}$$

Si noti che è possibile calcolare solo il campo magnetico parallelo alla linea di vista. Inoltre se si ha uno schermo di faraday non omogeneo, esso può depolarizzare la radiazione (figura 2.3). Se il campo non ha la stessa direzione in ogni regione della sorgente considerata, localmente i vettori potrebbero allinearsi nella stessa direzione, ma globalmente le direzioni sono casuali e la somma di tutti i vettori comporta una diminuzione della percentuale di polarizzazione. In questo caso la *R.M.* fornisce il limite inferiori in ordini di grandezza del campo magnetico. Infine se si considera plasma relativistico che si espande in un plasma termico a velocità supersoniche, si forma un'onda d'urto che compatta il plasma e allinea il campo magnetico. In tali situazioni la radiosorgente presenta delle stratificazioni in cui il campo magnetico è allineato e si possono compiere misure precise sulla *R.M.* localmente alle stratificazioni.

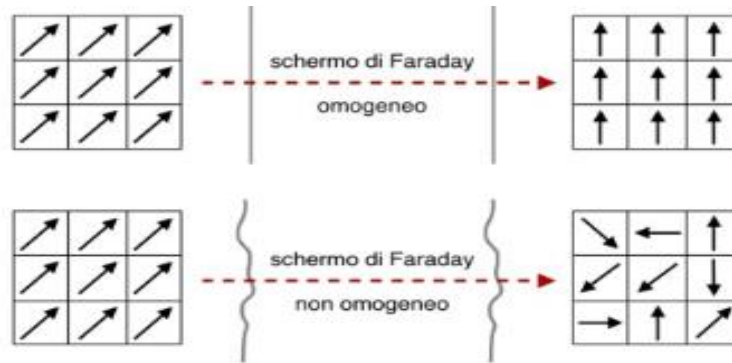


Figura 2.3 : Dipendenza della rotazione di faraday dall'omogeneità dello schermo.

3. Meccanismi di Accelerazione

I meccanismi di accelerazione sono processi fondamentali che ci permettono di comprendere come sia possibile, ad esempio, che alcuni raggi cosmici abbiano energie molto elevate ($\sim 10^{20}$ eV) oppure cosa permetta ad alcuni elettroni di raggiungere velocità ultra-relativistiche in modo che possano emettere per sincrotrone. Tali processi si possono dividere in processi stocastici e processi sistematici. I processi stocastici sono costituiti da un gran numero di micro-processi ciascuno dei quali sarà in grado di far guadagnare o perdere energia alla particella. Sono tuttavia poco efficienti. I meccanismi di accelerazione sistematici sono invece causati dalla presenza di onde d'urto o di campi elettrici indotti e sono più efficienti dei meccanismi stocastici.

3.1 Accelerazione di Fermi

Il meccanismo di Fermi fu proposto nel 1949 ed è un processo stocastico che spiega l'accelerazione delle particelle attraverso urti elastici con nubi nel mezzo interstellare. Nel modello originale, Fermi mostrò come particelle cariche, riflesse da specchi magnetici con moto casuale e velocità u , guadagnassero energia stocasticamente durante le riflessioni. Tali particelle, rimanendo per un certo tempo caratteristico nella regione di accelerazione, mostreranno una distribuzione energetica a legge di potenza.

Considero una particella con velocità \vec{v} diretta verso una nube magnetizzata (un plasma) che si muove a velocità \vec{u} verso la particella. Suppongo che la particella sia un elettrone e che la nube sia talmente massiva da non risentire dell'urto con la particella durante il suo moto. La nube presenterà al suo interno un campo magnetico e non si avrà un campo elettrostatico a causa dell'enorme conducibilità elettrica presente nel plasma (1.1d).

