

ALMA MATER STUDIORUM · UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

SCUOLA DI SCIENZE

Corso di Laurea magistrale in Matematica

**MACCHINE MATEMATICHE
DALLA STORIA ALLA SCUOLA**
Percorso in una secondaria di secondo grado

Tesi di Laurea in Didattica della Matematica

Relatore: Prof.ssa
CATTABRIGA ALESSIA

Presentata da:
RAGGI ALESSIA

Anno Accademico 2018/2019

Introduzione

L'uso di strumenti concreti ha avuto ampio spazio all'interno della matematica fin dall'antichità.

A partire dall'epoca di Euclide (300 a.C circa), la geometria iniziò a servirsi della costruzione di oggetti concreti per la risoluzione di problemi: l'esempio più classico riguarda l'utilizzo di riga e compasso nel libro gli *"Elementi"* dello stesso Euclide, artefatti che assunsero da quel momento in poi la funzione di veri e propri strumenti di calcolo. Allo stesso periodo viene fatta risalire anche la realizzazione di strumenti più elaborati, come il compasso di Nicomede (280-210 a.C. circa). Nonostante ciò, però, questi artefatti venivano ancora costruiti e impiegati per la sola risoluzione di problemi geometrici, senza che ci fosse un collegamento più profondo tra cultura materiale e matematica.

È solo a partire dal Seicento, infatti, che si affermò la produzione di trattazioni sistematiche aventi come argomento principale i sistemi articolati e la loro descrizione, e si cominciò l'inserimento di questi all'interno di teorie generali. Durante questo periodo, altri tracciatori di curve furono progettati e divennero elementi essenziali dei nuovi metodi (si pensi ad esempio all'appendice sulla Geometria nel *"Discorso sul Metodo"* di Descartes [12]).

Il passaggio verso la nascita di una vera e propria teoria dei sistemi articolati fu però graduale: i primi trattati, infatti, mescolavano le regole di costruzione dello strumento (i materiali, la manutenzione, ecc.) con i principi concettuali che ne stavano alla base (forma delle componenti e tipi di connessione), senza fare distinzione tra questi e le regole d'uso della macchina (movimenti manuali per permetterne il funzionamento, ecc.).

Solo negli ultimi decenni dell'Ottocento venne sancita la separazione tra struttura fisica e concettuale di uno strumento, ed è per questo che proprio nel 1864 si fa convenzional-

mente risalire la nascita della teoria dei sistemi articolati, data che è scelta all'interno degli anni della loro massima fioritura.

Non solo per quanto riguarda la geometria, ma anche nel caso dell'aritmetica, gli strumenti di calcolo come abaci, calcolatrici meccaniche e pascaline hanno avuto nella storia un ruolo importante per sviluppare e consolidare la notazione posizionale in base dieci e per chiarire la differenza tra aspetti semantici (ad esempio il numero per quantificare una collezione di oggetti o per misurare una grandezza) e aspetti sintattici (come le regole di calcolo e gli algoritmi delle operazioni).

A questa tradizione storica si sono aggiunti, in anni più recenti, numerose ricerche didattiche sull'utilizzo di oggetti concreti come le macchine matematiche nelle pratiche d'aula, le quali hanno messo in luce le potenzialità della manipolazione di strumenti tradizionali all'interno dell'insegnamento e apprendimento della matematica, e in particolare della geometria. Le motivazioni addotte per inserire questo campo di esperienza non consueto all'interno della pratica scolastica sono molto varie e spaziano tra gli aspetti affettivi (creare una migliore immagine della matematica e un migliore rapporto con essa), culturali (mostrare le relazioni tra la matematica e la storia, contestualizzando e dando significato ai concetti moderni alla luce del passato) e innovativi (stimolare il coinvolgimento e la creatività degli studenti).

Inoltre, gli studi cognitivi hanno mostrato la rilevanza del *laboratorio di matematica* come luogo adatto alla costruzione di significati all'interno dell'insegnamento e apprendimento della materia e l'importanza della *manipolazione diretta di artefatti* per favorire la costruzione dei processi di pensiero caratteristici della matematica, tra cui quello di argomentare e dimostrare. Nel documento *Curricolo di matematica per il ciclo secondario* redatto dalla commissione CIIM dell'Unione Matematica Italiana si legge che

«La possibilità di manipolare fisicamente oggetti, come per esempio le macchine [matematiche] che generano curve, induce spesso modalità di esplorazione e di costruzione di significato degli oggetti matematici differenti ma altrettanto interessanti e, sotto certi aspetti, più ricche di quelle consentite dall'uso di software di geometria dinamica.»

A questo proposito, il seguente elaborato si pone l'obiettivo di analizzare la valenza

delle macchine matematiche come strumenti didattici all'interno delle comuni pratiche di insegnamento e apprendimento della matematica, non solo ad un livello scolastico inferiore, ma anche nella scuola secondaria di secondo grado.

Tutta la fase sperimentale svolta è stata condotta in collaborazione con un'altra studentessa dell'Università di Bologna, Ludovica Di Nicolantonio, la cui tesi è da considerarsi complementare alla seguente trattazione. In particolare, entrambi gli elaborati riguardano la progettazione di un laboratorio che prevede l'utilizzo di macchine matematiche, ma mentre la mia tesi si focalizzerà sulla valenza didattica dell'uso di questi strumenti storici per l'introduzione all'argomento delle coniche, l'elaborato di Ludovica si concentrerà sul ruolo dell'esperienza tattile nell'apprendimento della geometria per non vedenti. La nostra sperimentazione, infatti, si è svolta presso la classe III G/H linguistico del Liceo Luigi Galvani di Bologna, composta da 29 studenti tra i quali anche una ragazza non vedente.

Questo elaborato è strutturato secondo quattro capitoli.

Nel Capitolo 1, dopo aver introdotto la nozione di *sistema articolato piano* e la terminologia specifica, si descriveranno i vincoli costruttivi per l'esistenza di sistemi semplici e composti. Successivamente, si passerà ad analizzare il concetto di *macchina matematica* e si mostrerà una rassegna dei Laboratori di Macchine Matematiche presenti nella regione Emilia-Romagna. In conclusione, verrà delineata la storia dei tracciatori di curve, a partire dal 300 a.C. fino ad arrivare ai giorni nostri.

Nel Capitolo 2, invece, il focus si sposterà sul quadro teorico che supporta l'indagine scolastica. Sarà posta enfasi sulla valenza didattica del *laboratorio*, come ambiente privilegiato per la costruzione di significati matematici, e su come la *manipolazione di oggetti concreti* possa stimolare i processi di apprendimento degli studenti. Il costrutto teorico dell'*unità cognitiva*, che verrà introdotto e contestualizzato proprio in questo capitolo, fungerà da punto di riferimento per la successiva analisi dell'attività in classe.

Nel Capitolo 3 si descriverà il percorso svolto nella classe III G/H linguistico del Liceo Luigi Galvani di Bologna, evidenziando non solo la struttura organizzativa del laboratorio (scelta della classe, suddivisione delle attività, tempi e modalità di esecuzione, ecc.), ma anche gli obiettivi didattici che si pone. Diverse sezioni saranno destinate, inoltre,

all'analisi, svolta domanda per domanda, delle schede guida di esplorazione delle macchine utilizzate per la sperimentazione: saranno specificate non solo le motivazioni della formulazione di tali quesiti, ma anche gli obiettivi specifici che ciascuno di questi si pone. Nel Capitolo 4, infine, verrà svolta l'analisi dei testi prodotti dai ragazzi durante le attività in classe, alla luce della lente teorica approfondita nel secondo capitolo, e si trarranno conclusioni in merito allo svolgimento dell'intero laboratorio, evidenziando sia gli aspetti positivi emersi che le criticità riscontrate.

In Appendice A sono riportate le schede illustrative dei tracciatori di curve appartenenti all'Istituto Gian Franco Minguzzi e presenti in giacenza presso il Liceo Augusto Righi di Bologna, ciascuna delle quali è corredata da una fotografia, un'immagine virtuale della macchina e una breve descrizione della struttura e del funzionamento.

In Appendice B, invece, viene dimostrato un risultato raggiunto da Apollonio di cui si è parlato nella Sezione 1.3.1.

In Appendice C, infine, sono inserite le schede guida progettate e utilizzate durante la sperimentazione in classe, riferite rispettivamente alle seguenti macchine: ellissografo a filo, parabolografo a filo e parabolografo di Cavalieri.

Indice

Introduzione	i
1 Le macchine matematiche	1
1.1 Sistema articolato piano	1
1.1.1 Sistemi a un membro	4
1.1.2 Sistemi a quattro membri	4
1.2 Dai sistemi articolati alle macchine matematiche	11
1.2.1 I Laboratori delle Macchine Matematiche in Emilia-Romagna	14
1.3 Storia dei tracciatori di curve	16
1.3.1 Età ellenistica	16
1.3.2 Dal Seicento al teorema di Kempe	28
1.3.3 Dal teorema di Kempe ai giorni nostri	37
2 Quadro teorico a supporto dell'indagine	45
2.1 Congettare e dimostrare	46
2.1.1 Modalità di ragionamento nei processi risolutivi propri della geometria	47
2.1.2 L'unità cognitiva	50
2.2 Il laboratorio di matematica	51
2.2.1 Fase di progettazione del laboratorio	53
2.2.2 Fase di realizzazione del laboratorio	54
2.3 La manipolazione di oggetti concreti	57
2.3.1 La dimensione didattica	59

3	Sperimentazione in classe	63
3.1	Obiettivi dell'attività e motivazioni delle scelte	63
3.2	Progettazione e sperimentazione dell'attività	65
3.3	Prima lezione	66
3.3.1	Scheda guida per l'ellissografo a filo – Parte I	68
3.3.2	Scheda guida per l'ellissografo a filo – Parte II	70
3.4	Seconda lezione	72
3.4.1	Schede guida per i parabolografi – Parte I	74
3.4.2	Scheda guida per il parabografo a filo – Parte II	76
3.4.3	Scheda guida per il parabografo di Cavalieri – Parte II	79
3.4.4	Scheda guida per i parabolografi – Parte III facoltativa	82
3.5	Terza lezione	83
4	Analisi dell'attività in classe	89
4.1	Prima lezione	89
4.1.1	Analisi delle risposte – Parte I	89
4.1.2	Analisi delle risposte – Parte II	97
4.2	Seconda lezione	100
4.2.1	Analisi delle risposte sul parabografo a filo – Parte I	100
4.2.2	Analisi delle risposte sul parabografo di Cavalieri – Parte I	104
4.2.3	Analisi della discussione <i>inter pares</i>	110
4.2.4	Analisi delle risposte sul parabografo a filo – Parte II	112
4.2.5	Analisi delle risposte sul parabografo di Cavalieri – Parte II	119
4.3	Aspetti positivi e criticità del percorso	125
	Conclusioni	129
	A Schede illustrative dei curvigrati	131
	B Dimostrazione della Proposizione 1.3.1 di Apollonio	139
	C Schede delle attività laboratoriali	143
	Bibliografia	163

Ringraziamenti

168

Capitolo 1

Le macchine matematiche

Questo primo capitolo si apre con una panoramica generale sui sistemi articolati. In particolare, viene introdotta la definizione moderna e la terminologia specifica adeguata e vengono analizzati i vincoli costruttivi necessari all'esistenza di sistemi articolati a uno e a quattro membri.

La seconda sezione funge poi da collegamento tra sistemi articolati e macchine matematiche: sarà presentata una rassegna delle varie tipologie di macchine matematiche esistenti e una breve descrizione dei Laboratori regionali di Macchine Matematiche presenti in Emilia-Romagna.

Infine, il focus si sposterà sulla storia dei tracciatori di curve, partendo dalla descrizione delle primissime macchine matematiche di cui si hanno notizie fino ad arrivare ad epoche più recenti e alle moderne applicazioni di queste ultime. Lungo questo percorso saranno presenti degli anacronismi: infatti, per dimostrare alcuni risultati riguardanti curve tracciate da alcune macchine matematiche, si ricorrerà all'uso di strumenti matematici più moderni di quelli conosciuti all'epoca in questione (verrà comunque segnalato in testo). I contenuti di questo capitolo sono tratti ed ispirati da [4–6, 17–20, 26, 28].

1.1 Sistema articolato piano

Secondo i primi autori che si sono occupati dell'argomento, tra i quali Scheiner, Peaucellier e Lipkine, un *sistema articolato* è un insieme di aste rigide vincolate a muoversi su

uno stesso piano, alcune delle quali collegate tra loro o al piano stesso tramite perni, in modo che gli angoli rimangano variabili. Il motivo di una tale definizione è da ricercarsi nel fatto che i primi sistemi articolati realizzati erano principalmente parallelogrammi o modificazioni di questi ultimi, e non si prendevano in considerazione strutture composte anche da placche triangolari (vedi Figura 1.1) al posto di semplici aste. Il primo a pensare di utilizzare placche triangolari fu Sylvester, il quale osservò che un qualsiasi segmento può essere considerato come facente parte di una figura piana alla quale è indissolubilmente vincolato.



Figura 1.1: Fotografia di una macchina matematica composta da due placche triangolari vincolate ad una struttura a parallelogramma.

Più in generale, possiamo quindi enunciare la definizione di *piano (o sistema) articolato* come un insieme di figure geometriche planari vincolate a rimanere su uno stesso piano, alcune delle quali collegate tra loro e al piano stesso tramite perni (semplici viti che permettono di collegare due aste, consentendo sia rotazioni che traslazioni delle stesse, vedi Figura 1.2) o cerniere (vincoli che permettono di collegare due aste consentendo soltanto la possibilità di rotazioni ed eliminando ogni possibilità di traslazione, vedi Figura 1.3).

In particolare:

- Se due placche triangolari o due aste semplici sono collegate tramite due perni, allora costituiscono la stessa placca, in quanto vincolate a muoversi sempre insieme in maniera solidale.



Figura 1.2: Fotografia di un perno mobile portamina.

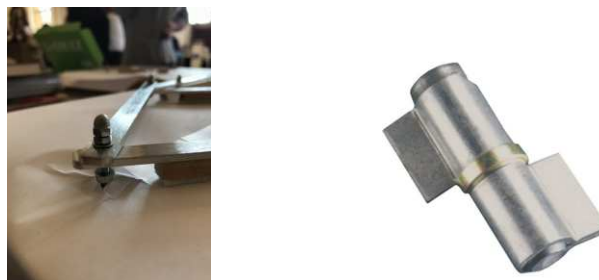


Figura 1.3: Fotografia di un perno fisso a cerniera.

- Se tre aste sono collegate tramite tre perni affinché realizzino un triangolo, allora costituiscono un'unica placca triangolare indeformabile.

Gli organi che compongono un sistema articolato si dicono *membri*. Un membro può essere costituito da un'unica asta oppure, come appena visto, da più aste rese solidali tra loro, purché si comportino come un unico elemento dal punto di vista funzionale (come nel caso di placche triangolari).

Nel seguito parleremo anche di *gradi di libertà* di un sistema articolato: con questo termine intendiamo il numero di variabili indipendenti necessarie per determinare univocamente la sua posizione nello spazio. Ricordiamo che i gradi di libertà di un'asta rigida libera di muoversi su un piano sono al più tre: due variabili indipendenti servono per determinare la posizione di un suo estremo, a cui si aggiunge la necessità di un'altra variabile, indipendente dalle prime due, per individuare la posizione del secondo estremo. Aggiungendo altri membri al sistema, si introducono necessariamente dei vincoli a questi ultimi (che impediscono alcuni movimenti relativi e ne consentono altri) e di conseguenza

i gradi di libertà del sistema diminuiscono rispetto al computo

$$3 \times \text{numero di aste.}$$

Facciamo ad esempio la conta dei gradi di libertà di due aste tra loro imperniate in un estremo (vedi Figura 1.4): in questo caso, ci occorrono 3 variabili indipendenti per determinare la posizione della prima asta (le coordinate x e y dell'estremo A , e la coordinata z dell'estremo B), e a questo punto ci basta solo un'altra variabile indipendente per determinare univocamente la posizione dell'altro estremo della seconda asta (la coordinata w dell'estremo C), in quanto il punto B era già stato posizionato.

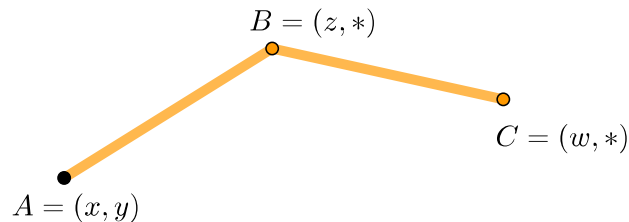


Figura 1.4: Gradi di libertà di due aste imperniate tra loro ad un estremo.

1.1.1 Sistemi a un membro

Tra i sistemi articolati ad un membro spicca l'esempio, semplice ma non per questo meno considerevole, data la sua rilevanza storica, del compasso piano. Esso si compone di un'unica asta impernata al piano in un suo estremo, libera di ruotare intorno a quest'ultimo, come mostrato in Figura 1.12 a pagina 16. Ponendo quindi una mina scrivente o una matita nell'altro estremo, è possibile tracciare sul piano una perfetta circonferenza (per un approfondimento storico vedi Sezione 1.3.1).

1.1.2 Sistemi a quattro membri

I sistemi articolati a quattro membri, ossia i *quadrilateri articolati*, sono i sistemi più semplici ed interessanti che si possono realizzare, tralasciando ovviamente il caso di quelli con 2 o 3 membri, le cui utilità sono pressoché nulle. La loro reale importanza è

dovuta all'uso costante in sistemi articolati più complessi.

Il nostro obiettivo è quello di analizzare le possibili configurazioni e i vincoli strutturali di un quadrilatero articolato $ABCD$ avente due gradi di libertà, ossia costruito in maniera tale che uno dei suoi vertici (supponiamo A) sia fissato al piano e le aste che lo compongono siano collegate tra loro a formare una struttura a forma di quadrilatero in cui sia possibile far variare gli angoli interni. In questo modo, facendo la conta delle variabili indipendenti necessarie a descrivere la sua posizione sul piano, come è mostrato in Figura 1.5, si ottiene che basta determinare la posizione di un vertice del quadrilatero (ad esempio B) rispetto al punto fisso A e stabilire l'ampiezza dell'angolo interno con vertice in B (θ in Figura 1.5) per determinare automaticamente anche ogni altro punto del sistema.

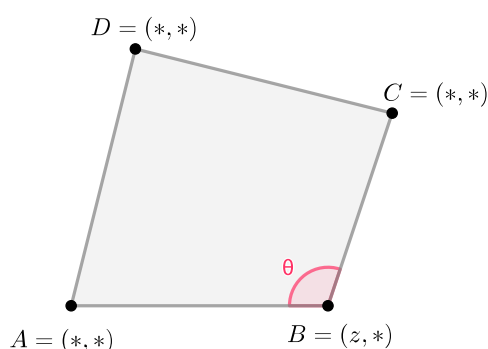


Figura 1.5: Gradi di libertà di un quadrilatero articolato.

In realtà però, al fine di studiare le possibili configurazioni che il quadrilatero assume, il grado di libertà relativo alla posizione del vertice B rispetto al punto fisso A è trascurabile, in quanto, una volta fissato l'angolo θ , determina solo la rotazione della struttura intorno ad A . Tale quadrilatero può assumere quindi tre forme differenti: convessa, uni-concava o bi-concava (vedi Figura 1.6).

Tutte e tre le configurazioni dei quattro punti in effetti si possono ottenere a partire dalla prima (quadrilatero convesso), semplicemente tramite opportune simmetrie: il quadrilatero uni-concavo si può ottenere, ad esempio, come poligono avente vertici in A , B , D – che rimangono invariati – e in un nuovo punto, ottenuto attraverso la simmetria del vertice C del quadrilatero convesso rispetto alla sua diagonale DB . A partire poi

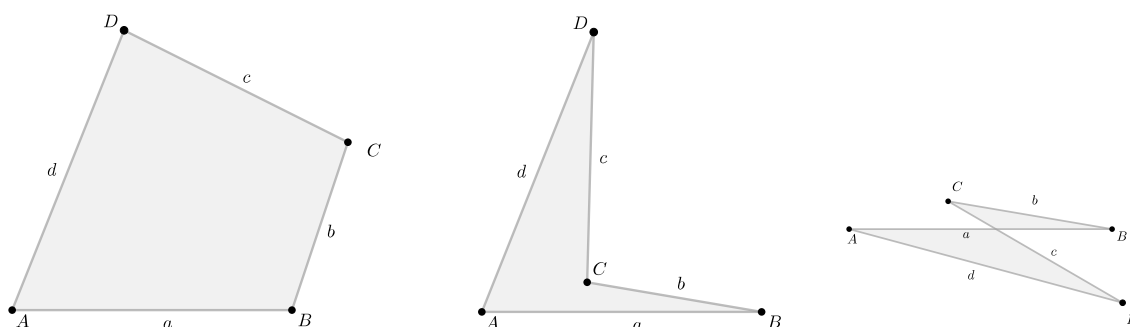


Figura 1.6: Quadrilatero convesso, uni-concavo e bi-concavo (da sinistra a destra).

da quest'ultimo, il quadrilatero bi-concavo si ricava con un'analogia trasformazione, ma effettuata sul vertice D e con asse di simmetria AC .

Vincoli costruttivi di un quadrilatero articolato avente due perni a rivoluzione completa

In questo paragrafo ci occuperemo di analizzare le condizioni strutturali affinché un quadrilatero articolato $ABCD$ esista e abbia due perni a rivoluzione completa, ossia due dei suoi angoli possano assumere ogni valore compreso tra 0° e 180° .

Consideriamo quindi un quadrilatero $ABCD$, di lati a, b, c e d (vedi Figura 1.7). Chiamiamo l'angolo $\widehat{BAD} = \theta$, con $0 \leq \theta \leq 180^\circ$.

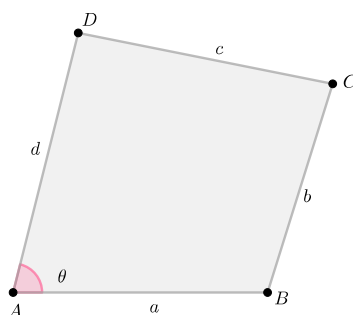


Figura 1.7

Per il teorema dei coseni applicato al triangolo ABD , vale

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta. \quad (1.1)$$

Inoltre, affinché il quadrilatero “si chiuda”, occorre che le circonferenze di centro B e raggio b e di centro D e raggio c si taglino a vicenda. Questa condizione può essere espressa dicendo che la lunghezza di BD deve essere compresa tra $|b - c|$ e $|b + c|$. Quindi

$$(b - c)^2 \leq BD^2 \leq (b + c)^2. \quad (1.2)$$

Combinando i risultati in (1.1) e (1.2) otteniamo

$$(b - c)^2 \leq a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta \leq (b + c)^2$$

$$\frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad} \leq \cos \theta \leq \frac{a^2 + d^2 - (b - c)^2}{2ad}.$$

Affinché l'angolo θ possa assumere qualsiasi valore tra 0° e 180° occorre che il suo coseno possa assumere qualsiasi valore compreso tra $+1$ e -1 . Perciò possiamo riassumere le condizioni con il sistema

$$\begin{cases} \frac{a^2 + d^2 - (b + c)^2}{2ad} \leq -1 \\ \frac{a^2 + d^2 - (b - c)^2}{2ad} \geq 1 \end{cases}$$

da cui,

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a^2 + d^2 - (b + c)^2 \leq -2ad \\ a^2 + d^2 - (b - c)^2 \geq 2ad \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (a + d)^2 - (b + c)^2 \leq 0 \\ (a - d)^2 - (b - c)^2 \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (a + d + b + c)(a + d - b - c) \leq 0 \\ (a - d + b - c)(a - d - b + c) \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} a + d - b - c \leq 0 \\ (d - a + c - b)(d - a + b - c) \geq 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Supponiamo, senza perdere di generalità, che $b \leq c$ e $a \leq d$. Allora $d - a + c - b \geq 0$ poiché somma di quantità positive, quindi il sistema (1.3) si semplifica ulteriormente,

diventando

$$\begin{aligned} & \begin{cases} a + d - b - c \leq 0 \\ d - a + b - c \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} (a - b) + (d - c) \leq 0 \\ d - c \geq a - b. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Analizzando queste condizioni, necessarie e sufficienti affinché $\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$, notiamo che la prima equazione del sistema (1.4) è incompatibile con l'ipotesi $a \leq b$, altrimenti dalla seconda equazione si avrebbe $d - c \geq 0$ e quindi $(a - b) + (d - c) \geq 0$. Quindi necessariamente deve valere $a \leq b$. Ma poiché avevamo supposto $b \leq c$ allora $a \leq b \leq c$, da cui ricaviamo che a è il lato del quadrilatero più corto (in quanto per ipotesi avevamo supposto anche $a \leq d$).

Inoltre osserviamo che, se supponiamo che d sia l'asta di lunghezza maggiore, allora dalla prima equazione del sistema ricaviamo $a + d \leq b + c$.

Se invece supponiamo che sia c l'asta del quadrilatero più lunga, allora dalla seconda equazione si ha $a + c \leq b + d$.

Notiamo che lo stesso ragionamento si può fare supponendo che b sia l'asta più lunga.

Possiamo quindi affermare che:

Quando, in un quadrilatero $ABCD$, un perno è a rivoluzione completa, esso appartiene all'asta più corta del quadrilatero e inoltre vale che la somma del lato più corto con quello più lungo (nel nostro caso rispettivamente a e d) è al massimo pari alla somma degli altri due (nel nostro caso b e c).

Ci interessa ora mostrare che vale anche il viceversa, ossia che:

Se la somma dell'asta maggiore con quella minore di un quadrilatero $ABCD$ è minore o uguale alla somma delle altre due, allora i perni situati sull'asta più corta sono a rivoluzione completa.

Per farlo, ci basta provare le due disuguaglianze del sistema (1.3).

Supponiamo per semplicità che a sia sempre l'asta più corta. Suddividiamo 3 casi:

- Supponiamo che d sia l'asta più lunga. Per quanto riguarda la prima disequazione, essa è ovvia per ipotesi. Per la seconda, sotto le ipotesi non restrittive che $b \leq c \leq d$ e $a \leq b$, basta osservare che

$$\underbrace{d-a}_{\text{positivo}} \geq \underbrace{c-b}_{\text{positivo}} \quad \Rightarrow \quad (d-a)^2 \geq (c-b)^2$$

da cui segue immediatamente.

- Supponiamo invece che sia c l'asta più lunga. Per quanto riguarda la prima disequazione, poiché per ipotesi $a + c - d - b \leq 0$, vale

$$a + d - b - c + 2(c - d) \leq 0.$$

Ma poiché per ipotesi $c - d \geq 0$, allora

$$a + d - b - c \leq 0.$$

Invece per la seconda disequazione, sotto le ipotesi non restrittive che $b \leq d \leq c$ e $a \leq b$, basta osservare che

$$\underbrace{c-b}_{\text{positivo}} \leq \underbrace{d-a}_{\text{positivo}} \quad \Rightarrow \quad (c-b)^2 \leq (d-a)^2$$

da cui segue immediatamente.

- Se infine b è l'asta più lunga, la situazione è analoga al caso precedente.

In conclusione, possiamo affermare che:

Dato un quadrilatero $ABCD$, se un perno è a rivoluzione completa, allora ne esiste un altro che è dello stesso tipo e questi due perni si trovano agli estremi dell'asta più piccola che compone il quadrilatero. Inoltre, la somma dell'asta più piccola con quella più grande è al massimo uguale alla somma delle altre due. Quest'ultima condizione è necessaria e sufficiente all'esistenza di un perno a rivoluzione completa.

Vincoli costruttivi di un quadrilatero articolato avente più di due perni a rivoluzione completa

Analizziamo ora come sono fatti i quadrilateri con tre o quattro perni a rivoluzione completa.

Sia $ABCD$ un quadrilatero articolato avente i perni non consecutivi A e C a rivoluzione completa. Per quanto visto nella sezione precedente, le condizioni necessarie e sufficienti sono

$$\begin{aligned} \text{per } A: & \quad \begin{cases} a + d - b - c \leq 0 \\ (d - a)^2 - (b - c)^2 \geq 0 \end{cases} \\ \text{per } C: & \quad \begin{cases} b + c - a - d \leq 0 \\ (b - c)^2 - (d - a)^2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

che si riassumono nell'unico sistema

$$\begin{cases} a + d - b - c = 0 \\ (d - a)^2 - (b - c)^2 = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Distinguiamo ora, a partire da (1.5), due casi possibili:

1. Se vale $\begin{cases} a + d - b - c = 0 \\ d - a + b - c = 0 \end{cases}$ allora $a = b$ e $d = c$.

In questo caso, i perni A , B e C saranno a rivoluzione completa e le aste adiacenti uguali a due a due. Il quadrilatero potrà allora assumere la forma di un *romboide* o di una cosiddetta *punta di lancia* (vedi Figura 1.8).

2. Se vale $\begin{cases} a + d - b - c = 0 \\ d - a - b + c = 0 \end{cases}$ allora $a = c$ e $d = b$.

In questo caso, tutti i perni saranno a rivoluzione completa e le aste tra loro opposte saranno uguali a due a due. Il quadrilatero potrà allora assumere la forma di un *parallelogramma* o di un *anti-parallelogramma* (vedi Figura 1.9).

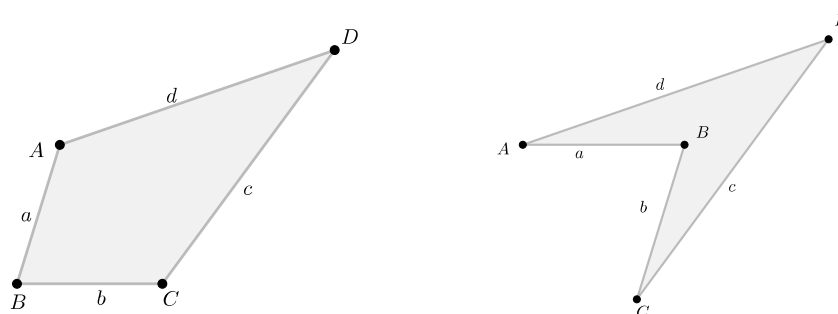


Figura 1.8: Romboide e punta di lancia (da sinistra a destra).

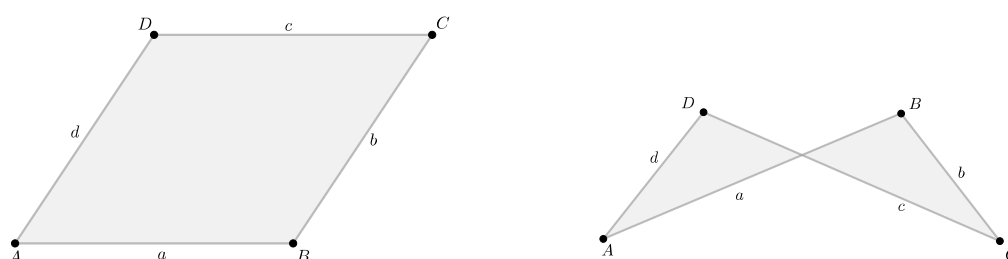


Figura 1.9: Parallelogramma e anti-parallelogramma (da sinistra a destra).

1.2 Dai sistemi articolati alle macchine matematiche

Come visto nella Sezione 1.1, un *sistema articolato* è un meccanismo in cui sono presenti solo aste rigide e collegamenti elementari tra queste ultime (tramite perni o cerniere).

Parallelamente, anche le *macchine matematiche* sono oggetti fisici da manipolare concretamente, ma al contrario dei sistemi articolati possono presentare una struttura più complessa, in cui siano presenti elementi di altra natura rispetto a semplici aste (ad esempio fili inestendibili, aste scanalate, pesetti, ecc.) e collegamenti più elaborati. Molto spesso una macchina matematica è composta da uno o più sistemi articolati semplici tra loro connessi, come ad esempio nel caso del pantografo per traslazione (vedi Figura 1.11 a pagina 14).

Le macchine matematiche possono essere di due tipi: macchine per l'*aritmetica*, cioè

strumenti che consentono di rappresentare numeri e di effettuare operazioni aritmetiche (per esempio, semplici calcolatrici meccaniche, pascaline e abaci); oppure macchine per la *geometria*, cioè strumenti che forzano un punto o una figura a muoversi o a essere trasformati secondo leggi matematiche predeterminate. In quanto macchine “matematiche” il loro obiettivo principale è infatti quello di incorporare e rendere visibile una legge o uno schema astratto.

Tra le macchine per la *geometria* possiamo distinguere:

- i *curvigrafi*, strumenti che permettono di tracciare curve (ad esempio compassi, ellissografi, parabolografi, ecc.);
- i *pantografi*, che permettono di realizzare trasformazioni geometriche (tra cui pantografi per traslazione, simmetria, stiramento ecc.);
- i *prospettografi*, che esemplificano l’interazione tra geometria proiettiva e ottica, consentendo di dare rappresentazioni concrete dell’infinito.

All’interno delle tipologie sopra illustrate, si possono distinguere a loro volta due tipi di strumenti:

- macchine *due dimensionali*, tra cui annoveriamo per i curvigrafi l’ellissografo a filo, l’ellissografo ad antiparallelogramma, il parabolografo a filo e di Cavalieri, ecc. (vedi Appendice A per una descrizione completa delle macchine); per i pantografi quello per stiramento, per traslazione, per rotazione, ecc.;
- macchine *tridimensionali*, tra cui citiamo per i curvigrafi il compasso perfetto (vedi Appendice A per una descrizione completa della macchina); per i pantografi la genesi tridimensionale per stiramento o per omotetia; tutti i prospettografi.

Nel seguito vengono descritte e analizzate nel loro funzionamento, come esempio, due macchine matematiche due dimensionali per la geometria: in particolare l’*ellissografo ad antiparallelogramma (o di Delauney)*, afferente alla famiglia dei curvigrafi, e il *pantografo per traslazione*, facente parte invece della categoria dei pantografi.

Ellissografo ad antiparallelogramma

L'ellissografo di Delauney è composto da un antiparallelogramma articolato, ossia un quadrilatero bi-concavo $ABCD$ (vedi Figura 1.10), avente le aste uguali a due a due ($AB = CD$ e $AD = BC$). Esse sono intrecciate in maniera che si incontrino nel punto P e sono scanalate al centro in modo che una mina posta in P possa scorrere liberamente attraverso di esse. Inoltre, una delle aste più corte (nel nostro caso AB) è fissata al piano da disegno da due perni.

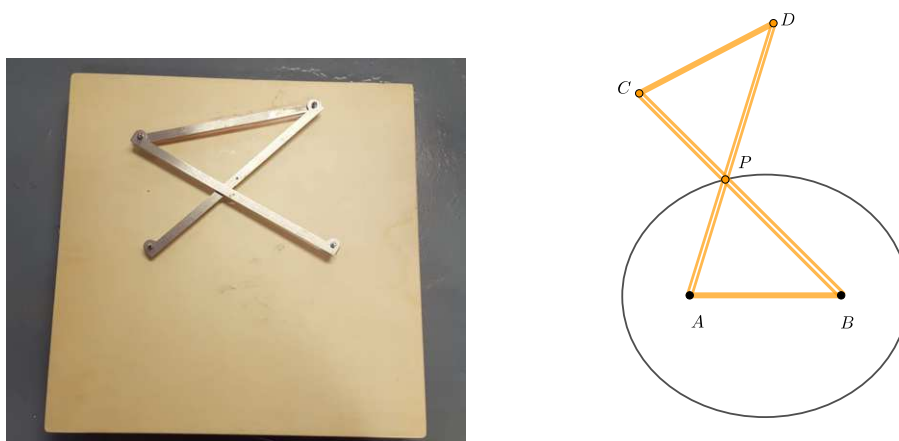


Figura 1.10: Fotografia e immagine virtuale dell'ellissografo ad antiparallelogramma.

La macchina, come già osservato, si utilizza con l'ausilio di una punta scrivente posta in P , la quale al movimento del sistema articolato descrive un'ellisse di fuochi A e B . Infatti, viene soddisfatta la proprietà caratteristica dell'ellisse, e cioè che la somma delle distanze di un qualsiasi punto P dai fuochi A e B rimanga sempre costante.

Nel nostro caso

$$PA + PB = PA + PD = AD = \text{costante}$$

per le proprietà di simmetria dell'antiparallelogramma (ossia poiché al variare di P vale sempre che ABP è simile a CDP).

Pantografo per traslazione

Il pantografo per traslazione è composto da due parallelogrammi articolati $ABCD$ e $BDQP$ (vedi Figura 1.11), aventi l'asta BD in comune. L'asta AC è imperniata al piano, mentre all'interno dei perni portamina P e Q sono poste due mine scriventi, libere di muoversi con due gradi di libertà.



Figura 1.11: Fotografia e immagine virtuale del pantografo per traslazione.

La macchina realizza una corrispondenza tra i punti P e Q del piano, secondo una traslazione individuata in modulo, direzione e verso dal vettore AC . Tale trasformazione è una conseguenza immediata delle proprietà dei parallelogrammi:

$$PQ = BD = AC \quad \text{e} \quad PQ \parallel DC \parallel AB.$$

1.2.1 I Laboratori delle Macchine Matematiche in Emilia-Romagna

Il *Laboratorio delle Macchine Matematiche* del Dipartimento di Matematica dell'Università di Modena e Reggio Emilia (con sedi in via Campi e in via Tito Livio a Modena) costituisce un punto di riferimento in Emilia-Romagna in quanto possiede una cospicua collezione di macchine matematiche di ogni tipologia, tanto che viene visitato annualmente da circa un migliaio di studenti.

Esso nacque nel 2002 ad opera del Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica afferente allo stesso Dipartimento e coordinato dalla Prof.ssa Maria G. Bartolini Bussi.

Questo Laboratorio si occupa principalmente di ricerca in didattica e di divulgazione della matematica mediante l'allestimento di mostre in Italia e all'estero e ha preso parte al *Progetto Regionale Laboratori delle Macchine Matematiche per l'Emilia-Romagna*, che ha consentito di realizzare una rete di cinque Laboratori di matematica nelle province di Bologna, Modena, Piacenza, Ravenna e Rimini.

In tutti i Laboratori provinciali allestiti per il progetto sono presenti le seguenti macchine:

- *pantografi*: pantografi per la simmetria assiale, lo stiramento, la simmetria centrale, l'omotetia (pantografo di Scheiner), la traslazione (pantografo di Kempe) e la rotazione (pantografo di Sylvester);
- *curvigrafi*: parabolografi del Cavalieri, ellissografi ad antiparallelogramma, parabolografi a filo, ellissografi a filo e guida rettilinea di Kempe;
- *macchine geometriche tridimensionali*: compasso perfetto e genesi tridimensionale dello stiramento;
- *macchine aritmetiche*: Pascalina "Zero +1".

