

**SCUOLA DI SCIENZE**  
**Dipartimento di Fisica e Astronomia**  
**Corso di Laurea in Astronomia**

# Parametri cosmologici e loro determinazione

Tesi di Laurea

**Presentata da:**  
**Angelo Zaccardi**

**Relatore:**  
**Chiar.mo Prof.**  
**Daniele Dallacasa**

Sessione III  
Anno Accademico 2018/2019

# Indice

<b>1</b>	<b>Cosmologia Relativistica</b>	<b>1</b>
1.0.1	Equazioni di Friedmann . . . . .	2
1.0.2	Redshift Cosmologico . . . . .	4
1.0.3	Modelli di Universo . . . . .	4
1.0.4	Modello $\Lambda$ CDM . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Determinazione dei parametri cosmologici</b>	<b>8</b>
2.0.1	Distanza di luminosità e modulo di distanza . . . . .	8
2.0.2	Candele standard: le supernovae Tipo Ia . . . . .	9
2.0.3	Distanza di luminosità in cosmologia . . . . .	11
2.0.4	Vincolare i parametri cosmologici del modello $\Lambda$ CDM . . . . .	12
2.0.5	Considerazioni e conclusioni finali . . . . .	14

## Sommario

In questa tesi si vogliono discutere in maniera generale alcuni parametri cosmologici fondamentali. Nella prima parte si vedrà come si possono derivare analiticamente le equazioni di Friedmann (sotto le opportune ipotesi di universo omogeneo e isotropo) e come da esse si possono ricavare alcuni dei parametri più importanti. Si presentano inoltre alcuni modelli di Universo e una breve introduzione al modello  $\Lambda$ CDM. Nella seconda sezione, introdotto il concetto di candele standard e di distanza di luminosità, si vuole, tramite le Supernovae di Tipo Ia (rese candele standard attraverso una opportuna "standardizzazione"), ricavare empiricamente i parametri di densità di materia  $\Omega_m$  ed energia oscura  $\Omega_\Lambda$  e la costante di Hubble  $H_0$ , e questo sarà possibile mettendo in relazione il modulo di distanza ed il redshift cosmologico, per vincolare i parametri cosmologici e riprodurre teoricamente una funzione che approssima al meglio i dati osservativi. Si concluderà infine con considerazioni riguardo le conclusioni derivate in merito.

# Capitolo 1

## Cosmologia Relativistica

Per iniziare al meglio la trattazione, per prima cosa bisogna mettersi nelle condizioni adatte affinché si possano ricavare le equazioni di Friedmann dalle equazioni di campo di Einstein. Per fare ciò si introduce il concetto di **Principio Cosmologico**, il quale si può riassumere attraverso due seguenti principi di invarianza spaziale:

- La prima invarianza è l'isomorfismo per traslazioni, l'**omogeneità** dell'Universo. Nel regno della cosmologia, l'omogeneità corrisponde a pensare le galassie, e più in generale la massa, distribuite uniformemente nell'Universo. Questa uniformità risulta indipendente dalla posizione che si sceglie per fare le osservazioni. Quindi una traslazione da una galassia ad un'altra lascerebbe invariata la distribuzione galattica osservata.
- Il secondo principio è l'isomorfismo per rotazioni, l'**isotropia** dell'Universo. Una maniera semplice di illustrare il concetto di isotropia consiste nell'affermare che non esistono direzioni privilegiate nello spazio, come il Nord o il Sud. L'isotropia implica evidentemente l'omogeneità, ma non è vero l'inverso.

La metrica che soddisfa bene il Principio Cosmologico è la metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (1.1)$$

in cui  $a(t)$  è il *fattore di scala*,  $r$  è la *coordinata radiale comovente* mentre  $k$  è la *costante tricotomica di curvatura dello spazio*, chiamata così perchè può assumere solo tre possibili valori, per cui:

- $k=1$  rappresenta un Universo Sferico
- $k=0$  rappresenta un Universo Euclideo
- $k=-1$  rappresenta un Universo Iperbolico

Per trovare le equazioni del moto che descrivono il comportamento dell'Universo bisogna usare la metrica RW e le equazioni di Einstein che seguono:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \frac{\Lambda g_{\mu\nu}}{c^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

dove  $R_{\mu\nu}$  è il tensore di curvatura di Ricci,  $R$  è la curvatura scalare,  $g_{\mu\nu}$  è il tensore metrico,  $\Lambda$  è la costante cosmologica (aggiunta in seguito da Einstein stesso)

per rendere l'Universo statico, poichè dalla sua stessa teoria deriva un Universo dinamico, inconcepibile a quei tempi), ed infine  $T_{\mu\nu}$  è il Tensore Energia-Impulso per un fluido perfetto:

$$T_{\mu\nu} = -pg_{\mu\nu} + (\rho c^2 + p)u_\mu u_\nu \quad (1.3)$$

dove il tensore  $u$  rappresenta la *quadrivelocità*.

### 1.0.1 Equazioni di Friedmann

Dalla assunzione di un fluido perfetto (senza effetti di viscosità e dissipazione), risolvendo le equazioni di Einstein nelle ipotesi di omogeneità e isotropia, si ha che le uniche equazioni non nulle in entrambi i membri sono quelle per cui  $\mu = \nu$ ; quando  $\mu = 0$  si ottiene l'equazione:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) \quad (1.4)$$

mentre quando  $\mu = 1, 2, 3$  si ottiene per isotropia un'unica equazione:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{a^2}\right) = 4\pi G(\rho - p). \quad (1.5)$$

Sfruttando la (1.4) per eliminare il termine in  $\ddot{a}$  nella (1.5) si ricavano le **Equazioni di Friedmann-Lemaitre**<sup>1</sup>:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}, \quad (1.6)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \quad (1.7)$$

dove è stato definito il **Parametro di Hubble** come:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (1.8)$$

Da notare immediatamente è il fatto che questo parametro è una costante spaziale ma non temporale, infatti si nota la dipendenza temporale rispetto al fattore di scala  $a(t)$ .