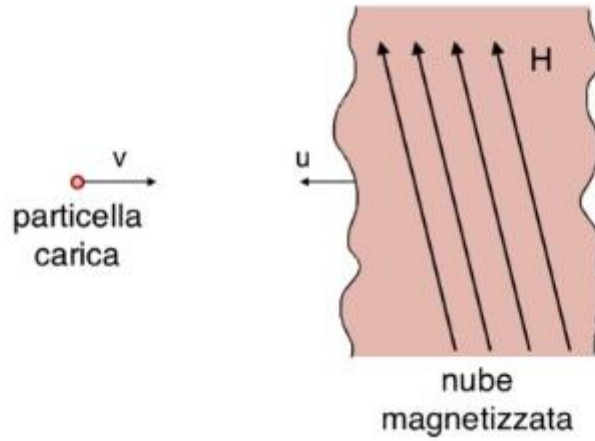


Figura 3.1: Particella carica che si muove verso una nube magnetizzata.

Nel sistema di riferimento dell'osservatore, la carica muovendosi verso la nube sentirà un campo elettrico indotto tale che:

$$\vec{F}'_e = e\vec{E}' = e \left[\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right] = m_e \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (3.1a)$$

\vec{E} è il campo elettrico prodotto dalla nube in moto ed è pari a:

$$\vec{E} \approx -\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{H}$$

Sostituendo nella (3.1a) si ottiene:

$$m_e \frac{d\vec{v}}{dt} = e \left[-\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{H} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{H} \right]$$

Moltiplicando scalarmente per \vec{v} (tenendo conto che $\vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{H}) = 0$) si avrà che:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_e v^2 \right) \approx \frac{e}{c} \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{H})$$

Dunque l'energia degli elettroni varia se la forza di Lorentz è attiva e ciò richiede che la nube magnetizzata sia in moto.

Se ora si prende in esame un urto elastico fra la particella e la nube con $|v| \gg |u|$ ed $m \ll M$, considerando la conservazione dell'energia cinetica e della quantità di moto, si può ricavare la velocità finale della particella che avrà valore:

$$v' = \frac{(m-M)v \pm 2Mu}{m+M} \approx -v \pm 2u \quad (3.1b)$$

Il segno negativo identificherà il caso in cui la nube va contro la particella e l'urto sarà frontale mentre per il caso di segno positivo, la nube e la particella si muovono lungo la stessa direzione. Da tale risultato posso quindi definire due tipologie di urto:

- *Tipo I* $v' = -v - 2u \rightarrow \Delta v = 2u$ la velocità aumenta
- *Tipo II* $v' = -v + 2u \rightarrow \Delta v = -2u$ la velocità diminuisce

Per quanto riguarda la nube, la velocità finale resta invariata:

$$u' = \frac{(M - m)u \pm 2mv}{M + m} \approx u$$

In termini energetici, la particella avrà un'energia finale pari a

$$\varepsilon' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m(-v \pm 2u)^2 = \frac{1}{2}m(v^2 \mp 4uv + 4u^2)$$

Essendo

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2$$

Si ottiene un valore dell'energia finale della particella pari a:

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(1 \mp 4 \frac{u}{v} + 4 \frac{u^2}{v^2}\right)$$

Poichè $|v| \gg |u|$ l'ultimo termine è praticamente nullo. La variazione di energia sarà pari a:

$$\Delta\varepsilon = \mp 4 \frac{u}{v} \varepsilon$$

- *Tipo I* $\Delta\varepsilon = 4 \frac{u}{v} \varepsilon$ l'energia della particella aumenta
- *Tipo II* $\Delta\varepsilon = -4 \frac{u}{v} \varepsilon$ l'energia della particella diminuisce

Per la tipologia I, la frequenza delle interazioni è $f_I = \frac{u+v}{l}$ mentre per la tipologia II $f_{II} = \frac{v-u}{l}$.

In entrambe l indica il libero cammino medio della particella.