In Appendice A sono raccolte le schede illustrative di alcune delle macchine matematiche in dotazione ai Laboratori, in ciascuna delle quali è riportata una foto e un'immagine virtuale della macchina, corredata da una breve descrizione della sua struttura e del suo funzionamento. Si è scelto di inserire in appendice solo le schede relative ai curvigrafi giacenti presso la sede di Bologna, in quanto nel seguito dell'elaborato verrà descritta una sperimentazione didattica (vedi Capitolo 3) che si è servita, nel suo svolgimento, esclusivamente di questi ultimi. In particolare sono stati necessari dieci *ellissografi a filo*, cinque *parabolografi a filo* e cinque *parabolografi di Cavalieri*.

Le macchine utilizzate per il percorso didattico descritto in questa tesi sono di proprietà dell'Istituto Gian Franco Minguzzi e tenute in deposito presso il Liceo Scientifico Augusto Righi di Bologna. Sul sito web della scuola è presente una pagina dedicata, al link https://www.liceorighibologna.it/pvw/app/BOLS0003/pvw_sito.php?sede_codice=BOLS0003&page=2058737, dalla quale è possibile reperire tutte le informazioni riguardanti la disponibilità e il noleggio degli strumenti.

Il taglio preso da questa tesi riguardo il tema dei curvigrafi spiega, inoltre, l'interesse posto sulla storia dei tracciatori di curve, approfondita nella sezione che segue.

1.3 Storia dei tracciatori di curve

1.3.1 Età ellenistica

Il più semplice e antico esempio di strumento matematico è il compasso piano (vedi Figura 1.12). La sua costruzione si rifà sicuramente alla definizione dinamica e procedurale data da Erone nel primo secolo dopo Cristo, che definisce il cerchio come «*la figura descritta quando un'asta si muove ruotando intorno a uno dei suoi estremi*» [4, p. 1]. Questo strumento, come già visto nella Sezione 1.1.1, è un sistema articolato ad un membro, costituito da una sola asta fissata ad un piano in uno dei suoi estremi (il punto A in Figura 1.12), lasciata libera di ruotare intorno a questo perno. All'altro estremo, nel nostro caso il punto P , è poi posta una punta scrivente, che permette di tracciare una circonferenza di centro A e raggio AP .

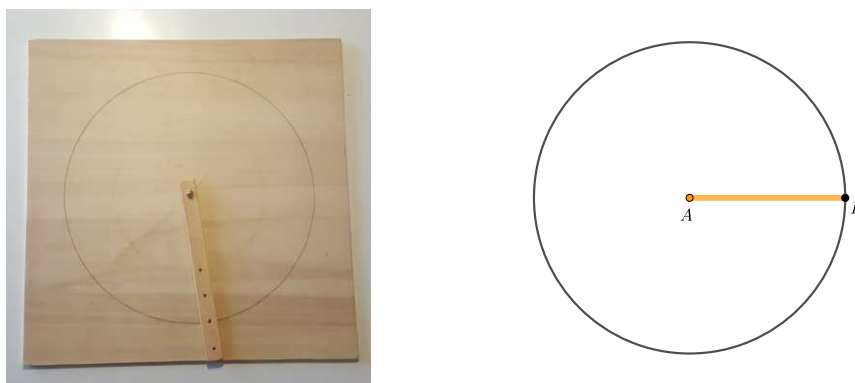


Figura 1.12: Fotografia e immagine virtuale del compasso piano.

Per quanto riguarda l'uso di strumenti matematici applicati alla geometria elementare, Euclide fu il primo ad occuparsene. Nella sua opera gli “*Elementi*”, pubblicata intorno al 300 a.C, egli traduce diversi tipi di problemi algebrici in linguaggio geometrico, rappresentando i dati con lunghezze di segmenti, e li risolve costruendo geometricamente una soluzione, utilizzando gli unici due strumenti per lui ammissibili: la riga e il compasso. La teoria sviluppata nell'opera riguarda tutte le possibili costruzioni eseguibili con tali strumenti, tanto che il criterio di esistenza per gli oggetti geometrici diventa proprio la costruibilità con riga e compasso.

Questa scelta, destinata ad influenzare per millenni la geometria, è dichiarata in modo esplicito nei primi tre postulati dell'opera di Euclide, nonostante egli non parli mai esplicitamente né di riga né di compasso. I postulati, rifrasati in linguaggio moderno, affermano che:

1. (È possibile) tracciare un segmento da ogni punto a ogni punto.
2. (È possibile) prolungare con continuità un segmento in una retta.
3. (È possibile) tracciare un cerchio con qualsiasi centro e raggio.

Occorre fare attenzione al fatto che non tutto ciò che si può fare pensando ad un compasso moderno è autorizzato dal terzo postulato: il compasso di Euclide, come risulta evidente dalla Figura 1.12, può essere utilizzato solo per tracciare un cerchio dati il centro e un punto della circonferenza, e non per trasportare distanze, ad esempio.

La ragione della scelta di utilizzare solo questi due strumenti è però ancora piuttosto discussa. Di fianco a interpretazioni di tipo filosofico, epistemologico e religioso, spicca la valenza tecnica dei due oggetti: la riga e il compasso sono gli strumenti di calcolo più pratici, precisi e affidabili in quanto hanno un errore relativo molto piccolo e sono facilmente riproducibili in ogni situazione.

Un esempio in cui Euclide mette in pratica l'utilizzo del suo compasso si trova nella Proposizione 13 del sesto libro degli *"Elementi"*, nel quale spiega il procedimento per trovare, dati due segmenti, la media proporzionale tra questi.

Dati i segmenti AB e BC , posti in linea retta tra loro, egli suggerisce (vedi Figura 1.13) di costruire il semicerchio ADC e di condurre dal punto B il segmento BD perpendicolare ad AC , congiungendo infine D con A e con C .

Poiché l'angolo \hat{ADC} insiste sul diametro del semicerchio ADC , esso è retto (per affermare ciò si appoggia su Proposizioni già viste), quindi DB costituisce la media proporzionale tra le due rette di partenza

$$AB : DB = DB : BC$$

che equivale ad aver trovato un quadrato equivalente a un rettangolo dato.

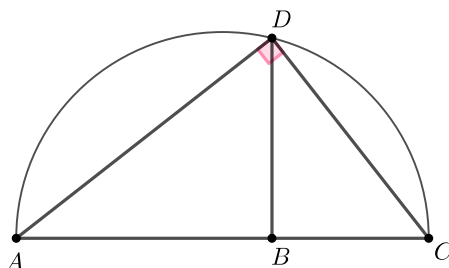


Figura 1.13: Costruzione del medio proporzionale.

In realtà, però, la riga e il compasso non sono gli unici strumenti noti ai geometri alessandrini. Infatti, è documentato che intorno al 200 a.C. era conosciuto anche il cosiddetto compasso di Nicomede, strumento matematico che permette di costruire una particolare curva detta *concoide*.

Il compasso di Nicomede

Come illustrato nella Figura 1.14, questo strumento consiste di un'asta scanalata di lunghezza fissa passante per il punto fisso O (polo) e vincolata in M (punto direttore) a scorrere lungo una retta r (retta di base).

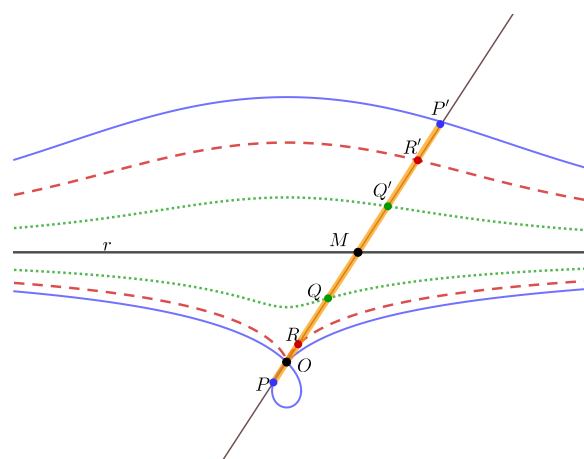
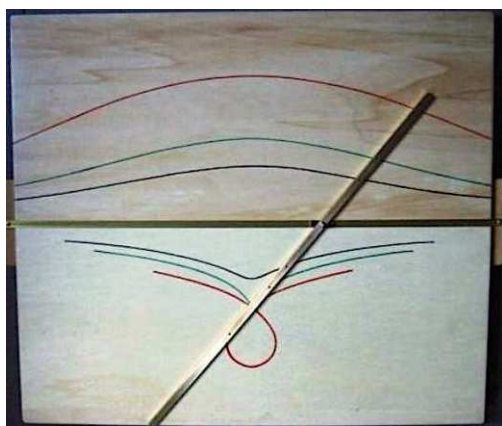


Figura 1.14: Fotografia e immagine virtuale del compasso di Nicomede¹.

Su tale asta si scelgono poi due punti P e P' (punti tracciatori della curva) da parti opposte di M in maniera che, fissato un segmento m detto modulo, si abbia

$$MP = MP' = m.$$

Il luogo geometrico descritto dai punti P e P' al muoversi di M su r descrive la cosiddetta *concoide*.

In Figura 1.14 sono tracciati tre esempi di concoide, che corrispondono a tre diverse situazioni:

- Se $d(O, r) < m$ i punti tracciatori sono P e P' (curva di colore blu in figura).
- Se $d(O, r) = m$ i punti tracciatori sono R e R' (curva di colore rosso in figura).
- Se $d(O, r) > m$ i punti tracciatori sono Q e Q' (curva di colore verde in figura).

Come si può notare dalla figura, nel semipiano superiore le tre curve tracciate si assomigliano, mentre in quello inferiore il comportamento della curva intorno al polo O è diverso:

- Se $d(O, r) < m$ e i punti tracciatori sono P e P' , il polo O è un nodo a tangenti distinte.
- Se $d(O, r) = m$ e i punti tracciatori sono R e R' , il polo O è una cuspid.
- Se $d(O, r) > m$ e i punti tracciatori sono Q e Q' , il polo O è un punto non singolare.

Scegliendo un opportuno sistema di coordinate cartesiane e polari, è possibile inoltre determinare facilmente l'equazione della *concoide*. Come già anticipato nell'introduzione alla sezione, questo calcolo risulta un anacronismo, in quanto né le coordinate cartesiane, né quelle polari erano note all'epoca di Nicomede.

Consideriamo dunque un sistema di riferimento polare con polo in O e asse polare dato dalla retta X , perpendicolare ad r e passante per O (vedi Figura 1.15).

Chiamiamo N il punto di intersezione tra le rette X e r e indichiamo le coordinate polari di P' con (ρ, θ) , dove $\rho = OP'$ e $\theta = X\hat{O}P'$. Ricordiamo inoltre che $MP' = m$ e poniamo

¹Fotografia presa dal sito: www.macchinematematiche.org

$$d(O, r) = d.$$

Si ottiene facilmente, considerando il triangolo rettangolo OMN , che

$$OM \cdot \cos \theta = d.$$

Quindi, essendo $\rho = OM + m$ si ha

$$\rho \cdot \cos \theta = OM \cdot \cos \theta + m \cdot \cos \theta = d + m \cdot \cos \theta.$$

Analogamente, per il punto P si ottiene

$$\rho \cdot \cos \theta = OM \cdot \cos \theta - m \cdot \cos \theta = d - m \cdot \cos \theta.$$

Dunque l'equazione in coordinate polari della conoide è

$$\rho \cdot \cos \theta = d \pm m \cdot \cos \theta.$$

In coordinate cartesiane associate, ossia prendendo come asse Y la retta r (orientata secondo il vettore $N\vec{M}$) e come asse X la perpendicolare a questa passante per O (secondo l'orientamento del vettore $O\vec{N}$), e tenendo conto che

$$x = \rho \cdot \cos \theta = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \theta$$

si ottiene l'equazione

$$(x - d)^2(x^2 + y^2) - m^2x^2 = 0.$$

Le sezioni coniche prima e dopo Apollonio

L'opera matematica “*Le coniche*” di Apollonio di Perga, risalente alla metà del III secolo a.C. circa, risulta essere la prima trattazione completa riguardo l'argomento delle sezioni coniche. Si tratta di un'opera che, nella sua prima parte, presenta in maniera organica e strutturata una serie di risultati già noti e acquisiti dalla matematica greca del V secolo a.C., responsabile di aver influenzato ampiamente il nostro modo di “fare matematica” oggi, ma che nel suo seguito introduce importanti novità in ambito geometrico.

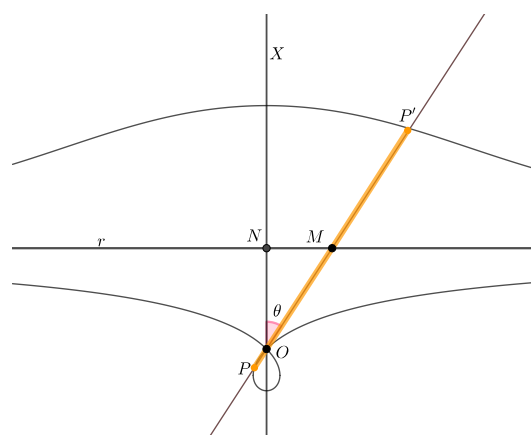


Figura 1.15: Concoide.

Per prima cosa, è necessario specificare ciò che era conosciuto prima dell'opera di Apollonio, in particolare la definizione di cono. Come spiegò Euclide nell'undicesimo libro degli *"Elementi"*, un cono è il solido realizzato dalla rotazione di un triangolo rettangolo lungo uno dei suoi cateti: in particolare, se i due cateti hanno la stessa lunghezza, allora il cono è *rettangolo*; se il cateto che funge da asse di rotazione è maggiore dell'altro cateto, il cono è *acutangolo*; altrimenti, il cono è *ottusangolo*. Tagliando poi il cono con una sezione ortogonale all'ipotenusa del triangolo generatore, si ottengono tre tipi diversi di curve: l'*ortotome* (dal greco "òrto-", che significa retto e "-tomè", ossia taglio) comunemente conosciuta come parabola, nel caso di cono rettangolo; l'*oxitome* (dal greco "òxi-", acuto e "-tomè", taglio) poi chiamata ellisse, nel caso di cono acutangolo; e infine l'*amblytome* (dal greco "amblyís-", ottuso e "-tomè", taglio) poi detta iperbole, nel caso di cono ottusangolo.

Si possono quindi riassumere nei seguenti punti alcune convinzioni presenti prima della trattazione di Apollonio, che egli poi ribalterà completamente:

- tutti i coni sono retti, ossia l'asse del cono è sempre perpendicolare alla base;
- tutti i coni hanno una sola falda (e quindi anche l'iperbole ha un solo ramo);
- tutti i coni, per costruzione, sono finiti e non estendibili;
- non è possibile ottenere sezioni di tipo differente nello stesso cono.

Con Apollonio si introdussero notevoli novità a questa teoria, a partire da una nuova definizione di cono. Egli dava, infatti, la stessa definizione che viene usata ancora oggi di cono circolare:

«Se una retta, prolungantesi all'infinito e passante sempre per un punto fisso, viene fatta ruotare lungo la circonferenza di un cerchio che non si trovi nello stesso piano del punto in modo che passi successivamente attraverso ogni punto di quella circonferenza, la retta che ruota tratterà la superficie di un cono doppio.» [13]

Ad una prima lettura, la definizione può sembrare più complicata di quella data da Euclide, ma, ad uno sguardo più accurato, risulta essere sicuramente più completa della precedente. Infatti, non solo contempla l'esistenza di coni non retti, ma afferma anche esplicitamente la presenza di due falde di uno stesso cono e l'illimitatezza di queste. Inoltre, come vedremo nel seguito, grazie a questa formulazione, sarà possibile ottenere tutte e tre le curve sopra citate a partire da uno stesso cono.

Come evidenziato in [6], Apollonio analizza le possibili sezioni di un cono partendo da quelle più "banali". Tra queste sono presenti i triangoli, che si ottengono tagliando il cono con un piano passante per il suo asse, e le circonferenze, ottenute sezionando il cono con un piano parallelo alla base oppure tramite una *sezione subcontraria*. Con quest'ultimo termine si intende la sezione ottenuta nel seguente modo: si consideri a partire da un cono ABC , come mostrato in Figura 1.16, un piano perpendicolare al piano di base BC e sia ABC il triangolo per l'asse generato da questo piano; si prenda ora un altro piano HK perpendicolare al piano del triangolo ABC che tagli un triangolo AHK simile ad ABC , tale che quindi $A\hat{K}H$ sia uguale a $A\hat{B}C$; la sezione HPK così ottenuta è una sezione subcontraria, la quale si dimostra essere proprio una circonferenza.

Tra le sezioni coniche non banali, egli distingue invece tre casi:

- se il piano secante il cono incontra entrambi i lati del triangolo per l'asse nella stessa falda del cono, si genera un' *ellisse*;
- se il piano secante è parallelo a uno dei lati del triangolo per l'asse si origina una *parabola*;
- se, infine, il piano secante incontra entrambi i lati del triangolo per l'asse, ma uno in una falda e uno in un'altra, l'intersezione genererà un' *iperbole*.

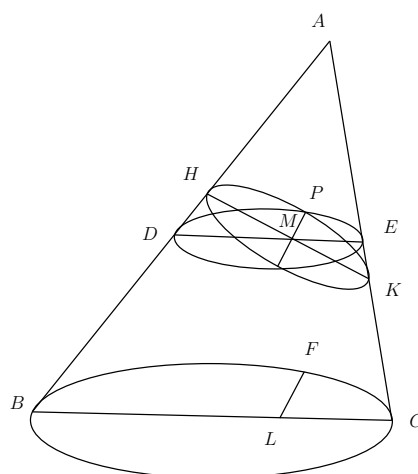


Figura 1.16: Sezione subcontraria².

Nel primo caso la curva che si viene a determinare è limitata, mentre negli altri due, grazie alla proprietà di infinitezza delle falde del cono, è illimitata.

L'origine dei nomi delle coniche, così come li conosciamo oggi, deriva da una delle proprietà che dimostrò proprio Apollonio nella sua opera: con riferimento alla Figura 1.17, egli dimostrò infatti la Proposizione 1.3.1, di seguito riportata (per la dimostrazione completa e per alcuni chiarimenti sulla terminologia si veda Appendice B).

Proposizione 1.3.1. *Dato il cono ABC di vertice A e base BC in Figura 1.17, si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati (nel nostro caso AC) del triangolo per l'asse ABC . Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM (per la definizione esatta si veda Osservazione B.1). Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che*

$$PL : PA = BC^2 : BA \cdot AC$$

allora vale

$$QV^2 = PL \cdot PV. \tag{1.6}$$

²Immagine presa da [6].

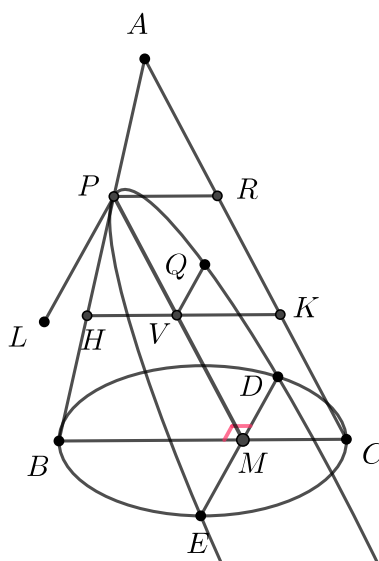


Figura 1.17: Proprietà caratteristica della parabola.

In particolare, con questa proposizione Apollonio afferma che il quadrato delle ordinate (nel nostro caso QV^2) rispetto a un diametro fissato (PM), è uguale al rettangolo avente come lati un segmento fisso (PL) e l'ascissa (PV) corrispondente all'ordinata QV . Questa operazione nella matematica greca veniva detta “applicare” un'area (QV^2) a un segmento dato (PL), e permetteva quindi di ricavare l'altezza di un rettangolo (con base data) equivalente al quadrato iniziale. Il termine *parabola* in greco significa proprio “applicare” e deriva perciò da questa proprietà caratteristica della curva.

In maniera analoga, anche i termini *ellisse*, che significa “diminuzione, mancanza”, e *iperbole*, che vuol dire “esagerazione, eccesso”, si riferiscono alla teoria dell'applicazione delle aree: in particolare, l'area del quadrato delle ordinate (QV^2) deve essere uguale a quella di un rettangolo avente come altezza l'ascissa (PV), ma come base un segmento minore (nel caso dell'ellisse) o maggiore (nel caso dell'iperbole) di PL . Quindi si può affermare che si tratta di applicazioni di un'area ad un segmento con un difetto o con un eccesso e da qui derivano i nomi attribuiti a tali curve.

Apollonio, nella sua opera, non utilizza il fuoco della parabola nella sua definizione,

né lo introduce in seguito³ benché sia molto probabile che le proprietà focali di questa curva gli fossero già note. Ad esempio, un problema di cui si occupò Diocle, più o meno contemporaneo di Apollonio, fu proprio quello di disegnare un arco di parabola, da utilizzare per la produzione di specchi ustori a profilo parabolico (particolari superfici a specchio che, poste di fronte ai raggi del sole, fanno in modo che questi ultimi convergano in un punto nel quale avviene l'accensione di un fuoco).

Poiché lo studio delle coniche, come appena visto, era argomento di interesse già a partire dall'epoca alessandrina (334-30 a.C. circa), quando queste venivano intese esclusivamente come sezioni di un cono, un'idea per disegnare un arco di parabola su un foglio poteva essere quella di utilizzare la sezione di un cono rettangolo materializzato e tagliato opportunamente in modo tale che potesse fornire uno stampo, ma nella pratica questo procedimento risulta scomodo e impreciso.

Diocle, dopo aver dimostrato che tutti i raggi paralleli all'asse della parabola sono riflessi nel fuoco, illustrò un semplice procedimento con cui ottenere i punti di un arco di parabola usando solo riga e compasso, descritto nel seguito a pagina 26. Occorre precisare, però, che la sua costruzione è eseguita per punti, ossia tracciando punto per punto il profilo della curva e non attraverso la realizzazione di una macchina matematica.

Per avere invece un esempio di macchina matematica che permetta di tracciare una parabola occorre aspettare epoche più recenti: è solo intorno al Cinquecento, infatti, che Keplero giunse, dopo un lungo rammaricarsi per non essere riuscito a trovare un procedimento meccanico per tracciare la parabola, in analogia con il metodo noto per disegnare iperbole ed ellisse in maniera semplice ed efficace, alla seguente descrizione:

«Prefissati il vertice V_1 e il fuoco F_1 della parabola, si tracci una qualunque retta u perpendicolare all'asse s (retta V_1F_1), dalla parte di F_1 . Si fissi in F_1 il capo d'un filo, la cui lunghezza sia uguale a $F_1V_1 + V_1Q_0$ (indicando con Q_0 il punto di intersezione delle rette s e u). L'altro capo Q del filo si faccia scorrere sulla u , a partire dal punto Q_0 , e simultaneamente si tenda il filo con la punta P della matita, in modo che il filo venga a disporsi (nel generico istante e a partire dalla posizione V_1 di P) lungo due

³Anche per ellisse e iperbole la dicitura fuoco non viene utilizzata ma si parla solo di «punti generati dall'applicazione» [20, p. 269].

segmenti F_1P , PQ , il secondo dei quali sia sempre parallelo all'asse s . La punta P della matita descriverà precisamente la parabola di vertice V_1 e di fuoco F_1 .» [28, p. 80]

Questo procedimento non è altro che la descrizione del funzionamento del *parabolografo a filo* (spiegato in dettaglio nella scheda illustrativa in Appendice A). Il ritardo, da parte di Keplero, nel trovare un procedimento che permettesse di tracciare meccanicamente la parabola fu dovuto all'evidente mancanza di uno dei due fuochi della curva, che erano invece presenti nell'iperbole e nell'ellisse. Procedendo per analogia con queste ultime due curve, Keplero immaginò dunque una parabola come una "curva limite intermedia" che separa ellissi da iperboli, ottenuta tramite la deformazione continua di un'ellisse di cui uno dei due fuochi è tenuto fisso e l'altro viene allontanato sempre di più, lungo l'asse che collega i due. Portando il secondo fuoco a distanza infinita dal primo, l'ellisse si apre diventando una parabola.

In seguito a questa scoperta, si progettaron poi nuovi strumenti che, sfruttando le diverse proprietà della curva, permisero di tracciare parabole o un archi di parabole, a cominciare dalla macchina proposta da Cavalieri (si veda a tal proposito la scheda illustrativa del parabolografo di Cavalieri in Appendice A).

Il paraboloide di Diocle

Il procedimento proposto da Diocle per tracciare una parabola consiste nel costruire un quadrato $AKSR$ di lato $2a$ (vedi Figura 1.18) e tracciare la sua diagonale KR . Occorre scegliere poi un punto C arbitrario sul semilato AB del quadrato. Chiamiamo M il punto di intersezione tra la diagonale KR del quadrato e la perpendicolare ad AB condotta da C . Costruiamo i punti F ed E come intersezione tra la parallela ad AK condotta da M e rispettivamente il lato AR e il lato KS . Tracciamo l'arco di circonferenza di centro A e raggio pari ad AF , che incontra il segmento CM in H . Da quest'ultimo punto tracciamo infine la parallela a ME , che incontra KS in I .

Si ha per costruzione

$$AH = AF = MC \quad \text{e} \quad ME = HI.$$

Ma in particolare

$$MC = ME$$

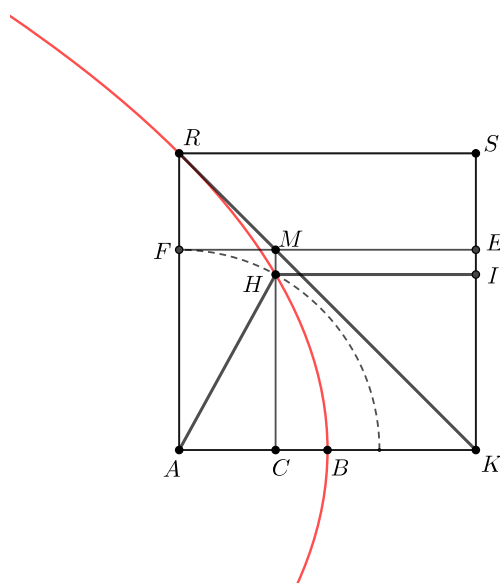


Figura 1.18: Parabolografo di Diocle.

in quanto per costruzione $MCKE$ è un quadrato dato che \hat{CKM} misura 45° . Quindi per transitività

$$AH = HI.$$

Ponendo quindi le grandezze indeterminate $BC = x$ e $CH = y$, si ottiene

$$AH^2 = y^2 + (a - x)^2 \quad (1.7)$$

in quanto AH è l'ipotenusa del triangolo rettangolo ACH di cateti $AC = a - x$ e $CH = y$. Inoltre vale

$$HI^2 = (a + x)^2. \quad (1.8)$$

Eguagliando infine le equazioni (1.7) e (1.8), otteniamo proprio la proprietà caratteristica di una parabola (con fuoco in A e direttrice nella retta KS)

$$y^2 = 4ax.$$

Si verifica facilmente, a questo punto, che anche il punto R appartiene alla curva e che il punto B è proprio il vertice della parabola.

1.3.2 Dal Seicento al teorema di Kempe

L'uso di strumenti meccanici per tracciare coniche e altre curve, come abbiamo visto, è diffuso fin dall'antichità, ma ha una straordinaria fioritura a partire dal Seicento.

È solo a partire dal 1637 infatti, con la pubblicazione de “*La Géométrie*” di Descartes [12], che venne elaborata una vera e propria geometria di tipo “organico”, ossia una geometria degli strumenti utile nella risoluzione di problemi. Nella sua opera, Descartes si pone due problemi fondamentali: egli si chiede infatti quali siano le linee che possono essere accolte in geometria e si ripropone di individuare l'insieme delle curve che si possono tracciare per mezzo di sistemi articolati.

Nello specifico, egli distinse le curve in *geometriche* (quelle che noi oggi chiamiamo *algebriche*) e *meccaniche* (oggi classificate come *trascendenti*), senza però presentare un criterio univoco di selezione, ma rifacendosi ai diversi modi in cui la curva viene descritta: talvolta tramite equazione, altre volte per mezzo di strumenti rigidi, strumenti con fili oppure per punti. Egli individuò come curve ammissibili in geometria quelle *geometriche*, da lui definite come quelle curve descrivibili tramite un'equazione o tramite un movimento continuo o più movimenti che si susseguono l'un l'altro, ciascuno determinato dal precedente.

Quindi, accanto alla nuova descrizione di curve per mezzo di equazioni, Descartes accolse la tradizionale descrizione di curve costruite tramite macchine matematiche, nonostante l'uso di tracciatori fosse per lui essenzialmente teorico, anticipando in un certo senso l'intuizione di A.B. Kempe, il quale nel 1876 dimostrò che effettivamente i due tipi di descrizioni si equivalgono (vedi Sezione 1.3.3).

L'iperbolografo di Descartes, nel seguito descritto, costituisce un primo esempio di strumento tracciatore analizzato nei dettagli nel secondo libro de “*La Géométrie*”.

Iperbolografo di Descartes

Il sistema articolato, come illustrato nella Figura 1.19, consiste di un'asta AK vincolata a scorrere lungo una scanalatura rettilinea r , trascinando con sé sul piano da disegno l'asta scanalata KP e il perno fisso L , posto ad una distanza da K pari a b . Al perno A è poi vincolata un'asta AG di lunghezza fissa a . In L è inoltre agganciata un'altra asta

scanalata LG costretta a scorrere per il perno G , fissato sul piano da disegno esternamente alla scanalatura r . Quando KA trasla lungo r , LG scorre attraverso G , mentre l'asta KP trasla formando con r un angolo θ di ampiezza costante. Una punta scrivente posta nell'intersezione P tra LG e KP traccia un ramo di iperbole. Vediamo perché.

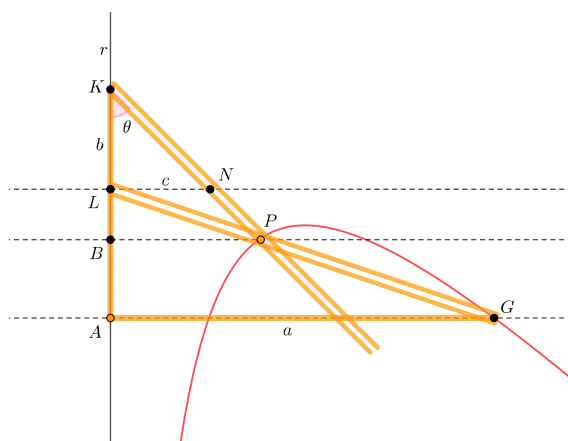
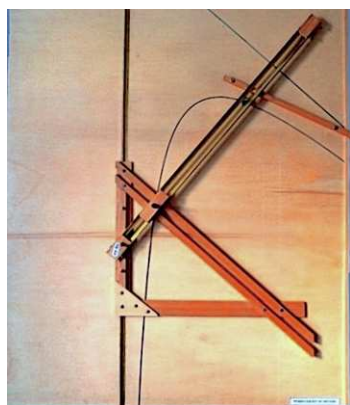


Figura 1.19: Fotografia e immagine virtuale dell'iperbolografo di Descartes⁴.

Chiamiamo la distanza tra L e il punto N di intersezione tra KP e la parallela ad AG per L con c . Poniamo quindi le quantità note

$$AG = a, \quad KL = b, \quad LN = c$$

e quelle indeterminate

$$AB = y, \quad BP = x.$$

Descartes analizza il funzionamento della macchina confrontando i triangoli KLN e KBP , simili in quanto hanno l'angolo θ in comune e gli angoli $K\hat{L}N$ e $K\hat{B}P$ retti per costruzione. Dalla similitudine si ricava quindi

$$LN : KL = PB : BK \quad \Rightarrow \quad BK = \frac{KL \cdot BP}{LN} = \frac{b \cdot x}{c}$$

e ancora

$$BL = BK - LK = \frac{b \cdot x}{c} - b \quad \text{e} \quad AL = BA + BL = y + \frac{b \cdot x}{c} - b.$$

⁴Fotografia presa dal sito: www.macchinematematiche.org

Confrontando inoltre i triangoli LBP e LGA , simili in quanto hanno l'angolo \hat{ALG} in comune e gli angoli \hat{LBP} e \hat{LAG} retti per costruzione, si ottiene

$$BP : LB = AG : AL \quad \Rightarrow \quad x : \left(\frac{b \cdot x}{c} - b \right) = a : \left(y + \frac{b \cdot x}{c} - b \right).$$

Svolgendo i calcoli della proporzione si ottiene proprio l'equazione della curva descritta dal punto P

$$x^2 = x(a + c) - \frac{c}{b}xy - ac$$

che si dimostra facilmente essere un'iperbole, in quanto, considerando le matrici dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2b} & -\frac{a+c}{2} \\ \frac{c}{2b} & 0 & 0 \\ -\frac{a+c}{2} & 0 & ac \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c}{2b} \\ \frac{c}{2b} & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che

$$\det A = -ac \cdot \left(\frac{c}{2b} \right)^2 \neq 0$$

cioè la curva è non degenera, e inoltre che

$$\det B = -\frac{c^2}{4b^2} < 0$$

cioè la curva è proprio un'iperbole.

Un altro sistema articolato ripreso nell'opera "*La Géométrie*" di Descartes, anche se progettato molti anni prima del 1637, è il cosiddetto compasso di Descartes. Esso risolve il problema, da tempo discusso e analizzato, di come inserire un certo numero di medi proporzionali tra due corde di lunghezza data. Uno dei primi metodi proposti fu sicuramente quello di Euclide, descritto nella Sezione 1.3.1 a pagina 17, che prevedeva l'utilizzo dei soli strumenti riga e compasso. Descartes utilizza invece uno strumento più elaborato composto da diverse aste, consapevole però del fatto che per funzionare nella pratica dovrebbe possedere membri "infinitamente sottili". Per questo motivo possiamo riconoscere la sola valenza teorica dello strumento.

Il compasso di Descartes

Sia YZ un'asta vincolata lungo una scanalatura r del piano, come illustrato in Figura 1.20. All'estremo Y è collegata un'asta YX libera di muoversi ampliando o riducendo l'angolo $Z\hat{Y}X$. A queste due aste è collegata una serie di sottili asticelle (BC , DC , DE , ecc.), in modo che quando lo strumento è completamente chiuso (vale a dire quando YX va a coincidere con YZ), ogni punto di YX si vada a sovrapporre al punto A . Le asticelle sono disposte in maniera tale che, all'apertura dello strumento, BC incontra l'asta YX in B ad angolo retto e spinga il regolo CD verso Z lungo YN , formando con quest'ultima un angolo retto. In maniera analoga, CD spinge DE , parallelo a BC . E così via. In questo modo, ad esempio BC è il medio proporzionale tra YC e CD , che a sua volta è medio proporzionale tra YD e DE , e così via.

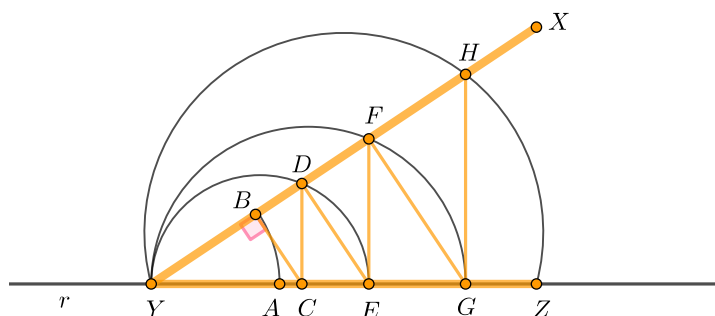


Figura 1.20: Immagine virtuale del compasso di Descartes.

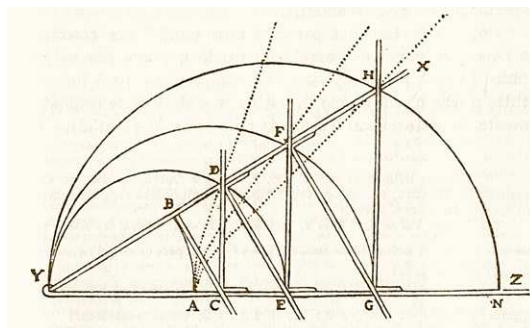


Figura 1.21: Disegno di Descartes⁵.

Proprio questi riferimenti continui di Descartes a strumenti meccanici favorirono la stesura successiva di numerosi trattati in cui vennero studiati e progettati diversi tracciatori per vari tipi di curve algebriche, rigorosamente messi in relazione con l'equazione che rappresentava la curva stessa. L'idea generale consisteva nell'estrapolare le proprietà geometriche caratterizzanti la curva in questione e ricavare uno strumento in grado di tracciarla, almeno in una regione limitata di piano. Famosi furono i trattati scritti da B. F. Cavalieri, F. van Schooten, Isaac Newton, ecc.

Sviluppi notevoli riguardo la teoria dei sistemi articolati furono inoltre incentivati dall'invenzione del motore a vapore avvenuta ad opera di Thomas Newcomen nel 1722. A partire da questa, infatti, un problema che nacque spontaneamente fu quello di trovare un meccanismo che permettesse di trasformare un movimento periodico rettilineo in un movimento circolare. Per una soluzione rigorosa a questo problema occorrerà aspettare il 1864 con l'invenzione dell'inversore di Peaucellier (vedi pagina 34).

Nel Diciottesimo secolo però, il parallelogramma di Watt costituì la prima (e tuttora la più efficiente dal punto di vista pratico) soluzione approssimativa ad un problema tecnologico strettamente collegato: quello, cioè, di guidare l'asta del pistone di una macchina a vapore in modo rettilineo alternato.

Il sistema articolato in questione consiste in una serie di tre aste (vedi Figura 1.22), due più lunghe e di misura uguale tra loro (l_1 e l_3), connesse entrambe a una più piccola barra centrale l_2 . Gli estremi esterni A e B delle barre più lunghe sono impernati in posizioni fisse, mentre i due giunti tra le tre barre sono liberi di ruotare e permettono ad un punto P posto al centro della barra centrale di descrivere approssimativamente una linea retta. In realtà quella che descrivono è la traiettoria della cosiddetta *curva di Watt*, una particolare lemniscata, avente cioè la forma di un "infinito" o di un "otto rovesciato".

Questo strumento trova tuttora applicazione in numerosi ambiti, prima di tutto quello automobilistico: è utilizzato infatti nei pistoni a doppio effetto e nelle sospensioni delle automobili, grazie alla sua semplicità di realizzazione e la notevole durata nel tempo.

Dal punto di vista teorico, il problema scaturito dall'invenzione del motore a vapore si tradusse nel cosiddetto problema della guida rettilinea: quest'ultimo consisteva infatti

⁵Immagine presa da [12].