Inoltre la derivata seconda del fattore di scala  $\ddot{a}$  ci indica che è possibile ottenere un'espansione dell'Universo accelerata se positiva, oppure decelerata se negativa; infatti le osservazioni astronomiche forniscono generalmente questa misura attraverso il **Parametro di decelerazione**:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} \quad (1.9)$$

Possiamo anche ricavare una riformulazione dell'Equazione di Friedmann grazie alla definizione di un nuovo parametro, adimensionale, ovvero il **Parametro di densità**:

$$\Omega = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c} \quad (1.10)$$

---

<sup>1</sup>In generale la prima equazione è conosciuta come *Equazione di Friedmann* mentre la seconda come *Equazione dell'accelerazione*

dove è stata definita la **densità critica** come:

$$\rho_c = \frac{3H^2(t)}{8\pi G} \quad (1.11)$$

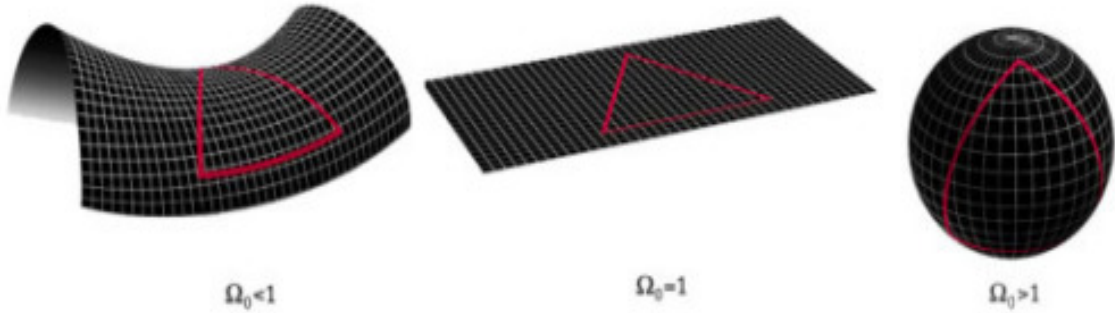
che è la densità tale da rendere l'Universo un sistema chiuso. Da notare anche qui che la densità critica non è una costante ma dipende dal valore del parametro di Hubble al tempo stimato.

Sostituendo nella (1.6) si ottiene:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \quad (1.12)$$

Questo tipo di riformulazione mette in risalto la relazione che vige tra la costante di curvatura e la densità di energia dell'Universo, infatti si possono distinguere tre situazioni differenti (già affrontate precedentemente), da come si può vedere anche in figura 1.1:

- $\rho < \rho_c \iff \Omega < 1 \iff k < 0 \implies$  Universo Aperto
- $\rho = \rho_c \iff \Omega = 1 \iff k = 0 \implies$  Universo Piatto
- $\rho > \rho_c \iff \Omega > 1 \iff k > 0 \implies$  Universo Chiuso



**Figura 1.1:** Curvatura dello spazio

Si ricorda inoltre che:

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (1.13)$$

in cui rispettivamente si indicano con  $\Omega_m$  il contributo di materia (barionica e oscura) e con  $\Omega_\Lambda$  il contributo di energia oscura nell'Universo. Questo parametro quindi è di fondamentale rilevanza in quanto determina la curvatura dell'Universo. Infatti se si misura il parametro di densità al tempo attuale  $\Omega_0$ , la costante di Hubble al tempo attuale  $H_0$ <sup>2</sup> e, definendo per convenzione il fattore di scala al tempo attuale  $a_0 = 1$ , si può ricavare la costante di curvatura dalla (1.14):

$$k = H_0^2(\Omega_0 - 1) \quad (1.14)$$

---

<sup>2</sup>Si ricaverà nel prossimo capitolo quale valore viene ricavato dalle osservazioni per questi parametri

Con queste nuove definizioni si può riformulare anche il parametro di decelerazione come segue:

$$q = \frac{\Omega_m}{2} - \Omega_\Lambda \quad (1.15)$$

### 1.0.2 Redshift Cosmologico

Un altro parametro molto importante in cosmologia è il cosiddetto **redshift**  $z$ . Come noto dall'*effetto Doppler*, una sorgente luminosa che invia il suo segnale elettromagnetico e si muove verso l'osservatore fa sì che la lunghezza d'onda del segnale diminuisca, spostandosi cioè verso il blu (*blueshift*), altrimenti, se la sorgente si allontana, la lunghezza d'onda aumenta, spostandosi cioè verso il rosso (*redshift*). Questo tipo di effetto è tipicamente misurabile dallo *spettro di luce*, che riporta il flusso osservato in funzione della lunghezza d'onda. Nel caso cosmologico il redshift è provocato da un fenomeno simile all'effetto Doppler: dipende infatti dall'attuale espansione dell'Universo (come si evince dalle osservazioni): questo fa sì che tra l'osservatore ed altre sorgenti si venga a formare nuovo spazio col passare del tempo. La conseguenza è che la velocità con cui si vedono queste sorgenti allontanarsi aumenta con l'aumentare della distanza e questo produce quindi uno spostamento verso il rosso, detto però *redshift cosmologico*, perchè causato dall'allontanamento tra due oggetti per effetto dell'espansione dell'Universo. Da qui è possibile definire il redshift come