La variazione energetica media avrà valore pari a:

$$\left\langle \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \right\rangle_F = f_I \Delta\varepsilon_I + f_{II} \Delta\varepsilon_{II} = \left(\frac{v+u}{l} \right) \frac{4u}{v} \varepsilon - \left(\frac{v-u}{l} \right) \frac{4u}{v} \varepsilon = \frac{8v}{l} \left(\frac{u}{v} \right)^2 \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\tau_F} \quad (3.1c)$$

La quantità τ_F è detta *tempo caratteristico di fermi* ed è definita come:

$$\tau_F \approx \frac{lv}{2u^2}$$

Integrando la (3.1b) nel tempo si ottiene $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{t/\tau_F}$. La particella, una volta accelerata resterà nella regione di accelerazione per un tempo di confinamento che è circa dell'ordine del tempo di fermi τ_F . Tuttavia se si calcola il tempo caratteristico di Fermi nel mezzo interstellare, si ottengono valori estremamente lunghi ($\sim 10^{11}$ yr), mentre nei resti di supernova considerando, per le nubi una velocità dell'ordine di 10 Km/s, per le particelle un'accelerazione iniziale di 1000 Km/s e per il libero cammino medio un valore tipico ~ 0.1 pc $\approx 10^{12}$ Km, si ottiene un tempo di fermi di $\sim 10^5$ yr. Entrambi i valori di τ_F ricavati, risultano troppo lunghi, deve esserci un meccanismo che permette alle particelle di raggiungere velocità relativistiche nel giro di qualche settimana.

3.2 Distribuzione spettrale

Prima di parlare dei meccanismi che permettono alle particelle di raggiungere velocità elevatissime, si ricava la forma spettrale del processo di accelerazione di Fermi. Sia β l'incremento di energia di una particella per collisione tale per cui $\varepsilon = \beta\varepsilon_0$. Sia inoltre P la probabilità che una particella rimanga nella regione di accelerazione dopo l'urto. Dopo k collisioni si avranno $N_k = N_0 P^k$ particelle con energie $\varepsilon_k = \varepsilon_0 \beta^k$. Elimino k dalle precedenti relazioni:

$$\frac{N_k}{N_0} = P^k \qquad \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0} = \beta^k$$

$$\ln\left(\frac{N_k}{N_0}\right) = k \ln P \qquad \ln\left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0}\right) = k \ln \beta$$

$$\frac{\ln(N_k/N_0)}{\ln(\varepsilon_k/\varepsilon_0)} = \frac{\ln P}{\ln \beta} = m \quad \rightarrow \quad N_k = N_0 \left(\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_0}\right)^m$$

Calcolando il numero di particelle al variare dell'energia si ottiene:

$$N(\varepsilon)d\varepsilon = \text{cost} \cdot \varepsilon^{-1+m}d\varepsilon$$

Che è una distribuzione di energia a legge di potenza che diventa quella tipica di sincrotrone per $1-m = \delta$.

3.3 Accelerazione tramite shock waves

La velocità del suono in un gas ideale è pari a $c_s = \sqrt{\gamma kT/\mu m_{idr}}$ e, nel mezzo interstellare vale $\sim 1 - 10 \text{ Km/s}$. Per una perturbazione a velocità maggiore della velocità del suono, si crea una discontinuità nota come *onda d'urto o shock wave*. La regione che ha subito lo shock, ha velocità v_2 minore della velocità di shock v_{sh} . Un elettrone che si trova nella regione shockata non sente l'onda d'urto. Se $v_2 = (3/4)v_{sh}$ la carica deve attraversare molte volte il fronte di shock prima di guadagnare energia sufficiente ad abbandonare la regione di accelerazione. La particella, dopo aver superato lo shock, collide contro le nubi nella zona non raggiunta dalla discontinuità. Tale regione ha velocità nulla $v_1 = 0$ e l'elettrone rimbalzerà indietro a velocità pari a quella iniziale ed attraverserà nuovamente il fronte di shock collidendo frontalmente con le nubi che avranno velocità v_2 . Tramite la (3.1b) si ottiene la velocità v' dopo l'urto:

$$v' = -v - 2 \cdot \frac{3}{4} v_{sh} = -v - \frac{3}{2} v_{sh}$$

Si nota come dopo la prima interazione, si ha già velocità superiore a v_{sh} . Generalmente, se si considera il caso delle supernove $v \ll v_{sh} \rightarrow v' \sim \frac{3}{2} v_{sh}$. A questo punto v' diventerà la nuova velocità iniziale della particella, e, ripetendo il processo, si avrà velocità finale pari a :

$$v' = -v - \frac{3}{2} v_{sh} = -\frac{3}{2} v_{sh} - \frac{3}{2} v_{sh} = -3v_{sh}$$

Tramite questo meccanismo, la velocità dell'elettrone diventa relativistica in poco tempo.