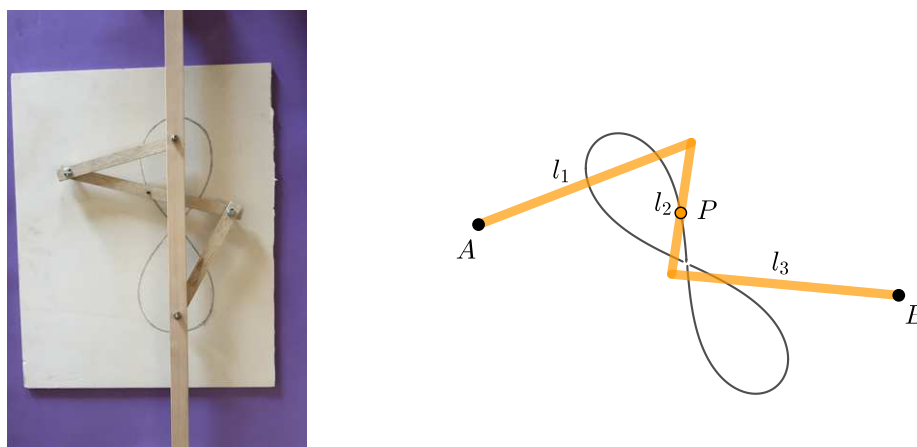


Figura 1.22: Fotografia e immagine virtuale del parallelogramma di Watt.

nel riuscire a costruire «uno strumento (un compasso “rettilineo”) in grado di forzare uno dei suoi punti a percorrere una traiettoria rettilinea» [4, p. 15].

Incentivati dal fatto che, nella seconda metà del Diciannovesimo secolo, fu scoperta l'irrisolvibilità di numerosi problemi da tempo studiati (come la quadratura del cerchio, ecc.), molti matematici si convinsero che anche il problema della guida rettilinea non avesse una soluzione esatta. Era di questa opinione anche Chebyshev, matematico e statistico russo, che proprio partendo da questa riflessione introdusse, a metà dell'Ottocento circa, i cosiddetti *polinomi di Chebyshev*, che poi ebbero numerose applicazioni ad esempio in ambito numerico per l'approssimazione di funzioni.

Questa rimase la situazione fino al 1864, anno a cui viene convenzionalmente fatta risalire la nascita della storia dei sistemi articolati. Fu proprio in questa data che Charles-Nicolas Peaucellier, un ufficiale della marina francese, pubblicò una lettera dal titolo “*Lettre au redacteur des Nouvelles Annales de Mathematiques*” in cui dichiarò ufficialmente di aver trovato una soluzione al problema in questione, senza però fornire ulteriori dettagli.

Ci sono poi diverse opinioni su ciò che avvenne in seguito, a causa di una serie di controversie avvenute tra matematici russi e anglo-francesi.

Di fatto, però, nel 1871 Y.T. Lipman Lipkin, matematico lituano allievo di Chebyshev, pubblicò un documento sotto ricompensa governativa dal titolo “*Dispositif articule pour la transformation rigoureuse du mouvement circularie en mouvement rectiligne*” in cui fornì una soluzione dettagliata al problema.

Appena due anni più tardi, nel 1873, Peaucellier rese pubblica un'opera, "*Note sur une question de geometrie de compas*", contenente la descrizione del suo inversore di Peaucellier, sistema articolato identico a quello precedentemente descritto da Lipkin, che permette di realizzare una linea retta a partire da un movimento di tipo circolare.

Inversore di Peaucellier

L'inversore di Peaucellier è un sistema articolato che sfrutta per funzionare una particolare trasformazione geometrica piana: l'*inversione circolare*. Quest'ultima è una funzione che, data una circonferenza c di centro O e raggio r (vedi Figura 1.23), associa ad ogni punto P del piano distinto da O il punto P' , appartenente alla semiretta uscente da O e passante per P in modo che valga la relazione

$$OP \cdot OP' = r^2.$$

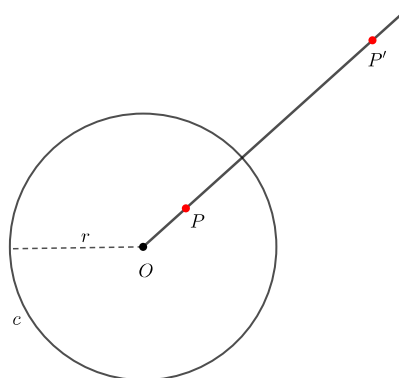


Figura 1.23: Inversione circolare.

In questo modo, questa trasformazione manda circonferenze in rette e rette in circonferenze. In particolare:

- ogni retta passante per il centro O della circonferenza viene trasformata dall'inversione in sé stessa; ogni retta che non passa per O viene invece trasformata in una circonferenza passante per O ;

- ogni circonferenza passante per O viene trasformata in una retta non passante per O ; ogni circonferenza non passante per O viene trasformata in un'altra circonferenza non passante per O .

Nella pratica, la macchina consiste di 6 aste (vedi Figura 1.24), tali che $AD = AB = a$ e $DE = DF = BF = BE = b$, che formano un rombo articolato $DEBF$ collegato ad un perno A fissato nel piano per mezzo delle aste AB e AD . Il meccanismo funziona

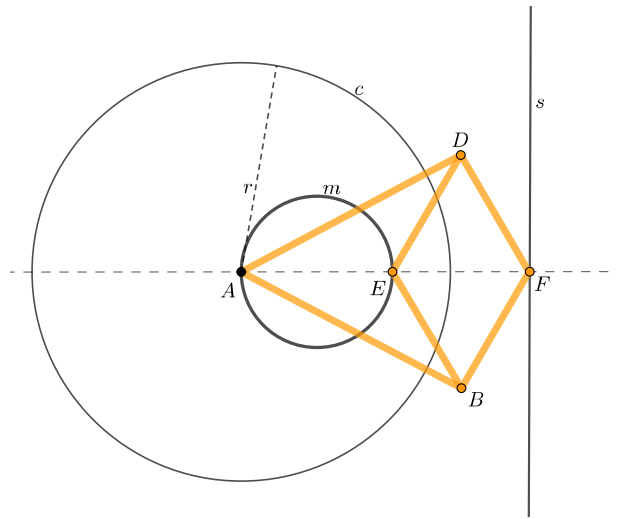


Figura 1.24: Immagine virtuale dell'inversore di Peaucellier.

per mezzo di una manovella m , grazie alla quale il punto E è vincolato a muoversi su una circonferenza passante per il perno A , mentre i perni A , E e F rimangono sempre allineati sulla bisettrice dell'angolo $\hat{B}AD$. Durante il movimento il perno F percorre un segmento di retta (retta s in Figura 1.24). Vediamo perché.

Tracciamo la circonferenza di centro D e raggio $DF = b$ e chiamiamo rispettivamente T e S i punti di intersezione tra la circonferenza e AD e tra la circonferenza e il prolungamento di AD (vedi Figura 1.25).

Applicando il teorema delle secanti otteniamo

$$AS : AF = AE : AT$$

cioè

$$AE \cdot AF = AT \cdot AS = (AD - DT) \cdot (AD + DS) = (a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2. \quad (1.9)$$

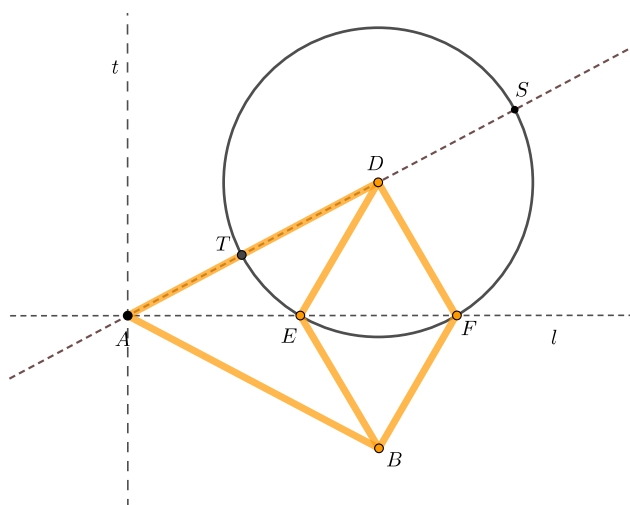


Figura 1.25

Possiamo concludere che i punti E e F si corrispondono secondo un'inversione circolare di centro A e raggio $r = \sqrt{a^2 - b^2}$. Di conseguenza, al muoversi di E lungo la circonferenza passante per A , il punto F si muove lungo un segmento.

Grazie al sistema articolato appena descritto, anche la retta si aggiunge all'insieme delle curve tracciabili con l'uso di macchine matematiche, riempiendo così una lacuna che traeva le sue origini nell'antichità.

Immediatamente dopo questi risultati, nel corso dell'Ottocento, diversi matematici inglesi cominciarono ad interessarsi ai sistemi articolati: tra questi spiccano Sylvester, Clifford, Roberts, Cayley, Hart e Kempe, che si occuparono della descrizione meccanica di particolari curve di vario grado, nonché della produzione di numerosi strumenti che realizzano localmente trasformazioni particolari (come traslazione, simmetria centrale, rotazione, simmetria assiale, ecc.). In particolare, Hart e Kempe trovarono soluzioni alternative ed interessanti riguardo al problema della guida rettilinea (si veda Appendice A per la scheda illustrativa sulla *guida rettilinea* di Kempe).

1.3.3 Dal teorema di Kempe ai giorni nostri

Il problema proposto da Descartes di individuare l'insieme delle curve che si possono tracciare per mezzo di sistemi articolati rimase aperto fino al 1876, quando A.B. Kempe, un cinematico inglese, fornì in un documento intitolato “*On a general method of describing plane curves of the n th degree by linkwork*” una prova costruttiva del fatto che un sistema articolato possa essere metodicamente costruito per tracciare una qualsiasi curva algebrica. Si chiude così il problema aperto da Descartes, in un momento in cui curve ed equazioni, ormai completamente identificate all'interno della geometria algebrica, hanno abbandonato ogni riferimento ai tracciatori sia pratici che teorici.

Teorema 1.3.2 (Teorema di Kempe). *Data una curva algebrica piana Γ di grado n e un qualsiasi punto P su di essa, esiste un sistema articolato che traccia Γ in un intorno di P .*

Per la dimostrazione del teorema sono necessari quattro Lemmi, di seguito dimostrati, ognuno dei quali riguarda l'azione elementare di un sistema articolato particolare.

Lemma 1.3.3 (Duplicatore di angoli). *A partire da un angolo dato, è possibile costruire per mezzo di un sistema articolato un angolo di ampiezza doppia.*

Dimostrazione. Si consideri l'antiparallelogramma $OABC$ avente $OA = BC$ e $BA = OC$ (vedi Figura 1.26).

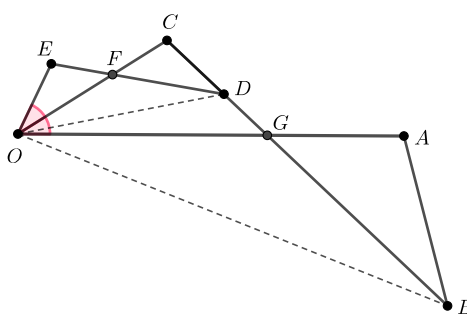


Figura 1.26: Duplicatore di angoli.

Si costruisca un segmento OE che sia il terzo proporzionale dopo OA e OC , cioè

$$OA : OC = OC : OE. \quad (1.10)$$

Si costruisca l'antiparallelogramma $OCDE$ avente $OC = ED$ e $OE = CD$: esso è simile a $OABC$ per costruzione. Infatti, considerando i triangoli OCD e OCB , si può affermare che

- i lati $CB = OA$ e OC sono in proporzione con i lati OC e $CD = OE$ per (1.10).
- l'angolo $\hat{O}CD$ è in comune.

Quindi i due triangoli sono simili. In particolare $\hat{C}OD = \hat{C}BO$ e i lati OD e OB sono in proporzione come in (1.10).

Inoltre per definizione di antiparallelogramma sappiamo che i triangoli OEF e FCD sono congruenti, come anche COG e GAB . Quindi per somma e differenza di triangoli congruenti, possiamo affermare che vale la seguente relazione tra i triangoli

$$OED = OCD \sim OCB = OBA.$$

In particolare

$$\hat{A}OB = \hat{C}BO = \hat{E}DO = \hat{C}OD. \quad (1.11)$$

Allora anche i triangoli OBG e OFD sono simili, in quanto hanno

- $\hat{C}BO = \hat{E}DO$ per (1.11).
- $\hat{A}OB = \hat{C}OD$ per (1.11).

Quindi, per differenza di triangoli simili, vale $FCD = EOF \sim COG = GAB$.

Di conseguenza, gli antiparallelogrammi $OABC$ e $OCDE$ sono simili per somma di triangoli simili

$$OABC = COG + GAB \sim EOF + FCD = OCDE.$$

In conclusione, vale l'uguaglianza tra gli angoli $\hat{A}OC = \hat{C}OE$. Perciò $\hat{A}OE = 2\hat{A}OC$.

□

Osservazione 1. È opportuno notare che, nella dimostrazione precedente, se l'angolo $\hat{A}OE$ è dato, il sistema articolato costruito è in grado di tracciare la bisettrice OC .

Viceversa, se è data la retta OC , lo strumento può servire a trovare il simmetrico di un

punto rispetto a tale retta. In particolare infatti permette, date OC e un punto generico A , di trovare il segmento OE , sul prolungamento del quale è situato il simmetrico di A rispetto a OC .

Lemma 1.3.4 (Triplicatore di angoli). *A partire da un angolo dato, è possibile costruire per mezzo di un sistema articolato un angolo di ampiezza tripla.*

Dimostrazione. Sia $OABC$ un antiparallelogramma. Nel Lemma 1.3.3 abbiamo visto come sia possibile costruire l'antiparallelogramma $OCDE$ a partire da $OABC$. Ripetendo lo stesso procedimento, è possibile a partire da $OCDE$ ottenere l'antiparallelogramma $OEFG$ simile al primo (vedi Figura 1.27).

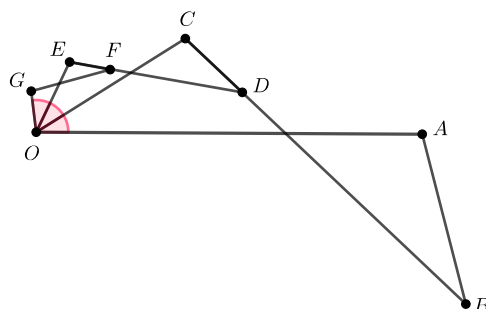


Figura 1.27: Triplicatore di angoli.

Si ricava quindi che

$$\widehat{AOC} = \widehat{COE} = \widehat{EOG},$$

da cui,

$$\widehat{AOG} = 3\widehat{AOC}.$$

□

Osservazione 2. Il procedimento analizzato nei Lemmi 1.3.3 e 1.3.4 può essere iterato n volte al fine di ottenere un n -plicatore (o n -settore) di angoli.

Lemma 1.3.5 (Addizionatore di angoli). *A partire da due angoli dati, è possibile costruire per mezzo di un sistema articolato un angolo di ampiezza pari alla somma dei primi due.*

Dimostrazione. Siano $X\hat{O}Y$ e $X\hat{O}Z$ due angoli noti. Si costruisca, utilizzando il Lemma 1.3.3, la bisettrice OB di $Y\hat{O}Z$ e il punto T simmetrico di X rispetto a OB (vedi Figura 1.28). Per differenza di angoli congruenti

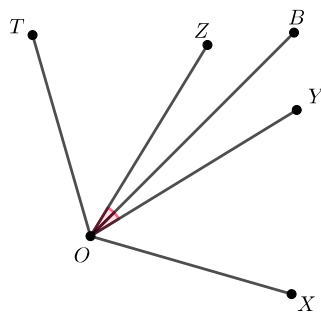


Figura 1.28: Addizionatore di angoli.

$$X\hat{O}Y = Z\hat{O}T,$$

da cui

$$X\hat{O}T = X\hat{O}Z + Z\hat{O}T = X\hat{O}Z + X\hat{O}Y.$$

□

Lemma 1.3.6 (Addizionatore di vettori). *A partire da due vettori dati, è possibile costruire per mezzo di un sistema articolato il vettore somma dei primi due.*

Dimostrazione. Siano OV e OW i vettori dati.

Costruendo la coppia di pantografi per traslazione (vedi Sezione 1.2 a pagina 14) $OBCEVD$ e $BWFTEC$ (vedi Figura 1.29) è possibile individuare il vettore somma come

$$OV + OW = OT.$$

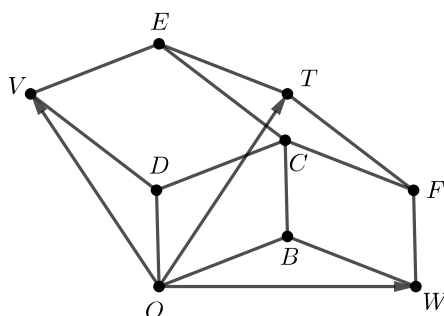


Figura 1.29: Addizionatore di vettori.

□

Procediamo ora con la dimostrazione vera e propria del Teorema di Kempe.

Dimostrazione del Teorema di Kempe 1.3.2. Sia $F(x, y) = 0$ l'equazione di una generica curva Γ di grado n e sia P un punto su di essa di coordinate (x, y) .

Si costruisca il parallelogramma articolato $OAPB$ (vedi Figura 1.30), dove

$$OA = BP = a$$

$$OB = AP = b$$

$$\widehat{XOA} = \alpha$$

$$\widehat{XOB} = \beta.$$

Segue che

$$\begin{cases} x = a \cos \alpha + b \cos \beta \\ y = a \cos (\alpha - \pi/2) + b \cos (\beta - \pi/2) \end{cases}.$$

Sostituendo questi valori nel polinomio $F(x, y)$, è possibile sviluppare le potenze di coseni in coseni di angoli multipli degli argomenti e convertire i prodotti di coseni in coseni di somme e differenze, ottenendo quindi uno sviluppo del tipo:

$$F(x, y) = \sum_i A_i \cos (r_i \alpha \pm s_i \beta \pm \epsilon_i) + C$$

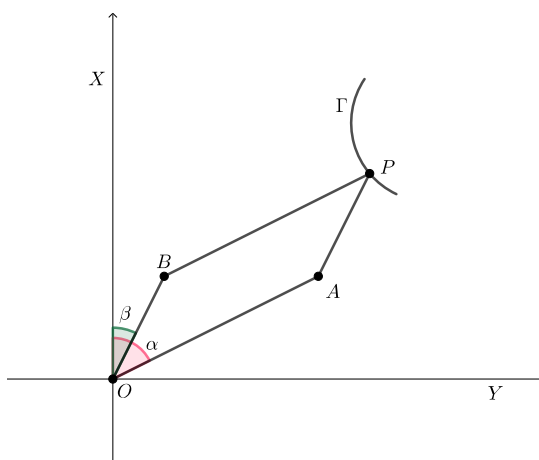


Figura 1.30

dove $A_i > 0$ e C costanti, r_i e s_i interi positivi e $\epsilon_i \in \{\pi/2; 0\}$.

Ora, servendoci dei Lemmi 1.3.4 (Moltiplicatore di angoli iterato n volte) e 1.3.5 (Addizionatore di angoli), a partire da α e da β , possiamo costruire per ogni i il segmento OC_i che ha lunghezza A_i e forma un angolo $C_i\hat{O}X$ di ampiezza pari a $r_i\alpha \pm s_i\beta \pm \epsilon_i$. Osserviamo che la proiezione di OC_i sull'asse OX vale proprio $A_i \cos(r_i\alpha \pm s_i\beta \pm \epsilon_i)$. Tramite il Lemma 1.3.6 (Addizionatore di vettori) è poi possibile costruire un sistema articolato che determini un vettore OS tale che

$$OS = \sum_i OC_i.$$

Ma poiché la proiezione su OX di $\sum_i OC_i$ è

$$\sum_i A_i \cos(r_i\alpha \pm s_i\beta \pm \epsilon_i) = F(x, y) - C$$

tale è anche la proiezione di OS su OX , cioè la distanza di S da OY .

Ora, poiché per ipotesi $P \in \Gamma$, le sue coordinate soddisfano l'equazione

$$F(x, y) = 0$$

il che significa che la distanza di S da OY è esattamente pari a $|C|$, o, in altri termini, che S descrive una retta r parallela all'asse OY di equazione

$$x + C = 0.$$

Viceversa, se S è forzato a descrivere una retta r di equazione $x + C = 0$, allora il punto P descriverà la curva Γ di equazione $F(x, y) = 0$, proprio come richiesto.

Per completare la dimostrazione, basta quindi osservare che è sempre possibile forzare un punto S a seguire la traiettoria di una retta r , ad esempio utilizzando uno strumento come l'inversore di Peaucellier (vedi Sezione 1.3.2 a pagina 34). \square

Lo studio dei sistemi articolati astratti e delle loro realizzazioni è stato poi ripreso a partire dagli anni Settanta e collegato allo studio delle varietà algebriche e delle sottovarietà immerse in uno spazio euclideo da parte di W. Thurston. La nuova teoria, completamente algebrizzata e dettagliatamente descritta nell'articolo [17] "*Universality theorems for configuration spaces of planar linkages*" di M. Kapovich e J. Millson del 2002, ripercorre la struttura della dimostrazione condotta da Kempe, ma introduce piccole correzioni al fine di evitare alcune debolezze intrinseche, dovute ad alcune configurazioni degeneri.

In particolare, il problema principale con la prova di Kempe è che funziona correttamente solo per un certo sottoinsieme dello spazio dei moduli e vicino a certe configurazioni degeneri lo spazio dei moduli si divide in diverse componenti, così che il sistema articolato non riesce a descrivere la funzione polinomiale desiderata. Il metodo usato da Thurston per ovviare a questo problema, in parole povere, consiste nel rendere "rigidi" i parallelogrammi articolati utilizzati.

Un ulteriore sviluppo della teoria dei sistemi articolati ai giorni nostri riguarda le applicazioni robotiche e la ricerca dei migliori algoritmi che possano consentire il movimento di un robot in uno spazio contenente ostacoli. In particolare, il problema del disegno di archi di curve algebriche è diventato il problema del vincolo di un punto di un robot a seguire una traiettoria data in uno spazio (per ulteriori approfondimenti si veda [16]).

Capitolo 2

Quadro teorico a supporto dell'indagine

Nel seguente capitolo viene analizzato il quadro teorico che farà da supporto alla successiva indagine scolastica. Per prima cosa, ci occuperemo di analizzare i diversi aspetti, in particolare quello cognitivo, che entrano in gioco nei processi di pensiero imputati a portare dalla produzione di congetture alla formulazione di dimostrazioni in geometria. Inquadreremo, a questo proposito, l'ambiente di lavoro e faremo alcune ipotesi teoriche preliminari, in seguito analizzeremo i vari stadi in cui viene suddiviso il processo di risoluzione di un problema geometrico, secondo Arzarello *et al.* [1] e Pedemonte [24], e ci focalizzeremo sul costrutto teorico dell'*unità cognitiva*.

Successivamente, verrà introdotto l'ambiente di lavoro nel quale abbiamo operato, quello cioè del *laboratorio di matematica*, definito e descritto in tutte le fasi che lo compongono, con particolare attenzione alle dinamiche che ne caratterizzano l'efficacia didattica.

Per concludere, nell'ultima sezione, verrà presa in considerazione la valenza didattica della *manipolazione di oggetti concreti* e saranno analizzati due costrutti teorici importanti per la progettazione di attività incentrate sull'interazione studente-macchina: la *mediazione semiotica* e l'*interiorizzazione*, secondo l'ottica vigotskijana.

I contenuti di questo capitolo fanno riferimento a [1, 2, 5, 7, 11, 23].

2.1 Congettare e dimostrare

Una *teoria matematica* può essere definita analizzando le sue componenti caratteristiche: tra queste annoveriamo le nozioni primitive, le definizioni, i postulati, le regole di deduzione logica e le affermazioni dimostrate come vere. Le componenti caratteristiche dipendono da un lato dal periodo storico in cui viene formulata la teoria, dall'altro dalle assunzioni epistemologiche riguardanti la teoria stessa e il campo della matematica a cui si riferiscono. In questo senso possiamo citare l'esempio dei fondamenti della Geometria Euclidea prima e dopo Hilbert, il quale ha rivoluzionato il metodo usato da Euclide negli "*Elementi*" producendo una formulazione rigorosamente assiomatizzata della teoria.

All'interno di una teoria matematica giocano un ruolo molto importante i *teoremi*: Mariotti [21] definisce un teorema come un'affermazione seguita da una dimostrazione, il tutto facente parte di una specifica teoria. Secondo questa definizione vengono considerati differenti i teoremi aventi lo stesso enunciato ma prove diverse, che possono riferirsi ad assiomi e regole d'inferenza diversi.

In questo quadro, ci interessa identificare per quali teoremi (nel senso di Mariotti) possono essere facilmente attivati i processi cognitivi che hanno come obiettivo quello di *argomentare e dimostrare*. Habermas [15] affronta la complessità delle pratiche discorsive in psicologia introducendo tre costrutti teorici che verranno poi riadattati dal punto di vista dell'educazione matematica. Essi sono:

1. la *razionalità epistemologica*, che riguarda la conoscenza messa in gioco e la risposta a domande sul "perché è vero" un certo fatto in un determinato contesto culturale;
2. la *razionalità teleologica*, che concerne l'azione, gli obiettivi e le strategie per raggiungerli;
3. la *razionalità comunicativa*, che riguarda la comunicazione e le relative scelte intenzionali attuate in un determinato contesto sociale su un determinato argomento.

L'adattamento dell'analisi di Habermas sul comportamento razionale nell'educazione matematica, secondo Boero e Planas [8], può essere riassunto nei seguenti tre punti:

1. l'individuazione di criteri per valutare la validità di affermazioni all'interno di una teoria e la loro dipendenza dal periodo storico, dai domini matematici, dalle istituzioni e dall'aspetto culturale;
2. la ricerca di strategie di problem solving che possono essere adottate per raggiungere l'obiettivo di dimostrare, anche servendosi di analogie, similitudini e così via. In particolare, strategie ed esplorazione non sono vincolate all'interno del confine di una teoria di riferimento;
3. la scelta e l'uso di adeguati mezzi di comunicazione per la dimostrazione all'interno di un determinato contesto.

Si viene a delineare in questo modo la cosiddetta “*cornice di razionalità*”, utilizzata per mettere in evidenza il sistema di vincoli epistemologici, strategie e forme di comunicazione e che funziona come riferimento per argomentare e dimostrare all'interno di una teoria matematica. Alla luce di questo quadro teorico generale, nel seguito saranno descritti due modelli che permetteranno di entrare più nello specifico nell'analisi dei processi risolutivi in geometria.

2.1.1 Modalità di ragionamento nei processi risolutivi propri della geometria

Lo scopo del percorso proposto in questa tesi è quello di esplorare da vicino i processi di ragionamento che vengono messi in atto durante la risoluzione di problemi geometrici, attraverso la realizzazione di un laboratorio organizzato secondo attività mirate a questa investigazione. Per svolgere tale indagine si farà riferimento al modello proposto da Arzarello, Olivero, Paola e Robutti [1] per l'analisi dei processi di pensiero che portano dalla formulazione di una congettura geometrica, attraverso l'esplorazione, alla loro validazione finale, che comprende i seguenti punti, strettamente interconnessi tra loro:

1. *controllo (o esplorazione) ascendente*: il soggetto, partendo dall'analisi della figura o dell'artefatto, cerca fra le sue conoscenze teoriche quelle che meglio si prestano al caso in questione (esplorazione verticale dalla pratica alla teoria);

2. *selezione*: l'individuo produce la congettura a seguito del processo di esplorazione precedente;
3. *abduzione*: tipo di ragionamento che permette di giungere a una conclusione finale, osservando un certo fatto e combinandolo con una conoscenza o regola generale. Si distingue dalla *deduzione* che, date la regola generale e il caso specifico, porta ad un risultato che rappresenta semplicemente l'esplicitazione di ciò che era già implicito nelle premesse, e dall'*induzione* che invece consente di ipotizzare una regola generale, basandosi sull'assunzione che determinate proprietà osservate in un fenomeno continuano a manifestarsi in maniera regolare. Un esempio esplicativo è fornito dal filosofo statunitense Peirce [25] ed è presentato nella Tabella 2.1.

Deduzione	<p><i>a.</i> Tutti i fagioli del sacco sono bianchi (regola)</p> <p><i>b.</i> Questi fagioli appartengono al sacco (caso)</p> <p>\Rightarrow <i>c.</i> Questi fagioli sono bianchi (risultato)</p>
Induzione	<p><i>c.</i> Questi fagioli sono bianchi (risultato)</p> <p><i>b.</i> Questi fagioli appartengono al sacco (caso)</p> <p>\Rightarrow <i>a.</i> Tutti i fagioli del sacco sono bianchi (regola)</p>
Abduzione	<p><i>a.</i> Tutti i fagioli del sacco sono bianchi (regola)</p> <p><i>c.</i> Questi fagioli sono bianchi (risultato)</p> <p>\Rightarrow <i>b.</i> I fagioli appartengono al sacco (caso)</p>

Tabella 2.1: Esempio di deduzione, induzione e abduzione.

4. *controllo (o esplorazione) discendente*: è presente quando il soggetto, avendo già prodotto una congettura in forma ipotetica, usa le sue conoscenze e l'analisi della

figura o dell'artefatto per validarla (esplorazione verticale dalla conoscenza teorica a quella pratica);

5. *distanziamento locale*: il soggetto rilegge il prodotto della sua elaborazione da un punto di vista distaccato e produce concatenazioni logiche locali (relative quindi a singoli passaggi);
6. *distanziamento globale*: l'individuo riorganizza le concatenazioni logiche locali in una struttura organica, selezionando ciò che risulta significativo al fine di ottenere la dimostrazione vera e propria.

Le modalità appena descritte sono continuamente presenti in attività di tipo congettura-dimostrazione e si alternano più volte lungo tutto il processo: tipicamente si passa dal controllo ascendente ad uno discendente tramite ragionamenti di abduzione, i quali sono strettamente necessari per formulare la congettura nella forma ipotetica di “*se... allora...*”. Il distanziamento del soggetto, inoltre, che può essere locale o globale a seconda che ci si riferisca ad un singolo enunciato o a concatenazioni di questi ultimi, evidenzia il passaggio da un tipo di ragionamento abduttivo a uno di tipo deduttivo, ed è seguito poi da successive esplorazioni di verifica.

Tutte le azioni descritte in questo modello possono trovare spazio ed essere contestualizzate all'interno di un altro modello, che analizza più in generale il processo che permette di giungere alla risoluzione di un problema di tipo geometrico, attraverso la produzione di una congettura e di una successiva dimostrazione. Esso viene descritto nella tesi di dottorato di B. Pedemonte [24], in cui si identificano quattro fasi del processo, le quali possono risultare a volte implicite e declinano all'interno del ragionamento matematico un modello argomentativo più generale dovuto a Toulmin del 1958 [27]. Esse sono:

1. Fase argomentativa di produzione della congettura.
2. Fase di stabilizzazione della formulazione della congettura.
3. Fase di costruzione della dimostrazione.
4. Fase di stabilizzazione della redazione della dimostrazione.

Può accadere, a volte, che la produzione della congettura sia immediata poiché basata sull'intuizione o sulla percezione e questo può rendere la fase 3 di costruzione della dimostrazione più complessa. Infatti, proprio il carattere immediato e intuitivo di alcuni problemi non consente un'elaborazione delle relazioni geometriche implicate, rendendo così necessaria una nuova esplorazione che non è avvenuta nelle fasi 1 e 2, per mettere in luce quali proprietà e relazioni possono essere usate nella dimostrazione. In altre parole, anche se lo studente ha prodotto personalmente la congettura, si trova disarmato nella costruzione della dimostrazione, esattamente come accade a molti studenti di fronte a una richiesta di dimostrazione di un enunciato costruito da altri.

2.1.2 L'unità cognitiva

Con il termine *unità cognitiva* si intende un costrutto teorico che analizza la continuità e la coerenza tra il processo di produzione di una congettura (fasi 1 e 2 del modello di Pedemonte) e quello di costruzione di una dimostrazione (fasi 3 e 4 dello stesso modello). Più nello specifico, secondo i primi autori che l'hanno teorizzata (P. Boero *et al.* [9]), l'*unità cognitiva* è definita come ciò che avviene quando:

«durante la produzione di una congettura, il soggetto giunge a formulare un enunciato attraverso un intenso processo argomentativo, intrecciato in modo funzionale con la giustificazione della plausibilità delle sue scelte. Nel corso della successiva fase di dimostrazione, lo studente ricostruisce questo processo in modo coerente, organizzando alcuni degli argomenti prodotti in precedenza in una catena logica.»

Questi studiosi sono arrivati a costruire un tale concetto osservando il lavoro svolto da una classe di scuola media a cui era stata proposta un'attività di congettura e dimostrazione riguardante il tema delle ombre solari. Durante l'analisi, si sono accorti che mentre cercavano di validare le loro ipotesi, molti studenti riprendevano il pensiero personalmente sviluppato durante la fase di produzione della congettura e lo riorganizzavano in una catena deduttiva di fatti. Le diverse attitudini personali e i diversi modi di riorganizzare il pensiero producevano diverse dimostrazioni per la stessa affermazione.

Questo costrutto teorico si presta ad interessanti applicazioni anche nel campo di esperienza delle macchine matematiche, in quanto quando c'è unità cognitiva, c'è una stretta

corrispondenza tra oggetti concreti e oggetti dell'attività mentale coinvolti nei due processi.

Riconoscere i casi di discontinuità cognitiva è semplice: basta infatti osservare se, durante la risoluzione del problema, si verificano delle interruzioni o delle mancanze di coerenza di tipo linguistico, concettuale o euristico.

Dal punto di vista *linguistico*, occorre osservare se le espressioni verbali, algebriche e grafiche si evolvono con continuità nel passaggio da una fase all'altra.

Dal punto di vista *concettuale*, bisogna invece valutare se i teoremi o, più in generale, i concetti espressi durante la fase di argomentazione della congettura sono coerentemente esplicitati e utilizzati nella dimostrazione.

Infine, sotto l'aspetto *euristico*, è necessario controllare se c'è coerenza nella scelta degli elementi fissi e di quelli variabili, i quali devono rimanere sempre gli stessi durante le 4 fasi.

Esistono poi altri tipi di discontinuità possibili, che possono riguardare i cambiamenti di quadro (algebrico, aritmetico, geometrico, ecc.), che avvengono quando l'argomentazione è costruita in un ambiente diverso da quello della dimostrazione, oppure essere di natura strutturale, come quando in una fase viene utilizzato un ragionamento di tipo induttivo quando invece è necessario uno deduttivo.

2.2 Il laboratorio di matematica

La modalità laboratoriale appare come opzione privilegiata nell'apprendimento-insegnamento della matematica, per opera non solo di nomi relativamente recenti, come Emma Castelnuovo e Vittorio Checcucci, ma anche grazie a voci ben più lontane nel tempo, come quella di Giovanni Vailati (1863-1904). Essa si presta bene all'investigazione diretta dei processi cognitivi di cui sopra, attraverso attività mirate a fare emergere le varie fasi che scandiscono la produzione di una congettura e la sua successiva dimostrazione, grazie all'analisi chiara e senza filtri che si può effettuare sui testi prodotti e sui dialoghi di confronto degli studenti all'interno dei vari gruppi.

Come spiegano M. Dedò e S. Di Sieno in [11], con il termine *laboratorio* si intende un'attività didattica in cui avviene un drastico cambio di ruoli tra studenti e insegnante. In

particolare:

- gli studenti assumono un *ruolo attivo*, ossia si tramutano da semplici ascoltatori passivi in artefici della loro conoscenza, operando concretamente e discutendo tra loro, talvolta in piccoli gruppi;
- l'insegnante diventa una *guida esperta*, cioè ha il compito, apparentemente marginale ma in realtà fondamentale, di indirizzare l'attività verso vie proficue e distogliere l'attenzione da quelle poco significative, osservando e intervenendo quando lo ritiene opportuno. Al termine del laboratorio, inoltre, si occupa di raccogliere le idee emerse dall'attività e porre l'attenzione sugli aspetti concettuali più importanti che l'hanno caratterizzata, tirando le fila del lavoro svolto.

Solitamente, quando si pensa al termine *laboratorio* lo si ricollega subito a un luogo fisico diverso dalla classe e a elementi caratteristici (come l'utilizzo di materiale manipolabile, l'uso di strumenti concreti o tecnologici, ecc.) ma, sotto un'analisi più accurata, emerge come queste componenti non siano minimamente necessarie per poter chiamare un'attività come tale. Piuttosto, questi elementi possono essere utili nella progettazione di un laboratorio, in quanto provocano in maniera naturale uno spiazzamento da parte degli studenti, abituati alle classiche lezioni frontali. Il laboratorio, quindi, coinvolge persone (studenti e insegnanti), strutture (aule, strumenti concreti e sussidi tecnologici) e idee (progetti, attività e sperimentazioni) e deve essere pensato in maniera tale da favorire la costruzione di significati degli oggetti matematici considerati.

La programmazione e la messa in pratica di un laboratorio di matematica possono essere suddivise in tre diverse fasi, ciascuna delle quali caratterizzata da tappe specifiche:

1. Fase di progettazione: durante la quale l'insegnante si occupa dell'organizzazione pratica del laboratorio e della ricerca di un filo conduttore che colleghi le attività proposte;
2. Fase di realizzazione: durante la quale si mette in pratica il laboratorio vero e proprio e in cui emergono l'importanza del rigore, dell'errore, della discussione e della scelta dei materiali;

3. Fase di valutazione: della quale questo elaborato non si occuperà nello specifico, in quanto oltre a costituire una tematica assai delicata, non sempre è presente all'interno di un percorso di questo tipo (in effetti, nel nostro caso non verrà effettuata una valutazione degli studenti dopo la sperimentazione). In questo senso, una delle difficoltà della valutazione di un'attività laboratoriale consiste nel fatto che essa non può essere specifica per ogni singolo studente e non deve ridursi ad una semplice conta degli errori commessi nello svolgimento dei problemi, ma deve piuttosto riferirsi al gruppo nel suo complesso. Inoltre, occorre concentrarsi sugli effetti a lungo termine del lavoro svolto, sia perché l'apprendimento vincolato ad un breve lasso di tempo risulta fragile, sia perché un'attività laboratoriale punta ad una visione globale del percorso scolastico. Infine, va tenuto conto anche di aspetti più difficilmente quantificabili, che spesso non emergono nelle classiche metodologie di verifica (scritta od orale) a cui i ragazzi sono abituati: il livello di responsabilizzazione, di partecipazione all'attività o di collaborazione tra i gruppi.