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{v_r}{c}. \quad (1.16)$$

Nel 1929 Hubble grazie a questo parametro e ai suoi studi trovò una relazione lineare chiamata *Legge di Hubble-Lemaitre*:

$$v = H_0 D \quad (1.17)$$

in cui  $H_0$  è il parametro di Hubble descritto in precedenza, il cui valore attuale corrisponde all'incirca a  $70 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ . Si può ricavare inoltre abbastanza facilmente, sfruttando la legge di Hubble, la correlazione che vige tra il *redshift* e il *fattore di scala*:

$$z = \frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{HD}{c} = \frac{\dot{a} D}{a c} = \frac{\dot{a}}{a} \Delta t = \frac{\Delta a}{\Delta t} \frac{\Delta t}{a} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_0 - a}{a} = \frac{1}{a} - 1 \quad (1.18)$$

per cui si ricava che:

$$a = (1 + z)^{-1} \quad (1.19)$$

### 1.0.3 Modelli di Universo

Le equazioni di Friedmann risultano di vitale importanza per ricavare il comportamento dell'Universo. Si può infatti definire una generale equazione di stato come:

$$p = w\rho c^2 \quad (1.20)$$

tale che a seconda della componente costituente l'Universo si scelga, il parametro  $w$  assumerà valori differenti.

Infatti se si considera un Universo di **polveri** si ottiene che  $w = 0$  e quindi  $p = 0$ . La densità ha un andamento che va come

$$\rho \propto a^{-3} \quad (1.21)$$

mentre per trovare l'evoluzione dell'Universo bisogna considerare tre diversi casi a seconda di come si assume la costante  $k$  (vedere figura 1.2):

- se  $k = 0$  ( $\Omega_0 = 1$ ) si ottiene l'*Universo di Einstein-de Sitter* o *Universo piatto* in cui si ottiene che il raggio dell'Universo va come :

$$a \propto t^{2/3}; \quad (1.22)$$

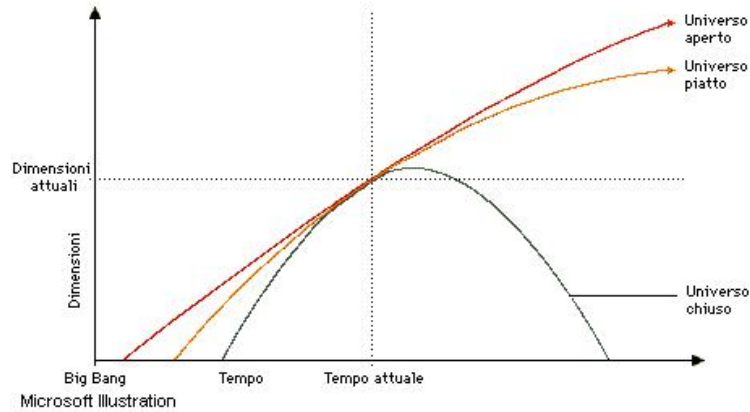
- se  $k = 1$  ( $\Omega_0 > 1$ ) si ottiene un *Universo chiuso*, cioè avrà una soluzione di tipo cicloide;

- se  $k = -1$  ( $\Omega_0 < 1$ ) si ottiene un *Universo aperto* in cui si possono avere due differenti andamenti: per  $a \rightarrow 0$  si ottiene

$$a \propto t^{2/3} \quad (1.23)$$

mentre per  $a \rightarrow \infty$  si ricava

$$a \propto t \quad (1.24)$$



**Figura 1.2:** I tre tipi di evoluzione dell'Universo di polveri.

Se invece si prendono i **fotoni** si avrà  $w = \frac{1}{3}$  e  $p = \frac{\rho c^2}{3}$  con una densità proporzionale a

$$\rho \propto a^{-4} \quad (1.25)$$

e si trova inoltre un'evoluzione dell'Universo con andamento

$$a \propto t^{1/2} \quad (1.26)$$

imponendo  $k = 0$ .



### 1.0.4 Modello $\Lambda$ CDM

Considerando come costituente principale l'**energia oscura**, un'energia associata al vuoto, si ha che  $w = -1$  e quindi  $p = -\rho c^2$ , la densità mostra un profilo costante:

$$\rho \propto a^0 \quad (1.27)$$

e quindi questa forma di energia deve essere prodotta in maniera continua in modo tale da essere sempre costante anche se l'Universo si espande. In questo caso si deriva un andamento evolutivo esponenziale:

$$a \propto e^{t/\tau}. \quad (1.28)$$

In questo contesto si può notare che in questo caso la costante di Hubble diventa davvero una costante, infatti si ha:

$$H(t) \propto \frac{e^{t/\tau}}{e^{t/\tau}} = \text{costante} \quad (1.29)$$

Nel caso dei modelli di Universo precedenti si poteva definire un *tempo cosmologico*, o *tempo di Hubble*, facendo l'inverso della costante di Hubble

$$t_H = \frac{1}{H(t)} \quad (1.30)$$

mentre in questo modello non è più possibile fare questa determinazione proprio perchè  $H$  diventa una costante.

Questo tipo di modello di Universo viene definito come **Modello  $\Lambda$ CDM** (CDM sta per *Cold Dark Matter*, ossia Materia Oscura Fredda;  $\Lambda$  indica l'energia oscura), ed è indicato come l'attuale *Modello Standard della cosmologia*, poichè è quello che riproduce in modo più soddisfacente le osservazioni in ambito cosmologico, spiegando in particolare le osservazioni della *radiazione cosmica di fondo (CMB)*, della *struttura a grande scala dell'Universo* e delle *supernovae* che indicano un Universo in *espansione accelerata*.