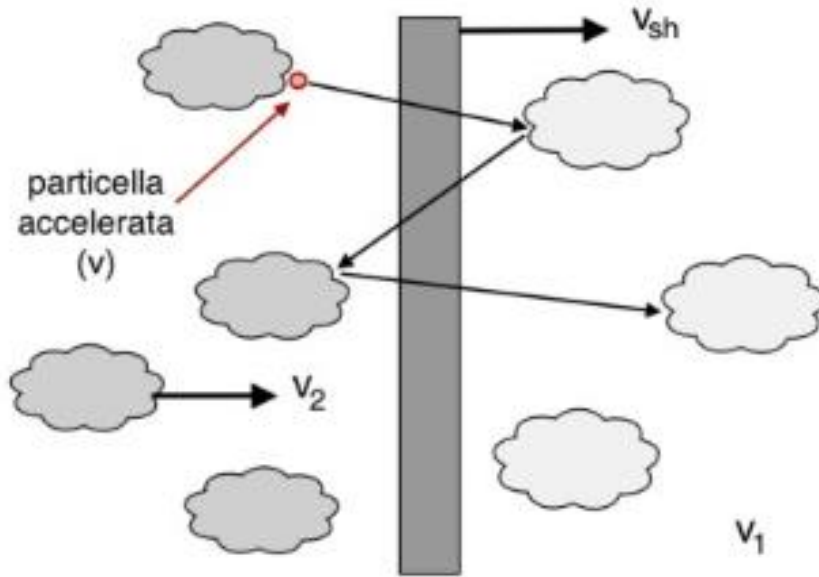


Figura 3.2: Meccanismo di accelerazione tramite onda d'urto.

In termini energetici, nella regione non shockata si ha $\Delta\varepsilon_1 = 0$ poichè le nubi sono ferme e la particella torna indietro con velocità pari a quella iniziale. Nella regione shockata invece si ha variazione energetica $\Delta\varepsilon_2 \approx 2v_2 \frac{\varepsilon}{v} = \frac{3v_{sh}}{2v} \varepsilon$. La frequenza fra due collisioni è data da $f \approx \frac{v}{2l}$ e il guadagno energetico nel tempo sarà pari a:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} \approx f \Delta\varepsilon_2 = \frac{3v_{sh}}{2v} \varepsilon \frac{v}{2l} = \left(\frac{3v_{sh}}{4l} \right) \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\tau'_F}$$

Con τ'_F tempo caratteristico di Fermi in presenza di shock waves $\tau'_F \approx \frac{4l}{3v_{sh}}$.

Se si definisce $\tau_c \approx \frac{l}{v_{sh}}$ tempo di confinamento, l'indice spettrale sarà $\delta = 1 + \frac{\tau'_F}{\tau_c}$.

4. Applicazioni astrofisiche

In questa sezione sono presentati due casi reali relativi ai fenomeni trattati nei capitoli precedenti. Inizialmente è brevemente riportato uno studio in cui ci si chiede se la rotazione di Faraday di una pulsar sia dovuta esclusivamente all'interazione con il mezzo interstellare o se ci sia un contributo dovuto alla magnetosfera dell'oggetto esaminato. Segue un paragrafo in cui si esamina il ruolo dell'accelerazione di Fermi nella produzione di raggi cosmici ad energie elevate.

4.1 Rotazione di Faraday nella magnetosfera delle pulsar

Le pulsar (*pulsating radio source*) sono corpi celesti compatti emettenti radiazione per impulsi. Hanno dimensioni ridotte stimate tramite il concetto di tempo di coerenza per cui, se in un oggetto avviene un processo, esso non può avvenire in un tempo minore del tempo necessario all'informazione per propagarsi all'interno dell'oggetto. Tali dimensioni sono tipicamente di migliaia di chilometri. Le caratteristiche principali che contraddistinguono una pulsar sono il forte campo magnetico e l'emissione impulsiva dovuta ai brevi tempi di rotazione.