2.2.1 Fase di progettazione del laboratorio

Nello stadio che precede l'attività laboratoriale, l'insegnante deve occuparsi di due aspetti fondamentali: da un lato, deve porre attenzione su come condurre il gruppo classe, gestendo tempi e spazi, regole di comportamento e individuazione dei ruoli, dall'altro deve scegliere accuratamente gli argomenti e i concetti matematici significativi ai suoi scopi. Per quanto riguarda quest'ultimo aspetto, egli deve individuare un filo conduttore da seguire durante tutto il percorso laboratoriale, scegliendo strumenti e sussidi adeguati che risaltino i contenuti.

È fondamentale, infatti, a seconda del grado scolastico in cui si opera e tenendo conto del fatto che i tempi a disposizione non sempre permettono di mettere in atto un approccio di tipo laboratoriale durante l'anno scolastico, scegliere un nodo concettuale rilevante, in base al percorso globale degli studenti.

La ricerca da parte dell'insegnante deve poi essere indirizzata verso la scelta di problemi da proporre alla sua classe che non siano né troppo intuitivi, in quanto sarebbero sottovalutati e risulterebbero poco efficaci, né troppo complicati, poiché potrebbero generare frustrazione e rinuncia. I problemi più adatti, almeno in una fase di introduzione al

laboratorio, sono sicuramente quelli più curiosi e spiazzanti: quesiti semplici che hanno soluzione tutt'altro che banale o situazioni di vita quotidiana che possano coinvolgere e incuriosire.

Tutto questo risulta, infatti, fondamentale al fine di creare nei ragazzi l'esigenza di una spiegazione o di una dimostrazione, facendo leva sull'effetto sorpresa, non per ridurre la matematica ad un gioco di prestigio, ma per evidenziare l'importanza della giustificazione, del "chiedersi il perché" di un certo fatto.

In questo senso, un laboratorio ben strutturato dovrebbe imitare, quanto più fedelmente possibile, l'iter di ricerca in matematica, che si compone di diversi passi:

- dover risolvere un problema che non si è certi sia risolubile e per la cui risoluzione non si conoscono i mezzi da utilizzare;
- analizzare il problema intuitivamente, per cercare una via giusta da seguire;
- "perdere tempo" in ragionamenti spesso inconcludenti o errati;
- saper rileggere e interpretare i risultati ottenuti da un punto di vista generale;
- saper comunicare i risultati trovati alla comunità scientifica (nel nostro caso ci si riferisce al resto della classe).

2.2.2 Fase di realizzazione del laboratorio

Durante il laboratorio vero e proprio assumono una rilevanza notevole alcuni aspetti che durante le classiche lezioni frontali sono spesso sottovalutati. È proprio in questo contesto, infatti, che emergono spontaneamente esigenze autentiche di utilizzo del linguaggio matematico e di chiarezza espositiva, cambia il ruolo e il valore dato all'errore e si rivaluta l'uso di alcuni strumenti piuttosto che altri.

Il ruolo del rigore

Con il termine *rigore* si intende un concetto ben più profondo che mero formalismo espositivo. In tal senso, è possibile estendere le parole di Elio Fabri al caso della matematica, il quale, riferendosi all'insegnamento della fisica, disse « [...] *il criterio del*

rigore non è quello delle esatte definizioni nel primo capitolo di un libro. Rigore significa chiarezza nel significato dei singoli passi, significa dire esplicitamente che i concetti si precisano man mano che si procede, che la validità di principi e teorie si rafforza quando se ne vede tutta la portata, che non ci sono singole leggi dimostrate da singoli esperimenti, ma che tutta la costruzione si regge nel suo insieme e nel suo insieme trova conferma nei fatti. Ottenere che lo studente capisca e ricordi tutto questo è più importante delle singole nozioni, regole, dati sperimentali. Ciò porta del tempo, ma è tempo ben speso, anche se si deve sacrificare qualche parte delle trattazioni tradizionali. Per convincersene, basta avere l'onestà di chiedersi quanto di quello che si fa in un corso con pretese di completezza viene effettivamente ricordato, anche solo dopo un anno, dallo studente medio: si arriverà necessariamente alla conclusione che la completezza senza chiarezza di comprensione è fatica sprecata. Questo non vuol dire naturalmente che nozioni, regole, dati sperimentali non debbano essere conosciuti e impiegati: ma che debbono esserlo in vista di uno scopo ben preciso e non fine a se stessi.» [14].

Per porre le basi per un tipo di apprendimento duraturo nel tempo, il rigore deve essere sostanziale e non formale, non deve cioè mai essere separato dal significato. La mancanza di consapevolezza nell'uso di determinate tecniche da parte degli studenti spesso è sintomo di uno scollamento tra insegnamento e apprendimento, ed è proprio qui che il laboratorio svolge un ruolo cruciale: è ovviamente molto più efficace e istruttivo per lo studente appropriarsi del metodo risolutivo scelto in prima persona per la risoluzione di un problema, piuttosto che vedere questa tecnica applicata da altri in esercizi e problemi pensati *ad hoc*.

Il ruolo dell'errore

L'*errore*, tanto temuto ed evitato in ogni modo dagli studenti, assume un significato profondamente diverso all'interno di un ambiente laboratoriale. Nella fase di ricerca, infatti, l'errore costituisce un normale strumento di conoscenza ai fini dell'apprendimento: esso non deve venire represso e nascosto, ma piuttosto va incoraggiato e discusso, per poterne sfruttare al massimo le potenzialità educative e per chiarire qualsiasi incomprensione che può averlo indotto.

Per queste ragioni, è fondamentale creare per chi impara uno spazio da cui sia bandita

la paura di sbagliare, incentivando la convinzione secondo cui sbagliare non solo è lecito, ma spesso necessario, soprattutto in ambienti come il laboratorio di matematica, in cui apprendimento significa scoperta e non mera emulazione.

Il ruolo della discussione e del linguaggio specifico

Un'altra caratteristica del laboratorio è il lavoro a gruppi: proprio questa modalità di organizzazione forza i ragazzi alla comunicazione e al confronto *inter pares* su temi di matematica, cosa che raramente avviene. Infatti, solitamente si parla di matematica solo a scuola e lo scambio di informazioni avviene prevalentemente tra chi sa (l'insegnante) e chi non sa (l'alunno), mai tra coetanei.

La *discussione paritetica* è un ingrediente fondamentale per la buona riuscita del processo di apprendimento: lo sforzo di dover esprimere ai compagni la propria visione personale riguardo un dato problema stimola, infatti, un *consolidamento metacognitivo*, ossia il passaggio da un livello superficiale di comprensione di un concetto all'acquisizione più profonda dello stesso, fino a padroneggiarlo a tal punto da saperlo comunicare a se stesso e agli altri.

In questo senso, il laboratorio costituisce un ambiente privilegiato anche per sperimentare le possibilità legate all'uso del *linguaggio specifico* e per superare eventuali difficoltà comunicative. Infatti, spesso accade che durante l'attività i ragazzi partano da un linguaggio comune a loro familiare, ma poi sentano la necessità di utilizzare dei termini più rigorosi per poter comunicare tra loro in maniera chiara e senza fraintendimenti. In questo modo, si riscopre anche la valenza del linguaggio specifico in matematica, che spesso viene visto come un'inutile pedanteria richiesta dall'insegnante.

Un altro momento cruciale del laboratorio è inoltre quello riservato alla *discussione finale*, durante la quale l'intero gruppo classe, sotto la guida dell'insegnante, tira le fila del lavoro svolto: è in questa fase che si distinguono con maggiore chiarezza i diversi ruoli assunti da studenti e insegnante ed è in questa occasione che occorre, da parte dell'insegnante, evidenziare i passaggi significativi dell'attività, al fine di condurre alla costruzione di significati che vadano oltre quelli direttamente coinvolti nella soluzione del compito, ponendo inoltre l'attenzione sulla pluralità delle diverse strategie utilizzate nella risoluzione dei problemi da parte dei vari gruppi. Nella teoria delle situazioni didattiche

di Brousseau [10], questa fase prende il nome di *istituzionalizzazione delle conoscenze* e rappresenta quel processo che avviene quando l'insegnante cerca di collegare il lavoro costruttivo degli allievi – e quindi le conoscenze alle quali essi sono giunti risolvendo problemi, formulando e verificando ipotesi, ecc. – al sapere disciplinare, che costituisce l'obiettivo finale dell'attività svolta in classe.

Il ruolo dei materiali e l'interazione con il virtuale

Come abbiamo già osservato in precedenza, la presenza di *oggetti concreti* da manipolare non costituisce un elemento essenziale nell'organizzazione di un laboratorio di matematica, ma può sicuramente risultare utile e preziosa al fine di rappresentare esempi di problemi e concetti astratti. Questo aspetto verrà ripreso e approfondito nella Sezione 2.3, soprattutto in relazione all'importanza che assume nella sperimentazione descritta nel Capitolo 3 di questa tesi, il cui obiettivo principale è proprio quello di valutare come la manipolazione di strumenti concreti (nel nostro caso le macchine matematiche) possa agevolare l'apprendimento della materia.

Sicuramente non tutti gli argomenti si prestano a una modellizzazione concreta, ma quando è possibile occorre tenere presente che tale contestualizzazione deve essere naturale e non forzata, in modo che gli strumenti proposti siano volti a dare sostanza al concetto astratto senza sostituirsi ad esso.

Delicata è anche la progettazione di attività adeguate ad interfacciarsi con *sussidi tecnologici*: bisogna tenere presente che in un'attività laboratoriale il ruolo degli studenti deve essere attivo, perciò se si decidono di utilizzare mezzi virtuali, non basta di certo ridurre il contributo dei ragazzi ad un semplice *click* sullo schermo del computer, ma piuttosto occorre predisporre un ambiente di lavoro in cui l'utente possa esplorare e lavorare in autonomia.

2.3 La manipolazione di oggetti concreti

La manipolazione di strumenti o oggetti concreti può fungere da importante stimolo per gli studenti nella messa in atto di quei processi cognitivi necessari alla risoluzione di problemi geometrici, di cui si è parlato nella Sezione 2.1.1, ma occorre un'opportuna

contestualizzazione degli stessi e un'efficace predisposizione di un percorso guidato che ne sfrutti a pieno le potenzialità. Da tempo, infatti, è stata posta attenzione sul delicato rapporto esistente tra strumento e utilizzatore, sia dal punto di vista lavorativo che da quello scolastico. Nel 1995, P. Rabardel affrontò l'argomento nel suo libro "*Les hommes et les technologies*", occupandosi dell'interazione tra uomo e macchina ed elaborando un tipo di approccio strumentale che spieghi i processi cognitivi coinvolti.

Egli, per prima cosa, introduce una differenza sostanziale tra i termini *artefatto* e *strumento*, fino a qui utilizzati indifferentemente, ma che nel seguito saranno dosati a seconda del concetto a cui ci si riferisce. Con *artefatto* si intende l'oggetto materiale in sé mentre con *strumento* ci si riferisce al sistema costituito dall'artefatto e dagli schemi d'uso costruiti dal soggetto, i quali dipendono strettamente dalla natura dell'artefatto e variano a seconda del compito richiesto e dell'individuo che li applica.

Rabardel prosegue poi le sue osservazioni partendo dal fatto che l'utilizzatore compie un'elaborazione personale dell'artefatto attraverso attività di genesi strumentale, che comprendono:

- processi di *strumentalizzazione* verso l'artefatto, che riguardano l'insieme delle azioni che portano alla produzione integrale dell'oggetto (selezione e ricerca dei materiali, produzione di funzioni e trasformazioni strutturali, cambiamenti di funzionamento, ecc.);
- processi di *strumentazione* relativi al soggetto, che comprendono l'assimilazione e l'evoluzione degli schemi d'uso dell'oggetto stesso.

Tali processi possono essere individuati nella genesi storica di una macchina matematica, ma possono anche essere ricostruiti all'interno dell'attività realizzata da uno studente che opera nella scuola durante un laboratorio con macchine matematiche.

Gli schemi d'uso relativi al processo di strumentazione possono o meno coincidere con gli obiettivi per i quali l'artefatto è stato progettato: essi dipendono dall'esperienza diretta dell'utente in quanto l'uso di uno strumento non è mai neutro ma, appunto, soggettivo. Un insegnante può ricostruire gli schemi d'uso messi in campo durante la soluzione di un problema da parte di uno studente, osservando i diversi segni prodotti nel corso della manipolazione dell'artefatto o nell'interazione con altri studenti impegnati nella

stessa attività. Tali *sistemi di segni* possono essere di diversa natura, comprendendo gesti, linguaggio verbale o scritto, sguardi, azioni, ecc., e sono strettamente necessari alla comunicazione tra studenti e insegnante.

2.3.1 La dimensione didattica

La didattica nel laboratorio di matematica che prevede l'utilizzo di macchine, come spiegato da Bussi e Mariotti in [3] e illustrato in Figura 2.1, si articola secondo diversi cicli talvolta ripetuti e composti dalle seguenti fasi, che costituiscono la base su cui è impostata la sperimentazione descritta nel Capitolo 3:

1. Attività con artefatti: gli studenti, solitamente suddivisi in piccoli gruppi, esplorano e analizzano l'artefatto e si cimentano nella risoluzione di problemi che ne prevedono l'utilizzo. La presenza della macchina promuove lo scambio di opinioni e l'interazione sociale attraverso gesti, parole o segni.
2. Produzione individuale di segni (testi o disegni): gli studenti sono coinvolti in attività individuali da svolgere in classe o a casa, come la stesura di resoconti descrittivi, riflessioni o commenti sull'esperienza appena svolta. Nel caso della sperimentazione descritta nel Capitolo 3 di questa tesi, questa fase non è stata distinta in maniera netta dalle altre, in quanto non ritenuta significativa rispetto al tempo a disposizione e agli obiettivi del percorso.
3. Produzione collettiva di segni: gli studenti intraprendono una discussione collettiva di confronto guidata dall'insegnante, in cui si analizzano e si commentano le soluzioni prodotte dai vari gruppi.

La costruzione di significati all'interno del laboratorio di matematica è, come abbiamo visto, strettamente legata non solo alla manipolazione degli oggetti concreti proposti nelle varie attività, ma anche alle interazioni personali che si sviluppano durante l'esercizio di queste ultime. Infatti, nonostante un qualsiasi strumento, per costruzione, sia prodotto per scopi specifici e quindi incorpori al suo interno delle idee astratte, il significato di queste non può risiedere unicamente nell'oggetto concreto in sé, né può emergere dalla sola interazione tra studente e artefatto. Per questo motivo occorre che l'insegnante

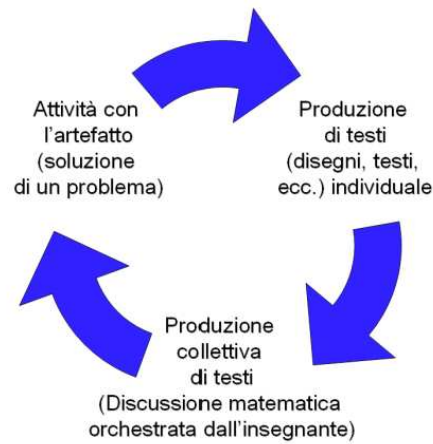


Figura 2.1: Ciclo didattico¹.

svolga una mediazione efficace, elaborando piani adeguati al fine di sfruttare appieno tutto il potenziale intrinseco allo strumento e accompagnando ogni attività con una riflessione, individuale e collettiva, sugli oggetti di studio.

Più precisamente, secondo la definizione data da R. Hansas, che si colloca all'interno della tradizione vygotskijana, con il termine *mediazione* si intende un processo articolato che per potersi attuare ha bisogno della presenza di:

- un mediatore;
- un contenuto da mediare, detto mediato;
- un ricevente, soggetto alla mediazione;
- una circostanza adeguata alla mediazione;
- dei mezzi o delle modalità di mediazione;
- un luogo in cui avviene la mediazione.

Nel nostro caso, quello cioè del processo di insegnamento-apprendimento nel laboratorio di matematica (che rappresenta la circostanza per la mediazione), il mediatore è l'insegnante, il mediato è il significato matematico che si vuole trasmettere e i riceventi sono

¹Immagine presa da [3].

gli alunni; le modalità di mediazione sono riassunte nei cicli didattici di attività con artefatti (vedi Figura 2.1), mentre il luogo è rappresentato dal laboratorio di matematica inteso non in senso fisico, ma secondo la definizione proposta nella Sezione 2.2.

Come illustrato nella Figura 2.2, il processo di mediazione semiotica permette di costruire un collegamento tra il polo superiore (gli studenti) e quello inferiore (l'insegnante) all'interno di un'attività che comprende l'utilizzo di un artefatto (la macchina matematica). Più nello specifico, partendo da un "problema", gli studenti producono "testi situati" ossia gesti, parole, testi scritti o disegni che consentono all'insegnante di ipotizzare gli schemi d'uso messi in opera. Grazie alla mediazione dell'insegnante, i testi situati diventano "testi matematici", che inglobano quel "sapere matematico" che doveva essere veicolato attraverso l'attività.

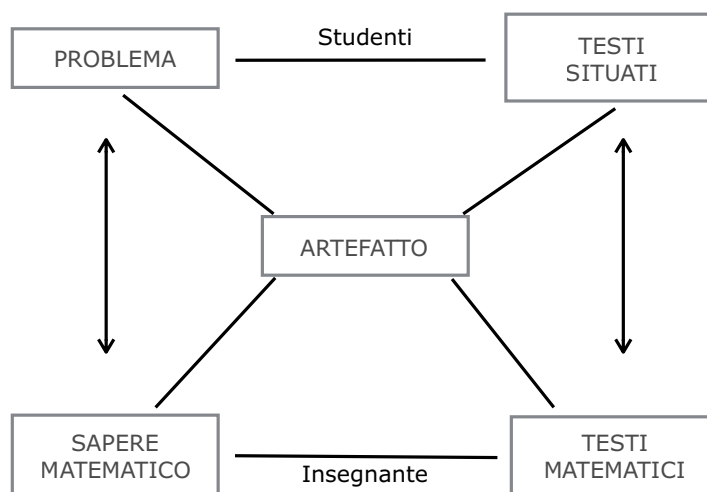


Figura 2.2: Mediazione semiotica.

Il sapere incorporato dallo strumento, attraverso lo stimolo fornito dall'insegnante, può quindi essere esplicitato attraverso varie forme di rappresentazione, per essere infine interiorizzato dall'alunno. L'*interiorizzazione* è il processo, definito da Vygotskij, secondo cui avviene una ricostruzione interna di un'operazione esterna, attraverso una trasformazione strutturale consistente. Il linguaggio naturale e quello scientifico, acquisiti nel corso dell'interazione con l'insegnante e nella comunicazione tra pari, sostengono questo processo. In questo modo, un'azione esterna, una volta interiorizzata, può veni-

re evocata attraverso sistemi di segni e gestita autonomamente dall'allievo in qualsiasi situazione, diventando così uno "strumento psicologico", che può essere trasformato o modificato a proprio piacimento.

Capitolo 3

Sperimentazione in classe

In questo capitolo verrà presentato il percorso didattico svolto presso il Liceo Luigi Galvani di Bologna. Dopo aver esposto brevemente le finalità che tale percorso si pone e le motivazioni che stanno dietro alla scelta della classe selezionata per la sperimentazione, ci si è concentrati sull'organizzazione generale dell'attività: la progettazione e la sperimentazione di questo percorso vanno, infatti, di pari passo, in quanto, essendo l'attività pensata *ad hoc* per la classe scelta, è stato necessario, a volte, ripensare e modificare le lezioni successive alla luce dei risultati ottenuti in quelle precedenti.

Successivamente l'attenzione si sposterà sulla programmazione specifica di ogni singola sessione di laboratorio, articolata su tre giornate differenti, e sulla descrizione dei tempi, delle modalità e del materiale utilizzato. L'analisi dei dati emersi dalla sperimentazione verrà poi effettuata nel Capitolo 4.

Come già accennato nell'Introduzione, l'attività presso l'istituto è stata svolta in collaborazione con un'altra laureanda magistrale in Matematica presso l'Università di Bologna, Ludovica di Nicolantonio, la cui tesi è da considerarsi in continuità con questo elaborato.

3.1 Obiettivi dell'attività e motivazioni delle scelte

Alla luce del quadro teorico affrontato nel Capitolo 2, è stato progettato e sperimentato un percorso didattico rivolto agli studenti del secondo biennio di liceo che non abbiano ancora trattato l'argomento delle sezioni coniche, ma siano in procinto di farlo.

Lo scopo di questo percorso è quello di fungere da introduzione all'argomento delle coniche, sfruttando l'uso di macchine matematiche all'interno di un ambiente di tipo laboratoriale.

Lo studio delle sezioni coniche è, infatti, uno degli obiettivi specifici di apprendimento previsti per il secondo biennio dei licei nell'ambito della Geometria, contenuto nelle Indicazioni Nazionali [22]. Nello specifico, esse affermano che:

«Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.»

Proprio per la centralità dell'argomento, si è deciso quindi di pensare ad un'attività di tipo laboratoriale che coinvolgesse le macchine matematiche al fine di stimolare, attraverso la manipolazione di oggetti concreti, un tipo di apprendimento attivo da parte degli studenti.

In particolare, l'attività lavora principalmente sulle coniche da un punto di vista sintetico, ma si pone l'obiettivo anche del passaggio dal piano sintetico a quello analitico, attraverso quesiti appositamente pensati.

La classe scelta per lo svolgimento della sperimentazione è la III G/H linguistico del Liceo Luigi Galvani di Bologna. Essa è formata da 29 studenti provenienti da due diverse sezioni dello stesso liceo: circa metà della classe fa parte della sezione G, mentre la restante parte della sezione H. Le due classi originarie, formate da alcuni studenti frequentanti l'indirizzo linguistico e altri l'indirizzo scientifico, si smembrano durante le ore specifiche di indirizzo (matematica e lingue) e si ricompongono soltanto durante le ore comuni. Nello specifico, le lezioni di matematica sono tenute dalla docente Lidia Molinari.

Si è deciso di scegliere proprio questa classe in quanto accoglie tra i suoi studenti una ragazza non vedente. La ragazza è stata seguita durante tutto il percorso in maniera più approfondita da Ludovica di Nicolantonio, laureanda in Matematica all'Università di Bologna, in collaborazione con la quale è stata progettata e svolta l'attività e che incentrerà la sua tesi proprio sulla valenza che le macchine matematiche hanno nell'ap-

prendimento della geometria per non vedenti.

3.2 Progettazione e sperimentazione dell'attività

L'attività in classe, come già spiegato nella Sezione 3.1, consiste in un laboratorio di matematica sull'argomento delle coniche, svolto utilizzando delle macchine matematiche prese in prestito dal Liceo Augusto Righi di Bologna. In particolare, sono stati utilizzati dieci *ellissografi a filo*, cinque *parabolografi a filo* e cinque *parabolografi di Cavalieri* (vedi Appendice A per le schede illustrative di queste macchine). Ciascuna macchina, prima di ogni laboratorio, è stata ricoperta con fogli bianchi A4, in modo che i ragazzi potessero utilizzarla liberamente senza rischiare di rovinarla.

Va sottolineato ancora una volta che il tema del laboratorio, al momento della sperimentazione, risultava agli studenti completamente nuovo: non era infatti ancora stato introdotto dall'insegnante di matematica, che però, sotto nostra richiesta, aveva ripassato nei giorni precedenti agli incontri alcuni strumenti utili alla buona riuscita dello stesso (ad esempio la formula della distanza tra due punti e i teoremi di Euclide). L'unica conica che i ragazzi avevano già visto in parte in passato era la parabola, di cui avevano avuto un accenno nella risoluzione delle equazioni di II grado.

L'attività è stata suddivisa in tre lezioni, aventi un'organizzazione interna ben precisa e poste a distanza di una settimana o di qualche giorno l'una dall'altra, per una durata totale di 5 ore, suddivise come mostrato in Tabella 3.1.

Dopo ogni incontro, l'organizzazione interna della lezione successiva è stata ripensata e opportunamente modificata alla luce di quanto fatto la volta precedente. Lo schema iniziale, quindi, è stato leggermente corretto *in itinere* e i tempi sono stati predisposti nuovamente in maniera adeguata.

Nel corso dei tre i laboratori erano presenti in aula i seguenti docenti: io e Ludovica, la ragazza in collaborazione con la quale è stata progettato il percorso didattico; la Prof.ssa Lidia Molinari, docente di matematica della classe; il Prof. Agostino Arciuolo, insegnante di sostegno della ragazza non vedente; infine, solo per il laboratorio sulla parabola svoltosi venerdì 15 Novembre, ha collaborato con noi anche la Dott.ssa Margherita Piroi,

Prima lezione	8 Novembre 2019 durata 2 ore	Laboratorio sull'ellisse
Seconda lezione	15 Novembre 2019 durata 2 ore	Laboratorio sulla parabola
Terza lezione	19 Novembre 2019 durata 1 ora	Conclusione dell'attività

Tabella 3.1: Scansione temporale del laboratorio.

laureata in Matematica all'Università di Bologna, per darci una mano a gestire i vari gruppi e registrare meglio le loro osservazioni.

Durante lo svolgimento di tutta l'attività di laboratorio sono stati posizionati quattro tablet sparsi per l'aula, al fine di registrare le voci dei ragazzi durante la discussione nei vari gruppi, in parte riportate nel seguito in forma anonima. Si è scelto di posizionare un registratore nel gruppo della ragazza non vedente, mentre gli altri tre dispositivi sono stati attribuiti a tre diversi gruppi in forma del tutto casuale.

Nel seguito descriveremo la struttura delle singole lezioni, mentre l'analisi dei risultati sarà svolta nel Capitolo 4.

3.3 Prima lezione

La prima lezione di laboratorio si è svolta il giorno venerdì 8 Novembre 2019, dalle ore 8 alle ore 10, e si è aperta con un'introduzione storica sulle macchine matematiche: durante questa presentazione, durata all'incirca quindici minuti, si è discusso insieme ai ragazzi riguardo la definizione di *macchina matematica* e ci si è focalizzati su esempi da loro proposti, con particolare attenzione al caso del *compasso piano*. Quest'ultimo infatti risulta rilevante dal punto di vista storico, per la sua precoce realizzazione e per la sua semplicità (per un approfondimento storico vedi Sezione 1.3.1). A tal proposito è stata

mostrata a tutta la classe una riproduzione storica del compasso piano, illustrata in Figura 1.12 a pagina 16, appositamente realizzata per quella giornata, e la sua descrizione ha permesso di evidenziare differenze e similitudini rispetto al compasso di uso comune. Questa è stata l'occasione per riportare alla memoria degli studenti la definizione di luogo geometrico e di *circonferenza*, concentrando l'attenzione sulla proprietà che la caratterizza (ossia l'equidistanza di ogni suo punto dal centro), emersa spontaneamente dagli interventi dei ragazzi.

In seguito, si è scelto di mostrare alla classe un ulteriore esempio di macchina matematica che risultasse significativa dal punto di vista storico: il *parallelogramma di Watt* (vedi Figura 1.22 a pagina 33). Questo strumento, che ha destato fin da subito nei ragazzi ampio interesse, è stato descritto e contestualizzato all'interno del panorama della Rivoluzione Industriale (per un approfondimento storico vedi Sezione 1.3.2), ed è stato fatto poi girare tra i banchi in modo che i ragazzi potessero toccarlo con mano ed esplorarlo da vicino.

Successivamente l'attività si è incentrata sull'introduzione del laboratorio sull'*ellisse*, spiegando modalità e tempi in cui era scandita l'attività, senza però mai fare riferimento direttamente alla curva in questione. Si è deciso di iniziare il percorso esplorando proprio questa conica, non solo perché una delle macchine che la realizza, l'*ellissografo a filo*, è una delle più semplici e intuitive nell'utilizzo, ma anche affinché i ragazzi, avendo già studiato dal punto di vista sintetico la circonferenza, potessero facilmente fare confronti tra le due curve.

Il laboratorio si è svolto secondo la seguente modalità:

1. la classe è stata suddivisa in 8 gruppi: inizialmente sono stati formati 6 gruppi di tre persone e 2 gruppi di quattro persone ciascuno; durante la seconda ora, poiché si è aggiunta una ragazza, i gruppi di tre persone sono diventati 5, mentre quelli di quattro componenti sono aumentati a 3;
2. a ciascun gruppo è stato consegnato un *ellissografo a filo*, senza averne spiegato il funzionamento, a cui era allegata la prima parte della scheda guida di esplorazione dell'artefatto, riportata in Appendice C e analizzata in dettaglio nella Sezione 3.3.1. Per svolgerla sono stati concessi 40 minuti di tempo circa;

3. allo scadere del tempo stabilito si è svolta una discussione collettiva mirata alla correzione della scheda durata circa 10 minuti, nella quale si è lasciato spazio alle varie voci degli studenti di emergere attraverso osservazioni e commenti;
4. agli stessi gruppi è stata poi consegnata la seconda parte della scheda in Appendice C, anche quest'ultima spiegata nel dettaglio nella Sezione 3.3.2, con altri 40 minuti di tempo a disposizione per compilarla;
5. infine, si è concluso il laboratorio con una discussione collettiva sulla seconda parte di circa 10 minuti, in cui si è focalizzata l'attenzione sulle domande risultate più ostiche per i vari gruppi.

3.3.1 Scheda guida per l'ellissografo a filo – Parte I

La scheda esplorativa realizzata per la prima sessione di laboratorio, riportata in versione completa in Appendice C, è pensata per un primo approccio ad una macchina matematica. La prima parte della scheda è formata da tre quesiti.

La prima consegna è la seguente

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

e ha lo scopo di permettere ai ragazzi di familiarizzare con uno strumento a loro completamente nuovo, lasciandoli esplorare l'oggetto in libertà e permettendogli di produrre congetture sul suo funzionamento.

Il secondo quesito è posto in un foglio separato dal primo, in quanto nel testo viene spiegato il reale funzionamento della macchina matematica, ed è il seguente

- II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

Con questa domanda si vuole spingere i ragazzi a fare delle congetture sulla curva che è stata realizzata: in particolare, è posta in maniera tale che emerga la somiglianza con la circonferenza, che loro conoscono dal punto di vista sintetico. Si vuole spingerli ad esplicitare, con parole loro, gli aspetti comuni e le differenze che trovano tra ellisse e circonferenza, come ad esempio il fatto che sono entrambe curve chiuse e limitate.

Infine, la terza attività consiste in una tabella da compilare, così composta

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate, nello spazio sotto la tabella, almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

	VARIA	NON VARIA
1. Lunghezza del filo		
2. Distanza tra i perni		
3. Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni fissi		
4. Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi		
5. Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita		
6. Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita		
7. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		
8. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita		

Quest'ultima attività ha lo scopo di fare esplorare la macchina ai ragazzi in maniera più approfondita, analizzando la sua struttura e il suo funzionamento. Inizialmente i ragazzi sono spinti a produrre delle ipotesi sul variare o meno di determinati oggetti che compongono la macchina. Successivamente sono incentivati a motivare le loro scelte attraverso misurazioni concrete.

La relazione che, in conclusione, si vorrebbe fare emergere da questa compilazione, corredata dalla successiva discussione, è quella esistente tra i punti 1, 2 e 7 della tabella: questi sono gli unici oggetti che rimangono costanti durante il movimento della macchina e sono legati dalla relazione

$$l = b + d_1 + d_2 \quad (3.1)$$

dove l è la lunghezza del filo che compone la macchina, b è la distanza misurata tra i perni fissi e d_1 e d_2 sono le distanze tra la punta della matita e i due perni fissi.

3.3.2 Scheda guida per l'ellissografo a filo – Parte II

La seconda parte che compone la scheda esplorativa dell'ellissografo a filo (vedi Appendice C) è composta da quattro quesiti.

La prima domanda è la seguente

IV. Qual è la distanza massima e minima che riuscite a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

Si è scelto volutamente di non definire il centro della curva e di lasciare che i ragazzi ragionassero in analogia con la circonferenza, in quanto il concetto è piuttosto intuitivo e non si voleva appesantire troppo il testo con definizioni formali. Il quesito ha lo scopo di permettere ai ragazzi di constatare la principale differenza che intercorre tra circonferenza ed ellisse: il fatto che la distanza di un qualsiasi punto della curva dal centro della stessa non è costante. Inoltre esso mira a fare riflettere gli studenti sul fatto che la curva è limitata.

Successivamente, la domanda cinque è

V. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se si disegnalì sulla macchina.

Abbiamo scelto di inserire questo quesito per due ragioni principali. In primo luogo, analizzare le possibili simmetrie della curva permette di farne un'analisi più approfondita, e di evidenziare ulteriori differenze con la circonferenza: l'ellisse, infatti, non possiede infiniti assi di simmetria come la circonferenza, che è simmetrica rispetto ad ogni retta

passante per suo il centro, ma ne ha solamente due, individuati dalle retta passante per i due perni fissi della macchina e dalla perpendicolare a questa passante per il centro della curva. In secondo luogo, questa domanda è propedeutica al quesito VII, che richiede di considerare gli assi di simmetria della curva come sistema di riferimento cartesiano.

La domanda successiva, riguarda le possibili modifiche strutturali da apportare alla macchina, ed è posta nel modo seguente

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni, ma di non cambiare la lunghezza del filo.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?
- E avvicinandoli?
- Se i perni coincidessero quale sarebbe la curva tracciata?

Questo quesito lavora sulla capacità di visualizzazione mentale e immaginazione dei ragazzi, e permette di consolidare il concetto secondo cui la struttura che una macchina matematica possiede è funzionale allo scopo per cui è stata costruita: modificando quindi determinate componenti, si modificano le proprietà fondamentali che stanno alla base della realizzazione di una determinata curva, e di conseguenza cambia il risultato finale. Si vuole inoltre sottolineare ancora una volta la profonda connessione esistente tra ellisse e circonferenza, curva che si ottiene proprio facendo idealmente coincidere i perni fissi della macchina (i fuochi dell'ellisse).

L'ultima domanda, più complessa delle precedenti in quanto si distacca dal piano puramente sintetico per addentrarsi in quello analitico, è la seguente

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimate la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y .

In particolare, per risolvere il quesito i ragazzi devono estrapolare la proprietà caratterizzante la curva (vedi Equazione (3.1)) e, servendosi della formula – a loro nota – della distanza tra due punti, devono provare ad esprimere l'equazione analitica della

curva realizzata dalla loro macchina matematica, distinguendo gli oggetti (punti) che rimangono fissi da quelli che invece variano.

3.4 Seconda lezione

La seconda sessione di laboratorio si è svolta il giorno venerdì 15 Novembre 2019, dalle ore 8 alle ore 10, ed è stata strutturata in maniera molto simile alla precedente, anche se si è voluto lasciare i ragazzi più liberi di esplorare le nuove macchine in autonomia. L'intento del laboratorio è quello di introdurre ai ragazzi una nuova conica: la *parabola*. Per farlo, è stata progettata un'attività a gruppi¹ che prevede l'esplorazione di due diverse macchine matematiche: il *parabolografo a filo* e il *parabolografo di Cavalieri*. La scelta di utilizzare due macchine che sfruttano proprietà diverse della parabola per tracciarla, è legata al voler fare emergere nei ragazzi il dubbio che i due strumenti realizzino effettivamente la stessa curva: questo fatto non risulta evidente né dal funzionamento degli strumenti, né dal disegno che tracciano (in quanto il parabolografo a filo realizza la curva completa, mentre quello di Cavalieri solo una "metà"), e per questo motivo la domanda in questione è stata introdotta e successivamente ripresa durante l'ultima lezione (vedi Sezione 3.5). In particolare, degli 8 gruppi formati, a 4 è stata consegnato un parabolografo a filo, mentre agli altri 4 un parabolografo di Cavalieri, ciascuno con la sua scheda guidata di esplorazione.

In questo caso, l'attività è stata spezzata in due parti come nella prima lezione di laboratorio, ma queste due fasi non sono state intervallate da un momento di correzione guidata delle schede, in quanto sarebbe risultato difficile riuscire a condurre una discussione comune riferita a due schede di attività differenti. Per questo motivo, si è scelto di prestare maggiore attenzione ai singoli gruppi durante lo svolgimento dei quesiti, girando in aula tra i banchi e controllando che nessuno si bloccasse tanto da non riuscire più a proseguire.

Tra la prima parte e la seconda, si è scelto di fare interagire i gruppi tra loro, accoppiando

¹La mattina del secondo laboratorio vi erano due studenti assenti, come durante il primo laboratorio, perciò si è deciso di mantenere la stessa suddivisione in gruppi: 3 gruppi di quattro persone e 5 gruppi di tre persone.

gruppi con macchine diverse e chiedendogli di spiegarsi a vicenda il funzionamento del proprio strumento e di raccontarsi le osservazioni venute fuori durante la prima esplorazione. I quattro nuovi gruppi così formati si sono posizionati, prima, per un tempo di circa dieci minuti, attorno al loro parabolografo a filo, e ciascun membro del gruppo che aveva esplorato tale macchina ha esposto ai suoi compagni una delle domande della scheda guida compilata. Nei dieci minuti successivi, poi, i gruppi si sono spostati attorno al parabolografo di Cavalieri e hanno fatto lo stesso lavoro di presentazione per l'altra macchina. In questo modo, non solo ogni ragazzo ha avuto la possibilità di provare personalmente entrambi gli strumenti, ma, in aggiunta, la discussione *inter pares* (che, come sottolineato nella Sezione 2.2.2, raramente avviene su temi di matematica) ha stimolato un processo di consolidamento metacognitivo delle nozioni appena apprese.

La scelta di attribuire una macchina piuttosto che un'altra ad un gruppo è stata fatta basandosi su tre fattori:

- l'analisi svolta sui protocolli della sessione di laboratorio precedente, grazie alla quale sono stati individuati i gruppi che si sono mossi più agilmente attraverso le domande sull'ellissografo a filo, e chi invece ha avuto più difficoltà;
- l'appartenenza alla sezione G oppure alla sezione H. Infatti, la professoressa Molinari, docente di matematica delle due classi, aveva in settimana ripreso e ripassato il Teorema di Euclide solamente con gli studenti della sezione H, enunciato da considerarsi in parte necessario per compilare la scheda sul parabolografo di Cavalieri;
- la presenza della ragazza non vedente all'interno del gruppo, in quanto la macchina a filo risultava più difficile per lei da utilizzare rispetto all'altra.

Si è deciso dunque di attribuire il parabolografo di Cavalieri – a nostro parere un po' più complesso da esplorare attraverso la scheda, ma più semplice nel funzionamento – ad un gruppo che si era dimostrato particolarmente acuto nell'individuazione dell'equazione cartesiana dell'ellisse durante la lezione precedente (seguendo il primo criterio sopra descritto), a due gruppi che avevano solamente componenti appartenenti alla sezione H

(come specificato nel secondo criterio) e al gruppo della ragazza non vedente (per le ragioni espresse al terzo punto dell'elenco precedente).