Esso prevede un Universo piatto ( $\Omega=1$ ) i cui elementi costitutivi sono:

- la *costante cosmologica*  $\Lambda$ , che, come detto, è l'energia oscura rappresentata dall'energia del vuoto, la quale spiegherebbe l'espansione accelerata dell'Universo e costituirebbe circa il 68% della densità di energia in esso contenuta;
- la *materia oscura fredda*, che è il concetto di materia oscura termalizzata, non barionica e non collisionale. Questa componente rappresenterebbe il 27% circa della densità di energia dell'Universo;
- i *barioni* (costituenti i pianeti, le stelle e le nubi di gas) e i *fotoni*, che rappresenterebbero solo il rimanente 5% circa di tutta la massa-energia esistente;
- i *neutrini*, ma il loro contributo è talmente basso che di solito si usa ometterli, o inglobarli assieme al contributo dato dalla radiazione.

Per cui si ha che:

$$\Omega = \Omega_{DM} + \Omega_b + \Omega_\gamma + \Omega_\nu + \Omega_\Lambda \quad (1.31)$$

Dallo studio di questo modello (vedere figura 1.3) si può trovare che l'evoluzione dell'Universo affronta diverse fasi, a seconda dell'epoca che si considera: nei primi istanti di vita dell'Universo domina l'*inflazione cosmologica*, in seguito (fino a redshift  $z \sim 10000$ ) domina l'Universo di fotoni, o di radiazione, tuttavia la durata è limitata essendo che con l'espansione l'energia dei fotoni diminuisce; dopodiché arriva la fase di Universo dominato dalla materia, il quale si protrae fino a redshift relativamente bassi,  $z \sim 0.7$ ; infine si giunge all'epoca in cui domina l'energia oscura, la quale, nonostante abbia una densità di energia relativamente bassa, mantenendosi costante nel tempo, inizia ad essere predominante quando le altre componenti iniziano a diminuire la loro densità assieme all'espansione dell'Universo, ed in questo caso la costante di Hubble tende ad un valore soglia pari a  $H_0 \sim 59 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ .

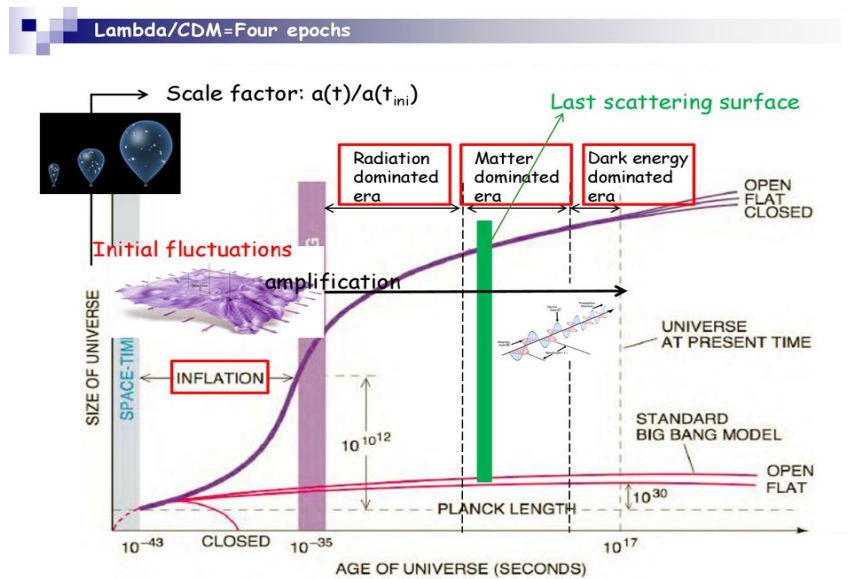


Figura 1.3: Epoche del modello  $\Lambda$ CDM.

La determinazione dei parametri cosmologici risulta fondamentale per descrivere l'evoluzione dell'Universo in questo tipo di modello, per cui si cercano di sviluppare sempre più metodi di osservazione diversi per calcolare questi valori e cercare quindi di ridurre al minimo gli eventuali errori di misurazione. Qui di seguito si elencano alcuni tra i parametri fondamentali che compongono il modello  $\Lambda$ CDM:

- $H_0 \sim 69.5 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , parametro di Hubble
- $\Omega_b \sim 0.05$ , densità barionica
- $\Omega_m \sim 0.30$ , densità di materia (barioni più materia oscura)

Da questi si possono poi "derivare" altri parametri, come:

- $\Omega_\Lambda \sim 0.699$ , densità di energia oscura
- $\rho_0 \sim 0.91 \cdot 10^{-26}$ , densità critica
- $q_0 \sim -0.55$ , variazione di velocità
- $t_0 \sim 13,55 \cdot 10^9 \text{ yr}$ , età dell'universo.

# Capitolo 2

## Determinazione dei parametri cosmologici

In questa parte si cerca di determinare alcuni parametri cosmologici fondamentali, quali la costante di Hubble, le densità di energia oscura e di materia dell'Universo, attraverso le SNe Type Ia, in modo da calcolare il parametro di decelerazione  $q_0$  per verificare se effettivamente l'universo è in una fase di espansione accelerata, e la densità di energia totale, dalla quale si può determinare la geometria dello spazio. Tuttavia bisogna innanzitutto definire la distanza di luminosità sia in generale che in ambito cosmologico, e introdurre anche il meccanismo di produzione di una Supernova di Tipo Ia.