Le emissioni radio provenienti dalle pulsar generalmente sono altamente polarizzate e, quando le onde elettromagnetiche si propagano nel mezzo interstellare, il piano di polarizzazione lineare viene ruotato di un angolo proporzionale a λ^2 per effetto della rotazione di Faraday. È possibile misurare la R.M. dall'angolo di polarizzazione a varie frequenze.

È di seguito brevemente presentato uno studio condotto da Chen Wang, J. L. Han, Dong. Lai (Wang, Chen, J. L. Han, and Dong Lai. "The Faraday Rotation in the Pulsar Magnetosphere." Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 417.2 (2011)) il cui scopo è di comprendere se gli effetti della rotazione di Faraday per una pulsar siano da attribuirsi esclusivamente all'interazione con il mezzo interstellare o se ci siano contributi provenienti dalla magnetosfera dell'oggetto esaminato. Lo studio, avvalendosi di alcune ipotesi per semplificare i calcoli, si propone di esaminare gli effetti della rotazione di Faraday intrinseca nella magnetosfera di una pulsar analizzando in modo critico, la variazione delle proprietà di polarizzazione dovuta al passaggio di onde polarizzate circolarmente nella magnetosfera. La magnetosfera delle pulsar è costituita da plasma relativistico altamente magnetizzato che scorre lungo le linee di campo magnetico e ruota insieme alla pulsar. I risultati ottenuti mostrano come per plasmi altamente simmetrici (come plasmi composti da ioni e positroni) la rotazione di Faraday intrinseca abbia contribuito trascurabile mentre nel caso di plasmi asimmetrici come plasmi di ioni ed elettroni, l'effetto della rotazione di Faraday intrinseco nella magnetosfera è significativo e si avrà un angolo di rotazione $\Delta\theta$ non più proporzionale a λ^2 ma proporzionale a $\lambda^{0.5}$. Per tali plasmi, la misura di rotazione indotta sarà maggiore ad alte frequenze.