Le schede guida per il parabolografo a filo e per quello di Cavalieri, progettate per la prima fase del laboratorio e allegate in Appendice C, seguono una linea comune. Entrambi i protocolli, infatti, sono composti da quattro domande: il primo quesito e gli ultimi due sono esattamente gli stessi per entrambe le macchine, mentre il secondo si differenzia nella diversa descrizione del funzionamento dello strumento, ma non nello scopo. La seconda parte della scheda per il parabolografo a filo, invece, si articola su cinque quesiti, che si discostano da quelli proposti per il parabolografo di Cavalieri, in quanto l'obiettivo della seconda fase del laboratorio è quello di approfondire le leggi matematiche che stanno alla base del corretto funzionamento delle macchine. A questi due protocolli, relativi alla seconda parte del laboratorio, è allegata anche un'immagine schematica a colori della macchina che trattano, realizzata con il software GeoGebra e inserita a seguito delle due schede in Appendice C, utile per semplificare i riferimenti alle singole componenti della macchina stessa, sia negli enunciati delle domande, sia nelle risposte dei ragazzi che avevano bisogno di riferirsi ad un certo oggetto sullo strumento. Nel seguito verranno analizzate in dettaglio, domanda per domanda, le due parti che compongono le schede di esplorazione dei due parabolografi.

3.4.1 Schede guida per i parabolografi – Parte I

La prima consegna della scheda ha lo scopo di permettere un'esplorazione diretta e libera della macchina da parte degli studenti che si avvicinano per la prima volta a tale strumento e ha la stessa formulazione della scheda sull'ellissografo a filo.

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

La seconda domanda, invece, contiene una descrizione dettagliata del modo d'uso della macchina matematica e per questo, in entrambi i casi, è posta in un foglio separato dal primo. Per il parabolografo a filo è la seguente

- II. Mantenendo il filo teso e accostato all'asta verticale della macchina con la punta di una matita, fate scorrere il lato orizzontale della macchina sulla guida rettilinea vincolata al piano del modello. Ripetete ora lo stesso procedimento posizionando la squadra a sinistra del perno centrale fissato al piano. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

mentre per il parabolografo di Cavalieri è la seguente

- II. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

In entrambe le schede questo quesito ha lo scopo non solo di spiegare il meccanismo di reale funzionamento dello strumento, in modo che gli studenti lo possano comprendere e riprodurre, ma anche quello di stimolare i ragazzi all'argomentazione delle loro idee riguardo alla natura della curva tracciata.

Il terzo quesito, invece, è il seguente

- III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

e ha lo scopo di costruire collegamenti tra la curva tracciata dalla macchina e le altre curve, che i ragazzi conoscono (in particolare ci si riferisce alla circonferenza e all'ellisse, di cui si era parlato nella lezione precedente). Le principali caratteristiche che si vorrebbe che emergessero riguardano l'illimitatezza della curva e il fatto che non sia una curva chiusa, che si contrappongono alla proprietà di compattezza di ellisse e circonferenza. Anche la presenza di un solo asse di simmetria può essere evidenziata come differenza importante, anche se meno evidente, rispetto alle precedenti coniche.

Infine, la quarta e ultima domanda, che conclude la prima parte delle schede guida, prende il posto della tabella da compilare presente nella domanda numero tre della scheda sull'ellissografo a filo (vedi pagina 69). Essa è formulata nel seguente modo

- IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.).
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

ed è stata inserita per spingere l'esplorazione dell'artefatto ad un livello più specifico. In particolare, si vorrebbe che emergessero alcune caratteristiche che non variano durante il movimento delle due macchine: per il parabografo a filo la lunghezza dell'asta verticale e quella del filo inestendibile, mentre per il parabografo di Cavalieri l'angolo retto formato dalle aste scanalate con vertice nel portamina.

Si è scelto di evitare, in questo caso, il metodo della compilazione di una tabella in quanto sarebbe risultato complicato spiegare a parole a quale oggetto nella macchina ci si stava riferendo, e inoltre ci è sembrato che i ragazzi avessero dimostrato agilità nella sperimentazione precedente, e quindi che potessero essere in grado di esplorare la nuova macchina in maniera più autonoma e meno guidata.

3.4.2 Scheda guida per il parabografo a filo – Parte II

A questo protocollo, come già precisato nell'introduzione alla sezione, è allegata un'immagine schematica a colori della macchina, riportata in Figura 3.1, al fine di semplificare i riferimenti alle singole componenti dello strumento.

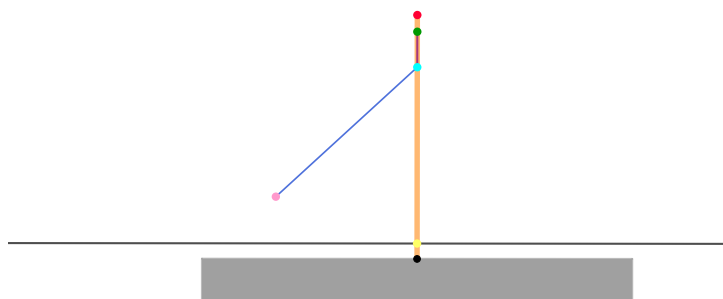


Figura 3.1: Immagine schematica a colori del parabografo a filo.

Per questo motivo, il primo quesito è il seguente

- V. Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

e ha lo scopo di agevolare il passaggio di schematizzazione da oggetto concreto ad immagine astratta. In questa fase di astrazione è importante che gli studenti individuino correttamente tutti gli elementi a cui corrispondono i diversi colori in figura, poiché ricorreranno nella compilazione successiva della scheda.

Le due domande successive, così formulate,

- VI. Quanto è lungo il filo che compone la macchina, misurato partendo dal punto verde al punto rosa? Quanto è lunga l'asta arancione nella macchina, misurata partendo dal punto verde a quello giallo? Misurateli e confrontateli.

- VII. Misurate la distanza sulla macchina tra il punto celeste e la retta nera. Poi quella tra il punto celeste e il punto rosa. C'è una relazione tra queste due distanze? Se sì, scrivetela.

attraverso la mediazione dell'immagine colorata, richiedono di effettuare la misurazione di determinate quantità direttamente sulla macchina e, successivamente, di trarre conclusioni in merito a queste. Queste domande servono per indirizzare l'esplorazione della macchina verso l'individuazione della proprietà caratterizzante la curva, che in questo caso, riferendosi alla Figura 3.2, risulta essere l'uguaglianza di due distanze, la prima calcolata tra un generico punto P della curva (descritto dalla punta della matita nell'utilizzo della macchina) e il fuoco F (rappresentato dal perno fisso al centro), e la seconda individuata tra lo stesso punto generico P e la direttrice (la retta nera tracciata sul piano della macchina), secondo la relazione

$$PF = PH. \quad (3.2)$$

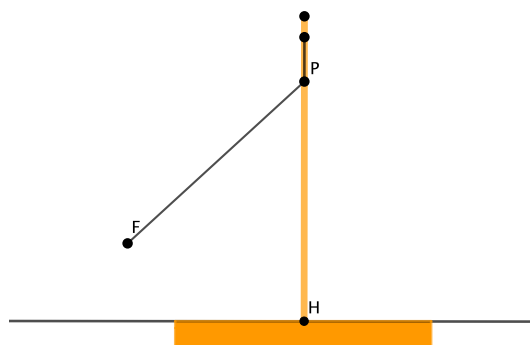


Figura 3.2: Schematizzazione del parabolografo a filo.

Di seguito viene poi riportato il quesito numero otto

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a giustificare perché è valida.

che si riferisce alla relazione individuata nella domanda precedente (vedi Equazione (3.2)).

Grazie alla risposta data alla sesta domanda, in particolare, dovrebbe risultare più semplice la dimostrazione, richiesta nella domanda numero otto, della proprietà caratterizzante la parabola, se individuata rispondendo correttamente al settimo quesito. Queste tre domande (VI, VII e VIII) quindi, poste una di seguito all'altra, hanno l'obiettivo di guidare il processo che parte con la produzione di una congettura e porta alla dimostrazione della stessa. Infatti, grazie ad esse, si vuole spingere il gruppo a ripercorrere il ragionamento effettuato passo per passo rispondendo alle singole domande, e a ricostruirlo logicamente all'interno di un quadro globale, soffermandosi sulle implicazioni logiche di ogni singolo passaggio.

Infine, la nona e ultima domanda, analogamente a quanto visto per l'ellissografo a filo, riguarda l'individuazione dell'equazione cartesiana della parabola, ed è la seguente

IX. In caso aveste risposto affermativamente al punto VII, provate a tradurre tale relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento per voi più comodo.

In questo caso, a differenza di quanto visto per l'ellissografo a filo, il sistema di coor-

dinate cartesiano viene scelto dai ragazzi, i quali sono lasciati liberi di individuare gli assi che secondo loro rendono più semplice l'esplicitazione della proprietà. Con questa domanda si vuole spingere l'esplorazione da un livello puramente sintetico verso il piano analitico, per creare un collegamento tra i due e per abituare i ragazzi ad un ambiente (quello cartesiano) fondamentale nell'apprendimento della matematica.

3.4.3 Scheda guida per il parabolografo di Cavalieri – Parte II

La seconda parte della scheda sul parabolografo di Cavalieri si compone di cinque domande. Essa, analogamente al caso del parabolografo a filo, deve essere consegnata insieme all'immagine schematica a colori della macchina, inserita in Appendice C e riportata in Figura 3.3.

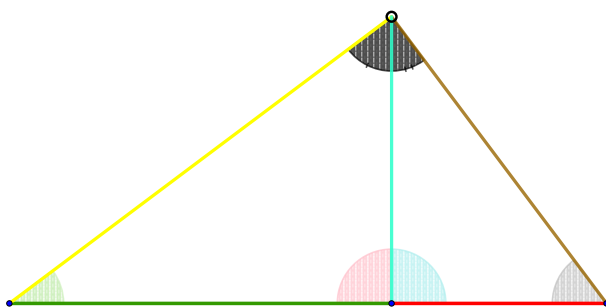


Figura 3.3: Immagine schematica a colori del parabolografo di Cavalieri.

La prima domanda riguarda l'individuazione delle corrispondenze disegno-macchina, e la richiesta è quella di specificare a quale colore è associato ciascun oggetto sulla macchina. Infatti, il quesito è

- V. Fissate la mina in un punto preciso.
Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

e ha lo scopo, non solo di agevolare i riferimenti successivi alle varie componenti del parabolografo, ma anche di guidare il processo di schematizzazione dello strumento, riducendolo all'ossatura.

La sesta domanda è la seguente

- VI. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate sulla macchina tutti gli elementi che li formano (in particolare lati, angoli, ecc.).
Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

e ha l'obiettivo di focalizzare l'attenzione dei ragazzi su ciò che varia e ciò che non varia durante il movimento della macchina, riprendendo e completando la risposta data al quesito numero quattro della prima parte della scheda. La cosa importante che dovrebbe emergere dalle misurazioni è che, nonostante il movimento, il triangolo principale che compone la macchina rimane sempre un triangolo rettangolo, fatto fondamentale per poter applicare, nel seguito, il secondo teorema di Euclide.

Le due domande successive sono formulate nel modo seguente

- VII. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se sì, scrivetela.

- VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

e sono state inserite con lo scopo di focalizzare l'attenzione dei ragazzi sulla proprietà che sfrutta la macchina per realizzare una parabola, cioè la relazione quadratica che risulta dal secondo teorema di Euclide applicato al triangolo rettangolo che compone lo strumento. Riferendosi alla Figura 3.4, che rappresenta una schematizzazione della macchina di Cavalieri, il secondo teorema di Euclide applicato al triangolo ABC dice che

$$CH^2 = AH \cdot HB. \quad (3.3)$$

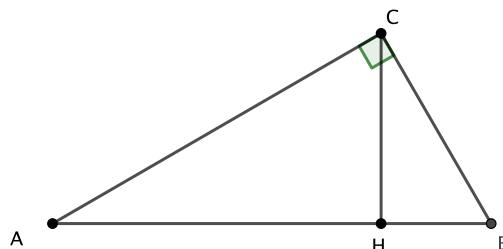


Figura 3.4: Schematizzazione del parabolografo di Cavalieri.

Entrando nello specifico dell'organizzazione della scheda, la domanda numero sette serve a guidare i ragazzi verso l'ipotesi della relazione esistente tra le aree espressa nell'Equazione (3.3), mentre la numero otto esplicita la richiesta di una dimostrazione per tale congettura. Le due richieste costituiscono il fulcro sul quale si concentrerà la successiva analisi, rivolta ad individuare elementi di continuità e discontinuità cognitiva nel processo di congettura-dimostrazione e il tipo di ragionamento utilizzato dai ragazzi per rispondere.

Infine, la domanda numero nove, così formulata

- IX. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento a voi più comodo.

sempre riferita alla relazione precedente (vedi Equazione (3.3)), è inserita allo scopo di costruire un collegamento tra piano sintetico e piano analitico, lasciando completa libertà ai gruppi nella scelta del riferimento cartesiano secondo loro più opportuno. Con questo quesito, si vuole lasciare spazio ai ragazzi di esprimere le proprie idee e vedere come ragionano in un ambiente a loro non ancora molto familiare: il piano cartesiano.

3.4.4 Scheda guida per i parabolografi – Parte III facoltativa

Le due schede presentate in questa sezione, che costituiscono la terza parte delle schede guida esplorative dei due parabolografi allegati in Appendice C, sono tra loro molto simili, nonostante si riferiscano a due macchine completamente diverse. Entrambe, infatti, sono composte da un unico quesito che lavora sulle possibili modifiche strutturali da apportare alla macchina e sono state pensate per i gruppi che terminano il lavoro di esplorazione sulle schede precedenti in anticipo rispetto agli altri.

Andando più nello specifico, per il parabolografo a filo la domanda è formulata come segue

X. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina:

- Cambiate il perno sul quale è agganciato il filo nell'asta verticale della macchina. Come cambia la curva tracciata?
- Come cambierebbe la curva avvicinando sempre di più il punto rosa alla retta nera? Provate a pensarci e fate delle ipotesi.

Con questo quesito si vuole lavorare sulle capacità di astrazione e di visualizzazione degli studenti, in quanto le modifiche richieste non sono attuabili nel concreto, e si vuole ampliare l'immaginario dei ragazzi rispetto alla curva in questione. Infatti, compiendo queste trasformazioni strutturali, la parabola disegnata cambia drasticamente, "aprendosi" sempre di più, fino ad arrivare, nel caso estremo, a coincidere con una retta.

Il quesito riferito, invece, al parabolografo di Cavalieri è il seguente

X. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina.

- Provate a modificare la lunghezza del lato rosso. Come diventerebbe la curva rispetto alla prima che avete disegnato?
- Come cambierebbe la curva tenendo fissi i lati rosso e verde? Provate a fare delle ipotesi e riportatele sul foglio.

e anch'esso, come il precedente, stimola l'immaginazione degli studenti con lo scopo di creare un collegamento tra parabola e circonferenza, guidando, grazie soprattutto al secondo punto, il passaggio da parabolografo di Cavalieri a compasso piano.

Occorre precisare che questi ultimi protocolli non sono indispensabili per il raggiungimento dell'obiettivo che si pone il laboratorio – quello cioè di studiare le due macchine matematiche e la parabola da un punto di vista sintetico, avviandosi verso la descrizione analitica della stessa – ma risulta comunque utile e stimolante per aumentare la padronanza dei ragazzi rispetto alla curva e per consolidare il concetto secondo cui ogni componente di una macchina matematica ha un ruolo ben preciso e funzionale allo scopo per cui è stata costruita.

3.5 Terza lezione

La terza e ultima lezione, tenutasi martedì 19 Novembre dalle 13 alle 14, era stata originariamente pensata come una ricapitolazione conclusiva di tutta l'attività, ma poiché le tempistiche del secondo laboratorio si sono allungate rispetto a quelle previste, si è deciso di strutturare quest'ultima ora a disposizione secondo due parti ben distinte.

La prima parte, che ha richiesto 40 minuti circa (un po' più del tempo previsto), si è incentrata sulla discussione collettiva delle risposte date alle domande numero IX delle due schede sui parabolografi. La motivazione risiede nel fatto che, durante la seconda sessione di laboratorio, ci si è accorti della difficoltà trovata dai ragazzi nell'impostare tale quesito e per questo, data la rilevanza didattica della richiesta, si è deciso di riprenderla insieme e chiarire i dubbi che erano emersi.

In questa fase, si è mostrato in un primo momento come poter ricavare l'equazione generale della parabola tracciata, separatamente per le due macchine, fissando gli assi cartesiani in maniera opportuna, in modo che le due equazioni ottenute risultassero identiche a meno di scambiare la x con la y . In particolare, per il parabolografo a filo si sono scelti come asse y il diametro della parabola (ossia l'asse di simmetria passante per il fuoco) e come asse x la retta ortogonale alla precedente, passante per il vertice della parabola; invece, per il parabolografo di Cavalieri, si sono scelti come asse x la scanala-

tura della macchina e come asse y la retta perpendicolare alla scanalatura passante per il vertice della parabola. Tali scelte, oltre ad essere dettate dalla necessità che i calcoli da effettuare per ricavare le equazioni delle due curve non fossero troppo complicati, sono state fatte tenendo conto delle alternative proposte dai gruppi che sono riusciti a procedere nella risoluzione dei quesiti, optando per i riferimenti che erano stati scelti dalla maggioranza degli studenti. In questo modo, si è riusciti a provare analiticamente ai ragazzi che le curve tracciate dalle due macchine sono effettivamente la stessa.

Si è, poi, anche accennato al fatto che un'equazione cartesiana, la quale descrive una determinata curva, dipende strettamente dal sistema di riferimento scelto, e per questo motivo è possibile che alcuni gruppi fossero giunti a soluzioni diverse, ma non per questo errate.

È inoltre possibile vedere la corrispondenza esistente tra le due curve tracciate, non evidente da un punto di vista sintetico considerando solo le proprietà che le macchine sfruttano per funzionare, ricercando gli elementi essenziali che compongono una macchina all'interno dell'altra e viceversa. Tale ricerca sta alla base di una dimostrazione sintetica che si è scelto di omettere, in quanto esula dagli scopi di un liceo linguistico. Per questo motivo, si è deciso di instaurare una discussione con gli studenti in modo da dargli solamente l'idea che sta dietro a tale dimostrazione, andando a ricercare gli elementi indispensabili per il funzionamento del parabolografo di Cavalieri (la struttura triangolare, l'angolo retto e la scanalatura sulla quale fissare il triangolo in metallo) e di individuarli – se presenti – all'interno del parabolografo a filo, altrimenti di inserirli – se non presenti – in maniera opportuna. In questo modo, i ragazzi hanno avuto un'ulteriore argomento a sostegno del fatto che le due macchine da loro analizzate, pur sfruttando proprietà differenti della parabola, realizzano in realtà la stessa curva.

La seconda parte della lezione, che si è protratta fino alla fine dell'ora, si è invece incentrata su una ricapitolazione di quanto svolto durante le due attività laboratoriali precedenti, ponendo l'attenzione su tutte le curve analizzate e riassumendo le proprietà che le caratterizzano. È stata dunque impostata una discussione guidata che partisse dalla puntualizzazione delle definizioni di *circonferenza* ed *ellisse*, passando poi a quella di *parabola* (in realtà già introdotta all'inizio della lezione), facendo in modo che emergesse-

sero dalle osservazioni dei ragazzi le proprietà che sfruttano le macchine matematiche da loro analizzate nelle lezioni precedenti per tracciarle. In questa fase ci siamo focalizzati sull'utilizzo corretto della nomenclatura (asse di simmetria, fuochi, direttrice, diametro, ecc.) in modo da avvicinare i ragazzi all'uso del linguaggio specifico, di cui avevano già sentito la necessità per comunicare tra loro senza fraintendimenti durante il laboratorio, a volte attribuendo il nome corretto agli oggetti sbagliati (si veda Capitolo 4 a pagina 113).

Con l'obiettivo di motivare lo studio effettuato su queste tre curve specifiche e di uniformare il discorso, si è poi introdotto il concetto di *conica*: tutte le curve viste fino a qui, assumono un'importanza notevole in matematica in quanto si ottengono come sezioni di un cono, cioè tagliando quest'ultimo con piani di diversa inclinazione. Per mostrare visivamente meglio a cosa ci stavamo riferendo, è stato realizzato un cono di diversi colori in materiale DAS ed è stato inciso lungo le quattro coniche, come mostrato in Figura 3.5.



Figura 3.5: Cono in DAS con incise le quattro sezioni coniche.

Grazie alle incisioni nere, ciascuna delle quali corrispondente a una curva diversa, l'oggetto a forma di cono, anche se non estremamente preciso, ha permesso anche alla ragazza

non vedente di comprendere cosa stava succedendo.

Partendo dall'analisi del cono, si è fatta notare inoltre la presenza di un'altra conica di cui ancora non si era parlato: l'*iperbole*. È stata brevemente introdotta la proprietà caratterizzante (il fatto che il valore assoluto della differenza delle distanze di un punto qualsiasi della curva dai due fuochi rimane costante) e si è mostrato ai ragazzi il funzionamento dell'*iperbolografo a filo*, realizzato appositamente per questa occasione e mostrato in Figura 3.6.

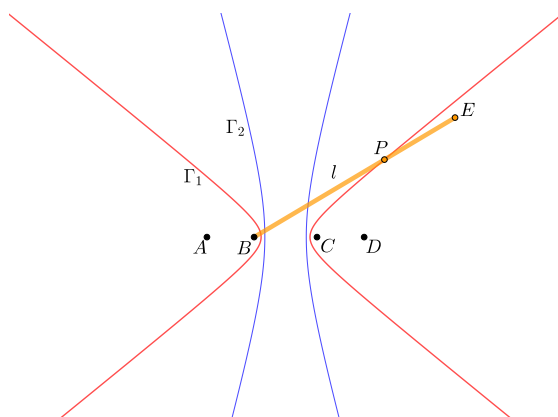
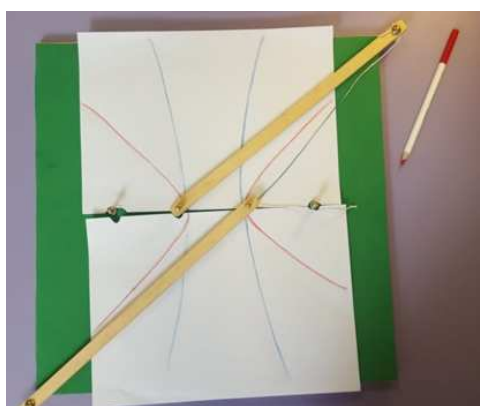


Figura 3.6: Fotografia e immagine virtuale dell'iperbolografo a filo.

La lezione, e l'attività nel suo complesso, si è conclusa mostrando due video che descrivono le *proprietà focali* di parabola ed ellisse.

Riguardo alla prima delle due coniche, si è deciso di mostrare un video sull'esperimento fisico degli specchi ustori². Tale esperimento consiste nel porre due superfici a specchio di forma parabolica una di fronte all'altra a distanza di qualche metro, e nel posizionare una lampadina in prossimità del fuoco di una delle due parabole e un pezzo di carta sul fuoco dell'altra. Accendendo la lampadina, dopo pochi secondi, il pezzo di carta comincia a prendere fuoco, in quanto i raggi luminosi emessi dalla lampadina, rimbalzando sulle due superfici, vengono concentrati nel fuoco opposto, facendo in modo che la temperatura aumenti bruscamente e incendiando la carta.

Partendo da questa proprietà della parabola, è stata poi chiarita l'origine del nome "fuoco", termine che era stato usato impropriamente da alcuni studenti durante la seconda

²Il video è reperibile al seguente link: https://www.youtube.com/watch?v=hHUY_yiMAVQ.

attività di laboratorio e che risiede proprio nell'uso che gli antichi facevano di questo tipo di oggetti a forma parabolica.

Riguardo invece all'ellisse, si è avuto tempo soltanto di mostrare un breve video sulla realizzazione di un biliardo ellittico³, senza riuscire ad approfondire ulteriormente l'argomento. Esso, come spiegato nel video, sfrutta nel suo funzionamento la proprietà focale della curva, e funziona posizionando una palla in uno dei due fuochi e una buca nell'altro fuoco: in questo modo, colpendo la palla da biliardo in qualsiasi direzione, essa finirà in buca, salvo considerare alcuni impedimenti concreti come le imprecisioni di manifattura nella costruzione o l'attrito con la superficie del tavolo.

³Il video è reperibile al seguente link: <https://www.r-craft.org/r-news/laser-beams-and-elliptical-billiards-euler-problem-144/>.

Capitolo 4

Analisi dell'attività in classe

In questo capitolo verranno prese in esame le risposte date dai vari gruppi di studenti ai quesiti delle schede guida proposte durante la sperimentazione in classe, alla luce della lente teorica illustrata nel Capitolo 2. La suddivisione del capitolo fa riferimento all'organizzazione in fasi proposta in classe per le attività, descritta in dettaglio nel Capitolo 3: si analizzeranno quindi, per iniziare, i protocolli riguardanti la prima lezione incentrata sull'esplorazione dell'ellissografo a filo, suddivisa a sua volta in due parti; si passerà poi a quelli relativi alla seconda lezione, di cui verranno confrontati dapprima gli elaborati riguardanti la prima attività su parabolografo a filo e di Cavalieri, e successivamente quelli sulla seconda parte, riferiti alle stesse macchine matematiche.

In chiusura al capitolo, saranno evidenziati gli aspetti positivi e le criticità incontrate durante la messa in opera dei laboratori, proponendo in tal senso soluzioni e possibili miglioramenti, e infine si tireranno le fila del lavoro svolto complessivamente.

4.1 Prima lezione

4.1.1 Analisi delle risposte – Parte I

Analizzando la prima domanda della scheda guida sull'ellissografo a filo, descritta in dettaglio nella Sezione 3.3.1 e di seguito riportata

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

si evincono subito comportamenti differenti messi in atto dai vari gruppi. Alcuni gruppi si sono trovati in difficoltà a rispondere poiché non avvezzi a prendere parte ad attività del genere, che prevedono la manipolazione di oggetti concreti: un paio di gruppi, infatti, hanno chiesto chiarimenti sul significato della consegna “Fate un disegno schematico della macchina”, non capendo a cosa ci si riferisse con il termine “macchina” (se al solo filo, oppure a tutto l'artefatto, compreso il piano in legno). Questo fatto dimostra come domande che, di primo acchito, possono sembrare banali ai nostri occhi, diventano invece spiazzanti per alcuni studenti che sono abituati a svolgere attività standard durante una lezione di matematica in classe.

Altri gruppi, invece, non hanno avuto problemi e hanno risposto in modo esaustivo, come si evince dall'esempio in Figura 4.1.

Occorre precisare che, spesso, come si evince dalle risposte date dagli studenti nei protocolli, viene usata già da subito una parola che non dovrebbe essere nel loro dizionario: il termine “ellisse”, talvolta trasformato erroneamente in “ellissi”. La motivazione risiede nel fatto che alcuni gruppi si sono accorti dell'etichetta attaccata sul bordo della loro macchina, ricoperta non troppo bene dai fogli di carta bianca e riportante il nome della stessa, e cioè la dicitura “ellissografo a filo”. A causa di ciò, molto probabilmente, si sono lasciati ispirare dall'etichetta e hanno cercato di ricavarne il nome della curva stessa, chiamandola con un nome improprio.

Per quanto riguarda le ipotesi sul funzionamento della macchina, molti gruppi hanno dapprima pensato che la macchina servisse per disegnare dei triangoli, in quanto tirando il filo e tenendolo teso, in effetti, vedevano materializzate questo genere di figure. Dopo pochi minuti però, tutti i gruppi (tranne uno) sono arrivati ad ipotizzare il reale funzionamento della macchina; alla formulazione dell'ipotesi sono giunti attraverso, dapprima, un *controllo ascendente*¹ (dalla macchina alla congettura): inserendo una matita all'interno del filo ad anello e simulando il movimento curvilineo, hanno ipotizzato che servisse per

¹Si veda la Sezione 2.1.1 del Capitolo 2 per la descrizione completa dei processi.

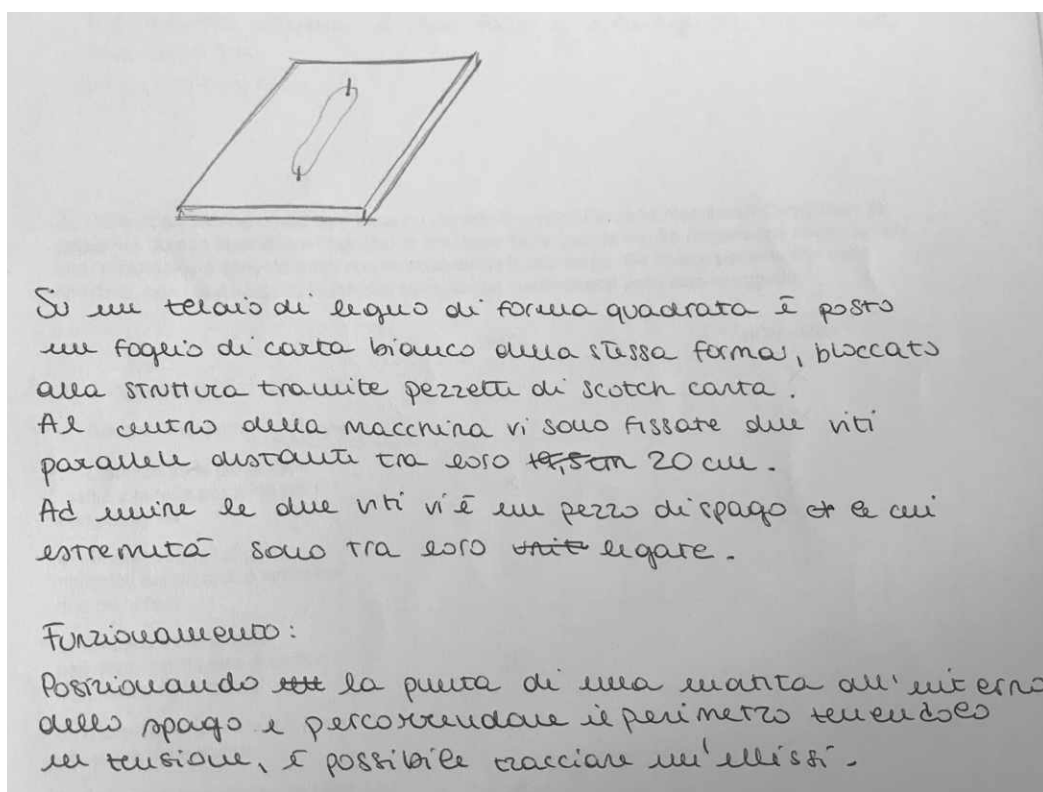


Figura 4.1: Esempio di risposta alla domanda I.

tracciare dei cerchi. Successivamente, si sono interrogati sulla proprietà caratterizzante la circonferenza (conoscenza teorica) e sono giunti, tramite un *controllo discendente* dalla teoria alla macchina e passando attraverso un *ragionamento abduttivo*, alla conclusione che la macchina non potesse realizzare circonferenze a causa della mancata equidistanza di ogni punto dal centro.

In particolare si riporta una delle conversazioni avvenute nel momento del controllo ascendente:

A : «Secondo me fa dei triangoli, guarda.»

B : «È vero che fa dei triangoli, ma non solo dei triangoli però. Può essere che serva a quello.»

[Infila una matita con la punta rivolta verso l'alto all'interno del filo ad anello, senza quindi tracciare nessuna curva sul foglio, ma solo simulando il movimento

ellissoidale]

A : «Sto provando a vedere se viene una forma. Io non lo so se venga un cerchio o meno.»

B : «È curva. Secondo me, sì, fa tipo un cerchio.»

E durante il controllo discendente, in cui è evidente l'abduzione:

A : «Le circonferenze sono quelle esattamente tonde.»

B : «Secondo me questa viene esattamente tonda.»

[Inserisce la matita all'interno del filo ad anello e traccia la curva]

A : «Dici? Ma no no, questo non è esattamente tondo. Cioè c'è molta più distanza qua che qua.» *[Indica i semiassi dell'ellisse]*

C : «Perché non c'è la stessa distanza dal centro.»

Un'altra osservazione interessante riguardante la prima esplorazione della macchina è emersa dalla ragazza non vedente: togliendo il filo ad anello da uno dei perni dello strumento e lasciandolo quindi vincolato solo all'altro perno, ha osservato che viene fuori una circonferenza, in quanto «il raggio *[lungo la metà del filo, pari alla distanza della matita dall'unico perno a cui è vincolato]* rimane costante». Tuttavia ha concluso che la macchina non potesse servire a fare delle circonferenze, in quanto, nel tracciarla, con la punta della matita sarebbe uscita dal piano di appoggio in legno.

In Figura 4.2 sono riportati alcuni esempi di risposte alla seconda parte della prima domanda.

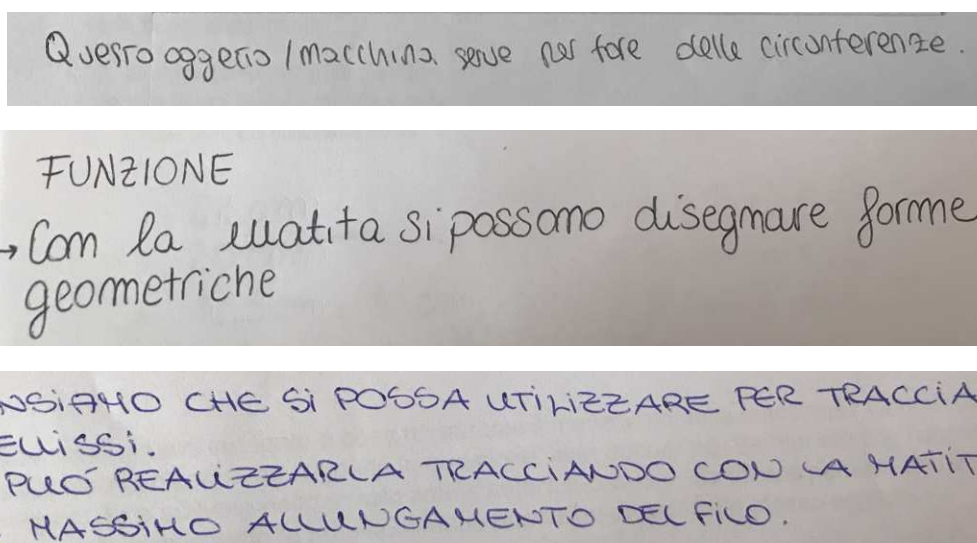


Figura 4.2: Esempi di risposta alla domanda I sul funzionamento della macchina.

Leggendo il secondo quesito, di seguito riportato

- II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

si evince che tutti i gruppi sono riusciti, in autonomia, a tracciare la curva. Molti di loro hanno capito fin da subito che si trattava di un'ellisse: probabilmente si sono confrontati tra loro e l'hanno accomunata all'orbita percorsa dal moto dei pianeti, come si vede dalla risposta in Figura 4.3.

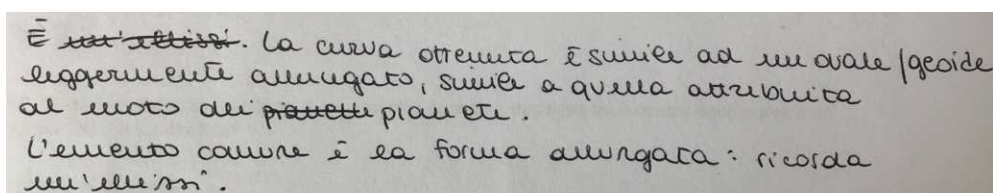


Figura 4.3: Esempio di risposta alla domanda II.

Interessanti sono state poi le considerazioni fatte da due gruppi: il primo ha accennato l'ellisse alla circonferenza, evidenziando come aspetto comune il fatto che sono entrambe curve chiuse, e come differenza la forma più "schiacciata" ai poli di una rispetto all'altra (vedi Figura 4.4).

LA CURVA REALIZZATA È UN' ELLISSI, PRESENTA FORMA OVALE
SIMILE A QUELLA DI UNA CIRCONFERENZA.
LA COMUNANZA LA TROVIAMO NEL FATTO CHE SI TRATTA IN ENTRAMBI
I CASI DI CURVE CHIUSE.
CIÒ IN CUI DIFFERISCONO È LA FORMA IN QUANTO L' ELLISSI PRESENTA
I POLI PIÙ SCHIACCIATI IL RAGGIO NON È COSTANTE

Figura 4.4: Esempio di risposta alla domanda II.

Il secondo ha invece osservato la somiglianza esistente tra l'ellisse e una "forma ovale", intendendo con tale espressione una forma ad uovo (vedi Figura 4.5) e sottolineando non solo la continuità e la chiusura delle due, ma anche facendo notare che la differenza principale risiede nel numero di assi di simmetria che le due curve presentano (vedi Figura 4.6).

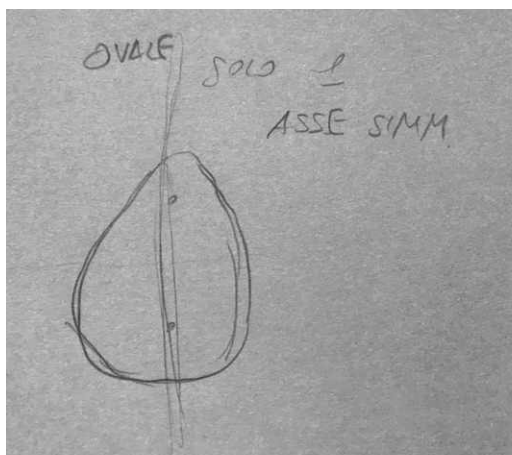


Figura 4.5: Disegno di una forma ad uovo e del suo unico asse di simmetria.

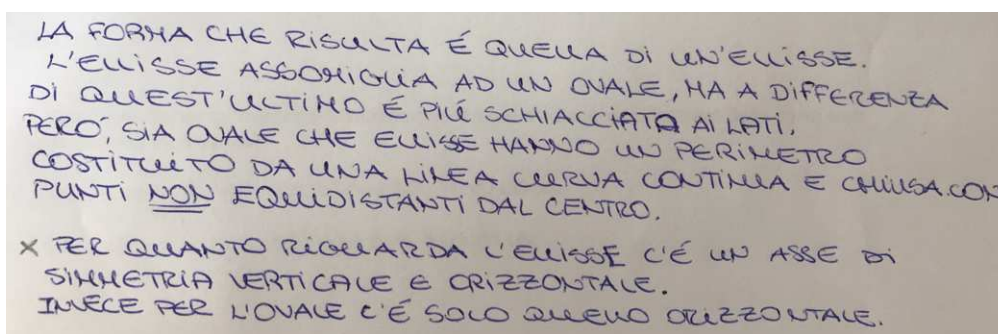


Figura 4.6: Esempio di risposta alla domanda II.