### 2.0.1 Distanza di luminosità e modulo di distanza

Si parte dall'assumere che una determinata sorgente abbia una luminosità intrinseca, che si denota con  $L$ : essa rappresenta la quantità di energia emessa nel tempo (la potenza). Tuttavia, per effetto della distanza, non si misura direttamente la luminosità della sorgente ma il flusso osservato, ovvero la luminosità  $L$  distribuita su una superficie sferica con raggio  $d_L$ , ovvero la distanza tra sorgente ed osservatore:

$$F = \frac{L}{4\pi d_L} \quad (2.1)$$

Da questa relazione si può ottenere la definizione di *distanza di luminosità*:

$$d_L = \sqrt{\frac{L}{4\pi F}} \quad (2.2)$$

A questo punto, avendo il flusso osservato, può essere convertito in una *magnitudine* apparente  $m$  tramite la *Legge di Pogson*:

$$m = -2.5 \log\left(\frac{F_{obs}}{F_0}\right)^1 \quad (2.3)$$

Facendo lo stesso per una *magnitudine assoluta*  $M$ , corrispondente al flusso osservato per la stessa sorgente ma posta ad una distanza dall'osservatore pari a 10

---

<sup>1</sup> $F_0$  è il flusso di una stella avente magnitudine  $m = 0$ , il punto di riferimento per le magnitudini è la stella *Vega*

parsec<sup>2</sup>, è possibile esprimere la magnitudine apparente in funzione della distanza di luminosità e della magnitudine assoluta secondo la legge

$$m(z) = M + 5\log_{10}\left(\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}}\right) + 25 \quad (2.4)$$

dove si è resa esplicita la dipendenza in funzione del *redshift* delle grandezze.

Se ora si porta  $M$  al primo membro si può introdurre il *modulo di distanza* in funzione di  $z$ , definito come

$$\mu(z) = 5\log_{10}\left(\frac{d_L(z)}{1\text{Mpc}}\right) + 25 \quad (2.5)$$

Questo parametro è fondamentale nella misura delle distanze di sorgenti di cui è nota la magnitudine assoluta  $M$ , poichè equivale a conoscere la luminosità intrinseca  $L$  ed automaticamente la distanza di luminosità tramite la magnitudine apparente, quest'ultima facilmente misurabile. Se si avesse la magnitudine assoluta  $M$  della sorgente il problema sarebbe già risolto, ma le cose nella realtà non sono così semplici! Come è intuibile infatti, la luminosità intrinseca  $L$  non è conosciuta a priori perchè non si conosce a che distanza la sorgente viene posta rispetto all'osservatore senza altri elementi a disposizione. Tuttavia esistono delle particolari sorgenti, note come *candele standard*, in cui la luminosità intrinseca è un valore ben preciso conosciuto tramite processi fisici noti, e che non cambia al variare della sorgente considerata.

## 2.0.2 Candele standard: le supernovae Tipo Ia

Le candele standard più conosciute in ambito cosmologico sono un tipo particolare di *Supenovae*, ovvero le già citate **SNe Tipo Ia**. Esse non sono da confondere con un'altra classe di supernovae, le SNe Tipo II. Quello che basta sapere in questa trattazione è che le SNe Tipo Ia sono prodotte dall'esplosione di una *nana bianca*, attualmente ritenute originate da stelle AGB di massa intermedia presenti in sistemi binari, se le condizioni orbitali sono opportune, ad un certo punto la stella compagna, nella fase di Gigante Rossa, inizia a trasferire materia alla nana bianca attraverso i lobi di Roche. L'idrogeno accumulato in superficie e proveniente dalla stella compagna, quando raggiunge la temperatura di combustione, viene trasformato in  $He^4$  e di seguito in  $C^{12}$  e  $O^{16}$ . Ciò provoca inevitabilmente un aumento di massa degenerare nella nana bianca che, superato il limite di Chandrasekhar di  $1.44M_{\odot}$  e dando origine alla combustione di carbonio in ambiente degenerare, provoca l'esplosione. Le SNe Ia presentano una curva di luce con un profilo facilmente riconoscibile e tipico: emettono gran parte della loro luminosità nell'ottico.

Vi sono due diversi modelli che descrivono al meglio il fenomeno:

- *modello a doppia degenerazione*, in questo caso il sistema è formato da due nane bianche<sup>3</sup>;
- *modello a singola degenerazione*, insieme alla nana bianca vi è un'altra stella.

---

<sup>2</sup>1 pc equivale a  $3.18 \cdot 10^{18}$  cm

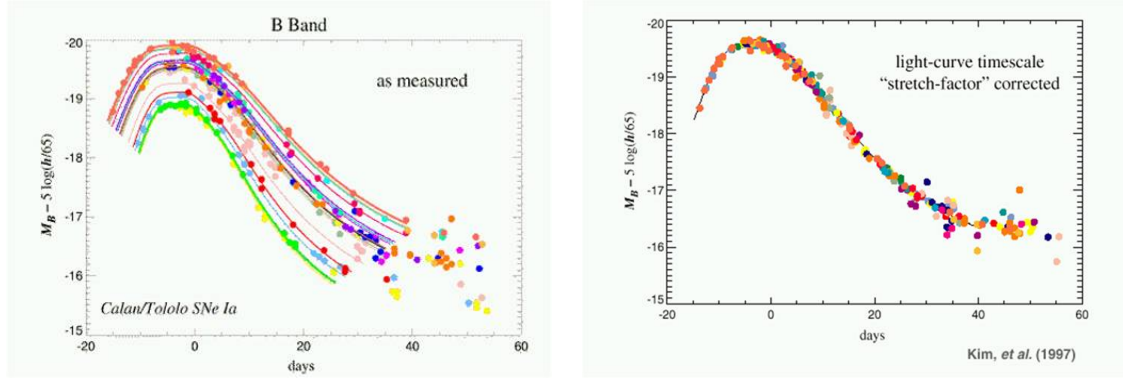
<sup>3</sup>Questi sistemi sono tuttavia abbastanza rari.