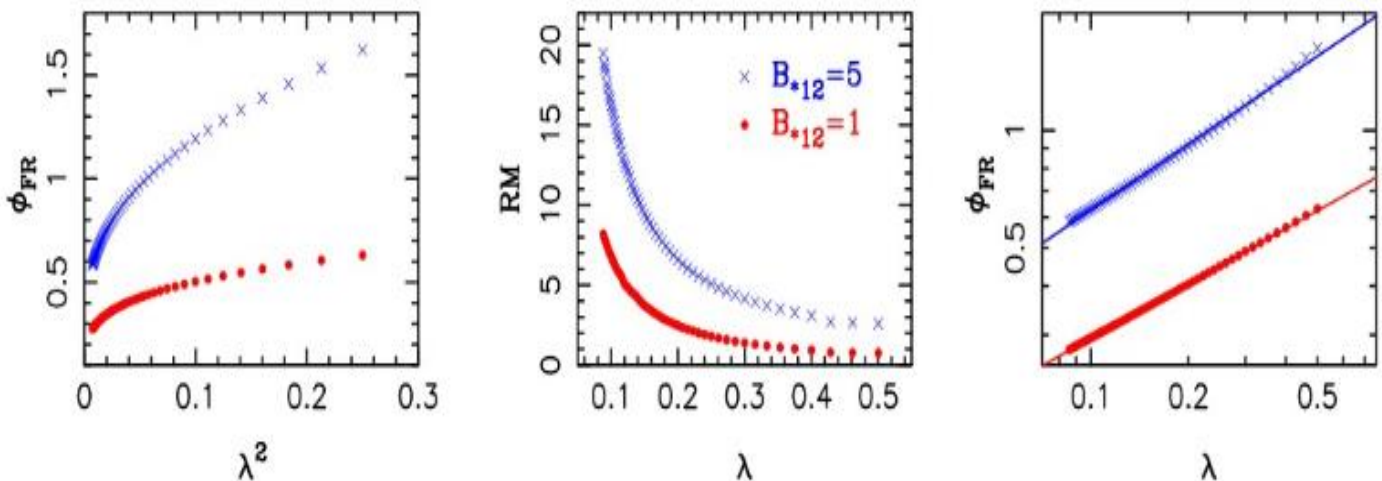


Figura 4.1: Angolo di Faraday ϕ_{FR} prodotto nella magnetosfera in funzione della lunghezza d'onda per $B_* = 10^{12}G$ ("•") e $B_* = 5 \times 10^{12}G$ ("×"). L'immagine di sinistra mette in relazione l'angolo di rotazione ϕ_{FR} con λ^2 , quella centrale RM ($d\phi_{FR}/d\lambda^2$) mentre quella di destra mostra la relazione fra $\log_{10}(\phi_{FR})$ e $\log_{10}(\lambda^2)$. (Wang, Chen, J. L. Han, and Dong Lai. "The Faraday

4.2 Raggi cosmici e meccanismi di accelerazione

I raggi cosmici sono particelle energetiche provenienti da ogni direzione dello spazio. Generalmente sono particelle cariche composte da protoni, elettroni, positroni e nuclei pesanti ma possono anche essere particelle neutre quali neutroni e neutrini, anche se in minima parte. Sulla terra arrivano quotidianamente. In media si ha una particella cosmica per ogni centimetro quadrato ogni secondo. La loro composizione varia in base alla sorgente da cui provengono, dalle interazioni con il mezzo interstellare e con l’atmosfera terrestre. Si dividono in primari e secondari. I primi sono composti principalmente da elementi come ferro e carbonio e provengono direttamente dalla sorgente, i secondi invece sono costituiti principalmente da potassio, boro e titanio e sono dovuti all’interazione dei primari con il mezzo interstellare. Risulta molto difficile a causa della vastità di elementi che li compongono, stabilire da dove provengano. Una delle numerose cause di questa difficoltà è la presenza nello spazio di numerosi campi magnetici che, influenzando il moto delle particelle cariche dei raggi cosmici, ne deviano la traiettoria.

Hanno uno spettro energetico (Figura 4.2) descritto da una legge di potenza della forma:

$$N(E) \propto E^{-\delta}$$

Con δ indice spettrale. Per valori energetici inferiori a 10^{15} eV, δ vale 2.7 . Per valori energetici superiori, δ assume valore 3 e si ha rapida crescita. Il punto in cui si ha il cambio di pendenza è definito *ginocchio*. Per energie superiori a 10^{18} eV, lo spettro torna ad essere meno ripido (δ torna ad avere valore 2.7) e l’ulteriore cambio di pendenza viene definito *caviglia*.

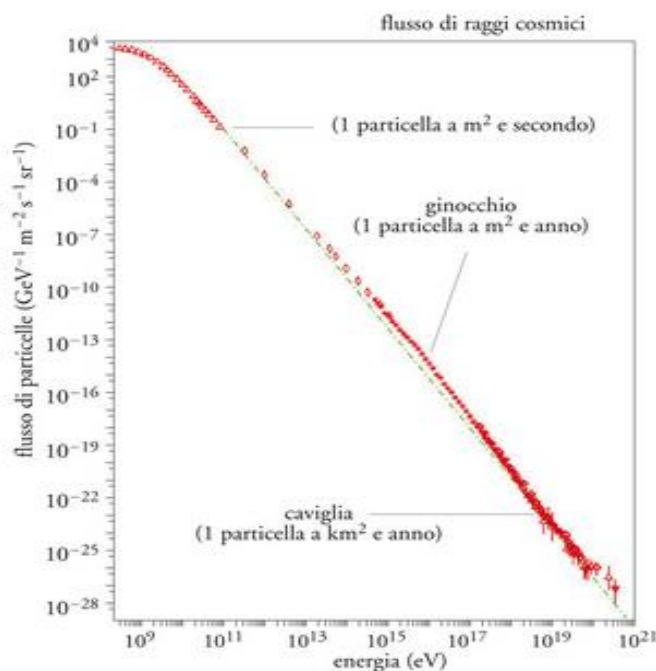


Figura 4.2: Spettro energetico dei raggi cosmici.