Una studentessa, durante la discussione collettiva al termine della prima parte dell'attività, ha osservato che sia l'ellisse che la circonferenza «non hanno né vertici né lati», nel senso che nessuna delle due curve presenta linee spezzate.

Infine, analizziamo la compilazione della tabella del terzo quesito, di cui in Figura 4.7 è riportato un esempio.

I punti 1 e 2 hanno avuto risposta pressoché immediata, senza bisogno di misurazioni. Anche i punti 3, 4, 5 e 6 sono stati compresi e le risposte date hanno messo tutti d'accordo sul fatto che gli oggetti in questione variano. Gli oggetti 7 e 8 hanno invece generato più disaccordi: solamente due gruppi, infatti, hanno risposto correttamente al fatto che la proprietà al punto 7 è invariante, mentre quella al punto 8 non lo è. La motivazione principale risiede in un'incomprensione linguistica diffusa, in quanto è stata interpretata dai ragazzi come la distanza esistente tra i due perni fissi sommata con la distanza esistente tra la punta della matita e uno dei due perni fissi, scelto a loro piacimento (che di conseguenza varia, poiché quest'ultima varia). Dopo aver chiarito tutti insieme il significato, i ragazzi non hanno avuto problemi a constatare l'invarianza delle misure. Analogo discorso vale per il punto 8.

Per concludere la fase di correzione collettiva, abbiamo voluto porre l'attenzione sulla relazione che lega i punti 1, 2 e 7, le uniche quantità che non variano. Introducendo dei

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate, nello spazio sotto la tabella, almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

	VARIA	NON VARIA
1. Lunghezza del filo		X
2. Distanza tra i perni		X
3. Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni fissi	X	
4. Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi	X	
5. Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita	X	
6. Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita	X	
7. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		X
8. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita	X	

1. 44 cm
 2. 20 cm
 3. LA VARIAZIONE È RAPPRESENTATA DALLA DISTANZA TRA LA MATITA E LA RETTA.
 4. 55° / 35°
 5. 90° / 35°
 6. 12 cm / 17 cm
 7. 24,5 cm
 8. 8,5 cm / 2,5 cm

Figura 4.7: Esempio di completamento della tabella III.

nomi per gli oggetti in questione e chiamando cioè

l = lunghezza del filo

b = distanza tra i perni

d_1, d_2 = distanze tra i perni e la punta della matita

i ragazzi sono riusciti ad arrivare da soli alla relazione che li lega (vedi Equazione (3.1)), intervenendo con osservazioni come: «che la proprietà non varia si ricava perché è somma di cose costanti», e giungendo infine alla formulazione matematica.

Proprio in quest'ottica emerge l'importanza della *discussione guidata* dall'insegnante al termine dell'attività, che permette, come in questo caso, non solo di correggere eventuali

incomprensioni del testo ed indirizzare il lavoro sulla via giusta, ma anche di puntualizzare i concetti più importanti, insistendo sulle cose che risultano più significative al fine dell'apprendimento.

4.1.2 Analisi delle risposte – Parte II

Nella seconda parte della scheda guida sull'ellissografo a filo, descritta nella Sezione 3.3.2, la domanda numero IV non ha destato particolari problemi.

IV. Qual è la distanza massima e minima che riuscite a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

In effetti, risultava molto simile alle domande già corrette della parte precedente, in quanto consisteva nella misurazione di oggetti. Un esempio di risposta si trova nella Figura 4.8, dove è messo per iscritto il ragionamento svolto dal gruppo per trovare i punti di massimo e minimo. I ragazzi hanno dapprima misurato la distanza dal centro di quattro punti presi in un arco di ellisse compreso tra due semiassi: due di essi erano quelli che avevano ipotizzato essere quelli di distanza minima e massima dal centro (cioè i due punti sui semiassi) e gli altri due erano scelti a caso. Successivamente si sono accorti che la loro ipotesi era corretta, in quanto la distanza cresceva gradualmente nel passaggio da un punto all'altro.

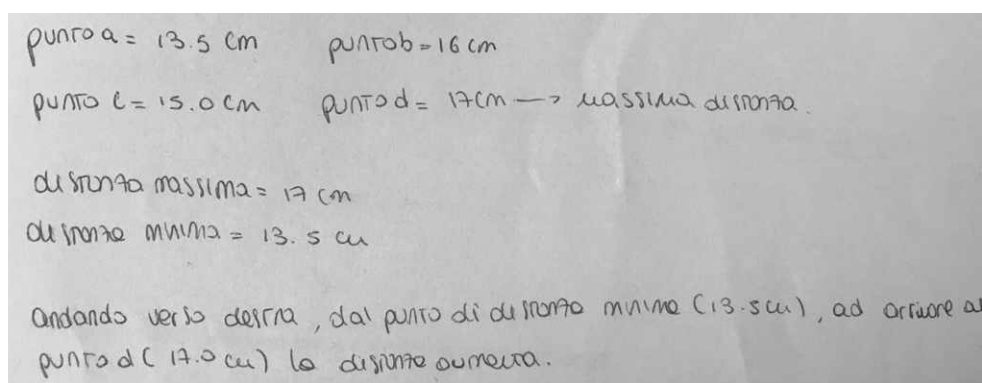


Figura 4.8: Esempio di risposta alla domanda IV.

Per quanto riguarda la quinta domanda sul centro e gli assi di simmetria,

V. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì disegnali sulla macchina.

si sono riscontrati atteggiamenti molto diversi tra i vari gruppi: alcuni hanno subito capito a cosa ci si riferisse e sono stati in grado immediatamente di individuare le risposte corrette; altri, invece, hanno avuto bisogno di tempo per ragionare sul concetto di centro e di asse di simmetria, tanto che uno dei gruppi ci ha chiamate per chiedere quale fosse la definizione esatta. Se da un lato il centro è poi stato individuato univocamente, dall'altro diversi gruppi hanno pensato, in un primo momento, che la curva possedesse infiniti assi di simmetria, avendo in mente l'esempio della circonferenza. Ma quando si sono trovati costretti dal testo della domanda a doverli disegnare sul piano della macchina, hanno constatato l'impossibilità di questa congettura, giungendo alla soluzione finale senza troppo sforzo.

Sulle risposte al sesto quesito, di seguito riportato

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni, ma di non cambiare la lunghezza del filo.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?
- E avvicinandoli?
- Se i perni coincidessero quale sarebbe la curva tracciata?

si è avuto un buon riscontro da parte di tutta la classe. Tutti quanti, infatti, sono arrivati alle risposte corrette, chi immaginando e visualizzando la situazione mentalmente, e chi sfilando lo spago dai perni della macchina e avvolgendolo attorno a due penne poste in verticale, in modo che fungessero da perni mobili. Alcuni esempi di risposte sono riportati in Figura 4.9, dove si distinguono diversi modi di ragionare: c'è chi ha descritto come si è trasformata la curva in termini di forma, chi invece ha analizzato come cambiano gli assi di simmetria, e chi si è concentrato sul variare della distanza tra la retta che congiunge i due perni fissi e la punta della matita.

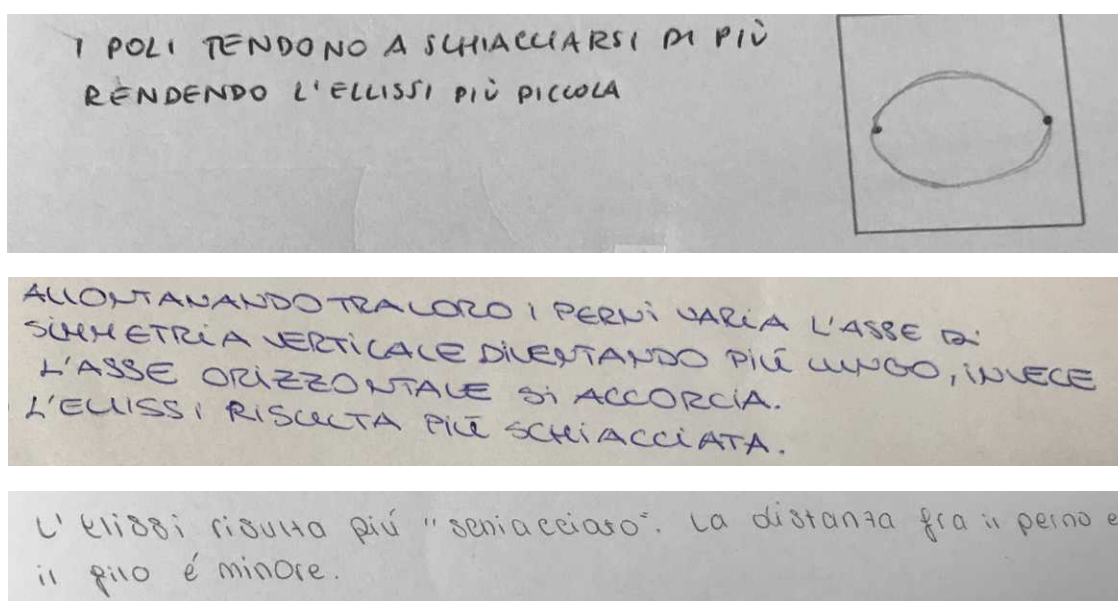


Figura 4.9: Esempi di risposta data al primo punto della domanda VI.

Un gruppo ha inoltre aggiunto alla sua risposta anche l'osservazione che non è possibile allontanare i due perni a piacimento, ossia c'è una distanza massima a cui è possibile metterli, poiché ad un certo punto il filo verrebbe teso al massimo e non si riuscirebbe più a disegnare nessuna curva.

Anche per quanto riguarda l'ultimo punto del quesito, tutti i gruppi sono arrivati a dire che sovrapponendo idealmente i perni si giungerebbe a tracciare una circonferenza. Quando gli è stato chiesto, durante la discussione, di motivare la loro scelta, molti ragazzi sono intervenuti affermando che diventa una circonferenza poiché «il punto è uno solo e il raggio diventa costante, lungo la metà del filo».

Arriviamo, infine, all'analisi del quesito numero VII, risultato, come ci aspettavamo, uno dei più ostici per i ragazzi.

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimete la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y .

Solamente un gruppo ha compreso perfettamente la consegna ed è arrivato alla so-

luzione finale (vedi Figura 4.10), mentre tutti gli altri gruppi hanno avuto bisogno di diversi chiarimenti da parte nostra.

$$\begin{array}{l}
 A(0;10) \\
 P(x;y) \\
 B(0;-10) \\
 P(x;y) \\
 \overline{AP+BP} \\
 \sqrt{x^2+y^2+100-20y} + \sqrt{x^2+y^2+100+20y} = 24
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 |d_1+d_2 = e-b| \\
 \overline{AP} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\
 \overline{AP} = \sqrt{(x-0)^2+(y-10)^2} \\
 \overline{AP} = \sqrt{x^2+y^2+100-20y} \\
 \overline{BP} = \sqrt{(x-0)^2+(y+10)^2} \\
 \overline{BP} = \sqrt{x^2+y^2+100+20y}
 \end{array}$$

Figura 4.10: Risposta corretta alla domanda VII.

In particolare, frequenti sono state le domande riguardanti quale fosse il generico punto P da considerare: molti non avevano compreso che dovesse essere preso giacente sulla curva, e altri hanno avuto difficoltà a capire che si trattasse di un punto generico, non avente delle coordinate numeriche precise. Anche l'individuazione della proprietà caratterizzante la curva non è stata immediata, nonostante al termine della discussione precedente fosse emersa chiaramente.

4.2 Seconda lezione

4.2.1 Analisi delle risposte sul parabolografo a filo – Parte I

In questa sezione verrà analizzata la prima parte delle risposte date alla scheda guida pensata per una prima esplorazione del parabolografo a filo e descritta in dettaglio nella Sezione 3.4.1.

Dall'analisi dei protocolli si evince che la prima domanda non ha destato particolari dubbi nella comprensione, in quanto i ragazzi l'avevano già incontrata durante la compilazione della scheda sull'ellissografo a filo.

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

Nello specifico, la descrizione della macchina è stata esauriente per tutti i gruppi, mentre riguardo al funzionamento della stessa sono emerse soltanto due ipotesi: due gruppi hanno pensato potesse servire per realizzare rette e triangoli rettangoli, supponendo di tenere il filo teso dall'apice della squadra in metallo e "ricalcando" con una matita la forma triangolare che si viene così a formare tra il filo, l'asta verticale in metallo e la base orizzontale di quest'ultima (vedi ad esempio Figura 4.11); un'altra ipotesi fatta dai ragazzi è stata quella che la macchina potesse realizzare dei semi-ovali, tenendo ferma la squadra in metallo e posizionando una matita tra il filo teso e l'asta verticale, percorrendo così tutto il perimetro del filo fino al perno centrale e tracciando un arco di ellisse avente i fuochi nel perno e nell'apice della squadra in metallo.

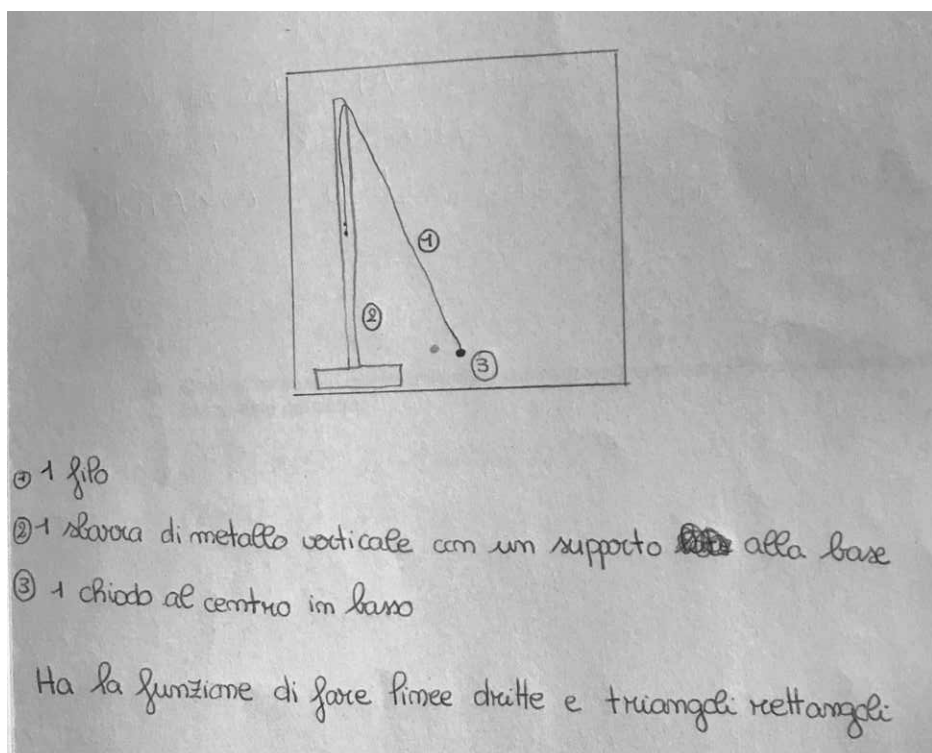


Figura 4.11: Esempio di risposta alla domanda I.

Per quanto riguarda la seconda consegna,

- II. Mantenendo il filo teso e accostato all'asta verticale della macchina con la punta di una matita, fate scorrere il lato orizzontale della macchina sulla guida rettilinea vincolata al piano del modello. Ripetete ora lo stesso procedimento posizionando la squadra a sinistra del perno centrale fissato al piano. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

essa è stata sicuramente quella che ha suscitato maggiori difficoltà tra i ragazzi, in quanto il meccanismo di funzionamento della macchina, seppur compreso teoricamente da tutti dalla descrizione sul foglio, risulta piuttosto complicato da eseguire nella pratica. C'è stato perciò bisogno di intervenire aiutando tutti e quattro i gruppi nel tracciare la curva in maniera che il disegno venisse pulito e senza sbavature. Una volta delineata la figura, nessuno dei ragazzi ha avuto dubbi sul fatto che l'oggetto in questione fosse una parabola, come si evince da ogni risposta scritta sui protocolli. Nonostante l'argomento delle coniche e, nello specifico, la parabola non fossero ancora stati trattati con un approccio sintetico, i ragazzi avevano già un'infarinatura sulla forma di questa curva: l'avevano infatti già incontrata l'anno precedente sia nella risoluzione di equazioni di II grado (quindi come grafico di una funzione quadratica), sia in quello che avevano studiato in fisica riguardo al moto dei corpi. Inoltre, va ricordato che risulta essere una forma abbastanza presente anche nella vita quotidiana (antenne paraboliche, profili di lampade, ecc.) e quindi familiare all'occhio comune.

Nella terza domanda, di seguito riportata

- III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

sono state evidenziate diverse differenze e similitudini con ellisse e circonferenza, ma nessun gruppo ha percepito la curva come illimitata, complice forse il disegno, che inevitabilmente si interrompeva al bordo del piano della macchina. In compenso, però, tutti i gruppi hanno notato che la principale differenza tra parabola e circonferenza/ellisse riguarda il fatto che la prima è una curva "aperta" mentre le seconde sono curve "chiuse", come si evince dagli esempi in Figura 4.12. Inoltre, un gruppo ha evidenziato anche la

presenza di un solo fuoco al posto di due, lavorando in analogia con la macchina dell'ellissografo a filo, in cui appunto i perni – come in questo caso – rappresentavano i fuochi della curva.

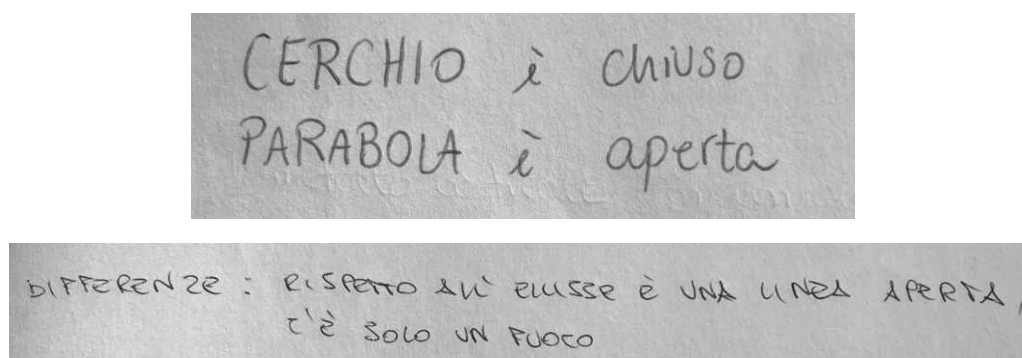


Figura 4.12: Primi esempi di risposta alla domanda III.

Due gruppi, invece, come mostrato dalle risposte in Figura 4.13, hanno accomunato parabola ad ellisse, pensando in un primo momento che una fosse la metà dell'altra. Queste risposte possono essere giustificate alla luce del fatto che nessuno studente aveva compreso che la curva fosse illimitata.

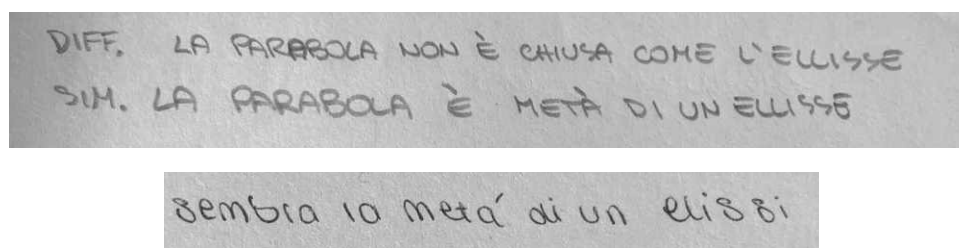


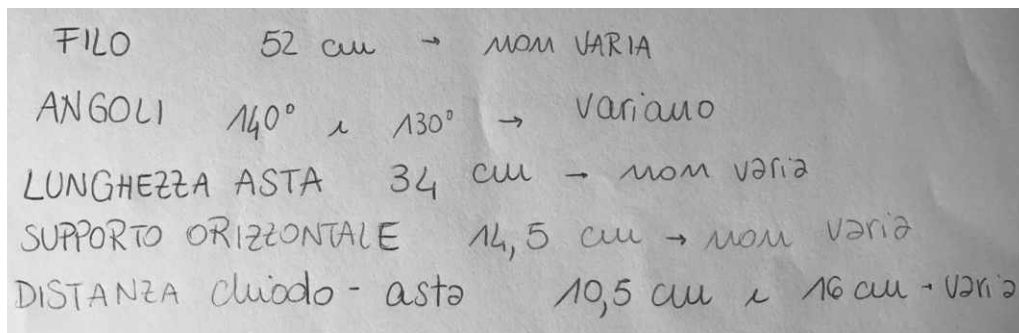
Figura 4.13: Altri esempi di risposta alla domanda III.

Nessun gruppo, infine, ha posto l'attenzione sugli assi di simmetria: questo fatto era prevedibile in quanto dalla struttura della macchina non salta all'occhio la presenza di alcun asse e inoltre essi non sono stati richiamati nel testo di nessuna domanda.

La quarta domanda, infine, è stata compresa da tutti i ragazzi. Essa era posta nel modo seguente

- IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.).
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

Tutti i gruppi hanno individuato come invarianti nel movimento la lunghezza del filo e dell'asta verticale e si sono poi concentrati sulla misurazione di diversi oggetti: c'è stato chi si è limitato alle componenti dello strumento (lunghezza della base orizzontale in metallo), chi ha analizzato anche gli angoli che si formano durante il movimento della macchina tra asta verticale e filo teso, e chi invece ha posto l'attenzione sulle distanze perno-asta e perno-matita. Un esempio è illustrato in Figura 4.14.



FILLO	52 cm	→ non VARIA
ANGOLI	140° e 130°	→ Variamo
LUNGHEZZA ASTA	34 cm	→ non varia
SUPPORTO ORIZZONTALE	14,5 cm	→ non varia
DISTANZA chiodo - asta	10,5 cm e 16 cm	→ varia

Figura 4.14: Esempio di risposta alla domanda IV.

4.2.2 Analisi delle risposte sul parabolografo di Cavalieri – Parte I

Contemporaneamente alla compilazione della prima parte della scheda sul parabolografo a filo, analizzata nella sezione precedente, altri quattro gruppi di studenti hanno lavorato sul parabolografo di Cavalieri, rispondendo alle domande della scheda illustrata nella Sezione 3.4.1 e di seguito analizzata.

Il primo quesito, che riguarda la descrizione e le ipotesi sul funzionamento della macchina, non ha suscitato particolari difficoltà.

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

Un esempio di risposta riguardante la descrizione dello strumento in tutte le sue parti è illustrato in Figura 4.15, mentre per quanto riguarda il funzionamento, poiché nessuno ancora aveva individuato la presenza di un portamina sul vertice in alto della macchina, tutte le congetture si sono indirizzate verso la possibile costruzione di triangoli rettangoli. Tre gruppi su quattro, facendo scorrere la struttura in metallo sul piano in legno, hanno notato subito i tre angoli retti che si formano – quello con origine nel portamina e quelli realizzati tra l’asta verticale e la scanalatura orizzontale del piano – e hanno pensato che la macchina servisse da guida in modo da poter “ricalcare” tali figure con una matita.

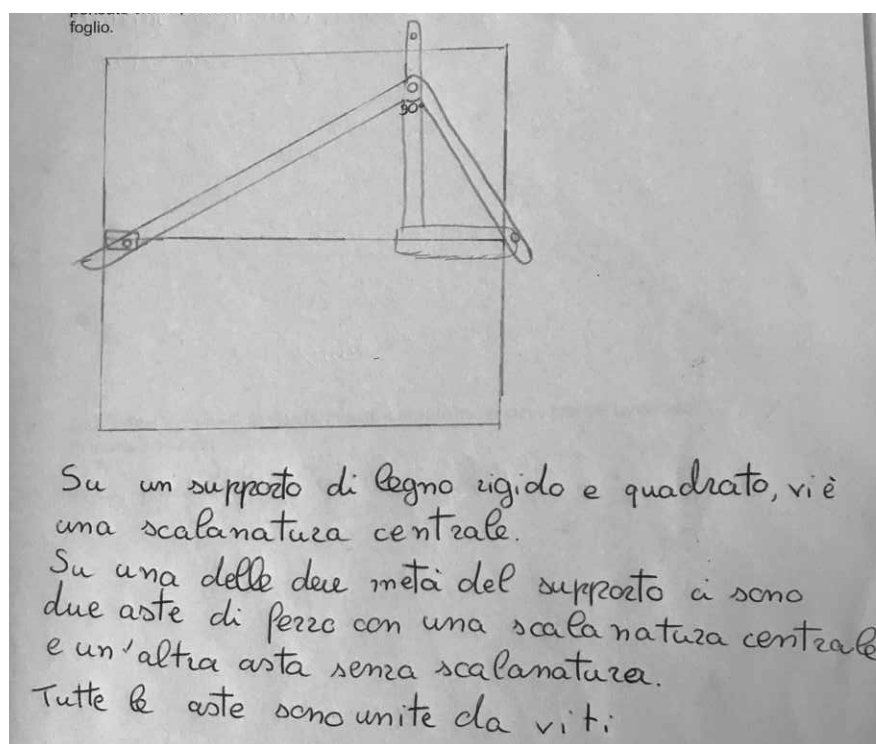


Figura 4.15: Esempio di descrizione della macchina richiesta nella domanda I.

Per quanto riguarda la seconda domanda, di seguito riportata

- II. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

sicuramente si è riscontrato che questa macchina è risultata più semplice da utilizzare rispetto al parabolografo a filo. L'unico ostacolo che ha impedito ad alcuni gruppi di comprendere in autonomia il funzionamento dello strumento è stata l'individuazione del portamina, nominato nel testo. In particolare, un gruppo ha immediatamente localizzato la punta scrivente, mentre un altro, quello della ragazza non vedente, si è interrogato in questo modo:

[A legge la domanda numero due ad alta voce]

B : «Portamina? Dov'è il portamina?»

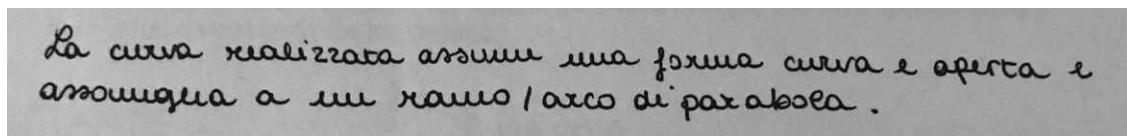
A : «Proviamo a ragionare: se la struttura si muove così, dov'è che andrà la punta che traccia?»

[Muovono la macchina e la fanno toccare alla ragazza non vedente]

A : «Questo è l'unico punto che si muove, dovremo metterla qui la matita. Gli altri rimangono fermi.»

Gli altri due gruppi, invece, hanno avuto bisogno di un nostro intervento per capire dove fosse posizionata la mina.

Una volta tracciata la curva, poi, due gruppi hanno pensato subito ad un arco di parabola (vedi ad esempio la risposta data in Figura 4.16), mentre agli altri due la somiglianza non è parsa evidente.



La curva realizzata assume una forma curva e aperta e assomiglia a un ramo / arco di parabola.

Figura 4.16: Esempio di risposta alla domanda II.

Hanno quindi provato a descrivere la traiettoria tracciata guardandola da diversi punti di

vista e facendo delle similitudini con oggetti: ad alcuni è venuta in mente una mezzaluna, una canoa o una mezza fragola, mentre ad altri il profilo di una collina «con la punta molto erosa», ad evidenziare appunto l'assenza di linee spezzate e vertici appuntiti.

Interessanti sono state le osservazioni fatte da parte del gruppo della ragazza non vedente, subito dopo aver tracciato la curva, riguardo alla funzione della macchina matematica e alla natura della curva stessa:

A : «Questa curva c'entra con questo triangolo? [*si riferisce all'arco di parabola tracciato e alla struttura triangolare in metallo che compone la macchina*] Se prendi un'estremità di questa curva e la sposti, questa curva può servire a realizzare il triangolo.»

B : «No, è questo triangolo che serve a tracciare la curva, non la curva che serve a tracciare il triangolo.»

[...]

A : «In questo triangolo ci sono caratteristiche precise affinché questo triangolo si possa inscrivere in un cerchio, perché, se non mi sbaglio, deve avere un angolo di novanta gradi.»

B : «Ma perché è venuta fuori questa cosa?»

A : «Perché la curva magari non è un cerchio, ma appena lei l'ha prolungata così io ho pensato a un cerchio. Quindi magari è un pezzo di cerchio.»

Proprio questa discussione ha aperto la strada alla domanda successiva, in merito alla quale è stata riportata nel seguito la discussione dei ragazzi dello stesso gruppo.

Tra le risposte date dai vari gruppi alla terza domanda,

III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

la più completa è riportata in Figura 4.17, nella quale vengono elencate le differenze e le similitudini trovate tra arco di parabola ed ellisse, retta e circonferenza.

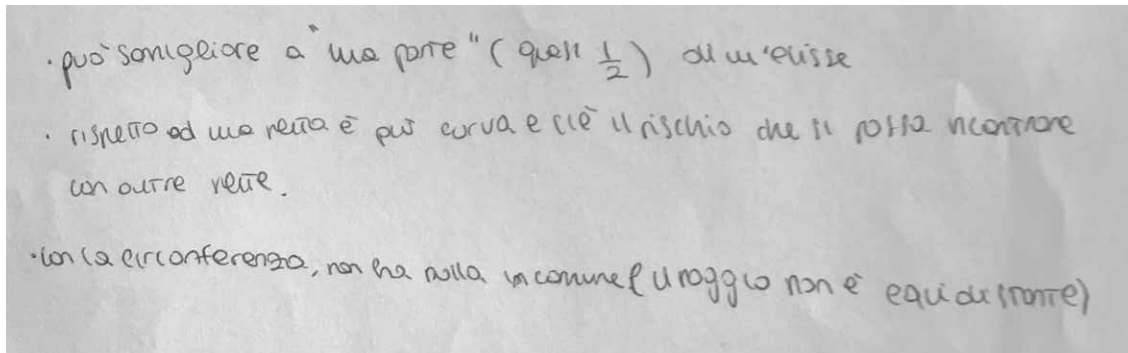


Figura 4.17: Esempio di risposta alla domanda III.

A tal proposito, una delle conversazioni di confronto avvenute tra i ragazzi del gruppo della ragazza non vedente per rispondere alla domanda III, che si ricollega al tema affrontato dagli stessi nella discussione a pagina 107 e che poi però non è stata trascritta sul foglio per questioni di tempo, è la seguente:

A : «Ma la curva è chiusa? Cioè se noi continuassimo a disegnare che cosa sarebbe?»

B : «Non riusciamo a disegnarlo.» [*intende che non riescono a prolungare il disegno con la macchina perché ad un certo punto il meccanismo si blocca*]

A : «Quindi è una linea che continuerebbe all'infinito, ma che non va a chiudersi.»

B : «Magari andando avanti a forza di curvarsi si chiude.»

C : «Ricorda una parabola, ma la parabola quando la fai ha una fine da una parte [*intende il vertice*]. Cioè la parabola non è infinita perché ha un inizio, mentre questa no.»

Da questo scambio di battute si evince chiaramente il fatto che i ragazzi si siano interrogati sulla proprietà di limitatezza della curva e sul fatto che sia chiusa o meno, facendo delle ipotesi a riguardo, senza però riuscire ad arrivare ad una conclusione univoca a causa delle criticità – alcune evitabili, altre inevitabili – dovute alla fabbricazione dello strumento e alla sua natura finita: una di esse riguarda il fatto che, per questioni costruttive, la macchina non permette di disegnare perfettamente tutto l'arco di parabola a partire dal vertice, lasciando quindi nei ragazzi il dubbio che possa continuare ad andare

all'infinito sia da un lato che dall'altro, senza mai "invertire il verso della sua direzione". A tal proposito, abbiamo deciso di intervenire per completare il disegno della curva fino a raggiungere il vertice, in modo tale che si capisse l'inversione di rotta che ad un certo punto la curva effettua.

Occorre osservare, inoltre, che, a differenza del caso del parabolografo a filo, l'interpretazione della natura della curva e delle sue caratteristiche è risultata molto più complicata per i ragazzi nel caso del parabolografo di Cavalieri. Infatti, anche se la macchina a filo per tracciare la parabola, in un primo momento, è risultata più difficile da utilizzare nella pratica rispetto a quella di Cavalieri, essa ha però permesso di disegnare una parabola per intero e non solo un arco di parabola. Questo fatto ha agevolato i ragazzi che lavoravano con la macchina a filo, i quali sono riusciti ad analizzare la curva più facilmente poiché quasi nulla era lasciato all'immaginazione (solo l'illimitatezza dei due rami) e si sono subito accorti che si trattava proprio di una parabola, collegamento che è risultato meno evidente nel caso dell'altra macchina.

La domanda numero quattro, infine, posta nel modo seguente

- IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc).
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

è stata completata in maniera esauriente soltanto da due gruppi su quattro: con ciò, si intende che un gruppo – quello della ragazza non vedente – per questioni di tempo non è riuscito ad arrivare a quel punto, mentre un altro gruppo, pur elencando correttamente alcuni oggetti che variano e non variano sulla macchina, non è riuscito ad individuare l'invariante su cui si voleva che gli studenti ponessero l'attenzione, e cioè l'angolo retto con vertice nel portamina. Gli altri due gruppi, invece, hanno subito individuato l'angolo retto a prima vista, senza neanche misurarlo, e ne hanno avuto poi conferma rispondendo a quest'ultimo quesito (vedi Figura 4.18 per un esempio di risposta esauriente a tale quesito).

COSTANTE	VARIA
$\alpha = 90^\circ$ $\beta = 90^\circ$	d tra la ruota e il fuoco = 22,5 cm, 16 cm e 14,5 cm, 13,5 cm
l barre = 34,5 cm, 21,5 cm, 14,5 cm.	$\gamma = 70^\circ, 55^\circ$
Summa angoli interni	$\omega = 20^\circ, 35^\circ$
	$h = 16 \text{ cm}, 8 \text{ cm}$

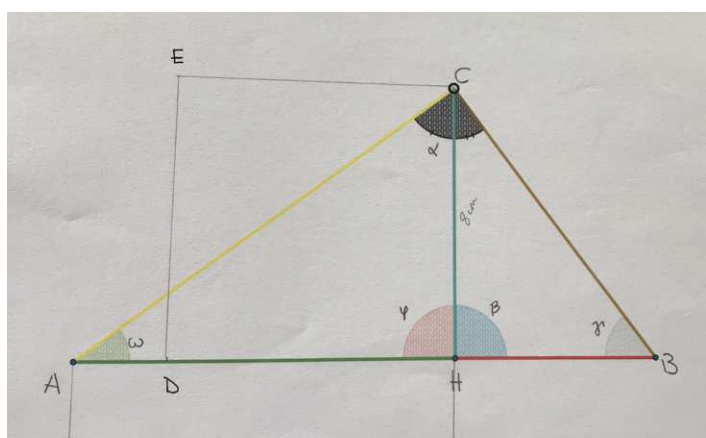


Figura 4.18: Esempio di risposta alla domanda IV con allegata l'immagine necessaria a comprendere i riferimenti agli angoli.

4.2.3 Analisi della discussione *inter pares*

Come spiegato nella Sezione 3.4, tra la prima e la seconda parte delle schede guida sui due parabolografi, si è scelto di fare interagire i gruppi, accoppiando ciascuno dei quattro gruppi aventi il parabolografo a filo con uno dei quattro che aveva lavorato sul parabolografo di Cavalieri.

Gli scopi di questa scelta sono principalmente due:

- innanzitutto si vuole fare in modo che tutti gli studenti possano entrare in contatto con entrambe le macchine e fare confronti tra di esse (per quanto riguarda la struttura, il metodo di funzionamento, ecc.) e tra le curve che tracciano;
- inoltre, si vuole stimolare il confronto e il dialogo tra pari, nell'ottica secondo cui la discussione in piccoli gruppi può consentire di risolvere eventuali dubbi a cui non

si è riusciti ad ovviare da soli e può far emergere nuove osservazioni a cui non si aveva pensato ragionando in autonomia.

Analizzando le registrazioni effettuate durante la discussione, si evince come i ragazzi, che in un primo momento sono sembrati più timidi e imbarazzati nel dover presentare dei risultati ai loro compagni (probabilmente perché non avevano mai preso parte ad attività di questo genere), si sono poi sciolti e hanno cominciato a parlare più liberamente, intervenendo – chi più e chi meno, a seconda dei vari gruppi – e chiedendo chiarimenti ai membri dell'altro gruppo se non avevano compreso qualcosa.

La discussione si è aperta, per ogni gruppo allargato, con la spiegazione del funzionamento della macchina in questione ai compagni: la descrizione è stata dettagliata e ne è stato mostrato il funzionamento; solo un paio di gruppi, tra i quali quello della ragazza non vedente, hanno ritenuto opportuno che ognuno dei membri del gruppo opposto provasse personalmente lo strumento, mentre gli altri si sono limitati ad osservare il meccanismo. Riguardo al primo punto dell'elenco, dalla discussione di uno dei gruppi è emersa chiaramente una fase di confronto tra le due macchine: mentre uno dei membri del gruppo sul parabolografo a filo stava descrivendo la macchina, un ragazzo del gruppo sul parabolografo di Cavalieri è intervenuto, chiedendo delucidazioni riguardo la funzione di una parte della macchina e cercando di trovare se esisteva un corrispondente nel suo strumento. Di seguito è riportato il dialogo avvenuto, dove con **C** è indicato l'interlocutore relativo al parabolografo di Cavalieri, mentre con **F** quello relativo al parabolografo a filo:

C : «Ma questi due perni che voi chiamate fuochi, hanno un ruolo? A cosa servono?»
[*Si riferisce ai due perni fissati sull'asta verticale, erroneamente chiamati "fuochi"*]

F : «No, secondo me no, non servono a niente.»

C : «Ma di qua invece? Noi non li abbiamo i fuochi.» [*Indica la macchina di Cavalieri*]

F : «Forse questi due?» [*Si riferiscono a due bulloni più sporgenti presenti sull'asta in metallo orizzontale, aventi solo scopo di fissaggio e inutili per il corretto funzionamento della macchina*]

Riguardo invece al secondo obiettivo per cui si è scelto di fare interagire i gruppi, solamente all'interno di una delle quattro coppie di gruppi formatisi, un membro del gruppo opposto è intervenuto a completare la risposta che gli altri avevano dato. In particolare, mentre alcuni studenti stavano descrivendo la loro risposta all'ultima domanda della scheda riguardante la ricerca degli invarianti del parabolografo di Cavalieri, una ragazza è intervenuta chiedendo delucidazioni riguardo il variare o meno degli angoli, in quanto si erano concentrati solo sull'analisi di lunghezze. A fronte di questa osservazione, tutti i ragazzi dei due gruppi hanno collaborato, facendo ipotesi durante il movimento della macchina e provvedendo alla misurazione degli angoli, e infine osservando che alcuni di essi – gli angoli retti – non variano.