Ciò che fisicamente ha una utilità pratica è la cosiddetta *curva di luce bolometrica*. Per poterla ottenere in teoria dovrebbero essere note le curve di luce a tutte le possibili bande, ma sapendo che la maggior parte del flusso emesso si trova nell'ottico, si può approssimare la curva di luce bolometrica con quella ottenuta nella banda ottica. Una volta nota la curva di luce bolometrica, è possibile determinare la luminosità del massimo, la quale rappresenta una grandezza di fondamentale importanza per determinare l'energia liberata nell'esplosione e soprattutto per utilizzare le SNe come indicatori di distanza. Attualmente i valori più accertati sulla magnitudine assoluta del massimo sono  $M_B = -19.5 \pm 0.1 \text{ mag}$  e  $M_V = -19.5 \pm 0.1 \text{ mag}$ , ai quali corrisponde una luminosità bolometrica  $L_{SN}^{bol} = 2 \cdot 10^{43} \text{ erg s}^{-1}$ . Bisogna comunque precisare che negli ultimi anni si è appurato come in effetti ci sia una non trascurabile variabilità in questi valori, tipicamente di 0.5 mag sul massimo, e che quindi è necessario prestare attenzione sui singoli campioni che si prendono in esame, senza considerare tra l'altro la presenza di casi eccezionali, come ad esempio la presenza delle cosiddette *SUB Chandrasekhar-Mass WD*, nane bianche che non raggiungono la massa limite di Chandrasekhar, per cui dopo la loro esplosione l'energia liberata è minore per questa classe di stelle. Il trigger in questo caso è l'He sedimentato sulla nana bianca in condizioni degeneri. Prima però deve essere depositato H, che deve essere convertito in He, il quale successivamente può dare inizio alla sua combustione sulla superficie della nana bianca. Questo induce una compressione interna che innesca il carbonio in ambiente degenerare. La quantità di He che occorre per fare ciò corrisponde a circa  $0.2M_{\odot}$ , ciò provoca l'esplosione della nana bianca ad una massa di circa  $0.7M_{\odot}$ , ben lontano dal limite di Chandrasekhar di  $1.44M_{\odot}$ . Tuttavia la frequenza di questi eventi è ancora tutta da dimostrare. Tale classe di stelle potrebbe però portare a errori nel calcolo delle distanze in cosmologia, essendo che presentano un picco più basso nella magnitudine assoluta e hanno un processo diverso di esplosione, e quindi a degli errori nella determinazione dei parametri cosmologici se non si dovesse accorgere della loro presenza nel set di dati a disposizione.

A partire dalla curva di luce è inoltre possibile ricavare alcune relazioni utili per avere una comprensione più dettagliata e ricca del fenomeno, quali ad esempio quelle che correlano la magnitudine del massimo a differenti caratteristiche, come in particolare il rate di decadimento della curva di luce, metodo noto come *template fitting* o  $\Delta m_{15}$ , l'intensità delle righe di Ca e Si e il tempo di crescita del picco. Una delle possibili correzioni è quella trovata da Mark Phillips nel 1993 (vedere figura 2.1) per cui le curve di luminosità di SNe Ia intrinsecamente più brillanti declinano più lentamente; questo permette di standardizzare le curve di luminosità in modo tale da ottenere una dispersione di circa il 15% nel picco di luminosità, attraverso la seguente relazione:

$$M_{max}(B) = -21.726 + 2.698\Delta m_{15}(B) \quad (2.6)$$

Inoltre bisogna tener conto anche di possibili effetti di estinzione della radiazione luminosa, la quale è molto efficace soprattutto nella banda ottica e UV, quindi oltre alla correzione delle curve di luce si deve considerare anche una correzione per effetti di estinzione. Per di più bisogna considerare la cosiddetta *correzione K*, una correzione applicata alla magnitudine (o in modo equivalente, sul flusso) di oggetti astronomici, che permette che una misurazione di una quantità di luce da un oggetto con un redshift  $z$  possa essere convertita in una misura equivalente nel sistema a riposo (rest frame) dell'oggetto.



**Figura 2.1:** Curve di luminosità di un campione di supernove Ia. A sinistra le curve di luminosità misurate senza adoperare la correzione tratta dalla relazione di Phillips, a destra le curve di luminosità dopo aver applicato la correzione

Se si misurasse tutta la luce di un oggetto in tutte le lunghezze d'onda (flusso bolometrico) non sarebbe richiesta alcuna correzione K. Lo stesso vale qualora si misuri la luce emessa in una sola linea di emissione. La necessità della correzione K sorge poiché la misurazione astronomica per mezzo di un singolo filtro o una singola banda passante vede solo una frazione dello spettro totale, il quale è affetto da redshift nel riferimento dell'osservatore. Così, se si vogliono confrontare le misurazioni attraverso un filtro rosso di oggetti a differenti redshift, l'osservatore dovrà applicare una stima delle correzioni K a queste misurazioni per poterle confrontare. La natura esatta del calcolo che deve essere applicato per compiere una correzione K dipende dal tipo di filtro usato per l'osservazione e dalla forma dello spettro dell'oggetto. Il termine "correzione K" fu coniato da Edwin Hubble, che arbitrariamente scelse K per rappresentare il fattore di riduzione in magnitudine dovuto a questo effetto.

### 2.0.3 Distanza di luminosità in cosmologia

Purtroppo in cosmologia la relazione descritta in precedenza per la distanza di luminosità deve essere corretta, in maniera tale che si tenga conto dell'espansione cosmologica. Si consideri una sorgente in un punto  $P$ , posta a distanza comovente radiale  $r$  dall'osservatore  $P_0$ . La radiazione emessa dalla sorgente al tempo  $t$  viene osservata in  $P_0$  al tempo  $t_0$ . Per descrivere la  $d_L$  bisogna tener conto di tre fattori:

- *Espansione dello Spazio-Tempo*

I fotoni arrivano meno perchè lo spazio si espande. L'area della superficie sferica centrata in  $P$  e passante per  $P_0$  al tempo  $t_0$  sarà:

$$A = 4\pi r^2 a^2(t_0) \quad (2.7)$$

- *Redshift*

I fotoni inoltre perdono energia a causa del redshift. La radiazione emessa dalla sorgente arriva all'osservatore spostata verso il rosso a causa dell'espansione cosmologica di un fattore:

$$\frac{a(t_0)}{a(t)} = 1 + z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_e} \quad (2.8)$$