Tutte le particelle con energia compresa fra *ginocchio* e *caviglia*, hanno origine galattica. Dopo la *caviglia* si ha origine intergalattica mentre prima del *ginocchio* si hanno particelle provenienti dal sistema solare.

Per avere raggi cosmici ad energie maggiori di 10^{18} eV, è necessario avere un meccanismo che acceleri le particelle più volte. Il campo magnetico galattico da solo non è sufficiente dunque devono esserci altri contributi.

Meccanismo di fermi del secondo ordine

La nostra galassia è composta da numerose nubi di plasma. Quando le particelle interagiscono con tali nubi, se le nubi sono in movimento, le particelle vengono accelerate ed acquistano energia. In particolare subiscono degli urti elastici in cui guadagnano, per ogni urto, una frazione dell'energia iniziale. Solitamente il guadagno energetico dovuto a tali interazioni è molto basso e non è sufficiente a giustificare particelle ad energie elevate.

Meccanismo di fermi del primo ordine

In questo caso, le particelle vengono accelerate da un'onda d'urto che può essere causata ad esempio dall'esplosione di una supernova. Tale onda d'urto rappresenta una regione di transizione in cui si ha variazione della velocità del fluido. Rispetto al meccanismo precedente, si ha un guadagno energetico più elevato e i valori teorici si avvicinano molto a quelli riscontrati sperimentalmente. Tuttavia vi sono problemi legati alla durata del processo: Difatti per avere energie elevate come quelle osservate servono tempi dell'ordine di 10^5 anni e tali tempistiche sono estremamente lunghe rispetto a quelle osservate. Deve esserci necessariamente un meccanismo che permetta di raggiungere energie elevate in poco tempo.

Ipotesi di meccanismi di accelerazione

Esistono varie ipotesi riguardanti i meccanismi di accelerazione di particelle a energie molto elevate, Fra queste, le due che più sembrano avvicinarsi alla realtà sono il modello *bottom-up* e il modello *top-down*. Il primo si basa sul fatto che l'origine dei raggi cosmici ad alte energie sia da individuarsi negli acceleratori cosmici. Tali acceleratori sono i nuclei galattici attivi e i gamma ray burst. Questi corpi celesti sono circondati da particelle come i protoni che vengono colpiti dai raggi cosmici ed accelerati. Ciò accade quando una stella esplose: l'onda d'urto difatti accelera le particelle le quali passano attraverso campi magnetici con intensità elevata ed interagiscono con la materia circostante producendo fotoni e neutrini ad altissima energia. Il modello *top-down* invece si basa sul decadimento di particelle con masse enormi in leptoni e quarks. Tali decadimenti produrrebbero, per mezzo di un nuovo decadimento, raggi cosmici di neutrini ed antineutrini. Non è ancora noto quali siano le particelle massive che danno inizio al processo, alcune ipotesi suggeriscono che possano essere prodotte da difetti topologici ossia dalla rottura delle simmetrie nelle fasi iniziali dell'universo. Un'altra ipotesi si basa sul fatto che possano provenire dalla materia oscura fredda.

Bibliografia

[1] FANTI CARLA e FANTI ROBERTO, *Una finestra sull'Universo "Invisibile". Lezioni di radioastronomia di Carla & Roberto Fanti*. 2012, pp. 8.14 - 8.23, 9-1 – 9.6, 7.1 – 7.7

[2] LONGAIR, Malcom S. *High Energy Astrophysics*. Terza edizione. Cambridge University Press 2011, pp. 493, 507

[3] RYBICKY, George B. E Lightman, Alan P. *Radiative Processes in Astrophysics*. Wiley-VCH, 1979, pp. 224 – 231,

[4] WANG CHEN, J. L. HAN, and DONG LAI., *The Faraday Rotation in the Pulsar Magnetosphere*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 417.2, 2011