Questo processo di confronto tra pari, nonostante la timidezza legata al fatto che fosse un'esperienza inusuale non abbia aiutato i ragazzi ad esprimersi liberamente, ha però prodotto dei buoni spunti, a supporto del fatto che una tale attività può essere utile ai fini didattici, e inoltre ha consentito agli studenti di fare esperienza di un tipo di approccio, quello del lavoro e della discussione a gruppi, utile in molte altre circostanze, oltre a quelle scolastiche.

4.2.4 Analisi delle risposte sul parabolografo a filo – Parte II

Il quesito che apre la seconda parte della scheda sul parabolografo a filo, da come si evince dalla spiegazione in Sezione 3.4.2 e dalla seguente consegna

- V. Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

ha lo scopo di indirizzare i ragazzi verso la schematizzazione dello strumento, al fine di fargli comprendere quali elementi sono veramente necessari al funzionamento della macchina e quali no, e inoltre è utile per semplificare i riferimenti nei quesiti successivi. Nello svolgimento, non tutti i gruppi sono arrivati autonomamente all'individuazione corretta dei colori: in particolare, solamente un gruppo è riuscito ad associare le corrispondenze corrette (vedi la Figura 4.19 per la risposta), mentre per gli altri tre gruppi è risultata fuorviante la presenza di due perni, fissati all'asta verticale, che avevano il solo

scopo nello strumento di fungere da diversi agganci per il filo, e che sono stati scambiati per i punti verde e azzurro nell'immagine virtuale a colori. In effetti, questi due perni non erano stati rappresentati nell'immagine a colori, poiché effettivamente non servono per il funzionamento della macchina, e questo ha confuso la maggior parte dei ragazzi. A proposito di tali perni, interessante è notare che un gruppo ha deciso di chiamarli “fuochi” della curva pur non avendo ancora definito chiaramente cosa fossero, ragionando in analogia con l'ellissografo a filo nel quale i fuochi erano appunto due.

Tutti i ragazzi hanno però osservato che, nel caso delle loro macchine, i punti giallo e nero coincidevano: in particolare, si era deciso di distinguerli nel disegno colorato per rendere più versatile possibile l'uso della scheda, in modo da renderla adattabile anche a situazioni in cui i due punti erano effettivamente distinti. Questo fatto ha però permesso di mettere alla prova le capacità di confronto e osservazione degli studenti, che non si sono fatti ingannare dal disegno.

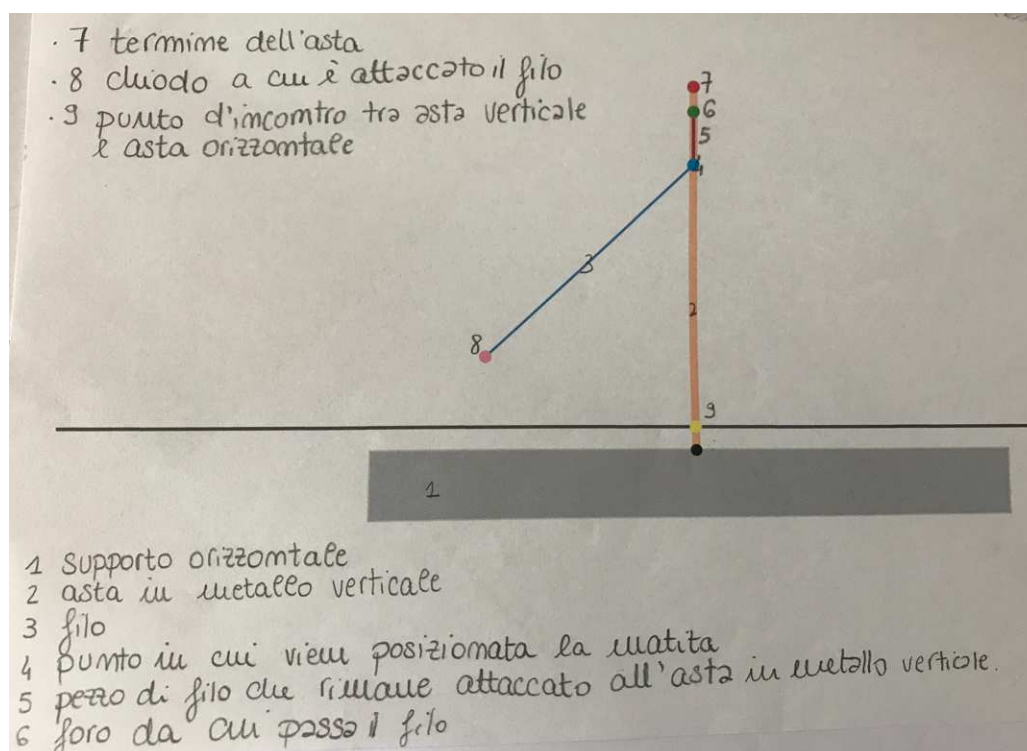


Figura 4.19: Esempio di individuazione corretta delle corrispondenze oggetto-colore.

Prima di procedere con le domande successive, ci siamo assicurate che le corrispondenze venissero chiarite e corrette, così che tutti quanti potessero procedere senza intoppi nella comprensione del resto della scheda.

La sesta domanda è risultata molto semplice per tutti i gruppi, poiché si trattava soltanto di effettuare due misurazioni e di confrontarle, notando che erano uguali, salvo eventuali errori di misurazione e di manifattura. Analogo discorso vale per la settima domanda, alla quale tutti gli studenti che lavoravano con il parabolografo a filo hanno risposto correttamente, osservando che le distanze fuoco-matita e direttrice-matita risultavano coincidenti o molto simili. Per comodità di lettura, riportiamo di seguito i testi delle due domande

VI. Quanto è lungo il filo che compone la macchina, misurato partendo dal punto verde al punto rosa? Quanto è lunga l'asta arancione nella macchina, misurata partendo dal punto verde a quello giallo? Misurateli e confrontateli.

VII. Misurate la distanza sulla macchina tra il punto celeste e la retta nera. Poi quella tra il punto celeste e il punto rosa. C'è una relazione tra queste due distanze? Se sì, scrivetela.

Il quesito numero VIII, come già spiegato nella Sezione 3.4.2, risultava centrale al fine di giustificare la proprietà caratteristica della curva, facilmente individuata da tutti i gruppi al punto precedente e sfruttata dalla macchina matematica per funzionare. Esso era posto nel modo seguente

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a giustificare perché è valida.

I ragazzi non hanno avuto troppe difficoltà a capire il motivo per cui tale relazione valesse, ma soltanto un gruppo è riuscito a esplicitare in maniera logicamente corretta il concetto che intendeva (vedi Figura 4.20). Sempre a proposito della Figura 4.20, è interessante osservare che l'unico gruppo che ha mostrato di saper produrre una dimostrazione logicamente corretta, ha, però, avuto difficoltà nell'uso del linguaggio specifico:

utilizzano infatti la parola “coincidenti” al posto di “congruenti”, intendendo lo stesso concetto ma esprimendolo in maniera non del tutto esatta dal punto di vista formale.

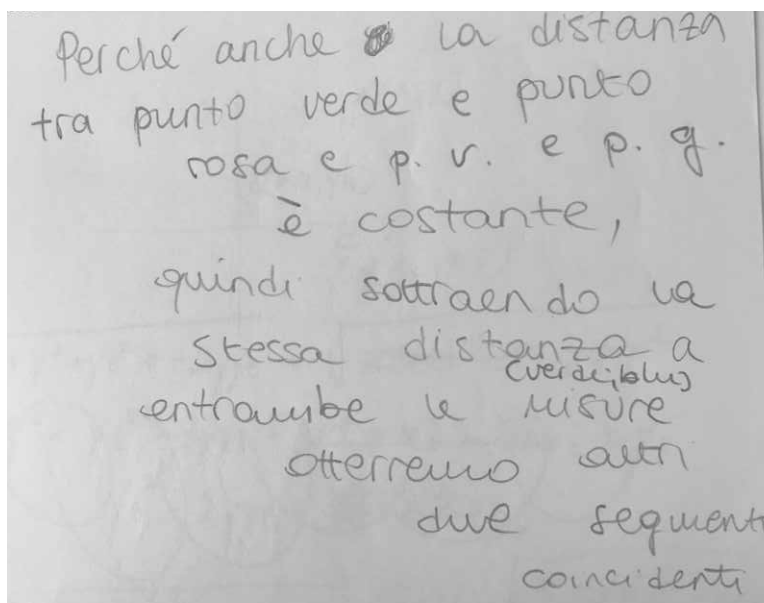


Figura 4.20: Esempio di risposta alla domanda VIII.

Dalla risposta si evince come il processo di *distanziamento globale*² sia, in questo caso, avvenuto con successo, in quanto i componenti del gruppo hanno dapprima controllato e riletto tutto ciò che era stato prodotto nei processi di esplorazione precedente (con riferimento alle risposte date alle domande VI e VII), hanno selezionato ciò che risultava significativo ed essenziale per la dimostrazione e, senza bisogno di effettuare nuove esplorazioni, hanno prodotto la dimostrazione finale vera e propria, mostrando *unità cognitiva* tra la fase di formulazione della congettura e quella di produzione della dimostrazione. Negli altri casi, invece, nonostante sia dalle risposte che dai dialoghi emerga il fatto che i ragazzi avevano compreso ciò che stava succedendo, si assiste al manifestarsi di una *discontinuità concettuale*: durante la fase di argomentazione e costruzione della dimostrazione, infatti, sono espressi riferimenti a fatti matematici (riguardanti le risposte date alle due domande precedenti) che poi non vengono riportati nella dimostrazione finale vera e propria, i quali sono però necessari alla costruzione di una catena logica di deduzioni.

²si veda la Sezione 2.1.1 nel Capitolo 2 per la descrizione completa del processo.

Un esempio di tale fenomeno è quello riportato dal seguente dialogo, nel quale si riesce a capire che i ragazzi hanno effettivamente compreso la motivazione esatta che sta dietro alla dimostrazione.

[*Leggono il testo della domanda ad alta voce.*]

A : «Qual è la relazione che dice?»

B : «È che sono equivalenti le distanze, sono tutte e due di 16 cm.»

A : «Ah, bè allora è facile: cioè questi due sono lunghi uguale [*si riferisce alla lunghezza del filo e dell'asta in metallo*], e quando ci metti la matita qua per forza anche questi due pezzi sono equivalenti.»

C : «Sì ok è vero. Ma come lo scriviamo?»

A : «Metti che il filo è sempre uguale, quindi questo e questo sono equivalenti perché...»

C : «Aspetta, meglio “la lunghezza del filo”.»

A : «Sì ok, la lunghezza del filo è sempre uguale, quindi la distanza tra questo punto e questo [*probabilmente si riferisce alla distanza tra punto celeste e punto rosa*], e questo punto e questo [*si riferisce alla distanza tra punto celeste e un punto preso sulla direttrice nera*] sono equivalenti.»

C : «Aspetta, ora lo scrivo.»

Leggendo solamente il corrispondente protocollo prodotto, riportato in Figura 4.21, non si capisce, però, cosa intendano: pur facendo riferimento al fatto che il filo ha lunghezza costante, si dimenticano di specificare che anche l'asta ha lunghezza fissa ed esattamente uguale a quella del filo, e non esplicitano minimamente il fatto che l'uguaglianza dei segmenti in questione derivi dalla differenza di queste due lunghezze tra loro uguali con quella di un segmento in comune. Si evince inoltre un uso scorretto del linguaggio specifico, poiché manca uno dei due soggetti necessari a dare un senso al predicato verbale “rimangono equivalenti”.

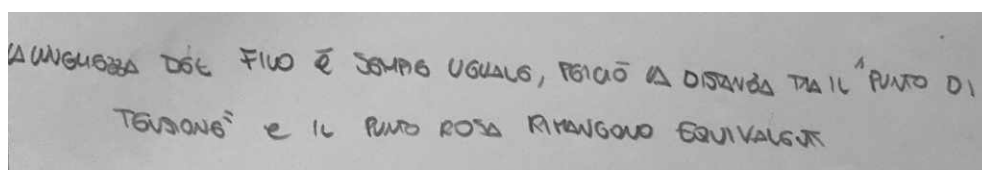


Figura 4.21: Altro esempio di risposta data alla domanda VIII.

Infine, l'ultima domanda, di seguito riportata, è quella che ha suscitato, come ci si aspettava, maggiori perplessità tra i gruppi.

IX. In caso aveste risposto affermativamente al punto VII, provate a tradurre tale relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento per voi più comodo.

Nonostante infatti, durante la sperimentazione precedente sull'ellissografo a filo, avessimo corretto tutti insieme il quesito relativo all'individuazione dell'equazione cartesiana dell'ellisse sfruttando la proprietà caratteristica della macchina, l'analogia in generale non è stata colta, e di conseguenza solamente un paio di gruppi sono riusciti a rispondere a questa domanda. Il problema è sorto proprio a partire dalla scelta degli assi cartesiani: mentre per l'asse x praticamente tutti hanno convenuto che fosse opportuno scegliere la retta direttrice (probabilmente spinti anche dal fatto che era appunto già "tracciata" sul piano, quindi veniva automatico sceglierla), per l'asse y quasi tutti i gruppi hanno pensato di riferirsi all'asta verticale, senza però soffermarsi sul fatto che l'asse di un riferimento cartesiano deve rimanere fisso mentre l'asta della macchina è mobile. Solamente un gruppo ha posto, senza bisogno di aiuto, l'asse y in posizione "fissa" e perpendicolare alla direttrice, passante per il perno centrale. Lo stesso gruppo si è poi domandato se quella fosse la posizione corretta da scegliere, in quanto avendo scelto il generico punto sulla curva di coordinate (x, y) "a sinistra" dell'asse y , si sono accorte che quel punto «viene negativo».

Una volta chiarito il sistema di riferimento cartesiano, due gruppi sono riusciti a esprimere la relazione caratteristica sulle distanze (vedi Equazione 3.2), anche se poi nessuno di questi è riuscito a terminare i calcoli correttamente. In Figura 4.22 è riportata la risposta data al quesito da parte di uno dei due gruppi, in cui l'asse y è posto sull'asta in

metallo verticale ma è stata intesa come fissata al piano, il punto A è un generico punto della curva e il punto $P = (x_P, y_P)$ rappresenta il perno centrale della macchina (fuoco della curva).

asse x = linea nera
 asse y = asta in metallo verticale
 $A(x, y)$
 $d_1 = d_2$
 $(\sqrt{(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2})^2 = (y_A)^2$
 $(x_A - x_P)^2 + (y_A - y_P)^2 = y_A^2$
 $x_A^2 + x_P^2 - 2x_A \cdot x_P + y_A^2 + y_P^2 - 2y_A \cdot y_P = 0$

Figura 4.22: Esempio di risposta alla domanda IX.

Dalla risposta si nota come, nel corso dello svolgimento dei calcoli, ci sia stata confusione con le lettere P e A al pedice delle variabili. Probabilmente solo nell'ultimo passaggio i ragazzi si sono accorti che avevano fissato come (x, y) le coordinate del punto A – che rappresenta il punto che varia sulla curva – e che quindi erano superflue le lettere A al pedice, di conseguenza le hanno eliminate: facendo ciò, hanno però erroneamente cancellato anche la P al pedice di y^2 . Infine, sempre nell'ultimo passaggio, nel termine del doppio prodotto del quadrato di binomio relativo alla seconda parentesi è presente un elevamento alla seconda di troppo: scrivono infatti $-2y^2y_P$ invece che $-2yy_P$.

La grossa difficoltà avuta da parte degli altri due gruppi nella comprensione del testo della domanda è probabilmente dovuta al fatto che i ragazzi non sono mai stati abituati a svolgere attività o esercizi di passaggio dal piano sintetico a quello analitico, e quindi, anche una volta chiarito lo scopo della richiesta, in molti hanno avuto un blocco di fronte alla traduzione della relazione, presumibilmente dovuto al cambiamento di quadro. Si fa riferimento in tal senso a un tipo di *discontinuità cognitiva di quadro*, che è dovuta alla mancanza di corrispondenza tra la natura della macchina matematica e gli oggetti dell'attività mentale coinvolti nel processo di traduzione dal piano sintetico a quello ana-

litico, evidenziata anche dalla difficoltà di schematizzazione dello strumento riscontrata nelle risposte alla domanda numero cinque.

4.2.5 Analisi delle risposte sul parabolografo di Cavalieri – Parte II

La seconda parte della scheda sul parabolografo di Cavalieri, come già osservato in Sezione 3.4.3, si apre con una domanda analoga a quella proposta nella scheda del parabolografo a filo, riguardo all'individuazione delle corrispondenze tra gli elementi colorati dell'immagine e le componenti della macchina.

V. Fissate la mina in un punto preciso.

Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

A differenza delle difficoltà riscontrate dai ragazzi nella corrispondente parte della scheda per il parabolografo a filo, in questo caso nessuno ha avuto problemi nel rispondere, e ogni oggetto "virtuale" è stato collegato al suo corrispettivo reale, come si evince dalla Figura 4.23.

Interessante è notare, nell'esempio in Figura 4.23, come sia stata utilizzata fin da subito la terminologia matematica adeguata (i termini cateto, ipotenusa, proiezione, ecc.), che dimostra il raggiungimento di un livello di astrazione avanzato. Nell'individuazione delle corrispondenze, in particolare, tre gruppi su quattro hanno usato questa terminologia, mentre uno solo ha associato i colori alla descrizione delle componenti della macchina (ad esempio rosso=asta senza scanalatura, giallo=asta in metallo scanalata più lunga, blu=distanza tra mina e asta non scanalata, ecc.).

Giallo \rightarrow Cateto AC
 Verde scuro \rightarrow Proiezione Cateto AC sull'ipotenusa AB (AH)
 Verde Chiaro \rightarrow ω
 Blu \rightarrow α relativa all'ipotenusa AB (CH)
 Azzurro \rightarrow $\beta = 90^\circ$
 Marrone \rightarrow Cateto CB
 Nero \rightarrow $\alpha = 90^\circ$
 Grigio \rightarrow γ
 Rosso \rightarrow proiezione cateto CB sull'ipotenusa AB (HB)
 Rosa \rightarrow $\gamma = 90^\circ$

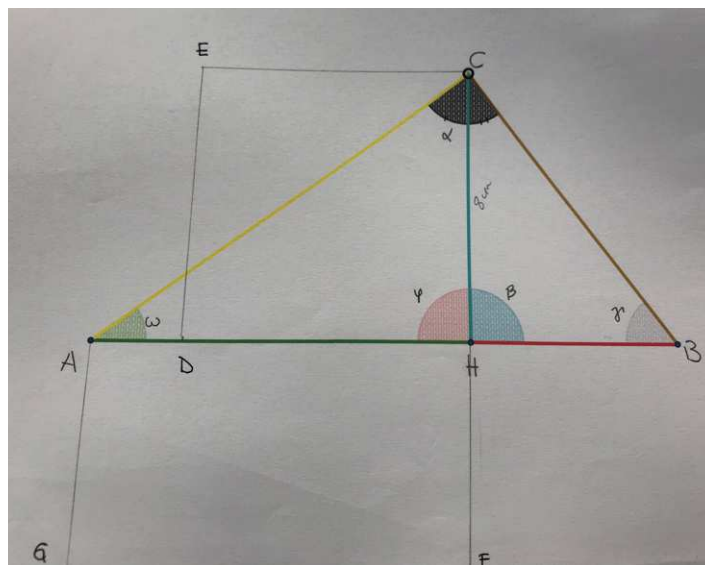


Figura 4.23: Esempio di risposta alla domanda V.

La domanda numero sei, volta alla constatazione da parte dei ragazzi degli oggetti invarianti della macchina attraverso misurazioni ripetute degli stessi al movimento dello strumento, è stata completata con successo da parte di tre gruppi su quattro. Il suo testo è il seguente

- VI. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate sulla macchina tutti gli elementi che li formano (in particolare lati, angoli, ecc.).
 Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

L'unico gruppo che non ha risposto è stato quello della ragazza non vedente, al quale, per questioni di tempo, è stato consigliato di procedere con le domande successive, ritenute più significative al fine della comprensione del funzionamento della macchina. Tutti e tre i gruppi che hanno risposto, hanno individuato i quattro oggetti che rimanevano fissi durante il movimento (tre angoli retti e la lunghezza dell'asta mobile orizzontale), e in tutti i casi è stato compilato un elenco simile a quello in Figura 4.24, nella quale in rosa sono stati evidenziati gli invarianti.

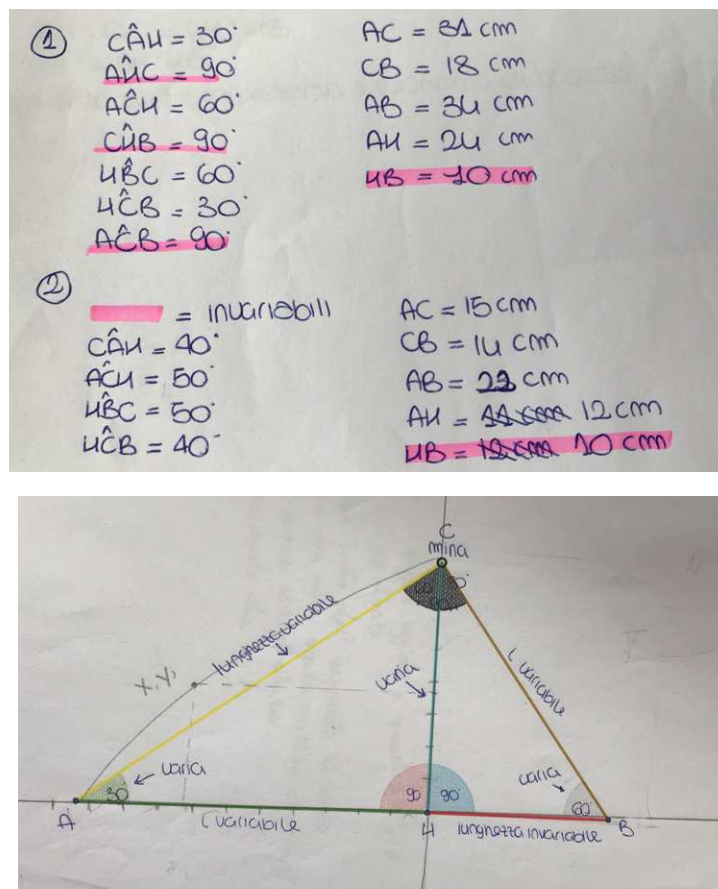


Figura 4.24: Esempio di risposta alla domanda VI.

Ai due quesiti successivi, VII e VIII, i vari gruppi si sono approcciati in maniera piuttosto differente. Di seguito sono riportati i testi delle consegne per maggiore chiarezza espositiva.

VII. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se sì, scrivetela.

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

Due gruppi su quattro hanno seguito il percorso guidato dalle due domande, attuando un tipo di ragionamento *deduttivo* (vedi Tabella 2.1 in Sezione 2.1.1)³:

- (caso) per prima cosa, hanno risposto alla domanda VII, individuando gli oggetti in questione ed effettuando le misurazioni: così facendo sono giunti alla relazione che lega le due aree in questo caso specifico;
- (regola) successivamente, nel rispondere al quesito VIII, hanno cercato tra le loro conoscenze teoriche quelle che meglio si prestassero a giustificare il caso, arrivando a proporre il secondo teorema di Euclide per le somiglianze tra l'enunciato e la richiesta alla domanda VII;
- (risultato) infine, hanno concluso che la dimostrazione dovesse basarsi proprio sulla validità del secondo teorema di Euclide in questo caso specifico, in quanto il triangolo a cui ci si stava riferendo era rettangolo, giungendo così alla dimostrazione completa.

Al contrario, gli altri due gruppi hanno ragionato secondo uno schema di tipo *abduttivo*:

- (regola) fin da subito, leggendo il testo della domanda VII, si sono accorti della somiglianza tra quanto richiesto e il secondo teorema di Euclide;
- (risultato) senza effettuare alcuna misurazione, hanno ragionato sul fatto che valesse o meno nel loro caso specifico, individuando nella presenza dell'angolo retto la conferma alla loro ipotesi e giungendo così alla dimostrazione vera e propria della relazione;

³Rispetto all'ordine della Tabella 2.1, in questa situazione la (regola) e il (caso) sono invertiti: questo fatto è forzato dal testo della scheda, ma non cambia la sostanza del ragionamento.

- (caso) solo alla fine, hanno effettuato le misurazioni specifiche del caso (uno dei due gruppi non aveva nemmeno sentito la necessità di svolgerle, ribadendo che: «Non c'è bisogno di fare le misure, sappiamo già che vale», ma è stato spinto a farlo dalla loro docente di matematica) per constatare che effettivamente quello che avevano congetturato e dimostrato valesse anche nel caso specifico.

Questa differenza tra i due approcci è da ricollegarsi ad una motivazione specifica: i due gruppi che hanno ragionato in maniera *abduttiva* erano composti da studenti che avevano rivisto e ripassato in classe, con la loro professoressa di matematica, i teoremi di Euclide durante la stessa settimana in cui è avvenuta la sperimentazione, mentre quelli che hanno utilizzato un ragionamento di tipo *deduttivo* erano presumibilmente più arrugginiti sull'argomento teorico, in quanto lo avevano affrontato a scuola almeno un anno prima. Questo fatto, ha sicuramente permesso a coloro che avevano ripreso l'argomento poco prima di essere più agili nel ricollegare il caso specifico alla teoria generale, agevolandoli nell'individuazione della giustificazione alla validità della congettura. In questo senso, anche le tempistiche di questi ultimi sono risultate più rapide rispetto a quelle degli altri due gruppi.

Infine, la domanda numero IX, di seguito riportata, è risultata complessa per tutti e quattro i gruppi.

IX. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento a voi più comodo.

Nessuno aveva ben chiaro, infatti, cosa significasse trovare un'equazione cartesiana descrittiva per la curva ed è per questo motivo che si è deciso di lasciare più tempo ai ragazzi per ragionare sul momento e successivamente di riprendere la correzione del quesito la lezione successiva. Tutti i gruppi ci hanno chiesto chiarimenti su come procedere, a partire dalla scelta del riferimento cartesiano adeguato: in tal senso, tutti quanti come asse x hanno scelto la scanalatura incisa sulla macchina, mentre per l'asse y c'è chi ha scelto l'altezza del triangolo rettangolo più grande che compone la struttura (in quanto è l'unica asta in metallo posta perpendicolarmente rispetto alla scanalatura ed è quindi

la più comoda da utilizzare, nonostante non rimanga fissa sul piano) e chi invece ha deciso di fissarlo indipendentemente dalla macchina. Una ragazza, dopo aver proposto di tracciare l'asse y perpendicolarmente alla scanalatura e passante per il perno fisso più a sinistra che compone la macchina, ha giustificato la sua scelta dicendo che in questo modo «la curva rimane tutta positiva».

La relazione da tradurre in termini cartesiani, poiché era stata individuata correttamente da tutti nelle risposte alle domande precedenti, non ha destato particolari perplessità, ma i ragazzi si sono trovati in difficoltà a capire a quali elementi dovevano associare delle variabili, e a quali invece dei valori fissi. Nel gruppo della ragazza non vedente si sono chiesti:

A : «Qual è l'elemento costante in questo? L'angolo di novanta gradi, però io lavorerei sui lati perché per scrivere un'equazione cartesiana è meglio associare una misura ai lati.»

B : «Dovremo prendere la formula di Euclide con le lettere [*si riferisce alle lettere maiuscole date per nominare i punti e per scrivere la relazione di Euclide sulle aree*] e cambiarle con x e y , ma cosa chiamiamo x e cosa y ?»

A : «Ci servono altre costanti.»

Il fatto che nessun gruppo, in questo caso, sia riuscito a giungere alla traduzione corretta della relazione euclidea sulla aree (vedi Equazione 3.3) in termini cartesiani, è da ricollegarsi allo stesso motivo già analizzato in Sezione 4.2.4 a pagina 119, a proposito della domanda numero IX della scheda sul parabolografo a filo.

Anche qui, infatti, si evince una *discontinuità cognitiva di quadro*, dovuta in parte alla poca abitudine dei ragazzi a lavorare dal punto di vista analitico sul piano cartesiano, e in parte all'intrinseca difficoltà propria dei ragionamenti necessari ad effettuare il passaggio dal piano sintetico a quello analitico, che presuppongono non solo la scelta di un sistema di riferimento cartesiano adeguato, ma anche l'individuazione degli oggetti fissi, ai quali andrà attribuito un valore specifico, e di quelli "mobili", ai quali invece va assegnata una variabile.

4.3 Aspetti positivi e criticità del percorso

Alla luce dell'analisi svolta in questo capitolo, è opportuno riassumere sia gli aspetti positivi che hanno caratterizzato la sperimentazione nel suo complesso, sia precisare le criticità che sono emerse nella fase di realizzazione delle varie attività, in modo da proporre soluzioni adeguate ad ovviare a tali problemi.

Per quanto riguarda gli aspetti positivi che è possibile mettere in luce, va subito notato che, fin dalla prima sessione di laboratorio, gli studenti si sono dimostrati collaborativi e interessati a partecipare all'attività, intervenendo con commenti ed osservazioni anche durante la fase introduttiva.

Il fatto di lavorare a gruppi, dinamica a cui non erano abituati, e il fatto di usare le macchine matematiche ha sicuramente reso l'introduzione di un argomento poco interessante per degli studenti di un liceo linguistico, più coinvolgente e stimolante, favorendo un apprendimento attivo e, di conseguenza, più solido. La modalità di apprendimento "per scoperta", ossia venire a conoscenza di determinati fatti matematici facendone esperienza diretta, e non per assimilazione passiva, ha permesso di rendere più dinamica una materia che spesso viene considerata lontana nel tempo e statica, immutabile nelle sue regole di funzionamento.

Inoltre, le tempistiche programmate e la suddivisione scelta per le varie attività di laboratorio hanno fatto sì che tutti gli studenti stessero al passo con la compilazione delle schede e non rimanessero troppo indietro: anche il gruppo della ragazza non vedente, la quale ha convenzionalmente bisogno di un tempo maggiorato della metà rispetto al tempo comunemente previsto per le pratiche scolastiche, è riuscito a portare a termine quasi ogni attività – fatta eccezione per la seconda parte della scheda sul parabolografo di Cavalieri – senza bisogno che noi o l'insegnante di sostegno intervenissimo.

Per quanto riguarda, invece, le criticità emerse durante il percorso, per cominciare, si consiglia una modifica da effettuare sulla seconda parte della scheda sull'ellissografo a filo: sarebbe opportuno scambiare l'ordine delle domande IV e V, alla luce delle perplessità di alcuni studenti riguardo all'individuazione del centro della curva, riposizionandole nel seguente modo

IV. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì disegnali sulla macchina.

V. Qual è la distanza massima e minima che riuscite a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

Grazie a questo scambio, il “centro della curva”, nominato nella domanda che ora è diventata la numero V, prende così significato in riferimento al “centro di simmetria” individuato al punto precedente.

Sempre durante la sperimentazione del laboratorio sull'ellissografo a filo, ci si è accorti della difficoltà avute dagli studenti nell'interpretazione della domanda numero VII: in particolare nessuno ha compreso fin da subito che il punto generico, per poter esprimere la proprietà caratterizzante, dovesse essere preso sulla curva, e non in generale sulla macchina. Di seguito è riportato il testo originale della domanda.

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimate la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y .

A tal proposito, si propone dunque una modifica al testo della consegna, di seguito riportata, in modo da scomporre la difficoltà della richiesta della domanda, guidando il percorso di transizione dal piano sintetico a quello analitico.

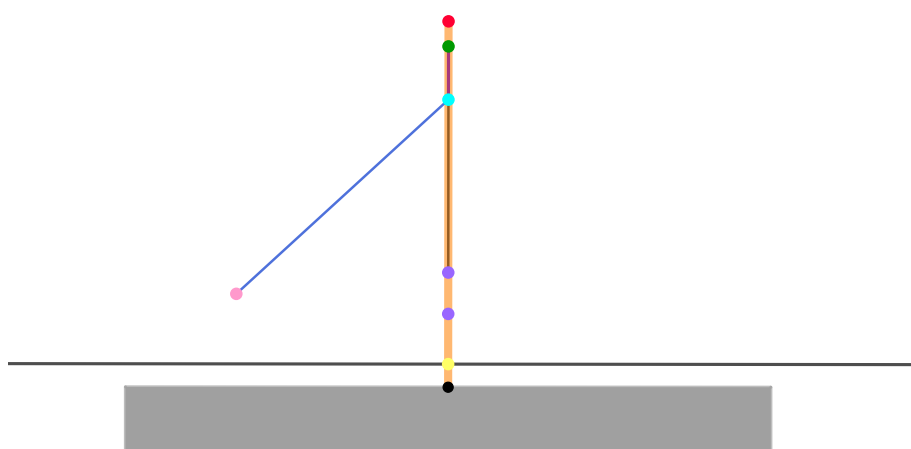
VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente. Trovate le coordinate cartesiane dei due fuochi e del centro della curva, e riportatele sul foglio.

VIII. Con riferimento allo stesso sistema cartesiano del punto precedente, indicate con (x,y) le coordinate di un generico punto P del piano della macchina rispetto al sistema. Individuate la proprietà caratterizzante la curva ed esprimetela in funzione di x e y .

Suggerimento: per farlo, ragionate su dove occorre posizionare il generico punto P al fine di esprimere la proprietà che caratterizza la curva.

Riguardo alle schede relative al secondo laboratorio, in particolare a quella relativa alla seconda parte del parabolografo a filo, si consiglia una modifica da apportare al

disegno a colori della macchina: sul disegno originale, infatti, non erano stati riprodotti i perni fissati sull'asta verticale principale che compone la macchina aventi il solo scopo di agganciare il filo all'asta stessa, in quanto non necessari al funzionamento dello strumento. Questa mancanza ha, però, fuorviato l'interpretazione del disegno da parte di tutti i gruppi, i quali hanno erroneamente attribuito a tali perni i punti verde e celeste del disegno. Per ovviare a questo fatto, si propone di usare quindi il seguente schema a colori, più completo.



Date poi le difficoltà riscontrate nelle domande numero IX sui due parabolografi, si consiglia, se i ragazzi non sono ancora stati abituati adeguatamente a muoversi sul piano cartesiano, di lasciare più tempo ai gruppi, in modo che possano ragionare sulla scelta degli assi cartesiani e porre l'attenzione sul fatto che, nonostante venga naturale – e così è stato anche durante la sperimentazione – scegliere un sistema di riferimento solidale con lo strumento, qui è necessario che sia fisso.

Infine, sarebbe auspicabile permettere ai gruppi di interagire tra loro, anche al termine della compilazione della seconda scheda, con le stesse modalità della discussione tra pari avvenuta precedentemente: per questo motivo avere a disposizione più tempo consentirebbe anche la realizzazione di quest'ultima fase. Si ritiene, infatti, che, non solo i ragazzi possano sentirsi più a loro agio a parlare di matematica tra di loro la seconda volta che sperimentano questa dinamica, ma anche che i quesiti e gli argomenti su cui si basa la seconda scheda di esplorazione dei parabolografi possano adattarsi meglio ad

una discussione di confronto, in modo da far emergere osservazioni più interessanti e stimolanti.

Conclusioni

L'apprendimento in matematica, e nello specifico in geometria, è un processo dinamico che coinvolge numerose funzioni cognitive dell'individuo: la consuetudine diffusa nella scuola di relegare la matematica a lezioni prettamente frontali non permette di esplorare le potenzialità legate alla manipolazione fisica di strumenti concreti nell'apprendimento di concetti geometrici e rischia di far perdere agli studenti il contatto con il reale, rendendo sterile ed eccessivamente astratto qualsiasi concetto.

Esiste, infatti, un legame privilegiato tra geometria e realtà: la geometria è una disciplina teorica ma, allo stesso tempo, dipende dalla realtà come modello di riferimento. In tal senso, gli oggetti geometrici sono formati da due componenti: una componente concettuale, dovuta alla struttura teorica della materia, e una componente figurale, relativa allo spazio dell'esperienza percettiva a cui questi oggetti si riferiscono, e questi due elementi dovrebbero interagire tra loro in maniera armoniosa, in modo da svilupparsi e supportarsi a vicenda. Ma questo non sempre avviene.

L'attività organizzata presso il liceo Luigi Galvani di Bologna e descritta in dettaglio in questo elaborato ha rappresentato un'opportunità di mettere in pratica una tecnica, quella del laboratorio di macchine matematiche, di cui da tempo si riconosce la valenza didattica e che riesce ad unire i due aspetti sopra descritti, ma che spesso, per questioni organizzative, viene messa in secondo piano.

Il laboratorio ha dato prova di essere un ambiente privilegiato per la costruzione di significati, in quanto ha permesso un tipo di apprendimento "per scoperta", più significativo e duraturo rispetto alle classiche lezioni frontali, in quanto gli studenti non si sono limitati a recepire passivamente le conoscenze ma ne hanno fatto esperienza diretta. L'argomento affrontato, quello cioè delle coniche, si presta perfettamente ad un tipo di didattica la-

boratoriale, in quanto il laboratorio permette, oltre che di andare in profondità nel tema e scoprire le proprietà caratterizzanti di ciascuna curva, anche di costruire collegamenti tra l'una e l'altra, incentivando il confronto e la discussione.

Un altro ingrediente fondamentale per la buona riuscita dell'attività è stato l'utilizzo di macchine matematiche: all'interno del campo di esperienza di questi strumenti si collocano, infatti, attività di valenza culturale che permettono di costruire collegamenti con la storia, la vita quotidiana e la tecnologia; inoltre l'uso di questi oggetti, con particolari accorgimenti, ha permesso anche ad una ragazza non vedente di partecipare all'attività alla pari dei suoi colleghi. All'interno del sistema educativo, e in particolare all'interno dell'insegnamento della matematica, quindi, le macchine matematiche possono costituire un importante mezzo al fine di favorire un apprendimento profondo e l'integrazione di ragazzi diversamente abili – nella fattispecie non vedenti – costruendo un ponte tra attività manuali e intellettuali.

Alla luce dell'analisi svolta sui protocolli degli studenti e dei riscontri positivi ricevuti sia da parte di questi ultimi, che da parte dell'insegnante di matematica della classe, posso ritenermi soddisfatta del percorso svolto e reputare che sia auspicabile, all'interno delle dinamiche scolastiche, affiancare sempre di più i metodi di insegnamento tradizionali con un approccio di tipo laboratoriale che sfrutti la manipolazione di oggetti concreti come le macchine matematiche, in modo da permettere non solo un apprendimento attivo e duraturo, ma anche al fine di favorire l'interazione e l'integrazione tra i ragazzi.