Dal momento che la frequenza diminuisce, diminuisce anche l'energia dei fotoni:

$$E_{obs} = \frac{hc}{\lambda_{obs}} = \frac{hc}{\lambda_e(1+z)} = \frac{E_e}{1+z} \quad (2.9)$$

- *Dilatazione del tempo*

Si deve considerare infine l'effetto della dilatazione temporale: i fotoni emessi dalla sorgente nell'intervallo  $\delta t$  arrivano in  $P_0$  nell'intervallo

$$\delta t_0 = \frac{a(t_0)}{a} \delta t = (1+z)\delta t \quad (2.10)$$

Mettendo insieme questi tre fattori si ottiene la formula corretta per il flusso osservato di una sorgente posta alla coordinata comovente  $r$  in funzione del redshift  $z$ :

$$F = \frac{L}{4\pi r^2 a(t_0)(1+z)^2} \quad (2.11)$$

Da qui si vede facilmente che la definizione di  $d_L$  in cosmologia diventa:

$$d_L = a(t_0)(1+z)r. \quad (2.12)$$

A questo punto sorge la necessità di descrivere la  $d_L$  in funzione dei parametri cosmologici che si vuole cercare di calcolare tramite le osservazioni di Supernovae Ia: infatti la formula precedente è proprio la distanza che si misura osservando candele campione confrontando il flusso osservato con la luminosità intrinseca. Questo si può fare se si scrive la coordinata comovente radiale  $r$  in funzione del redshift. Si può dimostrare che:

$$r = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{[(1+z)^2(\Omega_m z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.13)$$

Da questa relazione e imponendo per convenzione  $a(t_0) = 1$  si ottiene finalmente la formula per la distanza di luminosità che interessa in ambito cosmologico:

$$d_L = \frac{c(1+z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{[(1+z)^2(\Omega_m z + 1) - \Omega_\Lambda z(z+2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (2.14)$$

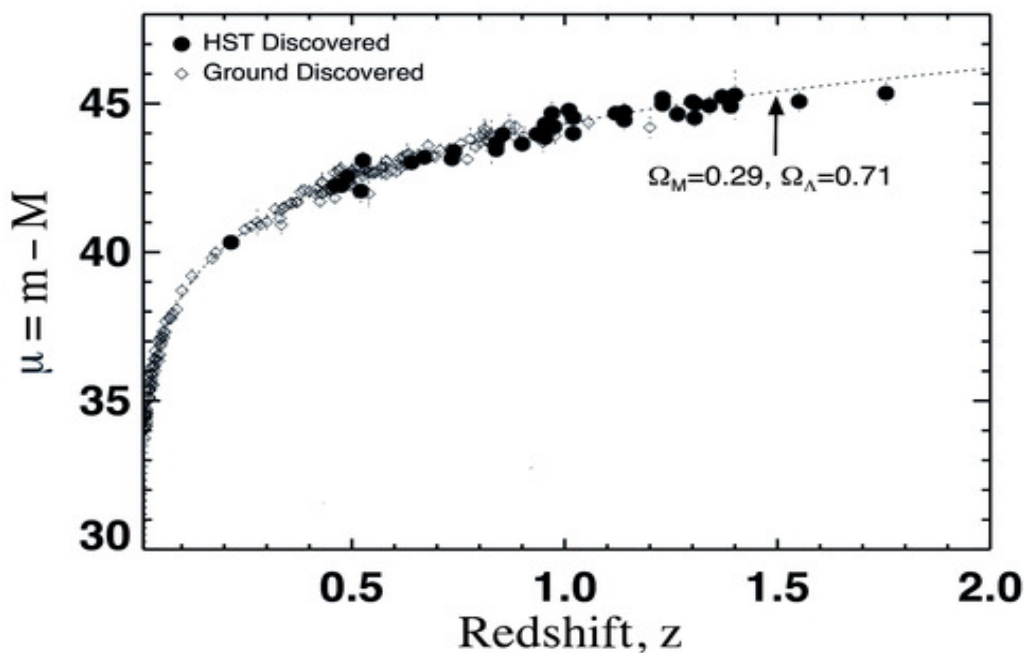
## 2.0.4 Vincolare i parametri cosmologici del modello $\Lambda$ CDM

Ricapitolando:

- si è capito cos'è il redshift cosmologico e come misurarlo
- è stata ricavata la distanza di luminosità di una sorgente con un determinato redshift ed espressa in termini dei costituenti  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  e della costante di Hubble  $H_0$
- si è identificato il tipo di sorgenti ideali per cui abbiamo noti sia il redshift che la distanza di luminosità, ovvero le SNe Tipo Ia.

questi sono gli "ingredienti" essenziali. Quindi da un lato si ha la teoria, il modello che fornisce una espressione matematica della distanza di luminosità in funzione del redshift e che la lega ai costituenti dell'Universo, e dall'altro lato si hanno i dati, cioè le distanze di luminosità ed i corrispondenti redshift di un certo numero di sorgenti luminose. L'obiettivo è quello di calibrare il modello teorico per riprodurre al meglio i dati a disposizione.

Il prossimo passo da fare è vedere come la distanza di luminosità di tali sorgenti si distribuisca in funzione dello stesso redshift.



**Figura 2.2:** Diagramma di Hubble per le SNe Type Ia. Il diagramma mostra il modulo di distanza delle supernovae in funzione del redshift delle stesse. Dalla distribuzione dei punti è possibile vincolare i parametri liberi del modello cosmologico.