Appendice A

Schede illustrative dei curvigrifi

In questa appendice sono inserite le schede descrittive dei curvigrifi presenti in gacenza presso il Liceo Scientifico Augusto Righi di Bologna.

Le schede verranno prossimamente pubblicate sulla pagina web dedicata (https://www.liceorighibologna.it/pvw/app/BOLS0003/pvw_sito.php?sede_codice=BOLS0003&page=2058737) a scopo illustrativo, insieme a quelle dei pantografi presenti presso lo stesso istituto.

ELLISSOGRAFO A FILO

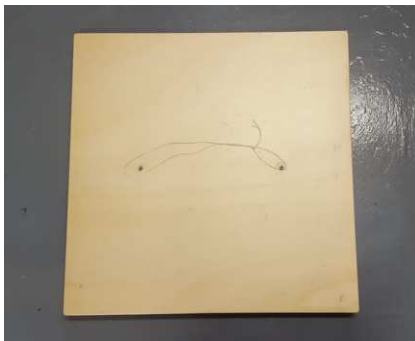


Figura 1. Fotografia dell'ellissografo a filo.

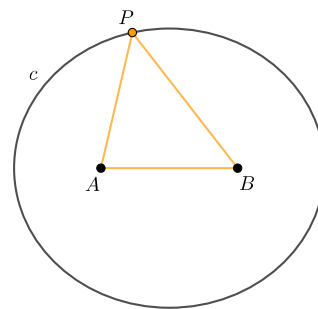


Figura 2. Immagine virtuale dell'ellissografo a filo.

Numero di macchine presenti: 10

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: L'ellissografo a filo è composto da un semplice filo (non elastico, di lunghezza fissa l) annodato ad anello attorno a due perni (corrispondenti ai punti A e B), fissati sul piano da disegno. La lunghezza l del filo deve essere maggiore della distanza fissata AB (vedi Figura 2).

Funzionamento della macchina: La macchina si utilizza con l'ausilio di una punta scrivente posta in P , per mezzo della quale il filo viene teso fra i punti A e B , in modo da formare un triangolo APB (vedi Figura 2). La punta P si sposta quindi sul piano mantenendo il filo teso: essa traccia in questo modo un'ellisse i cui fuochi sono proprio A e B , in quanto per costruzione viene rispettata la proprietà caratteristica che la somma delle distanze da un qualsiasi punto P dai due fuochi A e B rimane costante (nel nostro caso $PA + PB = l - AB = \text{costante}$).

ELLISSOGRAFO DI DELAUNEY



Figura 1. Fotografia dell'ellissografo di Delauney.

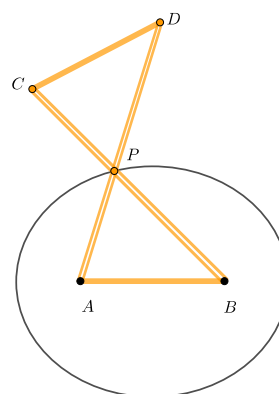


Figura 2. Immagine virtuale dell'ellissografo di Delauney.

Numero di macchine presenti: 5

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: L'ellissografo di Delauney è composto da un antiparallelogramma articolato, ossia un quadrilatero intrecciato $ABCD$ avente i lati uguali a due a due ($AB = CD$ e $AD = BC$) e tale che i lati AD e BC si incontrano nel punto P . Questi ultimi due, sono realizzati come aste scanalate al centro in modo che una mina posta in P possa scorrere liberamente attraverso di essi. Inoltre, uno dei lati più corti (nel nostro caso AB) è fissato al piano da disegno da due perni posti in A e B (vedi Figura 2).

Funzionamento della macchina: La macchina si utilizza con l'ausilio di una punta scrivente posta in P , la quale al movimento del sistema articolato descrive un'ellisse di fuochi A e B (vedi Figura 2). Infatti, viene soddisfatta la proprietà caratteristica dell'ellisse, e cioè che la somma delle distanze di un qualsiasi punto P dai fuochi A e B rimanga sempre costante (nel nostro caso $PA + PB = PA + PD = AD = costante$, per le proprietà di simmetria dell'antiparallelogramma).

PARABOLOGRAFO A FILO



Figura 1. Fotografia del parabolografo a filo.

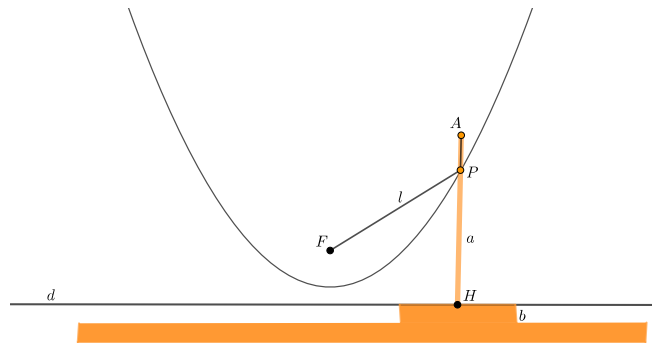


Figura 2. Immagine virtuale del parabolografo a filo.

Numero di macchine presenti: 5

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: Il parabolografo a filo è costituito da una squadra, composta da due aste perpendicolari a e b , quest'ultima scorrevole su una scanalatura d incisa nel piano. In F (sul piano) e in A (sull'asta a) sono fissati due perni, che costituiscono gli estremi di un filo di lunghezza $l = AH$ (vedi Figura 2).

Funzionamento della macchina: La macchina funziona facendo scorrere l'asta b lungo la scanalatura d , mentre contemporaneamente con la punta di una matita posta in P in Figura 2 si mantiene il filo teso e accostato all'asta b . In tal modo la punta della matita disegna un arco di parabola avente fuoco in F e direttrice coincidente con d .

Dimostrazione del funzionamento: La macchina realizza un arco di parabola con fuoco in F e direttrice d in quanto, per funzionare, sfrutta la proprietà caratteristica della curva: la distanza tra un generico punto P dal perno fisso F coincide con quella tra lo stesso punto P e la direttrice d . Infatti, come si vede in Figura 2, il filo ha la stessa lunghezza di AH quindi per differenza di segmenti congruenti

$$PF = l - AP = AH - AP = PH.$$

PARABOLOGRAFO DI CAVALIERI

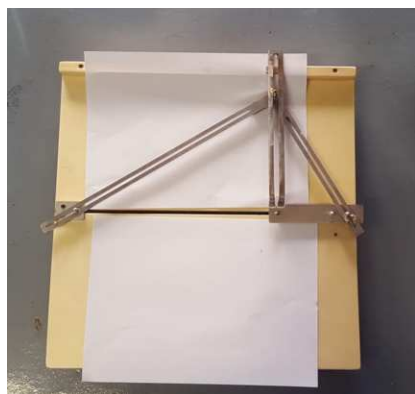


Figura 1. Fotografia del parabolografo di Cavalieri.

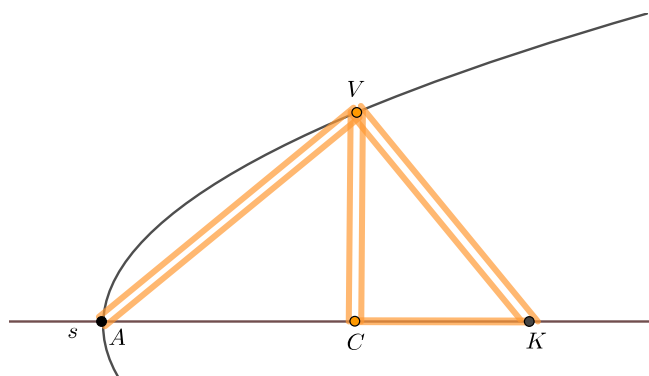


Figura 2. Immagine virtuale del parabolografo di Cavalieri.

Numero di macchine presenti: 5

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: La macchina è composta da una piccola asta CK di lunghezza k prestabilita, che è vincolata a scorrere lungo una guida rettilinea s , incisa nel piano. All'estremo C del sistema articolato è vincolata rigidamente, in direzione perpendicolare a CK , un'asta CV , avente una scanalatura al centro e giacente sul piano da disegno. All'estremo V è infine vincolata un'asta AV , anch'essa con una scanalatura centrale, in modo tale che l'angolo $A\hat{V}K$ sia retto.

Funzionamento della macchina: Il parabolografo di Cavalieri funziona posizionando una punta scrivente nel punto V e muovendo l'angolo retto $K\hat{C}V$, il quale nel suo movimento trascina con sé l'altro angolo retto $A\hat{V}K$. Durante il movimento, AVK rimane sempre un triangolo rettangolo (anche se variabile) di cui VC rappresenta l'altezza relativa alla ipotenusa e AK l'ipotenusa. Applicando a questo triangolo il teorema di Euclide si ottiene la proprietà caratteristica della parabola ricavata da Apollonio, ossia che il quadrato delle "ordinate" (nel nostro caso VC^2) rispetto a un "diametro" fissato (AK), è uguale al rettangolo avente come lati un segmento fisso ($CK = k$) e l'"ascissa" corrispondente all'"ordinata" (CA). In altre parole, vale che $VC^2 = CK \cdot CA = k \cdot CA$.

Facendo quindi scorrere l'angolo $K\hat{C}V$ lungo s , la punta descriverà proprio un arco di parabola secondo Apollonio. Fissato, inoltre, il sistema di riferimento cartesiano avente origine in A e assi x e y individuati, rispettivamente, dai vettori \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{CV} , la parabola che la macchina descrive ha equazione cartesiana $y^2 = k \cdot x$, con fuoco nel punto di coordinate $(\frac{k}{4}; 0)$ e direttrice di equazione $y = -\frac{k}{4}$.

GUIDA RETTILINEA (di Kempe)



Figura 1. Fotografia della guida rettilinea.

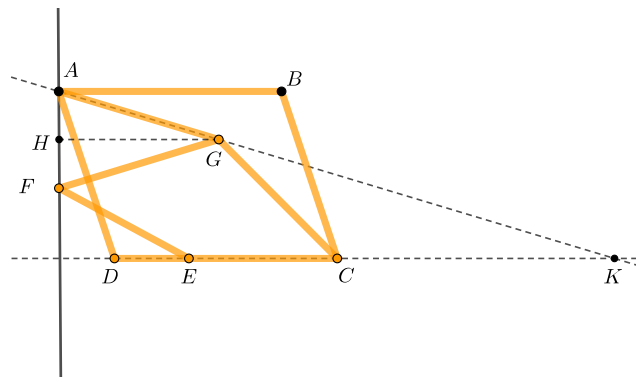


Figura 2. Immagine virtuale della guida rettilinea.

Numero di macchine presenti: 1

Dimensioni della macchina: cm 40x40x6

Descrizione della macchina: La macchina è costituita da un rombo articolato $ABCD$, i cui vertici A e B sono imperniati al piano. Ai vertici A e C del rombo sono collegate due aste di uguale lunghezza ($AG = GC$) incernierate in G . Il quadrilatero $AGCD$ è quindi un deltoide. Alla cerniera G è vincolata inoltre una terza asta GF tale che $GF = AG = GC$, mentre attorno a un perno E , fissato al lato DC del rombo, può ruotare un'altra asta EF (il cui secondo estremo è incernierato a F , vincolato a scorrere lungo una scanalatura incisa nel piano) tale che $EF = EC$. Così anche il quadrilatero $CEFG$ è un deltoide (vedi *Figura 2*). Le lunghezze delle varie aste sono scelte in modo tale che valga la relazione $AD:AG = AG:EF$.

Funzionamento della macchina: Deformando il rombo $ABCD$ (in modo tale che C e D descrivano circonferenze di centro B ed A rispettivamente), il punto F traccia un segmento rettilineo appartenente alla perpendicolare ad AB condotta per A (vedi *Figura 2*).

Dimostrazione del funzionamento: Per costruzione i deltoidi $ABCD$ e $CEFG$ sono simili. Infatti, essi hanno:

- $\hat{G}CD$ in comune;

- $GC = AG$ per costruzione;
- AD in proporzione con $EC = FE$ per la relazione precedente.

Quindi gli angoli sono congruenti: in particolare

$$F\hat{G}C = A\hat{D}C, C\hat{E}F = A\hat{G}C \text{ e } G\hat{A}D = G\hat{C}D = E\hat{F}G.$$

Prolunghiamo ora il lato AG fino ad incontrare DC nel punto K come in *Figura 2*. Allora per costruzione

$$A\hat{G}K = \pi = A\hat{G}D + D\hat{G}C + C\hat{G}K.$$

Quindi

$$G\hat{K}D = \pi - K\hat{D}G - D\hat{G}K = \pi - D\hat{G}C - C\hat{G}K - K\hat{D}G.$$

Ma $A\hat{G}D = \pi - D\hat{G}C - C\hat{G}K$ perciò

$$G\hat{K}D = A\hat{G}D - K\hat{D}G.$$

Inoltre, per le proprietà dei deltoidi vale $A\hat{G}D = \frac{1}{2}A\hat{G}C$ e $K\hat{D}G = \frac{1}{2}A\hat{D}C$. Quindi

$$G\hat{K}D = \frac{1}{2}A\hat{G}C - \frac{1}{2}A\hat{D}C = \frac{1}{2}A\hat{G}C - \frac{1}{2}F\hat{G}C = \frac{1}{2}A\hat{G}F$$

per le conseguenze della similitudine.

In conclusione, la bisettrice CH dell'angolo $D\hat{C}F$ è in ogni posizione parallela ad AB , in quanto le rette CH e AK tagliate da CK formano angoli corrispondenti congruenti per quanto detto sopra. Quindi DF è sempre perpendicolare a DG .

COMPASSO PERFETTO

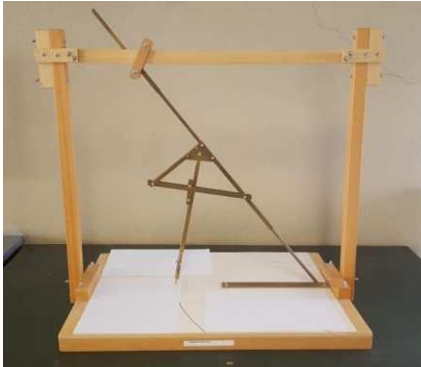


Figura 1. Fotografia del compasso perfetto.

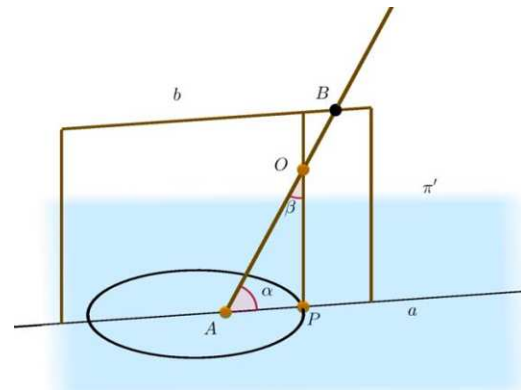


Figura 2. Immagine virtuale del compasso perfetto.

Numero di macchine presenti: 1

Dimensioni della macchina: cm 60x50x65

Descrizione della macchina: Il compasso perfetto meccanizza in modo diretto la definizione di conica data da Apollonio. L'asta AB (vedi *Figura 2*) costituisce l'asse del cono. L'asta OP , sulla quale è fissata una punta scrivente nel punto P , è vincolata in O all'asta AB con la quale forma un angolo variabile β . L'asta OP costituisce una generatrice del cono e può allungarsi o accorciarsi per consentire il contatto continuo tra la punta scrivente P e il piano del disegno π' (piano secante il cono), al fine di realizzare una curva (ellisse, parabola o iperbole) con il suo tratto. L'asta AB (girevole su sé stessa attorno ai cardini A e B) può essere inclinata di un angolo α variabile rispetto al piano π' .

Funzionamento della macchina: Il compasso funziona ruotando l'asta AB su sé stessa: quando questo avviene, l'asta OP descrive un cono di asse AB . Contemporaneamente il tracciatore P è mantenuto a contatto col piano da disegno π' (un giunto "telescopico" permette all'asta OP di accorciarsi o allungarsi affinché venga mantenuto il contatto), piano il quale "taglia" il cono trasversalmente generando una curva come sezione descritta da P . Le diverse curve si ottengono al variare degli angoli:

- Se $\alpha = \beta$ si ha una parabola;
- Se $\alpha > \beta$ si ha un'ellisse (una circonferenza se $\alpha = \pi/2 > \beta$);
- Se $\alpha < \beta$ si ha un'iperbole.

Curve costruibili: parabola, ellisse, iperbole.

Appendice B

Dimostrazione della Proposizione 1.3.1 di Apollonio

In questa appendice è riportata la dimostrazione completa della Proposizione 1.3.1, tratta da [6] e contestualizzata nella Sezione 1.3.1, che si è deciso di non inserire nel testo per non appesantire la trattazione. Per la dimostrazione sono necessarie alcune osservazioni preliminari.

Osservazione 3. Nelle proposizioni precedenti alla Proposizione 1.3.1, Apollonio dimostra che un piano secante un cono ABC (vedi Figura B.1) che non passi per il vertice e tale che l'intersezione tra il piano secante e la base del cono (ED nel nostro caso) sia perpendicolare alla base BC del triangolo per l'asse ABC , individua sempre due oggetti:

- il *diametro della sezione* PM , determinato dall'intersezione tra il piano secante e il triangolo per l'asse ABC ;
- la *direzione delle ordinate* ED , definita dall'intersezione tra piano secante e piano di base del cono.

Il *diametro della sezione*, per definizione, è quel segmento che biseca tutte le corde di una curva, tracciate parallelamente a una direzione, la *direzione delle ordinate*. Tale diametro costituisce l'asse della sezione, ovvero l'angolo che forma con le ordinate è retto se e solo se il piano del triangolo per l'asse risulta perpendicolare al piano di base, cosa che si verifica sempre nel caso particolare che il cono sia retto.

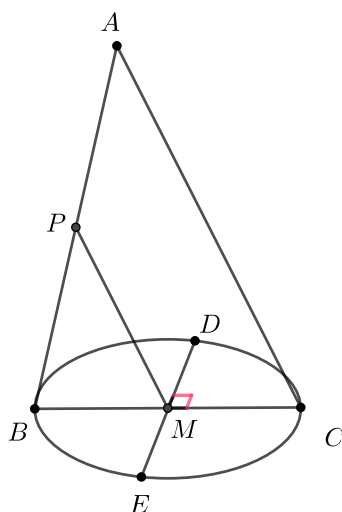


Figura B.1: Diametro della sezione e direzione delle ordinate.

Proposizione B.0.1. *Dato il cono ABC di vertice A e base BC in Figura B.2, si consideri un piano secante che generi una sezione il cui diametro PM sia parallelo a uno dei lati (nel nostro caso AC) del triangolo per l'asse ABC . Sia QV un'ordinata relativa al diametro PM (vedi Osservazione 3 per la definizione). Se si traccia una retta PL perpendicolare a PM nel piano della sezione, tale che*

$$PL : PA = BC^2 : (BA \cdot AC)$$

allora vale

$$QV^2 = PL \cdot PV. \tag{B.1}$$

Dimostrazione. A partire dalla costruzione descritta nell'enunciato, con riferimento alla Figura B.2, siano BC il diametro del cerchio di base del cono e DE l'intersezione tra il piano secante e il cerchio di base del cono. Sia poi HK una parallela a BC nel piano individuato dai punti A , B e C , passante per il punto V . Poiché l'ordinata QV è parallela a DE per costruzione, il piano passante per i tre punti H , Q e K risulta parallelo alla base del cono (piano passante per i punti B , C e D) e lo taglia quindi in una circonferenza di diametro HK .

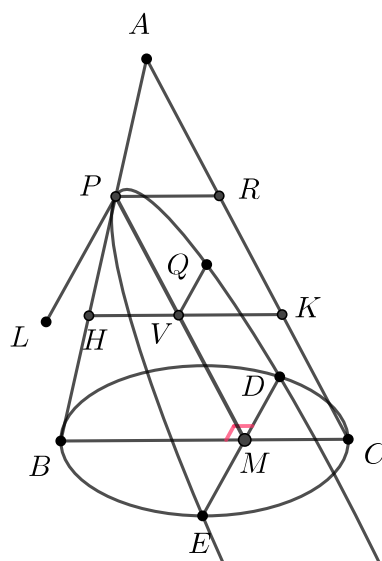


Figura B.2: Proprietà caratteristica della parabola.

Inoltre, dato che QV è perpendicolare a HK per Osservazione 3, ne segue che

$$HV \cdot VK = QV^2 \quad (\text{B.2})$$

applicando il secondo teorema di Euclide al triangolo rettangolo HKQ .

Inoltre, per similitudine dei triangoli ABC e PHV vale la proporzione

$$BC : AC = HV : PV. \quad (\text{B.3})$$

Si tracci ora PR , parallela ad HK e passante per P . Per similitudine dei triangoli ABC e APR vale

$$BC : AB = PR : PA. \quad (\text{B.4})$$

Ora, si consideri il parallelogramma $PRKV$. Allora $PR = VK$, quindi da (B.4) si ottiene

$$BC : AB = VK : PA. \quad (\text{B.5})$$

Di conseguenza, moltiplicando tra loro le proporzioni (B.3) e (B.5), si ricava

$$BC^2 : (AC \cdot AB) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot PA). \quad (\text{B.6})$$

Per (B.2), inoltre, avremo

$$(HV \cdot VK) : (PA \cdot PV) = QV^2 : (PA \cdot PV)$$

quindi, per (B.6)

$$BC^2 : (AC \cdot AB) = QV^2 : (PA \cdot PV).$$

Ma, per come abbiamo definito PL , si ha per ipotesi che

$$PL : PA = BC^2 : (BA \cdot AC)$$

quindi

$$QV^2 : (PA \cdot PV) = PL : PA.$$

D'altra parte è ovvio che

$$PL : PA = (PL \cdot PV) : (PA \cdot PV)$$

da cui si ottiene

$$QV^2 : (PA \cdot PV) = (PL \cdot PV) : (PA \cdot PV)$$

e da cui si ricava la tesi

$$QV^2 = PL \cdot PV.$$

□

Appendice C

Schede delle attività laboratoriali

In questa appendice sono riportate le schede utilizzate per la prima e la seconda attività in classe (vedi Capitolo 3 per un'analisi più approfondita). In particolare per la prima lezione è stata usata la scheda sull'ellissografo a filo (suddivisa in due parti distinte), mentre per la seconda lezione sono state usate le schede su parabografo a filo e parabografo di Cavalieri (ciascuna composta da tre parti differenti). Infine, per ultime sono riportate le immagini schematiche a colori necessarie per la seconda parte dell'attività sui due parabografi.

Scheda sull'ellissografo a filo

SCHEDA ATTIVITÀ 1

DATA:

GRUPPO:

PARTE 1

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni suo elemento. Come pensate si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

- II. Inserite una matita all'interno del filo ad anello e, tenendo il filo sempre in tensione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha? Assomiglia a qualche curva che già conoscete? Se sì, che cosa hanno in comune e cosa no?

III. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Completate la seguente tabella dicendo se l'oggetto in questione varia oppure no. Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete nello spazio sottostante il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate, nello spazio sotto la tabella, almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

	VARIA	NON VARIA
1. Lunghezza del filo		
2. Distanza tra i perni		
3. Distanza tra la punta della matita e la retta passante per i due perni fissi		
4. Ampiezza degli angoli delimitati dal filo teso e vertici nei due perni fissi		
5. Ampiezza dell'angolo delimitato dal filo teso e vertice nella punta della matita		
6. Distanza tra uno dei due perni e la punta della matita		
7. Somma delle distanze tra i due perni e la punta della matita		
8. Differenza delle distanze tra i due perni e la punta della matita		

- | | |
|----|----|
| 1. | 5. |
| 2. | 6. |
| 3. | 7. |
| 4. | 8. |

SCHEDA ATTIVITÀ 1

DATA:

GRUPPO:

PARTE 2

IV. Qual è la distanza massima e minima che riuscite a misurare tra il centro della curva e un punto che sta su di essa?

V. La curva tracciata ha un centro di simmetria? Ha assi di simmetria? Se sì disegnali sulla macchina.

VI. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina: immaginate di cambiare la distanza tra i due perni, ma di non cambiare la lunghezza del filo.

- Come varia la curva allontanando tra loro i perni?

- E avvicinandoli?

- Se i perni coincidessero quale sarebbe la curva tracciata?

VII. Fissate un sistema di riferimento cartesiano avente come assi gli assi di simmetria trovati nell'attività precedente e indicate con (x,y) le coordinate di un punto P del piano della macchina rispetto al sistema di coordinate. Esprimate la proprietà caratterizzante la curva in funzione di x e y .

Scheda sul parabolografo a filo

SCHEDA ATTIVITÀ 2A

DATA:

GRUPPO:

PARTE 1

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

- II. Mantenendo il filo teso e accostato all'asta verticale della macchina con la punta di una matita, fate scorrere il lato orizzontale della macchina sulla guida rettilinea vincolata al piano del modello. Ripetete ora lo stesso procedimento posizionando la squadra a sinistra del perno centrale fissato al piano. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

- III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

- IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc.).
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

SCHEDA ATTIVITÀ 2A

PARTE 2

GRUPPO:

V. Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

VI. Quanto è lungo il filo che compone la macchina, misurato partendo dal punto verde al punto rosa? Quanto è lunga l'asta arancione nella macchina, misurata partendo dal punto verde a quello giallo? Misurateli e confrontateli.

VII. Misurate la distanza sulla macchina tra il punto celeste e la retta nera. Poi quella tra il punto celeste e il punto rosa. C'è una relazione tra queste due distanze? Se sì, scrivetela.

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a giustificare perché è valida.

IX. In caso aveste risposto affermativamente al punto VII, provate a tradurre tale relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento per voi più comodo.

SCHEDA ATTIVITÀ 2A

PARTE 3 (FACOLTATIVA)

GRUPPO:

X. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina:

- Cambiate il perno sul quale è agganciato il filo nell'asta verticale della macchina. Come cambia la curva tracciata?

- Come cambierebbe la curva avvicinando sempre di più il punto rosa alla retta nera? Provate a pensarci e fate delle ipotesi.

Scheda sul parabolografo di Cavalieri**SCHEDA ATTIVITÀ 2B****DATA:****GRUPPO:****PARTE 1**

- I. Fate un disegno schematico della macchina e descrivetela in ogni sua parte. Come pensate che si possa utilizzare? Fate delle ipotesi sul suo funzionamento e riportatele sul foglio.

II. Inserite una mina all'interno del portamine e, applicando una leggera pressione, tracciate la curva. Provate a descrivere con parole vostre quale tipo di curva è stata realizzata: che forma ha?

III. Quali differenze e quali similitudini riuscite a trovare con le curve che già conoscete? Elencatele qui sotto.

- IV. Che cosa rimane costante e cosa no durante il movimento della macchina? Realizzate un elenco in cui per ogni oggetto considerato specificate se questo varia oppure no (osservate in particolare segmenti, angoli, lunghezze, ecc).
Se ritenete che l'oggetto non vari, misuratelo e scrivete affianco il suo valore. Se invece pensate che vari, riportate almeno due valori diversi dello stesso oggetto.

SCHEDA ATTIVITÀ 2B

PARTE 2

GRUPPO:

V. Fissate la mina in un punto preciso.

Individuate a quali elementi corrispondono sulla macchina gli oggetti colorati nel disegno, poi elencateli di seguito, spiegando con parole vostre a cosa corrisponde ciascun colore.

VI. Considerate tutti i triangoli che compongono la figura: misurate sulla macchina tutti gli elementi che li formano (in particolare lati, angoli, ecc.).
Spostate la mina e ripetete le misurazioni. Cosa notate?

VII. Calcolate l'area del quadrato di lato celeste e l'area del rettangolo con lati verde e rosso. C'è una relazione tra queste due aree? Se sì, scrivetela.

VIII. Se avete trovato una relazione al punto precedente, provate a dimostrare perché è valida.

IX. Provate a tradurre questa relazione in un'equazione cartesiana, scegliendo il sistema di riferimento a voi più comodo.

SCHEMA ATTIVITÀ 2B

PARTE 3 (FACOLTATIVA)

GRUPPO:

X. Ragionate sulle possibili modifiche alla macchina.

- Provate a modificare la lunghezza del lato rosso. Come diventerebbe la curva rispetto alla prima che avete disegnato?

- Come cambierebbe la curva tenendo fissi i lati rosso e verde? Provate a fare delle ipotesi e riportatele sul foglio.

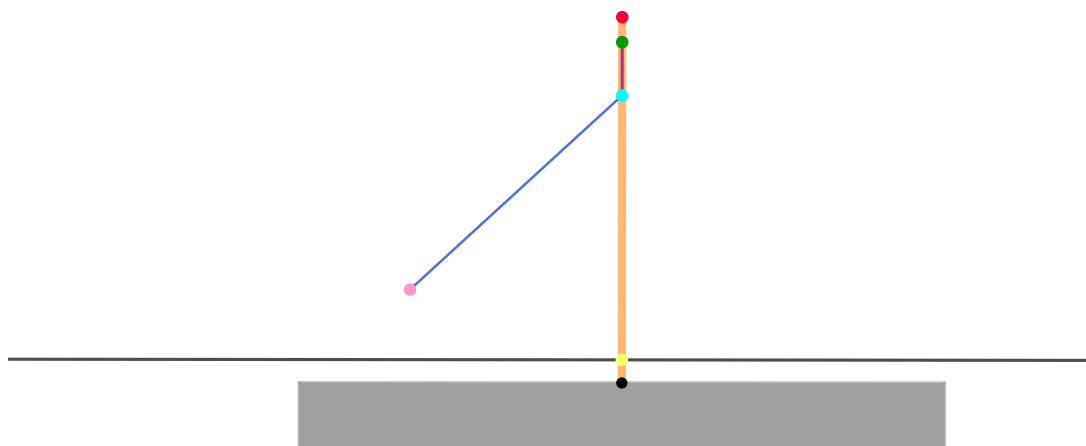


Figura C.1: Disegno a colori allegato alla scheda del parabolografo a filo.

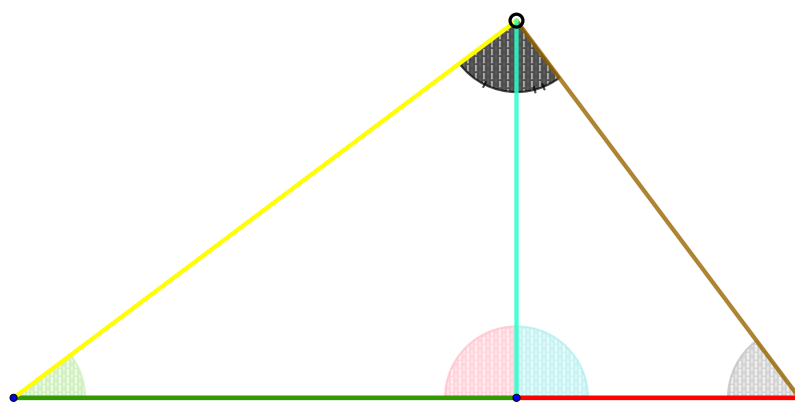


Figura C.2: Disegno a colori allegato alla scheda del parabolografo di Cavalieri.

Bibliografia

- [1] ARZARELLO, F., OLIVERO, F., PAOLA, D. E ROBOTTI, O. Dalle congetture alle dimostrazioni. Una possibile continuità cognitiva. *L’Insegnamento della matematica nelle scienze integrate 22 B* (1999), 209–233.
- [2] BARTOLINI BUSSI, M. G. Ricerca in didattica della matematica: alcuni studi italiani. *Bollettino dell’Unione Matematica Italiana IV-A* (2001), 117–150.
- [3] BARTOLINI BUSSI, M. G. E MARIOTTI, M. A. Mediazione semiotica nella didattica della matematica: artefatti e segni nella tradizione di Vygotskij. *L’Insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate 32 A-B* (2009), 270–294.
- [4] BARTOLINI BUSSI, M. G. E MASCHIETTO, M. *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Springer, 2007.
- [5] BARTOLINI BUSSI, M. G. E MASCHIETTO, M. *Scienze e tecnologie in Emilia-Romagna*. Tecnodid editrice, 2010.
- [6] BELLÉ, R. E NAPOLITANI, P. D. Le sezioni coniche dei Greci. https://web.math.unifi.it/archimede/note_storia/Belle-Napolitani-Coniche.pdf, Progetto Lauree Scientifiche (PLS).
- [7] BOERO, P. Cognitive unity of theorems, theories and related rationalities. In *CERME 10* (Dublino, 2017), hal-01873224.
- [8] BOERO, P. E PLANAS, N. Habermas’ construct of rational behavior in mathematics education. In *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vancouver, 2014), vol. 1, pp. 228–235.

- [9] BOERO, P., GARUTI, R., LEMUT, E. E MARIOTTI, M. A. Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. In *Proceedings of the 20th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Valencia, 1996), vol. 2, pp. 113–120.
- [10] BROUSSEAU, G. Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9 (1990), 309–336.
- [11] DEDÒ, M. E DI SIENO, S. Laboratorio di matematica: una sintesi di contenuti e metodologie. *La Matematica nella Società e nella Cultura (I) VI* (2013), 321–342.
- [12] DESCARTES, R. *Discours de la méthode pour bien conduire la raison, et chercher la vérité dans les sciences. Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie, qui sont des essais de cete Methode*. Imprimerie de Ian Maire, 1637.
- [13] DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA – UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI FERRARA. Apollonio di Perga. <http://dm.unife.it/storia/Apolloni.htm>.
- [14] FABRI, E. Che cos'è il rigore logico in fisica? <https://www.lanaturadellecose.it/didattica-32/1-esperienza-di-zuoz-la-preparazione-399/che-cosa-e-il-rigore-logico-in-fisica-459.html>.
- [15] HABERMAS, J. *On the pragmatics of communication*. The MIT Press, 1998.
- [16] HOPCROFTT, J., JOSEPH, D. E WHITESIDE, S. Movement Problems for 2-dimensional Linkages. *SIAM Journal on Computing* 13 (1984), 610–6129.
- [17] KAPOVICH, M. E MILLSON, J. Universality theorem for configuration spaces of planar linkages. *Topology* 41 (2002), 1051–1107.
- [18] KEMPE, A. On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork. *Proceedings of the London Mathematical Society* 7 (1876), 213–126.
- [19] KOENIGS, G. *Leçons de cinématique professées a la Sorbonne*. Éditions Hermann, 1897.

- [20] MARCHINI, C. *Appunti di Geometria classica. Capitolo V - L'opera di Apollonio di Perge*. Università degli studi di Parma, <http://old.unipr.it/arpa/urdidmat/Amici/GeoClassCap5.pdf>, 2005/06.
- [21] MARIOTTI, M. Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics* 44 (2001), 25–53.
- [22] MIUR. Indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento. http://www.indire.it/lucabas/lkmw_file/licei2010/indicazioni_nuovo_impaginato/_decreto_indicazioni_nazionali.pdf.
- [23] MIUR, UMI E SIS. Matematica 2003 - attività didattiche e prove di verifica per un nuovo curriculum di matematica. <https://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/secondo-ciclo/>.
- [24] PEDEMONTE, B. *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 2002.
- [25] PEIRCE, C. *The Collected Papers of Charles Sanders Peirce, Vol. II: Elements of Logic*. Harvard University Press, 1960.
- [26] RIVOLA, A. *Dispense del corso in Meccanica e Dinamica delle macchine LM*. Università degli Studi di Bologna - Scuola di Ingegneria e Architettura, http://diem1.ing.unibo.it/mechmach/rivola/forli/mdm/MDM_1516_Programma_Esercitazioni.pdf, 2017-18.
- [27] TOULMIN, S. E. *The uses of argument*. Cambridge University Press, 2003.
- [28] VIOLA, T. Il contributo di Keplero alla teoria delle coniche. http://www.mathesisnazionale.it/mathesisbcp/archivio-storico-articoli-mathesis/68_83.pdf.

Ringraziamenti

Dalla *scuola*, che ha occupato gran parte della mia vita, ho imparato tante cose: ho imparato ad essere sempre puntuale, precisa e organizzata, in tutte le cose che faccio, senza lasciare mai nulla al caso. Ho imparato a rispettare tutti e ad essere gentile con le persone anche quando non si ha voglia, perché l'educazione fa bene al mondo. Ho imparato che per raggiungere i propri obiettivi bisogna faticare ed essere determinati, perché le soddisfazioni sono tanto più grandi quanto più duro è il percorso fatto per raggiungerle. Ho anche imparato che tutto ha un significato e che ogni piccola cosa ti servirà a costruire la persona che sarai in futuro. Ho imparato che la cultura ti plasma, ti forma e ti realizza, e che di imparare non si finisce mai.

Ho capito che la matematica mi piace così tanto forse perché, in fondo, è un po' come me: fredda all'esterno e profonda all'interno, e solo chi ha – tanta – pazienza di conoscerla a fondo e da vicino è in grado di apprezzarne davvero il contenuto.

Anche la *vita* mi ha insegnato tanto: mi ha insegnato che viaggiare è il regalo più bello che tu possa fare a te stessa, perché ti apre la mente, ma anche che tornare a casa è la sensazione migliore che si possa provare. Mi ha insegnato che nei rapporti spesso si sbaglia, ma non è mai troppo tardi per rimediare.

Mi ha insegnato che ci sono momenti in cui non hai altra scelta se non l'essere coraggiosa perché ti mette davanti delle sfide più grandi di te, ma che alla fine, con una buona dose di fiducia, tutto si supera. Mi ha insegnato a crescere in fretta e a diventare responsabile prima degli altri, e mi ha fatto capire che la sensibilità l'ho presa da mamma e la forza da papà. Mi ha insegnato che la vita va affrontata a muso duro, ma con il sorriso sulle labbra.

Mi ha insegnato a sapermi ascoltare e a stare da sola, ma anche a saper condividere la vita con le persone giuste per me.

E quindi grazie a quelle persone, che ci sono da sempre, da qualche anno o da pochi mesi. A chi c'è da lontano, da vicino e a chi non c'è più. Agli amici, ai parenti e alla famiglia. Grazie per non essere solo la cornice della mia vita, ma parte essenziale di essa.

Un sentito grazie va, inoltre, alla Prof.ssa Alessia Cattabriga, che con la sua immensa disponibilità e pazienza, mi ha guidato lungo tutto il percorso di stesura di questa tesi, senza lasciare mai nulla al caso. Il suo entusiasmo e le sue innumerevoli idee sono state l'ingrediente necessario, insieme alla sua competenza ed estrema precisione, alla realizzazione di questo progetto e mi hanno permesso di concludere questo percorso universitario nel migliore dei modi.