Analizzando la figura 2.3, si può vedere la distanza, espressa tramite il modulo di distanza, in funzione del redshift della sorgente. I punti indicati con dei pallini (pieni per osservazioni del telescopio Hubble e vuoti per osservazioni da terra) sono un campione di SNe Tipo Ia.

Si nota anche una curva tratteggiata che passa in mezzo a questi punti, si tratta della distanza di luminosità teorica che è stata ricavata in ambito cosmologico (equazione 31). Questa distanza di luminosità è stata calcolata per i valori di  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  che meglio rappresentano tutti i dati osservativi che abbiamo a disposizione. Infatti, cambiando i valori di  $\Omega_m$  e  $\Omega_\Lambda$  la distanza di luminosità associata ad un redshift  $z$  cambia. Esiste dunque una coppia di valori per questi due parametri per cui  $d_L$  diventerà il più simile possibile alla distanza osservata con le sorgenti, rappresentata dalla posizione dei punti nel diagramma.



## 2.0.5 Considerazioni e conclusioni finali

Applicando questo procedimento per tutti i dati a disposizione si può ricavare che  $\Omega_\Lambda=0.70$  (o 70%) e  $\Omega_m=0.30$  (o 30%) circa, ed un valore della costante di Hubble odierna pari a circa  $H_0=69.5 \text{ km/s}\cdot\text{Mpc}^{-1}$ . In tal modo si è riuscito così a vincolare i parametri liberi del modello cosmologico, ottenendo cioè i valori che permettono di riprodurre i dati osservati nel migliore dei modi.<sup>4</sup> Ora, riprendendo il parametro di decelerazione  $q$  e sostituendo i valori appena ricavati si ottiene:

$$q \approx -0.55 \quad (2.15)$$

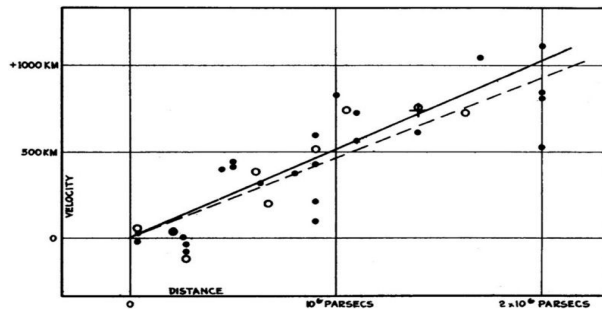
Il valore ottenuto di  $q$  indica che l'Universo sta subendo una decelerazione negativa, cioè una *accelerazione*; quindi sta andando incontro ad un'espansione accelerata. Si ottiene infine che:

$$\Omega_0 = \Omega_m + \Omega_\Lambda \cong 1 \quad (2.16)$$

e questo indica che l'Universo presenta una geometria Euclidea.

E' necessario ora fare alcune considerazioni importanti. La parte terminale del diagramma di Hubble in figura 2.2, cioè quella ad alto redshift sulla destra, rappresenta la zona più delicata perchè, come intuibile, al crescere delle distanze e del redshift diventa più complicato riuscire ad effettuare osservazioni e quindi trovare supernovae. Come visibile infatti, per redshift  $z > 1$  i punti diventano pochi, e si esauriscono rapidamente avvicinandosi a  $z = 2$ . Tuttavia, le supernovae a redshift più alto sono quelle che risentono di più dell'espansione accelerata dell'Universo, proprio perchè sono quelle più remote rispetto a noi. Questo rende queste supernovae le più critiche per calcolare il bilancio tra materia ed energia oscura, le quali giocano un ruolo opposto sull'espansione dell'Universo, dove la materia tende a frenare l'espansione mentre l'energia oscura tende ad accelerarla .

La parte iniziale del diagramma, invece, cioè quella per piccoli redshift,  $z < 0.2$ , è quella che delimita il valore della costante di Hubble al tempo odierno. Infatti, per distanze relativamente piccole (qualche decina di milioni di anni luce all'incirca) la relazione tra redshift e distanza si può approssimare ad una semplice retta, è cioè lineare, come mostra l'immagine che segue:



**Figura 2.3:** Legge di Hubble, che lega il redshift cosmologico ( $v_r = cz$ ) alla distanza delle sorgenti luminose osservate, su scale cosmologiche piccole, dell'ordine della decina di milioni di anni luce.

<sup>4</sup>Con questo procedimento Perlmutter et al. pubblicando uno studio sulle SNe Type Ia hanno vinto il premio nobel per aver scoperto l'Universo in una fase di espansione accelerata

La figura 2.3 costituisce proprio la legge di Hubble già citata in precedenza. Questo succede perchè localmente, cioè in zone relativamente vicine, l'espansione dell'Universo avviene ad un tasso pressoché costante, cioè l'accelerazione non è visibile. L'inclinazione di questa retta è il fattore di conversione tra redshift e distanza, ed è dato dalla costante di Hubble al tempo odierno  $H_0$ . Andando verso redshift più elevati la costante di Hubble non mostra più questa linearità ma dipende dal modello cosmologico che viene considerato.

Il metodo presentato viene attualmente usato per stimare i parametri cosmologici. La misura accurata di tali parametri è fondamentale per la ricerca sulle origini fisiche del nostro universo.

# Bibliografia

- [1] Peter Coles, Francesco Lucchin, *Cosmology, The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, John Wiley & Sons, LTD (2002)
- [2] Franco Vazza, *Appunti di Astrofisica Extragalattica* (2018/2019)
- [3] Andrea Cimatti, *Appunti di Astronomia* (2016/2017)
- [4] Francesco Rosario Ferraro, *Appunti di Evoluzione Stellare* (2019)
- [5] Sam Perlmutter et al., *Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 high-redshift supernovae*, The Astrophysical Journal, 517:565-586, 1999 June 1